

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Studi Magistrale in Matematica

**SISTEMI DI RADICI
PER
SUPERALGEBRE DI LIE**

Tesi di Laurea in Algebra

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Fioresi Rita

Presentata da:
Vignoli Massimiliano

Sessione II
Anno Accademico 2012/13

Introduzione

In questa tesi studiamo il ruolo dei sistemi di radici nella classificazione delle algebre di Lie e delle superalgebre di Lie. L'interesse per le superalgebre di Lie, nasce nei primi anni '70 quando una parte dei fisici si convinse che sarebbe stato più utile e molto più chiaro riuscire ad avere uno schema di riferimento unitario in cui non dovesse essere necessario trattare separatamente particelle fisiche come bosoni e fermioni. Una teoria sistematica sulle superalgebre di Lie fu introdotta da V. Kac nel 1977 che diede la classificazione delle superalgebre di Lie semplici su un campo algebricamente chiuso.

Nel primo capitolo abbiamo introdotto e illustrato il concetto di sistema di radici, definendo gli strumenti e gli oggetti essenziali come simmetrie, gruppo di Weyl, il concetto di base di un sistema di radici e ne abbiamo studiato le proprietà. Questi strumenti ci hanno portato a definire le matrici di Cartan e i diagrammi di Dynkin, che sono equivalenti. Come sappiamo i diagrammi di Dynkin risultano essere l'oggetto fondamentale e definitivo per classificare le Algebre di Lie (semisemplici su un campo algebricamente chiuso). Infatti il problema di riconoscere e classificare le algebre si riduce a un esercizio combinatorio e si osserva che esistono un numero finito di algebre di Lie semplici, e che ogni algebra di Lie semisemplice è somma di algebre di Lie semplici.

Nel secondo capitolo abbiamo introdotto la nozione di superalgebra di Lie, e ne abbiamo dato alcuni esempi, studiando in particolare le superalgebre di Lie classiche, vedendone la definizione matematica e studiandone la scomposizione in sistemi di radici. Abbiamo inoltre osservato come alcune

di quelle proprietà che caratterizzavano le algebre di Lie non risultano più essere vere per il contesto super. Ad esempio vale solo che superalgebre di Lie semisemplici con forma di Killing non degenerare sono somma di superalgebre di Lie semplici con forma di Killing non degenerare, mentre esistono superalgebre di Lie semplici con forma di Killing degenerare. Nel contesto ordinario il fatto che la Killing fosse non degenerare per algebre di Lie semisemplici era condizione sufficiente affinché si potesse scomporre in algebre di Lie semplici.

Nel terzo capitolo abbiamo enunciato il teorema di classificazione per superalgebre di Lie semplici su \mathbb{C} . Abbiamo affrontato uno dei problemi centrali della teoria sulle superalgebre di Lie, che la differenzia dalla teoria sulle algebre di Lie. Infatti, accade che ad una superalgebra di Lie possano essere associati diagrammi di Dynkin, e quindi matrici di Cartan, differenti. Il problema dipende dalla natura del gruppo di Weyl e dalla mancanza di abbastanza simmetrie. Abbiamo visto come l'introduzione da parte di Penkov e Serganova del concetto di riflessioni dispari colmi questa mancanza, ma comporti condizioni aggiuntive sui teoremi riguardanti le rappresentazioni.

Indice

Introduzione	i
1 Sistemi di radici	1
1.1 Simmetrie	1
1.2 Sistemi di radici astratti	3
1.3 Forme quadratiche invarianti	5
1.4 Basi	9
1.5 Proprietà delle basi	12
1.6 Relazioni con il gruppo di Weyl	14
1.7 Matrici di Cartan	17
1.8 Grafi di Coxeter e loro classificazione	18
1.9 Diagrammi di Dynkin	21
1.10 Sistemi di radici complessi	23
2 Superalgebre di Lie	25
2.1 Superalgebre e Superalgebre di Lie	25
2.2 Superalgebre di Lie classiche	31
2.3 La scomposizione in radici delle superalgebre di Lie classiche	38
3 Classificazione	45
3.1 Teorema di classificazione	46
3.2 Superalgebre di Lie controgradienti	46
3.3 Radici e diagrammi	48
3.4 Classificazione dei moduli irriducibili finito dimensionali	52

A Le algebre di Lie classiche

61

Capitolo 1

Sistemi di radici

In questo capitolo tratteremo i sistemi di radici astratti che vengono introdotti nella teoria di classificazione delle algebre di Lie semisemplici. Infatti, se si considerano le algebre di Lie classiche su \mathbb{C} e i sistemi di radici ad esse associati, si trova una corrispondenza con le matrici di Cartan e i diagrammi di Dynkin. Questa corrispondenza porta alla classificazione delle algebre di Lie classiche, e sfruttando le proprietà combinatorie dei diagrammi di Dynkin si sono individuati altri cinque possibili diagrammi corrispondenti a cinque algebre di Lie dette eccezionali, ottenendo così la classificazione completa delle algebre di Lie semisemplici.

I sistemi di radici sono risultati uno strumento essenziale per trasformare un problema di esistenza e classificazione in un problema combinatorio. Per questo capitolo introduttivo sui sistemi di radici astratti la nostra referenza principale sarà il lavoro di Serre [10]. Costruiremo la teoria sul campo reale, ma come vedremo nell'ultimo paragrafo si può estendere al campo complesso. Gli spazi vettoriali considerati sono tutti finito-dimensionali e reali.

1.1 Simmetrie

Sia V uno spazio vettoriale e α un elemento di V diverso da 0. Definiamo cosa si intende per *simmetria di vettore* α .

Definizione 1.1. Si definisce una *simmetria di vettore* α un qualsiasi automorfismo di V che soddisfa le seguenti condizioni

(i) $s(\alpha) = -\alpha$

(ii) L'insieme H di elementi di V fissati da s è un iperpiano di V

H è un complemento per la retta $\mathbb{R}\alpha$ cioè $V = H \oplus \text{span}\{\alpha\}$, e s ha ordine 2. La simmetria s è completamente determinata dalla scelta di $\mathbb{R}\alpha$ e di H .

Infatti sia V^* lo spazio duale di V e sia α^* l'unico elemento di V^* che si annulla su H e che vale 2 su α , cioè $\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2$ e $\langle \alpha^*, H \rangle = 0$. Abbiamo

$$s(x) = x - \langle \alpha^*, x \rangle \alpha \quad \forall x \in V,$$

che possiamo scrivere come

$$s = 1 - \alpha^* \otimes \alpha$$

identificando $\text{End}(V)$ e $V^* \otimes V$. Considerando che se $\alpha \in V$ e $\alpha^* \in V^*$ vale che

$$\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2,$$

allora

$$1 - \alpha^* \otimes \alpha$$

è una simmetria di vettore α .

Proposizione 1.2. *Sia α un elemento di V diverso da 0, e sia R un sottoinsieme finito di V che genera V . Esiste una ed una sola simmetria di vettore α che lascia R invariato.*

Dimostrazione. Siano s e s' due tali simmetrie, e sia u il loro prodotto. L'automorfismo u ha le seguenti proprietà:

$$u(R) = R,$$

$$u(\alpha) = \alpha,$$

u induce l'identità su $V/\mathbb{R}\alpha$.

Le ultime due proprietà mostrano che gli autovalori di u sono uguali a 1. Inoltre, poiché R è finito ed è stabilizzato da u c'è un intero $n \geq 1$ tale che $u^n(x) = x$ per ogni $x \in R$, dunque $u^n = 1$ poiché R genera V . Questo implica che u è diagonalizzabile. Dal momento che i suoi autovalori sono uguali a 1, abbiamo anche che $u = 1$ quindi che $s = s'$. \square

1.2 Sistemi di radici astratti

Definiamo la nozione di sistema di radici astratto, e vediamo alcune delle proprietà fondamentali.

Definizione 1.3. Un sottoinsieme R di uno spazio vettoriale V si dice un *sistema di radici astratto* in V se soddisfa le seguenti condizioni:

1. R è finito, genera V , e non contiene 0;
2. Per ogni $\alpha \in R$ c'è una simmetria s_α , di vettore α , che lascia R invariato;
3. Per ogni $\alpha, \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) - \beta$ è un intero multiplo di α .

La dimensione di V è detta il *rango* di R . Gli elementi di R sono detti le *radici* di V (relative a R). Come abbiamo visto la simmetria s_α associata alla radice α può essere scritta in modo unico come

$$s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha \quad \text{con } \langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2.$$

L'elemento α^* di V^* è detto la radice inversa di α . La condizione (3) è equivalente alla seguente

$$(3') \quad \forall \alpha, \beta \in R, \text{ si ha } \langle \alpha^*, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$$

Notiamo inoltre che se $\alpha \in R$ per (2) e (3), si ha $-\alpha \in R$, poiché $-\alpha = s_\alpha(\alpha)$.

Definizione 1.4. Un sistema di radici R si dice *ridotto* se, per ogni $\alpha \in R$, α e $-\alpha$ sono le uniche radici proporzionali di α .

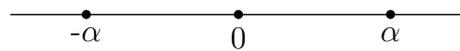
Se un sistema di radici R non è ridotto, contiene due radici proporzionali α e $t\alpha$, con $0 < t < 1$. Applicando (3) a $\beta = t\alpha$, si vede che $2t \in \mathbb{Z}$, e quindi $t = \frac{1}{2}$. Ciò implica che le radici proporzionali ad α siano

$$-\alpha, \quad -\alpha/2, \quad \alpha/2, \quad \alpha.$$

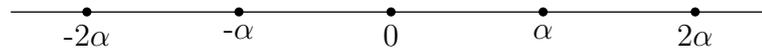
Nota. I sistemi di radici ridotti sono quelli che provengono dalla teoria delle algebre di Lie semisemplici su campi algebricamente chiusi. I sistemi non ridotti si trovano quando non si assume che il campo sia algebricamente chiuso.

Vediamo ora alcuni esempi.

L'unico sistema ridotto di rango 1 detto A_1 è il sistema

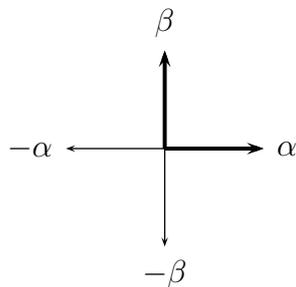


C'è un sistema non ridotto di rango 1:



Vediamo ora un esempio di sistema di rango 2:

$A_1 \times A_1$



Vogliamo ora studiare le simmetrie di un sistema di radici, per fare ciò daremo quindi la definizione di gruppo di Weyl.

Definizione 1.5. Sia R un sistema di radici in uno spazio vettoriale V . Il gruppo di Weyl di R è il sottogruppo W di $GL(V)$ generato dalle simmetrie $s_\alpha, \alpha \in R$.

Il gruppo W è un sottogruppo normale del gruppo $Aut(R)$ degli automorfismi di V che lasciano R invariato. Poiché R genera V , questi due gruppi possono essere identificati con sottogruppi del gruppo di tutte le permutazioni di R ; sono gruppi finiti.

1.3 Forme quadratiche invarianti

Per poter procedere con lo studio dei sistemi di radici, e la classificazione delle algebre, è necessario conoscere gli angoli tra le radici e il rapporto tra i moduli. Abbiamo dunque bisogno di introdurre un prodotto scalare.

Proposizione 1.6. Sia R un sistema di radici in V . Esiste una forma bilineare simmetrica definita positiva $(,)$ su V che sia invariante per il gruppo di Weyl W di R .

Questo segue semplicemente dal fatto che W è finito. Se $B(x, y)$ è una qualsiasi forma bilineare simmetrica definita positiva su V , la forma

$$(x, y) = \sum_{w \in W} B(wx, wy)$$

è invariante, e $(x, x) > 0$ per ogni $x \neq 0$.

Da ora in avanti denoteremo questa forma con $(,)$. La scelta di $(,)$ dà a V la struttura di *spazio euclideo*, in cui gli elementi di W sono le trasformazioni *ortogonali*. In particolare ciò si applica alle simmetrie s_α , così deduciamo subito che

$$s_\alpha(x) = x - 2 \frac{(x, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \quad \text{per ogni } x \in V.$$

Infatti, sia α' l'elemento di V corrispondente ad α^* attraverso l'isomorfismo $V \rightarrow V^*$ determinato dalla forma bilineare scelta. Per definizione abbiamo che

$$s_\alpha(x) = x - (\alpha', x)\alpha \quad \text{per ogni } x \in V.$$

Confrontando questa con la formula precedente otteniamo che

$$\alpha' = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

Cioè passiamo da α ad α' con una inversione in una sfera di raggio $\sqrt{2}$ nel senso della geometria elementare.

La condizione (3) per sistemi di radici può essere scritta come

$$2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z} \quad \text{per } \alpha, \beta \in R$$

ciò riduce drasticamente le possibilità per la posizione reciproca di 2 radici.

Definizione 1.7. Chiamiamo il numero intero

$$n(\beta, \alpha) = \langle \alpha^*, \beta \rangle = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$$

intero di Cartan.

Se $|\alpha|$ indica la lunghezza di α , che è $(\alpha, \alpha)^{1/2}$, e ϕ l'angolo tra α e β , allora abbiamo che $(\alpha, \beta) = |\alpha||\beta| \cos \phi$, così

$$n(\beta, \alpha) = 2\frac{|\beta|}{|\alpha|} \cos \phi.$$

Da questa si deduce la formula

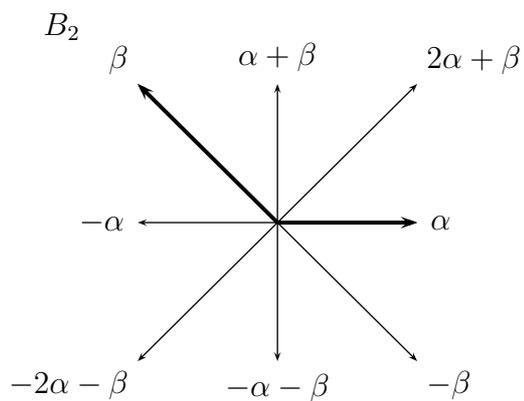
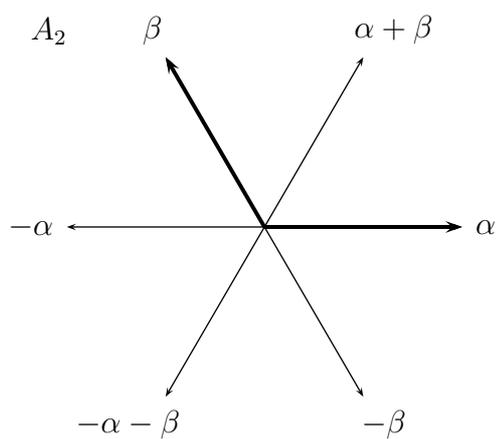
$$n(\beta, \alpha)n(\alpha, \beta) = 4 \cos^2 \phi.$$

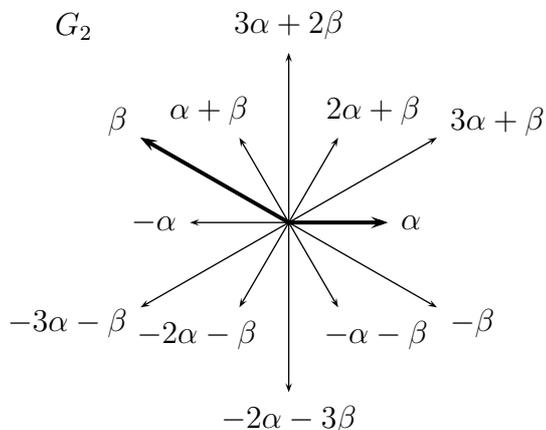
Poichè $n(\beta, \alpha)$ è un intero, $4 \cos^2 \phi$ può assumere solo i valori 0, 1, 2, 3, 4; essendo l'ultimo caso quello in cui α e β sono proporzionali.

Considerando il caso delle radici *non proporzionali* si vede che ci sono sette casi possibili.

1	$n(\alpha, \beta) = 0,$	$n(\beta, \alpha) = 0$	$\phi = \pi/2.$	
2	$n(\alpha, \beta) = 1,$	$n(\beta, \alpha) = 1$	$\phi = \pi/3$	$ \beta = \alpha .$
3	$n(\alpha, \beta) = -1,$	$n(\beta, \alpha) = -1$	$\phi = 2\pi/3$	$ \beta = \alpha .$
4	$n(\alpha, \beta) = 1,$	$n(\beta, \alpha) = 2$	$\phi = \pi/4$	$ \beta = \sqrt{2} \alpha .$
5	$n(\alpha, \beta) = -1,$	$n(\beta, \alpha) = -2$	$\phi = 3\pi/4$	$ \beta = \sqrt{2} \alpha .$
6	$n(\alpha, \beta) = 1,$	$n(\beta, \alpha) = 3$	$\phi = \pi/6$	$ \beta = \sqrt{3} \alpha .$
7	$n(\alpha, \beta) = -1,$	$n(\beta, \alpha) = -3$	$\phi = 5\pi/6$	$ \beta = \sqrt{3} \alpha .$

Vediamo ora alcuni esempi:





Proposizione 1.8. *Siano α e β due radici non proporzionali. Se $n(\beta, \alpha) > 0$, allora $\alpha - \beta$ è una radice.*

Dimostrazione. Osserviamo che $n(\beta, \alpha) > 0$ è equivalente a $(\alpha, \beta) > 0$ quindi le due radici formano un angolo acuto. Dalla lista precedente ricaviamo che o $n(\beta, \alpha) = 1$ o $n(\alpha, \beta) = 1$. Nel primo caso,

$$\alpha - \beta = -(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = -s_\alpha(\beta),$$

quindi $\alpha - \beta \in R$. Nel secondo caso $\alpha - \beta = s_\beta(\alpha) \in R$. \square

Proposizione 1.9. *Supponiamo che V sia somma diretta di due sottospazi V_1 e V_2 , e che R sia contenuto in $V_1 \cup V_2$. Sia $R_i = R \cap V_i$. Allora*

(a) V_1 e V_2 sono ortogonali

(b) R_i è un sistema di radici per V_i

Dimostrazione. Se $\alpha \in R_1$ e $\beta \in R_2$, $\alpha - \beta$ non è contenuto in $V_1 \cup V_2$, quindi non è una radice. Per la proposizione 1.8, si ha inoltre che $(\alpha, \beta) \leq 0$. Poiché questo vale anche per α e $-\beta$, allora $(\alpha, \beta) = 0$. Poiché R_i genera V_i , segue (a).

Per (b) è sufficiente osservare che, per quanto appena dimostrato, la simmetria associata a un elemento di R_1 fissa V_2 , e quindi anche V_1 . \square

Si dice che il sistema R è somma dei sottosistemi R_i . Se ciò può accadere solo banalmente, cioè se $V \neq 0$ allora uno dei V_i è uguale a 0, allora R si dice *irriducibile*.

Proposizione 1.10. *Ogni sistema di radici è somma di sistemi irriducibili*

Si può mostrare che tale decomposizione è unica.

Concludiamo con la definizione di sistema inverso. Sia R un sistema di radici in V , e ricordiamo che avevamo definito la radice inversa di α come $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$.

Proposizione 1.11. *L'insieme R^* delle radici inverse α^* , $\alpha \in R$, è un sistema di radici in V^* . Inoltre $\alpha^{**} = \alpha$ per ogni $\alpha \in R$.*

Dimostrazione. Chiaramente R^* è finito e non contiene 0. Per dimostrare che genera V^* è sufficiente, grazie all'isomorfismo $V \rightarrow V^*$, mostrare che gli elementi $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ generano V , che è ovvio. Se $\alpha^* \in R^*$ prendiamo la corrispondente simmetria che è la trasposta ${}^t s_\alpha = 1 - \alpha \otimes \alpha^*$ di s_α . Poiché $s_\alpha(R) = R$, abbiamo che $s_{\alpha^*}(R^*) = R^*$. In modo analogo si vede che $\alpha^{**} = \alpha$. In fine, se $\alpha^*, \beta^* \in R^*$ abbiamo

$$\langle \alpha^{**}, \beta^* \rangle = \langle \beta^*, \alpha \rangle \in \mathbb{Z},$$

come richiesto. □

Il sistema R^* si dice *sistema inverso o duale* del sistema R . Il suo gruppo di Weyl può essere identificato con quello di R per mezzo della mappa

$$w \rightarrow {}^t w^{-1}.$$

1.4 Basi

Sia R un sistema di radici in V .

Definizione 1.12. Un sottoinsieme S di R si dice una *base* per R se valgono le seguenti condizioni:

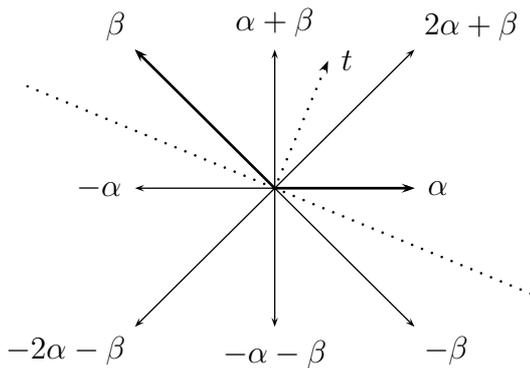
- (i) S è una base per lo spazio vettoriale V .
- (ii) Ogni $\beta \in R$ può essere scritto come una combinazione lineare

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_{\alpha} \alpha,$$

dove tutti i coefficienti m_{α} sono interi e di segno concorde.

Invece di *base*, vengono usati anche i termini *sistema di radici semplice* o *sistema di radici fondamentale*; gli elementi di S si dicono *radici semplici*.

Ora dimostreremo che una base esiste sempre, nel corso della dimostrazione teniamo in considerazione questo esempio.



Sia $t \in V^*$ un elemento tale che $\langle t, \alpha \rangle \neq 0$ per ogni $\alpha \in R$. Sia R_t^+ l'insieme di tutti gli $\alpha \in R$ tali che $\langle t, \alpha \rangle > 0$; abbiamo $R = R_t^+ \cup (-R_t^+)$. Un elemento $\alpha \in R_t^+$ si dice *decomponibile* se esistono $\beta, \gamma \in R_t^+$ tali che $\alpha = \beta + \gamma$; altrimenti α si dice *indecomponibile*. Sia S_t l'insieme degli elementi indecomponibili di R_t^+ .

Teorema 1.13. *Per ogni sistema di radici esiste una base.*

La dimostrazione del teorema si ottiene attraverso una serie di lemmi.

Lemma 1.14. *Ogni elemento di R_t^+ è una combinazione lineare, con coefficienti interi non negativi, di elementi di S_t .*

Dimostrazione. Sia I l'insieme degli $\alpha \in R_t^+$ che non godono della proprietà dell'enunciato. Se $I \neq \emptyset$ allora esiste un elemento $\alpha \in I$ con $\langle t, \alpha \rangle$ minimale. L'elemento α è decomponibile, altrimenti apparterebbe a S_t ; se scriviamo $\alpha = \beta + \gamma$, con $\beta, \gamma \in R_t^+$ abbiamo

$$\langle t, \alpha \rangle = \langle t, \beta \rangle + \langle t, \gamma \rangle,$$

e poiché $\langle t, \beta \rangle$ e $\langle t, \gamma \rangle$ sono strettamente positivi, devono essere strettamente minori di $\langle t, \alpha \rangle$. Allora $\beta, \gamma \notin I$ e dunque $\alpha \notin I$. Assurdo. \square

Lemma 1.15. *Se $\alpha, \beta \in S_t$ allora $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$.*

Dimostrazione. Se non fosse così allora per la proposizione 1.8 si avrebbe che $\gamma = \alpha - \beta$ è una radice. Inoltre si avrebbe o $\gamma \in R_t^+$ e quindi $\alpha = \beta + \gamma$ decomponibile, oppure $-\gamma \in R_t^+$ e $\beta = \alpha + (-\gamma)$ sarebbe decomponibile. \square

Lemma 1.16. *Sia $t \in V^*$ e $A \subset V$ tale che:*

- (a) $\langle t, \alpha \rangle > 0$ per ogni $\alpha \in A$
- (b) $\langle \alpha, \beta \rangle \leq 0$ per ogni $\alpha, \beta \in A$

Allora gli elementi di A sono linearmente indipendenti

In altre parole, vettori che sottendono ad angoli ottusi e che giacciono nello stesso semipiano sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Ogni relazione tra gli elementi di A può essere scritta nella forma

$$\sum y_\beta \beta = \sum z_\gamma \gamma,$$

dove i coefficienti y_β e z_γ sono tutti positivi o nulli, e β e γ variano su sottoinsiemi finiti disgiunti di A .

Sia $\lambda \in V$ l'elemento $\sum y_\beta \beta$. Abbiamo

$$\langle \lambda, \lambda \rangle = \sum y_\beta z_\gamma \langle \beta, \gamma \rangle,$$

cosicché $\langle \lambda, \lambda \rangle \leq 0$, per (b).

Deduciamo allora che $\lambda = 0$. Ma allora abbiamo

$$0 = \langle t, \lambda \rangle = \sum y_\beta \langle t, \beta \rangle,$$

e $y_\beta = 0$ per ogni β e analogamente $z_\gamma = 0$ per ogni γ , come richiesto. \square

Con i lemmi, abbiamo dimostrato qualcosa in più dell'esistenza di una base, come vediamo in questa proposizione.

Proposizione 1.17. *S_t è una base per R . D'altra parte, se S è una base di R , esiste un $t \in V^*$ tale che $\langle t, \alpha \rangle > 0$ per ogni $\alpha \in S$ e $S = S_t$.*

Dimostrazione. I lemmi 1.14, 1.15 e 1.16 provano che S_t è una base per R . D'altra parte se S è una base per R , e sia $t \in V^*$ tale che $\langle t, \alpha \rangle > 0$ per ogni $\alpha \in S$. Se indichiamo con R^+ l'insieme delle combinazioni lineari di elementi di S con coefficienti interi non negativi, allora abbiamo $R^+ \subseteq R_t^+$ e $(-R^+) \subseteq (-R_t^+)$, perciò $R^+ = R_t^+$ poiché R è l'unione di R^+ e $-R^+$. Deduciamo che gli elementi di S sono indecomponibili in R_t^+ , dunque $S \subseteq S_t$. Poiché S e S_t hanno lo stesso numero di elementi (la dimensione di V), abbiamo $S = S_t$. \square

Esempio 1.18. Supponiamo che $\dim V = 2$ e sia $\{\alpha, \beta\}$ una base di R . Poiché l'angolo tra α e β deve essere ottuso (Lemma 1.15), solo i casi 1, 3, 5, 7 della sezione 1.3 sono possibili.

1.5 Proprietà delle basi

Nelle sezioni seguenti, S indica una base per il sistema di radici R . Indichiamo con R^+ l'insieme delle radici che sono combinazioni lineari con coefficienti non negativi di elementi di S . Un elemento di R^+ si dice una *radice positiva* (rispetto a S).

Proposizione 1.19. *Ogni radice positiva β può essere scritta come*

$$\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \quad \text{con } \alpha_i \in S,$$

in modo che le somme parziali

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_h, \quad 1 \leq h \leq k,$$

siano radici.

Dimostrazione. Sia $t \in V^*$ tale che $\langle t, \alpha \rangle = 1$ per ogni $\alpha \in S$. Poiché β è una radice positiva, $\langle t, \beta \rangle$ è un intero non negativo. Proviamo la proposizione per induzione su $k = \langle t, \beta \rangle$. Osserviamo che i valori di (α, β) , $\beta \in S$ non possono essere tutti negativi o nulli. Se lo fossero, allora per il lemma 1.16 β e gli elementi di S sarebbero linearmente indipendenti, che è assurdo. Allora esiste un qualche $\alpha \in S$ tale che $(\alpha, \beta) > 0$. Se α e β sono proporzionali, abbiamo $\beta = \alpha$ o $\beta = 2\alpha$ e la proposizione sarebbe provata. Altrimenti, per la proposizione 1.8 succede che $\gamma = \beta - \alpha$ è una radice. Se $\gamma \in -R^+$ allora α sarebbe decomponibile, che è assurdo. Allora abbiamo $\gamma \in R^+$ e $\langle t, \gamma \rangle = k - 1$. L'ipotesi di induzione allora si può applicare a γ e si ottiene il risultato ponendo $\alpha_k = \alpha$. \square

Proposizione 1.20. *Supponiamo che R sia ridotto e che $\alpha \in S$. La simmetria s_α associata ad α è tale che $s_\alpha(R^+ \setminus \{\alpha\}) = R^+ \setminus \{\alpha\}$.*

Sia $\beta \in R^+ \setminus \{\alpha\}$. Abbiamo

$$\beta = \sum_{\gamma \in S} m_\gamma \gamma \quad \text{con } m_\gamma \geq 0.$$

Dimostrazione. Poiché R è ridotto, e $\beta \neq \alpha$, β non è proporzionale ad α , e esiste qualche $\gamma \neq \alpha$ tale che $m_\gamma \neq 0$. Poiché $s_\alpha(\beta) = \beta - n(\beta, \alpha)\alpha$, si vede che il coefficiente di γ in $s_\alpha(\beta)$ è uguale a m_γ . Questo implica che $s_\alpha(\beta) \in R^+$, che prova la proposizione. \square

Corollario 1.21. *Sia ρ la metà della somma delle radici positive. Abbiamo*

$$s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$$

per ogni $\alpha \in S$.

Dimostrazione. Sia ρ_α la metà della somma degli elementi di $R^+ \setminus \{\alpha\}$. Per la proposizione 1.20 appena vista si ha $s_\alpha(\rho_\alpha) = \rho_\alpha$. D'altra parte, $\rho = \rho_\alpha + \alpha/2$. Poiché $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$ si ottiene che $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$. \square

Proposizione 1.22. *Supponiamo che R sia ridotto. L'insieme S^* delle radici inverse degli elementi di S è una base di R^* .*

Dimostrazione. Sia R' il sistema di radici che consiste dei vettori $\alpha' = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ per $\alpha \in R$. Per l'isomorfismo $V \rightarrow V^*$ è sufficiente mostrare che i vettori $\alpha', \alpha \in S$, formano una base di R' . Se $t \in V^*$ è tale che $\langle t, \alpha \rangle > 0$ per ogni $\alpha \in S$, poi $(R')_t^+$ consiste dei vettori α' con $\alpha \in R^+$. Il cono convesso C generato da $(R')_t^+$ è uguale a quello generato da R^+ . Sia S'_t la base corrispondente di R' . Le semirette generate dagli elementi di S'_t sono i *generatori estremali* di C ; quindi sono le semirette $\mathbb{R}^+\alpha$, con $\alpha \in S$. Poiché R è ridotto, queste semirette contengono un'unica radice di R' , che deve essere α' . Così $S'_t = S$ come richiesto. \square

Osservazione 1.23. *Nel caso generale, sia S_1 (o S_2 rispettivamente) il sottoinsieme di S di radici α tali che 2α non è una radice (o rispettivamente 2α è una radice). Otteniamo una base per R^* prendendo gli elementi $\alpha^*, \alpha \in S_1$, e gli elementi $\alpha^*/2, \alpha \in S_2$.*

1.6 Relazioni con il gruppo di Weyl

Assumiamo d'ora in poi che R sia un sistema di radici ridotto.

Teorema 1.24. *Sia W il gruppo di Weyl di R . Allora*

- (a) *Per ogni $t \in V^*$, esiste $w \in W$ tale che $\langle w(t), \alpha \rangle \geq 0$ per ogni $\alpha \in S$.*
- (b) *Se S' è una base di R , esiste $w \in W$ tale che $w(S') = S$.*
- (c) *Per ogni $\beta \in R$ esiste $w \in W$ tale che $w(\beta) \in S$.*
- (d) *Il gruppo W è generato dalle simmetrie $s_\alpha, \alpha \in S$.*

Dimostrazione. Sia W_S il sottogruppo di W generato dalle simmetrie $s_\alpha, \alpha \in S$. Proviamo i primi tre punti per W_S .

(a) sia $t \in V^*$, e sia ρ la metà della somma di tutte le radici positive. Scegliamo un elemento di $w \in W_S$ tale che

$$\langle w(t), \rho \rangle$$

sia massimale. In particolare abbiamo che

$$\langle w(t), \rho \rangle \geq \langle s_\alpha w(t), \rho \rangle \quad \text{se } \alpha \in S.$$

Ma per quanto dimostrato in 1.21 sappiamo che $s_\alpha(\rho) = \rho - \alpha$ e dunque

$$\langle s_\alpha w(t), \rho \rangle = \langle w(t), s_\alpha(\rho) \rangle = \langle w(t), \rho - \alpha \rangle.$$

Allora possiamo concludere che $\langle w(t), \alpha \rangle \geq 0$, che prova (a).

(b). Sia t' un elemento di V^* tale che $\langle t', \alpha' \rangle > 0$ per ogni $\alpha' \in S'$. Per (a), esiste $w \in W_S$ tale che, se poniamo $t = w(t')$, allora $\langle t, \alpha \rangle = \langle t', w^{-1}(\alpha) \rangle$, e poiché t' non è ortogonale a nessuna radice abbiamo $\langle t, \alpha \rangle > 0$ per ogni $\alpha \in S$ per la proposizione 1.17 abbiamo

$$S = S_t \quad \text{e} \quad S' = S_{t'}.$$

Poiché w manda t' in t , manda anche S' in S .

(c) Sia $\beta \in R$ e sia L l'iperpiano di V^* ortogonale a β . Gli iperpiani associati alle radici diverse da $\pm\beta$ sono distinti da L e ce ne sono un numero finito. Allora c'è un elemento t_0 di L non contenuto in nessuno di questi iperpiani. Abbiamo

$$\langle t_0, \beta \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle t_0, \gamma \rangle \neq 0 \quad \text{per } \gamma \in R, \gamma \neq \pm\beta.$$

Si può trovare un elemento t sufficientemente vicino a t_0 tale che $\langle t, \beta \rangle = \epsilon$, con $\epsilon > 0$, e che il valore assoluto di $\langle t, \gamma \rangle, \gamma \neq \pm\beta$ sia strettamente maggiore di ϵ . Sia S_t la base di R associata a t ; chiaramente β appartiene a S_t . Per (b) esiste $w \in W$ tale che $w(S_t) = S$. Si ha poi che $w(\beta) \in S$.

Ora proviamo che $W_S = W$ e questo prova definitivamente anche (a), (b), (c).

(d) Poiché W è generato dalle simmetrie s_β , con $\beta \in R$, è sufficiente mostrare che $s_\beta \in W_S$. Per (c), esiste $w \in W_S$ tale che $\alpha = w(\beta)$ appartiene a S . Abbiamo

$$s_\alpha = s_{w(\beta)} = w \cdot s_\beta \cdot w^{-1},$$

infatti per definizione

$$s_{w(\beta)}(\gamma) = \gamma - 2 \frac{(\gamma, w(\beta))}{(w(\beta), w(\beta))} w(\beta)$$

e anche

$$w s_\beta(w^{-1}\gamma) = w w^{-1}\gamma - 2 \frac{(w^{-1}\gamma, \beta)}{(\beta, \beta)} w(\beta) = \gamma - 2 \frac{(\gamma, w(\beta))}{(w(\beta), w(\beta))} w(\beta)$$

perchè la forma bilineare è invariante e in particolare

$$(w^{-1}\gamma, \beta) = (\gamma, w(\beta))$$

così si vede che $s_\beta = w^{-1}s_\alpha w$, che prova $s_\beta \in W_S$. □

Nota. 1. L'elemento w dato in (b) è unico, dunque W agisce in modo semplicemente transitivo sull'insieme delle basi.

2. L'insieme di elementi $t \in V^*$ tali che $\langle t, \alpha \rangle > 0$ per ogni $\alpha \in S$ si dice *camera di Weyl* associata ad S . Per (a) e (b), le camere di Weyl sono le componenti connesse del complemento in V^* dell'iperpiano ortogonale alla radice; il gruppo W le permuta transitivamente.

3. Si può ridefinire (d) mostrando che le relazioni tra i generatori s_α ($\alpha \in S$) di W sono tutte conseguenza delle seguenti:

$$s_\alpha^2 = 1, \quad (s_\alpha s_\beta)^{m(\alpha, \beta)} = 1,$$

dove $m(\alpha, \beta)$ è uguale a 2, 3, 4 o 6 quando l'angolo tra α e β è rispettivamente $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$ o $5\pi/6$.

1.7 Matrice di Cartan

In questa sezione introdurremo la definizione di particolari matrici, che devono il loro nome a Cartan che provò, nella sua tesi [2], la classificazione delle algebre di Lie semplici proprio grazie alle matrici di Cartan irriducibili.

Definizione 1.25. Definiamo la *matrice di Cartan* di un sistema di radici R , rispetto ad una base S , come la matrice con elementi $n(\alpha, \beta)$ dati $\alpha, \beta \in S$.

Ricordiamo che $n(\alpha, \beta) = \langle \beta^*, \alpha \rangle$ è un intero. Si ha

$$n(\alpha, \beta) = \begin{cases} 2 & \alpha = \beta \\ 0, -1, -2, -3 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Esempio 1.26. La matrice di Cartan di G_2 è $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposizione 1.27. *Un sistema di radici ridotto è determinato, a meno di isomorfismi, dalla sua matrice di Cartan.*

Più precisamente:

Proposizione 1.28. *Sia R' un sistema di radici ridotto in uno spazio vettoriale V' , sia S' una base per R' e sia $\phi : S \rightarrow S'$ biunivoca tale che $n(\phi(\alpha), \phi(\beta)) = n(\alpha, \beta)$ per ogni $\alpha, \beta \in S$. Se R è ridotto, allora c'è un unico isomorfismo $f : V \rightarrow V'$ che è un'estensione di ϕ e mappa R in R' .*

Dimostrazione. Per definire f , estendiamo ϕ per linearità da S a V . Se $\alpha, \beta \in S$ abbiamo:

$$s_{\phi(\alpha)} \circ f(\beta) = s_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - n(\phi(\alpha), \phi(\beta))\phi(\alpha)$$

e

$$f \circ s_\alpha(\beta) = f(\beta - n(\beta, \alpha)\alpha) = \phi(\beta) - n(\beta, \alpha)\phi(\alpha).$$

Confrontando queste si vede che $s_{\phi(\alpha)} \circ f = f \circ s_\alpha$ per ogni $\alpha \in S$. Se W (W' rispettivamente) indica il gruppo di Weyl di R (R'), si vede che $W' = fWf^{-1}$. Poiché $R = W(S)$ e $R' = W(S')$ si deduce che $f(R) = R'$, come richiesto. \square

In particolare se indico con E il gruppo delle permutazioni di S che lascia invariata la matrice di Cartan, per gli argomenti precedenti, E può essere identificato con il gruppo di automorfismi di R che lasciano invariata la base S .

Proposizione 1.29. *Il gruppo $Aut(R)$ è il prodotto semidiretto di E e W .*

Dimostrazione. Se $w \in W \cap E$, si ha che $w(S) = S$, quindi $w = 1$ per unicità. Inoltre, se $u \in Aut(R)$, $u(S)$ è una base di R e quindi esiste $w \in W$ tale che $w(u(S)) = S$. Quindi abbiamo che $wu \in E$, che mostra $Aut(R) = W \cdot E$. \square

Corollario 1.30. *Il gruppo $Aut(R)/W$ è isomorfo a E .*

1.8 Grafi di Coxeter e loro classificazione

Consideriamo un sistema di radici R non necessariamente irriducibile. Vogliamo associare ad R un grafo di Coxeter, per ottenere una prima classificazione

Definizione 1.31. Un *grafo di Coxeter* è un grafo finito, tale che ogni coppia di vertici distinti sono uniti da 0, 1, 2 o 3 collegamenti.

Sia R un sistema di radici, e sia S una base per R . Il grafo di Coxeter di R , rispetto a S , si definisce come segue: i vertici sono gli elementi di S , due vertici distinti α, β sono uniti da $n(\alpha, \beta) \cdot n(\beta, \alpha)$ collegamenti.

Il teorema 1.24 mostra che i grafi associati a basi differenti di R sono isomorfi.

Esempio 1.32. Vediamo ad esempio i grafi di Coxeter relativi ai sistemi di radici visti nella sezione 1.2.

○ A_1

○ ○ $A_1 \times A_1$

○ — ○ A_2

○ ≡ ○ B_2

○ ≡≡ ○ G_2

Proposizione 1.33. *R è irriducibile se e solo se il grafo di Coxeter è connesso e non vuoto.*

Dimostrazione. Se R è somma di due sottosistemi non banali R_1, R_2 possiamo considerare l'unione S delle basi S_1, S_2 . Se $\alpha \in S_1$ e $\beta \in S_2$, allora sono ortogonali, quindi non sono congiunti da nessun collegamento, nel grafo di Coxeter di S . Si deduce che il grafo di S è somma disgiunta dei grafi S_i , e non è connesso.

D'altra parte, se S ha una partizione non banale

$$S = S_1 \cup S_2$$

tale che ogni elemento di S_1 è ortogonale a ogni elemento di S_2 , allora i sottospazio V_i da essi generati sono ortogonali, e sono invarianti per simmetrie $s_\alpha, \alpha \in S$. Allora R è contenuto in $V_1 \cup V_2$, ed è quindi riducibile. \square

Teorema 1.34. *Ogni grafo di Coxeter non vuoto e connesso che deriva da un sistema di radici è isomorfo a uno dei seguenti:*

A_n : $\circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ$ n vertici, $n \geq 1$

B_n : $\circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{===} \circ$ n vertici, $n \geq 2$

D_n : $\circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \begin{array}{l} / \circ \\ \backslash \circ \end{array}$ n vertici, $n \geq 3$

G_2 : $\circ \text{===} \circ$

F_4 : $\circ \text{---} \circ \text{===} \circ \text{---} \circ$

E_6 : $\begin{array}{ccccccc} & & & \circ & & & \\ & & & | & & & \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{array}$

E_7 : $\begin{array}{ccccccc} & & & \circ & & & \\ & & & | & & & \\ \circ & \text{---} & \circ \end{array}$

E_8 : $\begin{array}{ccccccc} & & & \circ & & & \\ & & & | & & & \\ \circ & \text{---} & \circ \end{array}$

L'idea della dimostrazione è questa. Si prende un grafo di Coxeter connesso non vuoto G , con insieme di vertici S . Si associa a G una forma bilineare simmetrica $(,)$ sullo spazio \mathbb{R}^S con base $(e_\alpha)_{\alpha \in S}$, definendo

$$(e_\alpha, e_\alpha) = 1$$

e $(e_\alpha, e_\beta) = \cos(\pi/2), \cos(2\pi/3), \cos(3\pi/4), \cos(5\pi/6)$ a seconda che α, β abbiano 0, 1, 2 o 3 collegamenti.

Per G grafo di Coxeter di un sistema di radici, è necessario che questa forma sia definita positiva. Si mostra poi che la positività è condizione sufficiente per indurre un isomorfismo tra G e uno dei grafi elencati. Per ulteriori dettagli si fa riferimento a Séminaire S. Lie, exposé 13; Jacoboson, pp. 128-134; Bourbaki, cap. 6, sec. 4.

1.9 Diagrammi di Dynkin

Ritorniamo ora al caso in cui i sistemi di radici siano ridotti e irriducibili.

Il grafo di Coxeter non è sufficiente per determinare la matrice di Cartan, e quindi il sistema di radici; infatti conserva solo l'informazione sull'angolo tra le coppie di radici nella base, senza indicarne la lunghezza. Due sistemi di radici inversi, $(B_n$ e $C_n)$ hanno lo stesso grafo di Coxeter.

La matrice di Cartan resta determinata se specifichiamo anche il rapporto tra le lunghezze delle radici. Questo ci porta ad indicare, sui vertici del grafo di Coxeter, i coefficienti proporzionali al quadrato della lunghezza (α, α) della relativa radice α . Un grafo di Coxeter, così etichettato, si dice *diagramma di Dynkin di R* .

Se conveniamo di identificare due diagrammi di Dynkin che differiscano di un coefficiente di proporzionalità, abbiamo:

Proposizione 1.35. *Specificare un diagramma di Dynkin è equivalente a specificare una matrice di Cartan e cioè resta determinato un sistema di radici a meno di isomorfismi.*

Spieghiamo come determinare un matrice di Cartan dato un diagramma di Dynkin:

se $\alpha = \beta$ si ha $n(\alpha, \beta) = 2$;

se $\alpha \neq \beta$, e se α, β non sono collegati, allora $n(\alpha, \beta) = 0$;

se $\alpha \neq \beta$, e se α, β sono congiunti da almeno 1 collegamento, e se il coefficiente di α è più piccolo o uguale a quello di β , si ha $n(\alpha, \beta) = -1$;

se $\alpha \neq \beta$, e se α, β sono congiunti da i collegamenti ($1 \leq i \leq 3$), e se il coefficiente di α è più grande o uguale a quello di β , si ha $n(\alpha, \beta) = -i$;

Teorema 1.36. *Ogni diagramma di Dynkin non vuoto è isomorfo a uno dei seguenti:*

$$A_n : \quad \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{1}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{1}{\circ} \quad (n \text{ vertici}, n \geq 1)$$

$$B_n : \quad \overset{2}{\circ} \text{---} \overset{2}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \overset{2}{\circ} \text{===} \overset{1}{\circ} \quad (n \text{ vertici}, n \geq 2)$$

$$C_n : \quad \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{1}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \overset{1}{\circ} \text{===} \overset{2}{\circ} \quad (n \text{ vertici}, n \geq 3)$$

$$D_n : \quad \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{1}{\circ} \text{---} \dots \text{---} \overset{1}{\circ} \begin{array}{l} \diagup \overset{1}{\circ} \\ \diagdown \overset{1}{\circ} \end{array} \quad (n \text{ vertici}, n \geq 3)$$

$$G_2 : \quad \overset{1}{\circ} \text{===} \overset{3}{\circ}$$

$$F_4 : \quad \overset{1}{\circ} \text{---} \overset{1}{\circ} \text{===} \overset{2}{\circ} \text{---} \overset{2}{\circ}$$

$$E_6 : \quad \begin{array}{ccccccc} & & & \overset{1}{\circ} & & & \\ & & & | & & & \\ \overset{1}{\circ} & \text{---} & \overset{1}{\circ} \end{array}$$

$$E_7 : \quad \begin{array}{cccccccc} & & & \overset{1}{\circ} & & & & \\ & & & | & & & & \\ \overset{1}{\circ} & \text{---} & \overset{1}{\circ} \end{array}$$

$$E_8 : \quad \begin{array}{cccccccc} & & & \overset{1}{\circ} & & & & \\ & & & | & & & & \\ \overset{1}{\circ} & \text{---} & \overset{1}{\circ} \end{array}$$

Questo segue dal teorema 1.34.

Nota. (a) ogni diagramma di Dynkin A_n, \dots, E_8 corrisponde a un sistema di radici. Si può vedere costruendo questi sistemi esplicitamente.

(b) Segue dalla proposizione 1.35 che il gruppo di automorfismi E della matrice di Cartan è isomorfo a quello del diagramma di Dynkin. Osservando la lista del teorema 1.36 si vede che

$$E = \{1\} \text{ per } A_1, B_n, C_n, G_2, F_4, E_7, E_8.$$

E è un gruppo con due elementi per $A_n (n \geq 2)$, $D_n (n \geq 5)$, e E_6

E è isomorfo al gruppo delle permutazioni di tre simboli per D_4

(c) Un diagramma di Dynkin spesso viene rappresentato così:

$$B_n : \quad \circ \text{ --- } \circ \text{ - } \dots \text{ - } \circ \text{ ==> } \circ$$

dove il segno $>$ sta a indicare quale delle due radici adiacenti è più lunga.

1.10 Sistemi di radici complessi

Sia V uno spazio vettoriale *complesso* finito-dimensionale. Quanto visto nella sezione 1.1 resta valido. Allora possiamo definire

Definizione 1.37. Un sottoinsieme R di V è detto un *sistema di radici complesso* se:

- (1) R è finito, genera V come spazio vettoriale complesso, e non contiene 0.
- (2) Per ogni $\alpha \in R$, c'è una simmetria $s_\alpha = 1 - \alpha^* \otimes \alpha$ di vettore α che lascia R invariato.
- (3) Se $\alpha, \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) - \beta$ è un multiplo intero di α .

Esempio 1.38. Sia R un sistema di radici in un spazio vettoriale reale V_0 , e sia $V = V_0 \otimes \mathbb{C}$ la complessificazione di V_0 . Lo spazio V_0 è immerso in V , e R è un sistema di radici in V . Si può vedere estendendo per linearità a V le simmetrie s_α^0 di V_0 .

Ogni sistema di radici complesso si ottiene nel modo descritto sopra.

Teorema 1.39. Sia R un sistema di radici in uno spazio vettoriale complesso V . Sia V_0 \mathbb{R} -sottospazio di V generato da R . Allora:

- (a) R è un sistema di radici in V_0 .

(b) La mappa canonica $i : V_0 \otimes \mathbb{C} \rightarrow V$ è un isomorfismo.

(c) Se $\alpha \in R$, la simmetria s_α di V è l'estensione lineare della simmetria s_α^0 di V_0 .

Dimostrazione. (a). Chiaramente R genera V_0 . Inoltre, se $\alpha \in R$, la simmetria s_α lascia invariato R e quindi V_0 . Sia s_α^0 la sua restrizione a V_0 . Se $\beta \in R$, abbiamo $s_\alpha^0(\beta) = \beta - \alpha^*(\beta)\alpha$, con $\alpha^*(\beta) \in \mathbb{Z}$. Allora R è un sistema di radici in V_0 ; inoltre, la radice inversa α_0^* di α in V_0^* non è altro che l'immagine di $\alpha^* \in V^*$ sotto la restrizione $V^* \rightarrow \text{hom}(V_0, \mathbb{C})$.

(b). Poiché R genera V , l'omomorfismo

$$i : V_0 \otimes \mathbb{C} \rightarrow V$$

è suriettivo. D'altra parte, abbiamo appena visto che la sua trasposta

$${}^t i : V^* \rightarrow V_0^* \otimes \mathbb{C}$$

mappa α^* in α_0^* per ogni $\alpha \in R$. Ma per la proposizione 1.11, gli elementi α_0^* formano un sistema di radici in V_0^* , e in particolare generano V_0^* . segue che ${}^t i$ è suriettiva, e quindi i è iniettiva, ciò prova (b).

(c) segue da quanto appena dimostrato. \square

Questo teorema riduce la teoria dei sistemi di radici complessi a quella dei sistemi di radici reali. Tutte le definizioni e i risultati visti sono applicabili al caso complesso.

Capitolo 2

Superalgebre di Lie

Nella teoria di Lie classica i sistemi di radici rendono possibile la classificazione delle algebre di Lie complesse, trasformando un problema di esistenza e classificazione in un problema combinatorio attraverso lo studio dei diagrammi di Dynkin. Ora vogliamo affrontare il tema della classificazione, tramite sistema di radici, delle superalgebre di Lie semisemplici. Nell'affrontare questo problema ci baseremo sui risultati di V. Kac che si possono trovare oltre che nel lavoro fondazionale [6] anche nei successivi [1], [3], [7], [12].

2.1 Superalgebre e Superalgebre di Lie

Lo sviluppo della teoria delle superalgebre di Lie segue la linea della teoria tracciata dal contesto ordinario, chiaramente con l'introduzione delle dovute modifiche. Considereremo sempre di essere sul campo complesso \mathbb{C} , anche se le seguenti definizioni sono valide per campi \mathbb{K} con caratteristica diversa da due e da tre.

Cominciamo con la nozione di super spazio vettoriale.

Definizione 2.1. Un *super spazio vettoriale* V è un spazio vettoriale \mathbb{Z}_2 -graduato

$$V = V_0 \oplus V_1$$

dove gli elementi di V_0 sono detti pari e quelli di V_1 sono detti dispari.

Definizione 2.2. La *parità* di $v \in V$, si indica con $p(v)$ o $|v|$, è definita solo per elementi *omogenei* non nulli, cioè per elementi che appartengono o a V_0 o a V_1 ed è data da:

$$p(v) = |v| = \begin{cases} 0 & \text{se } v \in V_0 \\ 1 & \text{se } v \in V_1 \end{cases}$$

Poichè ogni elemento può essere espresso come somma di elementi omogenei, è sufficiente considerare solo gli elementi omogenei negli enunciati delle definizioni, dei teoremi e delle dimostrazioni nei quali sarà possibile sfruttare qualche proprietà di linearità.

Ricordiamo il concetto di algebra graduata. Se A è un'algebra e M è un gruppo abeliano, allora una M -gradazione di A è una decomposizione di A in una somma diretta di sottospazi $A = \bigoplus_{\alpha \in M} A_\alpha$ tale che $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha+\beta}$. Un'algebra A con una M -gradazione è detta M -graduata. Se $a \in A_\alpha$ allora diciamo che a è *omogeneo di grado* α e scriviamo $\deg a = \alpha$. Un sottospazio B di un'algebra M -graduata è detto M -graduato se $B = \bigoplus_{\alpha \in M} (B \cap A_\alpha)$. Una sottoalgebra (o ideale) di un'algebra M -graduata è una sottoalgebra (o ideale) M -graduato. Un morfismo $\Phi : A \rightarrow A'$ di algebre M -graduate preserva il grado, nel senso che $\Phi(A_\alpha) \subseteq A'_{\phi(\alpha)}$, dove ϕ è un automorfismo di M .

Diamo alcuni esempi di algebre graduate.

- Esempio 2.3.**
1. L'anello dei polinomi $\mathbb{C}[x]$ è un'algebra graduata rispetto al grado dei polinomi.
 2. L'algebra esterna con il prodotto esterno, ove la gradazione corrisponde al grado di un elemento.

Definiamo ora la nozione di superalgebra.

Definizione 2.4. Una *superalgebra associativa* è un super spazio vettoriale A con una moltiplicazione associativa m che rispetti il grado, cioè

$$|m(a, b)| = |a| + |b|.$$

La superalgebra si dice *commutativa* se il prodotto di elementi omogenei rispetta la regola

$$ab = (-1)^{|a||b|}(ba)$$

.

L'associatività per superalgebra è definita come per le algebre. Chiameremo A semplicemente superalgebra quando la proprietà associativa è chiara.

C'è un modo naturale per definire un'operazione detta *bracket* $[,]$ in una superalgebra associativa A :

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba. \quad (*)$$

In accordo con la definizione precedente una superalgebra è commutativa se $[a, b] = 0$ per ogni $a, b \in A$. Per una superalgebra associativa A abbiamo la seguente importante identità:

$$[a, bc] = [a, b]c + (-1)^{|a||b|}b[a, c],$$

che lasciamo come verifica immediata.

La somma diretta di superalgebre è definita nella maniera usuale. Per la definizione del prodotto tensoriale le cose cambiano. Siano A e B due superalgebre, il loro prodotto tensoriale $A \otimes B$ è la superalgebra il cui spazio è il prodotto tensoriale degli spazi di A e B , con la \mathbb{Z}_2 -graduazione indotta e l'operazione di moltiplicazione è definita da

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|}a_1a_2 \otimes b_1b_2, \quad a_i \in A, \quad b_i \in B.$$

Esempio 2.5. Consideriamo M un gruppo abeliano e $V = \bigoplus_{\alpha \in M} V_\alpha$ un spazio M -graduato. Allora l'algebra associativa $\text{End}(V)$ è dotata della M -gradazione indotta $\text{End}(V) = \bigoplus_{\alpha \in M} \text{End}_\alpha V$, dove

$$\text{End}_\alpha(V) = \{a \in \text{End } V \mid a(V_s) \subseteq V_{s+\alpha}\}, \quad \alpha, s \in M$$

In particolare, per $M = \mathbb{Z}_2$ si ottiene la superalgebra associativa $\text{End}V = \text{End}_0V \oplus \text{End}_1V$.

In particolare se V è finito dimensionale e fissiamo una base omogenea, cioè costituita da vettori o pari o dispari, allora $V = \mathbb{C}^m + \mathbb{C}^n$, con $V_0 = \mathbb{C}^m$ e $V_1 = \mathbb{C}^n$ e scriviamo più sinteticamente $\mathbb{C}^{m|n}$. In questo caso

$$\text{End}(V) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & D \end{array} \right) \right\} \oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & 0 \end{array} \right) \right\},$$

dove A è una matrice $m \times m$, D è $n \times n$, B è $m \times n$ e C è $n \times m$ a coefficienti in \mathbb{C} .

Definizione 2.6. Una *superalgebra di Lie* è $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ un super spazio vettoriale con un operazione $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ lineare che sia *antisimmetrica*

$$[a, b] = -(-1)^{|a||b|} [b, a]$$

e valga l'*indentità di Jacobi*

$$(-1)^{|a||c|} [a, [b, c]] + (-1)^{|a||b|} [b, [c, a]] + (-1)^{|b||c|} [c, [a, b]] = 0$$

per ogni $a, b, c \in \mathfrak{g}$.

$\text{End}(V)$ è una superalgebra di Lie con $[\cdot, \cdot]$ definita come in (*) e denoteremo tale superalgebra di Lie con $\mathfrak{gl}(V)$ o $\mathfrak{gl}(m|n)$ se $V = \mathbb{C}^{m|n}$.

Definizione 2.7. Sia $V = V_0 \oplus V_1$ uno spazio lineare \mathbb{Z}_2 -graduato. Una *rappresentazione lineare* ρ di una superalgebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ in V è un omomorfismo $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Definizione 2.8. Sia ρ una rappresentazione lineare di una superalgebra di Lie \mathfrak{g} . Definiamo $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $\rho(X)(g) = [X, g]$ la *rappresentazione aggiunta*. Denoteremo tale ρ con ad .

Per brevità si dice che V è un \mathfrak{g} -modulo e invece di $\rho(X)(g)$ si scrive $X(g)$, $X \in \mathfrak{g}$, $g \in V$. Si osserva che, per definizione, $\mathfrak{g}_i(V_j) \subseteq V_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$, e $[X_1, X_2](g) = X_1(X_2(g)) - (-1)^{|X_1||X_2|} X_2(X_1(g))$.

Vediamo ora un secondo modo per caratterizzare le superalgebre di Lie, che risulta più pratico da usare.

Teorema 2.9. *Una superalgebra di Lie è un super spazio vettoriale \mathfrak{g} su cui è definita una bracket lineare ϕ tale che:*

- (a) \mathfrak{g}_0 è un'algebra di Lie ordinaria per ϕ ;
- (b) \mathfrak{g}_1 è un \mathfrak{g}_0 -modulo per l'azione $a \mapsto \text{ad}(a) : b \mapsto \phi(a, b)$, $b \in \mathfrak{g}_1$
- (c) $a \otimes b \mapsto \phi(a, b)$ è una mappa simmetrica di \mathfrak{g}_0 -moduli da $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_1$ a \mathfrak{g}_0 ;
- (d) per ogni $a \in \mathfrak{g}_1$, abbiamo $\phi(a, \phi(a, a)) = 0$

Dimostrazione. Dimostriamo che vale la proprietà anticommutativa. Siano $a, b \in \mathfrak{g}_0$ allora per (a) la bracket è ordinaria e dunque antisimmetrica. Se $a, b \in \mathfrak{g}_1$ allora per (c) la bracket è simmetrica. Se $a \in \mathfrak{g}_0$ e $b \in \mathfrak{g}_1$ e per assurdo supponiamo $\phi(a, b) = \phi(b, a)$ allora per (b) si ottiene che $ab - ba = ba - ab \Leftrightarrow ab - ba = 0$ e quindi solo se $\phi(a, b) = 0$ assurdo perchè \mathfrak{g}_1 sarebbe banale.

Vediamo ora che vale l'identità di Jacobi (super). Le possibili combinazioni di a, b, c nella Jacobi rispetto alla parità sono quattro. Se $a, b, c \in \mathfrak{g}_0$ allora poichè ϕ è una bracket per (a) vale l'identità di Jacobi ordinaria che quindi coincide con quella super. Siano $a, b \in \mathfrak{g}_0$ e $c \in \mathfrak{g}_1$. Dobbiamo dimostrare che $\phi(a, \phi(b, c)) + \phi(b, \phi(c, a)) + \phi(c, \phi(a, b)) = 0$. Tenendo in considerazione la parità di a, b, c e che per (b) $\text{ad}(\phi(a, b))c = \phi(\phi(a, b), c)$ basta sostituire per ottenere l'uguaglianza cercata. Siano $a, b \in \mathfrak{g}_1$ e $c \in \mathfrak{g}_0$, dobbiamo mostrare che $\phi(a, \phi(b, c)) - \phi(b, \phi(c, a)) + \phi(c, \phi(a, b)) = 0$ e vale perchè ϕ è simmetrica e si ottiene che $\phi(a, \phi(b, c))$ ha lo stesso sviluppo del $-\phi(a, \phi(b, c))$ del caso precedente, e applicando le regole dei segni si ottiene l'identità. Infine se $a, b, c \in \mathfrak{g}_1$ consideriamo la proprietà (d) e sostituiamo a con $a + b$ allora risulta

$$\phi(b, \phi(a, a)) + 2\phi(a, \phi(a, b)) = 0$$

e ora sostituendo $a + b + c$ si ottiene che

$$\begin{aligned} 0 &= \phi(a + b + c, \phi(a + b + c, a + b + c)) \\ &= 2(\phi(a, \phi(b, c)) + \phi(b, \phi(c, a)) + \phi(c, \phi(a, b))) \end{aligned}$$

□

Diamo ora alcune definizioni fondamentali per lo sviluppo della teoria.

Definizione 2.10. Un sottospazio \mathbb{Z}_2 -graduato \mathfrak{a} di \mathfrak{g} è un *ideale* se $[\mathfrak{a}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}$. La *serie derivata* $\mathfrak{g}^{(i)}$ di \mathfrak{g} è definita ponendo

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{(i+1)} = [\mathfrak{g}^{(i)}, \mathfrak{g}^{(i)}] \text{ se } i \geq 0.$$

La *serie centrale* $\mathfrak{g}^{[i]}$ di \mathfrak{g} è definita ponendo

$$\mathfrak{g}^{[0]} = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^{[i+1]} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{[i]}] \text{ se } i \geq 0.$$

Si dice che \mathfrak{g} è *risolubile* (risp. *nilpotente*) se $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ (risp. $\mathfrak{g}^{[n]} = 0$) per n sufficientemente grande e che \mathfrak{g} è *abeliana* se $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.

Definizione 2.11. Una superalgebra di Lie si dice *semplice* se non è abeliana e gli unici ideali \mathbb{Z}_2 -graduati di \mathfrak{g} sono 0 e \mathfrak{g} .

Ora definiamo la supertraccia.

Definizione 2.12. Per una matrice $a = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}(m, n)$ si definisce *supertraccia* il numero

$$\text{str}(a) = \text{tr}(A) - \text{tr}(D).$$

La supertraccia della matrice di un operatore $a \in \mathfrak{gl}(V)$ non dipende dalla scelta della base omogenea, infatti in [3] a pp. 54-55 si dà una definizione functoriale della supertraccia. Quindi si può parlare della supertraccia di a , intendendo la supertraccia in una base qualsiasi.

Per vedere le proprietà della supertraccia è utile introdurre le definizioni seguenti.

Definizione 2.13. Sia $V = V_0 \oplus V_1$ uno spazio \mathbb{Z}_2 -graduato e f una forma bilineare su V . Allora f si dice *consistente* se $f(a, b) = 0$ per $a \in V_0, b \in V_1$ e *supersimmetrica* se $f(a, b) = (-1)^{|a||b|} f(b, a)$.

Se \mathfrak{g} è una superalgebra di Lie, f si dice *invariante* se $f([a, b], c) = f(a, [b, c])$.

Proposizione 2.14. (a) La forma bilineare $(a, b) = \text{str}(ab)$ su $\mathfrak{gl}(V)$ è consistente, supersimmetrica e invariante.

(b) $\text{str}([a, b]) = 0$ per ogni $a, b \in \mathfrak{gl}(V)$.

Dimostrazione. La supertraccia è consistente, infatti se $a \in \mathfrak{gl}(V_0)$ e $b \in \mathfrak{gl}(V_1)$ allora $ab \in \mathfrak{gl}(V_1)$ e dunque la supertraccia vale 0.

Se $a, b \in \mathfrak{gl}(V_0)$ allora è supersimmetrica per le proprietà della traccia, se $a \in \mathfrak{gl}(V_0)$ e $b \in \mathfrak{gl}(V_1)$ vale per consistenza. Rimane il caso in cui $a, b \in \mathfrak{gl}(V_1)$ con $a = \begin{bmatrix} 0 & A \\ D & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$ allora $\text{str}(ab) = \text{tr}(AC) - \text{tr}(DB)$ e $\text{str}(ba) = \text{tr}(BD) - \text{tr}(CA)$ da cui segue che $\text{str}(a, b) = -\text{str}(b, a)$. Da questa segue che (b) è solo un modo alternativo per scrivere che la forma è supersimmetrica.

Resta da provare che la forma è invariante. Per definizione $[b, ac] = [b, a]c + (-1)^{|a||b|}a[b, c]$ e quindi

$$0 = \text{str}([b, ac]) = ([b, a], c) + (-1)^{|a||b|}(a, [b, c])$$

come richiesto. \square

Introduciamo ora la nozione di *superalgebra di Lie \mathbb{Z} -graduata* e alcune delle sue proprietà.

Definizione 2.15. Una \mathbb{Z} -gradazione di una superalgebra \mathfrak{g} è una sua decomposizione in una somma diretta di sottospazi finito-dimensionali \mathbb{Z}_2 -graduati $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_i$ tali che $\mathfrak{g}_i \mathfrak{g}_j \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}$. Una \mathbb{Z} -gradazione si dice *consistente* se $\mathfrak{g}_0 = \bigoplus \mathfrak{g}_{2i}$, $\mathfrak{g}_1 = \bigoplus \mathfrak{g}_{2i+1}$ ove i pedici $0, 1 \in \mathbb{Z}_2$.

Per definizione, se \mathfrak{g} è una superalgebra di Lie \mathbb{Z} -graduata, allora \mathfrak{g}_0 è una sottoalgebra e $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_i$; inoltre la restrizione della rappresentazione aggiunta a \mathfrak{g}_0 induce una sua rappresentazione lineare sul sottospazio \mathfrak{g}_i .

2.2 Superalgebre di Lie classiche

Lo scopo di questa sezione è la descrizione delle superalgebre di Lie classiche. Il nostro riferimento principale sarà il lavoro di Kac [6].

Definizione 2.16. Una superalgebra di Lie finito-dimensionale $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ è detta *classica* se è semplice e la rappresentazione di \mathfrak{g}_0 su \mathfrak{g}_1 è completamente riducibile.

Enunciamo due importanti proprietà che caratterizzano le algebre di Lie semplici e le relative proprietà delle forme invarianti.

Proposizione 2.17. *Sia \mathfrak{g} una superalgebra di Lie tale che $\mathfrak{g}_0 \neq 0 \neq \mathfrak{g}_1$. Allora \mathfrak{g} è semplice se e solo se valgono le seguenti condizioni.*

- (a) se \mathfrak{a} è un \mathfrak{g}_0 -sottomodulo non nullo di \mathfrak{g}_1 tale che $[\mathfrak{g}_1, [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{a}]] \subseteq \mathfrak{a}$, allora $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{a}] = \mathfrak{g}_0$.
- (b) \mathfrak{g}_1 è un \mathfrak{g}_0 -modulo fedele sotto l'azione aggiunta.
- (c) $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$.

Dimostrazione. Consideriamo \mathfrak{g} semplice e \mathfrak{a} come in (a). Sia

$$\mathfrak{b} = \{x \in \mathfrak{g}_0 \mid [x, \mathfrak{g}_1] = 0\}$$

e

$$\mathfrak{c} = [\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1].$$

Si verifica che

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{b}, \quad \text{e} \quad \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{c}$$

sono ideali di \mathfrak{g} .

Sappiamo che \mathfrak{g} è semplice, allora ognuno dei seguenti ideali $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{a}$, \mathfrak{b} , e $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{c}$ o è 0 o è \mathfrak{g} .

Poichè \mathfrak{a} è non nullo allora $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{a}] \oplus \mathfrak{a}$ è diverso da 0, quindi è $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ e vale (a).

Per come è definito \mathfrak{b} non può essere uguale a \mathfrak{g} e dunque deve essere nullo, quindi vale (b).

Infine \mathfrak{g}_0 è non nullo per ipotesi allora $\mathfrak{c} = \mathfrak{g}_1$ e quindi vale (c).

D'altra parte supponiamo che valgano le proprietà (a)–(c) e consideriamo I un ideale graduato di \mathfrak{g} non nullo, dimostriamo che $I = \mathfrak{g}$. Se $I_1 = 0$, allora

$I_0 \neq 0$ e $[I_0, \mathfrak{g}_1] = 0$ che contraddice (b). Allora $I_1 \neq 0$ e I_1 è un \mathfrak{g}_0 -sottomodulo di \mathfrak{g}_1 tale che $[\mathfrak{g}_1, [\mathfrak{g}_1, I_1]] \subseteq I_1$. Allora per (c) e (a), I contiene $[\mathfrak{g}_1, I] = \mathfrak{g}_0$ e $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$. \square

Vediamo ora alcuni esempi di superalgebre di Lie classiche.

Tipo A: la superalgebra di Lie speciale lineare.

Consideriamo il sottospazio di $\mathfrak{gl}(m, n)$

$$\mathfrak{sl}(m, n) = \{a \in \mathfrak{gl}(m, n) \mid \text{str}(a) = 0\}$$

è un ideale in $\mathfrak{gl}(m, n)$ di codimensione 1 e $a = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ dove A è una matrice $m \times m$, D è $n \times n$, B è $m \times n$ e C è $n \times m$.

Denotiamo con \mathcal{I}_m la matrice identità $m \times m$. Allora se $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(m, n)$ abbiamo che $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n) \oplus KI_{m,n}$ dove $I_{m,n}$ è una matrice della forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ con $A = n\mathcal{I}_m$ e $D = m\mathcal{I}_n$. Come \mathfrak{g}_0 -modulo per azione aggiunta \mathfrak{g}_1 è la somma diretta di due sottomoduli semplici \mathfrak{g}_1^\pm , dove \mathfrak{g}_1^+ , rispettivamente \mathfrak{g}_1^- , sono le matrici di forma $\begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e

rispettivamente $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}$.

Dobbiamo vedere che \mathfrak{g} è semplice. Consideriamo ora il caso generale in cui V, W sono moduli sinistri per le algebre di Lie $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ rispettivamente, allora $V \boxtimes W$ denota il modulo di $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ che ha $V \otimes W$ per spazio vettoriale e l'azione è data da:

$$(a, b)(v \otimes w) = av \otimes w + v \otimes bw.$$

$V \boxtimes W$ si dice il *prodotto tensoriale esterno* di V e W .

La struttura di \mathfrak{g}_0 -modulo su \mathfrak{g}_1^+ può essere descritta come segue. Sia \mathbb{C}^m un $\mathfrak{sl}(m)$ -modulo sinistro di vettori colonna e sia $(\mathbb{C}^n)^*$ il $\mathfrak{sl}(n)$ -modulo

destro di vettori riga. Osserviamo che $(\mathbb{C}^n)^*$ diventa un $\mathfrak{sl}(n)$ -modulo sinistro se definiamo

$$D.w = -wD$$

per $D \in \mathfrak{sl}(n)$, $w \in (\mathbb{C}^n)^*$.

Confrontandolo con il prodotto

$$\left[\left[\begin{array}{cc} A & 0 \\ 0 & D \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc} 0 & B \\ 0 & 0 \end{array} \right] \right] = \left[\begin{array}{cc} 0 & AB - BD \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

in \mathfrak{g} mostra che la mappa

$$\phi : \mathbb{C}^m \boxtimes (\mathbb{C}^n)^* \rightarrow \mathfrak{g}_1^+,$$

$$\phi(v \otimes w) = \begin{bmatrix} 0 & vw \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è un isomorfismo di $\mathfrak{sl}(m) \oplus \mathfrak{sl}(n)$ -moduli. Allo stesso modo $(\mathbb{C}^n)^* \boxtimes \mathbb{C}^m \rightarrow \mathfrak{g}_1^-$ è un isomorfismo di $\mathfrak{sl}(n) \oplus \mathfrak{sl}(m)$ -moduli. La matrice $I_{m,n}$, definita precedentemente, agisce su \mathfrak{g}_1^+ , o rispettivamente \mathfrak{g}_1^- , come la moltiplicazione per lo scalare $n - m$, o rispettivamente $m - n$.

La superalgebra di Lie $\mathfrak{sl}(1, 1)$ è nilpotente, quindi consideriamo i casi in cui $(m, n) \neq (0, 0)$. Se $m \neq n$, allora valgono le condizioni della proposizione 2.17, poichè per \mathfrak{g}_1^+ e \mathfrak{g}_1^- vale (a) e le altre condizioni risultano immediatamente, quindi $\mathfrak{sl}(m+1, n+1)$ è semplice. Mentre se $m = n$, l'elemento $I_{n+1, n+1}$ è centrale, e risulta semplice $\mathfrak{sl}(n+1, n+1)/KI_{n+1, n+1}$. Per riferirci a entrambi i casi contemporaneamente si definisce

$$A(m, n) = \mathfrak{sl}(m+1, n+1) \quad \text{per } m \neq n, \quad m, n \geq 0,$$

$$A(n, n) = \mathfrak{sl}(n+1, n+1)/KI_{n+1, n+1} = \mathfrak{psl}(n+1, n+1), \quad n > 0$$

Le superalgebre di Lie ortosimpliche $B(m, n)$, $D(m, n)$ e $C(n)$.

Le algebre di Lie che preservano un forma bilineare non degenera giocano un ruolo importante nella classificazione delle algebre di Lie semisemplici.

La situazione è simile per le superalgebre di Lie. Sia $V = V_0 \oplus V_1$ un spazio \mathbb{Z}_2 -graduato, $\dim V_0 = m$, $\dim V_1 = n$. Sia b una forma bilineare su V non degenere, consistente, supersimmetrica, cosicché V_0 e V_1 sono ortogonali e la restrizione di b a V_0 è simmetrica e a V_1 antisimmetrica.

Definiamo in $\mathfrak{gl}(m, n)$ la sottoalgebra

$$\mathfrak{osp}(m, n) = \mathfrak{osp}(m, n)_0 \oplus \mathfrak{osp}(m, n)_1$$

dove

$$\mathfrak{osp}(m, n)_i = \{a \in \mathfrak{gl}(m, n)_i \mid b(a(x), y) = -(-1)^{i|x|}b(x, a(y))\}, \quad i \in \mathbb{Z}_2.$$

$\mathfrak{osp}(m, n)$ si dice la superalgebra *ortogonale-simplettrica*. Si ha che $\mathfrak{osp}_0 = \mathfrak{o}(m) \oplus \mathfrak{sp}(n)$ somma diretta di un'algebra di Lie ortogonale e una simplettrica.

Nel contesto delle algebre di Lie ci sono significative differenze nella struttura dell'algebra ortogonale a seconda della parità della dimensione. In modo simile per le superalgebre di Lie ortosimplettriche è necessario distinguere i seguenti casi:

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \mathfrak{osp}(2m + 1, 2n), \quad m \geq 0, n \geq 1 \\ D(m, n) &= \mathfrak{osp}(2m, 2n), \quad m \geq 2, n \geq 1 \\ C(n) &= \mathfrak{osp}(2, 2n - 2), \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

Vediamo la forma esplicita della matrice degli elementi di $\mathfrak{osp}(m, n)$. Affronteremo i casi separatamente.

Tipo *B*: Le superalgebre di lie $\mathfrak{osp}(2m + 1, 2n)$. La forma b , in una base opportuna, può essere scritta come

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & \mathcal{I}_m & 0 & & \\ \mathcal{I}_m & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 0 & \mathcal{I}_n \\ & & & -\mathcal{I}_n & 0 \end{array} \right]$$

allora le matrici di $\mathfrak{osp}(m, n)$ sono tutte della forma

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} a & b & u & x & x_1 \\ c & -a^T & v & y & y_1 \\ -v^T & -u^T & 0 & z & z_1 \\ \hline y_1^T & x_1^t & z_1^T & d & e \\ -y^T & -x^T & -z^T & f & -d^T \end{array} \right]$$

con a matrice $l \times l$ qualsiasi, b e c sono $l \times l$ antisimmetriche, d è una matrice $r \times r$ qualsiasi, e e f sono $r \times r$ simmetriche, u e v sono vettori, x e y sono matrici $l \times r$ mentre z è $r \times l$.

Sia \mathbb{C}^{2m+1} sia il naturale $\mathfrak{o}(2m+1)$ -modulo sinistro di vettori colonna e $(\mathbb{C}^{2m})^*$ il $\mathfrak{sp}(2m)$ -modulo destro di vettori riga. Allora come \mathfrak{g}_0 -modulo, \mathfrak{g}_1 è isomorfo a $\mathbb{C}^{2m+1} \boxtimes (\mathbb{C}^{2m})^*$ con l'azione

$$(A, D)(v \otimes w) = Av \otimes w - v \otimes wD.$$

Per vedere ciò, osserviamo che se $\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}_1$, allora B determina C , e possiamo scrivere B come somma di matrici di forma vw con $v \in \mathbb{C}^{2m+1}$, $w \in (\mathbb{C}^{2m})^*$. Così il risultato segue dal caso $\mathfrak{sl}(2m+1, 2n)$. Segue anche che \mathfrak{g}_1 è semplice come \mathfrak{g}_0 -modulo.

Tipo D : le superalgebre di lie $\mathfrak{osp}(2m, 2n)$. In una base opportuna la matrice di b può essere scritta come

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \mathcal{I}_m & & \\ \mathcal{I}_m & 0 & & \\ \hline & & 0 & \mathcal{I}_n \\ & & -\mathcal{I}_n & 0 \end{array} \right]$$

da cui si osserva che la matrice in $\mathfrak{osp}(m, n)$ ha la stessa forma di quella appena vista da cui viene cancellata la riga e la colonna centrale.

Per vedere che \mathfrak{g}_1 è semplice come \mathfrak{g}_0 -modulo si procede come nel caso precedente.

Tipo C : le superalgebre di lie $\mathfrak{osp}(2, 2n-2)$. Se $\mathfrak{g} = C(n) = \mathfrak{osp}(2, 2n-2)$ allora \mathfrak{g}_0 consiste nelle matrici di forma

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & & \\ 0 & -\alpha & & \\ \hline & & a & b \\ & & c & -a^T \end{array} \right]$$

dove a, b e c sono matrici $(n-1) \times (n-1)$, con b e c simmetriche, e α uno scalare. Inoltre $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^+ \oplus \mathfrak{g}_1^-$ è somma diretta di due sottomoduli semplici dove \mathfrak{g}_1^+ e \mathfrak{g}_1^- sono dati dalle matrici di forma:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} & & 0 & 0 \\ & & y & y_1 \\ \hline y_1^T & 0 & & \\ -y^T & 0 & & \end{array} \right] \quad \left[\begin{array}{cc|cc} & & x & x_1 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & x_1^T & & \\ 0 & -x^T & & \end{array} \right].$$

In questo caso si ha che $\mathfrak{g}_0 \simeq \mathbb{C}h_1 \oplus \mathfrak{sp}(2n-2)$ con h_1 centrale. Come moduli per $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$, \mathfrak{g}_1^+ e \mathfrak{g}_1^- sono isomorfi alla rappresentazione naturale di $\mathfrak{sp}(2n-2)$ e rispettivamente alla sua duale.

Vediamo le superalgebre di Lie semplici $\mathfrak{p}(n)$ e $\mathfrak{q}(n)$, che non hanno un analogo nel contesto ordinario e si dicono *strange*.

Tipo P : la superalgebra di Lie $\mathfrak{p}(n)$, $n \geq 2$ si definisce come la sottoalgebra di $\mathfrak{sl}(n+1, n+1)$ costituita dalle matrici di forma

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & -A^T \end{array} \right]$$

dove $tr(A) = 0$, B è simmetrica e C antisimmetrica. L'algebra $\mathfrak{p}(n)$ può essere interpretata come la sottoalgebra di $\mathfrak{sl}(n+1, n+1)$ che preserva la forma dispari bilineare con matrice $\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I}_{n+1} \\ \mathcal{I}_{n+1} & 0 \end{bmatrix}$. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}(n)$, allora

$$\mathfrak{g}_0 \simeq \mathfrak{sl}(n+1)$$

e come \mathfrak{g}_0 -modulo

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_1^+ \oplus \mathfrak{g}_1^-$$

è la somma diretta di due sottomoduli, con \mathfrak{g}_1^+ , e rispettivamente \mathfrak{g}_1^- , consistono nelle matrici con $A = C = 0$, e risp. $A = B = 0$. Sia V il modulo naturale di $\mathfrak{sl}(n+1)$. Allora, come \mathfrak{g}_0 moduli $\mathfrak{g}_1^+ \simeq S^2V$ e $\mathfrak{g}_1^- \simeq \Lambda^2V^*$.

Tipo Q: la superalgebra di Lie $\mathfrak{q}(n)$, $n \geq 2$. Innanzitutto indichiamo con $\tilde{\mathfrak{q}}(n)$ una sottoalgebra di $\mathfrak{sl}(n+1, n+1)$, costituita dalle matrici della forma

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B & A \end{array} \right]$$

dove $\text{tr}(B) = 0$. La superalgebra di Lie $\tilde{\mathfrak{q}}(n)$ ha un centro unidimensionale $C = \langle \mathcal{I}_{2n+2} \rangle$. Indichiamo $\mathfrak{q}(n) = \tilde{\mathfrak{q}}(n)/C$.

2.3 La scomposizione in radici delle superalgebre di Lie classiche

Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ una superalgebra di Lie finito-dimensionale tale che \mathfrak{g}_0 sia riducibile e \mathfrak{g}_1 si un \mathfrak{g}_0 -modulo semisemplice. Definiamo ora la sottoalgebra di Cartan.

Definizione 2.18. Una sottoalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ è una *sottoalgebra di Cartan* se \mathfrak{h} è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} nilpotente, autonormalizzante. Se $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$, si definisce il superspazio vettoriale

$$\mathfrak{g}_\alpha := \{X \in \mathfrak{g} \mid [h, X] = \alpha(h)X \text{ per ogni } h \in \mathfrak{h}_0\}.$$

Se $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ per $\alpha \in \mathfrak{h}_0^* \setminus \{0\}$, si dice che α è una *radice* e \mathfrak{g}_α uno *spazio di radici*. Diciamo che una radice α è *pari* se $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_0 \neq \{0\}$, e *dispari* se $\mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_1 \neq \{0\}$. Si osservi che con queste definizioni una radice può essere sia pari che dispari. Si indica con Δ l'insieme di tutte le radici.

Come nel caso ordinario, poichè l'azione di \mathfrak{h}_0 su un qualsiasi \mathfrak{g}_0 -modulo semplice è diagonalizzabile, ne segue che anche l'azione aggiunta di \mathfrak{h}_0 su \mathfrak{g} è diagonalizzabile. Quindi si ha una *scomposizione in spazi di radici*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha.$$

L'insieme delle radici $\Delta \in \mathfrak{h}_0^*$ è l'unione delle radici pari e delle dispari: $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$, dove

$$\Delta_0 = \{\alpha \in \mathfrak{h}_0^* | \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_0 \neq \{0\}\}, \quad \Delta_1 = \{\alpha \in \mathfrak{h}_0^* | \mathfrak{g}_\alpha \cap \mathfrak{g}_1 \neq \{0\}\}.$$

Se \mathfrak{g} è semplice, si ha $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$ con la sola eccezione di $\mathfrak{q}(n)$. Inoltre, può accadere che $\Delta_0 = \Delta_1$.

Vediamo un esempio in cui le radici pari e dispari coincidono.

Esempio 2.19. In accordo con la definizione data di $\tilde{\mathfrak{q}}(n)$ abbiamo che

$$\tilde{\mathfrak{q}}(2) = \left\{ \left(\begin{array}{cccc} h_1 & e & \bar{h}_1 & \bar{e} \\ f & h_2 & \bar{f} & \bar{h}_2 \\ \bar{h}_1 & \bar{e} & h_1 & e \\ \bar{f} & \bar{h}_2 & f & h_2 \end{array} \right) \right\} \subset \mathfrak{gl}(2, 2).$$

Come super spazio vettoriale abbiamo che

$$\tilde{\mathfrak{q}}(2) = \text{span}_{\mathbb{C}}\{h_1, h_2, \bar{h}_1, \bar{h}_2, e, f, \bar{e}, \bar{f}\},$$

ove con un piccolo abuso di notazione indichiamo una matrice con solamente due elementi diversi da zero con la stessa lettera. Chiaramente $\tilde{\mathfrak{q}}(2)_0 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{h_1, h_2, e, f\}$ e $\tilde{\mathfrak{q}}(2)_1 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{e}, \bar{f}\}$. Lo spazio

$$\mathfrak{h} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{h_1, h_2, \bar{h}_1, \bar{h}_2\}$$

è una sottoalgebra di Cartan di $\tilde{\mathfrak{q}}(2)$. Si vede facilmente che ci sono due spazi di radici di dimensione 1|1:

$$\mathfrak{g}_\alpha = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e, \bar{e}\}, \quad \mathfrak{g}_{-\alpha} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{f, \bar{f}\},$$

con $\alpha(h_1) = 1, \alpha(h_2) = -1$. Inoltre,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_\alpha \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha}, \quad \Delta_0 = \Delta_1.$$

Prima di procere e dare alcuni esempi di sistemi di radici semplici, vogliamo fare alcune osservazioni sulla *forma di Killing*, che su una superalgebra di Lie è la forma bilineare

$$(a, b) = \text{str}((\text{ada})(\text{adb})).$$

Per le proprietà della supertraccia che abbiamo già visto risulta essere consistente, supersimmetrica e invariante.

Nel caso ordinario, una volta definita la Killing, ogni algebra semisemplice risulta essere somma di algebre semplici, nel caso super questo fatto non è immediato. Infatti accade che la forma di Killing possa essere degenere (ad esempio $A(n, n)$). Vale il seguente risultato.

Teorema 2.20. *La forma di Killing su \mathfrak{g} è non degenere se e solo se \mathfrak{g} è somma diretta di algebre di Lie semisemplici e superalgebre di Lie classiche con forme di Killing non degeneri.*

Ciò suggerisce che le superalgebre di Lie con forma di Killing non degenere siano analoghe alle algebre di Lie semisemplici. Comunque, una importante differenza è evidenziata nel teorema seguente.

Teorema 2.21. *Se \mathfrak{g} una superalgebra di Lie classica è semplice, con $\mathfrak{g}_1 \neq 0$, allora tutte le rappresentazioni finito dimensionali di \mathfrak{g} sono completamente riducibili se e solo se $\mathfrak{g} = \mathfrak{osp}(1, 2n)$ per $n \geq 1$.*

Vale però il seguente risultato.

Proposizione 2.22. *Sia \mathfrak{g} una superalgebra di Lie semplice.*

- (a) *Ogni forma bilineare invariante su \mathfrak{g} è o non degenere o uguale a 0.*
- (b) *Ogni forma bilineare invariante su \mathfrak{g} è supersimmetrica cioè $(a, b) = (-1)^{|ab|} (b, a)$.*
- (c) *Due forme bilineari invarianti non nulle su \mathfrak{g} sono proporzionali.*

Vediamo ora una proposizione molto importante.

Proposizione 2.23. *Sia \mathfrak{g} una superalgebra di Lie classica e sia $\mathfrak{g} = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$ la sua scomposizione in spazi di radice, relativi alla sottoalgebra di Cartan \mathfrak{h}*

- (a) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ in tutti i casi tranne $\mathfrak{q}(n)$;
- (b) $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ per $\alpha \neq 0$, eccetto che per $A(1,1)$, $\mathfrak{p}(2)$, $\mathfrak{p}(3)$ e $\mathfrak{q}(n)$;
- (c) Su \mathfrak{g} c'è una e una sola, a meno di fattori costanti, forma bilineare supersimmetrica invariante non-degenere (\cdot, \cdot) , eccetto che per $\mathfrak{p}(n)$ e $\mathfrak{q}(n)$;
- (d) Δ_0 e Δ_1 sono invarianti sotto l'azione del gruppo di Weil W di \mathfrak{g}_0 ;
- (e) Se \mathfrak{g} è di tipo $A(m, n)$, $(m, n) \neq (1, 1)$, $B(m, n)$, $C(n)$, $D(m, n)$, allora valgono le seguenti proprietà
 - (1) $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \neq 0$ se e solo se $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta$;
 - (2) $(\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta) = 0$ per $\alpha \neq -\beta$;
 - (3) la forma (\cdot, \cdot) determina un accoppiamento non degenere di \mathfrak{g}_α con $\mathfrak{g}_{-\alpha}$;
 - (4) $[e_\alpha, e_\beta] = (e_\alpha, e_\beta)h_\alpha$, dove h_α è il vettore non nullo determinato da $(h_\alpha, h) = \alpha(h)$, $h \in \mathfrak{h}$;
 - (5) se α è in Δ allora anche $-\alpha$ lo è;
 - (6) $k\alpha \in \Delta$ per $\alpha \neq 0$, $k \neq \pm 1$, se e solo se $\alpha \in \Delta_1$ e $(\alpha, \alpha) \neq 0$;
 qui $k = \pm 2$

Ora daremo una breve descrizione dei sistemi di radici per le superalgebre di Lie classiche delle famiglie A , B , C , D .

Come nel caso ordinario ogni sistema di radici Δ ammette un *sistema semplice* $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subseteq \Delta$. La proprietà che definisce Π è che ogni radice in Δ è una combinazione finita di elementi di Π con coefficienti interi tutti non negativi o tutti non positivi, e Π è minimale tra questi sottoinsiemi di Δ . Gli elementi α_i di Π si dicono *radici semplici*. Diversamente dal caso

ordinario, gli elementi di Π non sono necessariamente linearmente indipendenti, ad esempio se \mathfrak{g} è di tipo $A(m, n)$. Così, una volta fissato un sistema semplice, si scrive $\Delta = \Delta^+ \sqcup \Delta^-$, dove Δ^+ è l'insieme delle radici positive, che sono le radici $\alpha = m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r$, $m_i \geq 0$ e analogamente per Δ^- l'insieme delle radici negative.

Per tutte le famiglie A, B, C, D , le sottoalgebre di Cartan sono pari, cioè $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$ e possiamo sceglierla in modo che sia la sottoalgebra delle matrici diagonali. Per ogni famiglia daremo un sistema di radici e la scelta di un sistema semplice tra le varie possibilità (W -equivalenza).

$A(m, n) = \mathfrak{sl}(m+1, n+1)$ per $m \neq n$. Sia $\epsilon_i, \delta_j \in \mathfrak{h}^*$, $1 \leq i \leq m+1$, $1 \leq j \leq n+1$, definiti come $\epsilon_i(\text{diag}(a_1, \dots, a_{m+n+2})) = a_i$, $i = 1, \dots, m+1$, e $\delta_j(\text{diag}(a_1, \dots, a_{m+n+2})) = a_{m+1+j}$, $j = 1, \dots, n+1$.

Sistema di radici:

$$\begin{aligned} \Delta &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, \delta_k - \delta_l, \pm(\epsilon_i - \delta_k)\}, \\ \Delta_0 &= \{\epsilon_i - \epsilon_j, \delta_k - \delta_l\}, \quad 1 \leq i \neq j \leq m+1, 1 \leq k \neq l \leq n+1 \\ \Delta_1 &= \{\pm(\epsilon_i - \delta_k)\} \end{aligned}$$

Sistema di radici semplici:

$$\begin{aligned} \Pi = \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \alpha_2 = \epsilon_2 - \epsilon_3, \dots, \alpha_{m+1} = \epsilon_{m+1} - \delta_1, \\ \alpha_{m+2} = \delta_1 - \delta_2, \dots, \alpha_{m+n+1} = \delta_n - \delta_{n+1}\}. \end{aligned}$$

Per $A(n, n)$, $n > 1$, il sistema di radici e il sistema di radici semplici sono dati dalle stesse formule. È utile ricordare che gli elementi ϵ_i, δ_j non sono linearmente indipendenti. Se $m \neq n$, tra loro vale la relazione: $\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{m+1} = \delta_1 + \cdots + \delta_{n+1}$, mentre per $m = n$ le due relazioni sono: $\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{m+1} = \delta_1 + \cdots + \delta_{n+1} = 0$.

Sia \mathcal{S}_m il gruppo simmetrico di grado m e $W = \mathcal{S}_m \times \mathcal{S}_n$ il gruppo di Weyl. Allora l'azione di

$$w = (u, v) \in W$$

su \mathfrak{h}^* è determinata da

$$w\epsilon_i = \epsilon_{ui}, \quad w\delta_j = \delta_{vj}.$$

Osserviamo che nel caso super, a differenza del caso ordinario, il gruppo di Weyl agisce solamente sulla parte pari.

$B(m, n) = \mathfrak{osp}(2m + 1, 2n)$. La sottoalgebra di Cartan è la sottoalgebra delle matrici diagonali:

$$\mathfrak{h} = \{h = \text{diag}(a_1, \dots, a_m, -a_1, \dots, -a_m, 0, b_1, \dots, b_n, -b_1, \dots, b_n)\}$$

Si definiscono $\epsilon_i, \delta_j \in \mathfrak{h}^*$ come segue: per $h \in \mathfrak{h}$, sia $\epsilon_i(h) = a_i$, $i = 1, \dots, m$, e $\delta_j(h) = b_j$, $j = 1, \dots, n$.

Sistema di radici, $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm\epsilon_i, \pm\delta_k \pm \delta_l, \pm 2\delta_k\}, \\ \Delta_1 &= \{\pm\epsilon_i \pm \delta_k, \pm\delta_k\}, \quad 1 \leq i \neq j \leq m, 1 \leq k \neq l \leq n. \end{aligned}$$

Sistema di radici, $m = 0$:

$$\Delta_0 = \{\pm\delta_k \pm \delta_l, \pm 2\delta_k\}, \quad \Delta_1 = \{\pm\delta_k\}, \quad 1 \leq k \neq l \leq n.$$

Sistema di radici semplici, $m \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1 = \delta_1 - \delta_2, \dots, \alpha_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_n, \alpha_n = \delta_n - \epsilon_1, \\ &\quad \alpha_{n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{m+n-1} = \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \alpha_{m+n} = \epsilon_m\}. \end{aligned}$$

Sistema di radici semplici, $m = 0$:

$$\Pi = \{\alpha_1 = \delta_1 - \delta_2, \dots, \alpha_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_n, \alpha_n = \delta_n\}.$$

$C(n) = \mathfrak{osp}(2, 2n - 2)$. La sottoalgebra di Cartan è ancora la sottoalgebra delle matrici diagonali:

$$\mathfrak{h} = \{h = \text{diag}(a_1, -a_1, b_1, \dots, b_{n-1}, -b_1, \dots, -b_{n-1})\}.$$

Si definisce $\epsilon_1, \delta_1, \dots, \delta_{n-1} \in \mathfrak{h}^*$ come segue: per $h \in \mathfrak{h}$, sia $\epsilon_1(h) = a_1$, $\delta_1(h) = b_1, \dots, \delta_{n-1}(h) = b_{n-1}$.

Sistema di radici:

$$\Delta_0 = \{\pm 2\delta_k, \pm\delta_k \pm \delta_l\}, \quad \Delta_1 = \{\pm\epsilon_1 \pm \delta_k\}, \quad 1 \leq k \neq l \leq n - 1.$$

Sistema di radici semplici:

$$\Pi = \{\alpha_1 = \epsilon_1 - \delta_1, \alpha_2 = \delta_1 - \delta_2, \dots, \alpha_{n-1} = \delta_{n-2} - \delta_{n-1}, \alpha = 2\delta_{n-1}\}.$$

$D(m, n) = \mathfrak{osp}(2m, 2n)$. La sottoalgebra di Cartan è ancora la sottoalgebra delle matrici diagonali:

$$\mathfrak{h} = \{h = \text{diag}(a_1, \dots, a_m, -a_1, \dots, -a_m, b_1, \dots, b_n, -b_1, \dots, -b_n)\}.$$

Si definisce $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \delta_1, \dots, \delta_n \in \mathfrak{h}^*$ come segue: per $h \in \mathfrak{g}$, sia $\epsilon_1(h) = a_1, \dots, \epsilon_m(h) = a_m, \delta_1(h) = b_1, \dots, \delta_n(h) = b_n$.

Sistema di radici:

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= \{\pm\epsilon_i \pm \epsilon_j, \pm 2\delta_k, \pm\delta_k \pm \delta_l\}, \\ \Delta_1 &= \{\pm\epsilon_i \pm \delta_k\}, \quad 1 \leq i \neq j \leq m, 1 \leq k \neq l \leq n. \end{aligned}$$

Sistema di radici semplici

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\alpha_1 = \delta_1 - \delta_2, \dots, \alpha_{n-1} = \delta_{n-1} - \delta_n, \alpha_n = \delta_n - \epsilon_1, \\ &\quad \alpha_{n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_2, \dots, \alpha_{m+n-1} = \epsilon_{m-1} - \epsilon_m, \alpha_{m+n} = \epsilon_{m-1} + \epsilon_m\}. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Classificazione

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, la classificazione delle superalgebre di Lie presenta importanti differenze rispetto al caso ordinario. Uno dei fatti rilevanti è che il gruppo di Weyl non contiene abbastanza simmetrie sull'insieme delle radici, avendo un'azione puramente pari.

Uno strumento che è stato introdotto, e che ha dato importanti risultati nella classificazione delle superalgebre di Lie, è il concetto di superalgebra di Lie controgradiente. Come abbiamo visto, le superalgebre di Lie non sono altro che una generalizzazione delle algebre di Lie, così le superalgebre di Lie controgradienti sono quelle superalgebre di Lie definite a partire da una matrice di Cartan.

Una delle idee principali è di definire le *riflessioni dispari* per mettere in relazione le proprietà delle diverse basi dei sistemi di radici per la superalgebra di Lie $\mathfrak{g}(A)$. Contrariamente al caso ordinario dove la matrice di Cartan è unica, una superalgebra di Lie solitamente ha associata più di una matrice di Cartan.

Molti dei risultati di questo capitolo si possono ritrovare nel lavoro di Hoyt, Serganova [4] oltre che nel lavoro fondazionale di Kac [6] che abbiamo già descritto nel capitolo precedente.

3.1 Teorema di classificazione

Nel lavoro di Kac [6] si trova uno dei principali risultati della teoria, che è la classificazione delle superalgebre di Lie semplici finito-dimensionali. Per completezza includeremo nell'enunciato anche le superalgebre $F(4)$, $G(3)$, $D(2, 1; \alpha)$ e le superalgebre di Lie di Cartan $W(n)$, $S(n)$, $\tilde{S}(n)$ per n pari, $H(n)$ che non abbiamo definito, ma le cui definizioni e proprietà si trovano nel lavoro di Kac [6].

Teorema 3.1. *Ogni superalgebra di Lie semplice e finito-dimensionale su \mathbb{C} è isomorfa a una delle seguenti:*

(1) *le superalgebre di Lie classiche sono isomorfe o a una algebra di Lie semplice o a una delle superalgebre di Lie classiche seguenti:*

$$A(m, n), \quad B(m, n), \quad C(n), \quad D(m, n), \quad P(n), \quad Q(n),$$

per combinazioni appropriate di m e n ,

$$F(4), \quad G(3), \quad D(2, 1; \alpha) \text{ per } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\};$$

(2) *le superalgebre di Lie di tipo Cartan:*

$$W(n), \quad S(n), \quad \tilde{S}(n) \text{ per } n \text{ pari}, \quad H(n).$$

Nelle sezioni seguenti vedremo alcuni degli strumenti che consentono questa classificazione.

3.2 Superalgebre di Lie controgradienti

Sia A una matrice $n \times n$ su \mathbb{C} , $I = \{1, \dots, n\}$ e $p : I \rightarrow \mathbb{Z}_2$ una funzione che indica la parità. Fissiamo uno spazio vettoriale \mathfrak{h} su \mathbb{C} di dimensione $2n - \text{rk}(A)$. Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathfrak{h}^*$ e $h_1, \dots, h_n \in \mathfrak{h}$ elementi linearmente indipendenti tali che $\alpha_j(h_i) = a_{ij}$ con a_{ij} gli elementi di A . Osserviamo che se A è singolare le radici semplici non sono più linearmente indipendenti sulla

sottoalgebra generata dagli h_i , per rimediare a questa situazione si allarga la sottoalgebra di Cartan utilizzando una realizzazione minimale della matrice A così come viene presentato nel paragrafo 5.1 di [7].

Definizione 3.2. Si definisce una superalgebra di Lie $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ tramite i generatori $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ e \mathfrak{h} , con le relazioni

$$[X_i, Y_j] = \delta_{ij}h_i, \quad [h, X_i] = \alpha_i(h)X_i, \quad [h, Y_i] = -\alpha_i(h)Y_i, \quad \text{per ogni } h \in \mathfrak{h}$$

dove la parità di X_i e Y_i è $p(i)$, e gli elementi di \mathfrak{h} sono pari.

Sia $r(A)$ l'ideale massimale di $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ che interseca banalmente \mathfrak{h} . Allora

$$\mathfrak{g}(A) := \tilde{\mathfrak{g}}(A)/r(A)$$

è una *superalgebra di Lie controgradiente*.

Possiamo parlare di $r(A)$ in termini di unico ideale massimale, e questo ci è garantito dal teorema 5.1.5 di [7].

La matrice A è la *matrice di Cartan* di $\mathfrak{g}(A)$ per l'insieme delle radici semplici $\Pi := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Se $B = DA$ per una matrice invertibile e diagonale D allora $\mathfrak{g}(B) = \mathfrak{g}(A)$. Allora possiamo assumere, senza perdere di generalità, che $a_{ii} \in \{0, 2\}$ per $i \in I$.

La matrice A si dice *simmetrizzabile* se esiste una matrice diagonale e invertibile D tale che $B = DA$ è una matrice simmetrica. In questo caso si dice che anche $\mathfrak{g}(A)$ è simmetrizzabile.

Abbiamo il risultato seguente.

Proposizione 3.3. *Per ogni sottoinsieme $J \subset I$ la sottoalgebra \mathfrak{a}_J in $\mathfrak{g}(A)$ generata da \mathfrak{h} , X_i, Y_i con $i \in J$ è isomorfa a $\mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{g}(A_J)$, dove A_J è la sottomatrice di A rispetto a J e \mathfrak{h}' è un sottospazio di \mathfrak{h} . Più precisamente, \mathfrak{h}' è un sottospazio massimale in $\cap_{i \in J} \ker \alpha_i$ che interseca banalmente lo span di $h_i, i \in J$.*

Siano \mathfrak{n}^+ , rispettivamente \mathfrak{n}^- , la sottoalgebra di $\mathfrak{g}(A)$ generata dagli elementi X_i , rispettivamente $Y_i, i \in I$. Allora $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$. Denotiamo anche $G(A, \tau) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{n}^+$ e $G(A, \tau)/C = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h}'/C \oplus \mathfrak{n}^+$. Per ulteriori dettagli si rimanda a pp. 101-103 di [7].

3.3 Radici e diagrammi

Sia A matrice di Cartan associata a $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ come sopra. La superalgebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ sotto l'azione aggiunta di \mathfrak{h} si scompone in spazi di radici come avviene nel caso classico:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Ogni radice è una combinazione lineare positiva o negativa delle radici semplici $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Di conseguenza, abbiamo la scomposizione $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$. Se si definisce una funzione $p : \Delta \rightarrow \mathbb{Z}_2$, allora si intende Δ_0 (rispettivamente Δ_1) l'insieme delle radici pari (dispari).

Per ogni radice semplice ci sono quattro casi:

1. se $a_{ii} = 2$ e $p(\alpha_i) = 0$, allora X_i, Y_i e h_i generano una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(2)$;
2. se $a_{ii} = 0$ e $p(\alpha_i) = 0$, allora X_i, Y_i e h_i generano una sottoalgebra isomorfa all'algebra di Heisenberg;
3. se $a_{ii} = 2$ e $p(\alpha_i) = 1$, allora X_i, Y_i e h_i generano una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{osp}(1, 2)$ e in questo caso $2\alpha_i \in \Delta$;
4. se $a_{ii} = 0$ e $p(\alpha_i) = 1$, allora X_i, Y_i e h_i generano una sottoalgebra isomorfa a $\mathfrak{sl}(1, 1)$;

Nell'ultimo caso α si dice *isotropa* e negli altri casi le radici si dicono *non-isotrope*. Una radice semplice α_i è *regolare* se per ogni altra radice semplice α_j , $a_{ij} = 0$ implica che $a_{ji} = 0$, altrimenti si dice *singolare*.

Definiamo l'algebra di Heisenberg.

Definizione 3.4. Si definisce l'algebra di Heisenberg \mathfrak{n} con un generatore pari e (centrale) e $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ generatori dispari. Inoltre le uniche bracket non nulle sono

$$[a_i, b_i] = e.$$

È utile descrivere A attraverso il corrispondente diagramma di Dynkin. Ora elenchiamo le coppie (A, τ) , dove τ è l'insieme delle radici dispari. Per iniziare vediamo tutte le superalgebre di Lie controgradienti di rango uno e due con matrici di Cartan indecomponibili, le corrispondenti coppie (A, τ) e i diagrammi di Dynkin. I cerchi \circ , \otimes e \bullet si dicono rispettivamente *bianco*, *grigio* e *nero*. Le superalgebre di Lie controgradienti di rango r sono raffigurate da un diagramma formato da r cerchi bianchi, grigi o neri secondo le seguenti regole, dove gli elementi a_{ij} appartengono alla corrispondente matrice simmetrica di A .

1. si associa ad ogni radice semplice pari un cerchio bianco, ad ogni radice semplice dispari di lunghezza non nulla $a_{ii} \neq 0$ un cerchio nero e a ogni radice semplice dispari di lunghezza nulla $a_{ii} = 0$ un cerchio grigio.
2. l' i -esimo e il j -esimo cerchio sono connessi da η_{ij} linee dove:

$$\begin{aligned} \eta_{ij} &= \frac{2|a_{ij}|}{\min(|a_{ii}|, |a_{jj}|)} && \text{se } a_{ii}a_{jj} \neq 0 \\ \eta_{ij} &= \frac{2|a_{ij}|}{\min_{a_{kk} \neq 0} |a_{kk}|} && \text{se } a_{ii} \neq 0 \text{ e } a_{jj} = 0 \\ \eta_{ij} &= |a_{ij}| && \text{se } a_{ii} = a_{jj} = 0 \end{aligned}$$

3. si aggiunge una freccia sulle linee che connettono l' i -esimo e il j -esimo cerchio se $\eta_{ij} > 1$, che punta da i a j se $a_{ii}a_{jj} \neq 0$ e $|a_{ii}| > |a_{jj}|$ o se $a_{ii} = 0$, $a_{jj} \neq 0$, $a_{jj} < 2$, e che punta da j a i se $a_{ii} = 0$, $a_{jj} \neq 0$, $a_{jj} > 2$.

Avevamo già osservato che una superalgebra di Lie può essere generata da matrici di Cartan diverse, quindi vale anche che superalgebre di Lie isomorfe possono corrispondere a diagrammi di Dynkin diversi. Per ogni superalgebra di Lie di base c'è un particolare diagramma di Dynkin che possiamo considerare canonico la cui caratteristica è quella di contenere il minor numero di radici dispari. Un tale diagramma di Dynkin si dice *distino*.

Superalgebre controgradienti di Lie di rango uno.

$\mathfrak{g}(A)$	A	τ	Diagramma
$\mathfrak{sl}(2)$	(2)	\emptyset	\circ
$\mathfrak{sl}(1, 1)$	(0)	$\{1\}$	\otimes
$\mathfrak{osp}(1, 2)$	(2)	$\{1\}$	\bullet

Superalgebre di Lie di rango due.

$\mathfrak{g}(A)$	A	τ	Diagramma
A_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	\emptyset	$\circ - \circ$
B_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	\emptyset	$\circ \Rightarrow \circ$
G_2	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	\emptyset	$\circ \Rightarrow \circ$
$A(1, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	$\otimes - \circ$
$A(1, 0)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\{1, 2\}$	$\otimes - \otimes$
$B(1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\{1\}$	$\otimes \Rightarrow \circ$
$B(1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\{1, 2\}$	$\otimes \Rightarrow \bullet$
$B(0, 2)$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\{2\}$	$\circ \Rightarrow \bullet$

Enunciamo ora la proposizione di Kac che associa ad ogni superalgebra di Lie controgradiente i rispettivi diagrammi di Dynkin (per completezza includiamo anche la classificazione delle superalgebre di Lie eccezionali). Per la dimostrazione di questo e dei risultati seguenti rimandiamo il lettore al lavoro di Kac [6].

Proposizione 3.5. *Sia \mathfrak{g} una tra $A(m, n)$, $B(m, n)$, $C(n)$, $D(m, n)$, $D(2, 1; \alpha)$, $F(4)$, $G(3)$ e sia $\mathfrak{g} \simeq G(A, \tau)/C$, dove C è il centro. Allora $C \neq 0$ solo per*

$$(a) (h_i, h_j) = a_{ij}, \quad (X_i, Y_j) = \delta_{ij};$$

(b) $(,)$ è supersimmetrica;

(c) $(,)$ è invariante.

Inoltre la forma $(,)$ è nondegenere e soddisfa le condizioni seguenti:

$$(d) (\mathfrak{g}_{(i)}, \mathfrak{g}_{(j)}) = 0 \text{ a meno che } i + j = 0$$

$$(e) (\, ,) \text{ è pari, cioè } (\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1) = (\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_0) = 0.$$

Dove data una \mathbb{Z} -gradazione su \mathfrak{g} per $\mathfrak{g}_{(i)}$ si intende lo span di tutti gli elementi di grado i .

La dimostrazione di questo risultato si trova nella sezione 5.4 pp. 112-115 del lavoro di Musson [7].

La struttura delle superalgebre di Lie oltre quelle semplici e finito dimensionali esibisce alcune proprietà inaspettate. Come abbiamo già osservato, un esempio di tali differenze è il fatto che una superalgebra di Lie semisemplice, ovvero una superalgebra il cui radicale è banale, non è necessariamente somma diretta di superalgebre semplici, per un esempio facciamo riferimento a [5].

3.4 Classificazione dei moduli irriducibili finito dimensionali

Nella teoria delle rappresentazioni finito-dimensionali per un'algebra di Lie classica \mathfrak{g} , la rappresentazione di \mathfrak{sl}_2 gioca un ruolo fondamentale. Le proprietà che rendono essenziale il ruolo di \mathfrak{sl}_2 non sono più vere nel caso super. Infatti data una radice α di \mathfrak{g} , lo spazio di radici $\mathfrak{g}_{k\alpha}$ corrispondente a tutte le radici proporzionali ad α può generare sottoalgebre di \mathfrak{g} differenti, come abbiamo osservato nel capitolo precedente. Lo studio di tali sottoalgebre fu introdotto da Penkov e Serganova in [9]. Più precisamente, una linea

\mathfrak{l} in \mathfrak{h}_0^* è definito come un sottospazio reale unidimensionale di \mathfrak{h}_0^* tale che $\mathfrak{l} \cap \Delta \neq \emptyset$. La sottoalgebra lineare corrispondente $\mathfrak{g}^{\mathfrak{l}}$ di \mathfrak{g} è definita come la sottoalgebra di \mathfrak{g} generata da tutti gli spazi di radice \mathfrak{g}_α con $\alpha \in \mathfrak{l}$. Si verifica che ogni sottoalgebra lineare di una superalgebra di Lie classica e semplice è isomorfa a una delle seguenti: \mathfrak{sl}_2 , $\mathfrak{osp}(1, 2)$, $\mathfrak{sl}(1, 1)$, $\mathfrak{q}(2)$ o una superalgebra dispari unidimensionale nilpotente. Le ultime due appaiono esclusivamente nel caso che \mathfrak{g} sia di tipo P o Q . Illustreremo tutti i moduli irriducibili finito dimensionali di \mathfrak{sl}_2 , $\mathfrak{osp}(1, 2)$, $\mathfrak{gl}(1, 1)$, $\mathfrak{q}(2)$ (i moduli per $\mathfrak{sl}(1, 1)$ si ottegono in modo elementare da quelli per $\mathfrak{gl}(1, 1)$).

Richiamiamo il risultato sulle rappresentazioni di \mathfrak{sl}_2 . Sia $\mathfrak{sl}_2 = \text{span}_{\mathbb{C}}\{h, e, f, \}$ con $[e, f] = h$, $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$.

Proposizione 3.7. *Sia V un \mathfrak{sl}_2 -modulo irriducibile di dimensione $n + 1$. Allora esiste una base v_0, \dots, v_n di V tale che*

$$\begin{aligned} hv_i &= (n - 2i)v_i, & 0 \leq i \leq n, \\ ev_0 &= 0, & ev_i = (n - i + 1)v_{i-1}, & 1 \leq i \leq n, \\ fv_n &= 0, & fv_i = (i + 1)v_{i+1}, & 1 \leq i \leq n - 1. \end{aligned}$$

Al contrario, per ogni intero positivo n , esiste una classe di equivalenza di rappresentazioni irriducibili di \mathfrak{sl}_2 di dimensione $n + 1$, definite dall'azione descritta sopra.

Il vettore v_0 è detto *vettore di peso più alto*.

Ora vediamo le rappresentazioni di $\mathfrak{osp}(1, 2)$. Iniziamo con una descrizione esplicita:

$$\mathfrak{osp}(1, 2) = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} 0 & \alpha & \beta \\ \beta & & \\ & B & \\ -\alpha & & \end{array} \right) \middle| B \in \mathfrak{sl}_2 \right\} \subset \mathfrak{gl}(1, 2)$$

Una base è data da

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $\text{span}_{\mathbb{C}}\{e, f, h\} = \mathfrak{sl}_2$ e le altre bracket non nulle sono:

$$[e, y] = -x, \quad [f, x] = -y, \quad [x, x] = 2e, \quad [y, y] = -2f,$$

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = x, \quad [h, y] = y.$$

Proposizione 3.8. *Sia V un $\mathfrak{osp}(1, 2)$ -modulo irriducibile di dimensione $2n + 1$ allora esiste una base $v_0, \dots, v_n, w_0, \dots, w_{n-1}$ di V tale che*

$$\begin{aligned} hv_i &= (n - 2i)v_i, & hw_i &= (n - i - 2i)w_i, \\ ev_i &= (n - i + 1)v_{i-1}, & ew_i &= (n - i)w_{i-1}, \\ fv_i &= (i + 1)v_{i+1}, & fw_i &= (i + 1)w_{i+1}, \\ xv_i &= w_{i-1}, & xw_i &= (n - i)v_i, \\ yv_i &= w_i, & yw_i &= -(i + 1)v_{i+1}, \end{aligned}$$

dove si assume che $v_{-i} = w_{-1} = v_{n+1} = w_n = 0$. A meno di un cambio di parità si ha che $V_0 = \text{span}\{v_0, \dots, v_n\}$ e $V_1 = \text{span}\{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ ed entrambi sono \mathfrak{sl}_2 -moduli irriducibili, cioè moduli di peso più alto n , $n - 1$ rispettivamente.

Viceversa, partendo dall'azione definita sopra si ottengono rappresentazioni di $\mathfrak{osp}(1, 2)$.

Schematicamente abbiamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} V_0 & & v_n & \xrightarrow{e} & v_{n-1} & \xrightarrow{e} & v_{n-2} & \dots \\ & & \searrow x & & \nearrow x & & \searrow x & & \nearrow x \\ V_1 & & & & w_{n-1} & \xrightarrow{e} & w_{n-2} & \dots \end{array}$$

e uno analogo sostituendo e con f e x con y invertendo il verso delle frecce.

Ora vediamo il caso di $\mathfrak{gl}(1, 1)$. Come superspazio vettoriale abbiamo

$$\mathfrak{gl}(1, 1) = \text{span} \left\{ h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \right\}.$$

con bracket

$$[h_1, x] = x, \quad [h_2, x] = -x, \quad [h_1, y] = -y, \quad [h_2, y] = y,$$

$$[x, y] = h_1 + h_2, \quad [x, x] = [y, y] = 0.$$

Proposizione 3.9. *Sia V una rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{gl}(1,1)$ con pesi più alti (λ_1, λ_2) . Allora*

1. *se $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, V è $(1,1)$ -dimensionale e generato da v , il vettore di peso più alto, e yv ;*
2. *se $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, V è unidimensionale.*

Ora vediamo il caso di $\mathfrak{q}(2)$. I moduli irriducibili finito-dimensionali di $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}(2)$ hanno una struttura più complicata. Abbiamo visto nell'esempio 2.19 che $\Delta = \{\pm\alpha\}$, e ognuno dei $\mathfrak{g}_{\{\pm\alpha\}}$ ha dimensione $(1,1)$. Inoltre, $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1$ ha dimensione $(2,2)$. Se si sceglie la base usuale $\{h_1, h_2\}$ di \mathfrak{h}_0 , si conclude che ogni \mathfrak{g} -modulo irriducibile finito-dimensionale ha peso più alto (λ_1, λ_2) . Lo spazio di peso più alto di $V_{(\lambda_1, \lambda_2)}$ è un \mathfrak{h} -modulo irriducibile e non è più necessariamente unidimensionale. In generale ha dimensione $(1,1)$. Poichè \mathfrak{g} contiene una sottoalgebra isomorfa a \mathfrak{gl}_2 , una condizione necessaria perchè la dimensione di V sia finita è che $\lambda_1 - \lambda_2$ sia un intero non negativo, ma questa condizione non è sufficiente. Infatti vale la seguente proposizione:

Proposizione 3.10. *Sia $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ un peso di $\mathfrak{q}(2)$ tale che $\lambda_1 - \lambda_2$ è un intero positivo o $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Esiste un'unico (a meno di cambi di parità) $\mathfrak{q}(2)$ -modulo $V(\lambda)$ irriducibile e finito-dimensionale con peso più alto λ . I pesi di $V(\lambda)$ sono $(\lambda_1, \lambda_2), (\lambda_1 - 1, \lambda_2 - 1), \dots, (\lambda_2, \lambda_1)$.*

Viceversa ogni $\mathfrak{q}(2)$ -modulo V irriducibile finito-dimensionale è isomorfo a $V(\lambda)$ per qualche λ come sopra.

Per la dimostrazione e per ulteriori dettagli rimandiamo a [8].

Vediamo il principale risultato sulla rappresentazione delle superalgebre di Lie classiche.

Sia \mathfrak{g} una superalgebra di Lie di base. fissiamo una matrice di Cartan e un sistema di radici semplice $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Siano $h_i = h_{\alpha_i}$, cioè $\alpha_i(h) = (h_i, h)$.

Definizione 3.11. Se λ sta in \mathfrak{h}^* si definisce *numerical marks* $a_i = \lambda(h_i)$.

Se $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, possiamo definire $V(\lambda)$ modulo irriducibile di peso più alto con la costruzione di Verma, per i dettagli facciamo riferimento a [1] pp. 248-250.

Teorema 3.12. *Nella notazione precedente. In particolare fissiamo un sistema di radici semplice per ogni superalgebra di Lie (non strange o di Cartan). Allora $V(\lambda)$ è una rappresentazione finito dimensionale se e solo se*

1. $a_i \in \mathbb{Z}$, $i \neq s$, dove $s = m+1$ per $A(m, n)$, $s = m$ per $B(m, n)$, $D(m, n)$ e $s = 1$ per $C(n)$, $F(4)$, $G(3)$ e $D(2, 1; \alpha)$.
2. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ dove k è dato da
 - Per $B(0, n)$, $k = \frac{1}{2}a_n$.
 - Per $B(m, n)$, $m > 0$, $k = a_n - a_{n+1} - \dots - a_{m+n-1} - \frac{1}{2}a_{m+n}$.
 - Per $D(m, n)$, $k = a_n - a_{n+1} - \dots - a_{m+n-2} - \frac{1}{2}(a_{m+n-1} + a_{m+n})$.
 - Per $D(2, 1; \alpha)$, $k = (1 + \alpha)^{-1}(2a_1 - a_2 - \alpha a_3)$.
 - Per $F(4)$, $k = \frac{1}{3}(2a_1 - 3a_2 - 4a_3 - 2a_4)$.
 - Per $G(3)$, $k = \frac{1}{2}(a_1 - 2a_2 - 3a_3)$

3. Sia b un intero come segue:

		$B(0, n)$		$B(m, n)$		(m, n)		$D(2, 1; \alpha)$		$F(4)$		$G(3)$
b		0		m		m		2		4		3

Ci sono le seguenti ulteriori condizioni se $k < b$:

- Per $B(m, n)$, $a_{k+n+1} = \dots = a_{m+n} = 0$.
- Per $D(m, n)$, se $k < m - 1$ $a_{k+n+1} = \dots = a_{m+n} = 0$; se $k = m - 1$, $a_{k+n+1} = a_{m+n}$.

- Per $D(2, 1; \alpha)$, se $k = 0, a_i = 0$ per ogni i ; se $k = 1, (a_3 + 1)\alpha = \pm(a_2 + 1)$.
- Per $F(4)$, se $k = 0, k \neq 1, a_i = 0$ per ogni i ; se $k = 2, a_2 = a_4 = 0$; se $k = 3, a_2 = 2a_4 + 1$.
- Per $G(3)$, se $k = 0, k \neq 1, a_i = 0$; se $k = 2, a_2 = 0$.

Le condizioni (1) e (2) sono naturali, infatti sono le condizioni che impongono che il peso λ sia un peso dominante intero di \mathfrak{g}_0 . La condizione (3) è più interessante. $V(\lambda)$ è un modulo finito dimensionale se e solo se è un modulo di peso più alto per ogni sottoalgebra di Borel di \mathfrak{g} . Per *sottoalgebra di Borel* si intende la sottoalgebra $\mathfrak{b}^+ = \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{h}$, dove \mathfrak{h} è la sottoalgebra di Cartan e \mathfrak{n}^+ è la sottoalgebra generata dalle radici positive, una volta fissato un sistema di radici semplice. Nel caso ordinario tutte le sottoalgebre di Borel, contenenti una sottoalgebra di Cartan fissata, sono coniugate tramite elementi del gruppo di Weyl W e se $\mathfrak{b}' = w\mathfrak{b}$ per $w \in W$ allora $V_{\mathfrak{b}}(\lambda) = V_{\mathfrak{b}'}(w\lambda)$. Inoltre, il peso λ è dominante intero rispetto a \mathfrak{b}' se e solo se λ è dominante intero per \mathfrak{b} . Per le superalgebre di Lie non è più vero che tutte le sottoalgebre di Borel sono coniugate. L'introduzione delle riflessioni dispari da parte di Penkov e Serganova ha permesso di colmare la mancanza di simmetrie del gruppo di Weyl e coniugare tra loro le sottoalgebre di Borel, ma, nella teoria delle rappresentazioni, l'azione sui pesi non è più un'azione di gruppo.

Vediamo ora nel dettaglio come sono definite le riflessioni dispari, o odd reflections, introdotte da Serganova nel lavoro [9].

Sia $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ un insieme di radici semplici di $\mathfrak{g}(A)$. Se $\alpha_k \in \Pi$ e $a_{kk} \neq 0$, si definisce la riflessione (simmetria nel primo capitolo) pari r_k di vettore α_k come

$$r_k(\alpha_i) = \alpha_i - \alpha_i(h_k)\alpha_k, \quad \alpha_i \in \Pi.$$

Se $\alpha_k \in \Pi, a_{kk} = 0$ e $p(\alpha_k) = 1$, se definisce la *riflessione dispari* r_k di

vettore α_k come segue:

$$r_k(\alpha_i) := \begin{cases} -\alpha_k & \text{se } i = k \\ \alpha_i & \text{se } a_{ik} = a_{ki} = 0, i \neq k \\ \alpha_i + \alpha_k & \text{se } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0, i \neq k \end{cases} \quad \alpha_i \in \Pi$$

$$X'_i := \begin{cases} Y_i & \text{se } i = k \\ X_i & \text{se } a_{ik} = a_{ki} = 0, i \neq k \\ [X_i, X_k] & \text{se } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0, i \neq k \end{cases}$$

$$Y'_i := \begin{cases} X_i & \text{se } i = k \\ Y_i & \text{se } a_{ik} = a_{ki} = 0, i \neq k \\ [Y_i, Y_k] & \text{se } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0, i \neq k \end{cases}$$

e

$$h'_i := [X'_i, Y'_i].$$

Allora

$$h'_i := \begin{cases} h_k & \text{se } i = k \\ h_i & \text{se } a_{ik} = a_{ki} = 0, i \neq k \\ (-1)^{|\alpha_i|} (a_{ik} h_k + a_{ki} h_i) & \text{se } a_{ik} \neq 0 \text{ o } a_{ki} \neq 0, i \neq k \end{cases}$$

Definiamo $\alpha'_i := r_k(\alpha_i)$ per $i \in I$.

Si ha il seguente risultato.

Proposizione 3.13. *Le radici $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$ sono linearmente indipendenti. Gli elementi*

$$X'_1, \dots, X'_n, \quad Y'_1, \dots, Y'_n, \quad h'_1, \dots, h'_n$$

soddisfano le relazioni di Chevalley

$$[X'_i, Y'_j] = \delta_{ij} h'_i, \quad [h'_j, X'_i] = \alpha'_i(h'_j) X'_i, \quad [h'_j, Y'_i] = -\alpha'_i(h'_j) Y'_i.$$

Inoltre, se α_k è regolare, allora X'_i, y'_i, \mathfrak{h} generano $\mathfrak{g}(A)$.

La dimostrazione si può trovare nel lavoro di Musson [7] lemma 3.5.1 pp. 52-53.

Data una matrice A e una radice regolare isotropa α_k , si può costruire una nuova matrice A' tale che $\mathfrak{g}(A')$ e $\mathfrak{g}(A)$ sono isomorfe come superalgebre di Lie. Esplicitamente, gli elementi di A' sono definiti da

$$a'_{ij} = \alpha'_j(h'_i).$$

Riscalando le righe di A' si ottengono i seguenti risultati (assumiamo che $i \neq k$ e $j \neq k$):

$$a'_{kk} := a_{kk} \quad a'_{kj} := a_{kj} \quad a'_{ik} := -a_{ki}a_{ik}$$

$$a'_{ij} := \begin{cases} a_{ij} & \text{se } a_{ik} = a_{ki} = 0 \\ a_{ki}a_{ij} & \text{se } a_{ik} \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ e } a_{kj} = a_{jk} = 0 \\ a_{ki}a_{ij} + a_{ik}a_{kj} + a_{ki}a_{ik} & \text{se } a_{ik} \text{ o } a_{ki} \neq 0 \text{ e } a_{kj} \text{ o } a_{jk} \neq 0 \end{cases}$$

Si dice allora che A' si ottiene da A (o Π' da Π) per *riflessione dispari* di vettore α_k . Se Δ'^+ è l'insieme delle radici positive rispetto a Π' allora

$$\Delta'^+ = (\Delta^+ \setminus \{\alpha_k\}) \cup \{-\alpha_k\}.$$

Si dice Π' una *base riflessa* se può essere ottenuta da Π con una successione di riflessioni pari e dispari. Una radice α si dice *reale* se α o $\frac{1}{2}\alpha$ è semplice in una qualche base riflessa Π' , e si dice *immaginaria* altrimenti.

Una riflessione dispari di vettore α_k , radice isotropa reale, è comunque una riflessione. Se $A'' = r'_k(r_k(A))$, allora esiste una matrice diagonale e invertibile D tale che $A'' = DA$ e degli scalari b_i, c_i tali che $X''_i = b_i X_i$ e $Y''_i = c_i Y_i$. Comunque, se α_k è singolare, allora la sottoalgebra generata da $X'_1, \dots, X'_n, Y'_1, \dots, Y'_n$ e \mathfrak{h} è necessariamente un sottoalgebra propria di $\mathfrak{g}(A)$ e r_k non è invertibile.

Esempio 3.14. $\mathfrak{sl}(1, 2)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\otimes - \otimes \xrightarrow{r_1} \otimes - \circ$$

Vediamo ora un ultimo risultato sui moduli finito-dimensionali.

Teorema 3.15. *Sia $l = \mathbb{R}\alpha$ una retta di $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$, dove \mathfrak{g} è una superalgebra di Lie semplice e classica. Assumiamo che $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ sia un peso tale che il $\mathfrak{g}^l + \mathfrak{h}$ -modulo irriducibile con peso più alto λ sia finito dimensionale. Allora $r_l\lambda = s_\alpha\lambda$ se \mathfrak{g}^l è isomorfo a \mathfrak{sl}_2 , $\mathfrak{osp}(1,2)$ o $\mathfrak{q}(2)$. Se \mathfrak{g}^l è unidimensionale nilpotente, allora $r_l\lambda = \lambda$. Se \mathfrak{g}^l è isomorfo a $\mathfrak{sl}(1,1)$, allora*

$$r_l\lambda = \begin{cases} \lambda - \alpha & \text{se } \lambda(h_\alpha) \neq 0 \\ \lambda & \text{se } \lambda(h_\alpha) = 0 \end{cases}$$

Si hanno quindi delle condizioni necessarie più forti perchè il modulo $V_{\mathfrak{b}}(\lambda)$ abbia dimensione finita. Infatti, il peso $r_{l_1}r_{l_2}\dots r_{l_k}\lambda$ deve essere dominante rispetto alla sottoalgebra di Borel $r_{l_1}r_{l_2}\dots r_{l_k}\mathfrak{b}$ per ogni successione di riflessioni $r_{l_1}, r_{l_2}, \dots, r_{l_k}$ applicate a \mathfrak{b} . Questa condizione risulta anche sufficiente come prova Serganova in [9].

Appendice A

Le algebre di Lie classiche

Vogliamo proporre in appendice lo studio della struttura delle algebre di Lie classiche. Mostriamo che sono semisemplici e costruiamo le loro matrici di Cartan e i diagrammi di Dynkin. Il fatto che sono semplici deriva dal fatto che il loro diagramma di Dynkin è connesso. Per una trattazione approfondita e per le dimostrazioni facciamo riferimento al testo di Varadarajan [11] pp. 293-305.

Proposizione A.1. *Sia \mathfrak{g} una algebra di Lie su \mathbb{C} . Sia \mathfrak{h} un sottoalgebra abeliana di \mathfrak{g} , Δ un sottoinsieme finito di $\mathfrak{h}^* \setminus \{0\}$. Per ogni $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sia*

$$\mathfrak{g}_\lambda = \{X \in \mathfrak{g}, [H, X] = \lambda(H)X \text{ per ogni } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Se le sono soddisfatte le seguenti condizioni:

- (i) Δ genera \mathfrak{h}^*
- (ii) $\Delta = -\Delta$, e $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}] \neq 0$ per ogni $\alpha \in \Delta$
- (iii) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$

Allora \mathfrak{g} è semisemplice, \mathfrak{h} è CSA, e (iii) è la decomposizione in spazi di radici di \mathfrak{g} rispetto a \mathfrak{h} .

Assumiamo che le algebre siano definite su campo complesso.

L'algebra $A(l)$, ($l \geq 1$).

Sia $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1)$, con l un intero più grande di uno. Sia \mathfrak{h} la sottoalgebra abeliana di tutti gli elementi diagonali di \mathfrak{g} ; se $a_1, \dots, a_{l+1} \in \mathbb{C}$, $\text{diag}(a_1, \dots, a_{l+1})$ denota una matrice diagonale. Scriviamo E_{ij} per la matrice il cui elemento ij sia uno, e tutto gli altri siano nulli. Le matrici

$$E_{ii} - E_{i+1,i+1}, \quad E_{ij}, \quad i \neq j$$

formano una base per \mathfrak{g} .

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}$ funzioni lineari definite su \mathfrak{h} da

$$\lambda_i : \text{diag}(a_1, \dots, a_{l+1}) \mapsto a_i.$$

Definiamo Δ :

$$\Delta = \{\lambda_i - \lambda_j : i \neq j, 1 \leq i, j \leq l+1\}.$$

Per la proposizione abbiamo che \mathfrak{g} è semisemplice, \mathfrak{h} è CSA, e Δ è lo spazio di radici che induce la decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha$.

Se $\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$ allora $\Delta = \{\pm(\alpha_i + \dots + \alpha_j), 1 \leq i \leq j \leq l\}$ e $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ è uno spazio di radici semplici.

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice di Cartan di \mathfrak{g} . Gli elementi fuori dalla diagonale sono dati da

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } |j-i| \geq 2 \\ -1 & \text{se } |j-i| = 1 \end{cases}$$

Dunque il diagramma di Dynking di \mathfrak{g} è

$$\begin{array}{cccc} \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \dots & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{l-1} & & \alpha_l \end{array}$$

così \mathfrak{g} è semplice.

Sia Π_r il gruppo delle permutazioni di $\{1, \dots, r\}$. Per $s \in \Pi_{l+1}$, scriviamo \bar{s} la trasformazione lineare di \mathfrak{h} data da

$$\bar{s} : \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}) \mapsto \text{diag}(\alpha_{s^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{s^{-1}(l+1)})$$

se $i \neq j$ allora la riflessione corrispondente alla radice $\lambda_i - \lambda_j$ è \bar{s}_{ij} dove s_{ij} è la permutazione che scambia i con j e lascia gli altri fissi. Le permutazioni di questa forma generano Π_{l+1} e quindi

$$W = \{\bar{s} : s \in \Pi_{l+1}\}$$

è il gruppo di Weyl di $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

L'algebra D_l , ($l \geq 2$).

Sia $l \geq 2$ un intero e V un spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione $2l$. Sia $(,)$ un forma bilineare, simmetrica, non singolare su $V \times V$. Consideriamo l'algebra di Lie \mathfrak{g} di tutti gli endomorfismi di V tali che

$$(Lu, v) + (u, Lv) = 0 \quad u, v \in V.$$

Questa algebra si denota con D_l o come $\mathfrak{so}(2l)$.

Si può mostrare che esiste una base $\{u_1, \dots, u_{2l}\}$ per V tale che

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } |j - i| \neq l \\ 1 & \text{se } |j - i| = l \end{cases}$$

Per ogni endomorfismo L indichiamo con \tilde{L} la sua matrice rispetto alla base $\{u_1, \dots, u_{2l}\}$. Se la forma è

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I}_l \\ \mathcal{I}_l & 0 \end{bmatrix}$$

allora si vede che \mathfrak{g} è l'insieme degli endomorfismi L tali che

$$\tilde{L}^t F + F \tilde{L} = 0$$

e quindi $\tilde{L} \in \mathfrak{g}$ se e solo se

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{bmatrix} \quad B^t = -B, \quad C^t = -C$$

Sia \mathfrak{h} l'insieme degli elementi di \mathfrak{g} della forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{bmatrix}$, con $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_l)$ matrice diagonale. sia λ_i $1 \leq i \leq l$ una funzione lineare su \mathfrak{h} definita da

$$\lambda_i : \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{bmatrix} \mapsto a_i$$

.

Così si prova che \mathfrak{g} è semisemplice di rango l e \mathfrak{h} è una CSA. Inoltre si ha che

$$\Delta = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j) : 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\pm(\lambda_p + \lambda_q) : 1 \leq p < q \leq l\}$$

. E siano

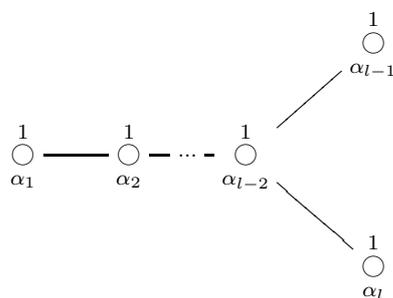
$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \quad \alpha_l = \lambda_{l-1} + \lambda_l$$

allora $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ è un sistema di radici semplice.

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice di Cartan di \mathfrak{g} rispetto a \mathfrak{h} e α_i . Per gli elementi fuori dalla diagonale si ha che

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ e } |j-i|=1, \\ & \text{o se uno tra } i, j = l \text{ e l'altro è } l-2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il diagramma di Dynkin è



se $l = 2$, il diagramma è



se $l = 3$

$$\begin{array}{ccc} \overset{1}{\circ} & \text{---} & \overset{1}{\circ} & \text{---} & \overset{1}{\circ} \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \end{array}$$

dunque D_2 è somma diretta di due copie di A_1 , D_3 è isomorfo ad A_3 . Quindi per $l \geq 3$, D_l è semplice.

Sia Π_l il gruppo delle permutazioni, e sia ε^+ il gruppo moltiplicativo delle l -uple $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ dove gli $\varepsilon_i = \pm 1$ e $\prod \varepsilon_i = 1$, inoltre il prodotto è componente per componente. Definiamo l'azione su \mathfrak{h} di Π_l e ε^+ come:

$$s : \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}) \mapsto \text{diag}(\alpha_{s^{-1}(1)}, \dots, \alpha_{s^{-1}(l+1)})$$

e

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l) : \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_{l+1}) \mapsto \text{diag}(\varepsilon_1 \alpha_1, \dots, \varepsilon_l \alpha_l).$$

Questo ci dà una rappresentazione fedele di Π_l e ε^+ , e quindi li identifichiamo con la loro immagine in $GL(\mathfrak{h})$. Si osserva che $\Pi_l \varepsilon^+ = \varepsilon^+ \Pi_l$ è gruppo di Weyl di $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e ha $l!2^{l-1}$ elementi.

L'algebra C_l , ($l \geq 2$).

Sia $l \geq 2$ un intero e V un spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione $2l$. Sia $(,)$ un forma bilineare, antisimmetrica, non singolare su $V \times V$. Consideriamo l'algebra di Lie \mathfrak{g} di tutti gli endomorfismi L di V tali che

$$(Lu, v) + (u, Lv) = 0 \quad u, v \in V.$$

Questa algebra si denota con C_l o come $\mathfrak{sp}(2l)$.

Si può mostrare che esiste una base $\{u_1, \dots, u_{2l}\}$ per V tale che

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 0 & \text{se } |j - i| \neq l \\ 1 & \text{se } j = l + i \end{cases}$$

Per ogni endomorfismo L indichiamo con \tilde{L} la sua matrice rispetto alla base $\{u_1, \dots, u_{2l}\}$. Se la forma è

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathcal{I}_l \\ -\mathcal{I}_l & 0 \end{bmatrix}$$

allora si vede che \mathfrak{g} è l'insieme degli endomorfismi L tali che

$$\tilde{L}^t F + F \tilde{L} = 0$$

e quindi $\tilde{L} \in \mathfrak{g}$ se e solo se

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A^t \end{bmatrix} \quad B^t = B, C^t = C$$

Sia \mathfrak{h} l'insieme degli elementi di \mathfrak{g} della forma $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{bmatrix}$, con $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_l)$ matrice diagonale. sia λ_i $1 \leq i \leq l$ una funzione lineare su \mathfrak{h} definita da

$$\lambda_i : \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{bmatrix} \mapsto a_i$$

Così si prova che \mathfrak{g} è semisemplice di rango l e \mathfrak{h} è una CSA. Inoltre si ha che l'insieme delle radici $\Delta = P \cup -P$ con

$$P = \{\lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq l\} \cup \{\lambda_p + \lambda_q : 1 \leq p \leq q \leq l\}$$

E siano

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \quad \alpha_l = 2\lambda_l$$

allora $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ è un sistema di radici semplice.

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice di Cartan di \mathfrak{g} rispetto a \mathfrak{h} e α_i . Per gli elementi fuori dalla diagonale si ha che

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ e } |j-i|=1, \text{ o se } i=l \text{ e } j=l-1 \\ -2 & \text{se } i=l-1 \text{ e } j=l \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il diagramma di Dynkin è

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{1}{\circ} & \text{---} & \overset{1}{\circ} & \text{---} & \dots & \text{---} & \overset{1}{\circ} & \text{=} & \overset{2}{\circ} \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{l-1} & & \alpha_l \end{array}$$

Quindi \mathfrak{g} è semplice.

Sia come prima Π_l il gruppo delle permutazioni, e sia ε il gruppo moltiplicativo delle l -uple $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$ dove gli $\varepsilon_i = \pm 1$ e il prodotto è componente per componente. Definendo l'azione come prima abbiamo una rappresentazione fedele di Π_l e ε , così possiamo identificarli con la loro immagine in $GL(\mathfrak{h})$. Si osserva che $\Pi_l \varepsilon = \varepsilon \Pi_l$ è gruppo di Weyl di $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ e ha $l!2^l$ elementi.

L'algebra B_l , ($l \geq 1$).

Sia $l \geq 1$ un intero e V un spazio vettoriale su \mathbb{C} di dimensione $2l + 1$. Sia $(,)$ un forma bilineare, simmetrica, non singolare su $V \times V$. Consideriamo l'algebra di Lie \mathfrak{g} di tutti gli endomorfismi L di V tali che

$$(Lu, v) + (u, Lv) = 0 \quad u, v \in V.$$

Questa algebra si denota con B_l o come $\mathfrak{so}(2l + 1)$.

Si può mostrare che esiste una base $\{u_0, u_1, \dots, u_{2l}\}$ per V tale che

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i, j \geq 1 \text{ e } |j - i| = l \text{ oppure se } i = j = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per ogni endomorfismo L indichiamo con \tilde{L} la sua matrice rispetto alla base $\{u_1, \dots, u_{2l}\}$. Se la forma è

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_l \\ 0 & \mathcal{I}_l & 0 \end{pmatrix}$$

allora si vede che \mathfrak{g} è l'insieme degli endomorfismi L tali che

$$\tilde{L}^t F + F \tilde{L} = 0$$

e quindi $\tilde{L} \in \mathfrak{g}$ se e solo se

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -b^t & A & B \\ -a^t & C & -A^t \end{pmatrix},$$

con B e C antisimmetriche. Introduciamo la notazione $L = (a, b : A, B, C)$ Sia \mathfrak{h} l'insieme degli elementi di \mathfrak{g} della forma $(0, 0 : A, 0, 0)$, con

$A = \text{diag}(a_1, \dots, a_l)$ matrice diagonale. Sia λ_r $1 \leq r \leq l$ una funzione lineare su \mathfrak{h} definita da

$$\lambda_r : (0, 0 : \text{diag}(a_1, \dots, a_l), 0, 0) \mapsto a_r$$

.

Così si prova che \mathfrak{g} è semisemplice di rango l e \mathfrak{h} è una CSA. Inoltre si ha che l'insieme delle radici $\Delta = P \cup -P$ con

$$\begin{aligned} P = \{ \lambda_i - \lambda_j : 1 \leq i < j \leq l \} \\ \cup \{ \lambda_p + \lambda_q : 1 \leq p \leq q \leq l \} \\ \cup \{ \lambda_r : 1 \leq r \leq l \} \end{aligned}$$

. E siano

$$\alpha_i = \lambda_i - \lambda_{i+1} \quad (1 \leq i \leq l-1), \quad \alpha_l = \lambda_l$$

allora $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ è un sistema di radici semplice.

Sia $A = (a_{ij})$ la matrice di Cartan di \mathfrak{g} rispetto a \mathfrak{h} e α_i . Per gli elementi fuori dalla diagonale si ha che

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } 1 \leq i, j \leq l-1 \text{ e } |j-i|=1, \text{ o se } i=l-1, j=l \\ -2 & \text{se } i=l, j=l-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il diagramma di Dynkin è

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{2}{\circ} & \text{---} & \overset{2}{\circ} & \text{---} & \dots & \text{---} & \overset{2}{\circ} & \text{====} & \overset{1}{\circ} \\ \alpha_1 & & \alpha_2 & & & & \alpha_{l-1} & & \alpha_l \end{array}$$

Quindi \mathfrak{g} è semplice.

Sia Π_l e ε come nel caso di C_l e procedendo nella stessa maniera possiamo definire una rappresentazione fedele di Π_l e ε e identificarli con la loro immagine in $GL(\mathfrak{h})$. Si osserva che $\Pi_l \varepsilon = \varepsilon \Pi_l$ è gruppo di Weyl di $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$.

Riassumendo, abbiamo visto che le algebre classiche A_l , ($l \geq 1$), B_l , ($l \geq 2$), C_l , ($l \geq 3$), D_l , ($l \geq 4$) sono semplici e abbiamo determinato i relativi diagrammi di Dynkin. È ovvio dai diagrammi che queste algebre risultano non isomorfe.

Bibliografia

- [1] Claudio Carmeli, Lauren Caston, and Rita Fioresi. *Mathematical foundations of supersymmetry*. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011.
- [2] É. Cartan. *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*. Thèses présentées a la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques. Nony, 1894.
- [3] Pierre Deligne, Pavel Etingof, Daniel S. Freed, Lisa C. Jeffrey, David Kazhdan, John W. Morgan, David R. Morrison, and Edward Witten, editors. *Quantum fields and strings: a course for mathematicians. Vol. 1, 2*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. Material from the Special Year on Quantum Field Theory held at the Institute for Advanced Study, Princeton, NJ, 1996–1997.
- [4] Crystal Hoyt and Vera Serganova. Classification of finite-growth general Kac-Moody superalgebras. *Comm. Algebra*, 35(3):851–874, 2007.
- [5] J.-P. Hurni. Semisimple Lie superalgebras which are not the direct sums of simple Lie superalgebras. *J. Phys. A*, 20(1):1–14, 1987.
- [6] V. G. Kac. Lie superalgebras. *Advances in Math.*, 26(1):8–96, 1977.
- [7] Ian M. Musson. *Lie superalgebras and enveloping algebras*, volume 131 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

-
- [8] I. B. Penkov. Characters of typical irreducible finite-dimensional $q(n)$ -modules. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 20(1):37–45, 96, 1986.
- [9] Ivan Penkov and Vera Serganova. Generic irreducible representations of finite-dimensional Lie superalgebras. *Internat. J. Math.*, 5(3):389–419, 1994.
- [10] Jean-Pierre Serre. *Complex semisimple Lie algebras*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Translated from the French by G. A. Jones, Reprint of the 1987 edition.
- [11] V. S. Varadarajan. *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, volume 102 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1984. Reprint of the 1974 edition.
- [12] V. S. Varadarajan. *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*, volume 11 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2004.