

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**IL GRUPPO DELLE TRECCE  
ED IL TEOREMA DI MARKOV**

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Luca Migliorini

Presentata da:  
Angelica Simonetti

II Sessione  
Anno Accademico 2012-13



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Presentazione del gruppo</b>	<b>1</b>
1.1 Definizione algebrica . . . . .	1
1.1.1 Gruppo delle trecce e gruppo simmetrico . . . . .	1
1.2 Definizione geometrica . . . . .	2
1.2.1 Diagrammi di trecce . . . . .	3
1.2.2 Una struttura di gruppo per $\mathcal{B}_n$ . . . . .	5
1.3 Trecce come automorfismi di gruppi liberi . . . . .	8
1.4 Trecce ed omomorfismi . . . . .	9
1.4.1 L'isomorfismo $B_n \cong \mathfrak{M}(D, Q_n)$ . . . . .	9
<b>2 Link e trecce</b>	<b>13</b>
2.1 Introduzione a link, nodi e trecce chiuse . . . . .	13
2.1.1 Link e diagrammi di link . . . . .	13
2.1.2 Trecce chiuse e diagrammi . . . . .	15
2.2 Il teorema di Alexander . . . . .	19
<b>3 Il teorema di Markov</b>	<b>25</b>
3.1 Azioni e funzioni di Markov . . . . .	25
3.2 Deduzione del teorema dal lemma 3.1.3 . . . . .	28
3.2.1 Riduzione del teorema 3.1.1 alla proposizione 3.2.4 . . . . .	29
3.2.2 Riduzione della proposizione 3.2.4 al lemma 3.2.6 . . . . .	30
3.2.3 Dimostrazione del lemma 3.2.6 . . . . .	32
3.3 Dimostrazione del lemma 3.1.3 . . . . .	33
3.3.1 L'involuzione $\beta \mapsto \bar{\beta}$ e le trecce fantasma . . . . .	33
3.3.2 Dimostrazione del lemma 3.1.3 . . . . .	40
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Introduzione

Il lavoro prende in esame i gruppi di trecce, presentati per la prima volta in modo formale da Emile Artin negli anni '20, più precisamente in un articolo del 1925, anche se essi comparivano in modo implicito già in alcuni articoli di Adolf Hurwitz. Gli studi di Artin furono inizialmente motivati dalla costruzione geometrica delle trecce, ma subito divenne evidente come alla base ci fosse una forte struttura algebrica: da allora la teoria ha continuato ad essere oggetto di studio e d'interesse, rivelando connessioni con campi diversi della matematica. Si sono trovate nuove rappresentazioni algebriche dei gruppi di trecce (Bourbaki, Lawrence-Krammer-Bigelow), e nuovi invarianti per isotopia, tra questi il polinomio di Jones. La teoria ha inoltre mostrato di avere numerose applicazioni, dalla robotica alla biologia alla fisica teorica e non mancano problemi ancora aperti.

Dei gruppi di trecce esiste una descrizione puramente algebrica, che mostra legami con il gruppo simmetrico, una definizione topologica, che riconosce i gruppi di trecce come particolari gruppi fondamentali, o ancora una loro rappresentazione come gruppi di classi di mappe. Il fascino di tali gruppi proviene proprio dal fatto che esse hanno al contempo una rappresentazione geometrica estremamente intuitiva, e così tante definizioni, ciascuna delle quali ne mette in luce caratteristiche peculiari. È inoltre motivo di interesse per i gruppi di trecce, l'esistenza di uno stretto legame tra le trecce ed i link, (o i nodi, visti come particolari link). Sempre dal punto di vista geometrico non è difficile immaginare il collegamento tra trecce e link: è sempre possibile infatti ottenere un link da una treccia geometrica data 'chiudendola', cioè collegandone le estremità. L'intuizione del legame tra i due oggetti matematici porta alla formulazione di due domande fondamentali:

È sempre possibile trasformare un link dato nella chiusura di una treccia?

Quali chiusure di trecce rappresentano lo stesso link?

Alla prima domanda risponde in modo affermativo il teorema di Alexander, dimostrato dal matematico nel 1928.

Per rispondere alla seconda invece occorre il teorema di Markov, che fornisce relazione d'equivalenza sull'insieme delle trecce tale per cui due trecce appartengono alla stessa classe di equivalenza se e solo se hanno chiusure isotope.

Nel primo capitolo della tesi vengono introdotti i gruppi di trecce, dandone una

---

definizione algebrica, mediante generatori e relazioni, ed una geometrica e mostrando come le due definizioni siano tra loro equivalenti. Nel secondo capitolo invece, si mette in evidenza il legame di cui si è parlato tra trece e link, dando la definizione di ‘chiusura’ di una treccia geometrica. L’ultima sezione del capitolo verte sulla presentazione di uno dei due risultati centrali già citati: il teorema di Alexander. Il terzo capitolo, infine, è dedicato al teorema di Markov ed alla sua dimostrazione.

# Capitolo 1

## Presentazione del gruppo

### 1.1 Definizione algebrica

Diamo una prima definizione del gruppo delle trecce presentandolo mediante generatori e relazioni:

**Definizione 1.1.** Il gruppo delle trecce di Artin  $B_n$  è il gruppo generato da  $n - 1$  generatori  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  tali che valgono le seguenti relazioni:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \forall \quad i, j = 1, 2, \dots, n - 1 \quad \text{con} \quad |i - j| \geq 2 \quad (1.1)$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n - 2 \quad (1.2)$$

*Osservazione 1.* Dalla definizione si osserva in modo immediato che  $B_1$  è il gruppo banale; il gruppo  $B_2$  invece è generato da un unico generatore  $\sigma_1$  senza alcuna relazione, quindi si tratta di un gruppo ciclico infinito.

#### 1.1.1 Gruppo delle trecce e gruppo simmetrico

Consideriamo il gruppo simmetrico su  $n$  lettere  $\mathfrak{S}_n$  e le trasposizioni semplici  $s_1, \dots, s_{n-1}$  dove  $s_i$  è la permutazione che scambia l' $i$ -esimo elemento con l' $i + 1$ -esimo e lascia gli altri fissati. Si può verificare che tali trasposizioni verificano le relazioni 1.1 e 1.2 date per il gruppo delle trecce, tuttavia per  $s_1, \dots, s_{n-1}$  vale un'ulteriore condizione:  $s_i^2 = Id_{\mathfrak{S}_n}$ . È possibile provare che esiste un unico omomorfismo  $\varphi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  utilizzando il seguente

**Lemma 1.1.1.** *Se  $s_1, \dots, s_{n-1}$  sono i generatori di un gruppo  $G$  che soddisfa le relazioni 1.1 e 1.2 allora esiste ed è unico un omomorfismo  $f : B_n \rightarrow G$  tale che  $s_i = f(\sigma_i) \quad \forall i = 1, \dots, n - 1$*

*Dimostrazione.* Sia  $F_n$  in gruppo libero su  $n - 1$  generatori. Allora esiste ed è unico un omomorfismo  $\tilde{f}$  tra  $F_n$  e  $G$ , infatti ogni elemento di  $F_n$  può essere scritto in modo unico nella forma

$$\sigma_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot \sigma_{n-1}^{\epsilon_{n-1}} \quad \text{con } \epsilon_i = \pm 1,$$

quindi, fissate le immagini dei generatori  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ , deve necessariamente valere

$$\tilde{f}(\sigma_1^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot \sigma_{n-1}^{\epsilon_{n-1}}) = \tilde{f}(\sigma_1)^{\epsilon_1} \cdot \dots \cdot \tilde{f}(\sigma_{n-1})^{\epsilon_{n-1}}.$$

$\tilde{f}$  induce poi l'omomorfismo  $f$  cercato, ricordando che per la prima relazione vale

$$\tilde{f}(\sigma_i \sigma_j) = \tilde{f}(\sigma_i) \tilde{f}(\sigma_j) = s_i s_j = s_j s_i = \tilde{f}(\sigma_j) \tilde{f}(\sigma_i) = \tilde{f}(\sigma_j \sigma_i)$$

e per la seconda

$$\tilde{f}(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) = s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} = \tilde{f}(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1})$$

□

L'omomorfismo  $\varphi$  è suriettivo perchè le trasposizioni semplici generano  $\mathfrak{S}_n$ , ma non iniettivo; ad esempio  $\varphi(\sigma_i^2) = s_i^2 = Id_{\mathfrak{S}_n}$ ; il suo nucleo, indicato con  $P_n$ , è detto gruppo delle trecce pure.

*Osservazione 2.* Il gruppo delle trecce può essere dunque considerato come una generalizzazione del gruppo simmetrico: basta eliminare l'ultima relazione per passare da un gruppo con un numero finito di elementi ( $n!$ ) ad un gruppo di cardinalità infinita. L'omomorfismo  $\varphi$  fornisce poi un'ulteriore informazione:  $\mathfrak{S}_n$  non è abeliano per  $n \geq 3$ , quindi per la suriettività di  $\varphi$ , non può esserlo neanche  $B_n$ . Il legame tra  $\mathfrak{S}_n$  e  $B_n$  apparirà più chiaro con la presentazione geometrica del secondo.

## 1.2 Definizione geometrica

*Notazione:* Indichiamo con  $I$  l'intervallo chiuso  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$

**Definizione 1.2.** Una treccia geometrica su  $n \geq 1$  stringhe è un insieme  $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$  costituito da  $n$  intervalli topologici tali che la proiezione  $\pi : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$  ristretta ad una singola stringa sia un omeomorfismo e

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) = \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$$

$$b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) = \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}$$



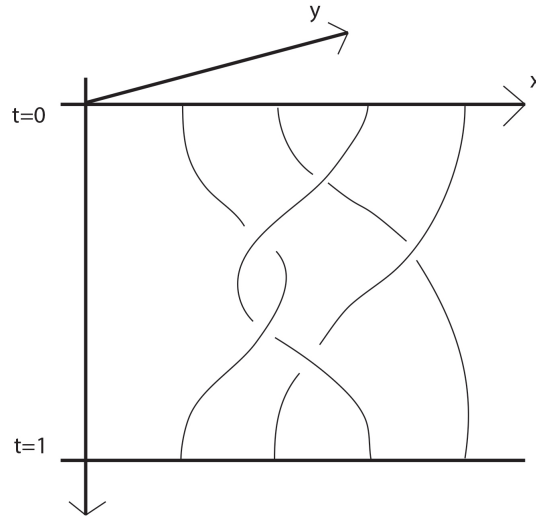


Figura 1.1: Esempio di treccia geometrica su 4 stringhe

Ogni stringa  $i$  incontra il piano  $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$  esattamente in un punto  $\forall t \in I$  ed ha come estremi il punto  $(i, 0, 0)$  ed il punto  $(\alpha(i), 0, 1)$ . La sequenza  $(\alpha(1), \dots, \alpha(n))$  rappresenta quindi una permutazione dell'insieme  $\{1, 2, \dots, n\}$ , cioè  $\alpha \in \mathfrak{S}_n$  (figura 1.1).

Due trecce geometriche  $b$  e  $b'$  si dicono isotope se esiste una applicazione continua  $F : b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  tale che

- $F(x, 0) = id_b$  e  $F(x, 1) : b \mapsto b'$
- fissato  $t$ ,  $F_t : b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$  che manda  $x \in b$  in  $F(x, t)$  è un'immersione la cui immagine è ancora una treccia su  $n$  stringhe

*Osservazione 3.* Si osserva in modo immediato che la relazione di isotopia è una relazione d'equivalenza: chiamiamo le classi di equivalenza  $b$  ancora *trecce geometriche su  $n$  stringhe* ed indichiamo l'insieme quoziente con  $\mathcal{B}_n$ . Inoltre per ogni treccia  $b$  è possibile trovarne una equivalente che sia una sottovarietà liscia unidimensionale (con bordo).

### 1.2.1 Diagrammi di trecce

Un diagramma di una treccia su  $n$  stringhe è un insieme  $d \subset \mathbb{R} \times I$  di intervalli topologici tali che

- la proiezione  $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$  manda ogni stringa omeomorficamente in  $I$
- Ogni punto di  $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$  è estremo di una sola stringa

- Ogni punto appartiene al più a due stringhe. Le stringhe si incontrano trasversalmente (una è sottostante l'altra)

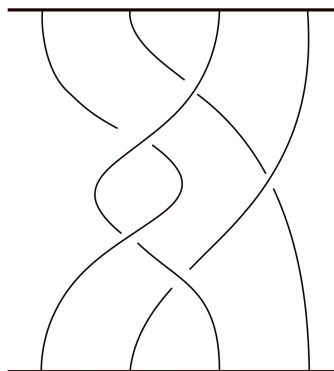


Figura 1.2: Un diagramma della treccia geometrica su 4 stringhe in figura 1.1

La terza condizione e la compattezza delle stringhe implicano che il numero di incroci è finito. Ogni diagramma rappresenta una classe di isotopia  $b(d)$  di  $\mathcal{B}_n$  e viceversa una treccia geometrica può essere facilmente ridotta ad un diagramma, mediante una proiezione su  $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ , scegliendo per ogni incrocio come treccia sottostante quella con ordinata maggiore.

Due diagrammi sono detti isotopi se esiste una mappa continua  $F : d \times I \rightarrow \mathbb{R} \times I$  che porta un diagramma nell'altro in modo tale che per ogni  $s$  fissato  $F_s(d)$  sia un diagramma e che, considerati gli incroci, la stringa che “passa sopra” conservi tale caratteristica. La relazione di isotopia data per le trecce e quella data per i diagrammi sono compatibili tra loro, quindi se due diagrammi sono equivalenti, lo saranno le trecce corrispondenti.

I diagrammi possono essere modificati mediante particolari trasformazioni indicate con  $\Omega_2, \Omega_3$ , dette azioni di Reidemeister, (figure 3.5 e 1.4). Si tratta di trasformazioni che modificano il diagramma solo localmente, in un particolare intorno, lasciando il resto invariato.

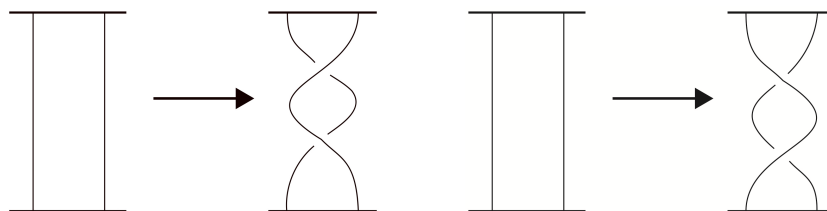
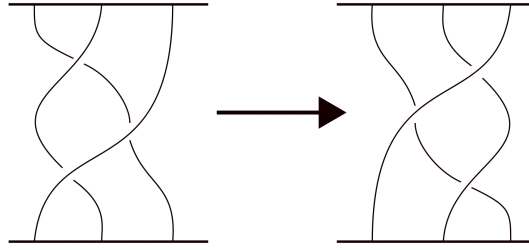


Figura 1.3: L'azione di Reidemeister  $\Omega_2$

Figura 1.4: L'azione di Reidemeister  $\Omega_3$ 

**Definizione 1.3.** Due diagrammi  $d_1$  e  $d_2$  si dicono R-equivalenti se l'uno può essere trasformato nell'altro mediante una successione finita di isotopie e azioni di Reidemeister (o loro inverse).

**Teorema 1.2.1.** *Due diagrammi presentano treccie geometriche isotope se e solo se sono R-equivalenti.*

*Dimostrazione.* cfr [1]

□

## 1.2.2 Una struttura di gruppo per $\mathcal{B}_n$

**Definizione 1.4.** Date due treccie geometriche  $b_1$  e  $b_2$  definiamo il loro prodotto come l'insieme  $b_1 b_2 \subset \mathbb{R}^2 \times I$  tale che i punti del tipo  $(x, y, 2t) \in b_1$  per  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  e i punti del tipo  $(x, y, 2t - 1) \in b_2$  se  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$

Si può provare che il prodotto così definito è compatibile con la relazione d'isotopia. Pertanto risulta definito, sul quoziente  $\mathcal{B}_n$  rispetto a tale relazione di equivalenza, un prodotto associativo ed avente come elemento neutro la treccia:  $\{1, 2, \dots, n\} \times I =: 1_{\mathcal{B}_n}$ .

Dalla definizione di prodotto per treccie geometriche ne discende in modo immediato una per diagrammi di treccie in modo tale che se  $d_1$  presenta la treccia  $b_1$  e  $d_2$  la treccia  $b_2$  allora  $d_1 d_2$  è il diagramma di  $b_1 b_2$ .

**Proposizione 1.2.2.** *Per ogni  $b \in \mathcal{B}_n$  esiste  $b^{-1}$  tale che  $bb^{-1} = b^{-1}b = 1_{\mathcal{B}_n}$*

*Dimostrazione.* Definiamo, per ogni  $i = 1, \dots, n - 1$  le treccie elementari  $s_i^+$  e  $s_i^-$ , treccie aventi due sole stringhe che si incrociano, come mostrato dai diagrammi in figura 1.5. Usando i diagrammi è facile vedere che  $s_1^+, \dots, s_{n-1}^+, s_1^-, \dots, s_{n-1}^-$  generano  $\mathcal{B}_n$  come monoide, infatti data una treccia  $b$ , il suo diagramma può essere facilmente modificato mediante isotopie in modo tale che differenti incroci tra stringhe abbiano ordinate distinte, quindi il diagramma  $d$  può essere suddiviso in tante treccie quanti sono gli incroci in modo che per ciascuna le stringhe si incontrino una volta sola: ogni treccia così ottenuta sarà isotopa ad un elemento tra i generatori indicati (figura 1.6).

La treccia  $b$  quindi può essere scritta come prodotto dei  $k$  generatori trovati (in modo indipendente dal diagramma scelto, purchè rappresenti trecce isotope)

$$b = s_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, s_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

Sempre utilizzando i diagrammi è facile verificare che  $s_i^+ s_i^- = s_i^- s_i^+ = 1$ , infatti è possibile passare da un diagramma all'altro mediante  $\Omega_2$  e  $\Omega_2^{-1}$ . Ma allora

$$bb^{-1} = (s_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, s_{i_k}^{\varepsilon_k})(s_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, s_{i_k}^{\varepsilon_k})^{-1} = (s_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, s_{i_k}^{\varepsilon_k})(s_{i_k}^{-\varepsilon_k}, \dots, s_{i_1}^{-\varepsilon_1})$$

analogamente per  $b^{-1}b$ . □

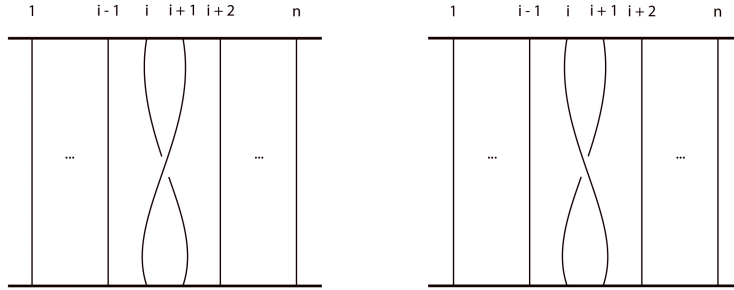


Figura 1.5: Le due trecce geometriche elementari  $s_i^+$  e  $s_i^-$

**Lemma 1.2.3.** *I generatori  $s_1^+, \dots, s_{n-1}^+$  soddisfano le relazioni 1.1 e 1.2 date per il gruppo  $B_n$ .*

*Dimostrazione.* La prima relazione  $s_i^+ s_j^+ = s_j^+ s_i^+ \quad \forall \quad i, j = 1, 2, \dots, n-1$  con  $|i-j| \geq 2$  vale perchè esiste un'isotopia che trasforma il diagramma relativo al primo membro in quello relativo al secondo. La seconda  $s_i^+ s_{i+1}^+ s_i^+ = s_{i+1}^+ s_i^+ s_{i+1}^+ \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n-2$  è verificata perchè i due diagrammi differiscono per un'azione di Reidemeister,  $\Omega_3$ . □

**Teorema 1.2.4.**  *$B_n$  e  $\mathcal{B}_n$  sono gruppi tra loro isomorfi.*

*Dimostrazione.* La proposizione 3.2.2 e il lemma 1.2.3 mostrano che  $\mathcal{B}_n$  è un gruppo generato da  $s_1^+, \dots, s_{n-1}^+$  con le solite due relazioni. Allora per il lemma 1.1.1 esiste ed è unico un omomorfismo  $\psi_+ : B_n \rightarrow \mathcal{B}_n$  tale che  $s_i^+ = f(\sigma_i) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$ ; si tratta di un omomorfismo suriettivo (lo stesso discorso potrebbe essere fatto usando  $s_1^-, \dots, s_{n-1}^-$ ).

Per mostrare che è anche iniettivo, costruiamo una funzione  $\psi'$  tale che  $\psi' \circ \psi_+ = id_{B_n}$

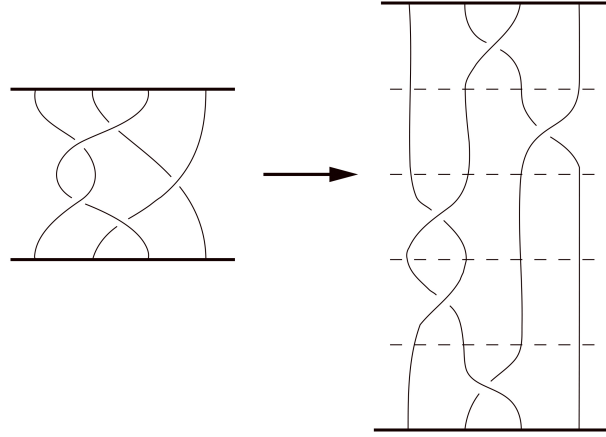


Figura 1.6: La treccia geometrica in fig. 1.1 come prodotto delle trecce elmetari

definendola attraverso i diagrammi, come nella proposizione 3.2.2:

sia  $d$  un diagramma della classe  $b \in \mathcal{B}_n$  allora scritta  $b$  come prodotto dei generatori

$$b(d) = s_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, s_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

poniamo

$$\psi'(b(d)) = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k} \in B_n$$

con

$$\sigma_i^+ = \sigma_i \quad e \quad \sigma_i^- = \sigma_i^{-1}$$

Per come è costruita è facile verificare che  $\psi' \circ \psi_+ = id_{B_n}$ : avendo mostrato che  $\psi'$  è ben definita, cioè che non dipende dal diagramma scelto, ma solo da  $b$ , sarà possibile concludere che  $\psi_+$  è un isomorfismo.

Per il teorema 1.2.1 basta verificare che dati due diagrammi  $d$  e  $d'$   $R$ -equivalenti allora vale che  $\psi'(d) = \psi'(d')$ :

- Se  $d$  viene modificato mediante un'isotopia che conserva l'ordine degli incroci tra stringhe, allora la scrittura di  $d$  come prodotto di generatori non viene alterata, quindi non viene modificata neanche l'immagine mediante  $\psi'$ ; se l'isotopia invece cambia l'ordine dei punti doppi allora il termine  $s_i^{\varepsilon_i} s_j^{\varepsilon_j}$  viene sostituito dal termine  $s_j^{\varepsilon_j} s_i^{\varepsilon_i}$  per qualche  $i, j$  tali che  $|i - j| \geq 2$ , ma  $\psi'$  manda i due termini nello stesso elemento di  $B_n$  per la prima relazione data nella definizione 1.1.
- L'azione di Reidemeister  $\Omega_2$  (o la sua inversa) aggiunge i termini  $s_i^+ s_i^-$  o  $s_i^- s_i^+$  (o li rimuove) e questo non ha effetti sull'immagine del diagramma;  $\Omega_3$  d'altra parte sotituisce il prodotto  $s_i^+ s_{i+1}^+ s_i^+$  con il prodotto  $s_{i+1}^+ s_i^+ s_{i+1}^+$ , sostituzione che non altera l'immagine mediante  $\psi'$  per la seconda relazione data nella definizione 1.1 (analogamente per l'azione inversa).

□

*Osservazione 4.* D'ora in avanti i due gruppi  $B_n$  e  $\mathcal{B}_n$  verranno identificati mediante  $\psi_+$ . Pensando in termini geometrici al morfismo  $\varphi : B_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$  la permutazione immagine della treccia  $b$  è la permutazione  $\alpha$  vista dando la definizione di treccia geometrica:  $\alpha$  manda l'elemento  $i$  nell'elemento  $j$  se la stringa avente come primo estremo  $i$  ha  $j$  come secondo estremo.

### 1.3 Trece come automorfismi di gruppi liberi

**Definizione 1.5.** Un automorfismo  $\phi$  del gruppo libero  $F_n$  su  $n$  generatori  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  è detto un *automorfismo di trece* se soddisfa le seguenti condizioni:

- i. esiste una permutazione  $\mu$  dell'insieme  $\{1, 2, \dots, n\}$  tale che  $\phi(x_k)$  è coniugato in  $F_n$  a  $x_{\mu(k)}$  per ogni  $k = 1, \dots, n$ ;
- ii.  $\phi(x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n$

Indichiamo l'insieme degli automorfismi aventi tali caratteristiche con  $\tilde{B}_n$ ; dalla definizione segue che l'inverso di un automorfismo di trece appartiene ancora a  $\tilde{B}_n$  e così la composizione di due automorfismi di trece:  $\tilde{B}_n$  è dunque un gruppo rispetto alla composizione.

**Teorema 1.3.1.** *Posto, per  $i = 1, \dots, n-1$*

$$\tilde{\sigma}_i(x_k) = \begin{cases} x_{k+1} & \text{se } k = i, \\ x_k^{-1} x_{k-1} x_k & \text{se } k = i+1, \\ x_k, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$\tilde{\sigma}_i$  è un automorfismo di trece e l'applicazione  $\sigma_i \mapsto \tilde{\sigma}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, n-1$  definisce un isomorfismo di gruppi tra  $B_n$  e  $\tilde{B}_n$ .

Il teorema fornisce una soluzione al problema della parola in  $B_n$ . Per un gruppo definito mediante generatori e relazioni, il *problema della parola* consiste nel trovare un algoritmo che permetta di decidere se una parola presentata mediante generatori rappresenta l'elemento neutro del gruppo. Per il teorema 1.3.1 una treccia  $\beta \in B_n$  è uguale a 1 se e solo se  $\tilde{\beta} = id$ : tale condizione può essere verificata controllando se  $\tilde{\beta}(x_k) = x_k$  per ogni  $k = 1, 2, \dots, n$ .

## 1.4 Trecce ed omomorfismi

Sia  $M$  una varietà topologica orientata (eventualmente con bordo  $\partial M$ ); sia  $Q$  un insieme finito (eventualmente vuoto) della parte interna  $M^\circ = M - \partial M$  di  $M$ .

**Definizione 1.6.** Un *endomorfismo* della coppia  $(M, Q)$  è un omeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  che fissa i punti di  $\partial M$  e l'insieme  $Q$  e preserva l'orientazione di  $M$ .

Ogni endomorfismo della coppia  $(M, Q)$  induce una permutazione sull'insieme  $Q$ ; inoltre se  $M$  è connessa e con bordo allora ogni omeomorfismo che fissa i punti di  $\partial M$  preserva in modo automatico l'orientazione di  $M$ .

Due automorfismi di  $(M, Q)$   $f_0$  e  $f_1$  sono detti isotopi se esiste una funzione  $\psi : M \times I \rightarrow M$  continua, tale che per ogni  $x \in M$  valga  $\psi(x, 0) = f_0(x)$ ,  $\psi(x, 1) = f_1(x)$  e per ogni  $t \in I$  fissato  $(x, t) \mapsto \psi(x, t)$  sia un endomorfismo della coppia  $(M, Q)$ . L'isotopia tra endomorfismi è una relazione di equivalenza e endomorfismi isotopi inducono la stessa permutazione su  $Q$ .

Il *mapping class group*  $\mathfrak{M}(M, Q)$  di  $(M, Q)$  è il gruppo delle classi di isotopia di endomorfismi di  $(M, Q)$  avente come operazione la composizione.

Si pone  $\mathfrak{M}(M) = \mathfrak{M}(M, \emptyset)$ .

### 1.4.1 L'isomorfismo $B_n \cong \mathfrak{M}(D, Q_n)$

Sia  $M$  una superficie orientata (eventualmente con bordo) e sia  $Q$  un sottoinsieme finito di  $M^\circ$ . Per *spanning arc* su  $(M, Q)$  intendiamo un sottoinsieme di  $M$  omeomorfo a  $I = [0, 1]$  e disgiunto da  $Q \cup \partial M$  eccetto che per gli estremi, che devono giacere in  $Q$ ; considereremo solo archi privi di auto-intersezioni.

Sia  $\alpha \subset M$  uno spanning arc su  $(M, Q)$ , l'*half-twist*

$$\tau_\alpha : (M, Q) \rightarrow (M, Q)$$

consiste in una funzione continua che coincide con l'identità al di fuori di un intorno di  $\alpha$ , e ruota  $\alpha$  in  $M$  intorno al suo punto medio di un angolo di ampiezza  $\pi$  nella direzione fornita dall'orientazione di  $M$ . Chiaramente  $\tau_\alpha \in \mathfrak{M}(M, Q)$ , inoltre  $\tau_\alpha(\alpha) = \alpha$  e  $\tau_\alpha(Q) = Q$  e  $\tau_\alpha$  induce una trasposizione su  $Q$  permutando gli estremi di  $\alpha$ ;  $\tau_\alpha^{-1}$  si ottiene ruotando  $\alpha$  come sopra ma nella direzione opposta.

Ecco alcune proprietà degli half-twist.

- i. Se  $f : (M, Q) \rightarrow (M', Q')$  è un omeomorfismo di coppie che preserva l'orientazione e  $\alpha$  è uno spanning arc su  $(M, Q)$  allora  $f(\alpha)$  è uno spanning arc su  $(M', Q')$  e  $\tau_{f(\alpha)} = f\tau_\alpha f^{-1} \in \mathfrak{M}(M', Q')$ .
- ii. Se due spanning arc  $\alpha, \alpha'$  su  $(M, Q)$  sono isotopi nella classe degli spanning arc su  $(M, Q)$  allora  $\tau_\alpha = \tau_{\alpha'}$  in  $\mathfrak{M}(M, Q)$ . Infatti se  $\alpha, \alpha'$  sono isotopi allora esiste un

endomorfismo  $f$  di  $(M, Q)$  che coincide con l'identità su  $Q$  è isotopo all'identità e mappa  $\alpha$  in  $\alpha'$ . Per i. vale

$$\tau_{\alpha'} = \tau_{f(\alpha)} = f\tau_{\alpha}f^{-1}$$

Poichè  $f$  è isotopo all'identità,  $f\tau_{\alpha}f^{-1} = \tau_{\alpha}$ .

- iii. Un endomorfismo della coppia  $(M, Q)$  induce un endomorfismo di  $M$  dimenticando l'insieme  $Q$ . L'omomorfismo di gruppi che ne risulta tra  $\mathfrak{M}(M, Q)$  e  $\mathfrak{M}(M)$  manda  $\tau_{\alpha}$  in 1.
- iv. Se  $\alpha, \beta$  sono spanning arc disgiunti su  $(M, Q)$  allora

$$\tau_{\alpha}\tau_{\beta} = \tau_{\beta}\tau_{\alpha} \in \mathfrak{M}(M, Q) \quad (1.3)$$

Tale uguaglianza si verifica usando due intorni disgiunti di  $\alpha$  e  $\beta$  nella costruzione di  $\tau_{\alpha}$  e  $\tau_{\beta}$ .

- v. Per ogni due spanning arc  $\alpha, \beta$  su  $(M, Q)$  disgiunti eccetto che per un estremo in comune vale

$$\tau_{\alpha}\tau_{\beta}\tau_{\alpha} = \tau_{\beta}\tau_{\alpha}\tau_{\beta} \quad (1.4)$$

Si verifica infatti graficamente l'uguaglianza  $\tau_{\alpha}(\beta) = \tau_{\beta}^{-1}(\alpha)$ , (il segno di uguaglianza si intende qui come isotopia nella classe degli spanning arc). Per ii.

$$\tau_{\tau_{\alpha}(\beta)} = \tau_{\tau_{\beta}^{-1}(\alpha)}$$

allora per i. otteniamo

$$\tau_{\alpha}\tau_{\beta}\tau_{\alpha}^{-1} = \tau_{\beta}^{-1}\tau_{\alpha}\tau_{\beta}$$

che è equivalente a 1.4.

Per  $n \geq 1$ , sia ora  $Q_n \subset \mathbb{R}^2$  l'insieme degli  $n$  punti  $\{(1, 0), (2, 0), \dots, (n, 0)\}$ . Sia  $D$  un disco chiuso in  $\mathbb{R}^2$  orientato in senso antiorario contenente l'insieme  $Q_n$  al suo interno. Per ogni  $i = 1, 2, \dots, n-1$  consideriamo l'arco

$$\alpha_i = [i, i+1] \times \{0\} \subset D$$

Tale arco interseca  $Q_n$  solo negli estremi e quindi dà luogo ad un half-twist

$$\tau_{\alpha_i} \in \mathfrak{M}(D, Q_n)$$

. Le formule 1.3 e 1.4 implicano che  $\tau_{\alpha_1}, \dots, \tau_{\alpha_{n-1}}$  soddisfano le relazioni 1.1 e 1.2 date per le trecce. Per il lemma 1.1.1 esiste quindi un omomorfismo di gruppi

$$\eta : B_n \rightarrow \mathfrak{M}(D, Q_n)$$



tale che  $\eta(\sigma_i) = \tau_{\alpha_i} \forall i = 1, \dots, n - 1$ .

Definiamo ora un omomorfismo di gruppi  $\rho : \mathfrak{M}(D, Q_n) \rightarrow \tilde{B}_n$ . A tale scopo scegliamo un punto base  $d \in \partial D$ : è chiaro che il gruppo fondamentale  $\pi_1(D - Q_n, d)$  è il gruppo libero  $F_n$  di rango  $n$  e avente come generatori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  rappresentati dai cappi in figura 1.7. Ogni endomorfismo  $f$  di  $(D, Q_n)$  può essere ristretto a  $D - Q_n$  dando luogo ad un endomorfismo di  $D - Q_n$ ; quest'ultimo manda  $d$  in se stesso ed induce un automorfismo di gruppi  $\rho(f)$  su  $F_n$ . Tale omomorfismo dipende solo dalla classe di isotopia di  $f$ : se due isomorfismi di  $(D, Q_n)$  sono isotopi, allora sono isotope relativamente a  $\partial D$  anche le loro restrizioni a  $D - Q_n$  e pertanto inducono lo stesso automorfismo di  $F_n$ .

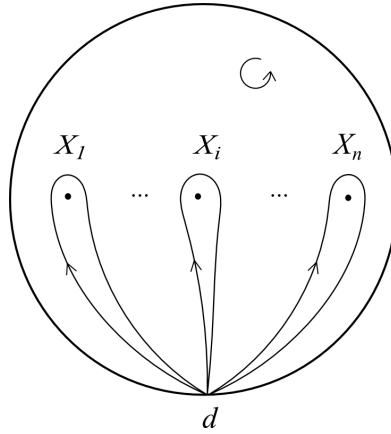


Figura 1.7: I cappi  $X_1, X_2, \dots, X_n$  su  $D - Q_n$

Occorre verificare che  $f$  sia effettivamente un automorfismo di trecce. Il cappio  $X_k$  può essere deformato in  $D - Q_n$  in un cappio più piccolo posto attorno al punto  $(k, 0)$ , che mediante l'omomorfismo  $f$  viene mappato in un altro cappio, il quale circonda il punto  $(\mu(k), 0)$  per un certo  $\mu(k) \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Esso può essere a sua volta deformato in  $X_{\mu(k)}$  in  $D - Q_n$ ; ne deduciamo che il cappio  $f(X_k)$  può essere deformato nel cappio  $X_{\mu(k)}$  in  $D - Q_n$ . Le classi di omotopia di  $\rho(f)(x_k)$  e  $x_{\mu(k)}$  sono quindi coniugate in  $\pi_1(D - Q_n, d)$  e risulta verificata la condizione i. La seconda condizione segue dal fatto che il prodotto  $x_1 x_2 \dots x_n$  è rappresentato dal cammino chiuso coincidente con  $\partial D$  basato in  $d$ . Esso viene mandato da  $f$  in se stesso, pertanto la sua classe di omotopia è invariante per  $\rho(f)$ . La mappa  $\rho$  d'altra parte un omomorfismo di gruppi perchè

$$\rho(fg) = \rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g) = \rho(f)\rho(g)$$

Possiamo infine enunciare il principale teorema che lega trecce ed omomorfismi.

**Teorema 1.4.1.** *Per ogni  $n \geq 1$  gli omomorfismi  $\eta$  e  $\rho$  sono isomorfismi. Il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
 B_n & & \\
 \eta \downarrow & \searrow \beta \mapsto \tilde{\beta} & \\
 \mathfrak{M}(D, Q_n) & \xrightarrow{\rho} & \tilde{B}_n
 \end{array}$$

dove  $\beta \mapsto \tilde{\beta} : B_n \rightarrow \tilde{B}_n$  è l'isomorfismo definito nella sezione 1.3.1.

Il teorema permette di identificare  $B_n$  con il *mapping class group*  $\mathfrak{M}(D, Q_n)$ . Abbiamo quindi due diverse interpretazioni geometriche di  $B_n$ : le trecce geometriche su  $n$  stringhe ed il gruppo di omomorfismi di un disco bidimensionale con  $n$  punti distinti.

# Capitolo 2

## Link e trecce

### 2.1 Introduzione a link, nodi e trecce chiuse

#### 2.1.1 Link e diagrammi di link

**Definizione 2.1.** Sia  $M$  una varietà topologica tridimensionale, eventualmente con bordo  $\partial M$ . Un link geometrico in  $M$  è una sottovarietà chiusa 1-dimensionale localmente piatta.

Una varietà si dice chiusa quando è compatta e senza bordo; inoltre una sottovarietà 1-dimensionale  $L$  di una varietà tridimensionale è detta localmente piatta se per ogni punto di  $L$  esiste un intorno  $U$  tale che la coppia  $(U, U \cap L)$  è omeomorfa alla coppia  $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R} \times \{(0, 0)\})$ . Questa condizione implica che  $L \subset M^\circ$  con  $M^\circ = M - \partial M$ . Poichè una varietà chiusa connessa unidimensionale è omeomorfa alla circonferenza  $S^1$ , un link risulta quindi costituito di un numero finito di componenti omeomorfe alla circonferenza  $S^1$ ; un link con una sola componente è detto *nodo* (figura 2.1).

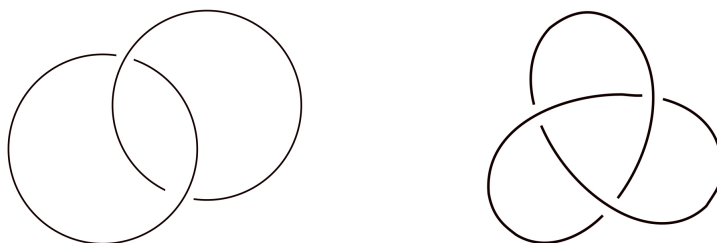


Figura 2.1: Un esempio di un link ed uno di un nodo

Due link geometrici  $L$  e  $L'$  si dicono isotopi se esiste un'isotopia di  $M$  in sè  $F : M \times I \rightarrow M$  tale che  $F(x, 0) = id_M$  e  $F(x, 1) : L \mapsto L'$ ; si osserva che il numero di componenti di un link è invariante per isotopia.

La tecnica vista per passare da trecce a diagrammi può essere applicata ai link in modo analogo: ci limitiamo a considerare i casi in cui la varietà tridimensionale  $M$  sia del tipo  $\Sigma \times I$  con  $\Sigma$  superficie (eventualmente con bordo).

Il *diagramma* di un link su  $\Sigma$  con  $n$  componenti è un insieme  $d \in (\Sigma - \partial\Sigma)$  costituito da  $n$  circonferenze con un numero finito di intersezioni ed autointersezioni, tale che in ogni intersezione o autointersezione si incontrano esattamente due rami di  $d$ , uno soprastante l'altro; le circonferenze che formano  $d$  sono dette componenti di  $d$ , i punti di intersezione incroci o punti doppi. Per passare da un link ad un suo possibile diagramma basta un'opportuna proiezione, assumendo come convenzione che per ogni incrocio il ramo soprastante sia quello che nel punto doppio ha coordinata minore lungo  $I$ , in modo opposto si passa da un diagramma al link da esso rappresentato.

Oltre alle azioni di Reidemeister già viste, aggiungiamo due azioni  $\Omega_1$  (figura 2.2): per i diagrammi di link è invece sufficiente aggiungere un'unica azione  $\Omega$  perchè la seconda può essere ottenuta dalla prima ruotando un disco di  $\Sigma$  contenente la regione del link affetta dall'azione di Reidemeister di un angolo  $\theta = \pi$ . Per analogia con quanto visto due diagrammi rappresentano link isotopi se e solo se l'uno si ottiene dall'altro mediante una successione finita di azioni di Reidemeister ed isotopie.

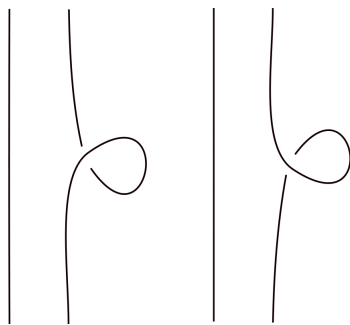


Figura 2.2: Le azioni  $\Omega_1$

Un link si dice *ordinato* se le sue componenti sono numerate; un'isotopia tra link ordinati è un'isotopia tra link che in più conserva l'ordine delle componenti.

Un link geometrico immerso in una varietà tridimensionale è, per definizione, una sottovarietà 1-dimensionale  $L$ : definiamo *orientazione* del link un'orientazione di tale sottovarietà  $L$ . Un'isotopia tra link orientati è un'isotopia tra link che in più conserva l'orientazione. Per presentare un'orientazione di un link basta orientare le singole componenti del diagramma relativo.

Ogni azione di Reidemeister vista in precedenza da luogo ad azioni di Reidemeister con orientazione. Più precisamente dalle due azioni  $\Omega_1$  si ricavano quattro azioni orientate corrispondenti, orientando tutte le stringhe nella stessa direzione, una volta verso il basso e una verso l'alto; dalle  $\Omega_2$  si ottengono otto mosse orientate ed altre otto si costruiscono a partire da  $\Omega_3$ .

### 2.1.2 Trecce chiuse e diagrammi

Si consideri come varietà tridimensionale  $M$  contenente il link il toro solido  $T = D \times S^1$ , dove  $D$  è il disco chiuso unitario bidimensionale: si tratta di una varietà compatta, connessa e orientabile con bordo  $\partial T = S^1 \times S^1$ . Sfruttando l'omeomorfismo di  $D$  con  $I \times I$  si ottiene un omeomorfismo tra  $T$  e  $S^1 \times I \times I$ , che permette di passare con facilità da un link in  $T$  ad un diagramma ad esso relativo in  $S^1 \times I$ .

**Definizione 2.2.** Un link geometrico nel toro solido è detto  $n$ -treccia chiusa se  $\forall z \in S^1$  il link  $L$  incontra il disco  $D \times \{z\}$  in  $n$  punti in modo trasversale.

Risulta chiaro che in questo caso la proiezione  $T \rightarrow S^1$ , ristretta al link  $L$  fornisce un rivestimento della circonferenza unitaria: si dice orientazione canonica della treccia chiusa il sollevamento a  $L$  dell'orientazione antioraria di  $S^1$ . Due trecce chiuse si dicono isotope se sono isotope come link.

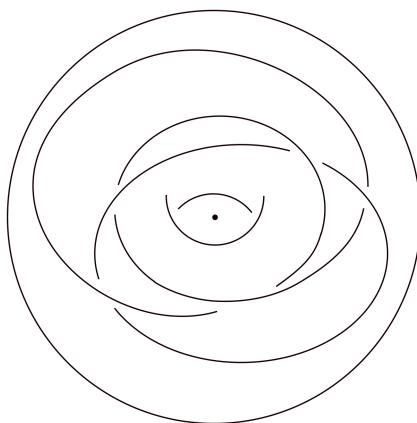


Figura 2.3: Una treccia chiusa nel toro solido

È sempre possibile costruire una treccia chiusa a partire da una treccia  $\beta \in B_n$ . Si consideri a tale scopo un disco  $D \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  che contenga al suo interno l'insieme di punti  $Q = \{(1, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}$ , allora il toro solido  $T := D \times S^1$  si ottiene

identificando le coppie di punti del cilindro del tipo  $(x, 0), (x, 1)$  per ogni  $x \in D$ : presa una treccia geometrica  $b$  nella classe di equivalenza immagine di  $\beta$  mediante  $\psi_+$ , che stia nel cilindro  $C := D \times I$  è facile verificare che la sua immagine mediante la proiezione  $C \rightarrow T$  è una treccia chiusa  $\bar{b}$  in  $T$ . L'orientazione canonica è garantita dalla direzione di  $b$ , che va da  $Q \times \{0\}$  a  $Q \times \{1\}$ .

*Osservazione 5.* La chiusura  $\bar{b}$  dipende solo dalla treccia iniziale  $\beta$ . Infatti se  $b'$  è un'altra treccia geometrica che rappresenta  $\beta$ , allora  $b'$  e  $b$  sono isotope, inoltre si può dimostrare che esiste un'isotopia di  $D \times I$  costante sul bordo che trasforma  $b$  in  $b'$ . Tale isotopia induce un'isotopia sul quoziente  $D \times S^1$  che manda  $\bar{b}$  in  $\bar{b}'$ . Quindi la classe di isotopia della chiusura della treccia dipende solo da  $\beta$  e si indica con  $\bar{\beta}$ .

*Osservazione 6.* Ogni  $n$ -treccia chiusa  $L$  è isotopa alla chiusura di una treccia  $\bar{b}$  per qualche  $b \in B_n$ , infatti possiamo deformare  $L$  nella classe delle trecce geometriche in modo tale che  $L \cap (D \times \{1\}) = Q \times \{1\}$ . Tagliando quindi il toro solido lungo il disco  $D \times \{1\}$  si ottiene una treccia in  $D \times I$  con chiusura che coincide con  $L$ .

Più avanti si considereranno anche trecce chiuse in  $\mathbb{R}^3$ . Per *treccia chiusa* in  $\mathbb{R}^3$  si intende un link geometrico orientato contenuto in un toro solido  $T \subset \mathbb{R}^3$  come treccia chiusa (secondo la definizione data in precedenza), con la sua orientazione antioraria canonica.

Si può dare una classificazione delle trecce chiuse nel toro solido, attraverso il seguente

**Teorema 2.1.1.** *Per ogni  $n \geq 1$  ed ogni  $\beta$  e  $\beta' \in B_n$  le trecce chiuse  $\bar{\beta}$  e  $\bar{\beta}'$  sono isotope nel toro solido se e solo se  $\beta$  e  $\beta'$  sono coniugate in  $B_n$ .*

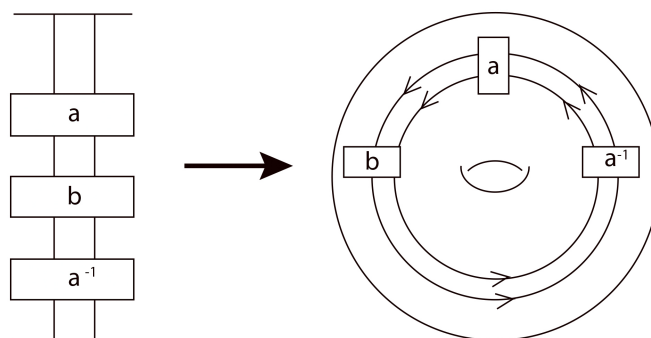


Figura 2.4: Chiusura della treccia  $\alpha\beta\alpha^{-1}$

*Dimostrazione.* Utilizzando i diagrammi è facile dimostrare che due trecce coniugate  $\beta$  e  $\alpha\beta\alpha^{-1}$  hanno la stessa chiusura (figura 2.4): in questo modo si vede infatti che  $\overline{\alpha\beta\alpha^{-1}} = \overline{\beta\beta\alpha^{-1}\alpha} = \bar{\beta}$ .

Proviamo quindi l'implicazione inversa.

Sia  $\bar{T} = D \times \mathbb{R}$ ; moltiplicando  $D$  per il rivestimento universale

$$t \mapsto e^{2\pi it} : \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

otteniamo il rivestimento universale  $\bar{T} \rightarrow T$ . Indichiamo con  $\tau : \bar{T} \rightarrow \bar{T}$  l'automorfismo di rivestimento che manda  $(x, t)$  in  $(x, t+1)$  per ogni  $x \in D, t \in \mathbb{R}$ .

Se  $L$  è una treccia chiusa su  $n$  stringhe in  $T$  allora la sua controimmagine  $\bar{L}$  è una varietà unidimensionale che incontra ogni disco  $D \times \{t\}$  con  $t \in \mathbb{R}$  in  $n$  punti: ciò implica che  $\bar{L}$  consiste di  $n$  componenti omeomorfe a  $\mathbb{R}$ .  $L$  può essere anche pensata come la chiusura di una treccia geometrica  $b$ , dove  $I/\partial I$  è identificato con  $S^1$ . Allora  $\bar{L}$  può essere scritto come

$$\bar{L} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \tau^m(b)$$

D'altra parte è possibile dimostrare che una treccia geometrica può sempre essere parametrizzata mediante un'isotopia, in altre parole

$$b = \bigcup_{t \in I} (f_t(Q), t)$$

dove  $Q$  è un insieme finito di  $n$  punti contenuti nella parte interna di  $D$ ,  $\{f_t : D \rightarrow D\}_{t \in I}$  è una famiglia continua di omeomorfismi tale che  $f_0(Q) = Q$ ,  $f_1 = id_D$  ed ogni  $f_t$  fissa i punti di  $\partial D$  (un'isotopia avente tali caratteristiche è detta *normale*).

Definiamo ora un endomorfismo di  $\bar{T}$  tale che

$$(x, t) \mapsto (f_{t-[t]} f_0^{-[t]}(x), t)$$

dove  $x \in D, t \in \mathbb{R}$  e  $[t]$  è la parte intera di  $t$ . Tale omeomorfismo fissa i punti di  $\partial \bar{T} = \partial D \times \mathbb{R}$  e manda  $Q \times \mathbb{R}$  in  $\bar{L}$ . L'omeomorfismo indotto  $(D - Q) \times \mathbb{R} \simeq \bar{T} - \bar{L}$  prova che  $D - Q = D - Q \times \{0\} \subset \bar{T} - \bar{L}$  è un retratto per deformazione di  $\bar{T} - \bar{L}$ .

Scegliamo un punto  $d \in \partial D$  e poniamo  $\bar{d} = (d, 0) \in \bar{T}$ . L'omomorfismo di inclusione

$$i : \pi_1(D - Q, d) \rightarrow \pi_1(\bar{T} - \bar{L}, \bar{d})$$

è un isomorfismo; per definizione inoltre  $\tau(\bar{d}) = (d, 1)$ : l'automorfismo di rivestimento  $\tau$  ristretto a  $\bar{T} - \bar{L}$  induce un isomorfismo

$$\pi_1(\bar{T} - \bar{L}, \bar{d}) \rightarrow \pi_1(\bar{T} - \bar{L}, \tau(\bar{d}))$$

Se poi si considera l'omomorfismo

$$\pi_1(\bar{T} - \bar{L}, \tau(\bar{d})) \rightarrow \pi_1(\bar{T} - \bar{L}, \bar{d})$$

ottenuto coniugando i cappi con il cammino  $d \times [0, 1] \subset \partial D \times \mathbb{R} \subset \bar{T} - \bar{L}$  allora la composizione degli ultimi due isomorfismi è un automorfismo di  $\pi_1(\bar{T} - \bar{L}, \bar{d})$ . Segue dalla descrizione di  $\bar{L}$  data sopra che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(D - Q, d) & \xrightarrow{i} & \pi_1(\bar{V} - \bar{L}, \bar{d}) \\ \rho(f_0) \downarrow & & \downarrow \tau_{\#} \\ \pi_1(D - Q, d) & \xrightarrow{i} & \pi_1(\bar{V} - \bar{L}, \bar{d}) \end{array}$$

dove  $\rho(f_0)$  è l'automorfismo di  $\pi_1(D - Q, d)$  indotto dalla restrizione di  $f_0$  a  $D - Q$ ; cfr. il paragrafo 1.4.1. Allora  $i^{-1}\tau_{\#}i = \rho(f_0)$ . Infatti l'omomorfismo di gruppi  $\eta : B_n \rightarrow \mathfrak{M}(D, Q)$  introdotto nel teorema 1.4.1 manda la treccia  $\beta \in B_n$  rappresentata da  $b$  nella classe di isotopia di  $f_0 : (D, Q) \rightarrow (D, Q)$ . Identificando  $\pi_1(D - Q, d)$  con il gruppo libero  $F_n$  su  $n$  generatori come del paragrafo 1.4.1 ed applicando il teorema 1.4.1 concludiamo che  $\rho(f_0) = \rho\eta(\beta) = \tilde{\beta}$  è l'automorfismo di trecce di  $F_n$  corrispondente a  $\beta$ : perciò  $i^{-1}\tau_{\#}i = \tilde{\beta}$ .

Supponiamo ora che  $\beta, \beta'$  siano due trecce con chiusure isotope in  $T$ . Presentiamole come trecce geometriche  $b$  e  $b' \subset D \times I$  e siano  $L, L' \subset T$  le loro chiusure; per ipotesi esiste un omeomorfismo  $g : T \rightarrow T$  tale che  $g$  mappa  $L$  in  $L'$  mantenendo la loro orientazione canonica e  $g$  è isotopa all'identità su  $T$ . Quest'ultima condizione implica che la restrizione di  $g$  a  $\partial T$  è isotopa all'identità  $id_{\partial T}$ ; allora  $g|_{\partial T}$  si estende ad un omeomorfismo  $g' : T \rightarrow T$  che coincide con l'identità eccetto che per un intorno di  $\partial T$  in  $T$ . Possiamo supporre che tale intorno sia disgiunto da  $L'$ , in modo tale che  $g'$  sia l'identità su  $L'$ . L'omomorfismo  $h = (g')^{-1}g : T \rightarrow T$  fissa i punti di  $\partial T$  e mappa  $L$  in  $L'$  conservando le orientazioni canoniche. Tale condizione e la suriettività dell'omomorfismo di inclusione  $\pi_1(\partial T) \rightarrow \pi_1(T) \cong \mathbb{Z}$  implicano che  $h$  induce l'automorfismo identità su  $\pi_1(T)$ . Allora  $h$  si solleva ad un omeomorfismo  $\bar{h} : \bar{T} \rightarrow \bar{T}$  tale che  $\bar{h}$  fissa i punti di  $\partial \bar{T}$ ,  $\bar{h}\tau = \tau\bar{h}$  e  $\bar{h}(\bar{L}) = \bar{L}'$ . Allora  $\bar{h}$  induce un isomorfismo  $\bar{h}_{\#} : \pi_1(\bar{V} - \bar{L}, \bar{d}) \rightarrow \pi_1(\bar{V} - \bar{L}', \bar{d})$  che commuta con  $\tau_{\#}$ .

Consideriamo ora l'automorfismo  $\varphi = (i')^{-1}\bar{h}_{\#}i$  di  $F_n = \pi_1(D - Q, d)$ , dove

$$i : \pi_1(D - Q, d) \rightarrow \pi_1(\bar{V} - \bar{L}, \bar{d})$$

e

$$i' : \pi_1(D - Q, d) \rightarrow \pi_1(\bar{V} - \bar{L}', \bar{d})$$

sono gli omomorfismi di inclusione. Otteniamo quindi  $(i')^{-1}\tau_{\#}i' = \tilde{\beta}'$  e

$$\varphi\tilde{\beta}\varphi^{-1} = (i')^{-1}\bar{h}_{\#}i i^{-1}\tau_{\#}i i^{-1}(\bar{h}_{\#})^{-1}i' = (i')^{-1}\tau_{\#}i' = \tilde{\beta}'$$



Dimostriamo ora che  $\varphi$  è un automorfismo di trecce di  $F_n$ .

Per definizione le classi di coniugio dei generatori  $x_1, x_2, \dots, x_n$  di  $F_n$  sono rappresentati da piccoli cappi che circondano i punti di  $Q$  in  $D$ ; l'inclusione  $D - Q = (D - Q) \times \{0\} \subset \bar{T} - \bar{L}$  mappa tali cappi in piccoli cappi in  $\bar{T} - \bar{L}$  posti intorno alle componenti di  $\bar{L}$ . L'omeomorfismo  $\bar{h}$  trasforma tali lacci in cappi in  $\bar{T} - \bar{L}'$  che circondano le componenti di  $\bar{L}'$ : essi rappresentano le classi di coniugio delle immagini di  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mediante l'inclusione  $D - Q = (D - Q) \times \{0\} \subset \bar{T} - \bar{L}'$ . Allora  $\varphi$  trasforma le classi di coniugio di  $x_1, x_2, \dots, x_n$  in se stesse, a meno di permutazione; risulta pertanto verificata la prima condizione data nella definizione di automorfismo di trecce. La seconda vale perchè  $x_1 x_2 \cdots x_n$  è rappresentato dal cappio coincidente con  $\partial D$  e basato in  $d$ . D'altra parte l'inclusione  $D - Q = (D - Q) \times \{0\} \subset \bar{T} - \bar{L}$  mappa tale cappio in  $\partial D \times \{0\}$ . Poichè  $\bar{h}$  fissa i punti di  $\partial \bar{T}$ ,

$$\bar{h}_{\#} i(x_1 x_2 \cdots x_n) = i'(x_1 x_2 \cdots x_n)$$

e quindi

$$\varphi(x_1 x_2 \cdots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

Il fatto che  $\varphi$  sia un automorfismo di trecce implica che  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\beta}'$  sono coniugati nel gruppo degli automorfismi di trecce di  $F_n$ : per il teorema 1.3.1 concludiamo che  $\beta$  e  $\beta'$  sono coniugate in  $B_n$ .  $\square$

Esiste pertanto una corrispondenza biunivoca tra le classi di isotopia delle  $n$ -trecce chiuse e le classi di coniugio di  $B_n$ . In particolare da ogni invariante per il coniugio in  $B_n$  discende un invariante per le classi delle treccie chiuse. Si è quindi ricondotto il problema topologico di decidere se due trecce chiuse sono isotope a quello algebrico di trovare un algoritmo per stabilire se due trecce in  $B_n$  sono coniugate.

## 2.2 Il teorema di Alexander

La dimostrazione del teorema al quale questo paragrafo è dedicato richiede alcune considerazioni preliminari.

Come prima cosa osserviamo che due circonferenze orientate disgiunte sulla sfera  $S^2$  costituiscono il bordo di una corona circolare. Queste circonferenze sono dette *incompatibili* se la loro orientazione è indotta dall'orientazione di tale corona circolare, altrimenti sono dette *compatibili*. Si consideri il diagramma  $d$  di un link orientato in  $\mathbb{R}^2$ : intorno ad un incrocio il diagramma si presenta come una treccia in  $B_2$ ,  $\sigma_1 \circ \sigma_1^{-1}$ ; sostituendo tale treccia con la treccia elemento neutro di  $B_2$  per ogni incrocio di  $d$  (figura 2.5) si ottiene una sottovarietà chiusa orientata 1-dimensionale di  $\mathbb{R}^2$  formata da un numero finito,  $n(d)$ , di circonferenze orientate disgiunte, chiamate *circonferenze di Seifert* di  $d$ . Due circonferenze di Seifert sono incompatibili se sono incompatibili in  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ . Il numero di coppie di circonferenze di Seifert incompatibili si

indica con  $h(d)$  (altezza di  $d$ ). Tale numero deve essere chiaramente compreso tra 0 e  $n(n-1)/2$  con  $n = n(d)$ : sia  $h(d)$  che  $n(d)$  sono invarianti per isotopia.

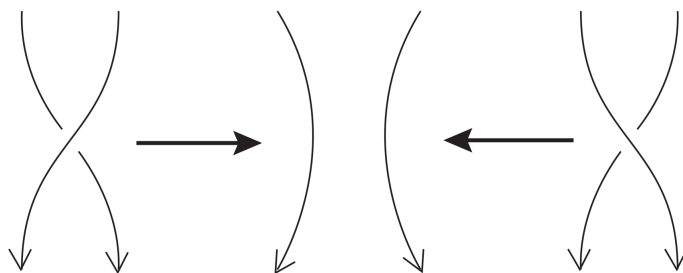


Figura 2.5: Eliminazione dell'incrocio

Il diagramma di un link orientato è il diagramma di una treccia chiusa se giace in una corona circolare di  $\mathbb{R}^2$  secondo la definizione data nel paragrafo precedente. Applicando il procedimento appena descritto al diagramma di una  $n$ -treccia chiusa, si ottengono  $n$  circonferenze di Seifert concentriche, tutte orientate in senso antiorario, quindi a due a due compatibili. Allora  $h(d) = 0$ .

Dato il diagramma di un link, sia  $|d|$  il grafo che si ottiene da  $d$  dimenticando le informazioni “sopristante” o “sottostante” relative agli incroci, che diventano i vertici di tale grafo (si veda la figura 2.7). Chiamiamo *lati* le componenti connesse del complementare dell'insieme dei vertici in  $|d|$  e *facce* le componenti connesse di  $\mathbb{R}^2 - |d|$ . Una faccia è *adiacente* ad un lato se il lato è contenuto nella sua chiusura,  $f$  si dice invece *difettiva* se è adiacente a due lati distinti  $l_1$  e  $l_2$ , tali che le circonferenze di Seifert passanti per tali lati sono distinte ed incompatibili.

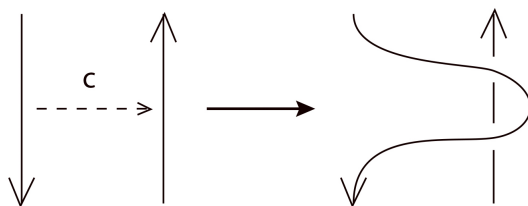


Figura 2.6: “bending” lungo l'arco  $c$

Infine un arco orientato  $c$  che va da un punto di  $l_1$  ad un punto di  $l_2$ , appartenente alla faccia  $f$  eccetto che per gli estremi è chiamato *arco di riduzione* di  $d$  in  $f$ . Siano quindi  $l_1$ ,  $l_2$  e  $c$  siffatti, è possibile applicare la seconda azione di Reidemeister

portando il lato  $l_1$  su  $l_2$  lungo  $c$  (bending di  $d$  lungo  $c$ , figura 2.6); il diagramma ottenuto rappresenta un link isotopo al primo. Esempio in figura 2.7.

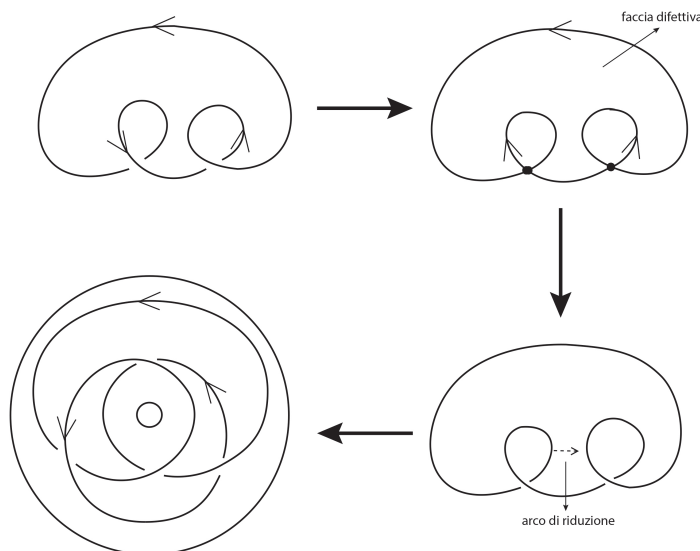


Figura 2.7: Esempio di “bending”

**Lemma 2.2.1.** *Se  $d'$  è ottenuto da un diagramma di un link orientato  $d$  in  $\mathbb{R}^2$  mediante un bending, allora  $n(d') = n(d)$  e  $h(d') = h(d) - 1$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $S_1$  e  $S_2$  le circonferenze di Seifert incompatibili coinvolte nel bending che trasforma  $d$  in  $d'$ ; chiamiamo  $S'_1$  e  $S'_2$  le circonferenze di  $d'$ . Tutte le altre circonferenze di Seifert non vengono modificate, quindi  $n(d') = n(d)$ .

Si osserva che le circonferenze  $S_1$  e  $S_2$  sono il brodo di dischi disgiunti  $D_1$  e  $D_2$  in  $S^2$ ; allora si denota con  $d_i$  il numero di circonferenze di Seifert contenute nell'interno di  $D_i$  per  $i = 1, 2$ , con  $d_0$  il numero di circonferenze che sono contenute nella corona circolare  $S^2 - (D_1 \cup D_2)$  incompatibili con  $S_1$  ed infine con  $h$  il numero di coppie di circonferenze incompatibili di  $d$  distinte da  $S_1$  e  $S_2$ .

Calcoliamo  $h(d)$ : per  $i = 1, 2$  una circonferenza orientata in  $D_i^\circ$  è incompatibile o con  $S_1$  o con  $S_2$ , non con entrambe, da cui il contributo  $d_1 + d_2$ ; una circonferenza orientata in  $S^2 - (D_1 \cup D_2)$  invece è incompatibile con  $S_1$  se e solo se è incompatibile con  $S_2$ , quindi un contributo di  $2d_0$ . Ricordando poi che  $S_1$  e  $S_2$  sono incompatibili e considerando le  $h$  coppie di circonferenze incompatibili distinte da  $S_1$  e  $S_2$  otteniamo

$$h(d) = h + d_1 + d_2 + 2d_0 + 1$$

Per conoscere il valore di  $h(d')$  si può ripetere il medesimo ragionamento, eccetto che per  $S'_1$  e  $S'_2$ , che sono compatibili. Pertanto

$$h(d') = h + d_1 + d_2 + 2d_0 = h(d) - 1$$

□

**Lemma 2.2.2.** *Un diagramma  $d$  di un link orientato in  $\mathbb{R}^2$  ha una faccia difettiva se e solo se  $h(d) \neq 0$ .*

*Dimostrazione.* Tagliando  $S^2$  lungo le circonferenze di Seifert di  $d$  si ottiene una superficie compatta  $\Sigma$  con bordo; denotiamo, per ogni incrocio  $x$  di  $d$  indichiamo con  $\gamma_x$  il segmento vicino ad  $x$  che unisce le circonferenze di Seifert; tali segmenti sono tutti disgiunti e giacciono ognuno in una componente connessa di  $\Sigma$ .

Se  $d$  ha una faccia difettiva, allora sicuramente  $h(d) \geq 0$ , occorre provare il viceversa. Si mostra, per prima cosa che esistono una componente  $F$  di  $\Sigma$  e due circonferenze di Seifert in  $\partial F$  la cui orientazione è indotta dall'orientazione di  $F$ ; consideriamo due circonferenze di Seifert incompatibili  $S_1$  e  $S_2$  di  $d$  (sappiamo che ne esiste almeno una coppia perchè per ipotesi  $h(d) \geq 0$ ) ed un arco orientato  $c \subset \mathbb{R}^2$  avente un estremo su  $S_1$  e l'altro su  $S_2$ . Possiamo assumere che  $c$  incontri ogni circonferenza di Seifert di  $d$  in al più un punto: le intersezioni di  $c$  con tali circonferenze formano un sottoinsieme finito  $A$  di  $c$ , contenente naturalmente anche gli estremi dell'arco. Ad ogni intersezione la circonferenza di Seifert corrispondente è diretta verso destra o verso sinistra rispetto a  $c$ . Poichè  $S_1$  e  $S_2$  sono incompatibili, esse incontrano gli estremi dell'arco  $c$  con direzioni opposte rispetto ad esso, allora tra le intersezioni di  $c$  in  $A$  ce ne sono necessariamente due consecutive  $a_1$  e  $a_2$  tali che le rispettive circonferenze di Seifert abbiano direzioni opposte: la componente  $F$  di  $\Sigma$  contenente la parte dell'arco  $c$  con estremi  $a_1$  e  $a_2$  è la componente cercata.

Si osserva che tale sotto-arco potrebbe incontrare un certo  $\gamma_x$  in questo caso esso non giace in una faccia di  $d$ .

Consideriamo ora una componente  $F$  tale che almeno due circonferenze di Seifert in  $\partial F$  abbiano orientazione indotta da un'orientazione di  $F$ . Fissata tale orientazione chiamiamo positive le circonferenze in  $\partial F$  con orientazione indotta da  $F$  e negative le altre. Sappiamo che la frontiera di  $F$  contiene due circonferenze positive: se  $F$  non contiene archi del tipo  $\gamma_x$  allora  $F^\circ$  è una faccia di  $d$  adiacente a due circonferenze positive, e quindi incompatibili, quindi è una faccia difettiva.

Se invece  $F$  contiene alcuni  $\gamma_x$ , consideriamo la sottosuperficie  $F'$ , ottenuta eliminando tali archi. Ogni componente  $f$  di  $F'$  è adiacente ad un certo  $\gamma_x$  ed è una faccia di  $d$ . Poiché ogni arco  $\gamma_x$  connette una circonferenza positiva ad una negativa, allora segue che ogni componente  $f$  è adiacente ad almeno una circonferenza positiva e una negativa. Esiste una  $f$  in  $F'$  adiacente ad almeno un'altra circonferenza positiva o negativa: tale  $f$  è la faccia difettiva cercata. Passando da una componente  $f$  ad una ad essa vicina, si ritrovano le stesse circonferenze di Seifert; poiché  $F$  è connessa, allora è sempre possibile spostarsi da una componente di  $F'$  all'altra: se tutte le componenti di  $F'$  fossero adiacenti esattamente ad una circonferenza positiva ed una negativa allora, per il ragionamento appena fatto  $\partial F$  avrebbe anch'essa esattamente una circonferenza positiva ed una negativa, in contraddizione con l'ipotesi.

□

**Lemma 2.2.3.** *Un diagramma  $d$  di un link orientato in  $\mathbb{R}^2$  con  $h(d) = 0$  è isotopo nella sfera  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$  ad un diagramma di una treccia chiusa.*

*Dimostrazione.* Sia  $\Sigma$  come nella dimostrazione precedente. Supponiamo che  $h(d) = 0$ ; se una componente di  $\Sigma$  avesse tre o più componenti di bordo, allora due di esse dovrebbero essere incompatibili in  $S^2$ , contraddicendo l'ipotesi,  $h(d) = 0$ . Una sottosuperficie compatta, connessa, con una o due componenti di bordo in  $S^2$  è rispettivamente un disco o una corona circolare, quindi  $\Sigma$  è formata solo da dischi e corone circolari. Mediante un'induzione sul numero di corone circolari si dimostra che è sempre possibile trasformare con un'isotopia le circonferenze di Seifert in circonferenze concentriche. Poichè  $h(d) = 0$ , allora tali circonferenze sono orientate o tutte in senso orario o tutte in senso antiorario. Nel primo caso applichiamo un'ulteriore isotopia che le orienti tutte in senso antiorario: il diagramma che ne risulta è il diagramma di una treccia chiusa. □

**Teorema 2.2.4** (J. W. Alexander). *Ogni link orientato in  $\mathbb{R}^3$  è isotopo ad una treccia chiusa.*

*Dimostrazione.* Diamo una dimostrazione costruttiva del teorema fornendo un algoritmo che permette, per ogni link geometrico  $L$ , di passare da un suo diagramma ad una treccia chiusa isotopa ad  $L$ . Per i lemmi appena visti è sufficiente operare un bending sul diagramma  $d$  per ogni faccia difettiva. I lemmi 2.2.1 e 2.2.2 assicurano che il procedimento termina dopo  $h(d)$  passi ed ha come risultato un diagramma  $d'$  tale che  $n(d') = n(d)$  e  $h(d') = 0$ . Per il lemma 2.2.3  $d'$  è isotopo ad un diagramma di una treccia chiusa  $d_0$  su  $n$  stringhe. Se  $d$  ha  $k$  incroci, allora  $d_0$  ha  $k + 2h(d)$  incroci. □

*Osservazione 7.* È ancora un problema aperto la determinazione del minimo numero di circonferenze di Seifert necessarie a descrivere un dato link o nodo.



# Capitolo 3

## Il teorema di Markov

### 3.1 Azioni e funzioni di Markov

La presentazione di un link orientato come treccia chiusa non è unica; nel paragrafo precedente abbiamo visto infatti che due trecce coniugate danno luogo nel toro solido (quindi anche in  $\mathbb{R}^3$ ) a link isotopi (teorema 2.1.1): dati  $\beta$  e  $\alpha \in B_n$ , la trasformazione  $\beta \mapsto \alpha\beta\alpha^{-1}$  è detta *prima azione di Markov*, indicata con  $M_1$ . Si definisce invece *seconda azione di Markov*, indicandola con  $M_2$ , la trasformazione  $\beta \mapsto \sigma_n^\epsilon i(\beta)$  dove  $\epsilon = \pm 1$  e  $i : B_n \hookrightarrow B_{n+1}$  è l'inclusione naturale; anche la seconda azione di Markov manda  $\beta$  in una treccia con chiusura isotopa a  $\overline{\beta}$ . Due trecce  $\beta$  e  $\beta'$ , eventualmente con un numero diverso di stringhe, si dicono *M-equivalenti* se è possibile passare dall'una all'altra con un numero finito di azioni  $M_1$ ,  $M_2$  o  $M_2^{-1}$ . Sappiamo che due trecce M-equivalenti sono isotope, ma il teorema di Markov mostra come la condizione sia anche necessaria.

**Teorema 3.1.1** (A. Markov). *Due trecce, eventualmente con un numero diverso di stringhe, hanno chiusura isotopa in  $\mathbb{R}^3$  se e solo se sono M-equivalenti.*

Una prima conseguenza del teorema è espressa dal seguente corollario:

**Corollario 3.1.2.** *Sia  $\mathcal{L}$  l'insieme di tutte le classi di link orientati in  $\mathbb{R}^3$ . La mappa  $\coprod_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathcal{L}$  che manda ogni treccia nella classe di equivalenza della sua chiusura induce una biezione sul quoziente:  $(\coprod_{n \geq 1} B_n) / \sim \rightarrow \mathcal{L}$ , dove  $\sim$  è intesa come la relazione di M-equivalenza.*

*Dimostrazione.* la suriettività segue dal teorema di Alexander, l'iniettività dal teorema di Markov: i due risultati permettono quindi di dare una descrizione delle classi di isotopia di link orientati in termini di trecce.  $\square$

Il teorema ed il corollario permettono poi di identificare gli invarianti per isotopia tra link orientati con funzioni definite su  $\coprod_{n \geq 1} B_n$  costanti sulle classi di M-equivalenza; definiamo quindi le funzioni di Markov come segue:

**Definizione 3.1.** Una funzione di Markov a valori in un certo insieme  $E$  è una successione di mappe  $\{f_n : B_n \rightarrow E\}_{n \geq 1}$  che soddisfino le seguenti condizioni:

- per ogni  $n \geq 1$  ed ogni  $\alpha$  e  $\beta \in B_n$

$$f_n(\alpha\beta) = f_n(\beta\alpha)$$

- per ogni  $n \geq 1$  ed ogni  $\beta \in B_n$

$$f_n(\beta) = f_{n+1}(\sigma_n\beta) \quad e \quad f_n(\beta) = f_{n+1}(\sigma_n^{-1}\beta)$$

Ogni funzione di Markov determina un invariante per isotopia tra link orientati  $\widehat{f}$ , infatti dato  $l$  un link orientato in  $\mathbb{R}^3$  ed una treccia  $\beta \in B_n$  tale che la sua chiusura sia isotopa a  $l$ , poniamo  $\widehat{f}(l) = f_n(\beta)$ . La definizione è ben posta, cioè non dipende dalla scelta di  $\beta$ : scelta un'altra treccia  $\beta' \in B_n$  con chiusura isotopa a  $l$  allora per il teorema 3.1.1  $\beta$  e  $\beta'$  sono  $M$ -equivalenti. Dalla definizione di  $M$ -equivalenza e da quella di funzione di Markov segue che  $f_n(\beta) = f_n(\beta')$ . Mostriamo che  $\widehat{f}$  è un invariante per isotopia tra link orientati: siano  $l$  e  $l'$  due link orientati isotopi in  $\mathbb{R}^3$  e  $\beta \in B_n$  una treccia la cui chiusura è isotopa ad  $l$  allora  $\bar{\beta}$  è isotopa anche a  $l'$  e  $\widehat{f}(l) = f_n(\beta) = \widehat{f}(l')$ .

Il resto del capitolo sarà dedicato alla dimostrazione del teorema di Markov.

Introduciamo una nuova operazione tra elementi di  $B_n$ , il *prodotto tensoriale*: date due trecce  $\alpha \in B_n$  e  $\beta \in B_m$  definiamo  $\alpha \otimes \beta \in B_{n+m}$  come la treccia che si ottiene collocando  $\beta$  alla destra di  $\alpha$  in modo che non si intersechino tra loro (figura 3.1). L'azione  $M_2$ , ad esempio, può essere ridefinita in termini di prodotto tensoriale come la trasformazione che porta  $\beta \in B_n$  in  $\sigma_n^\varepsilon(\beta \otimes 1_1) \in B_{n+1}$ .

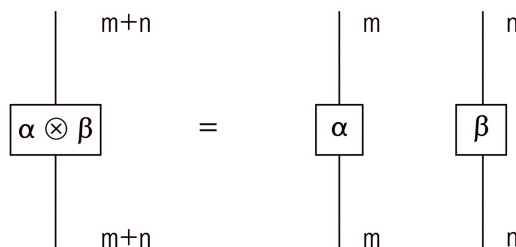


Figura 3.1: Il diagramma di  $\alpha \otimes \beta$



Vale l'identità

$$\alpha \otimes \beta = (\alpha \otimes 1_m)(1_n \otimes \beta) = (1_n \otimes \beta)(\alpha \otimes 1_m)$$

ed inoltre l'operazione gode della proprietà associativa

$$(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma = \alpha \otimes (\beta \otimes \gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma$$

Si definisce poi la treccia  $\sigma_{m,n}^\epsilon$ , dove  $\epsilon = \pm$  e  $n, m \geq 0$  sono tali che  $m + n \geq 1$ . Si consideri il diagramma della treccia elemento neutro di  $B_m$  e quello dell'elemento neutro di  $B_n$ , ponendo il primo diagramma alla sinistra del secondo e poi incrociandone le stringhe come nel diagramma di  $\sigma_1 \in B_2$  si ottiene il diagramma di  $\sigma_{m,n}^+$ , una treccia in  $B_{m+n}$  con  $mn$  incroci. Lo stesso procedimento permette di costruire  $\sigma_{m,n}^-$ , se le stringhe vengono incrociate sul modello di  $\sigma_1^{-1} \in B_2$  (figura 3.2).

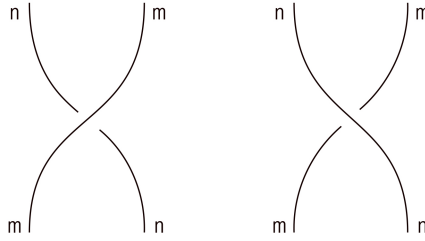


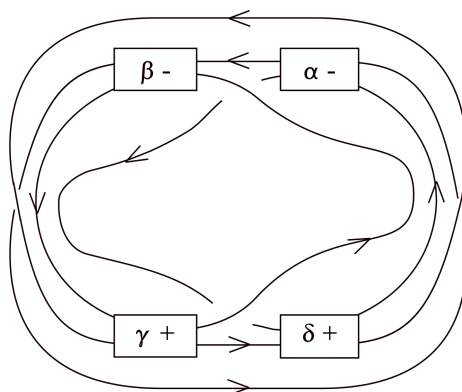
Figura 3.2: Diagrammi delle trecce  $\sigma_{m,n}^+$  e  $\sigma_{m,n}^-$

**Lemma 3.1.3.** *Siano  $m, n \geq 0$ ,  $r, t \geq 1$ ,  $\epsilon, \nu = \pm$  e siano  $\alpha \in B_{n+r}$ ,  $\beta \in B_{n+t}$ ,  $\gamma \in B_{m+t}$ ,  $\delta \in B_{m+r}$ . Si consideri la treccia*

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | \epsilon, \nu \rangle &:= (1_m \otimes \alpha \otimes 1_t)(1_{m+n} \otimes \sigma_{t,r}^\nu)(1_m \otimes \beta \otimes 1_r)(\sigma_{n,m}^{-\epsilon} \otimes 1_{t+r}) \times \\ &\times (1_n \otimes \gamma \otimes 1_r)(1_{n+m} \otimes \sigma_{r,t}^{-\nu})(1_n \otimes \delta \otimes 1_t)(\sigma_{m,n}^\epsilon \otimes 1_{r+t}) \in B_{m+r+n+t} \end{aligned}$$

Allora la classe di  $M$ -equivalenza di  $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | \epsilon, \nu \rangle$  non dipende da  $\epsilon, \nu$  e

$$\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | \epsilon, \nu \rangle \sim \langle \delta, \gamma, \beta, \alpha | \epsilon, \nu \rangle \quad (3.1)$$

Figura 3.3: Chiusura della treccia  $\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | +, + \rangle$ 

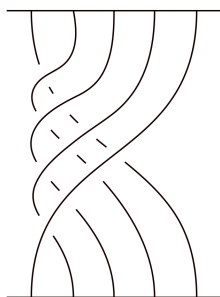
## 3.2 Deduzione del teorema dal lemma 3.1.3

Definiamo l'azione  $M_3$  come la trasformazione che porta la treccia  $\beta \in B_n$  in  $\sigma_1^\varepsilon(1_1 \otimes \beta) \in B_{n+1}$ . Ricordiamo la definizione delle due azioni di Markov  $M_1$  e  $M_2$  data all'inizio di questo capitolo.

**Lemma 3.2.1.** *L'azione  $M_3$  può essere scritta come composizione delle azioni  $M_1$  e  $M_2$ .*

*Dimostrazione.* Sia

$$\Delta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1 \in B_n$$

Figura 3.4: Diagramma di  $\Delta_5$ 

Si verifica facilmente utilizzando i diagrammi che vale, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\sigma_i \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-i}$$

allora vale in particolare

$$\Delta_{n+1}\sigma_1^\varepsilon\Delta_{n+1}^{-1} = \sigma_n^\varepsilon \quad (3.2)$$

verifichiamo ora che per ogni  $\beta \in B_n$  vale

$$\Delta_{n+1}(1_1 \otimes \beta)\Delta_{n+1}^{-1} = \Delta_n\beta\Delta_n^{-1} \otimes 1_1 \quad (3.3)$$

è sufficiente provare l'affermazione per un generatore  $\sigma_i$ , ricordando che  $1_1 \otimes \sigma_i = \sigma_{i+1} \in B_{n+1}$  e

$$\Delta_{n+1}(1_1 \otimes \sigma_i)\Delta_{n+1}^{-1} = \Delta_{n+1}\sigma_{i+1}\Delta_{n+1}^{-1} = \sigma_{(n+1)-(i+1)} = \sigma_{n-i} \in B_{n+1}$$

d'altra parte  $\Delta_n\sigma_i\Delta_n^{-1} = \sigma_{n-i} \in B_n$  e  $\Delta_n\sigma_i\Delta_n^{-1} \otimes 1_1 = \sigma_{n-i} \in B_{n+1}$ , pertanto la (3.3) è provata. moltiplicando la (3.2) e la (3.3) otteniamo

$$\Delta_{n+1}\sigma_1^\varepsilon(1_1 \otimes \beta)\Delta_{n+1}^{-1} = \sigma_n^\varepsilon(\Delta_n\beta\Delta_n^{-1} \otimes 1_1)$$

da cui

$$\sigma_1^\varepsilon(1_1 \otimes \beta) = \Delta_{n+1}^{-1}\sigma_n^\varepsilon(\Delta_n\beta\Delta_n^{-1} \otimes 1_1)\Delta_{n+1}$$

Quindi  $M_3$  è dato dalla composizione dell'operazione di coniugio per  $\Delta_n$  con l'azione  $M_2$  e con l'operazione di coniugio per  $\Delta_{n+1}^{-1}$   $\square$

### 3.2.1 Riduzione del teorema 3.1.1 alla proposizione 3.2.4

Riformuliamo il teorema di Markov in termini di trecce chiuse nel toro solido. Siano  $\widetilde{M}_2$  e  $\widetilde{M}_3$  l'analogo delle azioni di Markov per trecce chiuse. Per il teorema 2.1, per dimostrare il teorema di Markov è sufficiente provare la seguente proposizione:

**Proposizione 3.2.2.** *Due trecce chiuse in  $T$  che rappresentano link orientati isotopi in  $\mathbb{R}^3$  possono essere trasformate l'una nell'altra mediante una successione di azioni  $\widetilde{M}_2^{\pm 1}$ ,  $\widetilde{M}_3^{\pm 1}$  ed isotopie in  $T$ .*

*Nota:* d'ora in poi le successioni di azioni di Markov si considereranno sempre finite. La proposizione può essere riformulata in termini di diagrammi di trecce chiuse, ricordando le azioni di Reidemeister  $\Omega_2^{br}$  e  $\Omega_3^{br}$  definite per i link e chiamando  $\widetilde{M}_2$  e  $\widetilde{M}_3$  le azioni per diagrammi di link orientati analoghe alle azioni di Markov definite in precedenza:

**Proposizione 3.2.3.** *Due diagrammi di trecce chiuse in una corona circolare  $A \subset \mathbb{R}^2$  che rappresentano link orientati isotopi in  $\mathbb{R}^3$  possono essere trasformati l'uno nell'altro mediante una successione di azioni  $\Omega_2^{\pm 1}$ ,  $\Omega_3^{\pm 1}$ ,  $\widetilde{M}_2^{\pm 1}$ ,  $\widetilde{M}_3^{\pm 1}$  ed isotopie in  $A$ .*

Si osservi che, per quanto riguarda le isotopie, i diagrammi di link orientati intermedi non devono essere necessariamente diagrammi di trecce chiuse.

Definiamo ora *0-diagramma* il diagramma di un link orientato  $d$ , tale che  $h(d) = 0$  e tutte le circonferenze di Seifert siano orientate in senso antiorario: tali circonferenze sono dunque concentriche in  $\mathbb{R}^2$  e possono essere numerate da  $1, \dots, n(d)$  contando dalla più interna alla più esterna. Le azioni  $\Omega_2^{br}$  e  $\Omega_3^{br}$  trasformano 0-diagrammi in 0-diagrammi, inoltre dato uno 0-diagramma, se si applica l'azione  $\Omega_1$  aggiungendo un cappio sinistro ad un punto di  $d$  che si trova sulla circonferenza di Seifert più interna, si ottiene ancora uno 0-diagramma  $d'$  ed il cappio diventa la circonferenza di Seifert più interna. Tale trasformazione si indica con  $\Omega_1^{int}$ . Analogamente se si aggiunge un cappio destro ad un punto sulla circonferenza più esterna e si deforma tale cappio, facendolo passare attorno al punto all'infinito, si ottiene un altro 0-diagramma, del quale il cappio rappresenta la circonferenza più esterna. Tale azione è indicata da  $\Omega_1^{est}$ . In seguito per  $\Omega$ -azioni su 0-diagrammi si intenderà l'insieme delle trasformazioni  $\Omega_2^{br}$ ,  $\Omega_3^{br}$ ,  $\Omega_1^{int}$ ,  $\Omega_1^{est}$ , delle loro inverse e delle isotopie.

**Proposizione 3.2.4.** *Due 0-diagrammi in  $\mathbb{R}^2$  che rappresentano link orientati isotopi in  $\mathbb{R}^3$  possono essere trasformati l'uno nell'altro mediante una successione di azioni del tipo  $\Omega$ .*

Questa proposizione implica la proposizione precedente. Si osservi infatti che diagrammi di trecce chiuse in una corona circolare sono 0-diagrammi, tali che  $\Omega_1^{int} = \widetilde{M}_2$  e  $\Omega_1^{est} = \widetilde{M}_3$ . Consideriamo ora due diagrammi di trecce chiuse  $c$  e  $d$  che rappresentano link isotopi in  $\mathbb{R}^3$ . Allora per la proposizione 3.2.4 esiste una sequenza di 0-diagrammi  $c = \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n = d$  tale che per ogni  $i$ ,  $\mathcal{C}_{n+1}$  è ottenuto da  $\mathcal{C}_n$  mediante una  $\Omega$ -azione. Il lemma 2.2.3 mostra che uno 0-diagramma  $\mathcal{C}_i$  è isotopo ad una treccia chiusa  $b_i$ , ed inoltre per le osservazioni appena fatte,  $b_{i+1}$  si ottiene da  $b_i$  mediante una delle seguenti azioni:  $\Omega_2^{br}$  e  $\Omega_3^{br}$  (o loro inverse),  $\widetilde{M}_2$  e  $\widetilde{M}_3$  (o loro inverse). Allora vale la proposizione 3.2.3.

### 3.2.2 Riduzione della proposizione 3.2.4 al lemma 3.2.6

La dimostrazione della proposizione 3.2.4 inizia con il seguente lemma:

**Lemma 3.2.5.** *Siano  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  due 0-diagrammi in  $\mathbb{R}^2$  che rappresentano link orientati isotopi in  $\mathbb{R}^3$ . Allora esiste una successione di 0-diagrammi  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_m = \mathcal{E}'$  tale che per ogni  $i = 1, \dots, m-1$  il diagramma  $\mathcal{E}_{i+1}$  è ottenuto da  $\mathcal{E}_i$  mediante una  $\Omega$ -azione o mediante una sequenza di flessioni, stiramenti ed isotopie nella sfera  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$ .*

*Dimostrazione.* Poiché  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  rappresentano link isotopi, allora sicuramente l'uno può essere portato nell'altro mediante una sequenza di azioni di Reidemeister orientate del tipo  $\Omega_1^\pm$ ,  $(\Omega_2^{br})^\pm$ ,  $(\Omega_3^{br})^\pm$ ,  $\Omega_2^\pm$ , isotopie in  $\mathbb{R}^2$ , senza la necessità che i diagrammi

intermedi siano anch'essi 0-diagrammi. Noi trasformeremo questa sequenza di azioni in una successione di bendings e tightenings, isotopie e  $\Omega$ -azioni su 0-diagrammi. Ricordiamo che un'azione  $\Omega_2$  del tipo non "braidlike" che coinvolge due circonferenze di Seifert diverse corrisponde a ciò che nel capitolo precedente abbiamo chiamato "bending", mentre un'azione dello stesso tipo applicata ad un'unica circonferenza di Seifert puo essere vista come composizione di due  $\Omega_1$ , un bending ed un tightening (figura 3.5). Allora nella sequenza iniziale considerata tutte le azioni  $\Omega_2$  possono essere sostuite da bendings e tightenings.

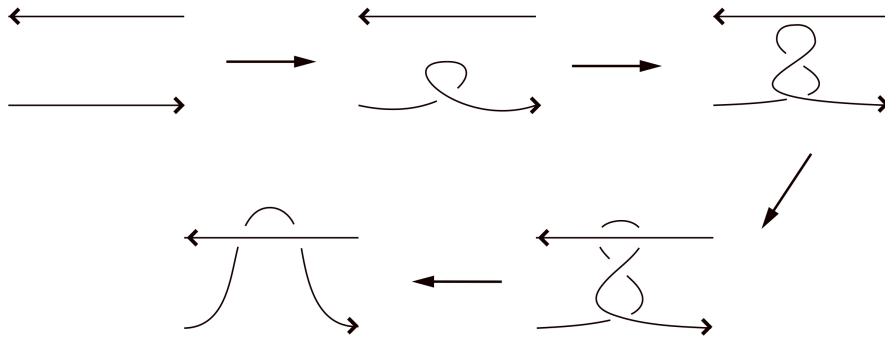


Figura 3.5: Un'espansione di  $\Omega_2$

Sia  $g$  una trasformazione del tipo  $(\Omega_2^{br})^\pm$  applicata ad un diagramma  $d$ ;  $g$  non modifica  $h(d)$ . Supponiamo che  $h(d) > 0$ , allora il diagramma ha una faccia difettiva. Possiamo scegliere in essa un arco di riduzione disgiunto dal disco sul quale agisce  $g$ ; sia  $r$  il bending di  $d$  corrispondente, allora le due trasformazioni commutano e possiamo sostituire la trasformazione  $d \mapsto g(d)$  con la seguente:

$$d \xrightarrow{r} r(d) \xrightarrow{g} gr(d) \xrightarrow{r^{-1}} r^{-1}gr(d) = g(d)$$

In questo modo la trasformazione  $g$  avviene su un diagramma avente altezza minore: ripetendo l'operazione è possibile quindi giungere ad un diagramma  $d'$  con  $h(d') = 0$  e sostituire  $g$  con una successione di bendings, tightenings ed una singola azione  $g'$  del tipo  $(\Omega_2^{br})^\pm$  sul diagramma  $d'$ . Se le circonferenze di Seifert sono orientate in senso antiorario, allora  $d'$  è uno 0-diagramma e  $g'$  è una  $\Omega$ -azione; se invece tali circonferenze sono orientate in senso orario allora sostituiamo  $g'$  con la composizione di un'isotopia di  $S^2$  che trasformi  $d'$  in uno 0-diagramma, una  $\Omega$ -azione sul diagramma ottenuto e l'isotopia inversa.

Sia  $g = \Omega_1$ . Operazioni analoghe a quelle viste sino ad ora permettono di supporre che il diagramma  $d$  su cui agisce  $g$  sia uno 0-diagramma. Supponiamo che il cappio

aggiunto da  $g$  ad un lato  $a$  del diagramma si trovi alla sua sinistra. Se  $a$  giace sulla circonferenza più interna di  $d$ , allora  $g = \Omega_1^{int}$ . Se invece giace sulla circonferenza  $m$ -esima di  $d$  con  $m \geq 2$  allora applichiamo  $m - 1$  trasformazioni del tipo  $\Omega_2^{br}$  in modo da portare  $a$  all'interno del disco avente come bordo la circonferenza di Seifert più interna, quindi applichiamo  $g = \Omega_1^{int}$  e riportiamo indietro  $a$  con una trasformazione inversa. Se il cappio si trova alla destra di  $a$ , allora si procede come sopra, ma spostando  $a$  verso la circonferenza più esterna e poi applicando  $g = \Omega_1^{ext}$   $\square$

**Lemma 3.2.6.** *Due 0-diagrammi in  $\mathbb{R}^2$  che possono essere trasformati l'uno nell'altro mediante una sequenza di flessioni (bending), stiramenti ed isotopie in  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$  possono essere portati l'uno nell'altro mediante una sequenza di  $\Omega$ -azioni.*

Questo lemma, insieme al precedente implicano la proposizione 3.2.4.

### 3.2.3 Dimostrazione del lemma 3.2.6

**Lemma 3.2.7.** *Se due diagrammi sono isotopi in  $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty$ , allora sono isotopi in  $\mathbb{R}^2$ .*

Si consideri una sequenza di flessioni (bending), stiramenti ed isotopie. Possiamo assumere che i diagrammi intermedi prodotti dalle trasformazioni giacciono tutti in  $\mathbb{R}^2 = S^2 - \{\text{inf}\}$ . Con l'espressione  $\mathcal{C} \xleftarrow{s} \mathcal{D} \xrightarrow{s'} \mathcal{C}'$  indichiamo che il diagramma  $\mathcal{C}$  viene trasformato nel diagramma  $\mathcal{D}$  mediante uno stiramento, inverso di un certo bending  $s$  e che  $\mathcal{D}$  è stato trasformato in  $\mathcal{C}'$  mediante un bending  $s'$ . Si osservi che le frecce puntano sempre verso il diagramma avente  $h$  minore; in questo caso  $h(\mathcal{C}) = h(\mathcal{C}') = h(\mathcal{D}) - 1$ , quindi la funzione  $h$  ha un massimo locale in  $\mathcal{D}$ . Chiamiamo una sequenza di questo tipo un *massimo locale*.

Consideriamo un massimo locale  $\mathcal{C} \xleftarrow{s} \mathcal{D} \xrightarrow{s'} \mathcal{C}'$  e gli archi di riduzione di  $s$  e  $s'$ . Possiamo sempre assumere che per ogni massimo locale i due archi abbiano estremi distinti e si incontrino trasversalmente in un numero finito di punti, denotato con  $s \cdot s' \neq 0$ . Allora

**Lemma 3.2.8.** *Per ogni massimo locale  $\mathcal{C} \xleftarrow{s} \mathcal{D} \xrightarrow{s'} \mathcal{C}'$  con  $s \cdot s' \neq 0$  c'è una sequenza di flessioni e stiramenti*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \xleftarrow{s_1} \mathcal{D}_1 \xrightarrow{s'_1} \mathcal{C}_2 \xleftarrow{s_2} \dots \xrightarrow{s'_{m-1}} \mathcal{C}_m \xleftarrow{s_m} \mathcal{D}_m \xrightarrow{s'_m} \mathcal{C}_{m+1} = \mathcal{C}'$$

tale che  $s_i \cdot s'_i = 0 \quad \forall i$ .

Inoltre vale il seguente

**Lemma 3.2.9.** *Per ogni massimo locale  $\mathcal{C} \xleftarrow{s} \mathcal{D} \xrightarrow{s'} \mathcal{C}'$  con  $s \cdot s' = 0$  esistono successioni di isotopie in  $S^2$  e flessioni  $\mathcal{C} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}_*$ ,  $\mathcal{C}' \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{C}'_*$  tali che  $\mathcal{C}_* = \mathcal{C}'_*$  o  $\mathcal{C}_*, \mathcal{C}'_*$  sono 0-diagrammi in  $\mathbb{R}^2$  che possono essere portati l'uno nell'altro mediante  $\Omega$ -azioni.*

Per *altezza* di una successione di bendings, tightenings ed isotopie su diagrammi di link in  $S^2$  intendiamo l'altezza massima dei diagrammi che compaiono nella successione. Proviamo il lemma 3.2.6 per induzione sull'altezza  $m$  della successione che collega due 0-diagrammi in  $\mathbb{R}^2$ .

Se  $m = 0$ , allora la sequenza consiste solo di isotopie in  $S^2$ : in questo caso il lemma 3.2.6 segue direttamente dal lemma 3.2.7.

Assumiamo quindi  $m > 0$ : è chiaro che una trasformazione del diagramma di un link in  $S^2$  ottenuta come un'isotopia seguita da un bending (o un tightening) può essere ottenuta anche come un bending (risp. un tightening) seguito da un'isotopia. Allora è possibile supporre che tutte le isotopie siano alla fine della sequenza. In particolare tutti i diagrammi di altezza  $m$  sono massimi locali; per il lemma 3.2.8 possiamo sostituire la successione di partenza con un'altra sequenza che connetta gli stessi due 0-diagrammi, avente altezza  $m$  e che in più soddisfi la condizione  $s \cdot s' = 0$  per tutti i suoi massimi locali  $\mathcal{C} \xleftarrow{s} \mathcal{D} \xrightarrow{s'} \mathcal{C}'$ . Per il lemma 3.2.9, poi per ognuno di questi massimi locali esiste una sequenza di isotopie, bendings e tightenings

$$\mathcal{C} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{C}_* \sim \mathcal{C}'_* \longleftarrow \dots \longleftarrow \mathcal{C}'$$

dove  $\sim$  sta per  $\mathcal{C}_* = \mathcal{C}'_*$  o per  $\Omega$ -azioni che trasformano  $\mathcal{C}_*$  in  $\mathcal{C}'_*$ . L'altezza di tutti i diagrammi di link in questa sequenza è minore o uguale a  $h(\mathcal{C}) = h(\mathcal{C}') \leq h(d) \leq m$ . Sostituendo ogni massimo locale con una sequenza di questo tipo otteniamo una concatenazione di successioni di altezza  $\leq m - 1$  con sequenze di  $\Omega$ -azioni sugli 0-diagrammi. Per ipotesi induttiva il lemma è provato.

### 3.3 Dimostrazione del lemma 3.1.3

#### 3.3.1 L'involutione $\beta \mapsto \bar{\beta}$ e le trecce fantasma

Iniziamo introducendo un'involutione  $\beta \mapsto \bar{\beta}$  sull'insieme delle trecce:

**Definizione 3.2.** Data  $\beta \in B_n$ , si pone  $\bar{\beta} = \Delta_n \beta \Delta_n^{-1} \in B_n$ .

Poichè  $\Delta_n^2$  appartiene al centro di  $B_n$  l'automorfismo  $\beta \mapsto \bar{\beta}$  di  $B_n$  è un'involutione. Inoltre sappiamo che  $\Delta_n \sigma_i \Delta_n^{-1} = \sigma_{n-i}$ , quindi se

$$\beta = \sigma_{i_1}^{r_1} \sigma_{i_2}^{r_2} \dots \sigma_{i_k}^{r_k}$$

allora

$$\bar{\beta} = \sigma_{n-i_1}^{r_1} \sigma_{n-i_2}^{r_2} \dots \sigma_{n-i_k}^{r_k}$$

dal punto di vista grafico il diagramma di  $\bar{\beta}$  può essere ottenuto ruotando quello di  $\beta$  intorno alla retta  $\{(n+1)/2\} \times \mathbb{R} \times \{0\}$  di un angolo  $\pi$ . Allora  $\overline{\alpha \otimes \beta} = \bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}$  per ogni  $\alpha \in B_m$  e  $\beta \in B_n$ ; inoltre  $\overline{\alpha \beta} = \bar{\alpha} \bar{\beta}$  per ogni  $\alpha, \beta \in B_n$  e  $\overline{1_n} = 1_n$ . Infine, per le considerazioni fatte,  $\overline{\sigma_{m,n}^\varepsilon} = \sigma_{n,m}^\varepsilon$ , con  $\varepsilon = \pm$ , vale il seguente

**Lemma 3.3.1.** *Se due trecce  $\alpha, \beta$  sono  $M$ -equivalenti, allora anche le trecce  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  sono  $M$ -equivalenti.*

*Dimostrazione.*  $\bar{\beta} \sim_c \beta \sim \alpha \sim_c \bar{\alpha}$  □

Introduciamo ora una nuova classe di trecce, le *trecce fantasma* (?)

**Definizione 3.3.** Una treccia  $\mu \in B_{n+k}$  con  $n \geq 1, k \geq 0$  è detta  *$n$ -ghost* destra (o  $\mu \equiv 1_n$ ) se per ogni  $m \geq 0$  e ogni  $\beta \in B_{m+n}$  si ha  $(\beta \otimes 1_k)(1_m \otimes \mu) \sim \beta$ . La treccia  $\mu$  è detta invece  *$n$ -ghost* sinistra (o  $\mu \equiv' 1_n$ ) se  $(1_k \otimes \beta)(\mu \otimes 1_m) \sim \beta$

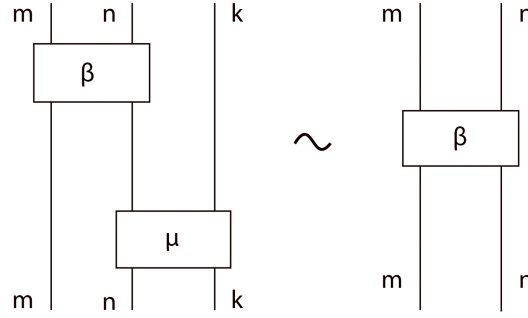


Figura 3.6: La formula  $(\beta \otimes 1_k)(1_m \otimes \mu) \sim \beta$

Data una  *$n$ -ghost* destra  $\mu$ , definiamo una trasformazione, indicata con  $\mathcal{M}(\mu)$ , tale che per ogni  $m \geq 0, \alpha, \beta \in B_{m+n}, \rho \in B_m$ ,

$$\beta(\rho \otimes 1_n)\alpha \mapsto (\beta \otimes 1_k)(\rho \otimes \mu)(\alpha \otimes 1_k)$$

Definiamo poi la trasformazione  $\mathcal{M}'(\mu)$ , tale che

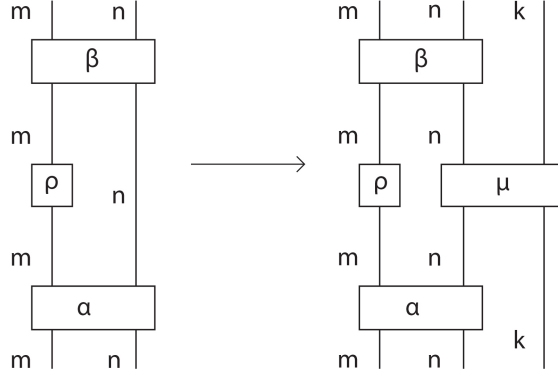
$$\beta(1_n \otimes \rho)\alpha \mapsto (1_k \otimes \beta)(\mu \otimes \rho)(1_k \otimes \alpha)$$

L'azione  $\mathcal{M}(\mu)$  e la sua inversa conservano la  $M$ -equivalenza, infatti:

$$\begin{aligned} & \beta(\rho \otimes 1_n)\alpha \sim_c \alpha\beta(\rho \otimes 1_n) \\ & \sim (\alpha\beta(\rho \otimes 1_n) \otimes 1_k)(1_m \otimes \mu) \\ & = (\alpha \otimes 1_k)(\beta \otimes 1_k)(\rho \otimes 1_{n+k})(1_m \otimes \mu) \\ & = (\alpha \otimes 1_k)(\beta \otimes 1_k)(\rho \otimes \mu) \\ & \sim_c (\beta \otimes 1_k)(\rho \otimes \mu)(\alpha \otimes 1_k) \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che l'azione  $\mathcal{M}'(\mu)$  e la sua inversa conservano la  $M$ -equivalenza.



Figura 3.7: La trasformazione  $\mathcal{M}(\mu)$ 

**Lemma 3.3.2.** Sia  $\mu \in B_{n+m}$  con  $n \geq 1$ ,  $k \geq 0$ . Se  $\mu \equiv 1_n$ , allora  $\bar{\mu} \equiv 1_n$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\beta \in B_{n+m}$  con  $m \geq 0$  e sia  $\gamma = (1_k \otimes \beta)(\bar{\mu} \otimes 1_m)$ . Occorre provare che  $\gamma \sim \beta$ . Sicuramente  $\gamma \sim_c \bar{\gamma} = (\bar{\beta} \otimes 1_k)(1_m \otimes \mu)$ , ma  $\mu \equiv 1_n$  e quindi  $(\bar{\beta} \otimes 1_k)(1_m \otimes \mu) \sim \bar{\beta} \sim_c \beta$ , da cui la tesi.  $\square$

Per ogni  $n \geq 1$ , si pone  $\theta_n^+ = \Delta_n^2 \in B_n$  e  $\theta_n^- = \Delta_n^{-2} \in B_n$ . Chiaramente per ogni  $\varepsilon = \pm$  vale

$$\bar{\theta}_n^\varepsilon = \Delta_n \theta_n^\varepsilon \Delta_n^{-1} = \theta_n^\varepsilon$$

**Lemma 3.3.3.** Per ogni  $n \geq 1$  e  $\varepsilon = \pm$ , si pone

$$\mu_{n,\varepsilon} = (1_n \otimes \theta_n^{-\varepsilon}) \sigma_{n,n}^\varepsilon = \sigma_{n,n}^\varepsilon (\theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_n) \in B_{2n}$$

allora

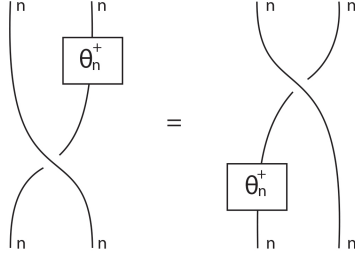
$$\bar{\mu}_{n,\varepsilon} = (\theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_n) \sigma_{n,n}^\varepsilon = \sigma_{n,n}^\varepsilon (1_n \otimes \theta_n^{-\varepsilon}) \in B_{2n}$$

e

$$\mu_{n,\varepsilon} \equiv 1_n, \bar{\mu}_{n,\varepsilon} \equiv 1_n, \mu_{n,\varepsilon} \equiv' 1_n, \bar{\mu}_{n,\varepsilon} \equiv' 1_n$$

*Dimostrazione.* Le espansioni di  $\bar{\mu}_{n,\varepsilon}$  sono ottenute dalle espressioni date per  $\mu_{n,\varepsilon}$  e dall'interpretazione geometrica che abbiamo dato dell'involuzione. Per il lemma 3.3.2 basta dimostrare che  $\mu_{n,\varepsilon} \equiv 1_n$  e  $\bar{\mu}_{n,\varepsilon} \equiv 1_n$ : per provare che  $\mu_{n,\varepsilon}$  è  $n$ -ghost destra, occorre verificare che  $(\beta \otimes 1_n)(1_m \otimes \mu_{n,\varepsilon}) \sim \beta$  per ogni  $\beta \in B_{m+n}$ , con  $m \geq 0$ . Vale

$$\begin{aligned} (\beta \otimes 1_n)(1_m \otimes \mu_{n,\varepsilon}) &= (\beta \otimes 1_n)(1_{m+n} \otimes \theta_n^{-\varepsilon})(1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon) \\ &= (\beta \otimes \theta_n^{-\varepsilon})(1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon) \sim_c (1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon)(\beta \otimes \theta_n^{-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Figura 3.8: Diagramma della treccia  $\mu_{n,-}$ 

Rimane da provare che

$$(1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon)(\beta \otimes \theta_n^{-\varepsilon}) \sim \beta \quad (3.4)$$

dalla quale seguirà anche che  $\bar{\mu}_{n,\varepsilon} \equiv 1_n$ , infatti

$$\begin{aligned} & (\beta \otimes 1_n)(1_m \otimes \bar{\mu}_{n,\varepsilon}) \sim_c (1_m \otimes \bar{\mu}_{n,\varepsilon})(\beta \otimes 1_n) \\ & = (1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon)(1_{m+n} \otimes \theta_n^{-\varepsilon})(\beta \otimes 1_n) = (1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon)(\beta \otimes \theta_n^{-\varepsilon}) \end{aligned}$$

Dimostriamo ora la 3.4 per induzione su  $n$ .

Per  $n = 1$  abbiamo  $\theta_n^{-\varepsilon} = 1_1$  e  $1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon = \sigma_{m+1}^\varepsilon$  dove  $\sigma_{m+1}^+ = \sigma_{m+1}$  e  $\sigma_{m+1}^- = \sigma_{m+1}^{-1}$ . La trasformazine  $\sigma_{m+1}^\varepsilon(\beta \otimes 1_1) \mapsto \beta$  è l'inversa di una trasformazione di Markov, pertanto la 3.4 risulta provata.

Supponiamo di averlo dimostrato per  $n - 1$ . Allora per  $n$  abbiamo

$$\begin{aligned} & (1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon)(\beta \otimes \theta_n^{-\varepsilon}) = (1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon)(1_{m+n} \otimes \theta_n^{-\varepsilon})(\beta \otimes 1_n) \\ & = (1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_n)(1_m \otimes \sigma_{n,n}^\varepsilon)(\beta \otimes 1_n) \\ & = (1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_n)(1_m \otimes (\sigma_{n-1,n}^\varepsilon \otimes 1_1)(1_{n-1} \otimes \sigma_{1,n}^\varepsilon))(\beta \otimes 1_n) \\ & = (1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_n)(1_m \otimes \sigma_{n-1,n}^\varepsilon \otimes 1_1)(1_{m+n-1} \otimes \sigma_{1,n}^\varepsilon)(\beta \otimes 1_n) \\ & \sim_c (1_{m+n-1} \otimes \sigma_{1,n}^\varepsilon)(\beta \otimes 1_n)(1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_n)(1_m \otimes \sigma_{n-1,n}^\varepsilon \otimes 1_1) \\ & = (1_{m+2n-2} \otimes \sigma_{1,1}^\varepsilon)(1_{m+n-1} \otimes \sigma_{1,n-1}^\varepsilon \otimes 1_1)(\beta \otimes 1_n)(1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_n)(1_m \otimes \sigma_{n-1,n}^\varepsilon \otimes 1_1) \\ & \sim (1_{m+n-1} \otimes \sigma_{1,n-1}^\varepsilon \otimes 1_1)(\beta \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \sigma_{n-1,n}^\varepsilon) \end{aligned}$$

dove l'ultima trasformazione è  $M_2^{-1}$ . La treccia che si ottiene è coniugata di

$$(1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \sigma_{n-1,n}^\varepsilon \otimes 1_1)(1_{m+n-1} \otimes \sigma_{1,n-1}^\varepsilon \otimes 1_1)(\beta \otimes 1_{n-1})$$

$$\begin{aligned}
&= (1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \sigma_{1,n-1}^\varepsilon \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon)(\beta \otimes 1_{n-1}) \\
&= (1_m \otimes \theta_n^{-\varepsilon} \sigma_{1,n-1}^\varepsilon \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon)(\beta \otimes 1_{n-1})
\end{aligned}$$

sostituendo nell'ultime treccia l'espressione

$$\theta_n^{-\varepsilon} \sigma_{1,n-1}^\varepsilon = \theta_n^{-\varepsilon} (\sigma_{n-1,1}^{-\varepsilon})_{-1} = \sigma_{1,n-1}^{-\varepsilon} (1_1 \otimes \theta_{n-1}^{-\varepsilon})$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&(1_m \otimes \sigma_{1,n-1}^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1})(1_{m+1} \otimes \theta_{n-1}^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon)(\beta \otimes 1_{n-1}) \\
&= (1_m \otimes \sigma_{1,n-1}^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1})(1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon)(\beta \otimes \theta_{n-1}^{-\varepsilon}) \\
&\sim_c (1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon)(\beta \otimes \theta_{n-1}^{-\varepsilon})(1_m \otimes \sigma_{1,n-1}^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1}) \\
&= (1_{m+1} \otimes \sigma_{n-1,n-1}^\varepsilon)(1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon \otimes 1_{n-1})(\beta \otimes \theta_{n-1}^{-\varepsilon})(1_m \otimes \sigma_{1,n-1}^{-\varepsilon} \otimes 1_{n-1}) \\
&= (1_{m+1} \otimes \sigma_{n-1,n-1}^\varepsilon)(\beta' \otimes \theta_{n-1}^{-\varepsilon})
\end{aligned}$$

dove

$$\beta' = (1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon) \beta (1_m \otimes \sigma_{1,n-1}^{-\varepsilon})$$

per l'ipotesi induttiva

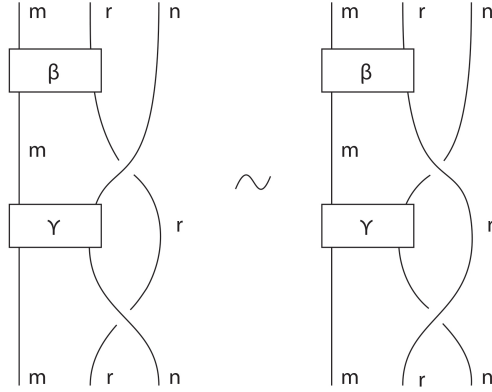
$$(1_{m+1} \otimes \sigma_{n-1,n-1}^\varepsilon)(\beta' \otimes \theta_{n-1}^{-\varepsilon}) \sim \beta' = (1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon) \beta (1_m \otimes \sigma_{n-1,1}^\varepsilon)^{-1} \sim_c \beta$$

Così risultano provati la 3.4 ed il lemma. □

**Lemma 3.3.4.** *Siano  $m, n \geq 0$ ,  $r \geq 1$  e siano  $\beta \in B_{m+r}$ ,  $\gamma \in B_{m+n}$ , la classe di  $M$ -equivalenza della treccia*

$$\alpha_\varepsilon = (\beta \otimes 1_n)(1_m \otimes \sigma_{n,r}^\varepsilon)(\gamma \otimes 1_r)(1_m \otimes \sigma_{r,n}^{-\varepsilon})$$

*non dipende da  $\varepsilon = \pm$ . (Se  $m = n = 0$ , allora  $\gamma = 1_0$ )*

Figura 3.9:  $\alpha_+ \sim \alpha_-$ 

*Dimostrazione.* Se  $n = 0$ , allora  $\sigma_{n,r}^+ = \sigma_{n,r}^-$  e quindi  $\alpha_+ = \alpha_-$ . Se  $m = 0$  allora  $\alpha_+ = \beta \otimes \gamma = \alpha_-$ . Supponiamo ora  $m \geq 1$  e  $rn \geq 1$  e riscriviamo il termine  $1_m \otimes \sigma_{n,r}^+$  come

$$1_m \otimes \sigma_{n,r}^+ = (1_m \otimes \sigma_{n,r}^+ \sigma_{r,n}^+) (1_{m+r} \otimes 1_n) (1_m \otimes \sigma_{n,r}^-) \quad (3.5)$$

Per il lemma 3.3.3 la classe di  $M$ -equivalenza di  $\alpha_+$  rimane la stessa se si sostituisce il termine  $1_n$  nel fattore  $1_{m+r} \otimes 1_n$  con la treccia

$$\bar{\mu}_{n,-} = (\theta_n^+ \otimes 1_n) \sigma_{n,n}^- = \sigma_{n,n}^- (1_n \otimes \theta_n^+)$$

e moltiplicando tensorialmente per  $1_n$  tutti i fattori dell'espressione data per  $\alpha_+$ . Questo trasforma il secondo membro della 3.5 nella treccia

$$\psi = (1_m \otimes \sigma_{n,r}^+ \sigma_{r,n}^+ \otimes 1_n) (1_{m+r} \otimes \theta_n^+ \otimes 1_n) (1_{m+r} \otimes \sigma_{n,n}^-) (1_m \otimes \sigma_{n,r}^- \otimes 1_n)$$

la figura () mostra che  $\psi = \psi_1 \psi_2 \psi_3$ , dove

$$\psi_1 = 1_{m+r} \otimes \bar{\mu}_{n,-}, \quad \psi_2 = 1_m \otimes \sigma_{n,r}^- \otimes 1_n, \quad \psi_3 = 1_{m+n} \otimes \sigma_{n,r}^+ \sigma_{r,n}^-$$

allora

$$\begin{aligned} \alpha_+ &\sim (\beta \otimes 1_{2n}) \psi_1 \psi_2 \psi_3 (\gamma \otimes 1_{r+n}) (1_m \otimes \sigma_{r,n}^- \otimes 1_n) \\ &= \psi_1 (\beta \otimes 1_{2n}) \psi_2 (\gamma \otimes 1_{r+n}) \psi_3 (1_m \otimes \sigma_{r,n}^- \otimes 1_n) \\ &\sim_c (\beta \otimes 1_{2n}) \psi_2 (\gamma \otimes 1_{r+n}) \psi_3 (1_m \otimes \sigma_{r,n}^- \otimes 1_n) \psi_1 \end{aligned}$$

È facile verificare graficamente che

$$\psi_3(1_m \otimes \sigma r, n^- \otimes 1_n)\psi_1 = (1_m \otimes \sigma r, n^- \otimes 1_n)(1_{m+r} \otimes \bar{\mu}_{n,-})(1_m \otimes \sigma_{n,r}^+ \sigma_{r,n}^+ \otimes 1_n)$$

Allora

$$\alpha_+ \sim (\beta \otimes 1_{2n})(1_m \otimes \sigma r, n^- \otimes 1_n)(\gamma \otimes 1_{r+n})(1_m \otimes \sigma r, n^- \otimes 1_n)(1_{m+r} \otimes \bar{\mu}_{n,-})(1_m \otimes \sigma_{n,r}^+ \sigma_{r,n}^+ \otimes 1_n)$$

per il lemma 3.3.3 possiamo sostituire  $\bar{\mu}_{n,-}$  con  $1_n$  e contemporaneamente rimuovere  $1_n$  sulla destra negli altri fattori; ricordando l'identità  $\sigma_{r,n}^- \sigma_{n,r}^+ = 1_{n+r}$ , otteniamo

$$\alpha_+ \sim (\beta \otimes 1_n)(1_m \otimes \sigma_{n,r}^-)(\gamma \otimes 1_r)(1_m \otimes \sigma_{r,n}^+) = \alpha_-$$

□

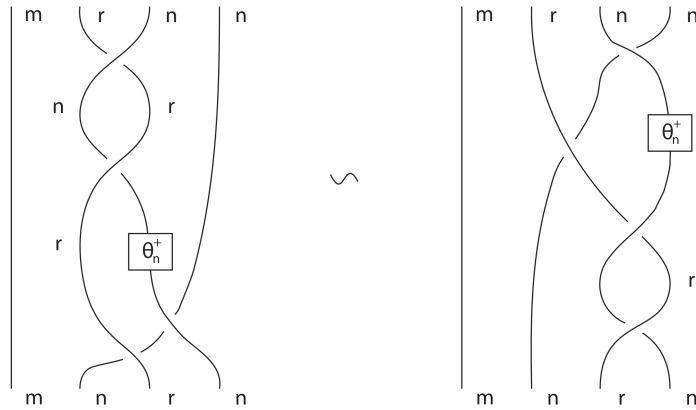


Figura 3.10:  $\psi = \psi_1 \psi_2 \psi_3$

**Lemma 3.3.5.** *Assumendo le stesse ipotesi del lemma precedente, la classe di equivalenza della treccia*

$$(1_n \otimes \beta)(\sigma_{r,n}^\varepsilon \otimes 1_m)(1_r \otimes \gamma)(\sigma_{n,r}^{-\varepsilon}) \otimes 1_m$$

non dipende da  $\varepsilon = \pm$ .

*Dimostrazione.* Segue dal lemma 3.3.4, applicando l'involuzione  $\mu \mapsto \bar{\mu}$  ed usando il lemma 3.3.1 □

### 3.3.2 Dimostrazione del lemma 3.1.3

L'indipendenza dal segno  $\varepsilon$  segue dal lemma 3.3.5; L'indipendenza dal segno  $\nu$  segue invece dal fatto che due trecce coniugate sono  $M$ -equivalenti e dal lemma 3.3.4.

Proviamo ora la 3.1. Data l'indipendenza dai segni  $\varepsilon$  e  $\nu$  è sufficiente dimostrarla ponendo  $\varepsilon = \nu$ . Si consideri la treccia

$$\begin{aligned} \langle\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | \varepsilon \rangle\rangle &= (\alpha \otimes \gamma)(1_n \otimes \sigma_{m,r}^{\varepsilon \otimes 1_t})(1_n \otimes \theta_m^\varepsilon \otimes \sigma_{t,r}^\varepsilon)(1_n \otimes \sigma_{t,m}^\varepsilon \otimes 1_r) \times \\ &\times (\beta \otimes \delta)(1_n \otimes \sigma_{m,t}^{-\varepsilon} \otimes 1_r)(1_n \otimes \theta_m^{-\varepsilon} \otimes \sigma_{r,t}^{-\varepsilon})(1_n \otimes \sigma_{r,m}^{-\varepsilon} \otimes 1_t) \in B_{m+n+r+t} \end{aligned}$$

vale

$$\langle\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | \varepsilon \rangle\rangle \sim_c \langle\langle \beta, \alpha, \delta, \gamma | -\varepsilon \rangle\rangle$$

Allora basta mostrare che

$$\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta | \varepsilon, \varepsilon \rangle \sim \langle\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | \varepsilon \rangle\rangle \quad (3.6)$$

questo implicherà la 3.1 per  $\varepsilon = \nu$  infatti:

$$\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta | \varepsilon, \varepsilon \rangle \sim \langle\beta, \alpha, \delta, \gamma | -\varepsilon, -\varepsilon \rangle \sim \langle\delta, \gamma, \beta, \alpha | \varepsilon, \varepsilon \rangle$$

Una dimostrazione della 3.6 (per  $\varepsilon = +$ ) è data in figura 3.11, nella quale invece delle trecce sono disegnate le loro chiusure: ciò non è di ostacolo alla dimostrazione, perchè trecce coniugate sono  $M$ -equivalenti. Il primo e l'ultimo diagramma rappresentano la chiusura delle trecce  $\langle\alpha, \beta, \gamma, \delta | +, + \rangle$  e  $\langle\langle \alpha, \beta, \gamma, \delta | + \rangle\rangle$ . la prima trasformazione è una  $\mathcal{M}(\mu_{m,-})$ , mentre le due trasformazioni successive sono isotopie nella classe dei diagrammi di trecce chiuse; la quarta azione è l'inversa di  $\mathcal{M}'(\bar{\mu}_{m,-})$  e l'ultima è un isotopia. Il caso  $\varepsilon = -$  si tratta in modo analogo.

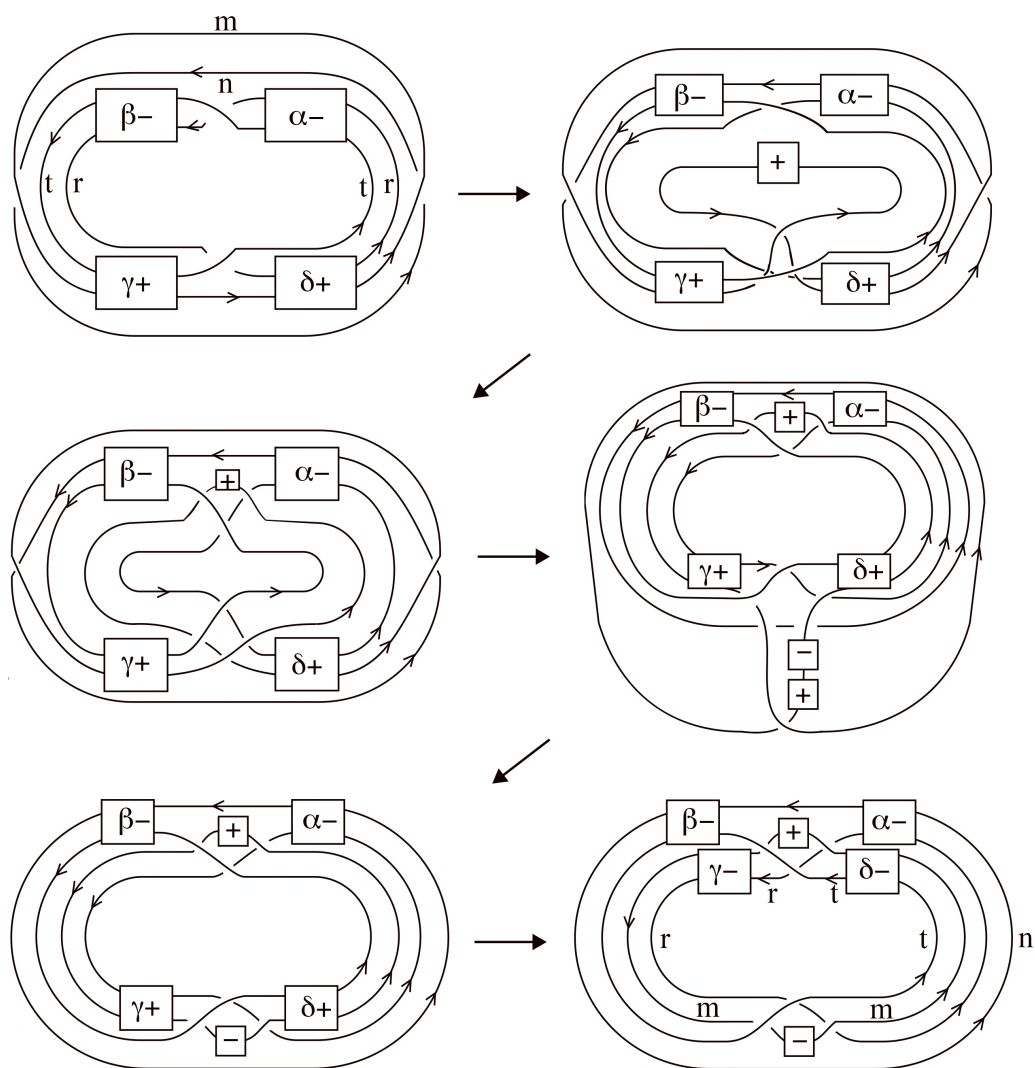


Figura 3.11: dimostrazione della 3.6





# Bibliografia

- [1] Kassel C, Turaev V, *Braid Groups*, Springer, 2008
- [2] Papi P, Procesi C, *Invarianti di nodi*, Pitagora, 1998
- [3] Birman JS, *Braids, links, and mapping class groups*, Princeton: Princeton university press, 1974
- [4] Artin E, *The theory of braids*, American Scientist 38:112-119, 1950
- [5] Birman JS, Tara EB *Braids: a survey*. arXiv preprint math/0409205, 2004.

