

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

***L' Ars Analytica* di François Viète
Isagoge, Notæ Priores, Zeteticorum libri**

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Freguglia

Presentata da:
Stefania Barberini

II sessione
Anno Accademico 2012-2013

Indice

Introduzione	3
1 In artem analyticem	
ISAGOGE	13
Glossario	32
ISAGOGE	
Traduzione e commento	35
1.1 I metodi dell'analisi.	35
1.2 Le regole che governano le equazioni e le proporzioni.	36
1.3 La legge degli omogenei e le grandezze confrontabili.	39
1.4 La <i>logistica speciosa</i> e le sue regole.	44
1.5 Le leggi degli Zetetici.	56
1.6 Analisi dei teoremi e Poristica.	63
1.7 La Retica esegetica	64
1.8 La simbologia delle equazioni.	64
2 Ad Logisticem Speciosam,	
NOTÆPRIORES	71
NOTÆPRIORES	
Traduzione e commento	115
2.1 Genesi delle potenze combinate positive.	136
2.2 Genesi delle potenze combinate negative.	144
2.3 Genesi delle potenze combinate positive e negative.	146
2.4 Generi delle potenze <i>avulsarum</i>	149
2.5 Genesi dei triangoli.	152
3 ZETETICORUM libri quinque	175

ZETETICORUM

Traduzione e commento	227
3.1 Libro Primo	227
3.2 Libro Secondo	264
3.3 Libro Terzo	291
3.4 Libro Quarto	304
3.5 Libro quinto	341
4 Alcune osservazioni di Pierre de Fermat.	357
Bibliografia	365
Ringraziamenti	367

Introduzione

LA nascita e lo sviluppo dell'algebra, avvenuti nel Cinquecento, furono caratterizzati da un rapporto particolarmente privilegiato con la geometria, che per la cultura del tempo costituiva teoricamente la disciplina più elevata della matematica. Essa era ritenuta una vera e propria scienza, al contrario dell'algebra, considerata semplicemente un'arte. Tuttavia i numeri, con le nuove attività commerciali e bancarie e con la nuova formazione nelle scuole d'abaco, riacquistarono centralità sia nel loro carattere pitagorico-mistico che operativo e pratico, introducendo una profonda evoluzione dell'algebra sul piano dei risultati, del metodo e del linguaggio.

Agli inizi del 1500 il matematico bolognese **Scipione di Floriano di Geri Dal Ferro** (1465-1526), lettore *ad arithmetica et geometria* nello Studio di Bologna, individuò la formula risolutiva di determinate equazioni di terzo grado, che secondo gli usi del tempo, non pubblicò, ma trasmise ad alcuni suoi allievi, tra cui Antonio Maria Fiore, Annibale Della Nave e Pompeo Bolognetti. Era infatti consuetudine, per i grandi maestri, cimentarsi in pubbliche dispute, dal cui esito dipendeva la loro fama, l'aumento di stipendio e l'assegnazione delle cattedre universitarie. In un fascicolo conservato presso l'Università di Bologna la celebre formula viene presentata nel modo seguente:¹

DI CAVALIERO BOLOGNETTI LUI L'EBBE DA MESSER SIPION DAL FERRO
BOLOGNESE.

Il capitolo di cose e cubo eguale al numero.

<i>Quando le cose e li cubi si aggiungono al numero</i>	$[ax + bx^3 = c]$
<i>ridurrai l'equazione a 1 cubo:</i>	$[x^3 + px = q]$
<i>partendo per la quantità delli cubi,</i>	$[p := \frac{b}{a}, q := \frac{c}{a}]$
<i>poi cuba la terza parte delle cose,</i>	$[(\frac{p}{3})^3]$
<i>poi quadra la metà dil numero</i>	$[(\frac{q}{2})^2]$
<i>e questo suma con il detto cubato,</i>	$[(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2]$

¹Vedi pp. 177-178 di [11].

$$\begin{array}{ll}
\text{et la radice quadrata di deta summa} & [\sqrt{[(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2]}] \\
\text{più la metà del numero fa binomio} & [\sqrt{[(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 + \frac{q}{2}]}] \\
\text{et la radice cuba di tal binomio} & [\sqrt[3]{\sqrt{[(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 + \frac{q}{2}]}]}] \\
\text{men la radice cuba dil suo residuo} & [\sqrt[3]{\sqrt{[(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 - \frac{q}{2}]}]}] \\
\text{val la cosa.} &
\end{array}$$

Peranto la soluzione dell'equazione

$$x^3 + px = q, \quad p > 0$$

è data da

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 + \frac{q}{2}}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2 - \frac{q}{2}}}.$$

La formula era certamente nota, come già ricordato, anche ad Antonio Maria del Fiore il quale nel 1530 la utilizzò per sfidare pubblicamente il bresciano Quannin de Tonini da Coi e successivamente, nel 1535, contro **Niccolò Fontana** (1499-1557), noto come Tartaglia. Egli, come racconta nell'opera *Quesiti et inventioni diverse*, riuscì a risolvere le equazioni che gli erano state proposte, individuando la formula di Scipione Dal Ferro, ignorando tuttavia le trasformazioni algebriche necessarie per passare dall'equazione cubica completa

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

al caso particolare, privo del termine di secondo grado

$$x^3 + px = q.$$

Nel 1539 a seguito delle insistenti pressioni da parte del matematico e medico **Girolamo Cardano** (1501-1576) Tartaglia gli rivelò la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado, sotto le condizioni di non pubblicare *le inventioni a lui comunicate*² e di introdurlo negli ambienti di alta cultura milanese. Così Tartaglia gli comunicò³

$$\begin{array}{l}
\text{Quandochel cubo con le cose appresso} \\
\text{Se agguaglia à qualche numero discreto} \quad [x^3 + px = q]
\end{array}$$

²Vedi *Quesiti e inventioni diverse*, libro IX, quesito XXXIII.

³Vedi p. 179 di [11].

Trouan dui altri differenti in esso $[u - v = q]$
Dapoi terrai questo per consueto
che'l lor producto sempre sia eguale
al terzo cubo delle cose $[uv = (\frac{p}{3})^3]$
El residuo poi suo generale
delli lor lati cubi ben sottratti
varrà la tua cosa principale $[x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}]$

In seguito, Cardano e il suo allievo **Ludovico Ferrari** (1522-1565), al contario di Tartaglia, riuscirono a sviluppare in tutta la sua ampiezza la teoria generale delle equazioni di terzo grado. Tuttavia rimaneva ancora oscuro come trattare il caso *irriducibile*, cioè il caso in cui nel calcolo della radice dell'equazione risulta

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0.$$

Cardano scrisse a Tartaglia per avere spiegazioni in merito a questo caso così particolare, senza però ottenere alcun risultato. Perciò, nel 1545, si recò con Ferrari, a Bologna per conoscere Annibale Della Nave e per avere spiegazioni sul caso irriducibile. Purtroppo neppure il matematico bolognese seppe dare una spiegazione esauriente; tuttavia visionando il manoscritto di Dal Ferro scoprirono che la risoluzione dell'equazione cubica incompleta descritta era analoga a quella rivelatagli. Pertanto Cardano, nonostante l'impegno preso, pubblicò nello stesso anno l'*Ars Magna*, dove inserì la formula risolutiva delle equazioni cubiche, attribuendola a Tartaglia, che in risposta pubblicò i *Quesiti et Inventioni diverse*, in cui cerca di chiarire il suo ruolo nella scoperta della celebre formula. Inoltre l'*Ars Magna*, oltre alla trattazione di tutti i casi ammissibili di equazione cubica, tranne quello irriducibile, contiene la trattazione dei metodi risolutivi delle equazioni di quarto grado, determinati dall'allievo Ludovico Ferrari. Quest'ultimo scoprì che l'equazione

$$x^4 + ax^2 + b = cx$$

può essere risolta procedendo nel modo seguente:

- se il primo membro non è un quadrato perfetto, occorre renderlo tale, aggiungendo al primo e al secondo membro $2\sqrt{b}x^2 - ax^2$:

$$(x^2 + \sqrt{b})^2 = cx + (2\sqrt{b} - a)x^2.$$

- Si pone $\sqrt{b} := q$ e $2\sqrt{b} - a := p$:

$$(x^2 + q)^2 = cx + px^2.$$

- Si aggiunge a entrambi i membri il trinomio $2tx^2 + t^2 + 2tq$:

$$(x^2 + q + t)^2 = (\sqrt{p+2t})^2 x^2 + cx + (\sqrt{t^2 + 2tq})^2.$$

- Si pone $c = 2\sqrt{p+2t}\sqrt{t^2 + 2tq}$, in modo che il membro di destra sia un quadrato:

$$2t^3 + (p + 4q)t^2 + 2pqt - \frac{c^2}{4} = 0.$$

Questa equazione di terzo grado nell'incognita t , appena individuata, è detta *risolvente cubica di Ferrari* e la sua risoluzione permette di determinare le radici dell'equazione di partenza. Inoltre l'*Ars Magna* inaugura la teoria delle trasformazioni, cioè dei cambiamenti di variabile, che permettono di semplificare un'equazione, riconducendosi a dei casi particolari.

Dunque, come anticipato in precedenza, rimaneva escluso solo il cosiddetto caso irriducibile, in cui ci si imbatte nella radice quadrata di un numero negativo, cioè un'espressione che per i matematici del tempo, come affermò Cardano, risultava *sofistica e lontana dalla natura dei numeri*. Infatti nelle equazioni di secondo grado, la presenza della radice di un numero negativo esclude l'esistenza di soluzioni reali, mentre nelle equazioni di terzo grado, pur in presenza di radicali negativi, le soluzioni possono essere tutte e tre reali. Per esempio l'equazione

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

ha come radici i numeri

$$4, \quad \sqrt{3} - 2, \quad -\sqrt{3} - 2,$$

mentre

$$\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-121}.$$

Pertanto la natura dell'ostacolo che si presentava non riguardava la natura dell'equazione, bensì il procedimento con cui si giungeva alle soluzioni. Colui che ebbe il merito di superare questo scoglio fu **Rafael Bombelli** (1526-1572), che nel manoscritto *l'Algebra* (1572) sviluppa l'algebra dei *numeri immaginari* e risolve il caso irriducibile. Egli definisce i radicali negativi come *speciali entità* che necessitano di nuove regole di calcolo e di essere rappresentate con simboli speciali:⁴

<i>Più via più di meno, fa più di meno.</i>	$[(+)(+i) = i]$
<i>Meno via più di meno, fa meno di meno.</i>	$[(-)(+i) = -i]$
<i>Più via meno di meno, fa meno di meno.</i>	$[(+)(-i) = -i]$
<i>Meno via meno di meno, fa più di meno.</i>	$[(-)(-i) = +]$
<i>Più di meno via più di meno, fa meno.</i>	$[i(+i)(+i) = -]$

⁴Vedi p. 133 di [1].

<i>Più di meno via men di meno, fa più.</i>	$[(+i)(-i) = +]$
<i>Meno di meno via più di meno, fa più.</i>	$[(-i)(+i) = +]$
<i>Meno di meno via men di meno, fa meno.</i>	$[(-i)(-i) = -]$

In particolare egli determinò la formula di trasformazione per radicali cubici

$$\sqrt[3]{m \mp \sqrt{-n}} = u \mp \sqrt{-v}, \quad (1)$$

attraverso la quale si riconoscono quelli che oggi chiamiamo *numeri complessi* e sottolinea che in tutte le equazioni a coefficienti reali il numero delle radici complesse è sempre pari e ognuna è accompagnata dalla sua coniugata. Pertanto poichè la formula di Scipione Dal Ferro porta a sommare due numeri complessi, si ottiene, come è noto, un numero reale. Tornando all'equazione precedente

$$x^3 = 15x + 4,$$

risulta

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

quindi applicando la regola di trasformazione (1)

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Dunque a Bombelli spetta il merito di aver introdotto nella matematica i numeri complessi, con precise e nuove regole di calcolo e di aver svolto la teoria completa delle equazioni di quarto grado. Occorre inoltre porre attenzione alle sue dimostrazioni, in cui egli costruisce geometricamente, non tanto la soluzione, quanto l'equazione stessa, creando un parallelismo tra algebra e geometria, come afferma Bortolotti *la dimostrazione nasce dalle sue operazioni algebriche*. In particolar modo si ha testimonianza di questo atteggiamento nel quarto e quinto libro dell'*Algebra*, in cui Bombelli sviluppa quella che lui chiama *algebra linearia*. Questo parallelismo riceverà un ulteriore impulso con l'*algebra speciosa* di **François Viète** (1540-1603). Egli ricoprì un ruolo fondamentale nell'evoluzione del linguaggio e del metodo d'indagine proprio dell'algebra, in particolare l'introduzione del calcolo letterale dette un nuovo impulso alla costituzione autonoma come disciplina dell'algebra e permise il passaggio dal calcolo numerico a quello letterale, ossia dalla logistica numerosa di Cardano e Bombelli alla logistica speciosa:

Logistica numerosa est quæ per numeros, Speciosa quæ per species
seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa.⁵

⁵ « la logistica numerosa si mostra attraverso i numeri, la logistica speciosa si manifesta attraverso le specie o attraverso le forme delle cose, ricorrendo ad esempio alle lettere dell'alfabeto. » Vedi p. 4 di [18].

Viète, signore di Bigotière, servì in qualità di avvocato il parlamento della Bretagna e fu consigliere di Enrico di Navarra. Successivamente, privato dell'ufficio per le sue posizioni politiche, si dedicò alla matematica.

Le sue principali opere sono:

- *Canon Mathematicus e Universalium Inspectionum Liber Singularis*, 1579
- *Isagoge in Artem Analyticem*, 1591
- *Zeteticorum libri quinque*, 1593
- *De Numerosa Potestatum ad Exegesis Resolutione*, 1600
- *De Equationem Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*, 1615
- *Ad Logisticem Speciosam Notæ Priores*, 1631

In seguito tutti i suoi scritti furono raccolti da Frans van Schooten e pubblicati a Leida nel 1646 sotto il titolo *Opera Mathematica*, anche se alcuni di essi andarono perduti.

Nell'*Isagoge in Artem Analyticem* Viète intendeva restaurare, con la sua algebra speciosa, il calcolo algebrico degli antichi, pertanto illustra i metodi dell'analisi e della sintesi e i fondamenti delle tecniche di manipolazione algebrica. In particolare, rifacendosi alle categorie proposte da Pappo, sostiene che l'analisi è il metodo mediante il quale si considera come dato "ciò che si domanda", cioè la tesi e, attraverso una catena di deduzioni, si giunge ad una verità inconfutabile; invece con il processo della sintesi si parte da "ciò che è assegnato", cioè dalle ipotesi per giungere alla tesi. *L'ars analytica*⁶, inoltre può essere condotta in tre modi diversi, attraverso la *Zetetica*, la *Poristica* e la *Retica esegetica*, che Viète definisce nel modo seguente:

[...] Zeteticæ qua invenitur æqualitas proportiove magnitudinis, de qua quæritur, cum iis quæ data sunt. Poristicæ, qua de æqualitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegeticæ, qua ex ordinata æqualitate vel proportione ipsa de qua quæritur exhibetur magnitudo.⁷

Pertanto si può riassumere lo schema metodologico viëtiano nel modo seguente:

1. Enunciazione del *problema* che si sta considerando.

⁶Per Viète *l'ars analytica* costituisce il metodo con cui affrontare un problema.

⁷«[...] mediante la Zetetica si stabilisce l'uguaglianza o la proporzione tra la grandezza cercata e quelle date. Mediante la Poristica si esamina la verità di un teorema sull'uguaglianza o sulla proporzione. Mediante l'Esegetica dall'uguaglianza o proporzione si esibisce la grandezza richiesta.» Vedi p. 1 di [18].

2. Analisi:

- (a) *Zetetica*: partendo dai dati del problema conduce ad una prima uguaglianza o ad una proporzione.
- (b) *Poristica*: partendo dall'uguaglianza determinata dalla *Zetetica* giunge, applicando le regole algebriche, ad una nuova uguaglianza da cui si ricava la soluzione del problema.
- (c) Enunciazione del *Teorema*, determinato dai risultati della *Poristica*.

3. Sintesi: dimostra il teorema appena formulato.

- (a) *Retica esegetica*: interpreta in senso geometrico o aritmetico il risultato della *Poristica*.

Mentre nell'*Isagoge*, si esaminano le tecniche di calcolo in termini teorici, nelle *Notæ Priores* vengono studiate in termini algoritmici. In particolare Viète presenta, nel capitolo *Genesis Triangulorum*, un'articolata teoria sulla costruzione numerica dei triangoli rettangoli, necessaria per le dimostrazioni degli zetetici, che riguardano la risoluzione delle equazioni diofantee di secondo grado. Tuttavia il cuore del programma viëtiano sono gli *Zeteticorum libri quinque* che rappresentano la trattazione per eccellenza dell'arte analitica, la presentazione e la risoluzione di molte *quæstiones* contenute nei primi quattro libri dell'*Aritmetica* di Diofanto, con ottica geometrica e nell'ambito della logistica speciosa.

In seguito l'opera di Viète fu ampliata e consolidata da Albert Girard (1595-1632) con *Invention nouvelle en algèbre* (1629), Thomas Harriot (1560-1621) con l'*Artis analyticae praxis* (1631), William Oughtred con la *Clavis mathematicæ* (1631) e dai numerosi commenti dei suoi allievi Jean-Louis Vaulézard (1630), Jaques Hume (1630), A. Vasset (1630), Marino Ghetaldi (1568-1626), Carlo Rinaldini (1615-1698).

Vaulézard, nel commento *Les Cinq Livres Des Zetétiques de Francois Viète* (1630), amplia l'opera del suo maestro attraverso un'interpretazione geometrica dei problemi contenuti negli *Zeteticorum libri quinque*, fornendo un esempio importante di retica esegetica geometrica e giustificando geometricamente i risultati ottenuti per via algebrico-aritmetica. Nel 1636 Jaques Hume, nell'*Algèbre de Viète*, commentò con particolare cura la *Genesis Triangulorum*, capitolo conclusivo delle *Notæ Priores*. Egli nel capitolo *De la Generation des triangles rectangles* illustra dodici proposizioni e i relativi corollari, riguardanti la costruzione numerica dei triangoli rettangoli, impiegando una nuova simbologia, più snella e vicina a quella odierna. Per esempi, nella stessa opera, Hume rappresenta la somma di alcune grandezze nel modo seguente

$$\begin{array}{r}
 A \text{ en } B \quad A \text{ j en } B \vee \\
 A \text{ en } B \quad D \text{ ij en } Z \text{ iij} \\
 \hline
 A \text{ en } B \text{ 2} \quad A \text{ j en } B \vee + D \text{ ij en } Z \text{ iij} \\
 \\
 A \text{ en } B \text{ 2} \\
 A \text{ en } B \text{ 3} \\
 \hline
 A \text{ en } B \text{ 5} \quad \text{cinq fois.}
 \end{array}$$

che nella simbologia viètiana corrisponde alla scrittura

$$\begin{array}{r}
 A \text{ in } B \quad A \text{ in } B \text{ quad.cubus} \\
 A \text{ in } B \quad D \text{ quad. in } Z \text{ cubus} \\
 \hline
 A \text{ in } B \text{ 2} \quad A \text{ in } B \text{ quad.cubus} + D \text{ quad. in } Z \text{ cubus}
 \end{array}$$

Dunque l'opera di Hume sembra rappresentare un momento di passaggio tra l'algebra speciosa di Viète e la nuova analisi di Descartes. Allo stesso modo anche il discepolo Carlo Rinaldini (1615-1698), nelle sue opere *Opus algebricum* (1644), *Opus mathematicum* (1655), *Artis Analyticae mathematicum* (1665) prevalentemente riguardanti l'algebra numerosa, ovvero lo studio delle equazioni a coefficienti numerici, diffuse e proseguì il lavoro di Viète, sempre però introducendo nuove notazioni algebriche sintetiche.

Nomina, & Characteres iuxta Diophantum, & Vietam.

1. N.	Latus, sine Radix.	2.
2. Q.	Quadratus.	4.
3. C.	Cubus.	8.
4. QQ.	Quadrato-quadratus.	16.
5. QC.	Quadrato-cubus.	32.
6. CC.	Cubo-cubus.	64.
7. QQC.	Quadrato-quadrato-cubus.	128.
8. QCC.	Quadrato-cubo-cubus.	256.
9. CCC.	Cubo-cubo-cubus.	512.
10. QQCC.	Quadrato-quadrato-cubo-cubus.	1024.
11. QCCC.	Quadrato-cubo-cubo-cubus.	2048.
12. CCCC.	Cubo-cubo-cubo-cubus.	4096.
13. QQCCC.	Quadrato-quadrato-cubo-cubo-cubus.	8192.

C
Li-

Marino Ghetaldi (1568-1626), invece, collaborò con Viète al progetto di ricostruzione dell'opera perduta di Apollonio, servendosi della descrizione del

contenuto fatta da Pappo di Alessandria. Riprese inoltre il metodo dell'amico, perfezionandolo e moltiplicandone le applicazioni.

Dunque l'opera di Viète rappresenta un nodo cruciale per gli sviluppi della matematica e in particolare dell'algebra e della geometria. Benchè ancora in buona parte legata all'impostazione degli algebristi del Cinquecento, essa contiene elementi significativi e fortemente innovativi, alla base di quella fase della storia della matematica, detta di *geometrizzazione dell'algebra*. Successivamente **René Descartes** (1596-1650) nella *Géométrie* (1637) realizzerà quel programma che, al contrario, verrà definito di *algebrizzazione della geometria*.

L'obiettivo di questa tesi è quello di condurre un'analisi, attraverso la traduzione, il commento e l'interpretazione di *Isagoge in Artem analyticem, Ad Logisticem Speciosam Notæ Priores, Zeteticorum libri quinque*, testi cardine per lo sviluppo dell'algebra come disciplina autonoma e obiettiva, prestando particolare attenzione anche alle interpretazioni geometriche proposte dagli allievi di Viète [17]. Infine nell'ultimo capitolo vengono analizzati gli zetetici riguardanti la risoluzione delle equazioni diofantee di secondo (*Zet. IV, 1*) e terzo grado (*Zet. IV, 18, 19, 20*), alla luce delle osservazioni riportate da Fermat nella sua copia dell'*Aritmetica* (edizione di Claude Gaspard Bacheti, 1621). Fermat, infatti propone un'analisi del testo diofanteo che va al di là di una semplice traduzione, ottenendo risultati che sono ben noti agli storici della matematica e ai matematici.

Capitolo 1

In artem analyticem

ISAGOGE

CAPVT I.

De definitione et Partitione Analyseos, et de iis qua iuvant Zeteticen.

EST veritatis inquirendæ via quædam in Mathematicis, quam Plato primus invenisse dicitur, a Theone nominata Analysis, & ab eodem definita, Adsumptio quæ siti tanquam concessi per consequentia ad quæ siti finem & comprehensionem. Et quanquam veteres duplicem tantum proposuerunt Analysin, ζήτητική et ποριστική ad quas definitio Theonis maxime pertinet, constitui tamen etiam tertiam speciem, quæ dicatur ῥητική ἢ ἐξηγητική, consentaneum est, ut sit Zeteticæ qua invenitur æqualitas proportiove magnitudinis, de qua quæritur, cum iis quæ data sunt. Poristice, qua de æqualitate vel proportione ordinati Theorematis veritas examinatur. Exegetice, qua ex ordinata æqualitate vel proportione ipsa de qua quæritur exhibetur magnitudo. Atque adeo tota ars Analytice triplex illud sibi vendicans officium definiatur, Doctrina bene inveniendi in Mathematicis. Ac quod ad Zeteticen quidem attinet, instituitur arte Logica per syllogismos & enthymemata, quorum firmamenta sunt ea ipsa quibus æqualitates & proportionales concluduntur symbola, tam ex communibus derivanda notionibus, quam ordinandis vi ipsius Analyseos theorematis. Forma autem Zetesin ineundi ex arte propria est, non iam in numeris suam Logicam exercente, quæ fuit oscitantia veterum Analystarum: sed per Logisticen sub specie norite inducendam, feliciorum multo & poziore numerosa ad comparandum inter se magnitudines, proposita primum homogeneorum lege, & inde constituta, ut fit, solemnibus magnitudinum ex genere ad genus visua proportionaliter adscen-

dentium vel descendendum serie seu scala, qua gradus e arundem & genera in comparationibus designentur ac distinguantur.

CAPVT II.

De Symbolis æqualitatum et proportionum.

SYMBOLA æqualitatum & proportionum nitiota quæhabentur in Elementis adsumit Analytice ut demonstrata, qualia sunt ferè,

1. Totum suis parti bus æquari.
2. Quæ eidem æquantur, inter se esse æqualia.
3. Si æqualia æqualibus addantur, tota esse æqualia.
4. Si æqualia æqualibus auferantur, residua esse æqualia.
5. Si æqualia per æqualia multiplicentur, facta esse æqualia.
6. Si æqualia per æqualia dividantur, orta esse æqualia.
7. Si quæ sint proportionalia directe, esse proportionalia inverse & alterne.
8. Si proportionalia similia proportionalibus similibus addantur, tota esse proportionalia.
9. Si proportionalia similia proportionalibus similibus auferantur, residua esse proportionalia.
10. Si proportinalia per proportionalia multiplicentur, facta esse proportionalia.

Etenim dum proportionalia per proportionalia multiplicantur, componuntur eadem proportiones. Quod autem proportiones quæ ex iisdem proportionibus componuntur, inter se quoque eadem existant, communiter hoc ab antiquis Geometris receptum est. Ut passim apud Apollonium, Pappum, & reliques Geometras vedere est. Ipsa autem proportionum compositio fit multiplicatione terminorum antecedentium, & consequentium per invicem. Perspicuum est ex iis, qua Euclides 23 prop^{ne} libri 6^{ti} & proportione octavi libri Elementarum demonstravit.

11. Si proportionalia per proportionalia dividantur, orta esse proportionalia.
Nam dum proportionalia per proportionalia dividuntur, auferuntur ex proportionibus eisdem alia eadem proportiones, & ut opere multiplicationis

proportiones quidem simul componuntur, ita divisione una proportio ex alia aufertur: resolvit enim divisio, quod super effecit Multiplicatio. Huius quoque argumentandi modi vestigia apud Apollonium, & alios veteres Geometras sparsim apparent.

12. A communi multiplicatore vel divisore æqualitatem non immutari, vel rationem.
13. Facta sub singolis æquarifacto sub tota.
14. Facta continue sub magnitudinibus, vel ex iis continue orta, esse æqualia quocumque magnitudinum ordine ductio vel adplicatio fiat.
Κύρλον autem æqualitatum & proportionum symbolum, omnisque in Analysis momentis est.
15. Si fuerint tres quatuorve magnitudines, quod autem fit sub extremis terminis æquale est ei quod fit a medio inse, vel submediis, sunt proportionales. Et è converso,
16. Si fuerint tres quatuorve magnitudines, & sit ut prima ad secundam, ita secunda illa, vel tertia quæpiam ad aliam, erit quod fit sub extremis terminis æquale ei quod fit sub mediis.
Itaque Proportio potest dici constitutio æqualitatis; Æqualitas, resolutio proportionis.

CAPVT III.

De lege homogeneorum, & gradibus ac generibus magnitudinum comparatarum.

PRIMA & perpetua lex æqualitatum seu proportionum, quæ, quoniam de homogeneis concepta est, dicitur lex homogeneorum, hæc est:

Homogenea homogeneis comparari

Nam quæ sunt heterogenea, quomodo interseadfecta sint, cognosci non potest, ut dicebat Adrastus. Itaque,

Si magnitudo magnitudini additur, hæc illi homogenea est.

Si magnitudo magnitudini subducitur, hæc illi homogenea est.

Si magnitudo in magnitudinem ducitur, quæ fit, huic & illi heterogenea est.

Si magnitudo magnitudini adplicatur, hæc illi heterogenea est.

Quibus non attendisse causa fuit multæ caliginis & cæcutiei veterum Analystarum.

2. Magnitudines quæ ex genere ad genus sua vi proportionaliter adscendunt vel descendunt, vocentur Scalares.
3. Magnitudinum Scalarium prima esteso
 - (a) Latus, seu Radix
 - (b) Quadratum.
 - (c) Cubus.
 - (d) Quadrato-quadratum.
 - (e) Quadrato-cubus.
 - (f) Cubo-cubus.
 - (g) Quadrato-quadrato-cubus.
 - (h) Quadrato-cubo-cubus.
 - (i) Cubo-cubo-cubus.

Et ea deinceps serie & methodo denominanda reliqua.

4. Genera magnitudinum comparatarum, uti de scalaribus enunciantur ordine, sunt:
 - (a) Longitudo latitudove.
 - (b) Planum.
 - (c) Solidum.
 - (d) Plano-planum.
 - (e) Plano-solidum.
 - (f) Solido-solidum.
 - (g) Plano-plano-solidum.
 - (h) Plano-solido-solidum.
 - (i) Solido-solido-solidum,

& ea deinceps serie & methodo denominanda reliqua.

5. Ex serie scalarium gradus altior, in quo consistit comparata magnitudo exinde a latere, vocatur potestas. Reliquæ inferiores scalares sunt gradus parodici ad potestatem.

6. Pura est potestas, cum adfectione vacat. Adfecta, cui homogeneous sub parodico ad potestatem gradu & adscita coefficiente magnitudine immiscetur.

Pura potestas est, Quadratum, Cubus, Quadrato-quadratum, Quadrato-cubus, Cubo-cubus, & c. Potestas vero adfecta est,

In gradu secundo.

Quadratum, una cum Plano ex latere in longitudinem, latitudinemve.

In gradu tertio.

Cubus, cum Solido ex Quadrato in longitudinem, latitudinemve.

Cubus, cum Solido ex latere in Planum.

Cubus, cum duplici Solido. Uno ex Quadrato in longitudinem, latitudinemve.

Altera ex latere in Planum.

In gradu quarto.

Quadrato-quadratum cum Plano-plano ex Cubo in longitudinem, latitudinemve.

Quadrato-quadratum, cum Plano-plano ex Quadrato in Planum.

Quadrato-quadratum, cum Plano-plano ex latere in Solidum.

Quadrato-quadratum, cum duplici Plano-plano. Uno ex Cubo in longitudinem, latitudinemve. Altero ex Quadrato in Planum.

Quadrato-quadratum, cum duplici Plano. Uno ex Cubo in longitudinem, latitudinemve. Altero ex latere in Solidum.

Quadrato-quadratum, cum duplici Plano-plano. Uno ex Quadrato in Planum. Altero ex latere in Solidum.

Quadrato-quadratum, cum triplici Plano-plano. Primo ex Cubo longitudinem, latitudinemve. Secundo ex Quadrato in Planum. Terzio ex latere in Solidum.

Eodem ordine invenientur Potestates adfecta in reliquis scale gradibus.

Quot autem in unoquoque gradu sint potestatum adfectarum genera, si cognoscere placuerit, sumitur numerus unitate minor quam fit in progressionem ab unitate dupla, terminus eiusdem ordinis atque potestas proposita.

Ut si lubeat scire, quot sint potestates adfecta in gradu Quadrato-quadrati, hoc est, quarto, sumendus est quartus progressionis duple terminus, scilicet 8, a quo dempta unitate remanet 7. Tot itaque sunt in gradu quarto Potestates adfecta, quas modo enumeravimus. Eadem ratione inveniatur in gradu Quadrato-cubi, hoc est, quinto, esse quindecim Potestatum adfectarum genera.

7. Magnitudines adscititiæ, sub quibus & gradu parodico fit potestati quid homogeneous ad eam adficiendum, dicuntur Sub-graduales.

Subgraduales sunt, longitudo, latitudove, Planum, Solidum, Plano-planum. Ut si fuerit Quadrato-quadratum cui immisceatur Plano-planum ex latere in Solidum; erit Solidum, subgradualis magnitudo; latus vero, gradus ad Quadrato-quadratum parodicus. Vel si fuerit Quadrato-quadratum una cum duplici Plano-plano, uno ex quadrato in Planum, altero ex latere in Solidum. Erunt Planum ac Solidum subgraduales magnitudines: quadratum vero & latus, gradus ad Quadrato-quadratum parodici.

CAPVT IV.

De præceptis Logistices Speciosæ.

LOGISTICE numerosa est quæ per numeros, Speciosa quæ per species seu rerum formas exhibetur, ut pote per Alphabetica elementa.

*Logisticen Numerosam tractavit Diophantus tredecim Arithmeti-
corum libris, quarum sex priores tantum extant, nunc quidem Grace & Latine, & eruditissimi viri clarissimi Claudii Bacheti commentariis illustrati: Logisticen vero Speciosam Vieta, quinque Zeteticorum libris, quos potissimum e selectis Diophanti quæstionibus quas quandoque peculiari sibi methodo explicat, concinnavit. Quare si utriusque Logistices discrimen cum fructu dignoscere cupias, tibi simul Diophantus & Vieta consulendi, & huius Zetetica cum illius quæstionibus Arithmeti-
cis dispicienda, quo in opere ut te labore sublevem, ex Diophanti quæstionibus concepta Zetetica breviter annotabo.*

DIOPHANTUS		VIETA	
1. Qæst.	1.	1. Zetetic.	1.
4.	1.	2.	1.
2.	1.	3.	1.
7.	1.	4.	1.
9.	1.	5.	1.
5.	1.	7.	1.
6.	1.	8.	1.
8.&9.	2.	1.	4.
10.	2.	2.&3.	4.
11.	2.	6.	4.
12.	2.	7.	4.

DIOPHANTUS		VIETA	
13.	2.	8.	4.
14.	2.	9.	4.
8.	5.	11.	4.
7.&8.	3.	1.	5.
9.	3.	3.	5.
10.	3.	4.	5.
11.	3.	5.	5.
12.	3.	7.	5.
13.	3.	8.	5.
9.	5.	9.	5.
34.	4.	13.	5.

Logistices speciosæ canonica præcepta sunt quatuor, ut numerosæ.

PRÆCEPTUM I.

Magnitudinem magnitudini addere.

Sunto duæ magnitudines A & B. Oportet alteram alteri addere.

Quoniam igitur magnitudo magnitudini addenda est, homogeneæ autem heterogeneas non adficiunt, sunt quæ proponuntur addendæ duæ magnitudines homogeneæ. Plus autem vel minus non constituunt genera diversa. Quare nota copulæ seu adiunctionis commode addentur; & adgregatæ erunt A plus B, siquidem sint simplices longitudes latitudinesve. Sed si adscendant per expositam scalam, vel adscendentibus genere communicent, sua quæ congruit designabuntur denominatione veluti dicetur A Quadratum plus B plano, vel A cubus plus B solido, & similiter in reliquis. Solent autem Analystæ symbolo + adfectionem adiunctionis indicare.

PRÆCEPTUM II.

Magnitudinem magnitudini subducere.

Sunto duæ magnitudines A & B, illa maior, hæc minor. Oportet minorem a maiore subducere. Quoniam igitur magnitudo magnitudini subducenda est, homogeneæ autem heterogeneas non adficiunt, sunt quæ proponuntur duæ magnitudines homogeneæ. Plus autem vel minus non constituunt genera diversa. Quare nota disiunctionis seu multæ commode minoris a maiore fiet subductio, & disiunctæ erunt A minus B, siquidem sint simplices longitudes latitudinesve. Sed si adscendant per expositam scalam vel adscendentibus genere communicent, sua quæ congruit designabuntur denominatione: veluti dicetur A quadratum minus B plano, vel A cubus minus B solido, & similiter in reliquis. Neque

aliter opus fit, si ipsa magnitudo quæ subducenda est iam adfecta sit; cum totum & partes diverso iure non debeant censerī: ut si ab A subtrahenda sit B plus D, residua erit A minus B, minus D, subductis sigillatim magnitudinibus B & D. At si iam negetur D de ipsa B, & B minus D ab A subtrahenda sit, Residua erit A minus B plus D, quoniam subtrahendo B magnitudinem subtrahitur plus æquo per magnitudinem D: ideo additione illius compensandum. Solent autem Analystæ Symbolo – adfectionem multæ indicare. Et hæc $\lambda\epsilon\iota\psi\zeta$ est Diophanto, ut adfectio adiunctionis $\epsilon\upsilon\pi\alpha\rho\zeta\iota\zeta$. Cum autem non proponitur ultra magnitudo sit maior vel minor, & tamen subductio facienda est, nota differentiae est = id est, minus incerto: ut propositis A quadrato & B plano, differentia erit A quadratum = B plano, vel B planum A = quadrato.

PRÆCEPTUM III.

Magnitudinem in magnitudinem ducere.

Sunto duæ magnitudines A & B. Oportet alteram in alteram ducere. Quoniam igitur magnitudo in magnitudinem ducenda est, efficient illæ ductu suo magnitudinem sibi ipsis heterogeneam, atque ideo quæ sub iis fit designabitur commode vocabulo IN vel SUB, veluti A in B. Quo significetur hanc in illam ductam fuisse, vel, ut alii, factam esse sub A & B, idque simpliciter, si quidem A & B sint simplices longitudines latitudinemve. Sed si ascendunt in scala, vel eis genere communicent, ipsas scalarium vel eis genere communicantium adhibere convenit denominationes, ut pote A quadratum in B, vel A quadratum in B planum solidum-ve, & similiter in reliquis. Quod si ducendæ magnitudines, vel earum altera sint duorum vel plurium nominum, nihil ideo diversi in opere accidit. Quoniam totum est suis partibus æquale, ideoque facta sub segmentis alicuius magnitudinis æquantur facto sub tota. Et cum adfirmatum unius magnitudinis nomen ducetur in alterius quoque magnitudinis nomen adfirmatum, quod fiet erit adfirmatum, & in negatum, negatum. Cui præcepto etiam consequens est, ut ductione negatorum nominum alterius in alterum, factum sit adfirmatum, ut cum $A=B$ ducetur in $D=G$: quoniam id quod fit ex adfirmata A in G negatam manet negatum, quod est nimium negare minuereve, quandoquidem A est ducenda magnitudo producta, non accurata. Et similiter, quod fit ex negata B in D adfirmatam manet negatum, quod est rursus nimium negare: quandoquidem D est ducenda magnitudo producta, non accurata, ideo in compensationem dum B negata ducitur in G negatam factum est adfirmatum.

Denominationes factorum à scandentibus proportionaliter ex genere ad genus magnitudinibus isto prorsus modo se habent:

Latus in se facit Quadratum.

Latus in Quadratum facit Cubum.
 Latus in Cubum facit Quadrato-quadratum.
 Latus in Quadrato-quadratum, facit Quadrato-cubum.
 Latus in Quadrato-cubum, facit Cubo-cubum.
 Et permutatim, id est Quadratum in Latus facit Cubum. Cubus in Latus, facit
 Quadrato-quadratum & c. Rursus,
 Cubus in se facit Cubo-cubum.
 Cubus in Quadrato-quadratum, facit Quadrato quadrato-cubum.
 Cubus in Quadrato-cubum, facit Quadrato-cubo-cubum.
 Cubus in Cubo-cubum, facit Cubo cubo-cubum.
 & permutatim, eoque deinceps ordine. Æque in homogeneis,
 Latitudo in longitudinem facit Planum.
 Latitudo in Planum facit Solidum.
 Latitudo in Solidum facit Plano-planum.
 Latitudo in Plano-planum facit Plano-solidum.
 Latitudo in Plano-solidum facit Solido-solidum.
 & permutatim.
 Planum in Planum facit Plano-planum.
 Planum in Solidum facit Plano-solidum.
 Planum in Plano-planum facit Solido-solidum.
 & permutatim.
 Solidum in Solidum facit Solido-solidum.
 Solidum in Plano-planum facit Plano-plano-solidum.
 Solidum in Plano-solidum facit Plano-solido-solidum.
 Solidum in Solido-solidum facit Solido-solido-solidum.
 & permutatim, eoque deinceps ordine.

PRÆCEPTUM IV.

Magnitudinem magnitudini adplicare.

Sunt duæ magnitudines A & B, Oportet alteram alteri adplicare. Quoniam
 igitur magnitudo magnitudini adplicanda est. Altiores autem depressioribus ad
 plicantur, homogeneæ heterogeneis, sunt quæ proponuntur magnitudines het-
 erogeneæ. Esto sane A longitudo, B planum. Commode itaque intercedet
 virgula inter B altiore quæ adplicatur, & A depresso, cui fit adplicatio.
 Sed & ipsæ magnitudines denominabuntur a suis, in quibus hæserunt, vel ad
 quos in proportionalium scala vel homogenearum de vectæ sunt, gradibus, veluti
 $\frac{B \text{ planum}}{A}$. Quo symbolo significetur latitudo quam facit B planum adplicatum A
 longitudini. Et si B detur esse cubus, A planum, exhibebitur $\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ plano}}$. Quo sym-
 bolo significetur latitudo quam facit B cubus adplicatus A plano. Et si ponatur

B cubus, A longitudo, exhibebitur $\frac{B \text{ cubus}}{A}$. Quo symbolo significetur planum quod oritur ex adplicatione B cubi ad A, & eo in infinitum ordine. Neque in binomiis polynomiisve magnitudinibus diversum quicquam observabitur.

Denominationes ortorum ex adplicatione à scandentibus proportionaliter ex genere ad genus gradatim magnitudinibus isto prorsus modo se habent:

Quadratum adplicatum Lateri restituit Latus.

Cubus adplicatus Lateri restituit Quadratum.

Quadrato-quadratum adplicatum Lateri restituit Cubum.

Quadrato-cubus adplicatus Lateri restituit Quadrato-quadratum.

Cubo-cubus adplicatus Lateri restituit Quadrato-cubum;

& permutatim, id est Cubus adplicatus Quadrato restituit Latus. Quadrato-quadratum Cubo latus & c. Rursus,

Quadrato-quadratum adplicatum Quadrato restituit Quadratum.

Quadrato-cubus adplicatus Quadrato restituit Cubum.

Cubo-cubus adplicatus Quadrato restituit Quadrato-quadratum;

& permutatim. Rursus,

Cubo-cubus adplicatus Cubo restituit Quadrato-quadratum.

Quadrato-cubo-cubus adplicatus Cubo restituit Quadrato-cubum.

Cubo-cubo-cubus adplicatus Cubo restituit Cubo-cubum;

& permutatim, eoque deinceps ordine.

Æque in Homogeneis,

Planum adplicatum Latitudini restituit Longitudinem.

Solidum adplicatum Latitudini restituit Planum.

Plano-planum adplicatum Latitudini restituit Solidum.

Plano-solidum adplicatum Latitudini restituit Plano-planum.

Solido-solidum adplicatum Latitudini restituit Plano-solidum;

& permutatim.

Plano-planum adplicatum Plano restituit Planum.

Plano-solidum adplicatum Plano restituit Solidum.

Solido-solidum adplicatum Plano restituit Plano-planum;

& permutatim.

Solido-solidum adplicatum Solido restituit Solidum.

Plano-plano-solidum adplicatum Solido restituit Plano-planum.

Plano-solido-solidum adplicatum Solido restituit Plano-solidum.

Solido-solido-solidum adplicatum Solido restituit Solido-solidum;

& permutatim, eoque deinceps ordine.

Cæterum sive in additionibus magnitudinum, sive in multiplicationibus & divisionibus, non officit adplicatio, quominus expositis præceptis locus sit: hoc in-

specto, quod dum in adplicatione magnitudo tam altior quam depressior ducitur in eadem magnitudinem, eo opere magnitudinis ex adplicatione ortivæ generi vel valori nihil additur vel detrahitur; quoniam quod super effecit multiplicatio, idem resolvit divisio: ut $\frac{B \text{ in } A}{B}$ est A , & $\frac{B \text{ in } A}{B}$ Planum est A planum.

Itaque in Additionibus, oportet $\frac{A \text{ plano}}{B}$ addere Z . Summa erit

$$\frac{A \text{ planum} + Z \text{ in } B}{B};$$

vel, oportet $\frac{A \text{ plano}}{B}$ addere $\frac{Z \text{ quadratum}}{G}$. Summa erit

$$\frac{G \text{ in } A \text{ planum} + B \text{ in } Z \text{ quadratum}}{B \text{ in } G}.$$

In subductionibus, oportet $\frac{A \text{ plano}}{B}$ subducere Z . Residua erit

$$\frac{A \text{ planum} - Z \text{ in } B}{B};$$

vel, oportet $\frac{A \text{ plano}}{B}$ addere subducere $\frac{Z \text{ quadratum}}{G}$. Residua erit

$$\frac{A \text{ planum in } G - Z \text{ quadratum in } G}{B \text{ in } G}.$$

In multiplicationibus, oportet $\frac{A \text{ planum}}{B}$ ducere B . Effecta erit $A \text{ planum}$.

Vel, oportet $\frac{A \text{ planum}}{B}$ ducere in Z . Effecta erit

$$\frac{A \text{ planum in } Z}{B}.$$

Vel denique, oportet $\frac{A \text{ planum}}{B}$ ducere in $\frac{Z \text{ quadratum}}{G}$. Effecta erit

$$\frac{A \text{ planum}}{B \text{ in } G} \text{ in } Z \text{ quadratum}.$$

In adplicationibus, oportet $\frac{A \text{ cubum}}{B}$ adplicare ad D . Ducta utraque magnitudine in B , ortiva erit

$$\frac{A \text{ cubus}}{B \text{ in } D}.$$

Vel, $B \text{ in } G$ oportet adplicare ad $\frac{A \text{ planum}}{D}$. Ducta utraque magnitudine in D , ortiva erit

$$\frac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ plano}}.$$

Vel denique, oportet $\frac{B \text{ cubum}}{Z}$ adplicare ad $\frac{A \text{ cubum}}{D \text{ plano}}$. Ortiva erit

$$\frac{B \text{ cubus in } D \text{ planum}}{Z \text{ in } A \text{ cubum}}.$$

CAPVT V.

De legibus Zeteticis.

ZETESEOS perficiundæ forma his fere legibus continetur:

Si de longitudine quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio sub involucris eorum quæ proponuntur, quæsita longitudo Latus esto.

2. Si de planicie quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio sub involucris eorum quæ proponuntur, quæsita planicies Quadratum esto.
3. Si de soliditate quæritur, lateat autem æqualitas vel proportio sub involucris eorum quæ proponuntur, quæsita soliditas Cubus esto. Ascendet igitur sua vi vel descendet per quoscumque gradus comparatarum magnitudinum ea de qua quæritur.
4. Magnitudines tam datæ quam quæsita secundum conditionem quæstioni dictam adsimilantur & comparantur, addendo, subducendo, multiplicando & dividendo constanti ubique homogeneorum lege servatâ. Manifestum est igitur aliquid tandem inventurum iri magnitudini de qua quæritur vel suæ ad quam adscendet potestati æquale, idque factum omnino sub magnitudinibus datis, vel factum partim sub magnitudinibus datis & incerta de qua quæritur, aut ejus parodico ad potestatem gradu.
5. Quod opus, ut arte aliqua juvetur, symbolo constanti & perpetuo ac bene conspicuo datæ magnitudines ab incertis quæsitiis distinguantur, ut pote magnitudines quæsitiis elemento *A* aliave litera vocali, *E, I, O, U, Y* datas elementis *B, G, D* aliave consonis designando.
6. Facta sub datis omnino magnitudinibus addantur alterum alteri, vel subducantur juxta adfectionis eorundem notam, & in unum factum coalescant, quod esto homogeneum comparationis, seu sub data mensura: & ipsum unam æquationis partem facito.
7. Æque facta sub magnitudinibus datis eodemque parodico ad potestatem gradu addantur alterum alteri, vel subducantur juxta adfectionis eorundem notam, & in unum factum coalescant; quod esto homogeneum adfectionis seu sub gradu.
8. Homogenea sub gradibus potestatem, quam adficiunt vel à qua adficiunt, comitantur, & alteram æqualitas partem una cum ipsa potestate faciunt. Atque ideo homogeneum sub data mensura de potestate à suo genere vel ordine designata enuncietur: pure, si quidem ea pura est ab adfectione;

sin eam comitantur adfectionum homogenea, indicata tum adfectionis, tum gradus symbolo, una cum ipsa, quæ cum gradu coëfficit, adscititia magnitudine.

9. Atque id circo si accidat homogeneum sub data mensura immisceri homogeneo sub gradu, fiat Antithesis.

Antithesis est cum adficientes affectæve magnitudines ex una æquationis parte in alteram transeunt sub contraria adfectionis nota. Quo opere æqualitas non immutatur. Id autem obiter est demonstrandum.

PROPOSITIO I.

Antithesi æqualitatem non immutari.

Proponantur A quadratum minus D plano æquari G quadrato minus B in A . Dico A quadratum plus B in A æquari G quadrato plus D plano, neque per istam transpositionem sub contraria adfectionis nota æqualitatem immutari. Quoniam enim A quadratum minus D plano æquatur G quadrato minus B in A addatur utrobique D planum plus B in A . Ergo ex communi notione A quadratum, minus D plano plus D plano plus B in A æquatur G quadrato minus B in A , plus D plano: plus B in A . Iam adfectio negata in eadem æquationis parte elidat adfirmatam: illic evanescet adfectio D plani, hic adfectio B in A , & supererit A quadratum plus B in A æquale G quadrato plus D piano.

10. Et si accidat omnes datas magnitudines duci in gradum, & idcirco homogeneum sub data omnino mensura non statim offeri, fiat Hypobibasmus. Hypobibasmus est æqua depressio potestatis & parodicorum graduum observato scalæ ordine, donec homogeneum sub depresso gradu cadat in datum omnino homogeneum cui comparantur reliqua. Quo opere æqualitas non immutatur. Id autem obiter est demonstrandum.

Hypobibasmi opus à Parabolismo deffert in eo tantum quod per Hypobibasmm utraque æqualitatis pars ad quantitatem ignotam adplicatur; per Parabolismum vero ad quantitatem certam, ut ex exemplis ab authore allatis perspicuum est.

PROPOSITIO II.

Hypobibasmo æqualitatem non immutari.

Proponatur A cubus, plus B in A quadratum; æquari Z plano in A . Dico per hypobibasmm A quadratum, plus B in A ; æquari Z plano.

Illud enim est omnia solida divisisse per communem divisorem, à quo non immutari æqualitatem determinatum est.

11. Et si accidat gradum altiorem, ad quem adscendet æsita magnitudo, non ex se subsistere, sed in aliquam datam magnitudinem duci, fiat Parabolismus.

Parabolismus est homogeneorum, quibus constat æquatio, ad datam magnitudinem, quæ in altiorem quæsitiuæ gradum ducitur, communis adplicatio; ut is gradus potestatis nomen sibi vendicet, & ex ea tandem æquatio subsistat. Quo opere æqualitas non immutatur. Id autem obiter est demonstrandum.

PROPOSITIO III.

Parabolismo æqualitatem non immutari.

Proponatur B in A quadratum plus D plano in A æquari Z solido. Dico per Parabolismum A quadratum plus $\frac{D \text{ plano}}{B}$ in A æquari $\frac{Z \text{ plano}}{B}$. Illud enim est omnia solida divisisse per B communem divisorem, à quo non immutari æqualitatem determinatum est.

12. Et tunc diserte exprimi æqualitas censetur & dicitur ordinata: ad Analogismum, si placet, revocanda, tali præsertim cautione; ut sub extremis facta, tum potestati tum adfectionum homogeneis respondeant; sub mediis vero, homogeneo sub data mensura.
13. Unde etiam Analogismus ordinatus definiatur series trium quatuorve magnitudinum; ita effata in terminis sive puris sive adfectis, ut omnes dentur præter eum de quo quæritur, eiusve potestatem & parodicos ad eam gradus.
14. Denique æqualitate sic ordinata ordinatove Analogismo, sua munia implevisse Zeteticen existimato.

Zeteticen autem subtilissime omnium exercuit Diophantus in iis libris, qui de re Arithmetica conscripti sunt. Eam vero tanquam per numeros, non etiam per species (quibus tamen usus est) institutam exhibuit, quo sua esset magis admirationi subtilitas & solertia: quando quæ Logistæ numero subtiliora adparent & abstrusiora, ea utique specioso familiaria sunt & statim obvia.

CAPVT VI.

De Theorematum per Poristicen examinatione.

PERFECTA Ztesi, confert se ab hypothese ad thesin Analysta, conceptaque suæ inventionis Theoremata in artis ordinationem exhibet, legibus κατὰ παντός, καθ' αὐτό, κατό, καθόλου πρώτον obnoxia. Quæ quanquam suam hebent ex Zetesi demonstrationem & firmitudinem; attamen legi syntheseos, quæ via demonstrandi censetur λογικωτέρη, subiciuntur: & si quando opus est, per eam adprobantur magno artis inventricis miraculo. Atque idcirco repetuntur Analyseos vestigia. Quod & ipsum Analyticum est: neque propter inductam sub specie Logisticen iam negociosum. Quod si alienum proponitur inventum, vel fortuito oblatum, cuius veritas expendenda & inquirenda est; tunc tendenda primum Poristics via est, à qua deinceps ad syntheseos fit facilis reditus: ut ea de re prolata sunt à Theone exempla in Elementis, & Apollonio Pergeō in Conicis, ac ipso etiam Archimede variis in libris.

CAPVT VII.

De officio Rhetices.

ORDINATA æquatione magnitudinis de qua quæritur, ῥητική ἢ ἐξηγητική, quæ reliqua pars Analytica censenda est, atque potissimum ad artis ordinationem pertinere, (cum reliquæ duæ exemplorum sint potius quam præceptorum, ut Logicis iure concedendum est) suum exercet officium; tam circa numeros, si de magnitudine numero explicanda quæstio est, quam circa longitudes, superficies, corporave si magnitudinem re ipsa exhiberitio porteat. Et hic se præbet Geometram Analysta, opus verum efficiendo post aliud, similis vero, resolutionem: illic Logistam, potestates quascumque numero exhibitæ, sive puras, sive adfectas, resolvendo. Et sive in Arithmetice, sive Geometricis, artificii sui nullum non edet ipecimen, secundum inventæ æqualitatis, vel de ea concepti ordinate Analogismi, conditionem. Et vero non omnis effectio Geometrica concinna est, singula enim problemata suas habent elegantias: verum ea cæteris antefertur, quæ compositionem operis non ex æqualitate, sed æqualitatem ex compositione arguit & demonstrat: ipsa vero compositio seipsam. Itaque artifex Geometra, quanquam Analyticum, edoctus, illud dissimulat & tanquam de opere efficiendo cogitans profert suum syntheticum problema & explicat: Deinde Logistis auxiliaturus de proportione vel æqualitate in eo adgnita concipit & demonstrat Theorema.

CAPVT VIII.

Æquationum notatio & Artis Epilogus.

A EQUATIONIS vox simpliciter prolata in Analyticis de æqualitate per Zetesin rite ordinata accipitur.

2. Itaque æquatio est magnitudinis incertæ cum certa comparatio.
3. Magnitudo incerta radix est vel potestas.
4. Rursus, potestas pura est vel adfecta.
5. Adfectio per negationem est vel adfirmationem.
6. Cum adficiens homogeneum negatur de potestate, negatio est directa.
7. Cum contra potestas negatur de adficiente homogeneo sub gradu, negatio est inversa.
8. Subgradualis metiens est homogenei adfectionis, gradus ipse mensura.
9. Oportet autem in parte æquationis incerta designari ordinem tum potestatis, tum graduum, nec non adfectionis qualitatem seu notam. Ipsas etiam dari adscititias subgraduales magnitudines.
10. Primus ad potestatem parodicus gradus est radix de qua quæritur. Extremus, is qui uno scalæ gradu inferior est potestate. Solet autem is voce Epanaphoræ exaudiri.
Ita Quadratum est Epanaphora cubi, Cubus Quadrato-quadrati, Quadrato-quadratum Quadrato-cubi, & eadem in infinitum serie.
11. Parodicus ad potestatem gradus parodici est reciprocus, cum alterius in alterum ductu potestas fit. Sic adscititia eius gradus quem sustinet est reciproca.
Ut si fuerit Latus, gradus ad Cubum parodicus, erit quadratum gradus reciprocus; ex latere enim in Quadratum oritur Cubus. Planum vero sublaterale erit magnitudo reciproca, quippe cum ex latere in Planum fiat Solidum, magnitudo scilicet eiusdem cum Cubo gradus.
12. A radice longitudine gradus parodici ad potestatem sunt ii ipsi qui designantur in scala.

13. A radice plana gradus parodici sunt:

Quadratum.		PLANUM.
Quadrato-quadratum.	Seu	PLANI Quadratum.
Cubo-cubus.		PLANI Cubus.

& eo deinceps ordine.

14. A radice solida gradus parodici sunt:

Cubus.		SOLIDUM.
Cubo-cubus.	Seu	SOLIDI Quadratum.
Cubus-cubo-cubus.		SOLIDI Cubus.

15. Quadratum, Quadrato-quadratum, Quadrato-cubo-cubus, & quæ continuo eo ordine à se ipsismet fiunt, sunt potestates simplicis medii, reliquæ multiplicis.

Potestates simplicis medii ita quoque definiri possunt, ut sint, quarum numeri ordinales progrediuntur secundum proportionem Geometricam subduplam. Ita potestates secundi gradus, Quarti, Octavi, Decimi Sexti, erunt simplicis medii. Reliquæ in gradibus intermediis consistentes, multiplicis.

16. Magnitudo certa, cui comparantur reliqua, est homogeneum comparationis.

Ut si fuerit A cubus+A in B quadratum, æqualis B in Z planum. Erit, B in Z planum. Hmogeneum comparationis.

A cubus. Potestas ad quam vi sua ascendit magnitudo incerta, de qua quæritur.

A in B quadratum. Homogeneum adfectionis.

A gradus ad potestatem parodicus.

B quadratum Subgradualis magnitudo, seu Parabola.

17. In numeris homogenea comparationum sunt unitates.

18. Cum radix, de qua quæritur, in sua base consistens datæ magnitudini homogeneæ comparatur, æquatio est simplex absolute.

19. Cum potestates radices, de qua quæritur, pura ab adfectione datæ homogeneæ comparatur, æquatio est simplex Climactica.

20. Cum potestas radices, de qua quæritur, adfecta sub designato gradu & data coefficiente datæ magnitudini homogeneæ comparatur, æquatio polynomia est pro adfectionum multitudine & varietate.

21. Quot sunt gradus parodici ad potestatem, tot adfectionibus potestas potest implicari.
Itaque Quadratum potest adfici sub Latere.
Cubus sub Latere & quadrato.
Quadrato-quadratum sub Latere, Quadrato, & Cubo. Quadrato-cubus sub latere, Quadrato, & Cubo, & ea in infinitum serie.
22. Analogismi à generibus æquationum in quas incidunt resoluti, distinguuntur & nomenclaturam accipiunt.
23. Ad Exegeticen in Arithmetiis instruitur Analysta edoctus
Numerum numero addere.
Numerum numero subducere.
Numerum in numerum ducere.
Numerum per numerum dividere.
Potestatum porro quarumcumque, sive purarum sive (quod nesciverunt veteres atque novi) adfectarum, tradit Ars resolutionem.
24. Ad Exegeticen in Geometricis seligit & recenset effectiones magis canonicas, quibusæquationes Laterum & Quadratorum omnino explicentur.
25. Ad Cubos & Quadrato-quadrata postulat, ut quasi Geometria suppleatur Geometriæ defectus,
- A quovis puncto ad duas quavis lineas rectam ducere interpretam ab iis præfinito possibili quocumque inter segmento.*
- Hoc concesso (est autem ἀτύτητα non δυσμήχανον) famosiora, quæ hactenus ἀλογα dicta fuere, problemata solvit ἑστέχως, mesographicum, sectionis anguli in tres partes æquales, inventionem lateris Heptagoni, ac alia quotcumque in eas æquationum formulas incidunt, quibus Cubi solidis, Quadrato-quadrata Plano-planis, sive pure sive cum adfectione, comparantur.
26. Ecquis vero, cum magnitudines omnes sint lineæ, superficies, vel corpora, tantus proportionum supra triplicatam, aut demum quadruplicatam rationem potest esse usus in rebus humanis, nisi forte in sectionibus angulorum, ut ex lateribus figurarum anguli, vel ex angulis latera consequamur?
27. Ergo à nemine hactenus adgnitum mysterium angularium sectionum, sive ad Arithmetica, sive Geometrica aperit, & edocet

Data ratione angulorum dare rationem laterum.

Facere ut numerum ad numerum, ita angulum ad angulum.

28. Lineam rectam curvæ non comparat, quia angulus est medium quiddam inter lineam rectam & planam figuram. Repugnare itaque videtur homogeneorum lex.
29. Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zetetics, Poristics & Exegetics formam tandem induta, jure sibi adrogat, Quod est,

NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.

Glossario

Antitesi (*Antithesis*): corrisponde al *principio del trasporto* delle equazioni, che afferma che si può trasportare un termine da un membro all'altro dell'equazione, purchè lo si cambi di segno.

Dividere (*Adplicare*).

Elemento omogeneo della combinazione o secondo il grado (*Homogeneum adfectionis seu sub gradu*): termine che si ottiene dalla somma o dalla sottrazione di tutti i prodotti composti da un coefficiente e un'incognita, di grado inferiore rispetto a quello dell'equazione. Per esempio nell'equazione $x^3 + ax^2 - bx = 0$ l'elemento omogeneo secondo il grado è $(ax^2 - bx)$.

Elemento omogeneo dell'equazione o secondo una data misura (*Homogeneum comparationis seu sub data mensura*): termine che si ottiene sommando o sottraendo tutti i termini noti.

Epanafora (*Ephanaphora*): grandezza di un solo grado inferiore rispetto all'equazione.

Grado parodico (*Gradus parodicus*): grado delle incognite inferiore rispetto a quello dell'equazione.

Grandezze confrontabili (*Magnitudines comparatæ*): grandezze note che possono essere sommate e sottratte fra loro in quanto dimensionalmente uguali.

Grandezze incognite (*Magnitudines scalares*).

Grandezze sottograduali (*Sub-graduales*): coefficienti che moltiplicano le incognite di grado inferiore rispetto a quello dell'equazione.

Ipobibasma (*Hypobibasmus*): divisione di tutti i termini dell'equazione per un fattore comune, che risulta un'incognita.

Moltiplicare (*Ducere*).

Nome negativo (*Nomen negatum*): segno negativo.

Nome positivo (*Nomen adfirmatum*): segno positivo.

Parabolismo (*Parabolismus*): divisione di tutti i termini dell'equazione per il coefficiente dell'incognita di grado maggiore.

Potenza (*Potestas*): incognita di grado maggiore; essa determina il grado complessivo dell'equazione.

Potenza combinata (*Potestas adfecta*): incognita di grado maggiore accompagnata da un coefficiente.

Potenza pura (*Potestas pura*): incognita di grado maggiore priva di coefficiente.

Proporzione (*Analogysmo*).

Sommare (*Addere*).

Sottrarre (*Subducere*).

ISAGOGE

Traduzione e commento

1.1 I metodi dell'analisi.

PER arrivare alla verità in Matematica occorre impiegare tutti i metodi dell'analisi. I due metodi classici sono quelli dell'analisi e della sintesi. L'analisi fu inventata da Platone, per le ricerche matematiche e fu così chiamata da Teone; risulta il metodo mediante il quale si considera come dato “ciò che si domanda”, cioè la tesi, e passo dopo passo si giunge ad una verità inconfutabile. Invece con il processo della sintesi si parte da “ciò che è assegnato”, cioè dalle ipotesi per giungere alla tesi, ossia si procede in modo inverso rispetto all'analisi, in quanto finalizzato alla dimostrazione dei teoremi. Gli antichi conoscevano solo questi due tipi di analisi, detti Zetetica e Poristica, a cui si riferisce principalmente la definizione di Teone¹, è tuttavia opportuno introdurne un terzo tipo, che può essere chiamato Retica o Esegetica. La Zetetica è la prima fase dell'analisi, che partendo dai dati forniti dal problema, giunge ad un'uguaglianza o proporzione. In seguito mediante la Poristica, tale uguaglianza viene sviluppata, impiegando le regole algebriche note, per giungere ad una nuova proporzione, dalla quale si ricava la soluzione del problema. Il compito dell'Esegetica, invece, consiste nel dare un senso geometrico o aritmetico al risultato individuato dalla Poristica.² [Riassumendo, lo schema metodologico è il seguente:

¹Pappo individua due generi di analisi, una che chiama *teorica*, inerente al metodo di ricerca della soluzione, l'altra, detta *problematica*, che è quella che si applica per trovare la soluzione; in particolare riguardo quest'ultima Pappo dice: «[...] nell'analisi problematica si ammette che una proposizione sia nota; poi mediante conseguenze che ne scaturiscono e che sono ammesse come vere, si arriva a qualche cosa di concesso [...]». In Viète l'analisi *teorica* può essere associata alla *Zetetica*, la *problematica* alla *Poristica*. Vedi [6] p. 50 e [15] pp. 156-157.

²L'Esegetica ricopre un ruolo fondamentale nell'algebra viètiana, infatti, come si vedrà più avanti, le lettere, che non rappresentano necessariamente solo incognite, sono suscettibili di

- Enunciazione del *problema* da risolvere.
- *Zetetica*: associa al problema una proporzione o un'uguaglianza.³
- *Poristica*: sviluppa la proporzione giungendo ad una nuova uguaglianza, da cui si ricava la soluzione del problema.
- *Retica o Esetica*: interpreta geometricamente o aritmeticamente la soluzione.]n.c.

Inoltre la *Zetetica* è definita dalla logica, attraverso sillogismi ed entimema, governati da quelle stesse leggi che regolano le proporzioni e che derivano sia da nozioni comuni, sia da teoremi, dimostrati con il processo di sintesi.⁴

[In particolare si abbandona il linguaggio numerico derivante dalla tradizione abacista, per adottarne uno di grande potenza espressiva, che consente di confrontare fra loro le grandezze in maniera più snella e diretta.]n.c.

1.2 Le regole che governano le equazioni e le proporzioni.

L'ARS ANALYTICA considera come dimostrate le leggi più comuni che regolano le proporzioni e che sono contenute negli *Elementi*:

1. Il tutto è uguale alle sue parti
2. Quelle parti che sono uguali alla stessa cosa, sono uguali fra loro:

$$[A = B \quad e \quad C = B \quad \implies \quad A = C.]n.c.$$

3. Se parti uguali sono aggiunte ad altre parti uguali, le somme sono uguali:

$$[A = B \quad e \quad C = D \quad \implies \quad A + C = B + D.]n.c.$$

4. Se parti uguali sono sottratte a parti uguali, i resti sono uguali:

$$[A = B \quad e \quad C = D \quad \implies \quad A - C = B - D.]n.c.$$

varie interpretazioni.

³Ricondurre a zetetici significa ricondursi alla teoria delle proporzioni, cioè, ricordando il libro V degli *Elementi* euclidei, alla forma più astratta della geometria classica.

⁴Viète introduce il capitolo successivo, in cui vengono ampliate e generalizzate, in chiave algebrica, quelle che ha definito “nozioni comuni”, che si trovano negli *Elementi* euclidei, ed i principi che regolano la teoria delle proporzioni.

5. Se parti uguali sono moltiplicate per parti uguali, i prodotti sono uguali:

$$[A = B \quad e \quad C = D \quad \Longrightarrow \quad A \cdot C = B \cdot D.]_{\text{n.c.}}$$

6. Se parti uguali sono divise da altre parti uguali, i quozienti e i resti sono uguali:

$$[A = B \quad e \quad C = D \quad \Longrightarrow \quad A : C = B : D.]_{\text{n.c.}}$$

7. *Proprietà dell'invertire e del permutare i medi:*

se alcune grandezze sono direttamente proporzionali, lo sono anche inversamente e viceversa.

$$[A : B = C : D \quad \Longrightarrow \quad B : A = D : C \quad e \quad A : C = B : D.]_{\text{n.c.}}$$

8. *Proprietà del comporre:*

se proporzioni simili sono aggiunte a proporzioni simili, le somme sono proporzionali:

$$[A : B = C : D \quad \Longrightarrow \quad (A + C) : (B + D) = A : B.^5]_{\text{n.c.}}$$

9. *Proprietà dello scomporre:*

se proporzioni simili sono sottratte a proporzioni simili, i resti sono proporzionali:

$$[A : B = C : D \quad \Longrightarrow \quad (A - C) : (B - D) = A : B.^6]_{\text{n.c.}}$$

10. Se parti proporzionali sono moltiplicate per parti proporzionali, i prodotti sono proporzionali:

$$[A : B = C : D \quad e \quad E : F = G : H \quad \Longrightarrow \quad (AE) : (BF) = (CG) : (DH).]_{\text{n.c.}}$$

⁵La proprietà del comporre afferma che

$$\begin{aligned} A : B = C : D \quad \Longrightarrow \quad (A + B) : B &= (C + D) : D \\ (A + B) : A &= (C + D) : C \end{aligned}$$

Così, se alla proporzione $A : B = C : D$, applico la proprietà del permutare i medi e quella del comporre ottengo

$$A : B = C : D \Rightarrow A : C = B : D \Rightarrow (A + C) : C = (B + D) : D;$$

in particolare

$$\begin{aligned} (A + C) : C = (B + D) : D &\Rightarrow (A + C) : (B + D) = C : D \\ &\Rightarrow (A + C) : (B + D) = A : B. \end{aligned}$$

⁶Si veda la nota precedente.

Infatti, mentre parti proporzionali sono moltiplicate per altre proporzionali, si combinano quegli stessi rapporti. Tuttavia che i rapporti, composti da quelle stesse proporzioni, fossero uguali fra loro, era comunemente accettato dagli antichi geometri. Si veda nelle opere di Apollonio, di Pappo e dei restanti geometri. Poi la stessa combinazione delle proporzioni è influenzata dalla moltiplicazione rispettivamente degli antecedenti e dei conseguenti. Detto ciò è chiaro cosa Euclide dimostrò nella ventitreesima proposizione del sesto libro⁷ e nella quinta proposizione dell'ottavo libro⁸ degli Elementi.

11. Se parti proporzionali sono divise da parti proporzionali, ciò che si ottiene è proporzionale:

$$[A : B = C : D \quad e \quad E : F = G : H \quad \implies \quad \frac{A}{E} : \frac{B}{F} = \frac{C}{G} : \frac{D}{H}.]_{\text{n.c.}}$$

Quindi così come i rapporti vengono combinati insieme dalla moltiplicazione, allo stesso modo un rapporto viene separato dall'altro dalla divisione: la divisione, infatti, risolve ciò che la moltiplicazione produce. Osservazioni di questo tipo compaiono anche in Apollonio e negli altri antichi geometri.

12. L'equazione o il rapporto non è cambiato da un comune moltiplicatore o divisore:

$$[mA : mB = A : B \quad e \quad \frac{A}{m} : \frac{B}{m} = A : B.]_{\text{n.c.}}$$

13. Fare il prodotto rispetto ogni singola parte è come fare il prodotto rispetto al tutto:

$$[AB + AC = A(B + C).]_{\text{n.c.}}$$

14. I prodotti ottenuti da una successione di grandezze, o i quozienti ottenuti da una successione di divisori sono uguali, non importa con quale ordine la moltiplicazione o la divisione viene eseguita:

$$[AB = BA \quad e \quad \frac{A}{BC} = \frac{A}{CB}.]_{\text{n.c.}}$$

Ma la regola fondamentale delle proporzioni e quella più importante in analisi è:

⁷p. 89 di [4]: «THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIII. I parallelogrammi equiangoli hanno fra loro la proportion composta da i lati.»

⁸p. 112 di [4]: «THEOREMA III. PROPOSITIONE V. I numeri piani hanno fra loro la proporzione composta da i lati.»

Con il termine “numero piano”, si indica il prodotto di due numeri, detti i “lati” del prodotto.

15. Si considerino tre o quattro grandezze, esse sono in proporzione se il risultato del prodotto dei termini estremi è uguale al prodotto del medio per se stesso o al prodotto dei medi.

$$\begin{aligned} [AD = BC &\implies A : B = C : D \\ AC = B^2 &\implies A : B = B : C]\text{n.c.} \end{aligned}$$

E viceversa,

16. Si considerino tre o quattro grandezze, esse sono tali che la prima è alla seconda come la seconda, o la terza quantità è alla restante; il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi.

$$\begin{aligned} [A : B = C : D &\implies AD = BC \\ A : B = B : C &\implies AC = B^2]\text{n.c.} \end{aligned}$$

E così si può considerare la proporzione come parte costituente dell'uguaglianza e l'uguaglianza come risoluzione della proporzione.

1.3 La legge degli omogenei e le grandezze confrontabili.

LA prima e perpetua legge delle uguaglianze o delle proporzioni, dal momento che è stata concepita per le grandezze omogenee, è detta legge degli omogenei ed è la seguente:

1. Gli omogenei, cioè le grandezze dimensionalmente omogenee, possono essere confrontati solo con altri omogenei.⁹

⁹p. 2 di [18]: «Homogenea homogeneis comparari».

Questa legge rappresenta la proprietà fondamentale delle proporzioni ed afferma, in termini moderni, che tutti i numeri, che compongono un'equazione devono avere la stessa dimensione; pertanto, solo tali grandezze possono essere sommate o sottratte, in quanto appartenenti allo stesso o al corrispondente grado, sebbene questo non valga per la moltiplicazione e la divisione. La legge di omogeneità proposta da Viète si riferisce alla Definizione 3 del libro V degli *Elementi* di Euclide: «La proportione è di due grandezze del medesimo genere in quanto appartiene alla quantità, una certa convenienza». Vedi p. 62 di [4].

Secondo questa definizione, esistono “rapporti” solo tra grandezze omogenee e con il termine “rapporto” si intende una relazione tra due grandezze dello stesso, o del corrispondente tipo rispetto alle dimensioni. Inoltre il termine *compositio*, in questo contesto, significa aggiungere e sottrarre grandezze da espressioni algebriche o uguagliare grandezze o espressioni fra loro. Viète dunque considera la teoria delle proporzioni, alla luce della teoria delle equazioni, intesa come teoria di calcolo.

Infatti, come affermava Adrasto, non si può sapere in che modo si combinino fra loro le grandezze eterogenee¹⁰. E così

Se a una grandezza è aggiunta una grandezza questa è omogenea con quella.

Se a una grandezza è sottratta una grandezza questa è omogenea con quella.

Se una grandezza è moltiplicata per un'altra grandezza, il prodotto è eterogeneo a entrambe.

Se una grandezza è divisa per un'altra grandezza, ciò che si ottiene è eterogeneo a entrambe.

L'aver trascurato ciò fu la causa di tanta incertezza e cecità da parte degli antichi analisti.

2. Sono chiamate scalari quelle grandezze che ascendono o discendono di genere in genere per loro stessa natura.¹¹

3. Le grandezze incognite sono anche chiamate *grandezze scalari*:

“lato” o “radice” [è la prima grandezza scalare: x]n.c.,

“quadrato” [è la seconda grandezza scalare: x^2]n.c.,

“cubo” [è la terza grandezza scalare: x^3]n.c.,

“quadrato-quadrato” [è la quarta grandezza scalare: x^4]n.c.,

“quadrato-cubo” [è la quinta grandezza scalare: x^5]n.c.,

“cubo-cubo” [è la sesta grandezza scalare: x^6]n.c.,

“quadrato-quadrato-cubo” [è la settima grandezza scalare: x^7]n.c.,

“quadrato-cubo-cubo” [è l'ottava grandezza scalare: x^8]n.c.,

“cubo-cubo-cubo” [è la nona grandezza scalare: x^9]n.c.

E a loro volta i rimanenti devono essere indicati seguendo questa serie e questo procedimento.

¹⁰Teone (Hiller) p. 73:

τὰ μὲν γὰρ ἀνομογενῆ πῶς ἔχει πρὸς ἄλληλά Φησιν ἸΑδραστος εἰδέναι ἀδύνατον.

Risulta che Teone si valse del commentario al Timeo platonico composto dal peripatetico Adrasto di Afrodisiade (II secolo d.C.), a sua volta dipendente dall'analoga opera di Posidonio, e di una fonte neopitagorica.

¹¹p. 3 di [18]: «Magnitudines quæ ex genere ad genus sua vi proportionaliter adscendunt vel descendunt, vocentur Scalares.»

Viète intende grandezze in proporzione continua: $x : x^2 = x^2 : x^3 = x^3 : x^4 = \dots$

4. I generi delle grandezze confrontabili¹², come sono stati enunciati ordinatamente per gli scalari, sono:
 “lunghezza” o “larghezza”, “piano”, “solido”, “piano-piano”, “piano-solido”, “solido-solido”, “piano-piano-solido”, “piano-solido-solido”, “solido-solido-solido”.
 E a loro volta i rimanenti devono essere indicati seguendo questa successione e questo procedimento.

5. Fra gli scalari, il grado più alto in relazione al “lato” e quello corrispondente alla grandezza nota (*comparata*), è chiamato potenza. Gli altri scalari più piccoli sono detti gradi “*parodici alla potenza*”, cioè inferiori.¹³

6. Una potenza è semplice (*pura*) “*cum adfectione vacat*”, cioè quando è priva di grandezze combinate.

Se una potenza è associata ad una grandezza che è il prodotto di un grado inferiore e un coefficiente è una potenza combinata (*adfecta*).

Sono potenze pure il “quadrato”, il “cubo”, il “quadrato-quadrato”, il “quadrato-cubo”, il “cubo-cubo” e così via.¹⁴

Sono potenze combinate di secondo grado:

- (a) Un “quadrato” seguito da un “piano”, che è il prodotto di un “lato” e di una “lunghezza” o “larghezza”:

$$[x^2 + xa.]\text{n.c.}$$

Sono potenze combinate di terzo grado:

¹²Le grandezze confrontabili (*comparatæ*), vanno intese come quelle grandezze note uguagliate o messe in relazione con le grandezze incognite (*scalares*), perciò, in base alla legge degli omogenei, devono concordare dimensionalmente con la grandezza sconosciuta. Pertanto “lunghezze”, “piani” o “solidi” vanno uguagliati con x , x^2 o x^3 . Le stesse considerazioni, come si vedrà successivamente, si possono estendere al prodotto di grandezze note e incognite. Infatti se si considera il prodotto ax^2 della “lunghezza” a e del “quadrato” x^2 , esso risulta un “solido”, che può essere uguagliato solo al “cubo” x^3 .

¹³Con il termine *potenza* si indica l’esponente più alto delle grandezze scalari, cioè il grado più alto dell’equazione, che determina la dimensione delle grandezze *comparatæ*. Queste sembrano indipendenti all’interno dell’equazione, ma in realtà possiedono un’unità dimensionale prestabilita dalla dimensione massima delle grandezze scalari. Infine per quanto riguarda le restanti grandezze incognite di grado inferiore (*reliquæ inferiores scalares*), Viète conclude definendole «*gradus parodici ad potestatem*» (p. 3 di [18]), cioè semplicemente gradi inferiori.

¹⁴Per esempio x^3 è una potenza *pura*, invece x^3+ax^2 è una potenza *adfecta*, cioè una potenza combinata con altre grandezze, nel rispetto della legge fondamentale degli omogenei. Si noti infatti come la grandezza incognita di terzo grado x^3 sia congiunta (*comparata*) mediante la somma, ad una grandezza “solida” di dimensione corrispondente al “cubo”.

- (a) Un “cubo” seguito da un “solido”, che è il prodotto di un “quadrato” e di una “lunghezza” o “larghezza”:

$$[x^3 + x^2a;]\text{n.c.}$$

- (b) Un “cubo” seguito da un “solido”, che è il prodotto di un “lato” e di un “piano”:

$$[x^3 + xb \text{ con } b \text{ piano};]\text{n.c.}$$

- (c) Un “cubo” seguito da un “solido”, che è il prodotto di un “quadrato” e di una “lunghezza” o “larghezza” o è il prodotto di un “lato” e di un “piano”:

$$[x^3 + x^2c \text{ e } x^3 + xd \text{ con } d \text{ piano.}] \text{n.c.}$$

Sono potenza combinate di quarto grado:

- (a) Un “quadrato-quadrato” seguito da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “cubo” e di una “lunghezza” o “larghezza”:

$$[x^4 + x^3a;]\text{n.c.}$$

- (b) Un “quadrato-quadrato” seguito da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “quadrato” e di un “piano”:

$$[x^4 + x^2b \text{ con } b \text{ piano};]\text{n.c.}$$

- (c) Un “quadrato-quadrato” seguito da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “lato” e di un “solido”:

$$[x^4 + xc \text{ con } c \text{ solido};]\text{n.c.}$$

- (d) Un “quadrato-quadrato” seguito da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “cubo” e di una “lunghezza” o “larghezza” o è il prodotto di un “quadrato” e di un “piano”:

$$[x^4 + x^3d \text{ o } x^4 + x^2e \text{ con } e \text{ piano};]\text{n.c.}$$

- (e) Un “quadrato-quadrato” seguito da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “cubo” e di una “lunghezza” o “larghezza” o è il prodotto di un “lato” e di un “solido”:

$$[x^4 + x^3d \text{ o } x^4 + xf \text{ con } f \text{ solido};]\text{n.c.}$$

- (f) Un “quadrato-quadrato” seguito da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “quadrato” e di un “piano” o è il prodotto di un “lato” e di “solido”:

$$[x^4 + x^2e \text{ con } e \text{ piano} \text{ o } x^4 + xf \text{ con } f \text{ solido};]n.c.$$

- (g) Un “quadrato-quadrato” seguito da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “cubo” e di una “lunghezza” o “larghezza” o è il prodotto di un “quadrato” e di un “piano” o è il prodotto di un “lato” e di “solido”:

$$[x^4 + x^3d \text{ o } x^4 + x^2e \text{ con } e \text{ piano} \text{ o } x^4 + xf \text{ con } f \text{ solido.}]n.c.$$

Allo stesso modo possono essere trovate le potenze combinate corrispondenti agli altri gradi della scala; [letteralmente:]n.c.

se sarà gradito conoscere anche quanti siano i generi delle potenze combinate per ciascun grado, si consideri un numero di unità minore del termine che è prodotto dalla progressione geometrica da unità in doppio rapporto e che hanno lo stesso ordine della potenza considerata.¹⁵

[Dunque se si vuole conoscere quanti siano i generi delle potenze combinate per ciascun grado, occorre considerare “la progressione geometrica di unità in doppio rapporto”:

$$1 : 2 = 2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = \dots ,$$

i cui termini sono: 1 2 4 8 16 32 ... , per poi considerare il termine della successione, che occupa la posizione corrispondente al grado della potenza considerata, diminuito di un’unità.]n.c.

Per esempio, le potenze combinate del quarto grado sono 7, esattamente quante quelle che abbiamo citato poco fa. Infatti il quarto termine della progressione con rapporto doppio è 8, da cui sottratta un’unità 7. Allo stesso modo si trova per il quinto grado che i generi delle potenze combinate sono 15.

7. I coefficienti che moltiplicano grandezze scalari¹⁶, che sono inferiori rispetto alla potenza e quindi producono una grandezza omogenea da sommare

¹⁵p. 4 di [18]: «Quot autem in unoquoque gradu sint potestatum adfectarum genera, si cognoscere placuerit, sumitur numerus unitate minor quam fit in progressione ab unitate dupla, terminus eiusdem ordinis atque potestas proposita.»

¹⁶Viète parla di «*magnitudines adscititiae*» (p. 4 di [18]), cioè grandezze associate, intendendo il prodotto di grandezze *comparatae* e di grandezze scalari di grado inferiore.

alla potenza, sono detti “sottograduali”.

“Lunghezza” o “larghezza”, “piano”, “solido”, “piano-piano”, sono grandezze sottograduali.

Dunque se si sarà considerata una grandezza di quarto grado, “quadrato-quadrato”, a cui è associato un “piano-piano” che è il prodotto di un “lato” e un “solido”, il “solido” sarà una grandezza sottograduale; invece il “lato” sarà il grado mancante per raggiungere il quarto.

[In termini moderni se si considera l’espressione di quarto grado

$$x^4 + bx$$

x^4	Quadrato-quadrato	bx	Piano-piano
b	Solido	x	Lato

si ha che:

la *magnitudo adscititia* è bx ;

il coefficiente o *sottograduale* è b ;

il *gradus parodici ad potestatem*, cioè il grado inferiore rispetto alla potenza x^4 , è x .]n.c.

Oppure se si sarà considerata una grandezza di quarto grado, “quadrato-quadrato”, seguita da un “piano-piano”, che è il prodotto di un “quadrato” e di un “piano”, il “piano” sarà una grandezza sottograduale; il “quadrato” sarà il grado mancante per arrivare al quarto.

[In altre parole se si considera l’espressione di quarto grado

$$x^4 + cx^2,$$

x^4	Quadrato-quadrato	cx^2	Piano-piano
c	Piano	x^2	Quadrato

si ha che:

la *magnitudo adscititia* è cx^2 ;

il coefficiente o *sottograduale* è c *piano*;

il *gradus parodici ad potestatem*, cioè il grado inferiore rispetto alla potenza x^4 , è x^2 .]n.c.

1.4 La *logistica speciosa* e le sue regole.

MENTRE la *logistica numerosa* si mostra attraverso i numeri, la *logistica speciosa* si manifesta attraverso le specie o attraverso le forme delle cose, ricorrendo ad esempio alle lettere dell’alfabeto.

Diofanto si occupò della *logistica* numerosa nei tredici libri di aritmetica, dei quali solo i primi sei esistono ancora, ora per di più sono disponibili in greco, in latino e negli eruditissimi commentari di Claudio Bacheti. Invece Viète ha introdotto nei cinque libri degli *Zetetici* la *logistica speciosa*, che sviluppa principalmente partendo da problemi di Diofanto, accuratamente selezionati, talvolta spiegandoli con un metodo simile al suo.¹⁷ Per cui se tu desideri conoscere con interesse la differenza fra i due tipi di *logistica*, devi consultare Diofanto e Viète insieme, e gli *Zetetici* di quest'ultimo devono essere affiancati ai problemi aritmetici del primo, anoterò brevemente gli *zetetici* formulati dai problemi di Diofanto, affinché possa alleggerirti la fatica necessaria per compiere questo lavoro.

<i>Quæstio</i>	DIOFANTO		VIÈTE
	<i>Libro dell'Aritmetica</i>	<i>Zetetico</i>	<i>Libro degli Zetetici</i>
1.	1.	1.	1.
4.	1.	2.	1.
2.	1.	3.	1.
7.	1.	4.	1.
9.	1.	5.	1.
5.	1.	7.	1.
6.	1.	8.	1.
8.&9.	2.	1.	4.
10.	2.	2.&3.	4.
11.	2.	6.	4.
12.	2.	7.	4.

¹⁷Diofanto rappresentava le incognite mediante il loro *eidos* (εἶδος: “aspetto”), cioè attraverso la loro *species* (forma, genere), considerando gli *eide* e le potenze delle incognite come nuove unità di calcolo. Pertanto Viète cerca di reinterpretare la tradizione nei suoi punti essenziali, estendendo universalmente a numeri e a grandezze geometriche, il concetto di *species*, senza però dimenticare il suo stretto legame con i numeri e il richiamo alla vecchia teoria dei numeri figurati. In questo modo definisce un nuovo metodo di calcolo, che lui stesso chiama *logistica speciosa*, dove con il termine *logistica* intende una “teoria del calcolo”, priva di riferimenti alle relazioni fra i numeri. Indubbiamente Viète traduce mediante la *logistica speciosa* alcune significative *questiones* diofantee con lo scopo di mettere in evidenza la potenza generalizzatrice della sua nuova forma di calcolo. È evidente quanto la *logistica speciosa* sia strettamente connessa al metodo diofanteo, che costituisce l'analogo aritmetico dell'analisi geometrica. Ciò che caratterizza l'opera viètiana infatti è proprio lo spirito geometrico con il quale viene ricostruito e rivisitato l'edificio algebrico e la convinzione che dietro all'analisi geometrica si celi la stessa *ars analytica*.

<i>Quæstio</i>	DIOFANTO		VIÈTE
	<i>Libro dell’Aritmetica</i>	<i>Zetetico</i>	<i>Libro degli Zetetici</i>
13.	2.	8.	4.
14.	2.	9.	4.
8.	5.	11.	4.
7.&8.	3.	1.	5.
9.	3.	3.	5.
10.	3.	4.	5.
11.	3.	5.	5.
12.	3.	7.	5.
13.	3.	8.	5.
9.	5.	9.	5.
34.	4.	13.	5.

Le regole teoriche della logistica speciosa sono fondamentalmente quattro:¹⁸

REGOLA I.

*Aggiungere una grandezza ad una grandezza.*¹⁹

Siano A e B due grandezze da sommare insieme. Poiché grandezze eterogenee non possono essere sommate, secondo la legge degli omogenei, quelle proposte sono due grandezze omogenee. Il fatto che una di queste sia maggiore o minore dell’altra, non comporta che esse siano di generi diversi; per cui possono essere opportunamente aggiunte mediante il segno di composizione o di addizione, la somma sarà: ²⁰

¹⁸In questo capitolo Viète introduce la *logistica speciosa*, segnando un confine netto fra aritmetica ed algebra, e stabilisce le regole fondamentali che estendono le quattro operazioni aritmetiche al contesto simbolico-letterale. Queste regole derivano direttamente dai calcoli numerici e rappresentano il primo sistema assiomatico moderno; esse infatti creano un contesto sistematico in grado di definire l’oggetto a cui si applicano.

¹⁹«Magnitudinem magnitudini addere.» p. 5 di [18].

Viète per indicare l’operazione di addizione utilizza il verbo *addo, is, dīdi, dītum, ěre*: aggiungere, sommare, dare oltre, ed il simbolo +.

²⁰«[...] & adgregatæ erunt A plus B, siquidem sint simplices longitudines latitudinesve. Sed si adscendant per expositam scalam, vel adscendentibus genere communicent, sua quæ congruit designabuntur denominatione veluti dicetur A Quadratum plus B plano, vel A cubus plus B solido, & similiter in reliquis.» p. 5 di [18].

Letteralmente: «[...] e aggregate saranno A più B, purchè siano semplici “lunghezze” o “larghezze”. Ma se si elevano più in alto sulla scala suddetta o se condividono il genere con quelli che si elevano, si concorda che saranno indicate con la propria denominazione, per esempio si dirà A “quadrato” più B “piano” o A “cubo” più B “solido” e allo stesso modo per gli altri casi.»

A più B se *A* e *B* sono semplici “lunghezze” o “larghezze”;

A quadrato più B piano, se *A* e *B* sono di grado superiore al
A cubo più B solido, ... primo e concordano in genere.

Gli analisti sono anche soliti indicare con il simbolo + l’operazione di addizione.

REGOLA II.

*Sottrarre ad una grandezza un’altra grandezza*²¹

Siano *A* e *B* due grandezze, la prima maggiore e la seconda minore. Si deve sottrarre la minore dalla maggiore. Inoltre poiché grandezze eterogenee non possono essere sottratte fra loro, secondo la legge fondamentale degli omogenei, quelle considerate sono omogenee. Il fatto che una grandezza sia maggiore o minore dell’altra, non comporta che esse siano diverse in genere, per questo è possibile effettuare in modo opportuno la sottrazione mediante il segno convenzionale di differenza o di “*multa*”²²; le grandezze sottratte saranno: ²³

A meno B se *A* e *B* sono semplici “lunghezze” o “larghezze”;

A quadrato meno B piano, se *A* e *B* sono di grado superiore al
A cubo meno B solido, ... primo e concordano in genere.

Se supponiamo invece che la grandezza sottratta sia combinata (*adfecta*), si procede analogamente a prima, in quanto il tutto e le sue parti vanno trattate ugualmente. Così se da *A* è sottratta *B* più *D*, il resto sarà *A* meno *B*, meno *D*, cioè le grandezze *B* e *D* verranno sottratte individualmente:

$$[A - (B + D) = A - B - D.]n.c.$$

²¹«Magnitudinem magnitudini subducere.» p. 5 di [18].

Viète per indicare l’operazione di sottrazione utilizza il verbo *subdūco, is, duxi, ductum, ěre*: sottrarre, togliere, portar via; ed il simbolo – e ==.

²²Viète parla di *nota multæ* cioè utilizza il termine giuridico *multa,æ* (multa, ammenda, pena pecuniaria) per definire il segno di sottrazione.

²³«[...] & disiunctæ erunt A minus B, siquidem sint simplices longitudines latitudinesve. Sed si adscendant per expositam scalam vel adscendentibus genere communicent, sua quæ congruit designabuntur denominatione: veluti dicetur A quadratum minus B piano, vel A cubus minus B solido, & similiter in reliquis.» p. 5 di [18].

Letteralmente: «[...] e sottratte saranno *A meno B*, purché siano semplici “lunghezze” o “larghezze”. Ma se si elevano più in alto sulla scala suddetta o condividono il genere con quelli che si elevano, si concorda che saranno indicate con la propria denominazione per esempio si dirà *A “quadrato” meno B “piano”* o *A “cubo” meno B “cubo”*; allo stesso modo per gli altri casi.»

Se invece ora si vuole sottrarre D a B e B meno D ad A , il resto sarà A meno B più D ²⁴:

$$[A - (B - D) = A - B + D.] \text{n.c.}$$

Gli analisti sono soliti indicare la sottrazione con il simbolo $-$.

Diofanto definisce l'operazione di differenza come *mancanza*, mentre l'operazione di addizione come *presenza*.

Quando si deve fare una sottrazione, ma non è esplicitato quale far le due grandezze sia la maggiore o la minore, il simbolo della differenza è $==$; per esempio, se le grandezze considerate sono A “quadrato” e B “piano”, la differenza sarà

$$A \text{ quadrato} == B \text{ piano} \quad \text{o} \quad B \text{ piano} == A \text{ quadrato.}$$

[In termini moderni

$$|x^2 - b| = \begin{cases} x^2 - b, & \text{se } x^2 \geq b \\ b - x^2, & \text{se } x^2 < b \end{cases} \quad \text{con } b \text{ piano;}$$

ne segue che il simbolo $==$ denota il valore assoluto di una differenza²⁵.]n.c.

REGOLA III.

*Moltiplicare una grandezza per un'altra grandezza.*²⁶

Siano A e B due grandezze da moltiplicare. Il loro prodotto, risulterà una grandezza eterogenea rispetto a ciascuna di esse e per questo verrà denotato con le preposizioni *in* o *sub*. Per esempio con la scrittura A *in* B si indica che la prima grandezza è stata moltiplicata per la seconda, o come si dice, che una grandezza è prodotta *sotto* A e B , nel caso in cui A e B siano semplici “lunghezze” o “larghezze”. Se invece A e B sono di grado superiore al primo, si riporta accanto ad ogni grandezza il relativo genere, per esempio A “quadrato” in B o A “quadrato” in B “piano” o A “quadrato” in B “solido” e così via.

[Letteralmente:]n.c.

²⁴Viète aggiunge anche che «dopo la sottrazione della grandezza B , si sottrae più di quanto è giusto la grandezza D , pertanto si deve compensare con l'addizione di quella». Vedi p. 5 di [18]: «quoniam subtrahendo B magnitudinem subtrahitur plus æquo per magnitudinem D: ideo additione illius compensandum».

²⁵Più precisamente, Viète utilizza per denotare il valore assoluto di una differenza il simbolo $=$, che nella traduzione è stato sostituito dal simbolo $==$, per non creare confusione con il simbolo di uguaglianza. Diversamente nel trattato di Viète non si presenta questa ambiguità, in quanto non esisteva un vero e proprio simbolo riservato all'uguaglianza, che veniva indicata con il verbo *æquo*, *as*, *āvi*, *ātum*, *āre*: uguagliare, rendere pari, equilibrare.

²⁶«Magnitudinem in magnitudinem ducere.» p. 5 di [18].

Viète per indicare l'operazione di moltiplicazione utilizza il verbo *dūco*, *is*, *duxi*, *ductum*, *ēre*: condurre, prolungare, e le preposizioni *in*, *sub*.

Se accade che le grandezze, che devono essere moltiplicate o una di quelle abbiano due o più nomi, non cambia nulla a livello pratico.²⁷

[In termini moderni ciò significa che

$$\begin{aligned} a(x + y) + a(b + c) &= ax + ay + ab + ac \quad \text{oppure} \\ a(x + y + z) &= ax + ay + az. \end{aligned} \quad]n.c.$$

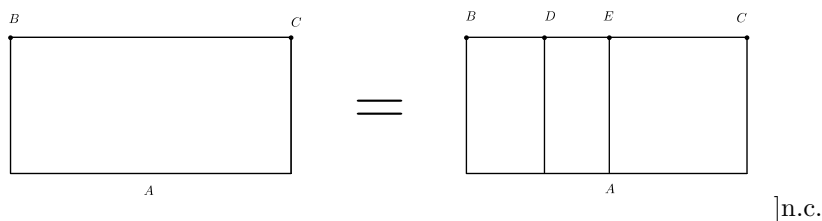
Infatti poichè il tutto è uguale alle sue parti, si ha che fare il prodotto rispetto ogni parte della grandezza equivale a fare il prodotto rispetto a tutta quanta la grandezza.

[*Osservazione:* Viète fa un preciso riferimento al secondo libro degli *Elementi* di Euclide²⁸:

THEOREMA I. PROPOSIZIONE I.

Se sono due linee rette, delle quali una sia segata in quante parti si vogliono, il rettangolo contenuto dalle due linee è uguale alli rettangoli, che si contengono dalla linea non segata & da ciascuna parte dell'altre.

Siano due linee A BC, & la BC sia segata in qualunque modo ne punti D E. Dico il rettangolo contenuto dalle linee rette A BC essere uguale al rettangolo contenuto dalle A BD, & al rettangolo contenuto dalle A DE & à quello che si contiene dalle A EC.



Quando il *nome positivo* di una grandezza è moltiplicato per il nome, anch'esso positivo, di un'altra grandezza, il prodotto sarà positivo; invece se sarà moltiplicato per un *nome negativo*, il prodotto sarà negativo²⁹.

Una conseguenza di questa regola è che dalla moltiplicazione di nomi negativi

²⁷«Quod si ducendæ magnitudines, vel earum altera sint duorum vel plurium nominum, nihil ideo diversi in opere accidit.» p. 5 di [18].

²⁸Vedi p. 32 di [4].

²⁹Si sta introducendo la famosa *regola dei segni*, che afferma che il prodotto di due numeri discordi è negativo, di due numeri concordi è sempre positivo. Per indicare le quantità positive Viète utilizza l'espressione *nomen adfirmatum*, per quelle negative *nomen negatum* e tratta i segni come se fossero dei numeri.

per altri negativi, si ottiene un prodotto positivo, come quando $A == B$ è moltiplicato per $D == G$:

il prodotto di A **positivo** e di G **negativo** è **negativo**;

il prodotto di B **negativo** e di D **positivo** è **negativo**;

il prodotto di B **negativo** e di G **negativo** è **positivo**.

[Oggi diremmo:

$$|D - G| \cdot |A - B| = |DA - DB - GA + GB|.]\text{n.c.}$$

Le denominazioni dei prodotti ottenuti dalle grandezze incognite sono le seguenti:

Un “lato” moltiplicato da se stesso produce un “quadrato”:

$$[x \cdot x = x^2;]\text{n.c.}$$

Un “lato” moltiplicato da un “quadrato” produce un “cubo”:

$$[x \cdot x^2 = x^3;]\text{n.c.}$$

Un “lato” moltiplicato da un “cubo” produce un “quadrato-quadrato”:

$$[x \cdot x^3 = x^4;]\text{n.c.}$$

Un “lato” moltiplicato da un “quadrato-quadrato” produce un “quadrato-cubo”:

$$[x \cdot x^4 = x^5;]\text{n.c.}$$

Un “lato” moltiplicato da un “quadrato-cubo” produce un “cubo-cubo”:

$$[x \cdot x^5 = x^6;]\text{n.c.}$$

e scambievolmente si ha

Un “quadrato” moltiplicato da un “lato” produce un “cubo”:

$$[x^2 \cdot x = x^3;]\text{n.c.}$$

Un “cubo” moltiplicato da un “lato” produce un “quadrato-quadrato”:

$$[x^3 \cdot x = x^4;]\text{n.c.}$$

Ancora

Un “quadrato” moltiplicato da se stesso produce un “quadrato-quadrato”:

$$[x^2 \cdot x^2 = x^4;]\text{n.c.}$$

Un “quadrato” moltiplicato da un “cubo” produce un “quadrato-cubo”:

$$[x^2 \cdot x^3 = x^5;]\text{n.c.}$$

Un “quadrato” moltiplicato da un “quadrato-quadrato” produce un “cubo-cubo”:

$$[x^2 \cdot x^4 = x^6;]\text{n.c.}$$

scambievolmente e così via in quest’ordine. Ancora

Un “cubo” moltiplicato da se stesso produce un “cubo-cubo”:

$$[x^3 \cdot x^3 = x^6;]\text{n.c.}$$

Un “cubo” moltiplicato da un “quadrato-quadrato” produce un “quadrato-quadrato-cubo”:

$$[x^3 \cdot x^4 = x^7;]\text{n.c.}$$

Un “cubo” moltiplicato da un “quadrato-cubo” produce un “quadrato-cubo-cubo”:

$$[x^3 \cdot x^5 = x^8;]\text{n.c.}$$

Un “cubo” moltiplicato da un “cubo-cubo” produce un “cubo-cubo-cubo”:

$$[x^3 \cdot x^6 = x^9;]\text{n.c.}$$

scambievolmente e così via.

Allo stesso modo per le grandezze note (*comparatæ*):

Un “larghezza” moltiplicato da una “lunghezza” produce un “piano”;

Un “larghezza” moltiplicato da un “piano” produce un “solido”;

Un “larghezza” moltiplicato da un “solido” produce un “piano-piano”;

Un “larghezza” moltiplicato da un “piano-piano” produce un “piano-solido”;

Un “larghezza” moltiplicato da un “piano-solido” produce un “solido-solido”;

e scambiando i termini fra loro.

Un “piano” moltiplicato da un “piano” produce un “piano-piano”;

Un “piano” moltiplicato da un “solido” produce un “piano-solido”;

Un “piano” moltiplicato da un “piano-piano” produce un “solido-solido”;

e scambiando i termini fra loro.

Un “solido” moltiplicato da un “solido” produce un “solido-solido”;

Un “solido” moltiplicato da un “piano-piano” produce un “piano-piano-solido”;

Un “solido” moltiplicato da un “piano-solido” produce un “piano-solido-solido”;

Un “solido” moltiplicato da un “solido-solido” produce un “solido-solido-solido”;

scambievolmente e così via in quest’ordine.

REGOLA IV.

*Dividere una grandezza per un'altra grandezza.*³⁰

Siano A e B due grandezze da dividere. In generale le più grandi sono divise dalle più piccole e le omogenee dalle eterogenee.

Siano quindi A “lunghezza” e B “piano”. Per indicare che si sta eseguendo una divisione si pone una lineetta fra B , grandezza più grande, che viene divisa e A , grandezza più bassa, da cui è fatta la divisione. [Letteralmente:]n.c.

Quelle stesse grandezze saranno denominate in accordo con i propri gradi, a cui sono state ridotte nella scala delle grandezze proporzionali o omogenee³¹;

ciò significa che il risultato verrà denominato in base alla sua dimensione, cioè al grado a cui ci si riconduce in seguito all'operazione di divisione. Per esempio, con il simbolo

$$\frac{B \text{ piano}}{A}$$

si indica la **lunghezza** che “rimane” dalla divisione di B “piano” per A , cioè dal rapporto di una grandezza di secondo grado e di una di primo.

Si considerino ora B “cubo” e A “piano”; con il simbolo

$$\frac{B \text{ cubo}}{A \text{ piano}}$$

si indica la **lunghezza** che si ottiene dalla divisione di B “cubo” per A “piano”. Siano infine B “cubo” e A “lunghezza”, la loro divisione sarà

$$\frac{B \text{ cubo}}{A},$$

e corrisponderà ad una grandezza di secondo grado, più precisamente ad un **piano**. Per tutti gli altri casi rimanenti si procede allo stesso modo, anche in presenza di grandezze binomiali e polinomiali.

Le denominazioni dei risultati della divisione, ottenuti dalle grandezze incognite sono le seguenti:

Un “quadrato” diviso da un “lato” produce un “lato”:

$$\left[\frac{x^2}{x} = x; \right] \text{n.c.}$$

³⁰«Magnitudinem magnitudini adplicare.» p. 6 di [18].

Viète per indicare l'operazione di divisione utilizza il verbo *applico* (*adp-*), *as*, *āvi*, *ātum*, *āre* e *plīcūi*, *plīcītum*, *āre*: applicare, accostare, e il simbolo —, che rappresenta la linea di frazione.

³¹«Sed & ipsæ magnitudines denominabuntur a suis, in quibus hæserunt, vel ad quos in proportionalium scala vel homogenearum devectæ sunt, gradibus» pp. 6-7 di [18].

Un “cubo” diviso da un “lato” produce un “quadrato”:

$$\left[\frac{x^3}{x} = x^2; \right] \text{n.c.}$$

Un “quadrato-quadrato” diviso da un “lato” produce un “cubo”:

$$\left[\frac{x^4}{x} = x^3; \right] \text{n.c.}$$

Un “quadrato-cubo” diviso da un “lato” produce un “quadrato-quadrato”:

$$\left[\frac{x^5}{x} = x^4; \right] \text{n.c.}$$

Un “cubo-cubo” diviso da un “lato” produce un “quadrato-cubo”:

$$\left[\frac{x^6}{x} = x^5; \right] \text{n.c.}$$

e permutando, si ha

Un “cubo” diviso da un “quadrato” produce un “lato”:

$$\left[\frac{x^3}{x^2} = x; \right] \text{n.c.}$$

Un “quadrato-quadrato” diviso da un “cubo” produce un “lato”:

$$\left[\frac{x^4}{x^3} = x; \right] \text{n.c.}$$

e così via. Ancora

Un “quadrato-quadrato” diviso da un “quadrato” produce un “quadrato”:

$$\left[\frac{x^4}{x^2} = x^2; \right] \text{n.c.}$$

Un “quadrato-cubo” diviso da un “quadrato” produce un “cubo”:

$$\left[\frac{x^5}{x^2} = x^3; \right] \text{n.c.}$$

Un “cubo-cubo” diviso da un “quadrato” produce un “quadrato-quadrato”:

$$\left[\frac{x^6}{x^2} = x^4; \right] \text{n.c.}$$

cambiando l'ordine e così via. Ancora

Un “cubo-cubo” diviso da un “cubo” produce un “cubo”:

$$\left[\frac{x^6}{x^3} = x^3; \right] \text{n.c.}$$

Un “quadrato-quadrato-cubo” diviso da un “cubo” produce un “quadrato-quadrato”:

$$\left[\frac{x^7}{x^3} = x^4; \right] \text{n.c.}$$

Un “quadrato-cubo-cubo” diviso da un “cubo” produce un “quadrato-cubo”:

$$\left[\frac{x^8}{x^3} = x^5; \right] \text{n.c.}$$

Un “cubo-cubo-cubo” diviso da un “cubo” produce un “cubo-cubo”:

$$\left[\frac{x^9}{x^3} = x^6; \right] \text{n.c.}$$

scambievolmente e così via in quest'ordine.

Allo stesso modo per le grandezze note (*comparatæ*):

Un “piano” diviso da una “larghezza” produce una “lunghezza”;

Un “solido” diviso da una “larghezza” produce un “piano”;

Un “piano-piano” diviso da una “larghezza” produce un “solido”;

Un “piano-solido” diviso da una “larghezza” produce un “piano-piano”;

Un “solido-solido” diviso da una “larghezza” produce un “piano-solido”;

scambievolmente e così via in quest'ordine. Ancora

Un “piano-piano” diviso da un “piano” produce un “quadrato”;

Un “piano-solido” diviso da un “piano” produce un “solido”;

Un “solido-solido” diviso da un “piano” produce un “piano-piano”;

scambievolmente e così via in quest'ordine. Ancora

Un “solido-solido” diviso da un “solido” produce un “solido”;

Un “piano-piano-solido” diviso da un “solido” produce un “piano-piano”;

Un “piano-solido-solido” diviso da un “solido” produce un “piano-solido”;

Un “solido-solido-solido” diviso da un “solido” produce un “solido-solido”;

scambievolmente e così via in quest'ordine.

Inoltre, se si divide per una grandezza, che corrisponde ad una somma, una

differenza, un prodotto o un quoziente di altre grandezze, si procede analogamente a prima, rispettando sempre quelle stesse regole esposte in precedenza.

[Letteralmente:]n.c.

Osservando che, quando una grandezza è il prodotto di una certa grandezza e di una grandezza che corrisponde al divisore, qualunque sia il suo grado, tanto alto quanto basso, non viene aggiunto o tolto nulla in genere o in valore al fattore che non è il divisore, ma che nasce dalla divisione, poiché ciò che fa la moltiplicazione, la divisione lo risolve³².

[Quindi se si considerano due grandezze x e y , dove x è divisibile per y , cioè $x = q \cdot y$, la divisione di x per y restituirà il quoziente q , senza alterarlo nè in genere nè in valore:]n.c. infatti

$$\frac{B \text{ in } A}{B} = A \quad e \quad \frac{B \text{ in } A \text{ piano}}{B} = A \text{ piano}.$$

Si considerano ora alcuni esempi in cui si applica l'operazione di divisione a somme, sottrazioni, moltiplicazioni e ad altre divisioni.

ADDIZIONE

- Se si vuole aggiungere Z a $\frac{A \text{ piano}}{B}$, la somma sarà

$$\frac{(A \text{ piano}) + (Z \text{ in } B)}{B}.$$

- Se occorre sommare $\frac{Z \text{ quadrato}}{G}$ e $\frac{A \text{ piano}}{B}$, la somma sarà

$$\frac{(G \text{ in } A \text{ piano}) + (B \text{ in } Z \text{ quadrato})}{B \text{ in } G}.$$

SOTTRAZIONE

- Se si vuole sottrarre Z a $\frac{A \text{ piano}}{B}$, il resto sarà

$$\frac{(A \text{ piano}) - (Z \text{ in } B)}{B}.$$

- Se si sottrae $\frac{Z \text{ quadrato}}{G}$ da $\frac{A \text{ piano}}{B}$, il resto sarà

$$\frac{(A \text{ piano in } G) - (Z \text{ quadrato in } B)}{B \text{ in } G}.$$

³²« [...] hoc inspecto, quod dum in adplicatione magnitudo tam altior quam depressior ducitur in eadem magnitudinem, eo opere magnitudinis ex adplicatione ortivæ generi vel valori nihil additur vel detrahitur; quoniam quod super effecit multiplicatio, idem resolvit divisio.» p. 7 di [18].

Viète si riferisce al concetto di divisibilità fra due grandezze e al modo inverso di operare della divisione rispetto alla moltiplicazione, identificandole come operazioni inverse l'una dell'altra.

MULTIPLICAZIONE

- Se si moltiplica $\frac{A \text{ piano}}{B}$ per B , il prodotto sarà $A \text{ piano}$.
- Se si vuole moltiplicare $\frac{A \text{ piano}}{B}$ per Z , il risultato sarà

$$\frac{A \text{ piano in } Z}{B}.$$

- Se si moltiplica $\frac{A \text{ piano}}{B}$ per $\frac{Z \text{ quadrato}}{G}$, il prodotto sarà

$$\frac{A \text{ piano}}{B \text{ in } G} \text{ in } Z \text{ quadrato}.$$

DIVISIONE

- Se si vuole dividere $\frac{A \text{ cubo}}{B}$ per D , dopo aver moltiplicato ogni grandezza per D , il risultato sarà

$$\frac{A \text{ cubo}}{B \text{ in } D}.$$

- Se si divide $B \text{ in } G$ per $\frac{A \text{ piano}}{D}$, dopo aver moltiplicato ogni grandezza per D , il risultato sarà

$$\frac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ piano}}.$$

- Se si divide $\frac{B \text{ cubo}}{Z}$ per $\frac{A \text{ cubo}}{D \text{ piano}}$, il risultato sarà

$$\frac{B \text{ cubo in } D \text{ piano}}{Z \text{ in } A \text{ cubo}}.$$

1.5 Le leggi degli Zetetici.

IL metodo di affrontare gli Zetetici è, in generale, racchiuso in queste leggi:

1. Se ci si interroga su una “lunghezza”, ma l’equazione o la proporzione è nascosta dall’aspetto di ciò che è fornito nel problema³³, l’incognita cercata sarà un “lato”.
2. Se ci si interroga su un “piano”, ma l’equazione o la proporzione è nascosta dall’aspetto di ciò che è fornito nel problema, l’incognita cercata sarà un “quadrato”.

³³Viète fa riferimento al fatto che quando si risolve un problema non è sempre immediato individuare la relativa equazione o proporzione, il più delle volte occorre riflettere bene e interpretare nel modo giusto i dati forniti dal problema.

3. Se ci si interroga su un “solido”, ma l’equazione o la proporzione è nascosta dall’aspetto di ciò che è fornito nel problema, l’incognita cercata sarà un “cubo”.

Pertanto, la grandezza incognita salirà o scenderà per sua natura insieme alle grandezze *comparatae*³⁴.

4. Sia le grandezze date, sia quelle incognite saranno “confrontate³⁵” e saranno combinate, secondo le condizioni prestabilite dal problema, mediante la somma, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, sempre rispettando la legge fissa degli omogenei. [Letteralmente:]n.c.

È chiaro quindi che alla fine si troverà qualcosa che è uguale alla grandezza cercata o alla potenza verso la quale si eleva, che sarà composta interamente da grandezze note o in parte da grandezze note e in parte dalla grandezza incognita in questione, oppure da grandezze con un grado inferiore in scala³⁶.

Esempio

Nell’equazione $x^2 = ab$, x^2 è la grandezza cercata, cioè l’incognita, mentre ab è la grandezza equivalente all’incognita, che è complessivamente il prodotto di due grandezze note, cioè a e b .

Invece nell’equazione $x^3 = cx^2$, x^3 è l’incognita, mentre cx^2 è la grandezza equivalente all’incognita, che è il prodotto di una grandezza nota c e di un’incognita di grado inferiore al terzo x^2 . Quindi il prodotto cx^2 è costituito in parte da una grandezza nota e in parte da una grandezza incognita di grado inferiore.

n.c.

5. Per semplificare le cose è necessario che le grandezze note siano distinte da quelle incerte, ricercate con un simbolo fissato, generale e ben distinguibile; per esempio indicando le grandezze incognite con l’elemento A o ancora

³⁴Ci si riferisce sempre al principio di omogeneità e quindi al fatto che le grandezze *comparatae* devono concordare in genere, cioè in dimensione, con la *potenza*, il grado maggiore raggiunto dalle grandezze incognite.

³⁵Si intende aggiungere e sottrarre grandezze da espressioni algebriche o uguagliare grandezze o espressioni fra loro.

³⁶«Manifestum est igitur aliquid tandem inventurum iri magnitudini de qua quæritur vel suæ ad quam adscendet potestati æquale, idque factum omnino sub magnitudinibus datis, vel factum partim sub magnitudinibus datis & incerta de qua quæritur, aut ejus parodico ad potestatem gradu.» p. 8 di [18].

con una vocale E, I, O, U o Y e le grandezze note con le lettere B, G, D o diversamente con le consonanti.³⁷

6. Si chiama *elemento omogeneo dell'equazione* o *elemento omogeneo secondo una data misura*, il termine che si ottiene sommando o sottraendo tra loro i prodotti composti interamente da grandezze note. Esso costituisce una parte dell'uguaglianza

Esempio _____

Prodotti composti interamente da grandezze note sono per esempio *B in G* e *D in C*.

La loro somma è *B in G + D in C* e la loro differenza *B in G - D in C*. Nelle seguenti equazioni

$$A \text{ quadrato} = (B \text{ in } G + D \text{ in } C) \longrightarrow x^2 = bg + dc$$

$$A \text{ quadrato} = (B \text{ in } G - D \text{ in } C) \longrightarrow x^2 = bg - dc$$

(*B in G + D in C*) e (*B in G - D in C*) corrispondono all'*elemento omogeneo dell'equazione* rispetto ad *A quadrato*, in quanto sia *B in G* che *D in C* appartengono al genere dei "piani", cioè hanno la stessa dimensione di *A quadrato*.

_____ n.c.

7. Allo stesso modo, si chiama *elemento omogeneo della combinazione* o *elemento omogeneo secondo il grado*, il termine che si ottiene sommando o sottraendo tra loro i prodotti composti da grandezze note e da grandezze di grado inferiore rispetto al grado complessivo del prodotto, cioè rispetto alla *potenza*.

Esempio _____

Prodotti composti da una grandezza nota e una grandezza di grado inferiore rispetto al grado complessivo del prodotto sono *A quadrato in B* e *A quadrato in G*.

La loro somma è (*A quadrato in B + A quadrato in G*),

la loro differenza (*A quadrato in B - A quadrato in G*).

Nelle seguenti espressioni

$$A \text{ cubo} + A \text{ quadrato in } B + A \text{ quadrato in } G \longrightarrow x^3 + bx^2 + gx^2$$

$$A \text{ cubo} + A \text{ quadrato in } B - A \text{ quadrato in } G \longrightarrow x^3 + bx^2 - gx^2$$

³⁷Diversamente nella notazione odierna, per conversione si utilizzano le ultime lettere dell'alfabeto *x, y, z,...* per indicare le incognite e le prime per i parametri, cioè le grandezze note.

(*A quadrato in B + A quadrato in G*) e (*A quadrato in B - A quadrato in G*) corrispondono all'*elemento omogeneo della combinazione*, infatti ogni termine, *A quadrato in B* e *A quadrato in G*, è il prodotto di una grandezza nota *B* e *G* e una grandezza di grado inferiore rispetto ad *A* cubo, cioè *A* quadrato.

n.c.

8. Gli *omogenei secondo il grado* accompagnano la potenza con la quale sono combinati e insieme ad essa costituiscono una parte dell'equazione. Invece un *omogeneo secondo una data misura* viene uguagliato solamente alla potenza, cioè all'incognita di grado massimo, che per la legge degli omogenei deve essere dello stesso genere o ordine, se quella non è combinata con altre grandezze; diversamente, se la potenza è combinata con delle grandezze omogenee secondo il grado, l'omogeneo secondo una data misura verrà uguagliato all'intera combinazione.

Esempio

(*A quadrato in B*) e (*A quadrato in G*) sono elementi omogenei secondo il grado *A quadrato*, pertanto possono accompagnare la potenza *A cubo*, mediante la somma e la sottrazione, costituendo una parte dell'equazione. (*D piano in C + F solido*) è un elemento omogeneo secondo una data misura, che può essere uguagliato a:

- *A cubo*, ottenendo l'equazione

$$A \text{ cubo} = D \text{ piano in } C + F \text{ solido},$$

che tradotta in termini moderni corrisponde all'equazione $x^3 = dc + f$, dove *d* piano, *c* lunghezza, *f* solido.

- (*A cubo ± A quadrato in B ± A quadrato in G*), se *A cubo* è accompagnata da grandezze omogenee secondo il grado, ottenendo

$$A \text{ cubo} \pm A \text{ quadrato in } B \pm A \text{ quadrato in } G = D \text{ piano in } C + F \text{ solido},$$

in termini moderni $x^3 \pm bx^2 \pm gx^2 = dc + f$, dove *d* piano, *c* e *b* lunghezze, *f* solido.

n.c.

9. Quando degli omogenei secondo una data misura sono combinati con degli omogenei secondo il grado, si dice che si sta applicando il principio dell'*antitesi* se le grandezze congiunte, positivamente o negativamente, vengono spostate da una parte all'altra dell'equazione, secondo i segni op-

posti di congiunzione. Applicando tale principio l'equazione non viene alterata³⁸.

PROPOSIZIONE I

L'antitesi non modifica l'equazione.

Dimostrazione: si consideri l'equazione

$$A \text{ quadrato} - D \text{ piano} = G \text{ quadrato} - B \text{ in } A. \quad (1.1)$$

Applicando l'*antitesi* si ha che

$$A \text{ quadrato} + B \text{ in } A = G \text{ quadrato} + D \text{ piano}; \quad (1.2)$$

si vuole dimostrare che l'equazione (1.1) non viene alterata da questa trasformazione, secondo il segno di operazione opposta.

Infatti aggiungendo da entrambe le parti (*D piano + B in A*) ad (1.1), dalle nozioni comuni segue che

$$\begin{aligned} A \text{ quadrato} - D \text{ piano} + (D \text{ piano} + B \text{ in } A) = \\ G \text{ quadrato} - B \text{ in } A + (D \text{ piano} + B \text{ in } A). \end{aligned}$$

Ora in ogni parte dell'equazione l'operazione opposta annulla quella data, nella prima parte *D piano*, nella seconda *B in A*, così da ottenere (1.2).³⁹

10. Si può applicare un *ipobibasmò* quando in tutti termini dell'equazione si può raccogliere a fattor comune una potenza della grandezza incognita e per questo non appare subito l'elemento omogeneo secondo una data misura. L'*ipobibasmò* corrisponde ad un'uguale riduzione della potenza e delle grandezze incognite di grado inferiore, in modo che al posto dell'elemento omogeneo secondo il grado minore ci sia un omogeneo secondo una data misura, a cui vengono uguagliate tutte le restanti grandezze. In questo modo l'uguaglianza non viene alterata⁴⁰.

³⁸Viète con il termine *antitesi*, indica quello che oggi chiamiamo *principio del trasporto*, conseguenza del *primo principio di equivalenza* delle equazioni. E esso, in accordo con quanto sostenuto da Viète, afferma proprio che si può trasportare un termine da un membro all'altro dell'equazione, purchè lo si cambi di segno.

³⁹In notazione moderna: se consideriamo l'equazione $x^2 - d = y^2 - bx$, quello che si vuole dimostrare è che $x^2 + bx = y^2 + d$. Aggiungendo ad entrambi i membri $(d + bx)$, si ottiene $x^2 - d + d - bx = y^2 - bx + d + bx$, cioè $x^2 + bx = y^2 + d$.

⁴⁰«Et si accidat omnes datas magnitudines duci in gradum, & idcirco homogeneous sub data omnino mensura non statim offerri, fiat *Hypobibasmus*. Hypobibasmus est æqua depressio potestatis & parodicorum graduum observato scalæ ordine, donec homogeneous sub

L'azione dell'ipobibismo differisce da quella del parabolismo solo in quanto, attraverso l'ipobibismo entrambe le parti dell'equazione sono divise da una quantità incognita; attraverso il parabolismo invece sono divise da quantità note, certe, risulta evidente dagli esempi portati dall'autore.

PROPOSIZIONE II

L'ipobibismo non modifica l'equazione.

Dimostrazione: Si consideri l'equazione

$$A \text{ cubo} - B \text{ in } A \text{ quadrato} = Z \text{ piano in } A.$$

Applicando l'ipobibismo, si ottiene

$$A \text{ quadrato} + B \text{ in } A = Z \text{ piano},$$

ciò significa aver diviso tutto il termine per un comune divisore, da cui segue che l'equazione non è cambiata⁴¹.

11. Quando la grandezza incognita con il grado più alto possiede un coefficiente, si applica un *parabolismo*. Esso consiste nel dividere entrambi i membri dell'equazione per il coefficiente della grandezza incognita di grado più alto; in questo modo l'equazione non viene modificata⁴².

depressiore gradu cadat in datum omnino homogeneum cui comparantur reliqua. Quo opere æqualitas non immutatur. Id autem obiter est demonstrandum.» p. 9 di [18].

Letteralmente:

«C'è un *ipobibismo* se accade che tutte le grandezze considerate siano ricondotte ad un certo grado, e per questo motivo non appaia subito l'omogeneo determinato da tutta quanta la misura. L'*Ipobibismo* è l'uguale riduzione della potenza e delle grandezze incognite inferiori, facendo attenzione all'ordine di gradazione, finché l'elemento omogeneo determinato dal grado inferiore coincida ad un omogeneo completamente noto, a cui vengono uguagliate tutte le grandezze restanti. In questo modo l'uguaglianza non viene alterata. Ma questo va subito dimostrato»

⁴¹In notazione moderna: se consideriamo l'equazione $x^3 - bx^2 = cx$, applicando l'ipobibismo si ottiene $x^2 + bx = c$ con c piano, cioè si sono divisi tutti i termini per il comune divisore x , sostituendo l'elemento omogeneo secondo il grado inferiore cx , con un elemento omogeneo secondo una data misura c .

⁴²«Et si accidat gradum altiozem, ad quem adscendet quæsita magnitudo, non ex se subsistere, sed in aliquam datam magnitudinem duci, fiat *Parabolismus*. Parabolismus est homogeneorum, quibus constat æquatio, ad datam magnitudinem, quæ in altiozem quæsititia gradum ducitur, communis adplicatio; ut is gradus potestatis nomen sibi vendicet, & ex ea tandem æquatio subsistat. Quo opere æqualitas non immutatur. Id autem obiter est demonstrandum» p. 9 di [18].

Letteralmente:

«Se accade che il grado più alto, verso il quale si innalza la grandezza incognita, non è costitu-

PROPOSIZIONE III

Il parabolismo non modifica l'equazione.

Dimostrazione: Si consideri l'equazione

$$B \text{ in } A \text{ quadrato} + D \text{ piano in } A = Z \text{ solido.}$$

Applicando il parabolismo si ottiene

$$A \text{ quadrato} + \frac{D \text{ piano}}{B} \text{ in } A = \frac{Z \text{ solido}}{B};$$

ciò significa aver diviso tutto il termine per il comune divisore B , da cui segue che l'equazione non è cambiata.⁴³

12. L'equazione deve essere espressa chiaramente ed è detta "ben ordinata" se può essere ricondotta ad una proporzione che soddisfa le seguenti condizioni:

- il prodotto degli estremi deve essere composto dalla potenza e dagli elementi omogenei congiunti;
- Il prodotto dei medi deve corrispondere ad un elemento omogeneo secondo una data misura.

Esempio

L'equazione

$$\begin{aligned} A \text{ quadrato} + B \text{ in } A = G \text{ in } D + G \text{ in } C &\longrightarrow x^2 + bx = gd + gc \\ A \text{ in } (A + B) = G \text{ in } (D + C) &\longrightarrow x(x + b) = g(d + c). \end{aligned}$$

è "ben ordinata" e la **proporzione** ad essa associata è

$$A : G = (D + C) : (A + B).$$

Il prodotto degli estremi $A \text{ in } (A + B)$ è composto dalla potenza e dall'elemento omogeneo congiunto.

Il prodotto dei medi $G \text{ in } (D + C) = (G \text{ in } D + G \text{ in } C)$ corrisponde ad un elemento omogeneo secondo una data misura.

n.c.

ito solo da se stesso, ma è moltiplicato per qualche grandezza data, si applica il *parabolismo*. C'è parabolismo ogni volta che le grandezze omogenee da cui è formata l'equazione, sono divise da una grandezza data che è moltiplicata dal grado più alto della grandezza incognita, così che quel grado assuma il nome di potenza e che l'equazione finale rimanga fissa in quella potenza. In questo modo l'equazione non è cambiata. Ma ciò è subito da dimostrare.».

⁴³In notazione moderna: se consideriamo l'equazione $bx^2 + dx = c$, dove d piano e c solido, applicando il parabolismo si ottiene $x^2 + \frac{d}{b}x = \frac{c}{b}$ con d piano e c solido, cioè si sono divisi tutti i termini per il comune divisore b .

13. Una proporzione è ordinata anche quando è definita da una successione di tre o quattro grandezze, espressa da termini semplici o combinati e produce un'equazione in una sola incognita.
14. La funzione dello Zetetico è quella di associare ad ogni problema un'equazione o proporzione. Anche Diofanto nell'*Aritmetica* cercò di chiarire il suo ruolo, chiaramente utilizzando i numeri e per questo furono ammirate la sua precisione e perizia. Infatti ciò che appare più difficile e nascosto nella logistica numerosa, spesso risulta più familiare e subito ovvio nella logistica speciosa.

1.6 Analisi dei teoremi e Poristica.

COMPLETATA la Zetesi, l'analista partendo dalle ipotesi si avvicina alla tesi ed enuncia i teoremi da lui formulati e dimostrati.

Essi obbediscono alle regole dell'*ars analytica* e alle leggi aristoteliche⁴⁴ secondo cui il predicato deve:

- “*essere vero in ogni istanza*” [cioè deve valere in generale, riferendosi ad ogni circostanza in cui si può trovare il soggetto]n.c.;
- riferirsi all’“*essenza*” del soggetto [cioè deve dichiarare la sua natura o le sue proprietà intrinseche]n.c.;⁴⁵
- appartenere “*proporzionalmente e universalmente*” al soggetto [deve essere quindi una sua determinazione specifica.]n.c.

Tali teoremi così come sono stati stabiliti ed enunciati fermamente dalla Zetetica, vengono sottoposti al processo di *sintesi*, che è considerato il procedimento di dimostrazione logicamente più efficace. In particolare, si procede in modo inverso rispetto all'analisi e questo ripercorrere i suoi passi è esso stesso analitico e non è problematico a causa della logistica speciosa. Quando si scopre qualcosa di nuovo o quando si deve esaminare la verità di un teorema, va intrapresa la via della Poristica,⁴⁶ che conduce agevolmente alla sintesi, esempi di questo sono stati presentati da Teone negli *Elementi*, da Apollonio di Perga nelle *Coniche* e anche dallo stesso Archimede in diverse opere.

⁴⁴ *Analytica posteriora*, I 4.

⁴⁵ Ci si riferisce alla legge degli omogenei.

⁴⁶ Ci si riferisce a problemi che non rientrano immediatamente in un contesto sistematico, ma che avvengono in modo casuale ed incidentale.

1.7 La Retica esegetica

DOPO aver individuato con la Poristica l'equazione, che corrisponde alla soluzione del problema, la *Retica* o *Esegetica*, che corrisponde all'ultima fase dell'*ars analytica*, consiste nel dare un senso geometrico o aritmetico a tale risultato. Pertanto riguarda soprattutto l'applicazione della tecnica, diversamente dalla Zetetica e dalla Poristica, che si occupano principalmente di individuare dei modelli generali. La Retica esercita la propria funzione sia con i numeri, se l'incognita è esprimibile numericamente, sia con lunghezze, piani o solidi, se è necessario mostrare la natura stessa della grandezza. L'Esegetica quindi ci conduce a considerare le formule letterali, ottenute ed espresse secondo la logistica speciosa, come veri e propri precetti geometrici o aritmetici.⁴⁷

1.8 La simbologia delle equazioni.

IN analisi il termine equazione è spiegato chiaramente dalla Zetetica, esso si riferisce ad un'uguaglianza correttamente ordinata.

⁴⁷Viète continua: «Et hic se præbet Geometram Analysta, opus verum efficiendo post alius, similis vero, resolutionem: illic Logistam, potestates quascumque numero exhibitas, sive puras, sive adfectas, resolvendo. Et sive in Arithmeticeis, sive Geometricis, artificii sui nullum non edet ipsecimen, secundum inventæ æqualitas, vel de ea concepti ordinate Analogismi, conditionem. Et vero non omnis effectio Geometrica concinna est, singula enim problemata suas habent elegantias: verum ea cæteris antefertur, quæ compositionem operis non ex æqualitate, sed æqualitatem ex compositione arguit & demonstrat: ipsa vero compositio seipsam. Itaque artifex Geometra, quanquam Analyticum, edoctus, illud dissimulat & tanquam de opere efficiendo cogitans profert suum syntheticum problema & explicat: Deinde Logistis auxiliaturus de proportionem vel æqualitate in eo adgnita concipit & demonstrat Theorema.» p. 10 di [18]. Letteralmente:

«Qui l'analista, mentre cerca le soluzioni analitiche simili, sembra un geometra, compiendo veramente la propria funzione; nel primo caso sembra un logico, risolvendo ogni potenza, semplice o combinata, che si presenta numericamente. Inoltre o in aritmetica o in geometria produce alcuni esempi della propria arte, o secondo le condizioni dell'equazione trovata, o della proporzione derivata da quella successione di regole. E in verità non tutte le soluzioni si conciliano con la geometria. Infatti i singoli problemi hanno le loro distinzioni: la soluzione veramente preferita a tutte le altre è quella che mostra non il risultato partendo dall'equazione, ma l'equazione partendo dal risultato poi lo stesso risultato mostra se stesso. Così il geometra abile, per quanto analista esperto, nasconde questo fatto e per così dire meditando sul lavoro da eseguire presenta e spiega il proprio problema sinteticamente poi destinato a portare soccorso ai logici, formula e dimostra il teorema partendo dalla proporzione o dall'equazione riscontrata in quello.»

È importante sottolineare che l'algebra veniva ritenuta in quel tempo un'*arte* e non una *scienza*, come invece era considerata la geometria. Fu questo uno dei motivi ideologici che fecero ritenere essenziale il ricorso all'interpretazione geometrica dei risultati ottenuti per via algebrico-aritmetica.

2. L'equazione è l'accoppiamento di una grandezza nota con una incognita.
3. La grandezza incognita può essere una "radice" o una potenza.
4. Una potenza può essere semplice o combinata.
5. Una grandezza può avere segno negativo o positivo.
6. Quando il termine omogeneo considerato viene sottratto dalla potenza, la negazione è diretta.

Esempio

$$A \text{ quadrato} - (A \text{ in } B + A \text{ in } G) = A \text{ quadrato} - A \text{ in } B - A \text{ in } G.$$

In termini moderni: $x^2 - (bx + gx) = x^2 - bx - gx.$

n.c.

7. Quando, al contrario, la potenza è sottratta al termine omogeneo in congiunzione, la negazione è incerta.

Esempio

$$A \text{ quadrato in } B + A \text{ quadrato in } G - A \text{ cubo}$$

In termini moderni: $bx^2 + gx^2 - x^3.$

n.c.

8. La misura sottograduale determina la misura stessa del grado dell'elemento omogeneo in congiunzione.

Esempio

Se si considera l'equazione

$$A \text{ cubo} + A \text{ quadrato in } B + A \text{ quadrato in } G \longrightarrow x^3 + bx^2 + gx^2,$$

A quadrato corrisponde al sottograduale relativo ad *A cubo* e determina direttamente la dimensione dell'elemento omogeneo in congiunzione con la potenza, (*A quadrato in B + A quadrato in G*), che complessivamente, per la legge degli omogenei, deve essere tre.

n.c.

9. È necessario che nella parte dell'equazione che contiene le incognite, sia indicato ora l'ordine, ora il grado della potenza e la natura o il simbolo dell'operazione. Inoltre è anche opportuno che le stesse grandezze coefficienti sottograduali siano note.

10. La prima grandezza inferiore in scala è la “radice”, l’ultima, è quella inferiore alla potenza di un solo grado della scala. Questo è abitualmente conosciuto con il nome di *epanafora*.

*Così il “quadrato” è l’epanafora del “cubo”, il “cubo” di “quadrato-quadrato”, “quadrato-quadrato” di “quadrato-cubo” e così via all’infinito.*⁴⁸

11. Una grandezza inferiore in scala è la reciproca di un’altra, quando complessivamente si ha una grandezza che è il prodotto dell’una per l’altra; la grandezza coefficiente è la reciproca relativamente al grado che si assume. *Così se il “lato” fosse la grandezza inferiore in scala, in relazione al “cubo”, il grado reciproco sarebbe il “quadrato”; inoltre poichè un “solido”, grandezza dello stesso grado del “cubo”, nasce dal prodotto di un “lato” e di un “piano”, sicuramente il “piano” sarebbe la grandezza reciproca relativa al “lato”.*

12. Dopo la base, le grandezze inferiori in scala partendo dalla “lunghezza” sono quelle già indicate precedentemente in successione.

13. Dopo la base, le grandezze inferiori in scala partendo dal “piano” sono:

“Quadrato”	“Piano”
“Quadrato-quadrato”	“Quadrato del piano”
“cubo-cubo”	“Cubo del piano”

e così via in quest’ordine.

14. Dopo la base, le grandezze inferiori in scala partendo dal solido sono:

“Cubo”	“Solido”
“Cubo-cubo”	“Quadrato del solido”
“cubo-cubo-cubo”	“Cubo del solido”

15. “Quadrato”, “quadrato-quadrato”, “quadrato-cubo-cubo” e quelle grandezze che sono prodotte proprio partendo da se stesse, continuando con questo ordine, sono potenze di *semplice mezzo*, tutte le altre potenze sono multiple di quelle.

Le potenze di semplice mezzo possono essere anche definite come quelle potenze i cui esponenti progrediscono secondo una certa proporzione geometrica. Così le potenze di secondo grado, di quarto grado, di ottavo grado

⁴⁸In termini moderni x^2 corrisponde all’*epanafora* di x^3 , x^3 di x^4 e così via. Il termine *epanafora* deriva dal greco ἐπαναφέρειν, che significa fare riferimento a, ripetere.

e di sedicesimo grado, saranno potenze di semplice mezzo; tutte le altre, che assumono dei gradi intermedi, sono potenze multiple.⁴⁹

16. La grandezza nota, uguagliata alle restanti grandezze, è il termine omogeneo dell'equazione.

Per esempio, se fosse

$$A \text{ cubo} + A \text{ in } B \text{ quadrato} = B \text{ in } Z \text{ piano},$$

il termine omogeneo dell'equazione sarebbe "B in Z piano".

"A cubo" sarebbe la potenza verso la quale si eleva per sua stessa natura la grandezza incognita cercata.

"A in B quadrato" sarebbe il termine omogeneo in congiunzione;

A sarebbe la grandezza inferiore in scala;

"B quadrato" sarebbe una grandezza sottograduale o parabola⁵⁰.

17. In Aritmetica i termini omogenei delle equazioni sono un tutt'uno, cioè un'unità.⁵¹

18. Quando la base incognita cercata è uguagliata ad una data grandezza omogenea, l'equazione si dice assolutamente elementare.

Esempio: _____

$$A = B \longrightarrow x = b.$$

_____ n.c.

19. Quando la potenza incognita, priva di congiunzioni, è uguagliata ad una data grandezza omogenea, l'equazione si dice "climactica".

Esempio: _____

$$A \text{ quadrato} = B \text{ piano} \longrightarrow x^2 = b, \quad \text{con } b \text{ piano.}$$

_____ n.c.

⁴⁹Se si considera la successione di grandezze inferiori in scala

$$x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7, x^8, x^9, x^{10}, x^{11}, x^{12}, x^{13}, x^{14}, x^{15}, x^{16}, \dots$$

Le grandezze di semplice mezzo sono per esempio x^2, x^4, x^8, x^{16} e così via, i cui esponenti sono in progressione geometrica $2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = \dots$

⁵⁰Il termine *parabola* qui significa quoziente della divisione per la grandezza incognita.

⁵¹Nell'equazione ($A \text{ quadrato} = B \text{ in } G$), l'elemento omogeneo dell'equazione è ($B \text{ in } G$) e la sua dimensione complessiva, cioè la sua "unità", è il *piano*. Per la legge degli omogenei, non potrà mai accadere che ($A \text{ quadrato} = B$), in quanto B dimensionalmente è una *lunghezza*. In Aritmetica invece, dove si lavora direttamente con i numeri, non ci si pone lo stesso problema, in quanto i numeri puri non hanno dimensione e sono tutti dello stesso genere. Per esempio nell'uguaglianza $A = 4$, A corrisponde semplicemente ad un numero puro.

20. Quando la potenza incognita, che possiede un certo grado e un noto coefficiente, è uguagliata ad una nota grandezza omogenea, l'equazione si dice polinomiale in relazione al gran numero e alla varietà delle grandezze congiunte.

Esempio: _____

$$A \text{ cubo} + B \text{ in } A \text{ quadrato} - G \text{ piano in } A = D \text{ solido} \longrightarrow x^3 + bx^2 - gx = d$$

dove g piano, d solido.

_____ n.c.

21. Ci sono tante grandezze inferiori in scala quanti termini congiunti, che accompagnano la potenza. Così un "quadrato" può essere costituito combinando grandezze di primo grado; il "cubo" combinando grandezze di primo e secondo grado; un "quadrato-quadrato" combinando grandezze di primo, secondo e terzo grado; un "quadrato-cubo" combinando grandezze di primo, secondo, terzo e quarto grado e così via.
22. Le proporzioni sono distinte le une dalle altre e vengono indicate in base ai generi delle equazioni, in cui vengono risolte.
23. Per quanto riguarda l'Esegetica in aritmetica, l'analista istruito va allenato a:
- Aggiungere un numero ad un altro numero.*
Sottrarre un numero ad un altro numero.
Moltiplicare un numero per un altro numero.
Dividere un numero per un altro.
- Inoltre l'arte analitica dà la possibilità di risolvere qualsiasi potenza (cosa che hanno ignorato sia gli antichi che i moderni), sia semplice, sia combinata con altre grandezze.⁵²
24. Secondo l'Esegetica in geometria, l'arte analitica seleziona ed enumera i procedimenti più regolari, con i quali vengono risolte completamente le equazioni di primo e secondo grado.⁵³
25. Per quanto riguarda il "cubo" e il "quadrato-quadrato", in modo che la mancanza della geometria possa essere colmata dalla geometria stessa, l'arte analitica postula che:

⁵²Viète sviluppa questo argomento nel trattato "*De numerosa Potestatum Purarum atque Adfectarum ad Exegesis Resolutione Tractatus*", in [18] p. 163.

⁵³Viète affronta questo argomento nel trattato "*Effectionum Geometricarum Canonica Recensio*", pp. 229 di [18].

da un punto qualsiasi si può condurre una retta che interseca due linee qualunque, individuando un segmento, compreso fra esse; ogni possibile punto d'intersezione è predefinito.

Ammesso ciò, in quanto postulato, l'analisi ha risolto abilmente i più famosi problemi, che finora sono stati chiamati impossibili: il mesografico, la divisione di un angolo in 3 parti uguali, la scoperta del lato dell'ettagono, e come molti altri sono caduti nelle formule di equazioni nelle quali "cubi" sono uguagliati a "solidi", "quadrati-quadrati" a "piani-piani", sia semplicemente o combinati con altre grandezze.⁵⁴

26. Dato che tutte le grandezze sono linee, superfici, solidi, quale grande uso si potrebbe fare nella vita umana delle proporzioni con rapporti triplicati o persino quadruplicati, se non forse nelle divisioni degli angoli, così che possiamo ottenere gli angoli dai lati o i lati dagli angoli delle figure?
27. Dunque, l'analisi, per quanto riguarda l'aritmetica o la geometria, rivela il mistero, finora sconosciuto, della divisione degli angoli e indica come:
*trovare il rapporto fra i lati, una volta dato il rapporto fra gli angoli;
per far sì che un numero stia ad un numero, così come un angolo sta ad un angolo.*
28. Non si paragona una linea retta con una curva, poiché l'angolo è qualcosa compreso fra una retta e una figura piana; inoltre così la legge degli omogenei sembra contraddirsi.
29. Infine l'*ars analytica*, assunta la triplice forma di Zetetica, Poristica e Esegetica, si interroga ancora con diritto sul problema più importante, che è

NON LASCIARE ALCUN PROBLEMA IRRISOLTO.⁵⁵

⁵⁴Questi argomenti vengono sviluppati nel trattato viëtiano "*Supplementum Geometriæ*", pp. 240 di [18], in cui si enuncia nuovamente il postulato dell'intercetta e in cui sono contenute le soluzioni proposte da Viète ai tre problemi citati. Le *Proposizioni V-VII* riguardano il problema del *mesographicum*, cioè il problema di trovare due medi proporzionali a due rette date. La *Proposizione IX* affronta il problema della trisezione di un angolo, mentre la *Proposizione XXIV* riguarda la ricerca del lato dell'ettagono regolare inscritto in una circonferenza data.

⁵⁵«Denique fastuosum problema problematum ars Analytice, triplicem Zeteticæ, Poristicæ & Exegeticæ formam tandem induta, jure sibi adrogat, Quod est, NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.» p. 12 di [18].

Capitolo 2

Ad Logisticem Speciosam, NOTÆ PRIORES

LOGISTICÆ speciosæ doctrina quatuor, quæ in *Isagogicis* exposita sunt, canonicis præceptis¹ absolvitur. Verumtamen præstat exemplificari frequentiora aliquot opera, & subnotari ea, quæ interdum occurrunt compendia, ne Logistam deinceps anfractus similes remorentur. Huiusmodi sunt quæ sequuntur.

PROPOSITIO I

Propositis tribus magnitudinibus exhibere quartam proportionalem.

Exponentur tres magnitudines, Prima, Secunda, & Tertia. Oportet exhibere Quartam proportionalem. Ducatur Secunda in Tertiam, & factum adplicetur ad Primam. Dico igitur magnitudinem ex ea adplicatione oriundam, seu aliter, parabolam esse Quartam proportionalem. Prima enim illa ducatur in Quartam, fiet idipsum quod ex Secunda in Tertiam. Itaque sunt proportionales.

Sint igitur magnitudines,

Prima	Secunda	Terza	Erit Quarta proportionalis
A	B	G	$\frac{B \text{ in } G}{A}$
$\frac{A \text{ quadratum}}{D}$	B	G	$\frac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ quadratum}}$
$\frac{A \text{ cubus}}{D \text{ plano}}$	$\frac{B \text{ quadratum}}{Z}$	G	$\frac{B q. \text{ in } G \text{ in } D pl.}{Z \text{ in } A \text{ cubum}}$

¹Scilicet Additionibus, Subductionibus, Multiplicationis & Divisionis, quæ traduntur capite quarto *Isagoges*, quibus innituntur sequentia theoremata.

PROPOSITIO II

Propositis duabus magnitudinibus exhibere Tertiam proportionalem, Quartam, Quintam, & ulterioris ordinis continuè proportionales in in finitum.

Exponentur duæ magnitudines A , & B . Oportet exhibere Tertiam proportionalem, Quartam, Quintam, & ulterioris ordinis continuè proportionales in infinitum. Quoniam igitur est

Ut	Ad	Ita	Ad	Erit	
A	B	B	$\frac{B \text{ quadr.}}{A}$	$\frac{B \text{ quadratum}}{A}$	Tertia proportionalia
A	B	$\frac{B \text{ quadr.}}{A}$	$\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$	$\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$	Quarta proportionalia
A	B	$\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$	$\frac{B \text{ q. quadr.}}{A \text{ cubo}}$	$\frac{B \text{ quad. quadratum}}{A \text{ cubo}}$	Quinta proportionalia

Et ita licebit progredi in infinitum.

CONSECTARIUM

Itaque si sit series magnitudinum in continua proportione, est, ut Prima, ad Tertiam, ita Quadratum è Prima, ad Quadratum è Secunda. Et ut Prima, ad Quartam, ita Cubus è Prima, ad Cubum è Secunda. Et Prima ad Quintam, ut Quadrato-quadratum è Prima, ad Quadrato-quadratum è Secunda. Et ita in infinitum constanti ordine. Enimvero ex posita thesi sunt continue proportionales. Prima, A Secunda, B , Tertia, $\frac{B \text{ quadr.}}{A}$, Quarta $\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$, Quinta $\frac{B \text{ qu. quadr.}}{A \text{ cubo}}$ & c. At quoniam Prima est A , tertia $\frac{B \text{ quadratum}}{A}$. Ducatur utraque in A , ea itaque ductione cum sit a communi multiplicante, non immutabitur proportio, quare A ad $\frac{B \text{ quadr.}}{A}$ erit ut A quadratum ad B quadratum. Æque quoniam prima est A , quarta $\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$. Ducatur utraque in A quadratum, ea igitur ductione, cum sit à communi multiplicante non immutabitur proportio, quare A ad $\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$ erit ut A cubus, ad B cubum. Pariter, cum sit prima A quinta $\frac{B \text{ quadrato-quadr.}}{A \text{ cubo}}$. Ducatur utraque in A cubum: ea igitur ductione, cum sit à communi multiplicante, non immutabitur proportio, quare A ad $\frac{B \text{ quadr-quadr.}}{A \text{ cubo}}$ erit ut A quadrato-quadratum, ad B quadrato-quadratum. Nec dissimiliter in ulterioribus reliquis, licet arguere & exemplificari latera ad invicem in ratione simpla, potestates earumdem in ratione multipla. Potestas rationis duplæ est Quadratum. Triplæ, Cubus. Quadruplæ, Quadrato-quadratum. Quintuplæ, Quadrato-cubus, & ea in infinitum serie & methodo.

PROPOSITIO III

Inter duo proposita quadrata exhibere medium proportionale.

Proponantur duo quadrata A quadratum, B quadratum. Oporteat invenire medium inter ea proportionale. At vero constituta A prima, B secunda, exhibetur ex antecedente tertia proportionalis & se habet series huiusmodi. Prima A , Secunda B , Tertia $\frac{B \text{ quadr.}}{A}$. Ducantur omnes in A , cui videlicet, cum adplicatur B quadratum, oritur tertia. Quoniam igitur A est communis multiplicator trium expositarum proportionalium; à communi autem multiplicante non immutatur proportio; erunt facta quoque ab A in proportionales, proportionalia. Sunt autem facta, A quadratum, B in A , B quadratum. Quare inter duo proposita quadrata exhibuimus medium proporzionale.

PROPOSITIO IV

Inter duos propositos Cubos exhibere duo media continue proportionalis.

Proponantur duo Cubi A cubus, B cubus. Oporteat exhibere duo media inter ea continue proportionalia. At vero constituta A Prima, B Secunda, exhibentur ex propositione secunda continue proportionales in infinitum. Sit hic systema infiniti in quarta series igitur quatuor continue proportionalium ita se habet, prima A , secunda B , tertia $\frac{B \text{ quadr.}}{A}$, quarta $\frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$. Ducantur omnes in A quadratum, cui videlicet cum adplicatur B cubus, oritur quarta. Quoniam igitur A quadratus communis est multiplicator expositarum quatuor continue proportionalium; à communi autem multiplicante non immutatur proportio: erunt facta in continue proportionales quoque proportionalia. Sunt autem facta, A cubus, A quadratum in B , A in B quadratum, B cubus. Quare inter duos propositos cubos exhibuimus duo media continue proportionalia. Ex his deducitur hoc generale.

CONSECTARIUM

Si duo latera attolluntur ad potestates eiusdem gradus, latus autem secundi ducatur in gradum parodicum elatiorem primi, & eo continuo ordine: efficientur continue proportionalia inter potestates primi & secundi. Id enim manifestum sit ex secunda propositione. Unde etiam proponi potuit generalius.

Inter duas quascumque Potestates æque altas, exhibere tot media continue proportionalia, quot sunt gradus parodici ad potestatem.

PROPOSITIO V

Inter duo latera proposita exhibere quotlibet continue proportionalia.

Sunto duo latera A , B . Oporteat exhibere inter ea quotlibet continue proportionalia. Libeat exhibere quatuor. Quoniam igitur potestas, ad quam latus per totidem gradus deducitur, quot hic media continue proportionalia exiguntur, nempe quatuor, quintum sibi locum vindicet necesse est; in quinto autem gradu

consistit quadrato-cubus: attollantur & A & B ad potestatem quadrato-cubi, & inter A quadrato-cubum, & B quadrato-cubum, constituentur media quatuor continue proportionalia, quorum series est huiusmodi:

1. A quadrato-cubus;
2. A quadrato-quadratum in B ;
3. A cubus in B quadratum;
4. A quadratum in B cubum;
5. A in B quadrato-quadratum;
6. B quadrato-cubus.

Quæ autem sunt proportionalia potestate, proportionalia quoque sunt radice. Quare singularum sex proportionalium constitutarum sumantur latera quadrato-cubica: erunt igitur quoque continuè proportionalia sex latera, qualia hic designantur, videlicet:

1. A ;
2. Latus qc. A quadrat. quadrati in B ;
3. Latus qc. A cubi in B quadrat.;
4. Latus qc. A quadrati in B cubum;
5. Latus qc. A in B quadrato-quadratum;
6. B ;

Ergo inter A & B exhibita sunt tot media continue proportionalia quot exigebatur.

PROPOSITIO VI

Duarum magnitudinum adgregato differentiam earundem addere.

Sit $A + B$ addenda $A - B$: summa sit A bis. Unde

THEOREMA

Adgregatum duarum magnitudinum adiunctum differentiæ earundem, æquale est duplo magnitudinis maioris.

PROPOSITIO VII

Duarum magnitudinum adgregato differentiam earundem subducere.

Sit ex $A + B$ auferenda $A - B$: residua sit B bis. Unde

THEOREMA

Adgregatum duarum magnitudinum multatum differentia earundem, æquale est duplo minoris.

PROPOSITIO VIII

Cum eadem magnitudo contrahitur, inæquali decremento, alteram ex altera subducere.

Sit ex $A - B$ subducenda $A - E$: residua erit $E - B$. Illud autem est contractionum differentiam subnotasse. Unde

THEOREMA

Si magnitudo inæquali minuatur decremento, differentia contractionum eadem est quæ contractarum.

PROPOSITIO IX

Cum eadem magnitudo protrahitur, inæquali cremento, alteram alteri subducere.

Sit ex $A + G$ subducenda $A + B$: residua erit $G - B$. Unde

THEOREMA

Si eadem magnitudo inæquali augeatur cremento, differentia protractionum eadem est quæ protractarum.

PROPOSITIO X

Cum eadem magnitudo protrahitur, & contrahitur inæquali cremento & decremento, alteram alteri subducere.

Sit ex $A + G$ subducenda $A - B$: residua erit $G + B$. Unde

THEOREMA

Si eadem magnitudo protrahatur & contrahatur inæquali cremento & decremento, differentia protractæ & contractæ æqualis est adgregato protractionis & contractionis.

PROPOSITIO XI

Potestatem puram à binomia radice componere.

Sit radix binomia $A+B$. Oporteat ab ea protestatem puram componere. Primo componendum sit quadratum. Quoniam igitur latus dum ducitur in se facit quadratum; ducatur $A+B$ in $A+B$, & colligantur singularia effecta plana: erunt illa

$$A \text{ quadratum} + A \text{ in } B \text{ bis} + B \text{ quadrato.}$$

Quæ ideo æquabuntur $A+B$ quadrato. Secundo componendus sit Cubus. Quoniam igitur latus dum ducitur in sui quadratum, facit cubum: ducatur $A+B$ in quadratum iam expositum ex $A+B$, & colligantur singularia effecta Solida. Erunt illa

$$A \text{ cubus,} + A \text{ quadrato in } B \text{ ter,} + A \text{ in } B \text{ quadratum ter,} + B \text{ cubo.}$$

Quæ ideo æquabuntur cubo ex $A+B$. Tertio componendum sit quadrato-quadratum. Quoniam latus dum ducitur in sui cubum, facit quadrato-quadratum: ducatur $A+B$ in cubum iam expositum abs $A+B$, & colligantur effecta singularia plano-plana. Erunt illa

$$A \text{ quadrato-quadratum,} + A \text{ cubo in } B \text{ quater,} + A \text{ quadr. in } B \text{ quadratum} \\ \text{sexies} + A \text{ in } B \text{ cubum quater,} + B \text{ quadrato-quadrato.}$$

Quæ ideo æquabuntur quadrato-quadrato ex $A+B$. Quarto componendus sit quadrato-cubus. Quoniam latus dum ducitur in sui quadrato-quadratum, facit quadrato-cubum: ducatur $A+B$ in quadrato-quadratum iam expositum abs $A+B$, & colligantur effecta singularia plano-solida. Erunt illa

$$A \text{ quadratus-cubus,} + A \text{ quadrato-quadrati in } B \text{ 5,} + A \text{ cubo in } B \text{ quadratum} \\ \text{10,} + A \text{ quadrato in } B \text{ cubum 10,} + A \text{ in } B \text{ quadrato-quadratum 5,} + B \\ \text{quadrato-cubo.}$$

Quæ quidem æquabuntur quadrato-cubo ex $A+B$. Quinto componendus sit cubo-cubus. Quoniam latus dum ducitur in sui quadrato-cubum, facit cubo-cubum: ducatur $A+B$ in quadrato-cubum iam expositum abs $A+B$, & colligantur effecta singularia solido-solida. Erunt illa

$$A \text{ cubo-cubus,} + A \text{ quadrato-cubo in } B \text{ 6,} + A \text{ quadrato-quadrato in } B \\ \text{quadratum 15,} + A \text{ cubo in } B \text{ cubum 20,} + A \text{ quadrato in } B \\ \text{quadrato-quadratum 15,} + A \text{ in } B \text{ quadrato-cubum 6,} + B \text{ cubo-cubo.}$$

Quæ ideo æquabuntur cubo-cubo ex $A+B$. Nec dissimilis erit ulteriorum quarumcumque potestatum sintesi. A quibus ideo derivantur & uniformi methodo concipiuntur ad universam logisticem valentia, & quæ etiam ad Zeteticam in promptu sunt, theoremata.

THEOREMA

Geneseos quadrati.

Si fuerint duo latera: quadratum lateris primi, plus plano à duplo latere primo in latus secundi, plus quadrato lateris secundi, æquatur quadrato adgregari laterum.

Sit latus unum A , alterum B . Dico A quadratum, + A in B bis, + B quadrato, æquari $A + B$ quadrato. Ex opere multiplicationis $A + B$ per $A + B$.

THEOREMA

Geneseos cubi.

Si fuerint duo latera: cubus lateri primi, plus solido à quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido à latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, æquatur cubo adgregati laterum.

Sit latus unum A , alterum B dico a cubum, + A quadrato in B ter, + A in B quadratum ter, + B cubo, æquari $A + B$ cubo. Ex opere multiplicationis A quadrati + A in B 2, + B quadrato, per $A + B$.

THEOREMA

Geneseos quadrato-quadrati

Si fuerint duo latera: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, æquatur quadrato-quadrato adgregati laterum.

Sit latus unum A , alterum B . Dico A quad-quadratum, + A cubo in B quater, + A quadrato in B quadratum sexies, + A in B cubum quater, + B quad-quadrato, æquari $A + B$ quad-quadrato. Ex opere multiplicationis A cubi, + A quadrato in B 3, + A in B quadratum 3, + B cubo, per $A + B$.

THEOREMA

Geneseos quadrati-cubi

Si fuerint duo latera: quadrato-cubus lateris primi, plus quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum quintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi quadratum decuplum, plus quadrato laterisprimi in lateris secundi cubum decuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum quintuplum,

plus lateris secundi quadrato-cubo, æquatur quadrato-cubo adgregati laterum.

Sit latus unum A , alterum B . Dico A quadrato-cubum, + A quad-quadrato B 5, + A cubo in B quadratum 10, + A quadrato in B cubum 10, + A in B quad-quadratum 5, + B quadrato-quadrati, + A cubo in B 4, + A quad. in B quadratum 6, + A in B cubum quater, + B quadrato-quadrato, per $A + B$.

THEOREMA

Geneseos cubo-cubi.

Si fuerint duo latera: cubo-cubus lateris primi, plus quadrato-cubo lateris primi in latus secundum sextuplum, plus quadrato-quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum decuquintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi cubum vigeuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadrato-quadratum decuquintuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-cubum sextuplum, plus lateris secundi cubo-cubo, æquatur cubo-cubo adgregari laterum.

Si latus unum A , alterum B . Dico A cubo-cubum, + A quadrato-cubo in B 6, + A quad-quadrato in B quadratum 15, + A cubo in B cubum 20, + A quadrato in B quadrato-quadratum 15, + A in B quadrato-cubum 6, + B cubo-cubo, æquari $A + B$ cubo-cubo. Ex opere multiplicationis A quadrato cubi, + A quad-quadrato in B 5, + A cubo in B quadratum 10, + A quadrato in B cubum 10, + A in B quad-quadratum 5, + B quadrato-cubo, per $A + B$. Cum autem placuerit à differentia laterum, non etiam adgregato ,potestatem componi, eadem omnino efficientur singularia compositionis homogenea, sed affirmabuntur & negabuntur alterne initio sumpto à maioris lateris potestate, quando par est singulorum homogeneorum numerus, ut in cubo, quadrato-cubo, & exinde alternis: in reliquis vero sive à maioris lateris potestate, sive a potestate minoris ducant initium, nihil refert; eodem enim opus recidit.

CONSECTARIUM

Singularia compositionis homogenea, quibus constat potestas effecta à binomia radice semel & ordinatim sumpta, sunt continue proportionalia ex generali consectario propositionis quartæ.

Sic sunt proportionalia à duobus lateribus A & B effecta tria plana,

A quadratum.

A in B .

B quadratum.

Nec non & quatuor solida,

A cubus.
A quadratum in *B*.
A in *B* quadratum.
B cubus.
 Pari iure & quinque plano-plana,
A quadrato-quadratum.
A cubus in *B*.
A quadratum in *B* quadratum.
A in *B* cubum
B quadrato-quadratum.
 Et proportionalia sex plano-solida,
A quadrato-cubus.
A quadrato-quadratum in *B*.
A cubus in *B* quadratum.
A quadratum in *B* cubum.
A in *B* quadrato-quadratum.
B quadrato-cubum.
 Et proportionalia denique continuè septem solido-solida,
A cubo-cubus.
A quadrato-cubus in *B*.
A quadrato-quadratum in *B* quadratum.
A cubus in *B* cubum.
A quadratum in *B* quadrato-quadratum
A in *B* quadrato-cubum.
B cubo-cubus.
 Et sre deinceps.

PROPOSITIO XII

Quadrato adgregati laterum, quadratum differentiae eorundem addere.

Sit latus unum *A*, alterum *B*. Oporteat *A* + *B* quadrato, *A* = *B* quadratum addere. At vero quadratum effectum abs *A* + *B*, constat *A* quadrato, + *A* in *B* bis, + *B* quadrato. Quadratum autem effectum abs *A* = *B* constat *A* quadrato, - *A* in *B* bis, + *B* quadrato. Fiat igitur horum additio. Summa erit *A* quadratum bis, + *B* quadrato bis. Quare factum est quod oportuit. Hinc

THEOREMA

Quadratum adgregati laterum plus quadrato differentiae eorundem, æquatur adgregato duplo quadratorum.

PROPOSITIO XIII

Quadrato adgregati duorum laterum, minus quadrato differentiae eorundem demere.

Sit latus unum A , alterum B . Oporteat $A + B$ quadrato, $A = B$ quadrato auferre. Abs planis singularibus quibus constat effingendum abs $A + B$ quadratum, auferentur singularia plana, quibus constat quadratum abs $A = B$: & erit differentia B in A quater. Hinc

THEOREMA

Quadratum adgregati duorum laterum, minus quadrato differentiae eorundem, æquatur plano quadruplo sub lateribus.

CONSECTARIUM

Planum sub duobus lateribus cedit quadrato dimidi adgregati laterum. Æqualitatis enim per theorema ordinatae utraque pars sub quadruplicetur. Quadratum adgregati dimidi laterum præstabit plano sub lateribus per quadratum dimidia differentiae, aut non erunt latera diversa, sed æqualia. Quod animadvertisse fuit operæ pretium.

PROPOSITIO XIV

Differentiam duorum laterum, in eorundem adgregatum ducere.

Sit latus maius A , minus B . Ducantur $A - B$ in $A + B$, & singularia plana colligantur. Erunt illa A quadratum, $- B$ quadrato. Hinc

THEOREMA

Quod fit ex differentia duorum laterum in adgregatum eorundem, æquale est differentiae quadratorum.

CONSECTARIUM

Differentia quadratorum si adplicetur differentiae laterum, orietur adgregatum laterum & contra. Differentia quadratorum si adplicetur adgregato laterum, orientur differentia laterum. Quandoquidem divisio restitutio est resolutione eius operis, quod compositione multiplicatio efficit.

PROPOSITIO XV

Cubo adgregati duorum laterum, cubum differentiae eorundem addere.

Sit latus unum A , alterum B oporteat $A + B$ cubo, $A = B$ cubum addere.

At vero cubus effectus abs $A + B$, constat A cubo, $+A$ quadrato in B ter, $+A$ in B quadratum ter, $+B$ cubo. Cubus autem abs $A = B$ constat A cubo, $-A$ quadrato in B ter, $+A$ in B quadratum ter, $-B$ cubo. Fiat igitur horum additio: summa est A cubus bis, $+A$ in B quadratum sexies. Hinc ordinatur

THEOREMA

Cubus adgregati duorum laterum, plus cubo differentiae eorundem, æquatur duplo cubo lateris maioris, plus sextuplo solido à latere maiore in lateris minoris quadratum.

PROPOSITIO XVI

Cubo adgregati duorum laterum, cubum differentiae eorundem demere.

Sit latus unum A , alterum B . Oporteat $A + B$ cubus ex $A = B$ demere. Abs solidis singularibus, quibus constat componendus abs $A + B$ cubus, demantur singularia solida, quibus constat cubus abs $A = B$: oriatur A quadratum in B sexies, $+B$ cubo bis. Hinc

THEOREMA

Cubus adgregati duorum laterum minus cubo differentiae eorundem, æquatur sextuplo solido à latere minore in quadratum maioris, plus duplo cubo lateris minoris.

PROPOSITIO XVII

Differentiam duorum laterum in tria singularia plana, quibus constat quadratum adgregati ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Sit latus maius A , minus B . Oporteat $A - B$ ducere in A quadratum, $+A$ in B , $+B$ quadrato. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia solida. Erunt illa A cubus, $-B$ cubo. Hinc

THEOREMA

Quod sit ex differentia duorum laterum in tria singularia plana, quibus constat quadratum adgregati ipsorum laterum semel sumpta, æquale est differentiae cuborum.

CONSECTARIUM

Differentia cuborum si adplicetur ad differentiam laterum, orientur tria singularia plana, quibus constat quadratum adgregati laterum semel sumpta. Et permutim, differentia cuborum si adplicetur ad tria singularia plana, quibus constat quadratum adgregati laterum semel sumpta, oriatur differentia laterum.

PROPOSITIO XVIII

Adgregatum duorum laterum in tria singularia plana, quibus constat quadratum differentiae ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Sit latus unum A alterum B . Oporteat $A + B$ ducere in A quadratum, $-B$ in A , $+B$ quadrato. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia solida. Erunt illa A cubus $+B$ cubo. Unde

THEOREMA

Quod fit ex adgregato duorum laterum in tria singularia plana, quibus constat quadratum differentiae ipsorum laterum semel sumpta, æquale est adgregato cuborum.

CONSECTARIUM

Adgregatum cuborum si adplicetur ad adgregatum laterum, oriuntur singularia tria plana, quibus constat quadratum differentiae ipsorum, semel sumpta. Ex permutatim.

PROPOSITIO XIX

Differentiam duorum laterum in quatuor singularia solida, quibus constat cubus adgregati ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Sit maius latus A , minus B . Oporteat $A - B$ ducere in A cubum, $+A$ quadrato in B , $+A$ in B quadratum, $+B$ cubo. Fiat particularis ductio & colligantur singularia plano-plana. Erunt illa A quadrato-quadratum, $-B$ quadrato-quadrato.

THEOREMA

Quod fit ex differentia duorum laterum in quatuor singularia solida, quibus constat cubus adgregati ipsorum laterum semel sumpta, æquale est differentiae quadrato-quadratorum.

CONSECTARIUM

Differentia duorum quadrato-quadratorum si adplicetur ad differentiam laterum, oriuntur quatuor singularia solida, quibus constat cubus adgregati laterum, semel sumpta. Et permutatim.

PROPOSITO XX

Adgregatum duorum laterum in quatuor singularia solida, quibus constat cubus differentiae ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Oporteat $A + B$ ducere in A cubum, $-A$ quadrato in B , $+A$ in B quadratum, $-B$ cubo. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia plano-plana. Erunt illa A quadrato-quadratum, $-B$ quadrato-quadrato.

THEOREMA

Quod sit ex adgregato duorum laterum in quatuor singularia solida, quibus constat cubus differentiae ipsorum laterum semel sumpta, æquale est differentiae quadrato-quadratorum.

CONSECTARIUM

Differentia quadrato-quadratorum si adplicetur ad adgregatum laterum, oriuntur quatuor singularia solida, quibus constat cubus differentiae laterum, semel sumpta.

ALIUD CONSECTARIUM

Ut differentia laterum ad adgregatum, ita quatuor singularia solida, quibus constat cubus differentiae ipsorum laterum semel sumpta ad quatuor singularia solida, quibus constat cubus adgregati eorundem laterum, semel quoque sumpta.

PROPOSITIO XXI

Differentiam duorum laterum in singularia quinque plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum adgregati, ipsorum laterum semel sumpta, ducere.

Sit latus maius A minus B . Oporteat $A - B$ ducere in A quadrato-quadratum, $+C$ cubo in B , $+A$ quadrato in B quadratum, $+A$ quadrato in B quadratum, $+A$ in B cubum, $+B$ quadrato-quadrato. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia plano solida. Erunt illa A quadrato-cubus, $-B$ quadrato-cubo. Hinc

THEOREMA

Quod sit ex differentiae duorum laterum in quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum adgregati ipsorum laterum, semel sumpta, æquale est differentiae quadrato-cuborum.

CONSECTARIUM

Differentia quadrato-cuborum si adplicetur ad differentiam laterum, oriuntur quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum adgregati ipsorum laterum, semel sdumpta. Et contra

PROPOSITIO XXII

Adgregatum duorum laterum in quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum differentiae ipsorum, semel sumpta ducere.

Sit latus unum A , alterum B . Oporteat $A+B$ ducere in A quadrato-quadratum, $-A$ cubo in B , $+A$ quadrato in B quadratum, $-A$ in B cubum, $+B$ quadrato-quadrato. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia plano-solida. Erunt illa A quadrato-cubus, $+B$ quadrato-cubus. Hinc

THEOREMA

Quod sit ex adgregato duorum laterum in quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum differentiae ipsorum laterum, semel sumpta, est æquale adgregato quadrato-cuborum.

CONSECTARIUM

Adgregatum quadrato-cuborum si adplicetur ad adgregatum laterum, orientur quinque singularia plano-plana, quibus constat quadrato-quadratum differentiae ipsorum, semel sumpta. Et permutatim

PROPOSITIO XXIII

Differentiam duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus adgregati ipsorum, semel sumpta, ducere.

Sit latus maius A , minus B . Oporteat $A-B$ ducere in A quadrato-cubum, $+A$ quadrato-quadrato in B , $+A$ cubo in B quadratum, $+A$ quadrato in B cubum, $+A$ in B quadrato-quadratum, $+B$ quadrato-cubo. Fiat particularis ductio & colligantur singularia solido-solida. Erunt illa A cubo-cubus, $-B$ cubo-cubo. Hinc

THEOREMA

Quod fit ex differentia duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus adgregati ipsorum laterum, semel sumpta, est æquale differentiae cubo-cuborum.

CONSECTARIUM

Differentia cubo-cuborum si adplicetur ad differentiam laterum, orientur sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus adgregati ipsorum, semel sumpta.

PROPOSITIO XXIV

Adgregatum duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiae ipsorum, semel sumpta, ducere.

Sit latus unum A , alterum B . Oporteat $A+B$ ducere in A quadrato-cubum, $-A$ quadrato-quadrato in B , $+A$ cubo in B quadratum, $-A$ quadrato in B cubum, $+B$ cubum, $+A$ in B quadrato-quadratum, $-B$ quadrato-cubo. Fiat particularis ductio, & colligantur singularia solido-solida. Erunt illa A cubo-cubus, $-B$ cubo-cubus. Hinc

THEOREMA

Quod fit ex adgregato duorum laterum in sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiae ipsorum laterum, semel sumpta, est aequale differentiae cubo-cuborum.

CONSECTARIUM

Differentia cubo-cuborum si adplicetur ad adgregatum duorum laterum, orientur sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiae ipsorum laterum, semel sumpta.

ALIUD CONSECTARIUM

Ut differentia laterum ad adgregatum, ita sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus differentiae ipsorum laterum, semel sumpta, ad sex singularia plano-solida, quibus constat quadrato-cubus adgregati ipsorum laterum, sumpta quoque semel. Ex propositionibus praecedentibus deducuntur theoremata universalia.

THEOREMA I

Quod fit ex differentia duorum laterum in singularia homogenea, quibus constat potestas adgregati ipsorum laterum, semel sumpta, est aequale differentiae potestatum gradus proxime superioris. Hinc

CONSECTARIUM

Differentia potestatum si adplicetur ad differentiam laterum, orientur singularia homogenea, quibus constat potestas gradus proxime inferioris adgregati ipsorum laterum, semel sumpta. Et contra.

Differentia potestatum si adplicetur ad singularia homogenea, quibus constat potestas gradus proxime inferioris adgregati ipsorum laterum, semel sumpta, oriatur differentia laterum.

THEOREMA II

Quod fit ex adgregato duorum laterum in singularia homogenea, quibus constat potestas differentiae ipsorum laterum, semel sumpta, est æquale adgregato vel differentiae potestatum ordinis proxime superioris: adgregato quidem, si impar fuerit singularium homogeneorum numerus: differentiae vero, si par fuerit singularium homogeneorum numerus. Hinc

CONSECTARIUM

Adgregatum vel differentia potestatum si adplicetur ad adgregatum laterum, orientur singularia homogenea, quibus constat potestas ordinis proxime inferioris differentiae ipsorum laterum, semel sumpta.

ALIUD CONSECTARIUM

Si par fuerit numerus singulorum homogeneorum, quibus constat potestas adgregati vel differentiae laterum, erit: ut differentia laterum ad adgregatum; ita singularia homogenea, quibus constat potestas differentiae ipsorum laterum, semel sumpta ad singularia homogenea, quibus constat potestas eiusdem gradus, adgregati ipsorum laterum, semel sumpta.

GENESIS POTESTATUM ADFECTARUM

§ primo adfirmate.

PROPOSITIO XXV

Quadratum adfectum adiunctione plani sub latere, adscita congruenter sublaterali coefficiente longitudine, componere.

Sit radix binomia $A + B$. Coefficientis sublateralis D longitudo. Oporteat quadratum abs $A + B$, adfectum adiunctione plani sub D & $A + B$, componere. Ducatur $A + B$ in $A + B + D$ & colligantur effecta singularia plana. Erunt

illa A quadratum, $+A$ in B bis, $+B$ quadrato, $+D$ in A , $+D$ in B . Quæ ideo æquabuntur quadrato abs $A + B$, adfecto adiunctione plani ex $A + B$ in D longitudinem. Hinc autem ordinatur.

THEOREMA

Geneseos quadrati adfecti affirmative sub latere.

Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublateralis longitudo: quadratum lateris primi, plus plano a latere primo in latus secundum duplum, plus quadrato lateris secundi, plus plano a latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano a latere secundo in eadem coefficientem longitudinem, æquatur quadrato adgregati laterum adfecto adiunctione plani sub coefficiente illa, & dicto adgregato.

Sit latus unum A , alterum B , coefficiens sub lateralis longitudo D . Dico A quadratum, $+A$ in B bis, $+B$ quadrato, D in A , $+D$ in B , æquari $A+B$ quadrato, $+D$ in $A+B$. Ex opere multiplicationis $A+B$ per $A+B+D$.

Sit latus unum A , alterum B , coefficiens sub lateralis longitudo D . Dico A quadratum, $+A$ in B bis, $+B$ quadrato, $+D$ in A , $+D$ in B , æquari $A + B$ quadrato, $+D$ in $A + B$. Ex opere multiplicationis $A + B$ per $A + B + D$.

ALIUD THEOREMA

Si ab eadem binomia radice componantur duo quadrata, unum purum, alterum adfirmate adfectum sub radice & adscita coefficiente longitudine: singularia plana, quæ compositio adfecta addit compositioni puræ sunt. Planum à latere primo in coefficientem longitudinem.

Planum à latere secundo in eandem ipsam coefficientem longitudinem. Ex collatione utriusque suppositionis.

PROPOSITIO XXVI

Cubum adfectum adiunctione solidi sublatare, à binomia radice, adscito congruenter sublaterali plano coefficiente, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficiens sublaterale D planum. Oporteat cubum abs $A + B$ adfecto adiunctione solidi sub D plano, & ipsa $A + B$ componere. Effingatur quadratum abs $A+B$, & in illud superaddito D plano ducatur $A+B$, & colligantur effecta singularia solida. Erunt illa A cubus, $+A$ quadrato in B ter, $+A$ in B quadratum ter, $+B$ cubo, $+D$ plano in A , $+D$ plano in B . Quæ ideo æquabuntur cubo abs $A + B$, adfecto adiunctione solidi sub $A + B$ & D plano in B . Quæ ideo æquabuntur cubo abs $A + B$, adfecto adiunctione solidi sub $A + B$ & D plano. Hinc ordinatur.

THEOREMA

Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublateralis planum: cubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, plus solido a latere primo in coefficiens planum, plus solido a latere secundo in idem coefficiens planum, æquatur cubo adgregati laterum adfecto adiunctione solidi sub coefficiente plano & adgregato prædicto.

PROPOSITIO XXVII

Cubum adfectum adiunctione solidi sub quadrato, à radice binomia, adscita congruenter subquadratica coefficiente longitudine, componere.

Sit radix binomia $A+B$ coefficiens subquadratica D longitudo. Oporteat cubum abs $A+B$ adfectum adiunctione solidi sub D , & quadrato abs $A+B$ componere. Effingatur quadratum abs $A+B$, & ducatur in $A+B+D$, & colligantur effecta singularia solida. Erunt illa. A cubus, $+A$ quadrato in B ter, $+A$ in B quadratum ter, $+B$ cubo, $+A$ quadrato in D , $+A$ in B bis in D , $+B$ quadrato in D . Quæ propterea æqualia erunt cubo abs $A+B$, adfecto adiunctione solidi sub $A+B$ quadrato & D longitudine. Hinc concipitur.

THEOREMA

Geneseos cubi adfecti adfirmate sub quadrato.

Si fuerint due latera & præterea coefficiens subquadratica longitudo: cubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, plus solido a lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem, plus solido a plano-duplo sub lateribus in coefficientem longitudinem, plus solido a lateris secundi quadrato in coefficientem longitudinem, est æqualis cubo adgregati laterum adfecto adiunctione solidi, sub coefficiente illa & dicti adgregati laterum quadrato.

Sit latus unum A , alterum B , coefficiens sub quadratica longitudo D . Dico A cubum, $+A$ quadrato in B^3 , $+A$ in B quadratum 3, $+B$ cubo, $+A$ quadrato in D , $+A$ in B in D^2 , $+B$ quadrato in D , æquari $A+B$ cubo, $+D$ in $A+B$ quadratum. Ex opere multiplicationis A quadrati, $+A$ in B^2 , $+B$ quadrato, per $A+B+D$.

ALIUD THEOREMA

Si ab eadem binomia radice componentur duo cubi, unus purus, alter adfirmate adfectus sub ipsius radicis quadrato & adscita coefficiente longitudine: singu-

laria solida quæ compositio adfecta addit compositioni puræ sunt.

Solidum à quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem.

Solidum à latere secundo in duplum planum quod sit à latere primo in coefficientem longitudinem.

Solidum à quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem. Ex collatione utriusque suppositionis.

PROPOSITIO XXVIII

Quadrato-quadratum adfectum adiunctione plano-plani sublatare, à binomia radice, adscito congruenter sub laterali coefficiente solido, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficientens sublatare D solidum. Oporteat quadrato-quadratum abs $A + B$ adfectum adiunctione plano-plani sub $A + B$, & ipso D solido, componere. Effingatur cubus abs $A + B$, & illum superaddito D solido, ducatur $A + B$, & colligantur effecta singularia plano-plana. Erunt illa A quadrato-quadratum, $+A$ cubo in B^4 , $+A$ quadrato in B quadratum 6 , $+A$ in B cubum 4 , $+B$ quadrato-quadrato, $+A$ in D solidum, $+B$ in D solidum. Quæ ideo æquabuntur quadrato-quadrato abs $A + B$, adfecto adiunctione plano-plani sub $A + B$, & ipso D solido. Hinc

THEOREMA

Geneseos quadrato-quadrati adfecti adfirmate sub latere.

Si fuerint due latera & præterea coefficientens solidum: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus latere primo in coefficientens solidum, plus latere secundo in coefficientens solidum, est æquale quadrato-quadrato adgregati laterum adfecto adiunctione plano-plani, sub dicto adgregato, & coefficiente solido.

Sit latus unum A alterum B , coefficientens sublatare solidum D . Dico A quadrato-quadratum, $+A$ cubo in B^4 , $+A$ quadrato in B quadratum 6 , $+A$ in B cubum 4 , $+B$ quadrato-quadrato, in $+A$ in D solidum, $+B$ in D solidum, æquari $A + B$ quadrato-quadrato, $+D$ solido in $A + B$. Ex opere multiplicationis A cubi, $+A$ quadrato in B^3 , $+A$ in B quadratum 3 , $+B$ cubo, $+D$ solido per $A + B$.

PROPOSITIO XXIX

Quadrato quadratum adfectum adiunctione plano-plani sub cubo, à radice binomia, adscito congruenter subcubico coefficiente longitudine, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficientens D longitudo. Oporteat quadrato-quadratum

abs $A + B$, adfectum adiunctione plano-plani sub cubo ex $A + B$ in D longitudinem, componere. Effingatur cubus abs $A + B$, & in illud ducatur $A + B + D$, & colligantur effecta singularia plano-plana. Erunt illa A quadrato-quadratum, $+A$ cubo in B^4 , $+A$ quadrato in B quadratum 6, $+A$ in B cubum 4, $+B$ quadrato-quadrato, $+A$ cubo in D , $+A$ quadrato in B ter in D , $+A$ in B quadratum ter in D , $+B$ cubo in D . Quæ propterea æqualia erunt quadrato-quadrato ab $A + B$ adfecto adiunctione plano-plani sub $A + B$ cubo, & ipsa D longitudine. Hinc ab $A + B$ adfecto adiunctione plano-plani sub $A + B$ cubo, & ipsa D longitudine. Hinc

THEOREMA

Geneseos plano-plani adfecti cubo adfirmate.

Si fuerint due latera & præterea coefficientens longitudo: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficientem longitudinem, plus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficientem longitudinem, plus cubo lateris secundi in coefficientem longitudinem, æquatur quadrato-quadrato adgregati laterum adfecto adiunctione plano-plani sub cubo adgregati prædicti, & coefficiente longitudine.

Sit latus unum A alterum B , coefficientens D . Dico A quadrato-quadratum, $+A$ cubo in B^4 , $+A$ quadrato in B quadratum 6, $+A$ in B cubum 4, $+B$ quadrato-quadrato, $+A$ cubo in D , $+A$ quadrato in B in D^3 , $+A$ in B quadratum in D^3 , $+B$ cubo in D , æquari $A + B$ quadrato-quadrato, $+D$ in $A + B$ cubum. Ex opere multiplicationis A cubi, $+A$ quadrato in B^3 , $+A$ in B quadratum 3, $+B$ cubo, per $A + B + D$.

ALIUD THEOREMA

Si ab eadem binomia radice componantur duo quadrato-quadrata, unum pure, alterum adfectum adiunctione plano-plani sub ipsius radicis cubo & adscita coefficiente longitudine. Singularia plano-plana quæ compositio adfecta addit compositioni puræ sunt.

Plano-planum à lateris primi cubo in coefficientem longitudinem.

Plano-planum à quadrato lateris primi in triplum planum quod sit ex latere secundo in coefficientem longitudinem.

Plano-planum à latere primo in triplum solidum quod sit ex quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem.

Plano-planum à cubo lateris secundi in coefficientem longitudinem. Ex collatione utriusque suppositionis.

Purum	Adfectum
A quadrato-quadratum	A quadrato-quadratum
A cubus in B 4	A cubus in B 4
A quadratum in B quadratum 6	A quadratum in B quadratum 6
A in B cubum 4	A in B cubum 4
B quadrato-quadratum	B quadrato-quadratum
I	A cubus in D
II	A quadratum in B in D 3
III	A in B quadratum in D 3
IV	B cubus in D

Ex opere multiplicationis A cubi, $+A$ quadrato in B 3, A in B quadratum 3, plus B cubo, per $A + B + D$.

PROPOSITIO XXX

Quadrato-quadratum adfectum adiunctione duplicis plano-planum, unius sub latere, & alterius sub quadrato, à radice binomia adscitis congruenter sublaterali coefficiente solido & sub quadratico coefficiente plano, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficientis sublaterale D solidum, coefficientis subquadraticum G planum. Oporteat quadrato-quadratum abs $A + B$ adfectum adiunctione duplicis plano-planum, unius sub $A + B$ & D solido, alterius sub $A + B$ quadrato & G plano componere. Effingatur quadratum abs $A + B$, & in illud superaddito G plano, ducatur $A + B$, & in effecta solida superaddito D solido, ducatur rursus $A + B$, & colligantur singularia effecta plano-plana, quæ quidem erunt. A quadrato-quadratum, $+A$ cubo in B^4 , $+A$ quadrato in B quadratum 6, $+A$ in B cubum 4, $+B$ quadrato in G planum, $+A$ in D solidum, $+B$ in D solidum. Hæc itaque plano-plana æquantur quadrato-quadrato abs $A + B$, adfecto adiunctione plano-planum sub $A + B$ quadrato & G plano, & plano-planum sub $A + B$ radice, & D solido. Hinc

THEOREMA

Si fuerint due latera & præterea coefficientis duplex, unum quidem planum subquadraticum, alterum vero sublaterale solidum. Erit

Quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum

quadruplum, plus quadrato lateris peimi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus quadrato lateris primi in coefficiens planum, plus duplo plano sub lateribus in coefficiens planum, plus quadrato lateris secundi in coefficiens planum, plus latere primo in coefficiens solidum, plus latere secundo in coefficiens solidum, æquale quadrato-quadrato adgregati laterum, adfecto adiunctione duplicis plano-plani, unius sub quadrato adgregati laterum, & coefficiente plano, alterius sub adgregato laterum, & coefficiente solido.

PROPOSITIO XXXI

Quadrato cubum adfectum adiunctione plano solidi sub latere à radice binomia, adscito congruenter sublaterali coefficiente plano-plano, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficiens sublaterale D plano-planum. Oporteat componere quadrato-cubum abs $A + B$ adfectum adiunctione plano-solidi sub $A + B$, & D plano-plano. Componantur quadrato-quadratum abs $A + B$, & in illud, superaddito D plano-plano, ducatur $A + B$, & colligantur effecta singularia plano-solida. Erunt illa A quadrato-cubus, $+A$ quadrato-quadrato in B^5 , $+A$ cubo in B quadratum 10, $+A$ quadrato in B cubum 10, $+A$ in B quadrato-quadratum 5, $+B$ quadrato-cubo, $+A$ in D plano-planum, $+B$ in D plano-planum. Quæ ideo æquabuntur quadrato-cubo abs $A + B$, adfecto adiunctione plano-solidi sub $A + B$, & D plano-plano. Hinc concipitur.

THEOREMA

Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublaterale plano-planum: quadrato-cubus lateris primi, plus quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum quintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi quadratum decuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi cubum decuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum quintuplum, plus quadrato-cubo lateris secundi, plus latere primo in coefficiens plano-planum, plus latere secundo in coefficiens plano-planum; est æqualis quadrato-cubo adgregati laterum adfecto adiunctione plano-solidi sub coefficiente plano-plano, & adgregato laterum.

PROPOSITIO XXXII

Quadrato-cubum adfectum adiunctione plano-solidi sub cubo à radice binomia, adscito congruenter subcubico coefficiente plano, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficiens subcubicum D planum. Oporteat quadrato-cubum abs $A + B$ adfectum adiunctione plano-solidi sub $A + B$ cubo, & D plano,

componere. Sumatur quadratum abs $A + B$, & in illud superaddito D plano, ducatur cubus abs $A + B$, & colligantur effecta singularia plano-solida. Erunt illa A quadrato-cubus, $+A$ quadrato-quadrato in B^5 , $+A$ cubo in B quadratum 10, $+A$ quadrato in B cubum 10, $+A$ in B quadrato-quadratum 5, $+B$ quadrato-cubo, $+A$ cubo in D planum, $+A$ quadrato in B ter in D planum, $+A$ in B quadratum ter in D planum, $+B$ cubo in D planum. Hinc ordinatur

THEOREMA

Si fuerint due latera & coefficiens planum: quadrato-cubus lateris primi, plus quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum quintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi quadratum decuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi cubum decuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum quintuplum, plus quadrato-cubo lateris secundi, plus cubo lateris primi in coefficiens planum, plus solido sub quadrato-lateris primi, & latere secundo triplo in coefficiens planum, plus solido sub latere primo, & lateris secundi quadrato triplo in coefficiens planum, plus cubo lateris secundi in coefficiens planum, æqualis est quadrato-cubo adgregati laterum adfecto adiunctione plano-solidi sub coefficiente plano & cubo adgregati laterum.

PROPOSITIO XXXIII

Cubo-cubum adfectum adiunctione solido-solidi sub latere, à binomia radice adscito congruenter sublaterali coefficiente plano-solido, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficiens sublaterale D plano-solidum. Opporteat cubo-cubum abs $A + B$ adfectum adiunctione solido-solidi ex $A + B$ in D plano-solidum, componere. Effingatur quadrato-cubus abs $A + B$, & in illum D plano-solido auctum, ducatur $A + B$, & colligantur singularia effecta solido-solidi. Erunt illa A cubo-cubus, $+A$ quadrato-cubo in B^6 , $+A$ quadrato-quadrato in B quadratum 15, $+A$ cubo in B cubum 20, $+A$ quadrato in B quadrato-quadratum 15, $+A$ in B quadrato-cubum 6, $+B$ cubo-cubo, $+A$ in D plano-solidum, $+B$ in D plano-solidum. Quæ propterea æquabuntur $A + B$ cubo-cubo, plus solido-solido ex $A + B$ in D plano-solidum. Hinc

THEOREMA

Si fuerint due latera, una cum coefficiente sublaterali plano-solido, cubo-cubus lateris primi, plus quadrato-cubo lateris primi in latus secundum sextuplum, plus quadrato-quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum decuquintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi cubum vigecuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadrato-quadratum decuquintuplum, plus

latere primo in lateris secundi quadrato-cubum sextuplum, plus cubo-cubo lateris secundi, plus latere primo in coefficientis plano-solidum, plus latere secundo in coefficientis plano-solidum, est æqualis cubo-cubo adgregati laterum adfecto adiunctione solido-solidi sub coefficiente plano-solido & adgregato laterum.

GENESIS POTESTATUM ADFECTORUM

negate.

PROPOSITIO XXXIV

Quadratum adfectum multa plani sub latere, à binomia radice adscita congruenter sublaterali coefficiente longitudine, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficientis sublateralis D longitudo. Oporteat quadratum abs $A + B$ adfectum multa plani sub $A + B$, & D longitudine, componere. Ducatur $A + B$ in $A + B - D$, erunt effecta plana, A quadratum, $+A$ in B bis, $+B$ quadrato, $-A$ in D , $-B$ in D . Quæ ideo æquabuntur quadrato abs $A + B$, adfecto multa plani ex $A + B$ in D longitudinem. Hinc

THEOREMA

Si fuerint due latera, una cum coefficiente sublaterali longitudine: quadratum lateris primi, plus plano a latere primo in latus secundum duplum, plus quadrato lateris secundi, minus plano a latere primo in coefficientem longitudinem, minus plano a latere secundo in coefficientem longitudinem, est æquale quadrato adgregati laterum adfecto multa plani sub dicto adgregato, & coefficiente illa.

PROPOSITIO XXXV

Cubum adfectum multa solidi sub latere, à radice binomia, adscito congruenter sublaterali coefficiente plano, effingere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficientis sublaterale D planum. Oporteat cubum abs $A + B$ adfectum multa solidi ex $A + B$ in D planum, effingere. Componatur quadratum abs $4A + B$, & in illud multarum D plano ducatur $A + B$, colliganturque singularia effecta solida. Erunt illa A cubus, $+A$ quadrato in B ter, $+A$ in B quadratum ter, $+B$ cubo, $-A$ in D planum, $-B$ in D planum, & æquabuntur cubo abs $A + B$ adfecto multa solidi ex $A + B$ in D planum. Hinc

THEOREMA

Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublaterale planum: ubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, minus solido a latere primo in coefficiens planum, minus solido a latere secundo in coefficiens planum, est æqualis cubo adgregati laterum adfecto multa solidi sub coefficiente plano, & adgregato laterum.

PROPOSITIO XXXVI

Cubum adfectum multa solidi sub quadrato, à radice binomia, adscita congruenter coefficiente subquadratica longitudine, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficiens subquadratica D longitudo. Oporteat cubum abs $A + B$ adfectum multa solidi sub $A + B$ quadrato, & D longitudine, componere. Effingatur quadratum abs $A + B$, & in illud ducatur $A + B - D$, & colligantur effecta singularia solida. Erunt illa A cubus, $+A$ quadrato in B ter, $+A$ in B quadratum ter, $+B$ cubo, $-A$ quadrato in D , $-A$ in B bis in D , $-B$ quadrato in D . Quæ idcirco æqualia erunt $A + B$ cubo, adfecto multa solida abs $A + B$ quadrato in D longitudinem. Hinc

THEOREMA

Si fuerint due latera, una cum coefficiente subquadratica longitudo: cubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, minus solido a quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, minus solido a plano duplo sub lateribus in coefficientem longitudinem, minus solido a quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem, æquabitur cubo adgregati laterum, adfecto multa solidi sub coefficiente longitudine & quadrato adgregati laterum.

GENESIS POTESTATUM ADFECTARUM

negate mixtim & adfirmate.

PROPOSITIO XXXVII

Quadrato-quadratum adfectum adiunctione quidem plano-plani sub latere, multa vero plano-plani sub cubo, à radice binomia, adscitis congruenter sublaterali coefficiente solido & subcubica coefficiente longitudine, componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficientis sublaterale D solidum, coefficientis subcubica G longitudo. Oporteat quadrato-quadratum abs $A + B$, adfectum quidem adiunctione plano-plani ex $A + B$ in D solidum; multa vero plano-plani abs $A + B$ cubo in G longitudinem, componere. Ducatur quadratum abs $A + B$ in $A + B - G$, & in effecta solida superaddito D solido, ducatur $A + B$, & colligantur singularia effecta plano-plana. Erunt illa. A quadrato-quadratum, $+A$ cubo in B^4 , $+A$ quadrato in B quadratum 6 , $+A$ in B cubum 4 , $+B$ quadrato-quadrato, $-A$ cubo in G , $-A$ quadrato in B ter in G , $-A$ in B quadratum ter in G , $-B$ cubo in G , $+A$ in D solidum, $+B$ in D solidum. Quæ quidem æqualia erunt quadrato-quadrato abs $A + B$, adfecto multa plano-plani ex $A + B$ cubo in G longitudinem, & adiunctione plano-plani ex $A + B$ radice in D solidum. Hinc

THEOREMA

Si fuerint due latera & præterea coefficientis subcubica longitudo, necnon & coefficientis sublaterale solidum: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, minus cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, minus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficientem longitudinem, minus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficientem longitudinem, minus cubo lateris secundo in coefficientem longitudinem, plus latere primo in coefficientis solidum, plus latere secundo in coefficientis solidum, æquatur quadrato-quadrato adgregati laterum, adfecto multa quidem plano-plani sub cubo adgregati laterum & coefficiente longitudine, adiunctione vero plano-plani sub adgregato eodem & coefficiente solido.

PROPOSITIO XXXVIII

Quadrato-quadratum adfectum multa quidem plano-plani sub latere, adiunctione vero plano-plani sub cubo, à binomia radice, adfectis congruenter sublaterali coefficiente solido & subcubica coefficiente longitudine, componere.

Esto radix binomia $A + B$, coefficientis sublaterale D solidum, coefficientis subcubica G longitudo. Oporteat abs $A + B$, quadrato-quadratum adfectum multa plano-plani sub $A + B$ & D solido, atque adiunctione plano-plani sub $A + B$ cubo & G longitudine, componere. Ducatur quadratum ex $A + B$ in $A + B + G$, & in effecta solida multata D solido, ducatur $A + B$, & orta plano-plana erunt. A quadrato-quadratum, $+A$ cubo in B^4 , $+A$ quadrato in B quadratum 6 , $+A$

in B cubum 4, $+B$ quadrato-quadrato, $+A$ cubo in G , $+A$ quadrato in B ter in G , $+A$ in B quadratum in G^3 , $+B$ cubo in G , $-A$ in D solidum, $-B$ in D solidum. Quæ ideo æquabuntur quadrato-quadrato ab $A + B$, adfecto adiunctione plano-plani sub $A + B$ cubo, & G longitudine, & multa plano-plani sub $A + B$ radice & ipso D solido. Hinc concipitur

THEOREMA

Si fuerint due latera & præterea coefficiens subcubica longitudo, necnon & coefficiens sublaterale solidum: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficientem longitudinem, plus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficientem longitudinem, plus cubo lateris secundo in coefficientem longitudinem, minus latere primo in coefficiens solidum, minus latere secundo in coefficiens solidum, æquatur quadrato-quadrato adgregati laterum, adfecto adiunctione quidem plano-plani sub cubo adgregati laterum, & coefficiente longitudine, multa vero plano-plani sub adgregato ipso laterum, & coefficiente solido.

PROPOSITIO XXXIX

Quadrato-cubum adfectum adiunctione plano-solidi sub latere, & multa plano-solidi sub cubo, à binomia radice, adscitis congruenter, sublaterali coefficiente plano-plano; & subcubico coefficiente plano-componere.

Sit radix binomia $A + B$, coefficiens sublaterale D plano-planum, subcubicum coefficiens G planum. Effingendus sit quadrato-cubus abs $A + B$, adfectus adiunctione plano-solidi sub $A + B$ radice & D plano-plano, ac multa plano-solidi sub $A + B$ cubo & G plano. Componantur quadratum abs $A + B$, & in illud multatum G plano, ducatur idem quadratum ab $A + B$ & orta plano-plana augeantur D plano-plano, & ducantur in $A + B$. Orientur hæc plano-solida. A quadrato-cubus, $+A$ quadrato-quadrato in B^5 , $+A$ cubo in B quadratum 10, $+A$ quadrato in B cubum 10, $+A$ in B quadrato-quadratum 5, $+B$ quadrato-cubo, $-A$ cubo in G planum, $-A$ quadrato in B ter in G planum, $-A$ in B quadratum ter in G planum, $-B$ cubo in G planum, $+A$ in D plano-planum, $+B$ in D plano-planum. Hinc

THEOREMA

Si fuerint due latera & præterea subcubicum coefficiens planum, necnon & sublaterale coefficiens plano-planum; quadrato-cubus lateris primi, plus quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum quintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi quadratum decuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi cubum decuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum quintuplum, plus quadrato-cubo lateris secundi, minus cubo lateris primi in coefficiens planum, minus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficiens planum, minus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficiens planum, minus cubo lateris secundi in coefficiens planum, plus latere primo in coefficiens plano-planum, plus latere secundo in coefficiens plano-planum, æquatur quadrato-cubo adgregati laterum adfecto multa quidem plano-solidi sub cubo adgregati laterum & coefficiente plano, adiunctione vero plano-solidi sub adgregato laterum, & coefficiente plano-plano.

GENESIS POTESATUM

avulsarum.

PROPOSITIOXL

Planum sub latere, adfectum multa quadrati, à binomia radice, adscita congruenter sublaterali coefficiente longitudine, componere.

Sit radix binomia $A + B$, sublateralis coefficiens D longitudo. Oporteat planum sub $A + B$, & D longitudine, adfectum multa $A + B$ quadrati, componere. Ducatur $D - A - B$ in $A + B$, & orientur singularia plana, A in D , $+B$ in D , $-A$ quadrato, $-A$ in B^2 , $-B$ quadrato. Hinc autem ordinatur.

THEOREMA

Si fuerint due latera, necnon & sublateralis coefficiens longitudo: planum a latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano a latere secundo in coefficientem longitudinem, minus quadrato lateris primi, minus duplo plano sub lateribus, minus quadrato lateris secundi, æquatur plano sub adgregato laterum, & coefficiente illa, adfecto multa quadrati ab adgregato laterum.

PROPOSITIOXLI

Solidum sub latere adfectum multa cubi, à binomia radice, adscito congruenter sublaterali coefficiente plano, effingere.

Sit radix binomia $A + B$, sublaterale coefficientis D planum. Effingendum sit solidum sub $A + B$, & D plano, adfectum multa cubi ex $A + B$. Ducatur $A + B$ in D planum multatum $A + B$ cubo. Orientur solida, A in D planum, $+B$ in D planum, $-A$ cubo, $-A$ quadrato in $B^3 - A$ in B quadratum 3 , $-B$ cubo. Hinc concipitur.

THEOREMA

Si fuerint due latera, una cum coefficiente sublaterali plano: solidum a latere primo in coefficientis planum, plus solido a latere secundo in coefficientis planum, minus cubo lateris primi, minus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, minus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, minus cubo lateris secundi, æquatur solido sub adgregato laterum, & coefficiente sublaterali plano, adfecto multa cubi ab adgregato eodem.

PROPOSITIOXLII

Solidum sub quadrato adfectum multa cubi, à binomia radice, adscita congruenter sub quadratica coefficiente longitudine, effingere.

Sit radix binomia $A + B$, subquadratica coefficientis D longitudo. Oporteat solidum sub $A + B$ quadrato, & D longitudine, adfectum multa cubi abs $A + B$ componere. In $A + B$ quadratum ducatur $D - A - B$, & orientur solida, A quadratum in D , $+A$ in B bis in D , $+B$ quadrato in B^3 , $-A$ in B quadratum 3 , $-B$ cubo. Hinc enuntiatur.

THEOREMA

Si fuerint due latera, & subquadratica coefficientis longitudo: solidum a quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido a plano duplo sub lateribus in coefficientem longitudinem, plus solido a quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem, minus cubo lateris primi, minus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, minus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, minus cubo lateris secundi, est æquale solido sub quadrato adgregati laterum, & coefficiente longitudine, adfecto multa cubi ab adgregato eodem.

PROPOSITIOXLIII

Plano-planum sub latere adfectum multa quadrato-quadrati, à binomia radice, adscito congruenter sublaterali coefficiente solido, componere.

Sit radix binomia $A+B$, coefficiens sublaterale D solidum. Oporteat componere pano-planum ex D solido in $A+B$, adfectum multa $A+B$ quadrato-quadrati. Auferatur $A+B$ cubus ex ipso D solido, & ducatur in $A+B$. Orientur plano-plana, A in D solidum, $+B$ in D solidum, $-A$ quadrato-quadrato, $-A$ cubo in B^4 , $-A$ quadrato in B quadratum 6, $-A$ in B cubum 4, $-B$ quadrato-quadrato. Hinc autem ordinatur.

THEOREMA

Si fuerint due latera, & præterea coefficiens solidum: latus primum in coefficiens solidum, plus latere secundo in idem solidum, minus quadrato-quadrato lateris primi, minus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, minus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, minus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, minus quadrato-quadrato lateris secundi, æquatur plano-plano ex adgregato laterum in coefficiens solidum, adfecto multa quadrato-quadrati ab adgregato prædicto.

PROPOSITIO XLIV

Plano-planum sub cubo, adfectum multa quadrato-quadrati à binomia radice, adscita congruenter subcubica coefficiente longitudine, effingere.

Sit radix binomia $A+B$, subcubica coefficiens D longitudo. Oporteat solidum abs $A+B$ cubo & ipsa D , adfectum multa quadrato-quadrati abs $A+B$, componere. In $A+B$ cubum ducatur $D-A-B$: efficiuntur singularia plano-plana, A cubus in D , $+A$ quadrato in B ter in D , $+A$ in B quadratum ter in D , $+B$ cubo in D , $-A$ quadrato-quadrato, $-A$ cubo in B^4 , $-A$ quadrato in B , quadratum 6, $-A$ in B cubum 4, $-B$ quadrato-quadrato. Hinc itaque ordinabitur.

THEOREMA

Si fuerint due latera, & præterea coefficiens longitudo: cubus lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in eandem longitudinem, plus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in eandem longitudinem, plus cubo lateris secundi primi in latus secundum quadruplum, minus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, minus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, minus quadrato-quadrato lateris secundi, æquatur plano-plano sub coefficiente longitudine & cubo adgregati laterum, adfecto multa quadrato-quadrati ab adgregato eodem.

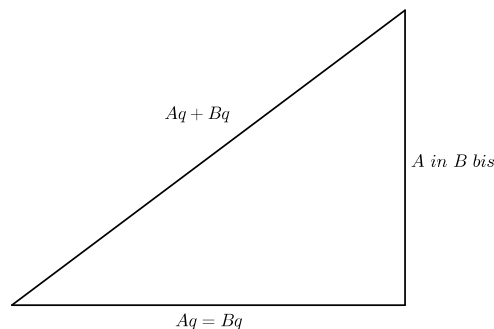
Porro monitum te cupio, singula hac Theoremata geneseos seu sintheseos potestatum adfectarum ordine respondere singulis analiseos potestatum earundem problematu; qua solvuntur in eruditissime opere de numerosa potestatum resolutione. Quod quidem adnotare necessarium.

GENESIS TRIANGULORUM

PROPOSITIO XLV

Triangulum rectangulum à duabus radicibus, effingere.

Sunto duæ radices A , B . Oporteat ab iis triangulum rectangulum, effingere. Et vero docente Pythagora, quadratum lateris subtendentis angulum rectum, æquale est quadratis laterum circa rectum. Latus autem subtendens solet per excellentiam vocari hypotenusæ. Latera vero circa rectum, perpendiculum & basis. Eo igitur recidit res, ut à duabus radicibus positis, effigenda sint tria quadrata, quorum unum æquatur duobus reliquis, & maximi latus assimiletur hypotenusæ. Reliquorum vero latera perpendiculo & basi. Ordinatam autem iam ante est, quadratum adgregati duorum laterum, æquari quadrato differentie eorundem, & quadruplo sub eisdem lateribus rectangulo. Quare ad expositas radices A , B , subiiciatur tertia proportionalis $\frac{B \text{ quadratum}}{A}$. Et adgregatum extremarum, hypotenusæ constituatur $A + \frac{B \text{ quadrato}}{A}$. Differentia earundem, basis, nempe $A - \frac{B \text{ quad.}}{A}$. Perpendicularis erit, $B2$, cuius videlicet quadratum æquatur rectangulo sub extremis. Omnia in A , ut ad idem genus adplicationis latera quæque revocentur: erit hypotenusæ A quadratum, $+B$ quadrato, perpendicularis A in $B2$, basis $A \text{ quadrat.} = B \text{ quadrato}$.



Hinc effingere est duobus lateribus, triangulum rectangulum. Enimvero hypotenusæ fit similis adgregato quadratorum, basis differentie eorundem, perpendiculum duplo rectangulo. Æque effingere est à proportionalibus tribus, tri-

angulum rectangulum. Enimvero hypotenusa fit similis adgregato extremarum, basis differentiae earundem, perpendicularum mediae duplae.

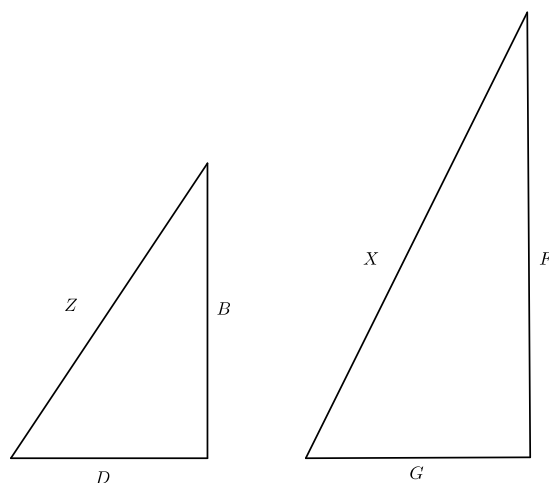
CONSECTARIUM

Perpendicularum trianguli rectanguli medium proportionale est inter adgregatum baseos & hypotenusæ, & differentiam earundem.

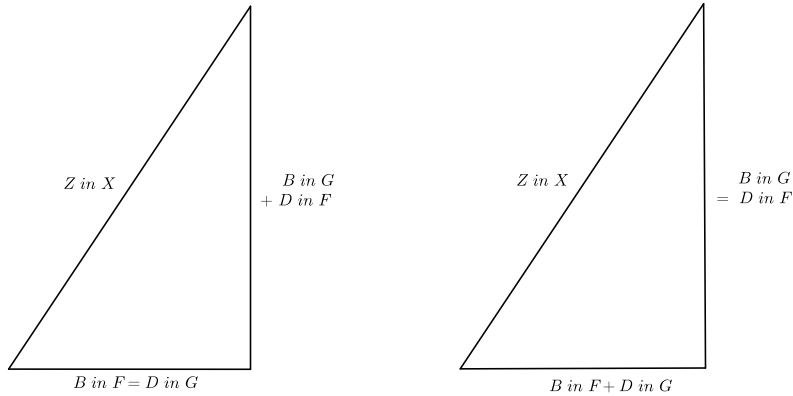
PROPOSITIO XLVI

A duobus triangulis rectangulis tertium triangulum rectangulum effingere.

Sunto triangula rectangula duo. Scilicet,



Fiat tertii hypotenusa similis ei quod fit ex hypotenusa primi in hypotenusam secundi, nempe Z in X . Plana igitur similia basi & perpendicularo ducta quadraticè, facient Z quadratum, in X quadratum, id est per interpretationem, id quod sit ex B quadrato, $+D$ quadrato in G quadratum, $+F$ quadrato: quod factum constat quatuor plano-planis, nempe B quadrato in G quadratum, $+D$ quadrato in F quadratum, & B quadrato in F quadratum, $+D$ quadrato in G quadratum. Binis primis addatur plano-planum duplum quod sit continue abs B, D, F, G , & auferatur binis postremis; vel conversim, auferatur binis primis, & addatur binis postremis. Nihil factis deperiit vel accessit, quominus facta plano-plana, plano-plano ex Z quadr. in X quadratum adæquentur; bina porto illa plano-plana adscito vel dempto bis communi illo plano-plano continue facto abs B, D, F, G , planas habent radices, quarum. Primo casu, prima est B in $G, +D$ in F , altera B in $F = D$ in G , secundo vero casu, prima est B in $G, = D$ in F , altera B in $F, +D$ in G .



Utriusque casus, prima adsimilatur Perpendicularo, secunda basi. Ergo hac vel illa methodo à duobus triangulis rectangulis effingere est tertium triangulum rectangulum. Enim vero hypotenusa tertii fiet similis facto sub hypotenusis primi & secundi, perpendicularum adgregato facti à base primi inperpendicularum secundi, & facti reciproce à base secundi in perpendicularum primi; basis differentiae, inter factum sub basibus primi & secundi, & factum sub eorundem perpendicularis. Vel, perpendicularum adsimilatur differentiae factorum reciproce à base unius perpendicularum alterius basis vero adgregato facti sub basibus, & facti sub perpendicularis. Triangulum autem rectangulum à duobus aliis triangulis rectangulis primo exposito modo deductum, vocetur triangulum sinæreseos, secundo triangulum diæreseos, ob causam suo exprimendam loco. Hinc

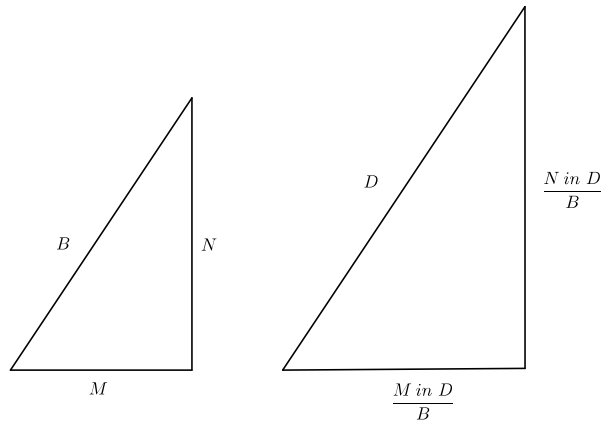
THEOREMA

Si fuerint duo triangula rectangula: quadratum plani quod sit sub hypotenusis, æquatur quadrato adgregati factorum e basibus in perpendiculara reciproce, plus quadrato differentiae inter factum sub basibus & factum sub perpendicularis. Vel etiam, æquatur quadrato differentiae factorum è basibusin perpendiculara reciproce, plus quadrato adgregati facti ssub basibus, & facti sub perpendicularis.

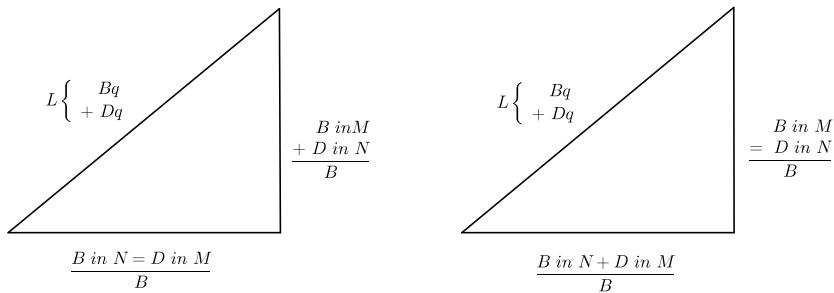
PROPOSITIOXLVII

A duobus triangulis rectangulis similibus, tertium triangulum rectangulum ita deducere, ut hypotenusæ tertii quadratum, æquale sit quadratis hypotenusæ primi, & hypotenusæ primi, & hypotenusæ secundi.

Sint duo similia triangula rectangula. Primum, cuius hypotenusa B , perpendicularum N , basis M . Alteru, cuius hypotenusa D , perpendicularum consequenter $\frac{N \text{ in } D}{B}$, basis $\frac{M \text{ in } D}{B}$.



Oporteat ab illis duobus tertium triangulum rectangulum deducere, ita ut hypotenusæ illius quadratum æquetur B quadrato, $+D$ quadrato. Quoniam igitur hypotenusæ quadratum constat B quadrato, $+D$ quadrato. Tantum erit quadratum perpendiculari adiunctum quadrato basis diducendi trianguli. At si B quadratum, $+D$ quadrato ducatur in M quadr. $+N$ quadrato, & divisio siat per B quadratum, nihil quadrato hypotenusæ diducti accedit vel deperit, quominus M quadratum, $+N$ quadrato æquetur ex hypothesi B quadrato. Fiat igitur ductio, factum certe constabit quatuor plano-planis, nempe B quadrato in M quadratum, $+D$ quadrato in N quadratum, & B quadrato in N quadratum, $+D$ quadrato in M quadratum. Binis primis addatur pano-planum duplum quod sit continue abs B, D, M, N , & auferatur binis postremis, vel conversim, auferatur binis primis, & baddatur binis postremis. Nihil factis accrescit aut deperit quominus facta plano-plana, plano-plano abs B quadrato, $+D$ quadrato in B quadratum æquentur. Bina porro illa plano-plana, adscito vel dempto bis communi illo plano-plano continue facto abs B, D, M, N , planas habent radices, quarum. Primo casu, prima est B in M , $+D$ in N . Altera B in N , $= D$ in M . Secundo vero casu, prima est B in M , $= D$ in N . Altera B in N , $+D$ in M .



Fiat igitur communis ad B applicatio, & utriusvis casus, prima adsimilabitur perpendicularo, secunda basi.

THEOREMA

Si fuerint duo similia triangula rectangula, adgregatum quadratorum ab hypotenusis, æquatur quadrato adgregati ex base primi, & perpendicularo secundi, plus quadrato differentię inter perpendicularum primi, & basin secundi, vel etiam, æquatur quadrato adgregati ex perpendicularo primi & base secundi, plus quadrato differentię inter basin primi & perpendicularum secundi.

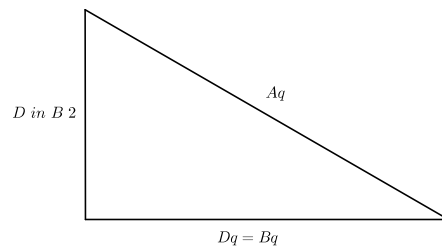
PROPOSITIO XLVIII

A duobus triangulis rectangulis æqualibus & æquiangulis, tertium triangulum birectangulum, constituere.

Sunto duo triangula rectangula, quorum communia latera hypotenusa quidem A , perpendicularum B , basis D . Oporteat ab illis duobus tertium triangulum rectangulum constituere. Fiat deductio sicut docuit Propositio 46. Casu primo. Deduci enim tantum potest synæreseos via, non autem diæreseos. Fit hypotenusa similis A quadrato. Basis, D quadrato = B quadrato. Perpendicularum B in D^2 . Tertium autem illud, vocetur triangulum anguli dupli, & eius respectu primum vel secundum dicitur anguli simpli ob causas* suo ponendas loco.

* *Causa est quod angulum acutum trianguli rectanguli à duobus triangulis via synæreseos effecti aquetur angulis acutis horum triangulorum simul adgregatis, cuius theorematis conversum demonstravit Andersonus theoremate secundo sectionum angularium. Porro acuti voce intelligiter in angulus, cui perpendicularum subtenditur.*

Triangulum anguli dupli.

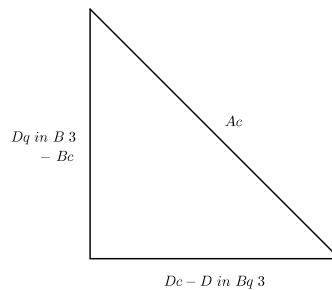


PROPOSITIO XLVIX

A triangulo rectangulo simpli, & triangulo rectangulo anguli dupli, triangulum rectangulum effingere. Vocetur autem tertium illud, triangulum anguli tripli.

Sunto duo triangula rectangula, unum anguli simpli, cuius hypotenusa A , perpendiculum B , basis D . Alterum anguli dupli, cuius consequenter hypotenusa sit similis A quadrato, basis D quadrato $= B$ quadrato, perpendiculum simile plano duplo, ex D in B . Oporteat ab illis duobus triangulis rectangulis, tertium triangulum rectangulum effingere. Fiat deductio, ut docuit Propositio 46. Primo casu. Effingi enim tantum potest synæreseos via, non autem diæreseos. Fit hypotenusa, A cubus. Basis D cubus $-D$ in B quadratum 3. Perpendiculum D quad. In $B^3 - B$ cubo.

Triangulum anguli tripli.

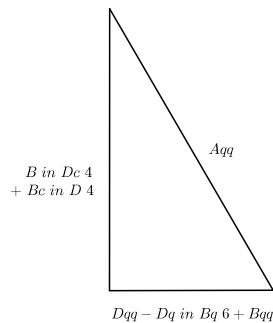


PROPOSITIO L

A triangulo rectangulo anguli simpli, & triangulo rectangulo anguli tripli, tertium triangulum rectangulum constituere. Vocetur autem illud, triangulum anguli quadrupli.

Sunto duo triangula rectangula. Unum anguli simpli, cuius hypotenusa A , perpendiculum B , basis D . Alterum anguli tripli, cuius hypotenusa consequenter fit similis, A cubo. Basis, Dc , $-D$ in Bq^3 . Perpendiculum, simile Dq in B^3 , $-Bc$. Oporteat ab illis tertium triangulum rectangulum constituere. Fiat deductio, ut docuit Propositio 46 casu primo. Fit hypotenusa similis, Aqq . Basis Dqq . $-Dq$ in Bq^6 , $+Bqq$. Perpendiculum B in Dc^4 , $-Bc$ in D^4 .

Triangulum anguli quadrupli.

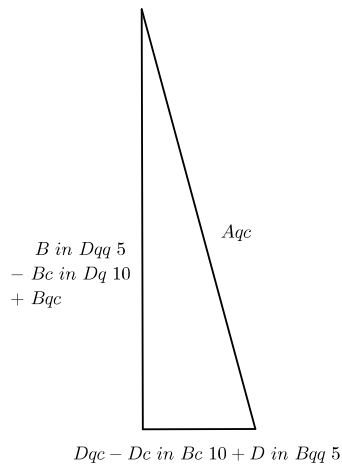


PROPOSITIO LI

A triangulo rectangulo anguli simpli, & triangulo rectangulo anguli quadrupli, tertium triangulum rectangulum via synæreseos, constituere. Vocetur autem illud, anguli quintupli.

Sunto duo triangula rectangula. Unum anguli simpli, cuius hypotenusa A , basis D , perpendicularum B . Alterum anguli quadrupli, cuius hypotenusa consequenter similis A quadrato-quadrato, &c. Oporteat ab illis duobus tertium via synæreseos, constituere. Fiat deductio, ut docuit Propositio 46 casu primo. Fit hypotenusa similis Aqc . Basis Dqc , $-Dc$ in $Bq10$. $+D$ in $Bqq5$.

Triangulum anguli quintupli.



EX HIS ARGUITUR

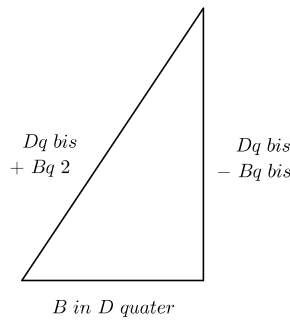
Consectarium generale in diductionibus triangulorum rectangulorum.

Si qua potestas compenatur à binomia radice, & singularia facta homogenea distribuuntur in duas partes successive utrobique primum adfirmata deinde negata, & harum primæ parti similis fiat basis trianguli rectanguli alicuius, perpendicularo alteri. Erit hypotenusa similis ipsi potestati. Cum autem triangulum illud cuius basis similis sit, vel æqualis uni e radicibus compositionis, perpendicularum vero alteri, à suo cui perpendicularum subtenditur angulo, denominationem sortietur. Triangula sane ab iisdem radicibus diducta, per quoscunque potestatum ordines commode ab eodem angulo multiplici denominabuntur, secundum conditionem potestatis. Duplo, videlicet cum potestas est quadratum. Triplo, cum cubus. Quadruplo, cum quadrato-quadratum. Quintuplo, cum quadrato-cubus, & eo in infinitum progresso.

PROPOSITIO LII

Ex adgregato duarum radicum & differentia earundem, triangulum rectangulum, componere.

Sunto duæ radices B , D . Oporteat abs $B + D$, ut nomine uno, & $B = D$ ut nomine altero triangulum rectangulum componere. Hypotenusa igitur ex iam tradita methodo, fiet similis quadrato abs $B + D$, + quadrato abs $B = D$, quæ duo quadrata valent $Bq2$, $+Dq.2$. Basis fiet similis quadrato ex $B + D$ - quadrato ex $B - D$, id est similis fiet B in $D4$. Perpendicularum denique ei quod sit abs $B + D$ in $B - D2$, id est $Bq.2$, $-Dq.2$.



Quod opus in idem recidit, ac si ab ipsis radicibus componeretur lateribus, quæ rectum angulum constituunt permutatis.

CONSECTARIUM

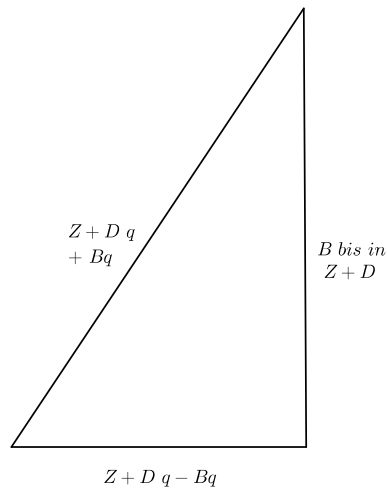
Si componantur duo triangula rectangula, unum à duabus radicibus, alterum ab adgregato earundem & differentia, similia illa sunt, lateribus circa rectum angulum permutatis.

PROPOSITIO LIII

A base constituti trianguli rectanguli, & composita ex hypotenusa, & perpendicularo eiusdem, triangulum rectangulum componere.

Sit triangulum rectangulum cuius hypotenusa Z , basia B , pependiculum D . Oporteat à B & $Z + D$ triangulum rectangulum constituere. Hypotenusa igitur ex solita methodo sit similis B quadrato, + quadrato abs $Z + D$. Basis differentia eorundem quadratorum. Perpendicularo plano duplo ex B in $Z + D$, quo opere bene examinato deprehenditur triangulum illud simile primo. Hoc autem ita demonstrabimus, quoniam à communi multiplicante non immutatur proportio, sumatur $Z2 + D2$, & ducatur tam in B , quam in D . Erit itaque B

ad D , sicut B in Z^2 , $+B$ in D^2 ad D in Z^2 , $+Dq^2$. Est autem Dq æquale $Zq - Bq$. Quare si à quarta magnitudine proportionali auferatur Dq . semel & substituatur $Zq - Bq$ erit quoque B ad D , ut B in Z^2 , $+B$ in D^2 ad $Zq + D$ in Z^2 , $+Dq - Bq$. Sed tertia proportionalis est magnitudo ex ductu ipsius B^2 , in $Z + D$ orta. Æque $Zq + D$ in Z^2 , $+Dq$ est quadratum abs $Z + D$. Ideo erit ut B ad D , ita B bis in Z , $+D$ ad $Z + D$ quadratum, $-Bq$.



Quare cum hæc triangula circa angulum rectum habeant latera proportionalia, erunt æquiangula. Quod demonstrandum erat. Itaque perpendiculum primi ad basin secundi istius trianguli, eandem habet rationem quam basis primi ad perpendiculum secundi.

CONSECTARIUM I

Si à base constituti trianguli rectanguli, & composita ex hypotenusa & perpendiculo, e effingitur alterum triangulum rectangulum, secundum illud simile est primo lateribus permutatis.

CONSECTARIUM II

In triangulis rectangulis est ut composita ex hypotenusa & perpendiculo ad basin, sic adgregatum radicum à quibus compositum est triangulum ad differentiam earundem. Ex collatione Consectarii primi, cum Consectario antecedentis Propositionis. Hoc Consectarium ita quoque potest demonstrari. Resumatur schema Propositionis 45 in qua ex radicibus A & B compositum est triangulum rectangulum. Quoniam itaque proportionem non immutat communis multiplicator, ducatur $A + B$ tam in $A + B$, quam in $A = B$. Erit igitur $Aq + Bq + A$ in B^2 ad $Aq = Bq$ sicut $A + B$ ad $A = B$. Sed $Aq + Bq$ est hypotenusa

trianguli abs $A + B$ compositi. Æque A in B^2 est eiusdem trianguli perpendiculum, & $Aq = Bq$ basis. Quamobrem composita ex hypotenusa & perpendiculo ad basin, est ut adgregatum radicum ad earundem differentiam. Quod erat demonstrandum.

CONSECTARIUM III

In triangulis rectangulis est ut composita ex hypotenusa & perpendiculo multata base ad composita eandem adiunctam basi, ita minor radicum ad maiorem. Per diæresin & sinæresin antecedentis analogiæ. Enimvero per diæresin analogiæ antecedentis Consectarii fit, ut composita ex hypotenusa & perpendiculo multata base ad basin, ita radix minor bis sumpta ad radicum differentiam. Et per sinæresin eiusdem analogiæ ut composita ex hypotenusa perpendiculo & base ad basin, ita radix maior bis sumpta ad radicum differentiam. Et hunc analogismum invertendo, erit ut basis ad compositam ex hypotenusa perpendiculo & base, ita differentia radicum ad radicem maiorem duplam. Quamobrem ex æquo erit, ut composita ex hypotenusa & perpendiculo multata base ad compositam ex hypotenusa & perpendiculo adiunctam basi, ut minor radix ad maiorem. Quod est ipsummet consectarium tertium, cuius Laconice expressa demonstratio erat exemplificanda, quamvis absque antecedentis consectarii auxilio brevius demonstrari possit.

CONSECTARIUM IV

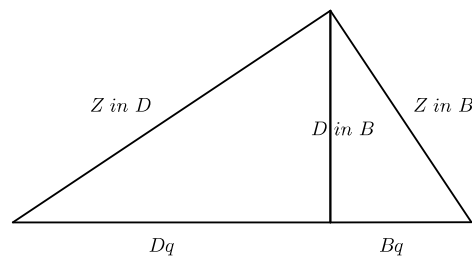
In triangulo rectangulo, ut est composita ex hypotenusa & perpendiculo multata base ad compositam eandem adiunctam basi, ita differentia basis & hypotenusæ ad perpendiculum. Nam differentia basis & hypotenusæ ad perpendiculum se habet, ut minor radicum ad maiorem. Adsumptis enim duabus radicibus B & D , illa minore, hac maiore, cum sit hypotenusa similis B quadrato $+D$ quadrato, basis D quadrato $-B$ quadrato, sit differentia B quadratum bis, perpendiculum vero simile B in D bis. Utrumque planum ad B bis adplicetur, differentia illa ad perpendiculum erit, ut B ad D .

PROPOSITIO LIV

A triangulo rectangulo deducere duo triangula rectangula æque alta, ex quorum coitione quod componetur triangulum æque altum, succedentibus videlicet hypotenusis in vicem crurum, adgregato vero basium in basin, habebit angulum verticis rectum.

In fine huius propositionis ut & sequentium legebantur hæc verba, erit angulum verticis rectus, pro quibus ad delendum in leges Grammaticas peccatum

repositi, habebit angulum verticis rectum. Exponatur triangulum rectangulum cuius hypotenusa Z , basis B , perpendicularum D . Oporteat facere quod imperatur. Abs $Z + D$ ut radice una, & B ut radice altera, effingatur aliud triangulum rectangulum. Hypotenusa sit similis ipsi Z , basis ipsi D , perpendicularum ipsi B . Cui secundo triangulo constituatur aliud simile idem habens perpendicularum D faciens, ut B ad D , ita D ad basin, quæ ideo erit $\frac{D \text{ quadr.}}{B}$ & ita Z ad hypotenusam, quæ erit $\frac{Z \text{ in } D}{B}$. Latera denique tum istius tum expositi ducantur in B . Duo igitur sunt triangula rectangula. Primum cuius hypotenusa Z in B , basis B quadratum, perpendicularum B in D . Alterum cuius hypotenusa Z in D , basis D quadratum, perpendicularum rursus B in D . Coeant in unum illa duo triangula rectangula. Videlicet hypotenusæ fiant crura alterius trianguli, adgregatum basium ipsarum in directum positarum, basis; altitudo igitur manet eadem & proportionalis inter basis segmenta.



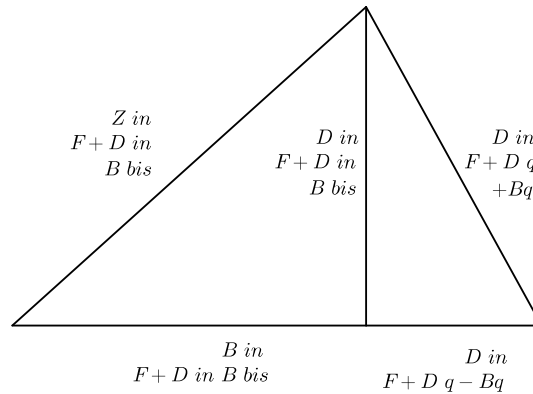
Est enim B in D proportionale inter B quadratum & D quadratum. In figuris autem planis similitudo laterum, ut docet Geometria, arguit æqualitatem angulorum, quare angulus quem subtendit perpendicularum in triangulo primo, æqualis est angulo quem subtendit basis in triangulo secundo. Angulus igitur effectus ab hypotenusis ex coitione est rectus.

PROPOSITIO LV

A triangulo rectangulo deducere duo alia triangula æque alta, ex quorum coitione quod componitur triangulum æque altum, succedentibus videlicet hypotenusis in vicem crurum, adgregato vero basium in basin, habebit angulum verticis acutum.

Exponatur triangulum rectangulum, cuius hypotenusa Z , basis B , perpendicularum D . Oporteat facere quod imperatur. Sumatur quædam F minor ipsa Z , & abs $F + D$ ut radice una, & B ut radice altera, effingatur aliud triangulum rectangulum. Fit hypotenusa, similis quadrato abs $F + D$, $+B$ quadrato. Basis, quadrato abs $F + D$, $-B$ quadrato. Perpendicularum $F + D$ in B bis. Cui secundo

triangulo aliud constituatur simile habens perpendicularum D ; faciendo ut $F + D$ in B bis ad quadratum abs $F + D$, $-B$ quadrato, ita D ad basin, quæ ideo erit $\frac{D \text{ in } F+D \text{ quadr.} - B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B \text{ bis}}$. Et ut $F + D$ in B bis ad quadratum abs $F + D$, $+B$ quadrato, ita D ad hypotenusam, quæ ideo erit $\frac{D \text{ in } F+D \text{ quadr.} + B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B \text{ bis}}$. Latera denique tum istius tum expositi trianguli rectanguli, ducantur in $F + D$ in B^2 . Duonigitur sunt triangula rectangula. Primum cuius similis hypotenusa, Z in $F + D$ in B^2 basis B in $F + D$ in B^2 perpendicularum D in $F + D$ in B^2 . Alterum triangulum cuius similis hypotenusa, D in $F + D$ quadrato $+B$ quadrato basis, D in $F + Dq - B$ quadrato perpendicularum idem ac supra in priore triangulo. Coeant igitur in unum duo illa triangula rectangula, hypotenusæ videlicet fiant crura alterius trianguli, adgregatum basium in directum positarum, basis. Altitudo igitur manet eadem:



Cæterum, ut basis primi ad altitudinem, ita altitudo ad maiorem base secundi. Est enim

- Ut B in $F + D$ in B^2 ad D in $F + D$ in B^2 , ita D in $F + D$ in B^2 ad D cubum 2, $+D$ quadrato in F^2 . Basis autem secundi similis est, D in $F + D$ quadrato $-B$ quadrato hoc est F quadratum in D , $+D$ quadrato in $F^2, +D$ cubo, $-B$ quadrato in D . Utrunque abdicatur F in D quadratum 2, & addatur B quadratum in D . Reliqua denique solida dividantur per D . Illic remanet D quadratum, $+Z$ quadrato, hic D quadratum, $+F$ quadrato. Cedit autem per hypothesin, F quadratum ipsi Z quadrato. Est igitur altitudo proportionalis inter basin primi, & maiorem base secundi. Quare angulus quem subtendit basis secundi, minor est eo quem subtendit perpendicularum primi. Angulus itaque effectus ab hypotenusis seu cruribus est acutus. Igitur à triangulo rectangulo deducta sunt duo triangula rectangula æque alta, à quorum coitione quod componitur triangulum æque altum, succedentibus videlicet hypotenusis in vicem crurum,

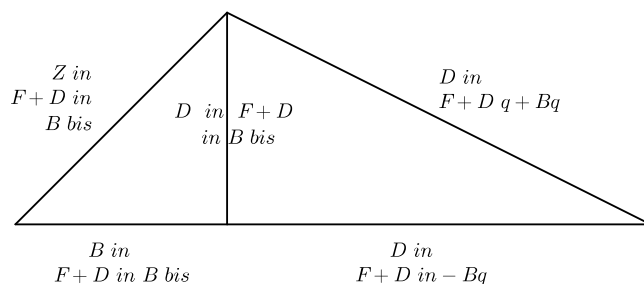
adgregato vero basium in basin, habebit angulum verticis acutum. Apparet autem talem F assumi oportere, ut quadratum abs $F + D$ præstet ipsi B quadrato, ut ad constitutionem basis secundi, B quadratum ex quadrato abs $F + D$ possit auferri.

- Quoniam enim ut B in $F + D$, ad D in $F + D$, ita esse B in $F + D$ ad D in $F + D$, luce clarius est. Tam prima quam secunda proportionalis magnitudo, ducatur in B^2 . Tertia vero & quarta ducatur in D^2 . Erit itaque ut B in $F + D$ in B^2 ad D in $F + D$ in B^2 , ita B in $F + D$ in D^2 ad D quadratum 2 in $F + D$. Sed B in $F + D$ in D^2 , æquatur D in $F + D$ in B^2 . Æque D quadratum 2 in $F + D$, non differt à D cubo 2, $+D$ quadrato in F^2 . Quamobrem ut B in $F + D$ in B^2 ad D in $F + D$ in B^2 , ita D in $F + D$ in B^2 ad D cubum 2, $+D$ quadrato in F^2 . Quod quidem à viro clarissimo adsumptum erat.

PROPOSITIO LVI

A triangulo rectangulo deducere duo alia triangula æque alta, ex quorum coitione quod conflatur triangulum æque altum, succedentibus videlicet hypotenusis in vicem crurum, adgregato vero basium in basin, habebit angulum verticis obtusum.

Exponatur triangulum rectangulum, cuius hypotenusa Z , basis B , perpendicularum D . Oporteat facere quod imperatur. Sumatur F maior ipsa Z , & abs $F + D$ ut radice una, & B ut radice altera, effingatur aliud triangulum rectangulum. Itaque fit similis hypotenusa $F + D$ quadrato, $+B$ quadrato. Basis vero $F + D$ quadrato, $-B$ quadrato. Perpendicularum $F + D$ in B^2 . Cui secundo triangulo rectangulo aliud constituatur simile, cuius perpendicularum sit D , faciendo. Ut $F + D$ in B^2 $\frac{D \text{ in } F+D \text{ quadr.} - B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B^2}$. Et ut $F + D$ in B^2 ad quadratum ex $F + D + B$ quadrato, ita D ad hypotenusam, quæ ideo erit $\frac{D \text{ in } F+D \text{ quadrat.} + B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B^2}$. Latera denique tum istius tum expositi trianguli rectanguli, ducantur in $F + D$ in B^2 . Duo igitur sunt triangula rectangula. Primum cuius similis hypotenusa, Z in $F + D$ in B^2 , basis B in $F + D$ in B^2 perpendicularum D in $F + D$ in B^2 . Secundum, cuius similis hypotenusa D in $F + D$ quadrato $+B$ quadrato. Basis D in $F + D -$ quadrato $-B$ quadrato. Perpendicularum idem ac supra in priori triangulo rectangulo. Coeant igitur in unum duo triangula rectangula, hypotenusæ videlicet fiant crura alterius trianguli, adgregatum vero basium in directum positarum, basis. Altitudo igitur manet eadem:



Cæterum, ut basis primi ad altitudinem, ita altitudo ad minorem base secundi.

Est enim

Ut $B \text{ in } F + D \text{ in } B^2$ ad $D \text{ in } F + D \text{ in } B^2$; ita eadem magnitudo ad D cubum 2, $+D$ quadrato in F^2 . At ipsa basis secundi similis est $D \text{ in } F + D$ quadratum, $-B$ quadrato; hoc est, F quadratum in D , $+D$ cubo, $+D$ quadrato in F^2 , $-B$ quadrato in D . Utrinque abdicatur $F \text{ in } D$ quadratum 2, & addatur B quadratum in D . Reliquia denique solida dividantur per D . Illic remanet D quadratum, $+Z$ quadrato. Hic D quadratum, $+F$ quadrato. Præstat autem per hypothesin F , ipsi Z . Est igitur altitudo proportionalis inter basim primi, & minorem base secundi. Itaque angulus quem subtendit basis secundi, maior est eo quem subtendit perpendiculum primi. Angulus itaque effectus ab hypotenusis seu cruribus est obtusus. Quod faciendum est.

FINIS NOTARUM PRIORUM.

NOTÆ PRIORES

Traduzione e commento

LE regole fondamentali della logistica speciosa, di addizione, di sottrazione, di moltiplicazione e di divisione sono già state esposte nel quarto capitolo delle *Isagoge*², tuttavia è necessario chiarire ulteriormente alcune nozioni e circostanze comuni in cui ci si può imbattere, utilizzando la nuova logistica; pertanto le seguenti proposizioni vanno intese come strumenti nelle mani di colui che decide di operare con la logistica speciosa.³

PROPOSIZIONE I.

Date tre grandezze mostrare la quarta proporzionale.

Si considerino tre grandezze, la prima, la seconda e la terza. Si vuole trovare la quarta proporzionale.

Moltiplicando la prima grandezza per la seconda, poi dividendo il loro prodotto per la terza, si ottiene la quarta grandezza cercata, in questo caso detta anche *parabola*⁴. Si può affermare con certezza che le quattro grandezze sono in proporzione, infatti il prodotto della prima per la quarta, corrisponde proprio alla

²Vedi p. 4 di [18] oppure p. 9.

³«Exponentur tres magnitudines, Prima, Secunda, & Tertia. Oportet exhibere Quartam proportionalem. Ducatur Secunda in Tertiam, & factum adplicetur ad Primam. Dico igitur magnitudinem ex ea adplicatione oriundam, seu aliter, parabolam esse Quartam proportionalem. Prima enim illa ducatur in Quartam, fiet idipsum quod ex Secunda in Tertiam. Itaque sunt proportionales. Sint igitur magnitudines» p. 13 di [18].

Letteralmente: «I quattro precetti della logistica speciosa sono esposti nelle *Isagoge*. Per concludere però è meglio chiarire alcune situazioni comuni, in cui ci si può imbattere, e sottolineare quando si possono adottare delle scorciatoie, in modo che il Logista fin dal principio non sia trattenuto da queste difficoltà o da problemi simili. Per cui le affermazioni che seguono sono di questa natura.»

⁴La quarta grandezza proporzionale infatti è stata ottenuta mediante la divisione per un termine noto, cioè si è applicato il *parabolismo*. Vedi Glossario p. 22 o pp. 9-10 di [18].

moltiplicazione della seconda per la terza.⁵

Grandezze			
Prima	Seconda	Terza	Quarta
A	B	G	$\frac{B \text{ in } G}{A}$
$\frac{A \text{ quadrato}}{D}$	B	G	$\frac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ quadrato}}$
$\frac{A \text{ cubo}}{D \text{ piano}}$	$\frac{B \text{ quadrato}}{Z}$	G	$\frac{B \text{ quadrato in } G \text{ in } D \text{ piano.}}{Z \text{ in } A \text{ cubo}}$

Esempio

Date le grandezze A , B , G , si vuole trovare la quarta proporzionale.

$$A : B = G : X.$$

Applicando la proprietà fondamentale delle proporzioni si ha che:

$$B \text{ in } G = A \text{ in } X.$$

Quindi dividendo per A entrambi i membri, cioè applicando un *ipobibismo*, si ottiene la quarta grandezza proporzionale o parabola:

$$\frac{B \text{ in } G}{A}.$$

n.c.

PROPOSIZIONE II.

Date due grandezze mostrare la terza, la quarta, la quinta proporzionale e così via all'infinito.

Consideriamo due grandezze A e B . Si vuole trovare la terza, la quarta, la quinta proporzionale e così via:

⁵Vengono soddisfatte completamente le ipotesi della quindicesima regola del capitolo II delle Isagoge, detta anche proprietà fondamentale delle proporzioni, che afferma: « si fuerint tres quatuorve magnitudines, quod autem fit sub extremis terminis æquale est ei quod fit a medio inse, vel submediis, sunt proportionales»; ovvero tre o quattro grandezze sono proporzionali se il risultato del prodotto degli estremi è uguale al prodotto del medio per se stesso o al prodotto dei medi:

$$AD = BC \implies A : B = C : D,$$

$$AC = B^2 \implies A : B = B : C.$$

$$\begin{array}{ll}
A : B = B : \frac{B \text{ quadrato}}{A} & \text{Terza proporzionale: } \frac{B \text{ quadrato}}{A} \\
A : B = \frac{B \text{ quadrato}}{A} : \frac{B \text{ cubo}}{A \text{ quadrato}} & \text{Quarta proporzionale: } \frac{B \text{ cubo}}{A \text{ quadrato}} \\
A : B = \frac{B \text{ cubo}}{A \text{ quadrato}} : \frac{B \text{ quad-quad}}{A \text{ cubo}} & \text{Quinta proporzionale: } \frac{B \text{ quad-quad}}{A \text{ cubo}}
\end{array}$$

[Per trovare la terza, la quarta e la quinta grandezza proporzionale, si considerano le grandezze in proporzione continua per poi applicare la *Proposizione I*: per individuare la terza grandezza proporzionale basta considerare che

$$A : B = B : X,$$

da cui segue, applicando la proposizione precedente, che $X = \frac{B \text{ quadrato}}{A}$.

Lo stesso vale per la quarta e la quinta grandezza proporzionale, che si ricavano allo stesso modo.⁶

$$\begin{array}{l}
B : \frac{B \text{ quadrato}}{A} = \frac{B \text{ quadrato}}{A} : Y \quad \text{da cui} \quad Y = \frac{B \text{ cubo}}{A \text{ quadrato}} \\
\frac{B \text{ quadrato}}{A} : \frac{B \text{ cubo}}{A \text{ quadrato}} = \frac{B \text{ cubo}}{A \text{ quadrato}} : Z \quad \text{da cui} \quad Z = \frac{B \text{ quad-quad}}{A \text{ cubo}}.]\text{n.c.}
\end{array}$$

CONSEGUENZA

Se si considera una serie di grandezze in proporzione continua

$$[A : B = B : \frac{B^2}{A} = \frac{B^2}{A} : \frac{B^3}{A^2} = \frac{B^3}{A^2} : \frac{B^4}{A^3} = \frac{B^4}{A^3} : \frac{B^5}{A^4} = \dots]\text{n.c.}$$

risulta che:

la prima sta alla terza come il quadrato della prima sta al quadrato della seconda

$$A : \frac{B^2}{A} = A^2 : B^2, \quad (2.1)$$

la prima sta alla quarta come il cubo della prima sta al cubo della seconda

$$A : \frac{B^3}{A^2} = A^3 : B^3, \quad (2.2)$$

la prima sta alla quinta come il quadrato-quadrato della prima sta al quadrato-quadrato della seconda

$$A : \frac{B^4}{A^3} = A^4 : B^4, \quad (2.3)$$

⁶Se si considerano quattro grandezze in proporzione continua, di cui sono note solo la prima e la quarta, mediante la *Proposizione II* è possibile esprimere univocamente in funzione degli estremi le altre due grandezze:

$$A : G = G : D = D : B \implies A : G = G : \frac{G^2}{A} = \frac{G^2}{A} : B \implies G = \frac{G^4}{A^2 B}, \text{ cioè } G^3 = A^2 B.$$

Si può quindi concludere che $G = \sqrt[3]{A^2 B}$ e $H = \sqrt[3]{A B^2}$.

e così via all'infinito in questo ordine. Ciò si può dimostrare ricordando che una proporzione non viene alterata dalla moltiplicazione per un fattore comune, infatti il secondo membro di (2.1) si ottiene proprio moltiplicando per A entrambi i termini del primo membro; si procede analogamente per (2.2) e (2.3). I rapporti inoltre variano a seconda della potenza corrispondente, si dice che il rapporto è “doppio”, cioè moltiplicato per se stesso due volte, quando la potenza è un quadrato, si dice “triplo” in presenza del cubo e così via.

PROPOSIZIONE III.

Dati due quadrati individuare il loro medio proporzionale.

Si considerino due quadrati A^2 e B^2 . Si vuole trovare il medio proporzionale fra loro.

Dati A e B e individuato il terzo proporzionale si ha che

$$A : B = B : \frac{B^2}{A},$$

quindi moltiplicando per A i prodotti rimarranno tra loro proporzionali:

$$A^2 : (A \text{ in } B) = (A \text{ in } B) : B^2.$$

Il medio proporzionale fra A^2 e B^2 sarà quindi $B \text{ in } A$.

PROPOSIZIONE IV.

Dati due cubi mostrare i due medi in proporzione continua.

Si considerino due cubi A^3 e B^3 . Si vogliono trovare i due medi in proporzione continua. Dati A e B e individuati il terzo e il quarto proporzionale, mediante la *Proposizione II*, si ha che

$$A : B = \frac{B^2}{A} : \frac{B^3}{A^2},$$

quindi moltiplicando per A^2 i prodotti rimarranno tra loro proporzionali:

$$A^3 : (A^2 \text{ in } B) = (A \text{ in } B^2) : B^3.$$

Il terzo e il quarto proporzionale fra A^3 e B^3 saranno quindi $(A^2 \text{ in } B)$ e $(A \text{ in } B^2)$.

Detto ciò si possono formulare considerazioni più generali.

CONSEGUENZA

Fra due qualsiasi potenze dello stesso grado, si trovano tanti medi in proporzione continua quante sono le potenze di grado inferiore rispetto agli estremi. [Infatti

fra i due estremi di grado n , il secondo medio proporzionale è rappresentato dal prodotto del primo estremo elevato alla $(n - 1)$ per il secondo, il terzo proporzionale invece è il prodotto del primo estremo elevato alla $(n - 2)$ per il quadrato del secondo e così via. Ne risulta quindi la seguente proporzione, che ha per estremi due grandezze di grado n ed $(n - 1)$ medi in proporzione continua:

$$A^n : (A^{n-1} \text{ in } B) = (A^{n-1} \text{ in } B) : (A^{n-2} \text{ in } B^2) = \dots = (A \text{ in } B^{n-1}) : B^n.]\text{n.c.}$$

PROPOSIZIONE V

Dati due numeri mostrare un numero a piacere di medi in proporzione continua.

[Alla luce della conseguenza precedente, per individuare n medi in proporzione continua, una volta fissate due grandezze, basta considerare tutti gli n medi della proporzione che ha per estremi le due grandezze elevate alla $(n + 1)$.]n.c. Per esempio, date due grandezze A e B , se si vogliono trovare quattro medi in proporzione continua ad esse, occorre elevare A e B alla potenza quadrato-cubo. Così fra A^5 e B^5 si possono determinare tanti medi quanti sono i gradi inferiori al quadrato-cubo, cioè 4:

Primo termine:	A quadrato – cubo	A^5
Secondo termine:	A quadrato – quadrato in B	A^4B
Terzo termine:	A cubo in B quadrato	A^3B^2
Quarto termine:	A quadrato in B cubo	A^2B^3
Quinto termine:	B quadrato – cubo	B^5

Ora ciò che è proporzionale alla potenza , è proporzionale anche alla radice nel modo seguente:

Primo termine:	A	A
Secondo termine:	Radice quinta di (A quadrato – quadrato in B)	$\sqrt[5]{A^4B}$
Terzo termine:	Radice quinta di (A cubo in B quadrato)	$\sqrt[5]{A^3B^2}$
Quarto termine:	Radice quinta di (A quadrato in B cubo)	$\sqrt[5]{A^2B^3}$
Quinto termine:	B	B

PROPOSIZIONE VI.

Aggiungere alla somma di due grandezze la loro differenza.

Siano aggiunte $(A + B)$ e $(A - B)$: la loro somma sarà $2A$.

$$(A + B) + (A - B) = A + B + A - B = (A + A) + (B - B) = 2A.$$

TEOREMA⁷

L'addizione della somma di due grandezze e della loro differenza è uguale al doppio della grandezza maggiore.⁸

PROPOSIZIONE VII.

Sottrarre alla somma di sue grandezze la loro differenza.

Sia sottratta $(A - B)$ da $(A + B)$: la loro differenza sarà $2B$.

$$(A + B) - (A - B) = A + B - A + B = (A - A) + (B + B) = 2B.$$

TEOREMA

La sottrazione della differenza di due grandezze dalla loro somma è uguale al doppio della grandezza minore.

PROPOSIZIONE VIII.

Sottrarre i resti relativi a due decrementi diversi della stessa grandezza.

Sia sottratta, per esempio, $(A - E)$ da $(A - B)$: il resto sarà $(E - B)$.

$$(A - B) - (A - E) = A - B - A + E = (A - A) + (E - B) = (E - B).$$

Ciò che si ottiene è la differenza delle due contrazioni.

TEOREMA

La sottrazione dei resti relativi a due decrementi diversi della stessa grandezza, corrisponde alla differenza di quegli stessi decrementi.

PROPOSIZIONE IX.

Sottrarre le somme relative a due incrementi diversi della stessa grandezza.

Sia sottratta, per esempio, $(A + B)$ da $(A + G)$: il resto sarà $(G - B)$.

$$(A + G) - (A + B) = A + G - A - B = (A - A) + (G - B) = G - B.$$

Ciò che si ottiene è la differenza dei due incrementi.

⁷È importante osservare che la *Proposizione* appartiene alla fase dell'analisi, mentre il *Teorema*, secondo il metodo viëtiano, corrisponde alla fase della sintesi.

⁸Occorre ricordare che con il simbolo $-$ Viète indica la sottrazione della grandezza minore dalla maggiore; con il simbolo $=$ invece indica il valore assoluto di una differenza, cioè esso viene impiegato nel caso in cui si esegua la differenza di due grandezze senza però sapere quale sia la maggiore e quale la minore.

TEOREMA

La sottrazione delle somme relative a due incrementi diversi della stessa grandezza, corrisponde alla differenza di quegli stessi incrementi.

PROPOSIZIONE X.

Sottrarre il resto relativo al decremento di una grandezza dalla somma risultante da un incremento di quella stessa grandezza.

Sia sottratto $(A - B)$ da $(A + G)$: il resto sarà $(G + B)$.

$$(A + G) - (A - B) = A + G - A + B = (A - A) + (G + B).$$

Ciò che si ottiene è la somma dell'incremento e del decremento.

TEOREMA

La sottrazione del resto relativo al decremento di una grandezza dalla somma risultante da un incremento di quella stessa grandezza, corrisponde alla somma del decremento e dell'incremento.

PROPOSIZIONE XI.

Ottenere⁹ una potenza pura da una radice binomia.

Si consideri la radice binomia $(A + B)$, si vuole ottenere da questa una potenza pura.

La prima potenza è il **quadrato**.

Poichè un "lato" moltiplicato per se stesso restituisce un quadrato, moltiplicando $(A + B)$ per $(A + B)$ si ha che¹⁰

$$(A + B)(A + B) = (A + B)^2 = (A^2 + 2AB + B^2).$$

La seconda potenza è il **cubo**.

Poichè un "lato" moltiplicato per il suo quadrato restituisce un cubo, moltiplicando $(A + B)$ per $(A + B)^2$ si ha che¹¹

$$(A + B)(A + B)^2 = (A + B)^3 = (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3).$$

⁹Il verbo *ottenere* traduce il termine *comporre*, che in questo contesto significa sommare, sottrarre espressioni algebriche a grandezze o uguagliare grandezze ad espressioni algebriche.

¹⁰Viète scrive sempre le equazioni come relazioni ed uguaglianze geometriche:
«[...] *A quadratum + A in B bis + B quadratum. Quæ ideo æquabuntur (A+B) quadrato.*»
vedi p. 16 di [18].

¹¹«[...] *A cubus, +A quadrato in B ter, +A in B quadrato ter, +B cubo. Quæ ideo æquabuntur cubo ex (A + B).*» vedi p. 17 di [18].

La terza potenza è il “**quadrato-quadrato**”.

Poichè un “lato” moltiplicato per il suo cubo restituisce un “quadrato-quadrato”, moltiplicando $(A + B)$ per $(A + B)^3$ si ha che¹²

$$(A + B)(A + B)^3 = (A + B)^4 = (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4).$$

La quarta potenza è il “**quadrato-cubo**”.

Poichè un “lato” moltiplicato per il suo “quadrato-quadrato” restituisce un “quadrato-cubo”, moltiplicando $(A + B)$ per $(A + B)^4$ si ha che¹³

$$(A + B)(A + B)^4 = (A + B)^5 = (A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5).$$

La quinta potenza è il “**cubo-cubo**”.

Poichè un “lato” moltiplicato per il suo “quadrato-cubo” restituisce un “cubo-cubo”, moltiplicando $(A + B)$ per $(A + B)^5$ si ha che¹⁴

$$(A + B)(A + B)^5 = (A + B)^6 = (A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6).$$

Allo stesso modo si procede per individuare le altre potenze.¹⁵ Da questi risultati segue una serie di teoremi universali.

TEOREMA
Genesis del quadrato.

Dati due lati: il quadrato del primo, più il doppio prodotto dei due, più il quadrato del secondo equivale al quadrato della somma dei due lati.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A^2 + 2AB + B^2) = (A + B)^2,$$

risultante dal prodotto di $(A + B)$ per se stesso.

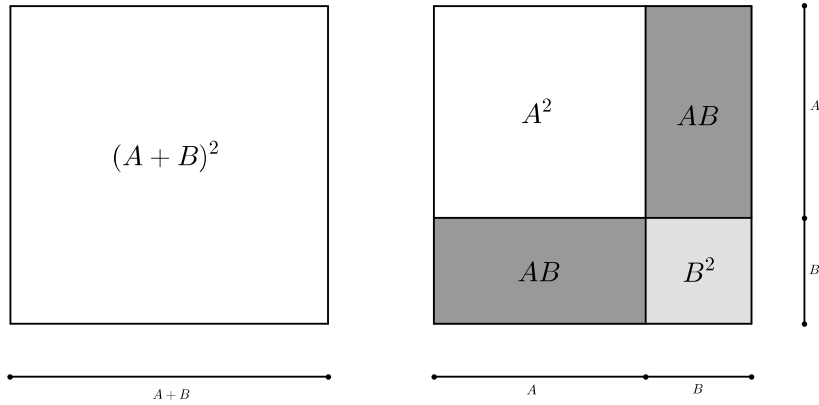
¹²«[...] *A quadrato-quadratum, +A cubo in B quater, +A quadrato in B quadratum sexies, +A in B cubum quater, +B quadrato-quadrato. Quæ ideo æquabuntur quadrato-quadrato ex (A + B).*» vedi p. 17 di [18].

¹³«[...] *A quadrato-cubus, +A quadrato-quadrato in B 5, +A cubo in B quadratum 10, +A quadrato in B cubum 10, +A in B quadrato-quadratum 5, +B quadrato-cubo. Quæ ideo æquabuntur quadrato-cubo ex (A + B).*» vedi p. 17 di [18].

¹⁴«[...] *A cubo-cubus, +A quadrato-cubo in B 6, +A quadrato-quadrato in B quad. 15, +A cubo in B cubum 20, +A quadrato in B quadrato-quadratum 15, +A in B quadrato-cubum 6, +cubo-cubo. Quæ ideo æquabuntur cubo-cubo ex (A + B).*» vedi p. 17 di [18].

¹⁵«NEC dissimilis erit ulteriorum quarumcumque potestatum synthesis.» vedi p. 17 di [18].
L'espressione *potestatum synthesis* letteralmente significa “collezione di potenze di genere analogo”.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$



n.c.

TEOREMA

Genesi del cubo.

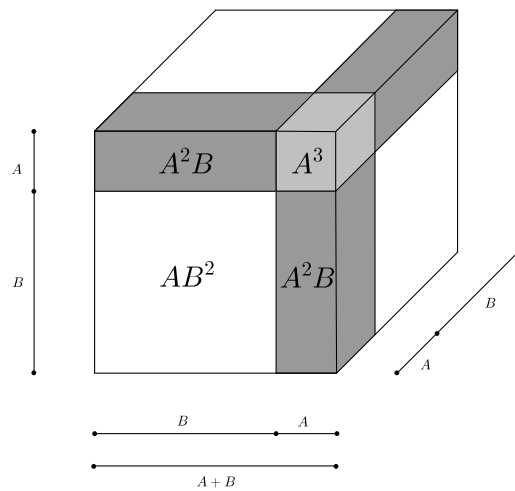
Dati due lati: il cubo del primo, più il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, più il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, più il cubo del secondo equivale al cubo della somma dei due lati.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) = (A + B)^3,$$

risultante dal prodotto di $(A + B)$ per $(A + B)^2 = (A^2 + 2AB + B^2)$.

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$



n.c.

TEOREMA

Genesis del "quadrato-quadrato".

Dati due lati: il "quadrato-quadrato" del primo, più il quadruplo del cubo del primo per il secondo, più sei volte il quadrato del primo per il quadrato del secondo, più il quadruplo del primo per il cubo del secondo, più il "quadrato-quadrato" del secondo equivale al "quadrato-quadrato" della somma dei due lati.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) = (A + B)^4,$$

risultante dal prodotto di $(A + B)$ per $(A + B)^3 = (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)$.

TEOREMA

Genesis del "quadrato-cubo".

Dati due lati: il "quadrato-cubo" del primo, più il quintuplo prodotto fra il "quadrato-quadrato" del primo per il secondo, più dieci volte il prodotto del cubo del primo per il quadrato del secondo, più dieci volte il prodotto del quadrato del primo per il cubo del secondo, più il quintuplo prodotto del primo per il "quadrato-quadrato" del secondo, più il "quadrato-cubo" del secondo equivale al "quadrato-cubo" della somma dei due lati.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5) = (A + B)^5.$$

risultante dal prodotto di $(A + B)$ per $(A + B)^4 = (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4)$.

TEOREMA

Genesis del "quadrato-cubo".

Dati due lati: il "cubo-cubo" del primo, più sei volte il prodotto del "quadrato-cubo" del primo per il secondo, più quindici volte il prodotto del "quadrato-quadrato" del primo per il quadrato del secondo, più venti volte il prodotto del cubo del primo per il cubo del secondo, più quindici volte il quadrato del primo per il "quadrato-quadrato" del secondo, più sei volte il primo per il "quadrato-cubo" del secondo, più il "cubo-cubo" del secondo equivale al "cubo-cubo" della somma dei due lati.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6) = (A + B)^6.$$

risultante dal prodotto di $(A + B)$ per $(A + B)^5 = (A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5)$.

Quando invece si vuole ottenere una potenza dalla differenza di due lati e non dalla loro somma, si devono considerare tutti quanti i termini omogenei individuati precedentemente, alternando il segno $+$ e il segno $-$, partendo dalla potenza del lato maggiore, quando il numero degli omogenei è pari, quando invece è dispari, partendo dalla potenza del lato maggiore oppure dalla potenza del lato minore. [Riassumendo:

n	Coefficienti dello sviluppo della potenza di binomio:							$(A + B)^n$
0				1				$(A + B)^0$
1				1	1			$(A + B)^1$
2			1	2	1			$(A + B)^2$
3		1	3	3	1			$(A + B)^3$
4		1	4	6	4	1		$(A + B)^4$
5	1	5	10	10	5	1		$(A + B)^5$
6	1	6	15	20	15	6	1	$(A + B)^6$

Sviluppo della potenza di binomio: $(A + B)^n$

$(A + B)^0$	1	
$(A + B)^1$	$A + B$	
$(A + B)^2$	$A^2 + 2AB + B^2$]n.c.
$(A + B)^3$	$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$	
$(A + B)^4$	$A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$	
$(A + B)^5$	$A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$	
$(A + B)^6$	$A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6$	

CONSEGUENZA

I singoli elementi omogenei della combinazione, dai quali è costituito lo sviluppo della potenza di binomio, presi nell'ordine mostrato sono in proporzione continua e ciò si deduce facilmente dalla *consequenza* relativa alla *Proposizione IV*. Pertanto risultano proporzionali ai due lati A e B :¹⁶

- i tre *piani*: A^2 , AB e B^2 ;

¹⁶« Sic sunt proportinalia a duobus lateribus A & B effecta tria Plana. A quadratum, A in B, B quadratum. Nec non & quatuor solida; A cubus, A quadratum in B, A in B quadratum, B cubus. Pari jure & quinque plano-plana; A quadrato-quadratum, A cubus in B, A quadratum in B, A in B cubum, B quadrato-quadratum. Et proportinalia sex plano-solidi; A quadrato-cubus, A quadrato-quadratum in B, A cubus in B quadratum, A quadratum in B cubus,

- i quattro *solidi*: A^3, A^2B, AB^2, B^3 ;
- i cinque “*piani-piani*”: $A^4, A^3B, A^2B^2, AB^3, B^4$;
- i sei “*piani-solidi*”: $A^5, A^4B, A^3B^2, A^2B^3, AB^4, B^5$;
- i sette “*solidi-solidi*”: $A^6, A^5B, A^4B^2, A^3B^3, A^2B^4, AB^5, B^6$.

PROPOSIZIONE XII

Sommare il quadrato della somma di due lati al quadrato della loro differenza.

Siano A e B due lati, si vuole sommare il quadrato di $(A + B)$ al quadrato di $(A = B)^{17}$, ovvero al quadrato di $|A - B|$.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{e} \quad |A - B|^2 = A^2 - 2AB + B^2,$$

da cui

$$(A + B)^2 + (A - B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 + A^2 - 2AB + B^2 = 2A^2 + 2B^2.$$

Ciò che si ottiene è la somma del doppio dei quadrati di A e di B .

TEOREMA

Il quadrato della somma di due lati più il quadrato della loro differenza equivale alla somma del doppio dei quadrati.

PROPOSIZIONE XIII

Sottrarre al quadrato della somma di due lati il quadrato della loro differenza.

Siano A e B due lati, si vuole sottrarre $|A - B|^2$ da $(A + B)^2$.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{e} \quad |A - B|^2 = A^2 - 2AB + B^2,$$

da cui

$$(A + B)^2 - (A - B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 - A^2 + 2AB - B^2 = 4AB.$$

Ciò che risulta è il quadruplo del prodotto di A e B .

A in B quadrato-quadratum, B quadrato-cubum. Et proportinalia denique continue septem solido-solida; A cubo-cubus, A quadrato-cubus in B, A quadrato-quadratum in B quadratum, A cubus in B cubum, A quadratum in B quadrato-quadratum, A in B quadrato-cubum, B cubo-cubus. Et sre deinceps.» vedi p. 19 di [18].

¹⁷Con il simbolo $=$ (nella traduzione per evitare ambiguità $==$) Viète indica il valore assoluto, quindi scrivere $(A = B)$ equivale a $|A - B|$. Viene utilizzato questo simbolo quando non si esplicita quale delle due grandezze sia la maggiore o la minore.

TEOREMA

Il quadrato della somma di due lati meno il quadrato della loro differenza equivale a quattro volte il prodotto dei due lati.

CONSEGUENZA

Un piano formato da due lati è uguale al quadrato della metà della loro somma:

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2. \quad (2.4)$$

[Utilizzando il teorema precedente e poi dividendo per 4 entrambi i membri di (2.4) si ottiene:

$$\frac{(A+B)^2}{4} - \frac{(A-B)^2}{4} = \frac{4AB}{4} \implies \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 = AB. \quad (2.5)$$

Si presentano le seguenti situazioni:

1. $\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 > AB$ e $\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - AB = \left(\frac{A-B}{2}\right)^2$;
2. $A = B$.

Perciò se supponiamo $A = B$, (2.5) diventa

$$\left(\frac{A+A}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-A}{2}\right)^2 = A^2$$

cioè $A^2 = A^2$. Si può concludere che condizione necessaria affinché sia soddisfatta (2.4) è che A sia uguale a B .]n.c.

PROPOSIZIONE XIV

Moltiplicare la differenza di due lati per la loro somma.

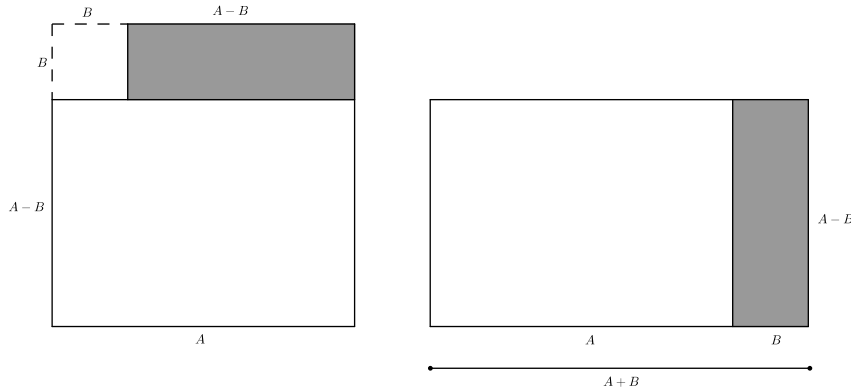
Sia A il lato maggiore e B quello minore. Si consideri il prodotto di $(A - B)$ per $(A + B)$:

$$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - AB + B^2 = A^2 - B^2.$$

TEOREMA

Ciò che risulta dal prodotto della differenza di due lati e della loro somma è la differenza dei quadrati.

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$



$$\text{Area : } A^2 - B^2$$

$$\text{Area : } (A + B)(A - B)$$

n.c.

CONSEGUENZA

Dal momento che la divisione “disfa” ciò che la moltiplicazione produce

- se si divide $(A^2 - B^2)$ per $(A - B)$ si ottiene $(A + B)$:

$$\left[\frac{(A^2 - B^2)}{(A - B)} = \frac{(A - B)(A + B)}{(A - B)} = (A + B). \right] \text{n.c.}$$

- se si divide $(A^2 - B^2)$ per $(A + B)$ si ottiene $(A - B)$:

$$\left[\frac{(A^2 - B^2)}{(A + B)} = \frac{(A - B)(A + B)}{(A + B)} = (A - B). \right] \text{n.c.}$$

PROPOSIZIONE XV

Sommare il cubo della somma di due lati al cubo della loro differenza.

Siano A e B due lati. Si vuole sommare $(A + B)^3$ a $|A - B|^3$.

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

$$|A - B|^3 = \begin{cases} A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 & \text{[se } A > B \\ B^3 - 3B^2A + 3BA^2 - A^3 & \text{se } B > A] \text{n.c.} \end{cases}$$

perciò

$$(A + B)^3 + |A - B|^3 = \begin{cases} 2A^3 + 6AB^2 & \text{[se } A > B \\ 2B^3 + 6BA^2 & \text{se } B > A.] \text{n.c.} \end{cases}$$

TEOREMA

Il cubo della somma di due lati più il cubo della loro differenza è uguale al doppio del cubo del lato maggiore più sei volte il solido prodotto dal lato maggiore e dal quadrato del lato minore.

PROPOSIZIONE XVI

Sottrarre al cubo della somma di due lati il cubo della loro differenza.

Siano A e B due lati. Si vuole sottrarre $|A - B|^3$ da $(A + B)^3$.

$$[(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

$$|A - B|^3 = \begin{cases} A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 & \text{se } A > B \\ B^3 - 3B^2A + 3BA^2 - A^3 & \text{se } B > A \end{cases}$$

perciò]n.c.

$$(A + B)^3 - |A - B|^3 = \begin{cases} 6A^2B + 2B^3 & \text{[se } A > B \\ 6B^2A + 2A^3 & \text{se } B > A.]n.c. \end{cases}$$

TEOREMA

Il cubo della somma di due lati, meno il cubo della loro differenza è uguale a sei volte il solido prodotto dal lato minore per il quadrato del maggiore più due volte il cubo del lato minore.

PROPOSIZIONE XVII

Moltiplicare la differenza di due lati per i tre singoli “piani”¹⁸, generati dal quadrato della somma di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore e B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A - B)$ per $(A^2 + AB + B^2)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “solidi”:

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3.$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della differenza di due lati per i tre singoli “piani”, generati dal quadrato della loro somma, è uguale alla differenza dei cubi dei lati.

¹⁸Viète intende i prodotti che costituiscono il quadrato di binomio, privi di coefficiente.

CONSEGUENZA

- Se si divide la differenza dei due cubi per la differenza dei due lati si ottiene $A^2 + AB + B^2$.

$$\left[\frac{(A^3 - B^3)}{(A - B)} = \frac{(A - B)(A^2 + AB + B^2)}{(A - B)} = A^2 + AB + B^2. \right] \text{n.c.}$$

- Se si divide la differenza dei due cubi per i tre singoli “piani” generati dal quadrato della somma dei due lati si ottiene $A - B$.

$$\left[\frac{(A^3 - B^3)}{(A^2 + AB + B^2)} = \frac{(A - B)(A^2 + AB + B^2)}{(A^2 + AB + B^2)} = A - B. \right] \text{n.c.}$$

PROPOSIZIONE XVIII

Moltiplicare la somma di due lati per i tre singoli “piani”, generati dal quadrato della differenza di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore e B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A + B)$ per $(A^2 - AB + B^2)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “solidi”:

$$(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3.$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della somma di due lati per i tre singoli “piani”, generati dal quadrato della loro differenza, è uguale alla somma dei cubi dei lati.

CONSEGUENZA

- Se si divide la somma dei due cubi per la somma dei due lati si ottiene $A^2 - AB + B^2$.

$$\left[\frac{(A^3 + B^3)}{(A + B)} = \frac{(A + B)(A^2 - AB + B^2)}{(A + B)} = A^2 - AB + B^2. \right] \text{n.c.}$$

- Se si divide la somma dei due cubi per i tre singoli “piani” generati dal quadrato della differenza dei due lati si ottiene $A + B$.

$$\left[\frac{(A^3 + B^3)}{(A^2 - AB + B^2)} = \frac{(A + B)(A^2 - AB + B^2)}{(A^2 - AB + B^2)} = A + B. \right] \text{n.c.}$$

PROPOSIZIONE XIX

Moltiplicare la differenza di due lati per i quattro singoli “solidi”, generati dal cubo della somma di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore, B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A - B)$ per $(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “piani-piani”:

$$(A - B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3) = (A^4 - B^4).$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della differenza di due lati per i quattro singoli “solidi”, generati dal cubo della loro somma, è uguale alla differenza dei “quadrati-quadrati” dei lati.

CONSEGUENZA

- Se si divide la differenza dei due “quadrati-quadrati” per la differenza dei due lati si ottiene $A^3 + A^2B + AB^2 + B^3$.

$$\left[\frac{(A^4 - B^4)}{(A - B)} = \frac{(A - B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)}{(A - B)} = A^3 + A^2B + AB^2 + B^3. \right] \text{n.c.}$$

- Se si divide la differenza dei due “quadrati-quadrati” per i quattro singoli “solidi”, generati dal cubo della somma dei due lati si ottiene $A - B$.

$$\left[\frac{(A^4 - B^4)}{(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)} = \frac{(A - B)(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)}{(A^3 + A^2B + AB^2 + B^3)} = A - B. \right] \text{n.c.}$$

PROPOSIZIONE XX

Moltiplicare la somma di due lati per i quattro singoli “solidi”, generati dal cubo della differenza di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore, B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A + B)$ per $(A^3 - A^2B + AB^2 - B^3)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “piani-piani”:

$$(A + B)(A^3 - A^2B + AB^2 - B^3) = (A^4 - B^4).$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della somma di due lati per i quattro singoli “solidi”, generati dal cubo della loro differenza, è uguale alla differenza dei “quadrati-quadrati” dei lati.

CONSEGUENZA I

- Se si divide la differenza dei due “quadrati-quadrati” per la somma dei due lati si ottiene $A^3 - A^2B + AB^2 - B^3$.

$$\left[\frac{(A^4 - B^4)}{(A + B)} = \frac{(A + B)(A^3 - A^2B + AB^2 - B^3)}{(A + B)} = A^3 - A^2B + AB^2 - B^3. \right] \text{n.c.}$$

- Se si divide la differenza dei due “quadrati-quadrati” per i quattro singoli “solidi”, generati dal cubo della differenza dei due lati si ottiene $A + B$.

$$\left[\frac{(A^4 - B^4)}{(A^3 - A^2B + AB^2 - B^3)} = \frac{(A + B)(A^3 - A^2B + AB^2 - B^3)}{(A^3 - A^2B + AB^2 - B^3)} = A + B. \right] \text{n.c.}$$

CONSEGUENZA II

La differenza dei due lati sta alla loro somma, come i quattro singoli “solidi” generati da $(A - B)^3$ stanno agli altri quattro “solidi” generati da $(A + B)^3$:

$$(A - B) : (A + B) = (A^3 - A^2B + AB^2 - B^3) : (A^3 + A^2B + AB^2 + B^3).$$

PROPOSIZIONE XXI

Moltiplicare la differenza di due lati per i cinque singoli “piani-piani”, generati dal “quadrato-quadrato” della somma di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore, B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A - B)$ per $(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “piani-solidi”:

$$(A - B)(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4) = (A^5 - B^5).$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della differenza di due lati per i cinque singoli “piani-piani”, generati dal “quadrato-quadrato” della loro somma, è uguale alla differenza dei “quadrati-cubi” dei lati.

CONSEGUENZA

- Se si divide la differenza dei due “quadrati-cubi” per la differenza dei due lati si ha che

$$\frac{(A^5 - B^5)}{(A - B)} = A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4.$$

- Se si divide la differenza dei due “quadrati-quadrati” per i quattro singoli “solidi”, generati dal cubo della somma dei due lati si ottiene

$$\frac{(A^5 - B^5)}{(A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4)} = A - B.$$

PROPOSIZIONE XXII

Moltiplicare la somma di due lati per i cinque singoli “piani-piani”, generati dal “quadrato-quadrato” della differenza di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore, B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A + B)$ per $(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “piani-solidi”:

$$(A + B)(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4) = (A^5 + B^5).$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della somma di due lati per i cinque singoli “piani-piani”, generati dal “quadrato-quadrato” della loro differenza, è uguale alla somma dei “quadrati-cubi” dei lati.

CONSEGUENZA

- Se si divide la somma dei due “quadrati-cubi” per la somma dei due lati si ha che

$$\frac{(A^5 + B^5)}{(A + B)} = A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4.$$

- Se si divide la somma dei due “quadrati-quadrati” per i quattro singoli “solidi”, generati dal “quadrato-quadrato” della differenza dei due lati si ottiene

$$\frac{(A^5 + B^5)}{(A^4 - A^3B + A^2B^2 - AB^3 + B^4)} = A + B.$$

PROPOSIZIONE XXIII

Moltiplicare la differenza di due lati per i sei singoli “piani-solidi”, generati dal “quadrato-cubo” della somma di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore, B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A - B)$ per $(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “solidi-solidi”:

$$(A - B)(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5) = (A^6 - B^6).$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della differenza di due lati per i sei singoli “piani-solidi”, generati dal “quadrato-cubo” della loro somma , è uguale alla differenza dei “cubi-cubi” dei lati.

CONSEGUENZA

- Se si divide la differenza dei due “cubi-cubi” per la differenza dei due lati si ha che

$$\frac{(A^6 - B^6)}{(A - B)} = A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5.$$

- Se si divide la differenza dei due “cubi-cubi” per i sei singoli “piani-solidi”, generati dal “quadrato-cubo” della somma dei due lati si ottiene

$$\frac{(A^6 - B^6)}{(A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5)} = A - B.$$

PROPOSIZIONE XXIV

Moltiplicare la somma di due lati per i sei singoli “piani-solidi”, generati dal “quadrato-cubo” della differenza di quegli stessi lati.

Sia A il lato maggiore, B quello minore. Si vuole moltiplicare $(A + B)$ per $(A^5 - A^4B + A^3B^2 - A^2B^3 + AB^4 - B^5)$. Risulterà un prodotto particolare e formato da singoli “solidi-solidi”:

$$(A + B)(A^5 - A^4B + A^3B^2 - A^2B^3 + AB^4 - B^5) = (A^6 - B^6).$$

TEOREMA

Ciò che risulta dalla moltiplicazione della somma di due lati per i sei singoli “piani-solidi”, generati dal “quadrato-cubo” della loro differenza , è uguale alla differenza dei “cubi-cubi” dei lati.

CONSEGUENZA I

- Se si divide la differenza dei due “cubi-cubi” per la somma dei due lati si ha che

$$\frac{(A^6 - B^6)}{(A + B)} = A^5 - A^4B + A^3B^2 - A^2B^3 + AB^4 - B^5.$$

- Se si divide la differenza dei due “cubi-cubi” per i sei singoli “piani-solidi”, generati dal “quadrato-cubo” della differenza dei due lati si ottiene

$$\frac{(A^6 - B^6)}{(A^5 - A^4B + A^3B^2 - A^2B^3 + AB^4 - B^5)} = A + B.$$

CONSEGUENZA II

La differenza dei due lati sta alla loro somma, come i sei singoli “piani-solidi” generati da $(A - B)^5$ stanno agli altri sei “piani-solidi” generati da $(A + B)^5$:

$$(A - B) : (A + B) = (A^5 - A^4B + A^3B^2 - A^2B^3 + AB^4 - B^5) : \\ (A^5 + A^4B + A^3B^2 + A^2B^3 + AB^4 + B^5).$$

Dalle proposizioni precedenti si possono dedurre i seguenti teoremi generali:

TEOREMA I

Ciò che risulta dal prodotto della differenza di due lati per i singoli omogenei generati da una potenza della somma di quegli stessi lati, corrisponde alla differenza delle potenze di un solo grado superiore di quelli:

$$[(A - B)(A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 + A^{n-3}B^3 + \dots + AB^{n-1} + B^n) = A^{n+1} - B^{n+1}]. \text{ n.c.}$$

CONSEGUENZA

- Se si divide la differenza delle potenze per la differenza dei lati, si ottengono i singoli omogenei generati dalla potenza, di un solo grado inferiore, della somma di quegli stessi lati:

$$\left[\frac{(A^{n+1} - B^{n+1})}{(A - B)} = (A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 + \dots + AB^{n-1} + B^n). \right] \text{ n.c.}$$

- E viceversa:

$$\left[\frac{(A^{n+1} - B^{n+1})}{(A^n + A^{n-1}B + A^{n-2}B^2 + \dots + AB^{n-1} + B^n)} = (A - B). \right] \text{ n.c.}$$

TEOREMA II

Ciò che risulta dal prodotto della somma di due lati per i singoli omogenei generati da una potenza della differenza di quegli stessi lati, corrisponde alla somma o alla differenza delle potenze di grado successivo: sarà una somma se il numero dei singoli omogenei è dispari, sarà una differenza se è pari.

Se il numero degli omogenei è dispari allora la potenza della differenza dei due lati ha esponente *pari*, [pertanto

$$(A + B)(A^{2n} - A^{2n-1}B + A^{2n-2}B^2 - \dots - AB^{2n-1} + B^{2n}) = A^{2n+1} + B^{2n+1}. \text{ n.c.}$$

Se il numero degli omogenei è pari allora la potenza della differenza dei due lati ha esponente *dispari*, [pertanto

$$(A + B)(A^{2n+1} - A^{2n}B + A^{2n-1}B^2 - \dots + AB^{2n} - B^{2n+1}) = A^{2n+2} - B^{2n+2}. \text{ n.c.}$$

CONSEGUENZA I

- Se si divide la somma delle potenze per la somma dei lati si ha

$$\frac{(A^{2n+1} + B^{2n+1})}{(A + B)} = (A^{2n} - A^{2n-1}B + A^{2n-2}B^2 - \dots - AB^{2n-1} + B^{2n}).$$

- Se si divide la differenza delle potenze per la somma dei lati si ha

$$\frac{(A^{2n+2} - B^{2n+2})}{(A + B)} = (A^{2n+1} - A^{2n}B + A^{2n-1}B^2 - \dots + AB^{2n} - B^{2n+1}).$$

CONSEGUENZA II

Se il numero degli omogenei, generati dalla potenza della differenza dei due lati, è *pari* allora vale la seguente proporzione:

$$(A - B) : (A + B) = (A^n - A^{n-1}B + \dots - B^n) : (A^n + A^{n-1}B + \dots + B^n).$$

2.1 Genesi delle potenze combinate positive.

PROPOSIZIONE XXV

Ottenere un quadrato combinato con un piano costituito da un lato e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A+B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente. Si vuole combinare $(A+B)^2$ con il piano formato da $(A+B)$ e D ; quindi moltiplicando $(A+B)$ per $(A+B+D)$ risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)(A + B + D) &= A^2 + 2AB + AD + B^2 + BD \\ &= (A^2 + 2AB + B^2) + (A + B)D \\ &= (A + B)^2 + (A + B)D. \end{aligned}$$

TEOREMA I

Genesi dei quadrati combinati positivamente con un lato.

Se si considerano due lati A , B e una grandezza coefficiente che sia una lunghezza D , allora¹⁹

$$(A^2 + 2AB + B^2 + AD + BD) = (A + B)^2 + (A + B)D.$$

¹⁹ « Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublateralis longitudo: quadratum lateris primi, plus plano a latere primo in latus secundum duplum, plus quadrato lateris secundi, plus plano a latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano a latere secundo in eadem coefficientem longitudinem, æquatur quadrato adgregati laterum adfecto adiunctione plani sub coefficiente illa, & dicto adgregato.

Sit latus unum A, alterum B, coefficiens sub lateralis longitudo D. Dico A quadratum, + A in B bis, + B quadrato, D in A, + D in B, æquari A+B quadrato, + D in A+B. Ex opere multiplicationis A+B per A+B+D.» Vedi p. 24 di [18].

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A + B)$ per $(A + B + D)$.

TEOREMA II

Da quella radice binomia si ottengono due quadrati: uno puro, l'altro positivo formato dalla radice binomia e dal coefficiente lunghezza fissato. I termini piani che vengono aggiunti al quadrato puro sono:

- il piano formato dal primo lato e il coefficiente: $[AD]$ n.c.;
- il piano formato dal secondo lato e il coefficiente: $[BD]$ n.c.

PROPOSIZIONE XXVI

Ottenere un cubo combinato con un solido costituito da un lato e un piano, mediante una radice binomia e un coefficiente piano.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente piano. Si vuole combinare il prodotto di $(A + B)^2$ e $(A + B)$ con il solido formato da $(A + B)$ e D , risulta che

$$(A + B)^2(A + B) + (A + B)D = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + AD + BD,$$

che corrisponde a $(A + B)^3 + (A + B)D$.

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente piano D , allora²⁰

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + AD + BD = (A + B)^3 + (A + B)D.$$

PROPOSIZIONE XVII

Ottenere un cubo combinato con un solido costituito da un quadrato e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente. Si vuole combinare $(A + B)^3$

²⁰« Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublateralis planum: cubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, plus solido a latere primo in coefficiens planum, plus solido a latere secundo in idem coefficiens planum, æquatur cubo adgregati laterum adfecto adiunctione solidi sub coefficiente plano & adgregato prædicto.» Vedi p. 24 di [18].

con il piano formato da $(A + B)^2$ e D ; quindi moltiplicando $(A + B)^2$ per $(A + B + D)$ risulta che

$$\begin{aligned}(A + B)^2(A + B + D) &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + A^2D + 2ABD + B^2D \\ &= (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) + (A^2 + 2AB + B^2)D \\ &= (A + B)^3 + (A + B)^2D.\end{aligned}$$

TEOREMA I

Genesi dei cubi combinati positivamente con un quadrato.

Se si considerano due lati A , B e una grandezza coefficiente che sia una lunghezza D , allora²¹

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + A^2D + 2ABD + B^2D = (A + B)^3 + (A + B)^2D.$$

Ciò segue dalla moltiplicazione di $(A + B)^2$ e di $(A + B + D)$.

TEOREMA II

Da quella radice binomia si ottengono due cubi: uno puro, l'altro positivo formato dal quadrato della radice binomia e dal coefficiente lunghezza fissato. I termini solidi che vengono aggiunti al cubo puro sono:

- il solido formato dal quadrato del primo lato e dal coefficiente: $[A^2D]$ n.c.;
- il solido formato dal doppio prodotto del primo lato, del secondo lato e del coefficiente: $[2ABD]$ n.c.;
- il solido formato dal quadrato del secondo lato e dal coefficiente: $[B^2D]$ n.c.;

PROPOSIZIONE XXVIII

Ottenere un "quadrato-quadrato" combinato con un "piano-piano" costituito da un lato e un solido, mediante una radice binomia e un coefficiente solido.

²¹« Si fuerint due latera & præterea coefficiens subquadratica longitudo: cubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, plus solido a lateris primi quadrato in coefficientem longitudinem, plus solido a plano-duplo sub lateribus in coefficientem longitudinem, plus solido a lateris secundi quadrato in coefficientem longitudinem, est æqualis cubo adgregati laterum adfecto adiunctione solidi, sub coefficiente illa & dicti adgregati laterum quadrato.

Sit latetus unum A , alterum B , coefficiens sub quadratica longitudo D . Dico A cubum, + A quadrato in B 3, + A in B quadratum 3, + B cubo, + A quadrato in D , + A in B in D 2, + B quadrato in D , æquari $A+B$ cubo, + D in $A+B$ quadratum. Ex opere multiplicationis A quadrati, + A in B 2, + B quadrato, per $A+B+D$.» Vedi p. 25 di [18].

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente solido. Si vuole combinare il prodotto di $(A + B)^3$ e $(A + B)$ con il “piano-piano” formato da $(A + B)$ e D , risulta che

$$(A + B)^3(A + B) + (A + B)D = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 + AD + BD,$$

che corrisponde a $(A + B)^4 + (A + B)D$.

TEOREMA

Genesi dei “quadrato-quadrato” combinati positivamente con un lato.

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente solido D , allora²²

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + AD + BD = (A + B)^3 + (A + B)D.$$

Ciò segue dalla moltiplicazione di $(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 + D)$ per $(A + B)$.

PROPOSIZIONE XXIX

Ottenere un “quadrato-quadrato” combinato con un “piano-piano” costituito da un cubo e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente. Si vuole combinare $(A + B)^4$ con il “piano-piano” formato da $(A + B)^3$ e D ; quindi moltiplicando $(A + B)^3$ per $(A + B + D)$ risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)^3(A + B + D) &= A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \\ &\quad + A^3D + 3A^2BD + 3AB^2D + B^3D \\ &= (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) \\ &\quad + (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)D \\ &= (A + B)^4 + (A + B)^3D. \end{aligned}$$

²²« Si fuerint due latera & præterea coefficiens solidum: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus latere primo in coefficiens solidum, plus latere secundo in coefficiens solidum, est æquale quadrato-quadrato adgregati laterum adfecto adiunctione plano-plani, sub dicto adgregato, & coefficiente solido.

Sit latus unum A alterum B , coefficiens sublaterale solidum D . Dico A quadrato-quadratum, + A cubo in B 4, + A quadrato in B quadratum 6, + A in B cubum 4, + B quadrato-quadrato, + A in D solidum, + B in D solidum, æquari $A+B$ quadrato-quadrato, + D solido in $A+B$. Ex opere multiplicationis A cubi, + A quadrato in B 3, + A in B quadratum 3, + B cubo, + D solido per $A+B$.» Vedi p. 25 di [18].

TEOREMA I

Genesis dei “quadrato-quadrato” combinati positivamente con un cubo.

Se si considerano due lati A , B e una grandezza coefficiente che sia una lunghezza D , allora²³

$$\begin{aligned} A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 + A^3D + 3A^2BD + 3AB^2D + B^3D \\ = (A + B)^4 + (A + B)^3D. \end{aligned}$$

Ciò segue dalla moltiplicazione di $(A + B)^3$ e di $(A + B + D)$.

TEOREMA II

Da quella radice binomia si ottengono due “quadrati-quadrati”: uno puro, l’altro positivo formato dal cubo della radice binomia e dal coefficiente lunghezza fissato.

I termini “piani-piani” che vengono aggiunti al “quadrato-quadrato” puro sono:

- il “piano-piano” formato dal cubo del primo lato e dal coefficiente: $[A^3D]$ n.c.;
- il “piano-piano” formato dal triplo prodotto del quadrato del primo lato, del secondo lato e del coefficiente: $[3A^2BD]$ n.c.;
- il “piano-piano” formato dal triplo prodotto del primo lato, del quadrato del secondo lato e del coefficiente: $[3AB^2D]$ n.c.;
- il “piano-piano” formato dal cubo del secondo lato e dal coefficiente: $[B^3D]$ n.c.

²³ « Si fuerint due latera & præterea coefficientis longitudo: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficientem longitudinem, plus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficientem longitudinem, plus cubo lateris secundi in coefficientem longitudinem, æquatur quadrato-quadrato adgregati laterum adfecto adiunctione plano-plani sub cubo adgregati prædicti, & coefficiente longitudine. Sit latus unum A , alterum B , coefficientis longitudo D . Dico A quadrato-quadratum, + A cubo in B 4, + A quadrato in B quadratum 6, + A in B cubum 4, + B quadrato-quadrato, + A cubo in D , + A quadrato in B in D 3, + A in B quadratum in D 3, + B cubo in D , æquari $A+B$ quadrato-quadrato, + D in $A + B$ cubum. Ex opere multiplicationis A cubi, + A quadrato in B 3, + A in B quadratum 3, + B cubo, per $A+B+D$.» Vedi p. 26 di [18].

PROPOSIZIONE XXX

Ottenere un “quadrato-quadrato” combinato con due “piani-piani”, uno costituito da un lato e un solido, l’altro composto da un quadrato e un piano, mediante una radice binomia e due coefficienti, uno solido e uno piano.

Sia $(A + B)$ la radice binomia, sia D il coefficiente solido e G quello piano. Si vuole combinare il prodotto di $(A + B)^3$ e $(A + B)$ con due “piani-piani”, uno formato da $(A + B)$ e il coefficiente solido D , l’altro composto da $(A + B)^2$ e il coefficiente piano G , risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)^3(A + B) + (A + B)^2G + (A + B)D &= A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 \\ &\quad + B^4 + A^2G + 2ABG + B^2G \\ &\quad + AD + BD, \end{aligned}$$

che corrisponde a $(A + B)^4 + (A + B)^2G + (A + B)D$.

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e due coefficienti, uno solido D e uno piano G , allora²⁴

$$\begin{aligned} A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 + A^2G + 2ABG + B^2G + AD + BD \\ = (A + B)^4 + (A + B)^2G + (A + B)D. \end{aligned}$$

PROPOSIZIONE XXXI

Ottenere un “quadrato-cubo” combinato con un “piano-solido” costituito da un lato e un “piano-piano”, mediante una radice binomia e un coefficiente “piano-piano”.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente “piano-piano”. Si vuole

²⁴«Si fuerint due latera & præterea coefficiens duplex, unum quidem planum subquadraticum, alterum vero sublateralisolidum. Erit

Quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris peimi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus quadrato lateris primi in coefficiens planum, plus duplo plano sub lateribus in coefficiens planum, plus quadrato lateris secundi in coefficiens planum, plus latere primo in coefficiens solidum, plus latere secundo in coefficiens solidum, æquale quadrato-quadrato adgregati laterum, adfecto adiunctione duplicis plano-plani, unius sub quadrato adgregati laterum, & coefficiente plano, alterius sub adgregato laterum, & coefficiente solido.» Vedi p. 27 di [18].

combinare il prodotto di $(A + B)^4$ e $(A + B)$ con il “piano-solido” formato da $(A + B)$ e D , risulta che

$$(A + B)^4(A + B) + (A + B)D = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 + AD + BD,$$

che corrisponde a $(A + B)^5 + (A + B)D$.

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente “piano-piano” D , allora²⁵

$$A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 + AD + BD = (A + B)^5 + (A + B)D.$$

Ciò segue dalla moltiplicazione di $(A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 + D)$ per $(A + B)$.

PROPOSIZIONE XXXII

Ottenere un “quadrato-cubo” combinato con un “piano-solido” costituito da un cubo e un piano, mediante una radice binomia e un coefficiente piano.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente piano. Si vuole combinare $(A + B)^5$ con il “piano-solido” formato da $(A + B)^3$ e D . Moltiplicando $(A + B)^3$ per $(A^2 + 2AB + B^2 + D)$ risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)^3(A^2 + 2AB + B^2 + D) &= A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 \\ &\quad + B^5 + A^3D + 3A^2BD + 3AB^2D + B^3D \\ &= (A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 \\ &\quad + B^5) + (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)D \\ &= (A + B)^5 + (A + B)^3D. \end{aligned}$$

²⁵ « Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublaterale plano-planum: quadrato-cubus lateris primi, plus quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum quintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi quadratum decuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi cubum decuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum quintuplum, plus quadrato-cubo lateris secundi, plus latere primo in coefficiens plano-planum, plus latere secundo in coefficiens plano-planum; est æqualis quadrato-cubo adgregati laterum adfecto adiunctione plano-solidi sub coefficiente plano-piano, & adgregato laterum.» Vedi pp. 27-28 di [18].

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente piano D , allora²⁶

$$\begin{aligned} A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 + A^3D + 3A^2BD + 3AB^2D + B^3D \\ = (A + B)^5 + (A + B)^3D. \end{aligned}$$

Ciò segue dalla moltiplicazione di $(A + B)^3$ e di $(A^2 + 2AB + B^2 + D)$.

PROPOSIZIONE XXXIII

Ottenere un “cubo-cubo” combinato con un “solido-solido” costituito da un lato e un “piano-solido”, mediante una radice binomia e un coefficiente “piano-solido”.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente “piano-solido”. Si vuole combinare il prodotto di $(A + B)^5$ e $(A + B)$ con il “solido-solido” formato da $(A + B)$ e D , risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)^5(A + B) + (A + B)D = A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 \\ + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6 + AD + BD, \end{aligned}$$

che corrisponde a $(A + B)^6 + (A + B)D$.

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente “piano-solido” D , allora²⁷

$$\begin{aligned} A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6 + AD + BD \\ = (A + B)^6 + (A + B)D. \end{aligned}$$

²⁶« Si fuerint due latera & coefficiens planum: quadrato-cubus lateris primi, plus quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum quintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi quadratum decuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi cubum decuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum quintuplum, plus quadrato-cubo lateris secundi, plus cubo lateris primi in coefficiens planum, plus solido sub quadrato-lateris primi, & latere secundo triplo in coefficiens planum, plus solido sub latere primo, & lateris secundi quadrato triplo in coefficiens planum, plus cubo lateris secundi in coefficiens planum, æqualis est quadrato-cubo adgregati laterum adfecto adiunctione plano-solidi sub coefficiente plano & cubo adgregati laterum.» Vedi p. 28 di [18].

²⁷« Si fuerint due latera, una cum coefficiente sublateralis plano-solido, cubo-cubus lateris primi, plus quadrato-cubo lateris primi in latus secundum sextuplum, plus quadrato-quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum decuquintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi cubum vigeuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadrato-quadratum decuquintuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-cubum sextuplum, plus cubo-cubo lateris secundi, plus latere primo in coefficiens plano-solidum, plus latere secundo in coefficiens plano-solidum, est æqualis cubo-cubo adgregati laterum adfecto adiunctione solido-solidi sub coefficiente plano-solido & adgregato laterum.» Vedi p. 28 di [18].

Ciò segue dalla moltiplicazione di $(A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 + D)$ per $(A + B)$.

2.2 Genesi delle potenze combinate negative.

PROPOSIZIONE XXXIV

Ottenere un quadrato combinato²⁸, attraverso la sottrazione, con un piano costituito da un lato e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente lunghezza. Si vuole sottrarre ad $(A + B)^2$ il piano formato da $(A + B)$ e D . Moltiplicando $(A + B)$ per $(A + B - D)$, risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)(A + B - D) &= A^2 + 2AB - AD + B^2 - BD \\ &= (A^2 + 2AB + B^2) - (A + B)D \\ &= (A + B)^2 - (A + B)D. \end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente D , allora²⁹

$$(A^2 + 2AB + B^2 - AD - BD) = (A + B)^2 - (A + B)D$$

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A + B)$ per $(A + B - D)$.

PROPOSIZIONE XXXV

Ottenere un cubo combinato, attraverso la sottrazione, con un solido costituito da un lato e un piano, mediante una radice binomia e un coefficiente piano.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente piano. Si vuole sottrarre dal prodotto di $(A + B)^2$ e di $(A + B)$ il solido formato da $(A + B)$ e D , risulta che

$$(A + B)^2(A + B) - (A + B)D = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 - AD - BD$$

che corrisponde a $(A + B)^3 - (A + B)D$.

²⁸«Quadratum adfectum multa plani [...]», cioè quadrato soggetto ad una multa di un piano.

²⁹« Si fuerint due latera, una cum coefficiente sublateralis longitudine: quadratum lateris primi, plus plano a latere primo in latus secundum duplum, plus quadrato lateris secundi, minus plano a latere primo in coefficientem longitudinem, minus plano a latere secundo in coefficientem longitudinem, est æquale quadrato adgregati laterum adfecto multa plani sub dicto adgregato, & coefficiente illa.» Vedi p. 29 di [18].

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente piano D , allora³⁰

$$A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 - AD - BD = (A + B)^3 - (A + B)D.$$

PROPOSIZIONE XXXVI

Ottenere un cubo combinato, attraverso la sottrazione, con un solido costituito da un quadrato e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A+B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente lunghezza. Si vuole sottrarre ad $(A+B)^3$ il solido formato da $(A+B)^2$ e D . Moltiplicando $(A+B)^2$ per $(A+B-D)$, risulta che

$$\begin{aligned} (A+B)^2(A+B-D) &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 - A^2D - 2ABD - B^2D \\ &= (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) - (A^2 + 2AB + B^2)D \\ &= (A+B)^3 - (A+B)^2D. \end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente D , allora³¹

$$(A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 - A^2D - 2ABD - B^2D) = (A+B)^3 - (A+B)^2D$$

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A+B)^2$ per $(A+B-D)$.

³⁰« Si fuerint due latera & præterea coefficiens sublaterale planum: ubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, minus solido a latere primo in coefficiens planum, minus solido a latere secundo in coefficiens planum, est æqualis cubo adgregati laterum adfecto multa solidi sub coefficiente plano, & adgregato laterum.» Vedi p. 29 di [18].

³¹« Si fuerint due latera, una cum coefficiente subquadratica longitudo: cubus lateris primi, plus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, plus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, plus cubo lateris secundi, minus solido a quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, minus solido a plano duplo sub lateribus in coefficientem longitudinem, minus solido a quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem, æquabitur cubo adgregati laterum, adfecto multa solidi sub coefficiente longitudine & quadrato adgregati laterum.» Vedi pp. 29-30 di [18].

2.3 Genesi delle potenze combinate positive e negative.

PROPOSIZIONE XXXVII

Dati una radice binomia e due coefficienti, uno solido e una lunghezza; ottenere un “quadrato-quadrato” combinato, mediante la somma, con un “piano-piano”, costituito da un lato e un solido e mediante la sottrazione, con un “piano-piano”, composto da un cubo e una lunghezza.

Sia $(A + B)$ la radice binomia, sia D il coefficiente solido e G il coefficiente lunghezza. Si vuole combinare $(A + B)^4$ con il “piano-piano” formato da $(A + B)$ e D , mediante la somma e con il “piano-piano” composto da $(A + B)^3$ e G , mediante la sottrazione.

Moltiplicando $(A + B)^3$ per $(A + B - G)$ si ha

$$\begin{aligned} (A + B)^3(A + B - G) &= A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \\ &\quad - A^3G - 3A^2BG - 3AB^2G - B^3G, \end{aligned}$$

quindi sommando $(A + B)D$ risulta che

$$\begin{aligned} (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) - (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)G + (A + B)D &= \\ = (A + B)^4 - (A + B)^3G + (A + B)D. \end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e due coefficienti, uno solido D e un coefficiente lunghezza G , allora³²

$$\begin{aligned} A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 - A^3G - 3A^2BG - 3AB^2G - B^3G + AD + BD &= \\ = (A + B)^4 - (A + B)^3G + (A + B)D. \end{aligned}$$

³²«Si fuerint due latera & præterea coefficiens subcubica longitudo, necnon & coefficiens sublaterale solidum: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, minus cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, minus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficientem longitudinem, minus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficientem longitudinem, minus cubo lateris secundo in coefficientem longitudinem, plus latere primo in coefficiens solidum, plus latere secundo in coefficiens solidum, æquatur quadrato-quadrato adgregati laterum, adfecto multa quidem plano-plani sub cubo adgregati laterum & coefficiente longitudine, adiunctione vero plano-plani sub adgregato eodem & coefficiente solido.» Vedi p. 30 di [18].

Ciò si ottiene in seguito alla moltiplicazione di $(A + B)^3$ per $(A + B - G)$ e alla somma di $(A + B)D$.

PROPOSIZIONE XXXVIII

Dati una radice binomia e due coefficienti, uno solido e una lunghezza; ottenere un “quadrato-quadrato” combinato, mediante la sottrazione, con un “piano-piano”, costituito da un lato e un solido e mediante la somma, con un “piano-piano”, composto da un cubo e una lunghezza.

Sia $(A + B)$ la radice binomia, sia D il coefficiente solido e G il coefficiente lunghezza. Si vuole combinare $(A + B)^4$ con il “piano-piano” formato da $(A + B)$ e D , mediante la sottrazione e con il “piano-piano” composto da $(A + B)^3$ e G , mediante la somma.

Moltiplicando $(A + B)^3$ per $(A + B + G)$ si ha

$$(A + B)^3(A + B + G) = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 \\ + A^3G + 3A^2BG + 3AB^2G + B^3G,$$

quindi sottraendo $(A + B)D$ risulta che

$$(A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) + (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)G - (A + B)D = \\ = (A + B)^4 + (A + B)^3G - (A + B)D.$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e due coefficienti, uno solido D e un coefficiente lunghezza G , allora³³

$$A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4 + A^3G + 3A^2BG + 3AB^2G + B^3G - AD - BD = \\ = (A + B)^4 + (A + B)^3G - (A + B)D.$$

Ciò si ottiene in seguito alla moltiplicazione di $(A + B)^3$ per $(A + B - G)$ e alla sottrazione di $(A + B)D$.

³³«Si fuerint due latera & præterea coefficiens subcubica longitudo, necnon & coefficiens sublaterale solidum: quadrato-quadratum lateris primi, plus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, plus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, plus quadrato-quadrato lateris secundi, plus cubo lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficientem longitudinem, plus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficientem longitudinem, plus cubo lateris secundo in coefficientem longitudinem, minus latere primo in coefficiens solidum, minus latere secundo in coefficiens solidum, æquatur quadrato-quadrato adgregati laterum, adfecto adiunctione quidem plano-plani sub cubo adgregati laterum, & coefficiente longitudine, multa vero plano-plani sub adgregato ipso laterum, & coefficiente solido.» Vedi p. 31 di [18].

PROPOSIZIONE XXXIX

Dati una radice binomia e due coefficienti, uno “piano-piano” e uno piano; ottenere un “quadrato-cubo” combinato, mediante la somma, con un “piano-solido”, costituito da un lato e un “piano-piano” e mediante la sottrazione, con un “piano-solido”, composto da un cubo e un piano.

Sia $(A + B)$ la radice binomia, sia D il coefficiente “piano-piano” e G quello piano. Si vuole combinare $(A + B)^5$ con il “piano-solido” formato da $(A + B)$ e D , mediante la somma e con il “piano-solido” composto da $(A + B)^3$ e G , mediante la sottrazione.

Moltiplicando $(A + B)^3$ per $(A^2 + 2AB + B^2 - G)$ si ha

$$(A + B)^3(A^2 + 2AB + B^2 - G) = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 - A^3G - 3A^2BG - 3AB^2G - B^3G,$$

quindi sommando $(A + B)D$ risulta che

$$\begin{aligned} & (A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5) \\ & - (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)G + (A + B)D \\ & = (A + B)^5 - (A + B)^3G + (A + B)D. \end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e due coefficienti, uno “piano-piano” D e l’altro piano G , allora³⁴

$$\begin{aligned} & A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 \\ & - A^3G - 3A^2BG - 3AB^2G - B^3G + AD + BD = \\ & = (A + B)^5 - (A + B)^3G + (A + B)D. \end{aligned}$$

Ciò si ottiene in seguito alla moltiplicazione di $(A + B)^3$ per $(A^2 + 2AB + B^2 - G)$ e alla somma di $(A + B)D$.

³⁴«Si fuerint due latera & præterea subcubicum coefficiens planum, necnon & sublaterale coefficiens plano-planum; quadrato-cubus lateris primi, plus quadrato-quadrato lateris primi in latus secundum quintuplum, plus cubo lateris primi in lateris secundi quadratum decuplum, plus quadrato lateris primi in lateris secundi cubum decuplum, plus latere primo in lateris secundi quadrato-quadratum quintuplum, plus quadrato-cubo lateris secundi, minus cubo lateris primi in coefficiens planum, minus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in coefficiens planum, minus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in coefficiens planum, minus cubo lateris secundi in coefficiens planum, plus latere primo in coefficiens plano-planum, plus latere secundo in coefficiens plano-planum, æquatur quadrato-cubo adgregati laterum adfecto multa quidem plano-solidi sub cubo adgregati laterum & coefficiente plano, adiunctione vero plano-solidi sub adgregato laterum, & coefficiente plano-plano». Vedi p. 31 di [18].

2.4 Generi delle potenze *avulsarum*.

PROPOSIZIONE XL

Ottenere un piano combinato, attraverso la sottrazione, con un quadrato costituito da un lato e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente. Si vuole ottenere un piano sottraendo $(A + B)^2$ ad $(A + B)D$. Moltiplicando $(A + B)$ per $(D - A - B)$ risulta che

$$\begin{aligned}(A + B)(D - A - B) &= AD + BD - A^2 - 2AB - B^2 \\ &= (A + B)D - (A^2 + 2AB + B^2) \\ &= (A + B)D - (A + B)^2.\end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente lunghezza, allora³⁵

$$\begin{aligned}AD + BD - A^2 - 2AB - B^2 &= (A + B)D - (A^2 + 2AB + B^2) \\ &= (A + B)D - (A + B)^2.\end{aligned}$$

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A + B)$ per $(D - A - B)$.

PROPOSIZIONE XLI

Ottenere un solido combinato, attraverso la sottrazione, con un cubo costituito da un lato e un piano, mediante una radice binomia e un coefficiente piano.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente piano. Si vuole ottenere un solido sottraendo $(A + B)^3$ ad $(A + B)D$. Moltiplicando $(A + B)$ per $(D - A^2 - 2AB - B^2) = (D - (A + B)^2)$ risulta che

$$\begin{aligned}(A + B)(D - (A + B)^2) &= AD + BD - A^3 - 3A^2B - 3AB^2 - B^3 \\ &= (A + B)D - (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \\ &= (A + B)D - (A + B)^3.\end{aligned}$$

³⁵«Si fuerint due latera, necnon & sublateralis coefficiens longitudo: planum a latere primo in coefficientem longitudinem, plus plano a latere secundo in coefficientem longitudinem, minus quadrato lateris primi, minus duplo plano sub lateribus, minus quadrato lateris secundi, æquatur plano sub adgregato laterum, & coefficiente illa, adfecto multa quadrati ab adgregato laterum.» Vedi p. 32 di [18].

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente piano, allora³⁶

$$\begin{aligned} AD + BD - A^3 - 3A^2B - 3AB^2 - B^3 &= (A + B)D - (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \\ &= (A + B)D - (A + B)^3. \end{aligned}$$

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A + B)$ per $(D - A^2 - 2AB - B^2)$.

PROPOSIZIONE XLII

Ottenere un solido combinato, attraverso la sottrazione, con un cubo costituito da un quadrato e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente lunghezza. Si vuole ottenere un solido sottraendo $(A + B)^3$ ad $(A + B)^2D$. Moltiplicando $(A + B)^2$ per $(D - A - B)$ risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)^2(D - A - B) &= A^2D + 2ABD + B^2D - A^3 - 3A^2B - 3AB^2 - B^3 \\ &= (A^2 + 2AB + B^2)D - (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \\ &= (A + B)^2D - (A + B)^3. \end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente lunghezza D , allora³⁷

$$\begin{aligned} A^2D + 2ABD + B^2D - A^3 - 3A^2B - 3AB^2 - B^3 &= \\ &= (A^2 + 2AB + B^2)D - (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3) \\ &= (A + B)^2D - (A + B)^3. \end{aligned}$$

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A + B)^2$ per $(D - A - B)$.

³⁶«Si fuerint due latera, una cum coefficiente sublateralis plano: solidum a latere primo in coefficientis planum, plus solido a latere secundo in coefficientis planum, minus cubo lateris primi, minus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, minus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, minus cubo lateris secundi, æquatur solido sub adgregato laterum, & coefficiente sublateralis plano, adfecto multa cubi ab adgregato eodem.» Vedi p. 32 di [18].

³⁷«Si fuerint due latera, & subquadratica coefficientis longitudo: solidum a quadrato lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido a plano duplo sub lateribus in coefficientem longitudinem, plus solido a quadrato lateris secundi in coefficientem longitudinem, minus cubo lateris primi, minus solido a quadrato lateris primi in latus secundum triplum, minus solido a latere primo in lateris secundi quadratum triplum, minus cubo lateris secundi, est æquale solido sub quadrato adgregati laterum, & coefficiente longitudine, adfecto multa cubi ab adgregato eodem.» Vedi p. 32 di [18].

PROPOSIZIONE XLIII

Ottenere un “piano-piano” combinato, attraverso la sottrazione, con un “quadrato-quadrato” costituito da un lato e un solido, mediante una radice binomia e un coefficiente solido.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente solido. Si vuole ottenere un “piano-piano” sottraendo $(A + B)^4$ ad $(A + B)D$. Moltiplicando $(A + B)$ per $(D - A^3 - 3A^2B - 3AB^2 - B^3) = (D - (A + B)^3)$ risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)(D - (A + B)^3) &= AD + BD - A^4 - 4A^3B - 6A^2B^2 - 4AB^3 - B^4 \\ &= (A + B)D - (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) \\ &= (A + B)D - (A + B)^4. \end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente solido D , allora³⁸

$$\begin{aligned} AD + BD - A^4 - 4A^3B - 6A^2B^2 - 4AB^3 - B^4 \\ = (A + B)D - (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) \\ = (A + B)D - (A + B)^4. \end{aligned}$$

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A + B)$ per $(D - A^3 - 3A^2B - 3AB^2 - B^3)$.

PROPOSIZIONE XLIV

Ottenere un “piano-piano” combinato, attraverso la sottrazione, con un “quadrato-quadrato” costituito da un cubo e una lunghezza, mediante una radice binomia e un coefficiente.

Sia $(A + B)$ la radice binomia e sia D il coefficiente lunghezza. Si vuole ottenere un “piano-piano” sottraendo $(A + B)^4$ ad $(A + B)^3D$.

³⁸«Si fuerint due latera, & præterea coefficiens solidum: latus primum in coefficiens solidum, plus latere secundo in idem solidum, minus quadrato-quadrato lateris primi, minus cubo lateris primi in latus secundum quadruplum, minus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, minus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, minus quadrato-quadrato lateris secundi, æquatur plano-plano ex adgregato laterum in coefficiens solidum, adfecto multa quadrato-quadrati ab adgregato prædicto.» Vedi p. 33 di [18].

Moltiplicando $(A + B)^3$ per $(D - A - B)$ risulta che

$$\begin{aligned} (A + B)^3(D - A - B) &= A^3D + 3A^2BD + 3AB^2D + B^3D \\ &\quad - A^4 - 4A^3B - 6A^2B^2 - 4AB^3 - B^4 \\ &= (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)D \\ &\quad - (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) \\ &= (A + B)^3D - (A + B)^4. \end{aligned}$$

TEOREMA

Se si considerano due lati A , B e un coefficiente lunghezza D , allora³⁹

$$\begin{aligned} A^3D + 3A^2BD + 3AB^2D + B^3D - A^4 - 4A^3B - 6A^2B^2 - 4AB^3 - B^4 &= \\ = (A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3)D - (A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4) &= \\ = (A + B)^3D - (A + B)^4. \end{aligned}$$

Ciò si ottiene dalla moltiplicazione di $(A + B)^3$ per $(D - A - B)$.

Tutti questi Teoremi vengono trattati in modo più completo e approfondito nell'opera "De numerosa potestatum resolutione".

2.5 Genesi dei triangoli.

PROPOSIZIONE XLV

Determinare un triangolo rettangolo a partire da due numeri assegnati.

Siano A e B due numeri, si vuole costruire un triangolo rettangolo.

Occorre prima di tutto ricordare che la somma dei quadrati dei cateti di un triangolo rettangolo è uguale al quadrato del lato opposto all'angolo retto; quest'ultimo è detto ipotenusa ed è il lato maggiore, gli altri due invece sono detti *perpendicularum* e *basis*, ovvero perpendicolare e base. Inoltre va tenuta in considerazione la *Proposizione XIII*, che afferma che:

$$(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB.$$

³⁹«Si fuerint due latera, & præterea coefficiens longitudo: cubus lateris primi in coefficientem longitudinem, plus solido sub quadrato lateris primi & latere secundo triplo in eandem longitudinem, plus solido sub latere primo & lateris secundi quadrato triplo in eandem longitudinem, plus cubo lateris secundi primi in latus secundum quadruplum, minus quadrato lateris primi in lateris secundi quadratum sextuplum, minus latere primo in lateris secundi cubum quadruplum, minus quadrato-quadrato lateris secundi, æquatur plano-plano sub coefficiente longitudine & cubo adgregati laterum, adfecto multa quadrato-quadrati ab adgregato eodem.» Vedi p. 33 di [18].

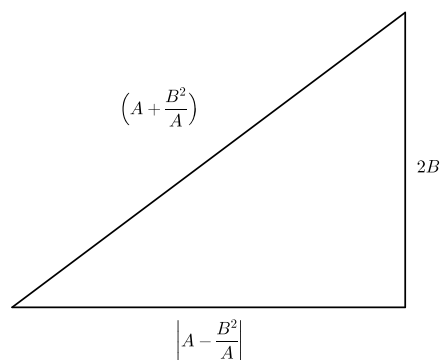
Detto ciò si determini il terzo proporzionale relativo ad A e B , che corrisponde a $\frac{B^2}{A}$, ottenendo la seguente proporzione

$$A : B = B : \frac{B^2}{A}. \quad (2.6)$$

Ora applicando ad A e al terzo proporzionale $\frac{B^2}{A}$ la *Proposizione XIII*, si ha che

$$\left(A + \frac{B^2}{A}\right)^2 = \left(A - \frac{B^2}{A}\right)^2 + 4B^2,$$

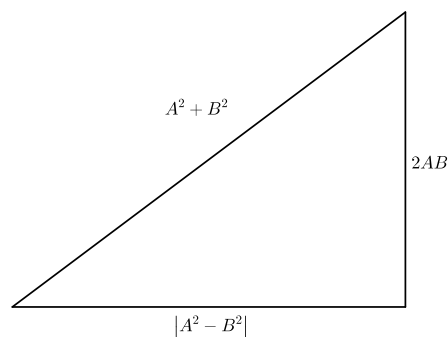
quindi la somma degli estremi di (2.6) $\left(A + \frac{B^2}{A}\right)$ rappresenta l'ipotenusa; la loro differenza $\left|A - \frac{B^2}{A}\right|$ la base e la somma dei medi $2B$ il perpendicolare:



Moltiplicando tutti i termini di (2.6) per A si ha che

$$A^2 : AB = AB : B^2,$$

quindi, analogamente a prima, si ricava che l'ipotenusa corrisponde ad $(A^2 + B^2)$, la base a $|A^2 - B^2|$ e il perpendicolare a $2AB$:⁴⁰



⁴⁰ «Enimvero hypotenusa fit similis adgregato quadratorum, basis differentiae eorundem, perpendicularum duplo rectangulo.» Vedi p. 34 di [18].

In conclusione se si considerano tre grandezze in proporzione il triangolo rettangolo costruito partendo da esse ha l'ipotenusa simile alla somma degli estremi, la base alla loro differenza e il perpendicolare al doppio del termine medio.

CONSEGUENZA

Il perpendicolare del triangolo rettangolo costruito è il medio proporzionale fra la somma della base e dell'ipotenusa e la loro differenza; [infatti

$$\left(A + \frac{B^2}{A} + A - \frac{B^2}{A}\right) : 2B = 2B : \left(A + \frac{B^2}{A} - A + \frac{B^2}{A}\right)$$

$$2A : 2B = 2B : 2\frac{B^2}{A}$$

Moltiplicando tutti i termini per A si ha ottiene

$$2A^2 : 2AB = 2AB : 2B^2$$

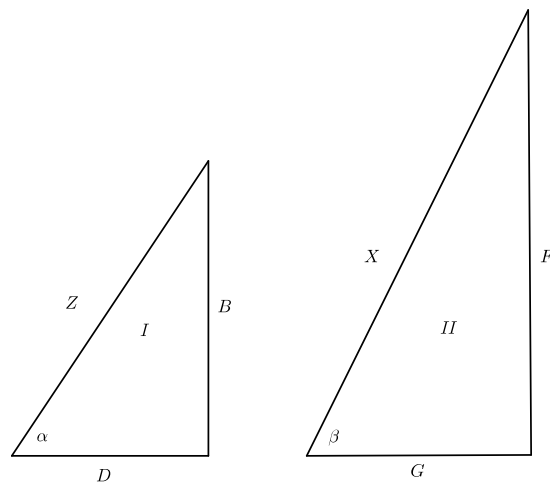
$$(A^2 + B^2 + A^2 - B^2) : 2AB = 2AB : (A^2 + B^2 - A^2 + B^2). \quad]n.c.$$

PROPOSIZIONE XLVI

Dati due triangoli rettangoli costruirne un terzo.

Si considerino due triangoli rettangoli (*I*) e (*II*) tali che

<i>Triangolo rettangolo:</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
Ipotenusa	Z	X
Base	D	G
Perpendicolare	B	F
Angolo base-ipotenusa	α	β



Per il teorema di Pitagora

$$X^2 = F^2 + G^2 \quad \text{e} \quad Z^2 = B^2 + D^2. \quad (2.7)$$

Facendo il prodotto membro a membro tra le (2.7) si ottiene

$$(XZ)^2 = (BG)^2 + (DF)^2 + (BF)^2 + (DG)^2. \quad (2.8)$$

Sommando alla prima coppia di termini e sottraendo all'ultima $2BGDF$, si ottiene:

$$\begin{aligned} (XZ)^2 &= (BG)^2 + 2BGDF + (DF)^2 + (BF)^2 - 2BGDF + (DG)^2 \\ &= (BG + DF)^2 + (BF - DG)^2; \end{aligned} \quad (2.9)$$

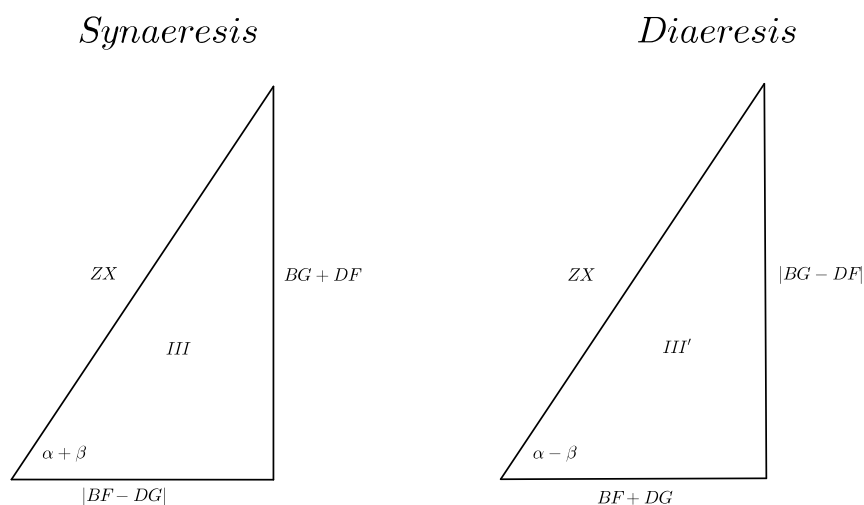
viceversa, sottraendo alla prima coppia di termini e sommando all'ultima $2BGDF$ in (2.8) si ha:

$$\begin{aligned} (XZ)^2 &= (BG)^2 - 2BGDF + (DF)^2 + (BF)^2 + 2BGDF + (DG)^2 \\ &= (BG - DF)^2 + (BF + DG)^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

L'equazione (2.9) determina il triangolo rettangolo (*III*) di ipotenusa XZ , perpendicolare $(BG + DF)$, base $|BF - DG|$ e angolo base-ipotenusa $(\alpha + \beta)$; invece la (2.10) determina il triangolo rettangolo (*III'*) di ipotenusa XZ , perpendicolare $|BG - DF|$, base $(BF + DG)$ e angolo base-ipotenusa $(\alpha - \beta)$. Riassumendo:

<i>Triangolo rettangolo:</i>	<i>III</i>	<i>III'</i>
Ipotenusa	XZ	XZ
Base	$ BF - DG $	$(BF + DG)$
Perpendicolare	$(BG + DF)$	$ BG - DF $
Angolo base-ipotenusa	$\alpha + \beta$	$\alpha - \beta$

La costruzione del triangolo (*III*) mediante i triangoli (*I*) e (*II*) è definita **sineresi** (*synaeresis*), invece la determinazione del triangolo (*III'*) dai triangoli (*I*) e (*II*) è detta **dieresi** (*diaresis*):



In conclusione l'ipotenusa del terzo triangolo risulta simile al prodotto dell'ipotenusa del primo per l'ipotenusa del secondo, mentre il perpendicolare e la base assumono dei valori diversi a seconda del metodo scelto. Mediante la sineresi il perpendicolare è simile alla somma del prodotto della base del primo per il perpendicolare del secondo e del prodotto della base del secondo per il perpendicolare del primo, la base invece risulta simile alla differenza fra il prodotto delle due basi e il prodotto dei perpendicolari. Diversamente applicando la dieresi il perpendicolare è simile alla differenza dei fattori reciprocamente della base di uno per il perpendicolare dell'altro, mentre la base risulta simile alla somma del prodotto delle basi e del prodotto dei perpendicolari. [Inoltre il triangolo rettangolo costruito per sineresi ha l'angolo opposto al perpendicolare uguale ad $(\alpha + \beta)$, mentre in quello costruito per dieresi l'angolo vale $(\alpha - \beta)$. Quest'ultimo risultato si può dimostrare facilmente ricordando che:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta\end{aligned}\tag{2.11}$$

e tenendo presente che, considerati i triangoli (I) e (II),

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{B}{Z} & \cos \alpha &= \frac{D}{Z}, \\ \sin \beta &= \frac{F}{X} & \cos \beta &= \frac{G}{X}.\end{aligned}$$

Successivamente sostituendo nelle (2.11) si ottiene proprio:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \frac{BG + DF}{XZ} \\ \sin(\alpha - \beta) &= \frac{BG - DF}{XZ}. \text{]n.c.}\end{aligned}$$

TEOREMA

Dati due triangoli rettangoli:

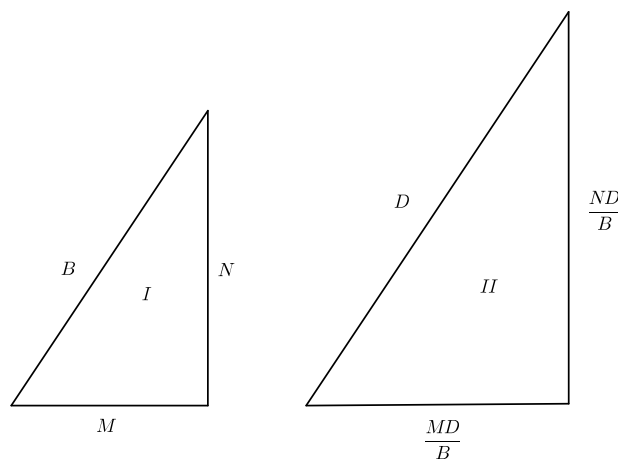
- il quadrato del prodotto delle ipotenuse è uguale al quadrato della somma dei prodotti delle basi per i perpendicolari, più il quadrato della differenza fra il prodotto delle basi e il prodotto dei perpendicolari;
- il quadrato del prodotto delle ipotenuse corrisponde al quadrato della differenza dei prodotti delle basi per i perpendicolari, più il quadrato della somma del prodotto delle basi e del prodotto dei perpendicolari.

PROPOSIZIONE XLVII

Dati due triangoli rettangoli simili, determinare un terzo triangolo rettangolo tale che il quadrato della sua ipotenusa sia uguale alla somma del quadrato dell'ipotenusa del primo e del quadrato dell'ipotenusa del secondo.

Si considerino due triangoli rettangoli (*I*) e (*II*) tali che

<i>Triangolo rettangolo:</i>	<i>I</i>	<i>II</i>
Ipotenusa	B	D
Base	M	$\frac{MD}{B}$
Perpendicolare	N	$\frac{ND}{B}$



Si vuole determinare un terzo triangolo rettangolo tale che il quadrato della sua ipotenusa sia uguale a $(B^2 + D^2)$, cioè un triangolo di ipotenusa $\sqrt{B^2 + D^2}$. Per il teorema di Pitagora, applicato al triangolo (*I*),

$$B^2 = M^2 + N^2,$$

quindi moltiplicando $(B^2 + D^2)$ per $(M^2 + N^2)$ e poi dividendo per B^2 si ha che

$$B^2 + D^2 = \frac{(B^2 + D^2)(M^2 + N^2)}{B^2}.$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{aligned} B^2 + D^2 &= \frac{B^2M^2 + D^2N^2 + B^2N^2 + D^2M^2}{B^2} \\ &= \frac{(BM)^2 + (DN)^2 + (BN)^2 + (DM)^2}{B^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Sommando alla prima coppia di termini e sottraendo all'ultima $2BDMN$, si ottiene:

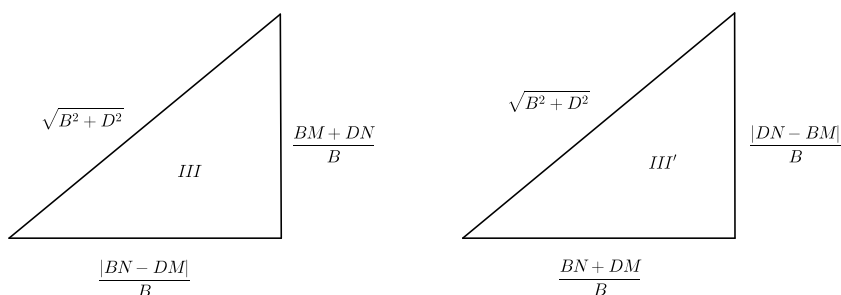
$$\begin{aligned} B^2 + D^2 &= \frac{(BM)^2 + 2BDMN + (DN)^2 + (BN)^2 - 2BDMN + (DM)^2}{B^2} \\ &= \frac{(BM + DN)^2}{B^2} + \frac{(BN - DM)^2}{B^2}; \end{aligned} \quad (2.13)$$

viceversa, sottraendo alla prima coppia di termini e sommando all'ultima $2BDMN$ in (2.12) si ha:

$$\begin{aligned} B^2 + D^2 &= \frac{(BM)^2 - 2BDMN + (DN)^2 + (BN)^2 + 2BDMN + (DM)^2}{B^2} \\ &= \frac{(BM - DN)^2}{B^2} + \frac{(BN + DM)^2}{B^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

L'equazione (2.13) determina il triangolo rettangolo (*III*) di ipotenusa $\sqrt{B^2 + D^2}$, perpendicolare $\frac{BM+DN}{B}$ e base $\frac{|BN-DM|}{B}$; invece la (2.14) determina il triangolo rettangolo (*III'*) di ipotenusa $\sqrt{B^2 + D^2}$, perpendicolare $\frac{|DN-BM|}{B}$ e base $\frac{BN+DM}{B}$. [Riassumendo:

Triangolo rettangolo:	<i>III</i>	<i>III'</i>
Ipotenusa	$\sqrt{B^2 + D^2}$	$\sqrt{B^2 + D^2}$
Base	$\frac{ BN-DM }{B}$	$\frac{BN+DM}{B}$]n.c.
Perpendicolare	$\frac{BM+DN}{B}$	$\frac{ DN-BM }{B}$



TEOREMA

Dati due triangoli rettangoli simili:

- La somma dei quadrati delle ipotenuse è uguale al quadrato della somma della base del primo e del perpendicolare del secondo, più il quadrato della differenza fra il perpendicolare del primo e la base del secondo.

Esempio

Considerando i triangoli (I) e (II) risulta che:

$$\begin{aligned} B^2 + D^2 &= \left(\frac{BM + DN}{B} \right)^2 + \left(\frac{BN - DM}{B} \right)^2 \\ &= \left(M + \frac{ND}{B} \right)^2 + \left(N - \frac{MD}{B} \right)^2. \end{aligned}$$

n.c.

- La somma dei quadrati delle ipotenuse è uguale al quadrato della somma del perpendicolare del primo e della base del secondo, più il quadrato della differenza fra la base del primo e il perpendicolare del secondo.

Esempio

Considerando i triangoli (I) e (II) risulta che:

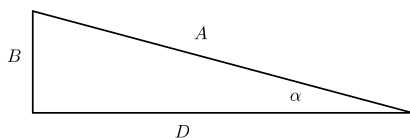
$$\begin{aligned} B^2 + D^2 &= \left(\frac{BN + DM}{B} \right)^2 + \left(\frac{BM - DN}{B} \right)^2 \\ &= \left(N + \frac{MD}{B} \right)^2 + \left(M - \frac{ND}{B} \right)^2. \end{aligned}$$

n.c.

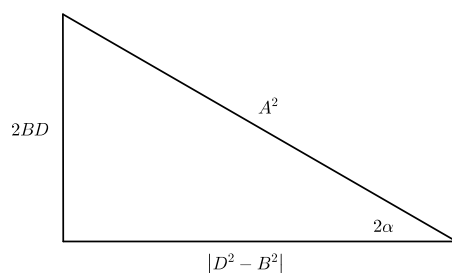
PROPOSIZIONE XLVIII

Dati due triangoli rettangoli congruenti, determinare un terzo triangolo rettangolo.

Si considerino due triangoli rettangoli congruenti, di ipotenusa A , base D e perpendicolare B :



Il terzo triangolo rettangolo si determina utilizzando la *Proposizione XLVI*, in particolare mediante la sineresi⁴¹. Esso ha ipotenusa A^2 , base $|D^2 - B^2|$ e perpendicolare $2BD$:



Questo triangolo è anche chiamato *triangolo di angolo doppio*, i due triangoli generatori invece sono detti di *angolo semplice*. Ciò risulta dal fatto che l'angolo base-ipotenusa del triangolo costruito per sineresi corrisponde alla somma degli angoli base-ipotenusa dei triangoli generatori, che in questo caso sono congruenti. Questo risultato è stato dimostrato grazie al teorema delle sezioni degli angoli da *Alexander Anderson*.

PROPOSIZIONE XLIX

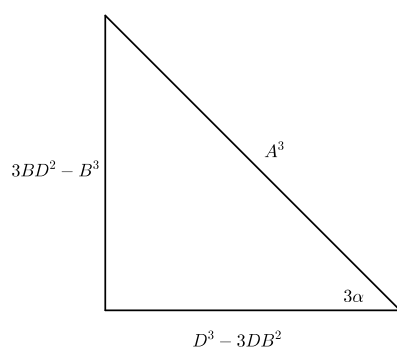
Dati due triangoli rettangoli, uno di angolo semplice e uno di angolo doppio, determinare un terzo triangolo rettangolo, detto anche *triangolo di angolo triplo*.

Si considerino due triangoli rettangoli, uno di angolo semplice e uno di angolo doppio tali che:

<i>Triangolo rettangolo di angolo</i>	<i>semplice</i>	<i>doppio</i>
Ipotenusa	A	A^2
Base	D	$ D^2 - B^2 $
Perpendicolare	B	$2BD$
Angolo base-ipotenusa	α	2α

Il terzo triangolo rettangolo si determina utilizzando la *Proposizione XLVI*, in particolare mediante la sineresi. Esso ha ipotenusa A^3 , base $(D^3 - 3DB^2)$ e perpendicolare $(3BD^2 - B^3)$:

⁴¹Se si prova ad applicare la dieresi, partendo dai due triangoli rettangoli congruenti assegnati, non si ottiene più un triangolo, bensì un segmento di lunghezza $B^2 + D^2$, cioè di lunghezza A^2 .



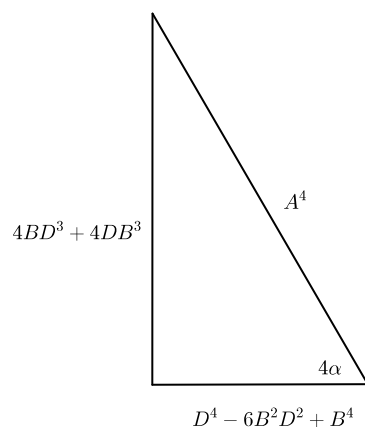
PROPOSIZIONE L

Dati due triangoli rettangoli, uno di angolo semplice e uno di angolo triplo, determinare un terzo triangolo rettangolo, detto anche *triangolo di angolo quadruplo*.

Si considerino due triangoli rettangoli, uno di angolo semplice e uno di angolo triplo tali che:

<i>Triangolo rettangolo di angolo</i>	<i>semplice</i>	<i>triplo</i>
Ipotenusa	A	A^3
Base	D	$D^3 - 3DB^2$
Perpendicolare	B	$3BD^2 - B^3$
Angolo base-ipotenusa	α	3α

Il terzo triangolo rettangolo si determina utilizzando la *Proposizione XLVI*, in particolare mediante la sineresi. Esso ha ipotenusa A^4 , base $(D^4 - 6B^2D^2 + B^4)$ e perpendicolare $(4BD^3 + 4DB^3)$:



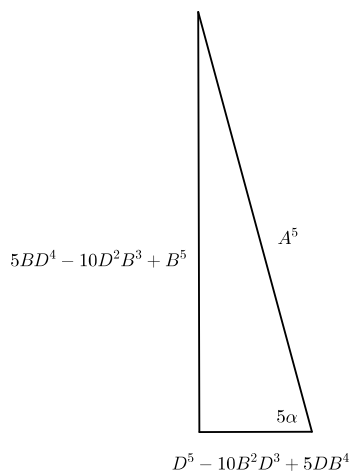
PROPOSIZIONE LI

Dati due triangoli rettangoli, uno di angolo semplice e uno di angolo quadruplo, determinare un terzo triangolo rettangolo, detto anche *triangolo di angolo quintuplo*.

Si considerino due triangoli rettangoli, uno di angolo semplice e uno di angolo quadruplo tali che:

<i>Triangolo rettangolo di angolo</i>	<i>semplice</i>	<i>quadruplo</i>
Ipotenusa	A	A^4
Base	D	$D^4 - 6B^2D^2 + B^4$
Perpendicolare	B	$4BD^3 + 4DB^3$
Angolo base-ipotenusa	α	4α

Il terzo triangolo rettangolo si determina utilizzando la *Proposizione XLVI*, in particolare mediante la sineresi. Esso ha ipotenusa A^5 , base $(D^5 - 10B^2D^3 + 5DB^4)$ e perpendicolare $(5BD^4 - 10D^2B^3 + B^5)$:



Da questi teoremi è possibile formulare delle considerazioni generali sullo sviluppo dei triangoli rettangoli:⁴²

⁴² « Si qua potestas componatur a binomia radice, & singularia facta homogenea distribuuntur in duas partes successive, utrobique primim adfirmata deinde negata, & harum primæ parti similis fiat basis trianguli rectanguli alicuius, perpendiculum alteri. Erit hypotenusa similis ipsi potestati. Cum autem triangulum illud cuius basis similis sit, vel æqualis uni è radicibus compositionis, perpendiculum vero alteri, a suo cui perpendiculum subtenditur angulo, denominationem sortietur. Triangula sane ab iisdem radicibus diducta, per quoscunque potestatum ordines commode ab eodem angulo multiplici denominabuntur, secundum conditionem

[Dati due triangoli rettangoli, uno di angolo semplice e uno di angolo n volte più grande, determinare un terzo triangolo rettangolo.

Si considerino due triangoli rettangoli tali che:

Triangolo rettangolo di angolo	<i>semplice</i>	<i>multiplo</i>
Ipotenusa	A	$Z_n = A^n$
Base	D	X_n
Perpendicolare	B	Y_n
Angolo base-ipotenusa	α	$\alpha_n = n\alpha$

Il terzo triangolo rettangolo si determina utilizzando la *Proposizione XLVI*, in particolare mediante la sineresi. Esso ha ipotenusa Z_{n+1} , base X_{n+1} e perpendicolare Y_{n+1} :

$$\begin{aligned}
 Z_{n+1} &= AZ_n & Z_0 &= A \\
 X_{n+1} &= |DX_n - BY_n| \quad \text{con} & X_0 &= D \\
 Y_{n+1} &= BX_n + DY_n & Y_0 &= B \\
 \alpha_{n+1} &= \alpha + \alpha_n & \alpha_0 &= \alpha.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Affinché esista un tale triangolo rettangolo è necessario che l'angolo base-ipotenusa sia minore o uguale di $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. *Osservazione:* Da queste proposizioni è possibile ricavare le formule trigonometriche di $\sin(n\alpha)$ e $\cos(n\alpha)$, con $n\alpha \leq (\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

Si consideri il triangolo rettangolo di angolo semplice α , di ipotenusa A , base D e perpendicolare B , si ha che

$$\sin \alpha = \frac{B}{A} \quad \cos \alpha = \frac{D}{A}. \tag{2.16}$$

Dalle (2.15) si ricava che

$$\sin(n\alpha) = \frac{BX_{n-1} + DY_{n-1}}{AZ_{n-1}} = \frac{X_{n-1}}{Z_{n-1}} \frac{B}{A} + \frac{Y_{n-1}}{Z_{n-1}} \frac{D}{A},$$

potestatis. Duplo, videlicet cum potestas est quadratum. Triplo, cum cubus. Quadruplo, cum quadrato-quadratum. Quintuplo, cum quadrato-cubus, & eo in infinitum progressu.» Vedi p. 37 di [18].

Letteralmente: «Quando si ha una potenza binomia, accompagnata da singoli omogenei, l'ipotenusa del triangolo sarà uguale alla stessa potenza, mentre la base e il perpendicolare risulteranno uguali a due sue radici. Il triangolo rettangolo prenderà il nome dall'angolo acuto sotteso dal suo perpendicolare. Infatti se la potenza è quadrata l'angolo è doppio e il triangolo è detto di angolo doppio, se la potenza è cubica l'angolo è triplo e il triangolo è detto di angolo triplo, se la potenza è un "quadrato-quadrato" è detto di angolo quadruplo, se la potenza è un "quadrato-cubo" è detto di angolo quintuplo e così via all'infinito.

$$\cos(n\alpha) = \frac{DX_{n-1} - BY_{n-1}}{AZ_{n-1}} = \frac{X_{n-1}}{Z_{n-1}} \frac{D}{A} - \frac{Y_{n-1}}{Z_{n-1}} \frac{B}{A}.$$

Sostituendo le (2.16) si ottiene

$$\begin{aligned} \sin(n\alpha) &= \frac{X_{n-1}}{Z_{n-1}} \sin \alpha + \frac{Y_{n-1}}{Z_{n-1}} \cos \alpha, \\ \cos(n\alpha) &= \frac{X_{n-1}}{Z_{n-1}} \cos \alpha - \frac{Y_{n-1}}{Z_{n-1}} \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Esempio

Ricaviamo le formule di duplicazione di $\sin \alpha$ e di $\cos \alpha$, partendo dalle (2.17).

Sia $n = 2$:

$$\sin(2\alpha) = \frac{X_1}{Z_1} \sin \alpha + \frac{Y_1}{Z_1} \cos \alpha = \frac{D}{A} \sin \alpha + \frac{B}{A} \cos \alpha,$$

$$\cos(2\alpha) = \frac{X_1}{Z_1} \cos \alpha - \frac{Y_1}{Z_1} \sin \alpha = \frac{D}{A} \cos \alpha - \frac{B}{A} \sin \alpha,$$

sostituendo le (2.16) si ottengono le note formule

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha) &= 2 \sin \alpha \cos \alpha, \\ \cos(2\alpha) &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

n.c.

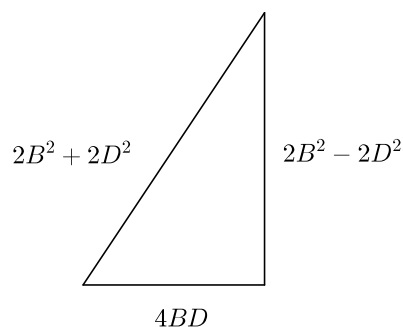
PROPOSIZIONE LII

Determinare un triangolo rettangolo, dalla somma di due numeri assegnati e dalla loro differenza.

Si considerino due numeri B e D ; per costruire un triangolo rettangolo a partire dalla somma $(B + D)$ e dalla differenza $|B - D|$, si utilizza la *Proposizione XLV*.

Il triangolo che si ricava ha

- ipotenusa $(B + D)^2 + (B - D)^2 = 2B^2 + 2D^2$,
- base $(B + D)^2 - (B - D)^2 = 4BD$,
- perpendicolare $2(B + D)(B - D) = 2B^2 - 2D^2$.

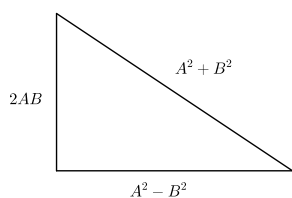


Se si fosse costruito il triangolo rettangolo partendo da due valori assegnati, si sarebbe ottenuto un triangolo dello stesso tipo con i cateti scambiati.

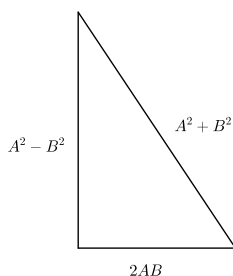
CONSEGUENZA

Se si determinano due triangoli rettangoli, uno da due numeri assegnati e l'altro partendo dalla somma di quegli stessi numeri e dalla loro differenza, allora i triangoli ottenuti risultano simili una volta scambiati i cateti fra loro.

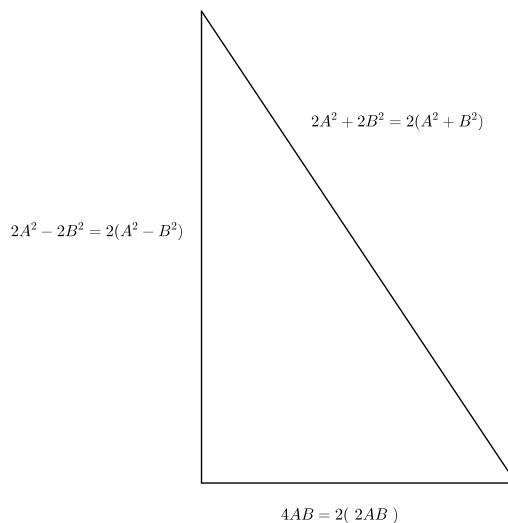
PROPOSIZIONE XLV
Dati A e B determinare un triangolo rettangolo



Scambiando i lati che formano l'angolo retto :



PROPOSIZIONE LII
Dati $(A + B)$ e $|A - B|$ determinare un triangolo rettangolo

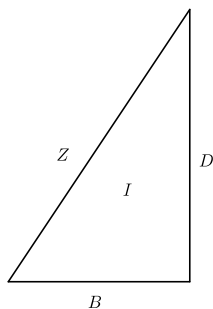


n.c.

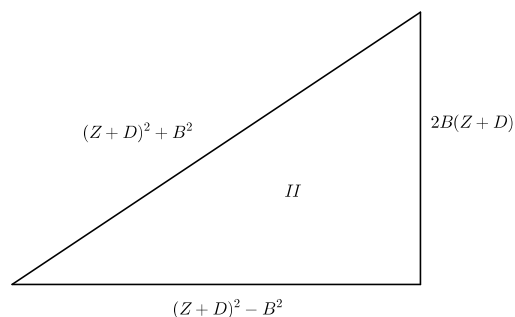
PROPOSIZIONE LIII

Determinare un triangolo rettangolo utilizzando la base di un triangolo rettangolo assegnato e la somma della sua ipotenusa e del suo perpendicolare.

Si consideri il triangolo rettangolo (I) di ipotenusa Z , di base B e di perpendicolare D :



Il triangolo rettangolo (*II*) generato da B e $(Z + D)$, si determina utilizzando la *Proposizione XLV*. Esso ha ipotenusa $(Z + D)^2 + B^2$, base $(Z + D)^2 - B^2$ e perpendicolare $2B(Z + D)$:



In questo modo il triangolo rettangolo (*I*) risulta simile al triangolo rettangolo (*II*). Infatti se si considera il prodotto di $2(Z + D)$ ora per B , ora per D , risulta che

$$B : D = (2Z + 2D)B : (2Z + 2D)D$$

$$B : D = (2BZ + 2BD) : (2DZ + 2D^2)$$

inoltre per il teorema di Pitagora $D^2 = (Z^2 - B^2)$ e $Z^2 = (D^2 + B^2)$, quindi si può concludere che

$$B : D = (2BZ + 2BD) : (2DZ + 2Z^2 - 2B^2)$$

$$B : D = (2BZ + 2BD) : (Z^2 + 2DZ + D^2 + B^2 - 2B^2)$$

$$B : D = 2B(Z + D) : (Z + D)^2 - B^2$$

da cui segue che i lati del triangolo (*I*) e quelli del triangolo (*II*) sono proporzionali, perciò (*I*) e (*II*) sono equiangoli.

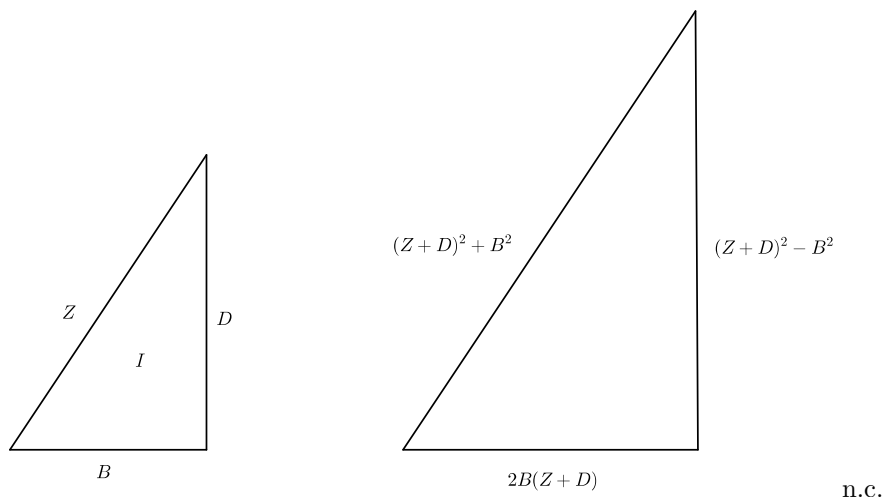
In conclusione, si può affermare che il perpendicolare del primo triangolo sta alla base del secondo triangolo, come la base del primo sta al perpendicolare del secondo:

$$D : (Z + D)^2 - B^2 = B : 2B(Z + D).$$

CONSEGUENZA I

Se dalla base di un triangolo rettangolo fissato e dalla somma della sua ipotenusa e del suo perpendicolare viene costruito un altro triangolo rettangolo, questo è simile al primo con i cateti scambiati.

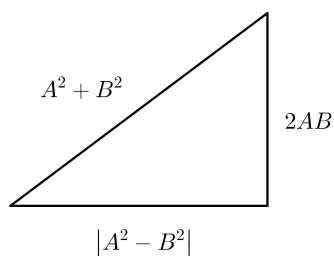
Scambiando i due cateti del triangolo rettangolo (II) :



CONSEGUENZA II

Nei triangoli rettangoli si ha che: la somma dell'ipotenusa e del perpendicolare sta alla base come la somma dei numeri assegnati per costruire il triangolo sta alla loro differenza. Questo risultato deriva dall'unione della *Conseguenza I* e della *Conseguenza* relativa alla *Proposizione LII*.

Si consideri la *Proposizione XLV*, nella quale si determina il seguente triangolo rettangolo a partire da due numeri assegnati A e B :



Poiché la moltiplicazione per un fattore comune non altera una proporzione, si ha che:

$$\begin{aligned}
 (A+B)(A+B) : |A-B|(A+B) &= (A+B) : |A-B| \\
 (A^2 + B^2 + 2AB) : |A^2 - B^2| &= (A+B) : |A-B|. \quad (2.18)
 \end{aligned}$$

Ricordando che $(A^2 + B^2)$, $2AB$, $|A^2 - B^2|$ sono rispettivamente l'ipotenusa, la base e il perpendicolare del triangolo rettangolo determinato da A e B , si ottiene quanto enunciato.

CONSEGUENZA III

Nei triangoli rettangoli si ha che: la somma dell'ipotenusa e del perpendicolare meno la base sta alla somma dell'ipotenusa, del perpendicolare e della base come il numero minore, fra quelli assegnati per costruire il triangolo, sta a quello maggiore. Questo risultato si ottiene attraverso la dieresi e la sineresi, applicate alla proporzione (2.18).

Sia $A > B$, applicando la dieresi a (2.18), cioè applicando la *proprietà dello scomporre*, si ottiene la seguente proporzione:⁴³

$$(A^2 + B^2 + 2AB - A^2 + B^2) : (A^2 - B^2) = 2B : (A - B). \quad (2.19)$$

Applicando la sineresi a (2.18), cioè applicando la *proprietà del comporre*, invece si ricava che⁴⁴

$$(A^2 + B^2 + 2AB + A^2 - B^2) : (A^2 - B^2) = 2A : (A - B).$$

Infine attraverso la *proprietà dell'invertire* si può concludere che⁴⁵

$$(A^2 - B^2) : (A^2 + B^2 + 2AB + A^2 - B^2) = (A - B) : 2A. \quad (2.20)$$

Ora da (2.19) e (2.20) segue che⁴⁶

$$(A^2 + B^2 + 2AB - A^2 + B^2) : (A^2 + B^2 + 2AB + A^2 - B^2) = B : A. \quad (2.21)$$

CONSEGUENZA IV

In un triangolo rettangolo si ha che: la somma dell'ipotenusa e del perpendicolare meno la base sta alla somma dell'ipotenusa, del perpendicolare e della base come la differenza della base e dell'ipotenusa sta al perpendicolare.

⁴³«Enimvero per diæresin analogiæ antecedentis Consectarii fit, ut composita ex hypotenusa & perpendiculo multata base ad basin, ita radix minor bis sumpta ad radicum differentiam.» Vedi p. 38 di [18].

⁴⁴«Et per synæresin eiusdem analogiæ, ut composita ex hypotenusa perpendiculo & base ad basin, ita radix maior bis sumpta ad radicum differentiam.» Vedi p. 39 di [18].

⁴⁵«Et hunc analogismum invertendo, erit ut basis ad compositam ex hypotenusa perpendiculo & base, ita differentia radicum ad radicem maiorem duplam.» Vedi p. 39 di [18].

⁴⁶«Quamobrem ex æquo erit, ut composita ex hypotenusa & perpendiculo multata base ad compositam ex hypotenusa & perpendiculo adiunctam basi, ut minor radix ad maiorem. Quod est ipsummet consectarium tertium, cuius Laconice expressa demonstratio erat exemplificanda, quamvis absque antecedentis consectarii auxilio brevius demonstrari possit.» Vedi p. 39 di [18].

Siano B e D due numeri tali che $B < D$, il triangolo determinato da essi ha ipotenusa $(D^2 + B^2)$, base $(D^2 - B^2)$ e perpendicolare $2BD$. Poiché per la *Conseguenza III* vale (2.21), basta mostrare che la differenza della base e dell'ipotenusa sta al perpendicolare come la radice minore sta alla maggiore. La sottrazione della base dall'ipotenusa corrisponde a

$$(D^2 + B^2) - (D^2 - B^2) = 2B^2,$$

da cui segue che

$$(D^2 + B^2) - (D^2 - B^2) : 2BD = 2B^2 : 2BD.$$

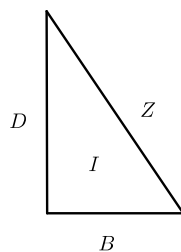
Quindi dividendo il terzo e il quarto termine della proporzione per $2B$ la proporzione non viene alterata e si ottiene proprio che

$$(D^2 + B^2) - (D^2 - B^2) : 2BD = B : D.$$

PROPOSIZIONE LIV

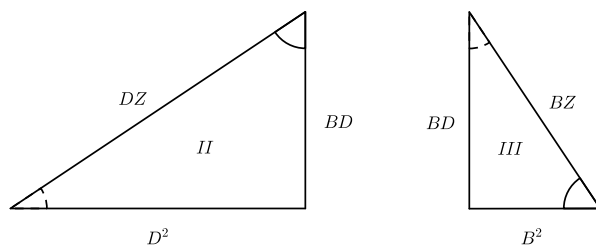
Dato un triangolo rettangolo determinare due triangoli rettangoli della stessa altezza, dall'unione dei quali si ottiene un altro triangolo rettangolo che ha per cateti le due ipotenuse, per base la somma delle basi e per altezza il perpendicolare dei due triangoli.

Si consideri il triangolo rettangolo (*I*) di ipotenusa Z , base B e perpendicolare D :

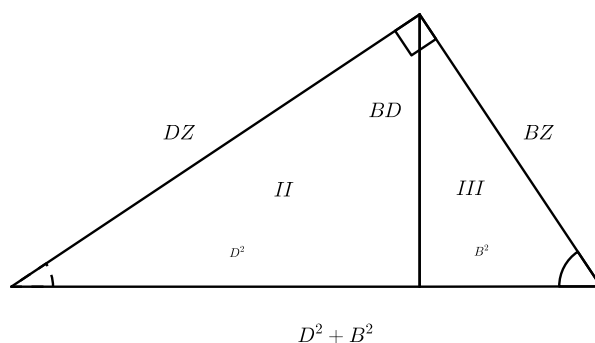


Da (*I*) si possono ottenere due triangoli rettangoli simili (*II*) e (*III*) tali che

<i>Triangoli rettangoli simili</i>	(II)	(III)
Ipotenusa	DZ	BZ
Base	D^2	B^2
Perpendicolare	BD	BD



Dall'unione di (II) e (III) si ottiene il triangolo che ha per cateti le due ipotenuse, DZ e BZ , per base la somma delle basi, $(D^2 + B^2)$ e per altezza il perpendicolare di (II) e (III), BD :



L'angolo formato dalle due ipotenuse DZ e BZ è retto, infatti i triangoli (I), (II) e (III) sono simili fra loro, in quanto

$$B : D = D : \frac{D^2}{B} = Z : \frac{DZ}{B},$$

da cui segue, moltiplicando per B che

$$B^2 : BD = BD : D^2 = BZ : DZ.$$

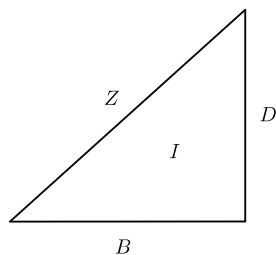
In questo modo l'angolo sotteso dal perpendicolare di (II) è il complementare dell'angolo sotteso dal perpendicolare di (III).

PROPOSIZIONE LV

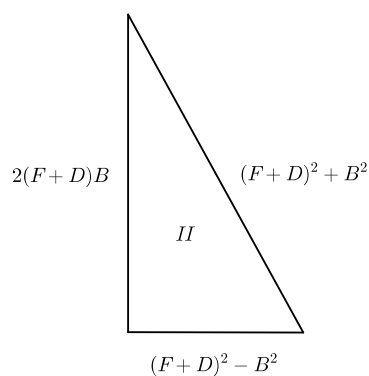
Dato un triangolo rettangolo determinare due triangoli rettangoli della stessa altezza, dall'unione dei quali si ottiene un altro triangolo che ha per lati le due

ipotenuse, per base la somma delle basi, per altezza il perpendicolare dei due triangoli ed ha l'angolo al vertice acuto.

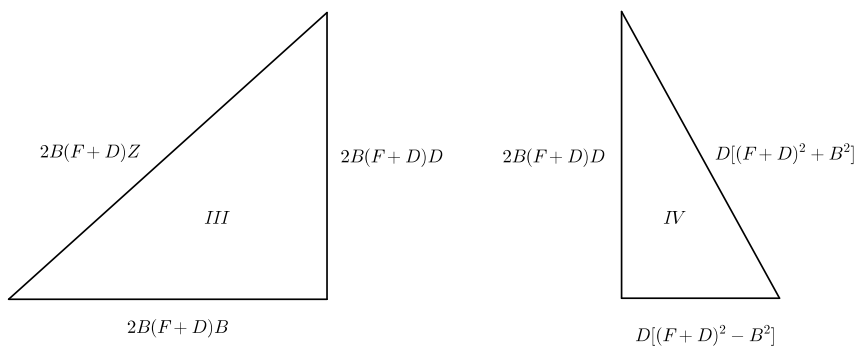
Si considerino il triangolo rettangolo (*I*) di ipotenusa Z , base B e perpendicolare D e due "radici" B e $(F + D)$, tali che $F < Z$.



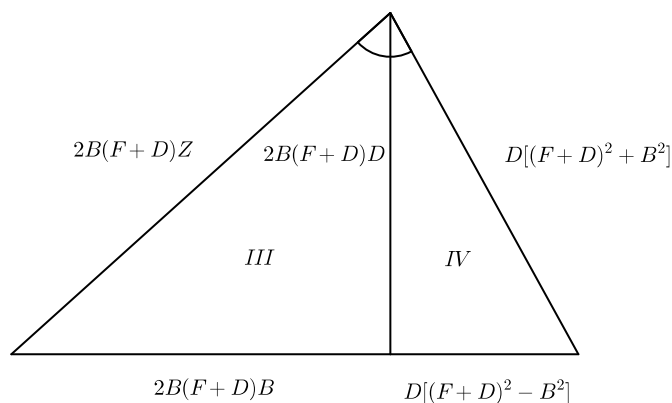
Applicando la *Proposizione XLV* si può costruire il triangolo rettangolo (*II*) partendo dai numeri assegnati B e $(F + D)$:



Ora si considerino i triangoli (*III*) e (*IV*) simili rispettivamente a (*I*) e (*II*); (*III*) deriva dalla moltiplicazione per $2B(F + D)$ dei lati del triangolo (*I*), mentre (*IV*) si determina moltiplicando per D i lati di (*II*):



Dall'unione di (III) e (IV) si ottiene il triangolo che ha per lati le due ipotenuse, per base la somma delle basi e per altezza il perpendicolare dei due triangoli:



L'angolo formato dalle due ipotenuse è acuto, infatti se questo fosse retto dovrebbe essere soddisfatta la seguente relazione:

$$2B(F+D)B : 2B(F+D)D = 2B(F+D)D : \frac{4B^2(F+D)^2D^2}{2B(F+D)B},$$

che equivale a

$$2B(F+D)B : 2B(F+D)D = 2B(F+D)D : (2D^2F + 2D^3). \quad (2.22)$$

Tuttavia, considerando i triangoli (III) e (IV), risulta che il terzo termine proporzionale non corrisponde a $(2D^2F + 2D^3)$ ma alla base del triangolo (IV), cioè

$$D[(F+D)^2 - B^2] = DF^2 + 2FD^2 + D^3 - B^2D = 2FD^2 - B^2D + D(F^2 + D^2).$$

Ricordando che per ipotesi $F < Z$ e che $Z^2 = D^2 + B^2$, si ha che

$$F^2 + D^2 < Z^2 + D^2 = 2D^2 + B^2,$$

da cui segue che

$$2FD^2 - B^2D + D(F^2 + D^2) < 2D^2F + 2D^3.$$

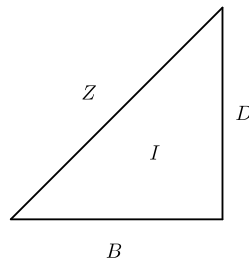
Pertanto si può concludere che l'angolo compreso fra le due ipotenuse è acuto.

PROPOSIZIONE LVI

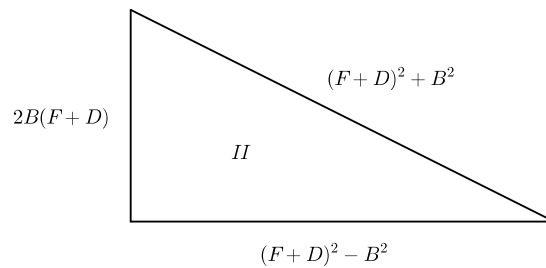
Dato un triangolo rettangolo determinare due triangoli rettangoli della stessa altezza, dall'unione dei quali si ottiene un altro triangolo che ha per lati le due ipotenuse, per base la somma delle basi, per altezza il perpendicolare dei due

triangoli ed ha l'angolo al vertice ottuso.

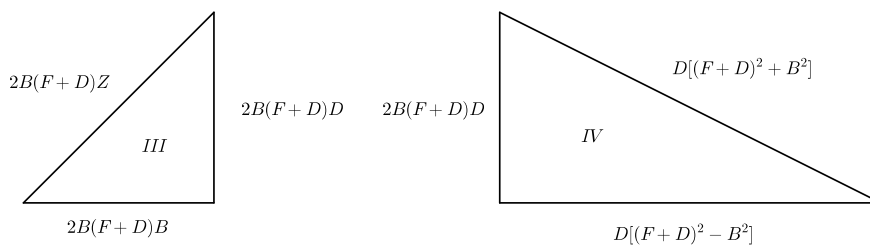
Si considerino il triangolo rettangolo (*I*) di ipotenusa Z , base B e perpendicolare D e due "radici" B e $(F + D)$, tali che $F > Z$.



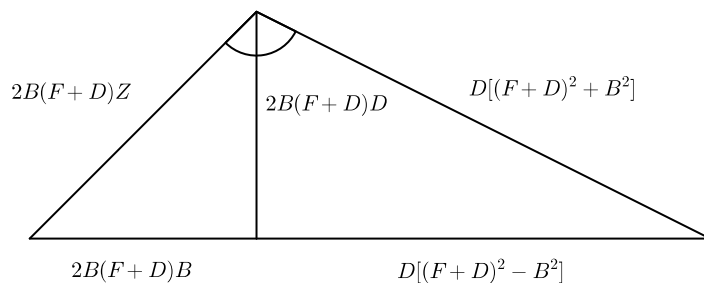
Applicando la *Proposizione XLV* si può costruire il triangolo rettangolo (*II*) partendo dai numeri assegnati B e $(F + D)$:



Ora si considerino i triangoli (*III*) e (*IV*) simili rispettivamente a (*I*) e (*II*); (*III*) deriva dalla moltiplicazione per $2B(F + D)$ dei lati del triangolo (*I*), mentre (*IV*) si determina moltiplicando per D i lati di (*II*):



Dall'unione di (*III*) e (*IV*) si ottiene il triangolo che ha per lati le due ipotenuse, per base la somma delle basi e per altezza il perpendicolare dei due triangoli:



L'angolo formato dalle due ipotenuse è ottuso, infatti se questo fosse retto dovrebbe essere soddisfatta la relazione (2.22); tuttavia, considerando i triangoli (III) e (IV), risulta che il terzo termine proporzionale non corrisponde a $(2D^2F + 2D^3)$ ma alla base del triangolo (IV), cioè

$$D[(F+D)^2 - B^2] = 2FD^2 - B^2D + D(F^2 + D^2).$$

Ricordando che per ipotesi $F > Z$ e che $Z^2 = D^2 + B^2$, si ha che

$$F^2 + D^2 > Z^2 + D^2 = 2D^2 + B^2,$$

da cui segue che

$$2FD^2 - B^2D + D(F^2 + D^2) > 2D^2F + 2D^3.$$

Pertanto si può concludere che l'angolo compreso fra le due ipotenuse è ottuso.

Capitolo 3

ZETETICORUM libri quinque

LIBER PRIMUS.

ZETETICUM I

Data differentia duorum laterum, & adgregato eorumdem, invenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum, & datum quoque D adgregatum eorumdem. Oportet invenire latera. Latus minus esto A , maius igitur erit $A + B$. Adgregatum ideo laterum $A2 + B$. At idem datum est D . Quare $A2 + B$ æquatur D . Et per antithesin, $A2$ æquabitur $D - B$, & omnibus subduplatis, A æquabitur $D\frac{1}{2} - B\frac{1}{2}$.

Vel, latus maius esto E . Minus igitur erit $E - B$. Adgregatum ideo laterum $E2 - B$. At idem datum est D . Quare $E2 - B$ æquabitur D & per antithesin, $E2$ æquabitur $D + B$, & omnibus subduplatis E æquabitur $D\frac{1}{2} + B\frac{1}{2}$. Data igitur differentia duorum laterum & adgregato eorumdem, inveniuntur latera.

Enimvero

Adgregatum dimidium laterum minus dimidia differentia æquale est lateri minori, plus eadem maiori.

Quod ipsum est quod arguitur Zetesis.

Sit B 40, D 100, A fit 30, E 70.

ZETETICUM II

Data differentia duorum laterum, & ratione eorumdem, invenire latera.

Sit data B differentia duorum laterum, data quoque ratio minoris lateris ad maius ut R ad S . Oportet invenire latera. Latus minus esto A . Ergo latus

maius erit $A + B$. Quare A ad $A + B$, est ut R ad S . Quo analogismo resoluta, S in A , $+R$ in B . Et per translationem sub contraria adfectionis nota S in A , $-R$ in A æquabitur R in B & omnibus per $S - R$ divisus; $\frac{R \text{ in } B}{S - R}$ æquabitur A . Unde est, ut $S - R$ ad R , ita B ad A .

Vel latus maius esto E . Ergo latus erit $E - B$. Quare E ad $E - B$ est ut S ad R . Quo analogismo resoluta, R in E æquabitur S in $E - S$ in B . Et per translationem congruam S in $E - R$ in E æquabitur S in B . Unde est, ut $S - R$ ad S , ita B ad E . Data igitur differentia duorum laterum, & ratione eorumdem, inveniuntur latera. Enimvero

Est ut differentia similium duorum laterum ad simile latus maius minusve, ita differentia laterum verorum ad latus verum maius minusve.

Sit B 12, R 2, S 3, A fit 24, E 36.

ZETETICUM III

Data summa laterum, & ratione eorumdem: invenire latera.

Sit data summa duorum laterum G , & ratio minoris ad maius ut R ad S . Oportet invenire latera. Latus minus esto A . Ergo latus maius erit $G - A$. Quare est A ad $G - A$, ut R ad S . Quo analogismo resoluta S in A æquabitur R in $G - R$ in A . Et facta secundum artem translatione, S in $A + R$ in A æquabitur R in G . Unde erit, ut $S + R$ ad R , ita G ad A .

Vel, latus maius esto E . Ergo latus minus erit $G - E$. Quare ut E ad $G - E$, ita S ad R . Quo analogismo resoluta R in E æquatur S in $G - S$ in E . Et facta secundum artem translatione, S in $E + R$ in E æquabitur S in G . Unde erit, ut $S + R$ ad S , ita G ad E . Data igitur summa duorum laterum & ratione eorumdem: dantur latera. Est enim

Ut summa similium duorum laterum ad simile latus maius minusve, ita summa laterum verorum ad latus verum maius minusve.

Sit G 60, R 2, S 3, A fit 24, E 36.

ZETETICUM IV

Datis duobus lateribus deficientibus à iusto, una cum ratione defectuum:
invenire latus iustum.

Sint data duo latera deficientia à iusto, primum B , secundum D : data quoque ratio defectus primi ad defectum secundi ut R ad S . Oportet invenire latus iustum. Defectus primi esto A . Ergo $B + A$ erit latus iustum. Quoniam autem est ut R ad S , ita A ad $\frac{S \text{ in } A}{R}$. Igitur $\frac{S \text{ in } A}{R}$ erit defectus secundi. Quare $D + \frac{S \text{ in } A}{R}$ erit quoque latus iustum, & ideo $D + \frac{S \text{ in } A}{R}$ æquabitur $B + A$. Omnia in R . Ergo D in $R + S$ in A æquabitur B in $R + A$ in R . Et æqualitate ordinata D in $R = B$ in R æquabitur R in $A = S$ in A . Unde erit, ut $R = S$

ad R , ita $D = B$ ad A .

Vel, defectus secundi esto E . Ergo $D + E$ erit latus iustum. Quoniam autem est ut S ad R , ita E ad $\frac{R \text{ in } E}{S}$. Igitur $\frac{R \text{ in } E}{S}$ erit defectus primi. Quare $B + \frac{R \text{ in } E}{S}$ erit quoque latus iustum, & ideo æquabitur $D + E$. Omnia in S . Ergo $B \text{ in } S + R \text{ in } E$ æquabitur $D \text{ in } S + S \text{ in } E$. Et æqualitate ordinata $D \text{ in } S = B \text{ in } S$ æquabitur $R \text{ in } E = S \text{ in } E$. Unde erit, ut $R = S$ ad S , ita $D = B$ ad E . Datis igitur duobus lateribus deficientibus à iusto cum ratione defectum: invenire latus iustum. Enimvero est

Ut differentia similium defectuum ad similem defectum lateris primi vel secundi, ita differentia laterum deficientium vera (qua est defectuum) ad defectum verum lateris primi vel secundi. Quo defectu congruenter restituo lateri deficienti, fit latus iustum.

Sit B 76, D 4, R 1, S 4, A fit 24, E 96.

ALITER

Datis duobus lateribus deficientibus à iusto, una cum ratione defectuum:
invenire latus iustum.

Sit rursus duo latera deficientia à iusto, primum B , secundum D : data quoque ratio defectus primi ad defectum secundi ut R ad S . Oportet invenire latus iustum. Esto illud A . Ergo $A - B$ erit defectus primi & $A - D$ defectus secundi. Quare ut $A - B$ ad $A - D$, sic R ad S . Quo analogismo resoluta $R \text{ in } A - R \text{ in } D$ æquabitur $S \text{ in } A - S \text{ in } B$. Factaque secundum artem translatione, $S \text{ in } A = R \text{ in } A$, æquabitur $S \text{ in } B = R \text{ in } D$. Itaque $\frac{S \text{ in } B = R \text{ in } D}{S = R}$ æquabitur A . Datis igitur duobus lateribus deficientibus à vero una cum ratione defectum, invenitur latus iustum. Enimvero

Cum differentia inter rectangulum sub primo latere deficiente est simili defectu secundi, est rectangulum sub secundo latere deficiente est simili defectu primi applicabitur ad differentiam similium defectuum, orietur latus iustum de quo quæritur.

Sit B 76, D 4, R 1, S 4, A fit 100.

ZETETICUM V

Datis duobus lateribus excedentibus iustum, una cum ratione excessum:
invenire latus iustum.

Sint data duo latera excedentia iustum, primum B , secundum D : data quoque ratio excessus primi ad excessum secundi ut R ad S . Oportet invenire latus iustum. Excessus primi esto A . Ergo $B - A$ erit latus iustum. Quoniam autem est ut R ad S , ita A ad $\frac{S \text{ in } A}{R}$. Ergo $\frac{S \text{ in } A}{R}$ erit excessus secundi. Quare $D - \frac{S \text{ in } A}{R}$ erit quoque latus iustum, & ideo æquabitur $B - A$. Omnia in R .

Ergo D in $R - S$ in A æquabitur B in $R - R$ in A . Et æqualitate ordinata D in $R = B$ in R æquabitur S in $A = R$ in A . Unde erit, ut $S = R$ ad R , ita $D = B$ ad A .

Vel, excessus secundi esto E . Ergo $D - E$ erit latus iustum. Quoniam autem est, ut S ad R , ita E ad $\frac{R \text{ in } E}{S}$. Ergo $\frac{R \text{ in } E}{S}$ erit excessus primi. Quare $B - \frac{R \text{ in } E}{S}$ erit quoque latus iustum, & ideo æquabitur $D - E$. Omnia ducantur in S . Ergo B in $S - R$ in E æquabitur D in $S - S$ in E . Et æqualitate ordinata D in $S = B$ in S æquabitur S in $E = R$ in E . Unde erit, ut $S = R$ ad S , ita $D = B$ ad E . Datis igitur duobus lateribus excedentibus iustum cum ratione excessum: invenitur latus iustum. Enimvero est

Ut differentia similium excessuum ad similem excessum lateris primi vel secundi, ita differentia excedentium vera (quæ & excessum) ad excessum verum primi vel secundi. Quo congruenter ablato à latere excedente, fit latus iustum.

Sit B 60, D 40, S 3, R 1, A fit 40, E 120.

ALITER

Datis duobus lateribus excedentibus iustum, una cum ratione excessum:
invenire latus iustum.

Sit rursus duo latera excedentia iustum, primum B , secundum D : data quoque ratio excessus primi ad excessum secundi ut R ad S . Oportet invenire latus iustum. Esto illud A . Ergo $B - A$ erit excessus primi & $D - A$ excessus secundi. Quare ut $B - A$ ad $D - A$, ita R ad S . Quo analogismo resolutio R in $D - R$ in A æquabitur S in $B - S$ in A . Factaque secundum artem translatione, S in $A = R$ in A , æquabitur S in $B = R$ in D . Itaque $\frac{S \text{ in } B=R \text{ in } D}{S=R}$ æquabitur A . Datis igitur duobus lateribus excedentibus iustum una cum ratione excessum: invenitur latus iustum. Enimvero

Cum differentia inter rectangulum sub primo latere excedente & simili excessu secundi, & rectangulum sub secundo latere excedente & simili excessu primi adplicabitur ad differentiam similium excessuum, orietur latus iustum.

Sit B 60, D 140, S 3, R 1, A fit 20.

ZETETICUM VI

Datis duobus lateribus uno deficiente à iusto, altero iustum excedente, una cum ratione defectus ad excessum: invenire latus iustum.

Sint data duo latera, unum B deficiens à iusto, alterum D excedens: data quoque ratio defectus ad excessum ut R ad S . Oportet invenire latus iustum. Defectus esto A . Ergo latus iustum erit $B + A$. Quoniam autem est ut R ad S , ita A ad $\frac{S \text{ in } A}{R}$. Ergo $\frac{S \text{ in } A}{R}$ erit excessus. Quare $D - \frac{S \text{ in } A}{R}$ erit quoque latus iustum, & ideo æquatur $B + A$. Omnia in R . Ergo D in $R - S$ in A

æquabitur B in $R+R$ in A . Et æqualitate ordinata R in $A+S$ in A , æquabitur D in $R-B$ in R . Unde erit, ut $S+R$ ad R , ita $D-B$ ad A .

Vel, excessus esto E . Ergo latus iustum erit $D-E$. Quoniam autem est ut S ad R , ita E ad $\frac{R \text{ in } E}{S}$. Ergo $\frac{R \text{ in } E}{S}$ erit defectus. Quare $B + \frac{R \text{ in } E}{S}$ erit quoque latus iustum, & ideo æquabitur $D-E$. Omnia in S . Ergo B in $S+R$ in E æquabitur D in $S-S$ in E . Et æqualitate ordinata R in $E+S$ in E æquabitur D in $S-B$ in S . Unde erit, ut $S-R$ ad S , ita $D-B$ ad E . Datis igitur duobus lateribus uno deficiente à iusto altero iustum excedente, una cum ratione defectus ad excessum: invenitur latus iustum. Enimvero est

Ut adgregatum similis defectus & similis excessus ad similem defectum vel excessum, ita differentia deficientis & excedentis vera (quæ summa est veri defectus & excessus) ad defectum vel excessum verum. Itaque restituto defectu lateri deficienti, vel amputato excessu à latere excedente, fit latus iustum.

Sit B 60, D 180, R 1, S 5, A fit 20, E 100.

ALITER

Datis duobus lateribus uno deficiente à iusto, altero iustum excedente, una cum ratione defectus ad excessum: invenire latus iustum.

Sit rursus data duo latera, unum B deficiens à iusto, alterum D excedens iustum: data quoque ratio defectus ad excessum ut R ad S . Oportet invenire latus iustum. Esto illud A . Ergo $A-B$ erit defectus. Et $D-A$ erit excessus. Quare est ut $A-B$ ad $D-A$, ita R ad S . Quo analogismo resoluta R in $D-R$ in A æquabitur S in $A-S$ in B . Factaque secundum artem translatione, S in $A+R$ in A , æquabitur R in $D+S$ in B . Itaque $\frac{R \text{ in } D+S \text{ in } B}{S+R}$ æquabitur A . Datis igitur duobus lateribus uno deficiente à iusto, altero iustum excedente, una cum ratione defectus ad excessum: invenitur latus iustum. Enimvero

Cum adgregatum factum ex simili defectu in latus excedens, & facti ex simili excessu in latus deficiens, applicabitur ad adgregatum similium excessus & defectus, orietur latus iustum.

Sit B 60, D 180, R 1, S 5, A fit 80.

ZETETICUM VII

Datum latus ita secare, ut præfinitæ unciaëuniis segmenti, adiunctæ præfinitis unciaë alterius: æquent summam præscriptam.

Sit datum B latus ita secundum in duo segmenta, ut cum portio primi segmenti se habens ad assem, id est, ad ipsum primum segmentum ut D ad B ; adiecta portioni secundi segmenti se habentis ad assem, id est, ad ipsum segmentum ut F ad B : faciat H . Portio à primo segmento præstanda ut faciat H , esto A .

Portio igitur à secundo contribuenda erit $H - A$. Et quoniam est ut D ad B , ita A ad $\frac{B \text{ in } A}{D}$ ideo $\frac{B \text{ in } A}{D}$: erit as primi segmenti. Et quoniam est ut F ad B , ita $H - A$ ad $\frac{B \text{ in } H=B \text{ in } A}{F}$: ideo $\frac{B \text{ in } H=B \text{ in } A}{F}$ erit as secundi segmenti: quæ duo segmenta æquantur toti lateri dispescendo. Ergo $\frac{B \text{ in } A}{D} + \frac{B \text{ in } H=B \text{ in } A}{F}$ æquabitur B . Qua æqualitate ordinata, omnibus videlicet per D in F ductis & abs B divisus, adhibitaque congrua translatione, siquidem D maiores sint unciaë quam F , $\frac{H \text{ in } D-F \text{ in } D}{D-F}$ æquabitur A . Unde erit ut $D - F$ ad $H - F$, ita D ad A . Vel portio a secundo segmento præstanda ut faciat H , esto E . Portio igitur a primo contribuenda erit $H - E$. Et quoniam est ut F ad B , ita E ad $\frac{B \text{ in } E}{F}$: ideo $\frac{B \text{ in } E}{F}$ erit as secundi segmenti. Et quoniam est ut D ad B , ita $H - E$ ad $\frac{B \text{ in } H-B \text{ in } E}{D}$: ideo $\frac{B \text{ in } H-B \text{ in } E}{D}$ erit primi segmenti: quæ duo segmenta æquantur toti lateri dispescendo. Ergo $\frac{B \text{ in } E}{F} + \frac{B \text{ in } H-B \text{ in } E}{D}$ æquabitur B . Qua æqualitate ordinata, omnibus videlicet per F in D ductis & abs B divisus, adhibitaque congrua translatione, eo ipso casu quo D intelligantur unciaë maiores quam F , $\frac{D \text{ in } F-H \text{ in } F}{D-F}$ æquabitur E . Unde erit ut $D - F$ ad $D - H$, ita F ad E . Datis autem unciis præstitutorum segmentorum, dabuntur asses seu ipsa segmenta. Nempe $\frac{B \text{ in } A}{D}$ erit primum segmentum, & $\frac{B \text{ in } E}{F}$ secundum. Datum igitur latus ita secatur, ut præfinitæ unciaë unius segmenti cum præfinitis unciis alterius, æquent summam præscriptam. Enimvero

Secto latere dato ut asse ad similitudinem unciarum præstandarum a segmentis.

Fit,

Ut similes unciaë præstandæ a primo segmento (siquidem maiores uncias ræstat illud primum quam secundum) minus similibus unciis præstandis a secundo ad summam præstationum præscriptam minus similibus unciis præstandis a secundo segmento, ita similes uncia præstandæ a primo ad portionem veram a primo præstandam.

Vel,

Ut similes unciaë præstandæ a primo segmento minus similibus unciis præstandis a secundo ad similes uncias præstandas a primo segmento minus summa præstationum præscripta, ita similes uncia præstandæ a secundo ad portionem veram a secundo præstandam.

Sit B 60, D 20, F 12, H 14 composita ex A & E . Fit A 5, E 9.

Apparet autem eandem H summam præstationum præscribi oportere, ut media fit inter D & F . Illa scilicet minorem, hac maiorem.

Ut hic 14 est minor 20, sed maior 12.

ZETETICUM VIII

Datum latus ita secare, ut præfinitæ unciaë primi segmenti, multatæ præfinitis unciis secundi segmenti: æquent differentiam præscriptam.

Sit datum B latus secundum in duo segmenta, ut cum portio primi segmenti se habens ad assem, hoc est, ad ipsum segmentum ut D ad B ; multabitur portione secundi segmenti se habente ad assem, hoc est, ad ipsum segmentum secundum ut F ad B : faciat H . Sane alia sectio continget, si maiores unciæ exigantur a primo segmento, penes quod proponitur excessus, quam si minores. Attamen utroque casu idem opus fit. Sint igitur D maiores, minoresve unciæ, quam B . Et portio a primo segmento præstanda, esto A . Portio igitur exigenda a secundo erit $A - H$. Et quoniam est ut D ad B , ita A ad $\frac{B \text{ in } A}{D}$: erit $\frac{B \text{ in } A}{D}$ primum segmentum. Æque, cum fit ut F ad B , ita $A - H$ ad $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$: erit $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ secundum. Quæ duo segmenta æquantur toti lateri dispendendo. Ergo $\frac{B \text{ in } A}{D} + \frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ æquabitur B . Qua æqualitate ordinata $\frac{D \text{ in } F + D \text{ in } E}{D + F}$ æquabitur A . Unde erit ut $D + F$ ad $F + H$, ita D ad A . Porro cum portio a secundo præstanda sit $A - H$: ideo reliquentur ea cum subducatur H abs $\frac{D \text{ in } F + D \text{ in } H}{D + F}$. Sit igitur illa E . Ergo $\frac{D \text{ in } F - H \text{ in } F}{D + F}$ æquabitur A . Unde erit ut $D + F$ ad $D - H$, ita F ad E . Datis autem unciis præstitorum segmentorum, dabuntur asses seu ipsa segmenta. Nempe $\frac{B \text{ in } A}{D}$ erit primum segmentum, & $\frac{B \text{ in } E}{F}$ secundum. Datum igitur latus ita secatur, ut præfinitæ unciæ primi segmenti, multatæ præfinitis unciis secundi, æquent differentiam præscriptam. Enimvero

Secto latere dato ut asse ad similitudinem unciarum præstandarum a segmentis.
Fit,

Ut similes unciæ præstandæ tam a primo segmento quam secundo ad differentiam præstationum præscriptam plus similibus unciis præstandis a secundo, ita similes unciæ præstandæ a primo ad veras unciæ præstandas a primo.

Vel,

Ut similes unciæ præstandæ tam primo segmento quam secundo ad similes unciæ præstandas a primo minus differentia præstationum præscriptam, ita similes unciæ præstandæ a secundo ad veras unciæ præstandas a secundo.

Sit B 84, D 28, F 21, H 7 fit A 16, E 9.

Apparet autem talem H differentiam præstationum præscribi oportere, ut minor sit unciis D præstandis a primo segmento, penes quod proponitur excessus, sive ille sint maiores sive minores præstandis a secundo segmento.

Ut in posteriore casu 7 est minor 21.

ZETETICUM IX

Invenire duo latera, quorum differentia sit ea quæ præscribitur, & præterea præfinitæ unciæ lateris unius, adiectæ præfinitis unciis alterius, æquabunt summam præscriptam.

Sit data B differentia duorum laterum, quorum primi portio se habens ad assem,

hoc est, ad ipsum latus primum ut D ad B ; adiecta portioni minoris se habenti ad assem, hoc est, ad ipsum latus secundum ut F ad B , faciat H . Oporteat invenire duo illa latera. Aut primum latus intelligitur maius, vel minus. Primo casu intelligitur maius, & ideo portio quam contribuit primum latus, idemque maius, esto A . Portio igitur quam contribuit latus secundum, idemque minus, erit $H - A$. Et quoniam est ut D ad B , ita A ad $\frac{B \text{ in } A}{D}$: erit $\frac{B \text{ in } A}{D}$ latus maius. Et quoniam est ut F ad B , ita $H - A$ ad $\frac{B \text{ in } H - B \text{ in } A}{F}$: erit $\frac{B \text{ in } H - B \text{ in } A}{F}$ latus minus. Quare $\frac{B \text{ in } A}{D} - \frac{B \text{ in } H - B \text{ in } A}{F}$ æquabitur B . Et æqualitate ordinata; $\frac{D \text{ in } F + D \text{ in } H}{F + D}$ æquabitur A . Unde erit $F + D$ ad $F + H$, ita D ad A . Porro cum portio a secundo præstanda sit $H - A$: ideique reliquetur ea cum abs H subducetur $\frac{D \text{ in } F + H \text{ in } D}{F + D}$. Sit igitur illa E . Ergo $\frac{H \text{ in } F - D \text{ in } F}{F + D}$ æquabitur E . Unde erit ut $F + D$ ad $H - D$, ita F ad E . Secundo casu primum segmentum intelligitur minus. Ergo secundum segmentum erit maius. Portio itaque a secundo præstanda rersus esto E . Portio igitur quam contribuit primum, idemque minus, erit $H - E$. Et quoniam est ut F ad B , ita E ad $\frac{B \text{ in } E}{F}$: erit $\frac{B \text{ in } E}{F}$ latus secundum, idemque maius. Æque quoniam est ut D ad B , ita $H - E$ ad $\frac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$: erit $\frac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ latus primum, idemque minus. Quare $\frac{B \text{ in } E}{F} - \frac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ æquabitur B , & æqualitate ordinata $\frac{F \text{ in } H + F \text{ in } D}{D + F}$: æquabitur E . Unde erit ut $D + F$ ad $H + D$, ita F ad E . Porro cum portio a primo præstanda sit $H - E$: ideo reliquetur ea cum abs H subducetur $\frac{F \text{ in } H + F \text{ in } D}{D + F}$. Sit igitur illa A . Ergo $\frac{H \text{ in } D - F \text{ in } D}{F + D}$ æquabitur A , unde erit ut $F + D$ ad $H - F$, ita D ad A . Datis autem unciis laterum dabuntur asses, seu ipsa latera. Nempe $\frac{B \text{ in } A}{D}$ erit latus primum, $\frac{B \text{ in } E}{F}$ latus secundum. Inveniuntur ergo duo latera, quorum differentia sit quæ præscribitur & præterea præfinitæ uncia lateris unius, adiectæ præfinitis unciis alterius: æquabunt summam præscriptam. Enimvero *Secta laterum de quibus quæritur differentia ut asse ad similitudinem unciarum præstandarum a lateribus.*

Fit,

Ut similes uncia præstandæ tam a maiore quam minore latere ad summam præstationum præscriptam plus similibus unciis lateris minoris, ita similes uncia maioris ad uncias veras a maiore latere præstandas.

Vel,

Ut similes uncia præstandæ tam maiore quam minore latere ad summam præstationum præscriptam minus similibus unciis lateris maioris, ita similes uncia minoris ad veras uncias a minore latere præstandas.

Sit B 84, D 28, F 21, H 98 fit A 68, E 30.

Apparet autem talem summam præstationum præscribi oportere, ut ea maior fit D , unciis similibus præstandis a maiore segmento.

Ut 98 maior est 28.

ZETETICUM X

Invenire duo latera, quorum differentia sit ea quæpræscribitur, & præterea præfinitæ unciaë primi, multatæ præfinitis unciaë secundi, æquent differentiam quoque inter eas datam.

Sit data B differentia duorum laterum, quorum primi portio se habens ad assem, hoc est, ad ipsum latus primum ut D ad B , cum multabitur portione secundi se habente ad assem, hoc est, ad ipsum latus secundum ut F ad B , faciat H . Oportet invenire duo illa latera. Aut primum latus intelligitur maius duorum, vel minus. Sive autem ad eo exigantur unciaë maiores sive minores quam a secundo, idem fere opus fit. Sit igitur D maiores minoresve unciaë a primo præstandæ. Verum primo casu primum illud latus a quo præstandæ unciaë multam patiuntur sit maius duorum. Et portio sui præstanda esto A . Portio igitur a secundo præstanda erit $A - H$, ut sit præstationum illarum differentia H , cum existat excessus penes primum. Et erit latus primum $\frac{B \text{ in } A}{D}$, secundum $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$. Itaque $\frac{B \text{ in } A}{D} - \frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ æquabitur B . Qua æqualitate ordinata, siquidem F sunt maiores unciaë quam D , $\frac{F \text{ in } D - H \text{ in } D}{F - D}$ æquabitur A . Unde erit ut $F - D$ ad $F - H$, ita D ad A . Porro cum portio a secundo præstanda sit $A - H$. Ideo reliquetur, cum abs $\frac{F \text{ in } D - H \text{ in } D}{F - D}$ auferetur H . Sit igitur illa E . Ergo $\frac{F \text{ in } D - H \text{ in } D}{F - D}$ æquabitur E . Unde erit ut $F - D$ ad $D - H$, ita F ad E . Quod si e contra D maiores sint unciaë quam F . Erit ut $D - F$ ad $H - F$, ita D ad A . Et ut $D - F$ ad $H - D$, ita F ad E . Secundo casu latus primum esto minus duorum & portio sui præstanda esto rursus A . Portio igitur a secundo præstanda eoque maiore erit $A - H$. Et erit latus primum $\frac{B \text{ in } A}{D}$, secundum $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$. Itaque $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F} - \frac{B \text{ in } A}{D}$ æquabitur B . Qua æqualitate ordinata $\frac{F \text{ in } D + H \text{ in } D}{D - F}$ æquatur A . Unde erit ut $D - F$ ad $F + H$, ita D ad A . Porro cum portio a secundo præstanda eoque maiore sit $A - H$, ideo reliquetur illa cum abs $\frac{F \text{ in } D + H \text{ in } D}{D - F}$ subducetur H . Sit igitur illa E . Ergo $\frac{D \text{ in } F + H \text{ in } F}{D - F}$ æquabitur E . Unde erit ut $D - F$ ad $D + H$, ita F ad E . Series autem operis demonstrat hoc secundo casu maiores uncias exigendas esse a primo quam a secundo. Porro datis unciaë quæsitorem laterum, dabuntur asses ipsave latera. Nempe $\frac{B \text{ in } A}{D}$ erit latus primum, & $\frac{B \text{ in } E}{F}$ latus secundum. Inveniuntur ergo duo latera, quorum differentia sit quæ præscribitur, & præterea præfinitæ unciaë primi, multatæ præfinitis unciaë secundi, æquent differentiam quoque inter eas datam. Enimvero

Secta laterum de quibus quæritur differentia ut asse ad similitudinem unciaë præstandarum a lateribus, siquidem primum sit maius duorum laterum, maioresque ab eo exigantur unciaë.

Fiet,

Ut similes unciæ a primo præstandæ minus similibus unciis præstandis a secundo ad differentiam præstationum præscriptam minus similibus unciis præstandis a secundo, ita similes unciæ præstandæ a primo ad uncias veras ab eodem primo præstandas.

Vel,

Ut similes unciæ a primo præstandæ minus similibus unciis a secundo præstandis ad differentiam præstationum præscriptam minus similibus unciis a primo præstandis, ita similes unciæ præstandæ a secundo ad uncias veras a secundo præstandas.

Quod si a primo illo maiore minores exigantur unciæ quam a secundo minore, eadem vigent analogiæ factæ negationum inversione. Cum vero primum illud latus cuius unciæ præfinitæ multam patiuntur est minus quæditorum, & maiores ab eo semper exiguntur unciæ .

Fit,

Ut similes unciæ a primo præstandæ minus similibus unciis a secundo præstandis ad similes uncias præstandas a secundo plus differentia præstationum præscripta, ita similes unciæ a primo præstandæ ad veras uncias ab eodem primo præstandas.

Vel,

Ut similes unciæ a primo præstandæ minus similibus unciis a secundo præstandis ad similes uncias a primo præstandas plus differentia præstationum præscripta, ita similes unciæ a secundo præstandæ ad uncias veras a secundo præstandas.

Denique tres sunt Casus. Primus est cum latus primum, seu cuius unciæ multam patiuntur, est maius duorum, maioresque ab eo exiguntur unciæ . Secundus cum latus idem remanet maius, & minores ab eo exiguntur unciæ . Tertius cum latus illud primum est minus duorum, & maiores exiguntur unciæ . Neque enim possunt exigi minores. Primo casu oportet talem præscribi H , ut maior sit unciis similibus primi segmenti & consequenter maior quoque F unciis similibus secundi segmenti. Secundo casu minorem esse oportet ipsis D vel F . Tertio casu H minor est vel maior ipsis D vel F . Itaque potest is tertius casus concurrere sive cum primo, sive cum secundo.

I.

Sit B 12 differentia duorum laterum. D 4, F 3, H 9 differentia qua A præstat ipsi F . Quoniam H maior est sive ipsa D , sive ipsa F . Aut $\frac{B \text{ in } A}{D}$ intelligitur latus maius, aut minus.

1. Si maius A fit 24, E 15. Et $\frac{B \text{ in } A}{D}$ est 72 latus primum & maius $\frac{B \text{ in } E}{F}$ 60 latus secundum & minus. Et horum differentia est B præscripta.
2. Sin $\frac{B \text{ in } A}{D}$ intelligitur latus minus, A fit 48, E 39. Et $\frac{B \text{ in } A}{D}$ est 144, $\frac{B \text{ in } E}{F}$ 156. Et horum differentia est B præscripta.

II.

1. Rursus sit B 48 differentia duorum laterum. D 16, F 12, H 10 differentia qua A præstat ipsi D . Quoniam H minor est sive ipsa D , sive ipsa F . D vero maior est ipsa F , necessario $\frac{B \text{ in } A}{D}$ est latus minus, & $\frac{B \text{ in } E}{F}$ latus maius. Et fit A 88, E 78. Et $\frac{B \text{ in } A}{D}$ fit 264, $\frac{B \text{ in } E}{F}$ 312. Et horum differentia est B præscripta.
2. Aut sit D 12, F 16 manente B 48, H 10, necessario $\frac{B \text{ in } A}{D}$ est latus maius. Et fit A 18, E 8. Et $\frac{B \text{ in } A}{D}$ 72. Et $\frac{B \text{ in } E}{F}$ 24. Et horum differentia est B præscripta.

LIBER SECUNDUS.

ZETETICUM I

Datto rectangulo sub lateribus, & ratione laterum, invenire latera.

Vox pluralis simpliciter prolata, duorum numero contenta est. Sit igitur datum B planum, rectangulum sub lateribus duobus, quorum maioris ad minus ratio quoque data sit, ut S ad R . Oportet invenire latera. Latus maius esto A . Quoniam igitur est ut S ad R , ita A ad $\frac{R \text{ in } A}{S}$: ideo $\frac{R \text{ in } A}{S}$ erit latus minus. Planum itaque quod fit sub lateribus, erit $\frac{R \text{ in } A \text{ quadr.}}{S}$ & ideo æquale dato B plano. Omnia ducantur in S . Ergo R in $A \text{ quadr.}$ æquatur S in B . planum Itaque revocata ad analogismum æqualitate, est ut R ad S , ita B planum ad A quadratum. Aliter latus minus esto E . Quoniam igitur est ut R ad S , ita E ad $\frac{S \text{ in } E}{R}$: ideo $\frac{S \text{ in } E}{R}$ erit latus maius. Rectangulum itaque sub lateribus, erit $\frac{S \text{ in } E \text{ quadr.}}{R}$. æquale consequenter B plano. Omnia ducantur per R . Ergo S in $E \text{ quadr.}$ æquatur R in B planum. Itaque revocata ad analogismum æqualitate, est ut S ad R , ita B planum ad E quadratum. Dato igitur plano quod fit sub lateribus, una cum ratione laterum, inveniuntur latera. Enimvero est,
Ut simile latus primum ad simile latus secundum maius minusve, ita rectangulum sub lateribus ad quadratum e latere secundo maiore minoreve.
 Sit B planum 20, R 1, S 5. A IN 1Q æquatur 100. Vel sit E IN 1 Q æquatur 4.

ZETETICUM II

Dato rectangulo sub lateribus, & adgregato quadratorum, inveniuntur latera.

Enimvero, *Duplum planum sub lateribus; adiectum quidem adgregato quadratorum, æquatur quadrato summa laterum. Ablatum vero, quadrato differentia.*

Ut apparet ex genesi quadrati. Data autem differentia duorum laterum & eorum summa, dantur latera.

Sit 20. Rectangulum sub lateribus a quibus adgregata quadrata faciant 104. Summa laterum esto IN 1 Q æquatur 144. Vel differentia esto IN 1 Q æquatur 64.

ZETETICUM III

Dato rectangulo sub lateribus, & differentia laterum: inveniuntur latera.

Enimvero, *Quadratum differentia laterum, adiunctum quadruplo rectangulo sub lateribus: æquatur quadrato adgregati laterum.*

Iam enim ordinatum est, quadratum adgregati laterum, minus quadrato differentia, æquari quadruplo rectangulo sub lateribus: adeo ut sola fuerit opus anthitesi. Data porro differentia duorum laterum & eorum summa, dantur latera.

Sit 20. Rectangulum sub duobus lateribus quorum differentia est 8. Summa laterum esto IN 1 Q æquatur 144.

ZETETICUM IV

Dato rectangulo sub lateribus, & adgregato laterum: inveniuntur latera.

Enimvero, *Quadratum adgregati laterum, minus quadruplo rectangulo sub lateribus: æquatur quadrato differentia laterum.*

Ut rursus ex proxime repetita ordinatione licet inferre per anthitesin.

Sit 20. Rectangulum sub duobus lateribus quorum summa est 12. Differentia laterum esto IN 1 Q æquatur 64.

ZETETICUM V

Dato rectangulo sub lateribus, & adgregato quadratorum: inveniuntur latera.

Enimvero, *Duplum adgregatum quadratorum, minus quadrato differentia laterum: æquatur quadrato adgregati laterum.*

Iam enim ordinatum est, quadratum adgregati laterum, plus quadrato differentia, æquari duplo adgregato quadratorum, adeo ut sola fuerit opus anthitesi. Data porro differentia duorum laterum & eorum summa, dantur latera.

Sit differentia laterum 8. Adgregatum quadratorum 104. Summa laterum esto IN 1 Q æquatur 144.

ZETETICUM VI

Dato adgregato laterum, & adgregato quadratorum: inveniuntur latera.

Enimvero, *Duplum adgregatum quadratorum, minus quadrato adgragati laterum: æquatur quadrato differentiae laterum.*

Ut rursus ex proxime repetita ordinatione licet inferre per anthitesin.

Sit adgregatum laterum 12. Quadratorum 104. Differentiæ laterum esto IN 1
Q æquatur 64.

ZETETICUM VII

Data differentia laterum, & differentia quadratorum: inveniuntur latera.

Enimvero, *Cum differentia quadratorum, adplicabitur ad differentiam laterum: orietur summa laterum.*

Iam enim ordinatum est differentiam laterum, cum ducitur in adgregatum laterum, facere differentiam quadratorum. At adplicatio restitutio est operis quod efficit multiplicatio.

Sit differentia laterum 8. Quadratorum 96. Summa laterum fit 12. Itaque latus maius est 10, minus 2.

ZETETICUM VIII

Data summa laterum, & differentia quadratorum, inveniuntur latera.

Enimvero, *Cum differentia quadratorum, adplicabitur ad summam laterum orietur differentia laterum.*

Ut ex antecedente nota fit perspicuum.

Sit summa laterum 12. Differentia quadratorum 96. Differentia laterum fit 8, ideoque latus maius est 10, minus 2.

ZETETICUM IX

Dato rectangulo sub lateribus, & differentia quadratorum, invenire latera.

Sit datum B planum, rectangulum sub lateribus. Datum quoque D planum, differentia quadratorum. Oportet invenire latera. Adgregatum quadratorum esto A planum. Quadratum igitur summæ, erit A planum, $+B$ plano 2: differentiae vero, A planum, $-B$ plano 2. Summa autem laterum ducta in differentiam, facit differentia. quadratorum. Quare quadratum summæ laterum ductum in quadratum differentiae, faciet differentiam quadratorum ductam in se. Itaque A plano-planum, $-B$ plano-plano 4, æquabitur D plano-plano. Et ordinando æquationem, A plano-planum æquabitur D plano-plano, $+B$ plano-plano 4. Porro dato adgregato quadratorum, & eorum differentia, vel sub lateribus rectangulo, dantur latera. Dato igitur rectangulo sub lateribus, & differentia quadratorum,

dantur latera.

Enimvero

Quadratum abs differentia quadratorum, adiunctum quadrato dupli rectanguli, æquale est quadrato adgregati quadratorum.

Sit B planum 20. D planum 96. A planum IN 1Q æquatur 10816.

ZETETICUM X

Dato plano, quod constat tum rectangulo sub lateribus, tum quadratis singulorum laterum, datoque è lateribus uno, invenire latus reliquum.

Sit datum B planum, constans rectangulo sub lateribus & quadratis singulorum laterum, & præterea sit datum D , unum ex illis lateribus. Oportet invenire latus reliquum.

Latus de quo quæritur adiectum lateri dimidio dato, esto A . Latus igitur iustum de quo quæritur erit $A - D\frac{1}{2}$. Et eius quadratum est, A quadratum, $-D$ in A , $+D$ quadrato $\frac{1}{4}$. Quadratum vero dati est D quadratum, quæ duo quadrata addita rectangulo sub lateribus, æquantur B plano, secundum ea quæ proponuntur. Rectangulum autem sub lateribus est D in A , $-D$ quadrato $\frac{1}{2}$. Quare A quadratum, $+D$ quadrato $\frac{3}{4}$ æquabitur B plano, & ordinando æquationem, A quadratum æquabitur B plano, $-D$ quadrato $\frac{3}{4}$.

Dato igitur plano, quod constat tum rectangulo sub lateribus, tum quadratis singulorum laterum, datoque è lateribus uno, invenitur latus reliquum.

Enimvero

Planum constans rectangulo sub lateribus & quadratis singulorum laterum, mutatum dodrante quadrati lateris dati, æquale est quadrato lateris compositi, ex quæsito latere & dimidio dati.

Sit B planum 124. D 2. A IN. 1Q æq. 121. Itaque $\sqrt{121} - 1$, est latus quæsitus.

Vel sit B planum 124. D 10. A IN 1Q æquatur 49. Itaque $\sqrt{49} - 5$, est latus quæsitus.

ZETETICUM XI

Dato plano, quod constat tum rectangulo sub lateribus, tum quadratis singulorum laterum, dataque laterum illorum summa, discernere latera.

Sit datum B planum, constans rectangulo sub lateribus, & quadratis singulorum laterum, & præterea sit data G , summa illorum laterum. Oportet discernere latera. Rectangulum sub lateribus, esto A planum. Quoniam igitur quadratum summæ laterum æquatur quadratis singulorum laterum, plus duplo rectangulo. Consequenter G quadratum æquabitur B plano, $+A$ plano. Et ordinando æquationem, G quadratum, $-B$ plano æquabitur A plano.

Data autem summa laterum, & rectangulo sub lateribus, dantur latera. Dato

igitur plano, quod constat tum rectangulo sub lateribus tum quadratis singulorum laterum, ac insuper data laterum illorum summa, discernuntur latera.

Enimvero

Quadratum summa, multatum compositio illo plano, relinquit rectangulum sub lateribus.

Sit B planum 124. G 12. A planum sit 20. Itaque quadratum differentiae laterum erit 64 et ideo $12 + \sqrt{64}$ fit duplum lateris maioris. Et $12 - \sqrt{64}$ duplum lateris minoris.

ZETETICUM XII

Dato plano, quod constat tum rectangulo sub lateribus, tum quadratis singulorum laterum, datoque rectangulo illo, discernuntur latera.

Enimvero

Compositum illud planum, adiectum rectangulo, æquabitur quadrato summæ laterum.

Per illud ipsum quod superiore Zetetico inventum est & ordinatum.

Sit 124 planum constans rectangulo sub lateribus & quadratis singulorum laterum. Rectangulum autem ipsum 20. Summa laterum IN, 1Q æquatur 144 a quo dum demetur quadrulum ipsius 20, reliquetur 64 quadratum differentiae. Itaque $\sqrt{144} + \sqrt{64}$ fit duplum lateris maioris $\sqrt{144} - \sqrt{64}$ duplum lateris minoris.

ZETETICUM XIII

Dato adgregato quadratorum, & differentia eorundem, invenire latera.

Sit datum adgregatum quadratorum, D planum, & differentia eorundem, B planum. Oportet invenire latera. Duplum igitur quadratum maioris, erit D planum, $+B$ plano. Iuxta doctrinam in lateribus iam ordinatam. Dato autem duplo datur simplicium, & datis quadratis, dantur quadratorum latera.

Neque vero nova opus est ordinatione, quando quæ de lateribus adnotantur, ad alias quascumque simplices magnitudines trahi posse, vix exemplificandum fuit.

Sit D planum 104, B planum 96, latus maius IN, 1Q æquatur 100. Sit latus minus IN, 1Q æquatur 4.

ZETETICUM XIV

Data differentia cuborum, & adgregato eorundem, invenire latera.

Sit data differentia cuborum, B solidum. Datum quoque adgregatum eorundem, D solidum. Oportet invenire latera.

Duplus igitur cubus maioris lateris, erit D solidum, $+B$ solido. Duplus cubus minoris, D solidum, $-B$ solido. Iuxta doctrinam in lateribus iam ordinatam, & in quadratis rursus exemplificatam, ubi ad cuiuscumque generis magnitudines

trahi, monuimus. Dato autem duplo datur simplum, & datis cubis dantur radices, ut Zeteticum hoc vix suo sit dignum nomine.

Sit B solidum 316. D solidum 370. Latus maius IN , $1C$ æquatur 343. Sit latus minus IN , $1C$ æquatur 27.

ZETETICUM XV

Data differentia cuborum, & rectangulo sub lateribus, inveniuntur latera.

Enimvero

quadratum differentiae cuborum, plus rectanguli sub lateribus quadruplo cubo: æquatur quadrato adgregati cuborum.

Iam enim ordinatum est, quadratum adgregati cuborum minus quadrato differentiae: æquari quadruplo cubo rectanguli. Ut sola fuerit opus antithesi.

Sit differentia cuborum 316. Rectangulum sub lateribus 21. Adgregatum cuborum IN , $1Q$ æquatur 136900.

Duplus ideo cubus maior $\sqrt{136900} + 316$.

Duplus minus $\sqrt{136900} - 316$.

ZETETICUM XVI

Dato adgregato cuborum, & rectangulo sub lateribus: inveniuntur latera.

Enimvero,

Quadratum adgregati cuborum, minus quadruplo cubo rectanguli sub lateribus: æquatur quadrato differentiae cuborum.

Ut rursus ex proxime repetita ordinatione licet inferre per antithesin.

Sit adgregatum cuborum 370. Rectangulum sub lateribus 21. Differentia cuborum IN , $1Q$ æquatur 99256.

ZETETICUM XVII

Data differentia laterum, & differentia cuborum: invenire latera.

Sit data B , differentia laterum. Differentia vero cuborum, D solidum. Oportet invenire latera.

Summa laterum esto E , ergo $E+B$ erit duplum lateris maioris, & $E-B$ erit duplum lateris minoris. Differentia autem cuborum illorum, est; B in E quadratum 6, $+B$ cubo 2, æqualis consequenter D solido 8. Quare $\frac{D \text{ sol. } 4-B \text{ cubo}}{B^3}$ æquatur E quadrato.

Dati autem quadrati datur latus, & data differentia laterum & eorundem summa, dantur latera.

Data igitur differentia laterum, & differentia cuborum: invenitur summa laterum.

Enimvero,

Differentia cuborum quadrupla, minus cubo differentia laterum, si adplicetur ad triplum differentia laterum: oritur quadratum adgregati laterum.

Sit B 6, D solidum 504, summa laterum IN , 1 Q æquatur 100.

ZETETICUM XVIII

Data summa laterum & summa cuborum distinguere latera.

Sit data B , summa laterum, D solidum vero, summa cuborum. Oportet distinguere latera. Differentia laterum, esto E . Ergo $B + E$ est duplum lateris maioris, $B - E$ duplum lateris minoris. Summa itaque cuborum, est; B cubus 2, $+B$ in E quadratum 6, æqualis consequenter D solido 8. Quare $\frac{D \text{ sol. } 4-B \text{ cubo}}{B^3}$ æquatur E quadrato. Dati autem quadrati datur latus, & data summa laterum & differentia eorundem: dantur latera. Data igitur summa laterum & summa cuborum: dantur latera. Enimvero,

Summa cuborum quadrupla, minus cubo summa laterum, si adplicetur ad triplum summæ laterum: orietur quadratum differentię laterum.

Sit B 10, D solidum 370. E IN , 1 Q æquatur 16.

ZETETICUM XIX

Data differentia laterum, & differentia cuborum: invenire latera.

Sit data B differentia laterum, & datum quoque D solidum, differentia cuborum. Oportet invenire latera. Rectangulum sub lateribus esto A planum. Et vero adparet ex genesi cubi, si a differentia cuborum auferatur cubus differentię laterum, reliqui triplum solidum, quod fit a differentia laterum in rectangulum sub lateribus. Itaque D solidum, $-B$ cubo, æquabitur A plano 3 in B , & omnibus per 3 divisus, $\frac{D \text{ solidum} - B \text{ cubo}}{B^3}$ æquatur A plano. Dato autem rectangulo sub lateribus, & differentia laterum, dantur latera. Data igitur differentia laterum, & differentia cuborum, inveniuntur latera. Enimvero,

Differentia cuborum a lateribus, multata cubo differentię laterum, si adplicetur ad triplum ipsius differentię laterum, quod inde oritur planum, rectangulum est sub lateribus.

Sit B 4, D solidum 316. A planum fit 21, rectangulum sub lateribus 7 & 3.

Quod si ex differentia cuborum, & rectangulo inquireretur de differentia laterum. Ut si innotesceret A planum, esse F planum; at de B quæstio esset, sit illa A . Ita procederet æqualitas. A cubus, $+F$ plano 3 in A , æquatur D solido.

Id est,

Cubus differentię laterum, plus solido triplo a rectangulo sub lateribus in differentiam laterum, æquatur differentię cuborum.

Quod animadvertisse fuit operepretium.

ZETETICUM XX

Rursus quoque Dato adgregato laterum, & adgregato cuborum, invenire latera.

Sit datum G adgregatum laterum, & datum quoque D *solidum* adgregatum cuborum. Oportet invenire latera. Esto A *planum* rectangulum sub lateribus. Et vero adparet ex genesi cubi, si a cubo adgregati laterum subducatur adgregatum cuborum, relinqui triplum solidum, quod fit ab adgregato laterum in rectangulum sub lateribus. Itaque $\frac{G \text{ cubus} - D \text{ solido}}{G^3}$ æquabitur A *plano*. Dato autem rectangulo sub lateribus & adgregato laterum, dantur latera. Dato igitur adgregato laterum, & adgregato cuborum, inveniuntur latera. Enimvero,

Cubus adgregati laterum, multatus adgregato cuborum, si adplicetur ad triplum ipsius adgregati laterum, quod inde oritur planum, rectangulum est sub lateribus.

Sit G 10. D *solidum* 370. A *planum* fit 21, rectangulum sub lateribus 7 & 3.

Quod si ex adgregato cuborum, & rectangulo inquireretur de adgregato laterum. Ut si innotesceret A *planum*, esse B *planum*; at de G esset quæstio, sit illud A . Ita procederet æqualitas A *cubus*, $-B$ *plano* 3 in A , æquatur D *solido*. Id est, *Cubus adgregati laterum, minus solido triplo a rectangulo sub lateribus in adgregatum laterum, æquatur adgregato cuborum.*

Quod animadvertisse operepretium fuit.

ZETETICUM XXI

Datis solidis duobus, uno quod fit abs differentia laterum in differentiam quadratorum, altero quod fit abs adgregato laterum in adgregatum quadratorum, invenire latera.

Solidum primum expositum detur B *solidum*. Secundum, D *solidum*. Summa autem laterum esto A . Erit igitur $\frac{B \text{ solidum}}{A}$ quadratum differentiæ laterum. Et $\frac{D \text{ solidum}}{A}$ adgregatum quadratorum. Duplum autem adgregatum quadratorum, minus quadrato differentiæ laterum, facit quadratum adgregati laterum. Quare $\frac{D \text{ solidum}}{A} - \frac{2-B \text{ solido}}{A}$ æquabitur A *quadrato*. Omnia ducantur in A . Igitur D *solidum* 2, $-B$ *solido*, æquabitur A *cubo*. Datis igitur duobus expositis solidis, inveniuntur latera. Enimvero,

Duplum solidum abs adgregato laterum in adgregatum quadratorum, multatum solido abs differentia laterum in differentiam quadratorum: æquatur cubo adgregati laterum.

Sit B *solidum* 32. D *solidum* 272. Fit A *cubus* 512, summa igitur laterum 8. Differentia quadratum $\frac{32}{8}$, id est 4. Atque adeo ipsa differentia $\sqrt{4}$ latus itaque minus est 4, minus medietate lateris 4. Maius, est 4 plus eadem medietate.

Sit B *solidum* 10. D *solidum* 20. Fit A *cubus* 30, summa igitur laterum $\sqrt{C.30}$. Differentiæ quadratorum $\frac{10}{\sqrt{C.30}}$, aliter $\sqrt{C. \frac{100}{3}}$. Atque adeo ipsa differ-

entia $\sqrt{\text{QC} \cdot \frac{100}{3}}$, latus itaque minus est $\sqrt{\text{C} \cdot \frac{30}{8}} - \sqrt{\text{QC} \cdot \frac{100}{192}}$, latus maius $\sqrt{\text{C} \cdot \frac{30}{8}} + \sqrt{\text{QC} \cdot \frac{100}{192}}$.

At Cardanus in Arithmetice quæstione 93. Cap. 66. bene animadvertit in hac hypotesi laterum proportionem esse, minor nempe ad maius, ut $2 - \sqrt{3}$ ad 1, seu ut 1 ad $2 + \sqrt{3}$, sed latera ipsa subnotavit infeliciter.

ZETETICUM XXII

Dato adgragato quadratorum, & ratione rectanguli sub lateribus ad quadratum differentię laterum, invenire latera.

Sit datum $B \text{ planum}$, adgregatum quadratorum. Rectangulum autem sub lateribus ad quadratum differentię laterum, se habeat ut R ad S . Oportet invenire latera. Rectangulum sub lateribus esto $A \text{ planum}$. Quadratum igitur differentię laterum erit $\frac{S \text{ in } A \text{ planum}}{R}$; cui cum adiungetur duplum rectangulum, fiet adgregatum quadratorum. Ergo $\frac{S \text{ in } A \text{ planum} + R \text{ in } A \text{ planum } 2}{R}$ æquabitur $B \text{ plano}$. Qua æqualitate ad analogismum revocata, erit ut $S + R 2$ ad R , ita $B \text{ planum}$ ad $A \text{ planum}$. Datis igitur quæ exposita sunt, dantur latera.

Enimvero,

Ut quadratum differentię laterum, plus duplo simili rectangulo sub lateribus ad rectangulum simile sub lateribus, ita adgregatum verum quadratorum ad verum rectangulum.

Sit adgragatum quadratum 20. Rectangulum autem sub lateribus ad quadratum differentię eorundem se habeto, ut 2 ad 1: erit ut $S + R 2$ ad R , ita 20 ad 8. Quare 8 est rectangulum de quo quæritur. Itaque $20 - 16$ id est 4, est quadratum differentię laterum, & $20 + 16$ est quadratum adgregati. Unde differentia est $\sqrt{4}$. Summa $\sqrt{36}$, latus minus $\sqrt{9} - \sqrt{1}$, vel 2, maius vero $\sqrt{9} + \sqrt{1}$, vel 4.

Sed stante adgregato quadratorum 20. Rectangulum sub lateribus ad quadratum differentię laterum se habeto, ut 1 ad 1; hoc videlicet sit illi æquale: erit ut 3 ad 1, ita 20 ad $\frac{20}{3}$. Quare $\frac{20}{3}$ est rectangulum sub lateribus. Itaque $20 - \frac{40}{3}$, id est $\frac{20}{3}$, erit quadratum differentię laterum; & $20 + \frac{40}{3}$, id est $\frac{100}{3}$, erit quadratum adgregati. Unde $\sqrt{\frac{20}{3}}$ est differentia, & $\sqrt{\frac{100}{3}}$ adgregatum. Atque adeo latus minus est $\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{5}{3}}$, & latus maius $\sqrt{\frac{25}{3}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$. Hallucinatur itaque Cardanus in Arithmetice quæstione 94. Cap. 66.

LIBER TERTIUS.

ZETETICUM I

Data media trium proportionalium linearum rectorum, & differentia extremarum, invenire extremas.

At vero extremæ proportionales sunt ut latera. Mediæ vero quadratum est ipsum rectangulum sub lateribus. Iam autem expositum est. Dato rectangulo sub lateribus, & differentia laterum invenire latera. Itaque, quadratum differentiæ dimidiæ extremarum adiunctum mediæquadrato æquatur quadrato adgregati dimidii extremarum.

Sit differentia extremarum 10, media 12. Minor extrema est 8, maior 18.

ZETETICUM II

Data media trium proportionalium, & adgregato extremarum, invenire extremas.

Illud quoque Problema iam ante expositum est, videlicet. Dato rectangulo sub lateribus, & adgregato laterum, invenire latera.

Sit media 12, adgregatum extremarum 26, minor extrema est 8, maior 18.

ZETETICUM III

Dato perpendiculo trianguli rectorum, & differentia basis & hypotenusæ, invenire basin, & hypotenusam.

Et hoc quoque Problema iam expositum est. Ipsum enim est. Data differentia quadratorum & differentia laterum, invenire latera. Quadratum enim perpendiculi est differentia quadrati hypotenusæ a quadrato basis. Sit nempe datum trianguli rectorum perpendiculum D , B vero differentia basis & hypotenusæ. Oportet invenire basin & hypotenusam. Summa basis & hypotenusæ, esto A . Igitur B in A æquabitur D quadrato, atque ideo $\frac{D \text{ quadratum}}{B}$ æquabitur A . Data autem differentia laterum & summa eorumdem, dantur latera. Dato igitur perpendiculo trianguli rectorum, & differentia basis & hypotenusæ, dantur basis, & hypotenusam. Enimvero,

Perpendiculum trianguli rectorum proportionale est, inter differentiam basis & hypotenusæ & adgregatum eorumdem.

Sit D 5, B 1. Sunt proportionales 1, 5, 25. Itaque trianguli hypotenusam est 13, basis 12, stante perpendiculo 5. Qua etiam ratione, & id esto.

ZETETICUM IV

Dato perpendiculo rectorum trianguli, & adgregato basis & hypotenusæ, discernuntur basis & hypotenusam.

Sit perpendiculum 5, adgregatum basis & hypotenusa 25. Sunt proportionales 25, 5, 1. Itaque differentia basis & hypotenusa est 1. Ipsa vero basis 12, hypotenusa 13.

ZETETICUM V

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & differentia laterum circa rectum, invenire latera circa rectum.

Illud autem est. Data differentia laterum, & dato adgregato quadratorum, invenire latera. Quod Problema quoque iam expositum est. Sit nempe data D hypotenusa trianguli rectanguli, B vero differentia laterum circa rectum. Oportet invenire latera circa rectum. Summa laterum circa rectum esto A . Ergo $A + B$ erit duplum lateris maioris circa rectum, $A - B$ duplum lateris minoris. Quadrata ab iis angulis efformata, & addita faciunt $Aq 2 + Bq 2$, quæ ideo æquantur $Dq 4$. Itaque $Dq 2 - Bq$ æquabitur A quadrato. Data igitur hypotenusa trianguli rectanguli, & differentia laterum circa rectum, inveniuntur latera circa rectum. Enimvero,

Duplum quadratum hypotenusa, minus quadrato differentiae laterum circa rectum, æquatur quadrato summa eorumdem.

Sia D 13, B 7. A IN 1Q æquatur 289. Et fit IN $\sqrt{289}$. Itaque latera circa rectum sunt $\sqrt{72\frac{1}{4}} + 3\frac{1}{2}$ & $\sqrt{72\frac{1}{4}} - 3\frac{1}{2}$, sive 12 & 5.

ZETETICUM VI

Data hypotenusa trianguli rectanguli, & summa laterum circa rectum, invenire latera circa rectum.

Enimvero,

Duplum quadratum hypotenusa, minus quadrato adgregati laterum circa rectum, æquatur quadrato differentiae laterum circa rectum.

Ut licet inferre per antithesin antecedentis ordinationis.

Sit rursus hypotenusa 13. Summa autem laterum circa rectum 17. Differentia eorumdem IN 1Q æquabitur 49. Et fit IN $\sqrt{49}$. Itaque latera circa rectum sunt $8\frac{1}{2} + \sqrt{12\frac{1}{4}}$, & $8\frac{1}{2} - \sqrt{12\frac{1}{4}}$, sive 12 & 5.

ZETETICUM VII

Inveniuntur tres proportionales lineæ rectæ numero.

Enimvero,

Adsumptis duobus lateribus se habentibus, ut numerus ad numerum. Maior extrema proportionalium fiet similis, quadrato lateris adsumpti maioris. Media, rectangulo sub lateribus. Minor extrema, quadrato minoris lateris adsumpti.

Sint rationalia latera B & D . Cum B statuatur prima proportionalium, D vero

secunda, tertia erit $\frac{D \text{ quadratum}}{B}$. Omnia per B ducantur, & series proportionalium fiet

$$\begin{array}{ccc} I & II & III \\ B \text{ quadratum.} & B \text{ in } D. & D \text{ quadratum.} \end{array}$$

Sit B 2. D 3. Fiunt proportionales 4, 6, 9.

ZETETICUM VIII

Invenitur triangulum rectangulum numero.

Enimvero,

Constitutis tribus proportionalibus numero, hypotenusa fiet similis adgregato extremarum, basis differentiae, perpendicularum mediae duplæ.

Nempe iam ordinatum est, perpendicularum trianguli proportionale esse inter differentiam basis & hypotenusæ, & adgregatum eorundem.

Exhibentor proportionales numero 4, 6, 9. Ab iis constituetur trianguli rectanguli hypotenusa 13, basis 5, perpendicularum 12.

ALITER,

ZETETICUM IX

Invenitur triangulum rectangulum numero.

Enimvero,

Adsumptis duobus lateribus rationalibus, hypotenusa fit similis adgregato quadratorum, basis differentiae eorundem, perpendicularum duplo sub lateribus rectangulo.

Sint duo latera B & D . Sunt igitur proportionalia tria latera B , D , $\frac{D \text{ quadratum}}{B}$. Omnia in B . Sunt tria proportionalia plana Bq B in D , Dq A quibus proportionalibus fit per antedicta, hypotenusa trianguli similis $Bq+Dq$, basis $Bq = Dq$, perpendicularum B in D 2. Et alioqui iam ordinatum est. Quadratum ab adgregato quadratorum, æquare quadratum a differentia quadratorum, adiunctum quadrato dupli rectanguli sub lateribus.

Sit B 2. D 3. Hypotenusa fiet similis 13, basis 5, perpendicularum 12.

ZETETICUM X

Dato adgregato quadratorum a singulis tribus proportionalibus, atque ea in serie extremarum una, inveniuntur altera extrema.

Enimvero,

Adgregatum illud quadratorum, multatum dodrante quadrati extremæ datæ, æquale est quadrato composita ex dimidio datæ extremæ, & altera tota de qua quæritur.

Id autem ita perspicue iam inventum est, & demonstratum, ut novo non sit opus

processu.

Adgregatum quadratorum a tribus proportionalibus sit 21, harum autem extrema maior sit 4. Igitur $21 - 12$ id est 9, est quadratum composita, ex 2 & minore quæsita. At radix quadrati 9 est $\sqrt{9}$, quare minor quæsita est $\sqrt{9} - 2$, id est 1.

Sed stante eodem adgregato quadratorum 21, sit extrema minor 1. Igitur $20\frac{1}{4}$, seu $\frac{81}{4}$ est quadratum composita, ex $\frac{1}{2}$ & maiore quæsita. At radix quadrati $\frac{81}{4}$ est $\sqrt{\frac{81}{4}}$, quare maior quæsita est $\sqrt{\frac{81}{4}} - \frac{1}{2}$, id est 4.

ZETETICUM XI

Dato adgregato quadratorum a singulis tribus proportionalibus, ac summa extremarum, discernuntur extremæ.

Enimvero,

Quadratum adgregati extremarum, multatum adgregato quadratorum a tribus, æquatur mediæ quadrato.

Data autem summa extremarum, & media, dantur extremæ. Idem quoque ita perspicue iam inventum est, & demonstratum, ut novo non sit opus processu.

Sit adgregatum quadratorum a tribus 21. Summa extremarum 5, $25 - 21$, id est 4, est media quadratum. Unde est media $\sqrt{4}$. Extrema 1 & 4.

ZETETICUM XII

Dato adgregato quadratorum a singulis tribus proportionalibus, ac media ipsarum, discernuntur extremæ.

Enimvero,

Adgregatum quadratorum a tribus, plus mediæ quadrato, æquatur quadrato adgregati extremarum.

Ex antecedente ordinatione adhibita artis metathesi. Data autem summa extremarum, & media, dantur extremæ.

Sit adgregatum quadratorum a tribus 21, media 2. $21 + 4$ id est 25, fit quadratum adgregati extremarum. Unde extrema sunt 1 & 4.

ZETETICUM XIII

Data differentia extremarum, & differentia mediarum in serie quatuor continue proportionalium, invenire continue proportionales.

Idem quoque Problema iam ante expositum est, idque duplici Zetetico. Illud enim est. Data differentia laterum, & differentia cuborum, invenire latera. Ut processu evidens fiet. Sit igitur data differentia extremarum D , & data B differentia mediarum in serie quatuor continue proportionalium. Oportet invenire continue proportionales. Adgregato extremarum esto A . Ergo $A + D$

erit maior extrema dupla, & $A - D$ minor extrema dupla. Cum itaque $A + D$ ducetur in $A - D$, fiet rectangulum quadruplum sub mediis vel extremis. Itaque $\frac{A \text{ quadratum} - D \text{ quadrato}}{4}$ est rectangulum illud, in quod cum ducetur extrema maior, fiet cubus mediæ maioris. Cum minor, fiet cubus mediæ minoris. Cum denique utriusque extremæ differentia, fiet differentia cuborum a mediis. Quare $\frac{D \text{ in } A \text{ quadrat.} - D \text{ cubo}}{4}$, æquatur differentiæ cuborum a mediis. Si autem abs differentia cuborum auferatur cubus differentiæ laterum, quod reliquetur æquale est solido triplo ex differentia laterum in rectangulum sub lateribus, ut adparet ex genesi cubi a differentia duorum laterum. Quare $\frac{D \text{ in } A \text{ q.} - D \text{ cubo} - B \text{ cubo } 4}{4}$ æquatur solido triplo ex differentia mediarum in rectangulum sub mediis, videlicet $\frac{B \text{ in } Aq. 3 - B \text{ in } Dq. 3}{4}$. Qua æqualitate ordinata; $\frac{D \text{ cubus} + B \text{ cubo } 4 - B \text{ in } Dq. 3}{D - B 3}$ æquabitur $A \text{ quadrato}$. Data igitur differentia extremarum, & differentia mediarum in serie quatuor continue proportionalium, inveniuntur continue proportionales.

Enimvero,

Cum cubus differentiæ extremarum, plus cubo quadruplo differentiæ mediarum, minus solido triplo sub differentia mediarum & quadruplo quadrati differentiæ extremarum adplicabitur ad differentiam extremarum, minus triplo differentiæ mediarum: Planum quod oritur, æquale est quadrato adgregati extremarum.

Sit $D 7$, $B 2$. A IN $1Q$ æquatur 81 , & fit IN $\sqrt{81}$, adgregatum videlicet extremarum 1 & 8 , media vero sunt 2 & 4 ex serie continue proportionalium.

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IIII</i>
1	2	4	8
ZETETICUM XIV			

Dato adgregato extremarum, & adgregato mediarum in serie quatuor continue proportionalium, invenire continue proportionales.

Idem quoque Problema iam ante expositum est duplici Zetetico. Illud enim est. Dato adgregato laterum, & adgregato cuborum, invenire latera. Ut processu evidens fiet. Sit igitur datum D adgregatum extremarum, & B adgregatum mediarum in serie quatuor continue proportionalium. Oportet invenire continue proportionales. Differentia extremarum esto A . Ergo $D + A$ erit maior extrema dupla, & $D - A$ minor extrema dupla. Cum itaque $D + A$ ducetur in $D - A$, fiet rectangulum quadruplum sub mediis vel extremis. Itaque $\frac{Dq - Aq}{4}$ est rectangulum illud, in quod cum ducetur extrema maior, fiet cubus mediæ maioris. Cum minor, fiet cubus mediæ minoris. Cum denique utriusque extremæ summa, fiet adgregatum cuborum a mediis. Quare $\frac{D \text{ cubo} - D \text{ in } Aq.}{4}$, æquatur adgregato cuborum a mediis. Si autem a cubo adgregati duorum laterum auferatur adgregatum cuborum, quod reliquetur æquale est solido triplo ex adgregato lat-

erum in rectangulum sub lateribus, ut adparet ex genesi cubi a duobus lateribus. Quare $\frac{B \text{ cubo } 4-D \text{ cubo}+D \text{ in } Aq.}{4}$ æquatur solido triplo ex adgregato mediarum in rectangulum sub mediis, videlicet $\frac{B \text{ in } Dq. 3-B \text{ in } Aq. 3}{4}$. Qua æqualitate ordinata; $\frac{B \text{ in } Dq. 3+D \text{ cubus}-B \text{ cubo } 4}{D+B 3}$ æquabitur A quadrato. Dato igitur adgregato extremarum, & adgregato mediarum in serie quatuor continue proportionalium, dantur continue proportionales.

Enimvero,

Solidum triplum sub adgregato mediarum & quadrato adgregati extremarum, plus cubo adgregati extremarum, minus quadruplo cubo adgregati mediarum, si applicetur ad adgregatum extremarum, plus adgregato triplo mediarum: Planum quod oritur, æquale est quadrato differentia extremarum.

Sit D 9, B 6. A IN 1Q æquatur 49, & fit IN $\sqrt{49}$, differentia videlicet extremarum 1 & 8, media vero sunt 2 & 4 ex serie continue proportionalium.

I II III IIII

1 2 4 8

ZETETICUM XV

Rursus, Data differentia extremarum, & differentia mediarum in serie quatuor continue proportionalium, invenire continue proportionales.

Et illud esse, data differentia laterum, & differentia cuborum, invenire latera. Evidens fiet per processum. Sit igitur data D differentia extremarum, & B differentia mediarum in serie quatuor continue proportionalium. Oportet invenire continue proportionales. Rectangulum sub mediis, vel extremis esto A planum. Et vero mediæ maioris cubus æquatur solido ab extrema maiore in rectangulum sub extremis. Et mediæ minoris cubus, solido ab extrema minore in rectangulum sub extremis. Quare D in A planum, æquabitur differentia cuborum a mediis. Si autem a differentia cuborum subducatur cubus differentia laterum, quod reliquetur æquale est solido triplo ex differentia laterum in rectangulum sub lateribus, ut adparet ex genesi cubi a differentia laterum. Quare D in A planum, $-B$ cubo, æquabitur B in A planum 3. Qua æqualitate ordinata; $\frac{B \text{ cubus}}{D-B 3}$ æquabitur A plano. Dato autem rectangulo sub lateribus, & differentia eorundem, dantur latera. Data igitur differentia extremarum, & differentia mediarum in serie quatuor continue proportionalium, dantur continue proportionales.

Enimvero,

Ut differentia extremarum, minus triplo differentia mediarum ad differentiam mediarum, ita quadratum differentia mediarum ad rectangulum sub mediis vel extremis.

Sit D 7, B 2. A planum fit 8 rectangulum sub extremis 1 & 8 vel mediis 2 & 4 ex serie continue proportionalium.

<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IIII</i>
1	2	4	8

Quod si ex differentia extremarum, & rectangulo inquireretur de differentia mediarum, ut si innotescat *A planum*, esse *F planum*. At de *B* esset quæstio, sit illa *A*. Ita procederet æqualitas $\frac{A \text{ cubus}}{D-A^3}$ æquabitur *F plano*. Ordinata vero æqualitate; *A cubus* + *F plano* ter in *A*, æquatur *F plano* in *D*.

Id est,

Cum cubus differentia mediarum, plus triplo solido a rectangulo sub lateribus in differentiam mediarum, æquatur solido a rectangulo sub lateribus in differentiam extremarum.

Quod adnotasse fuit operæpretium.

ZETETICUM XVI

Rursus, quoque Dato adgregato extremarum, & adgregato mediarum in serie quatuor continue proportionalium, invenire continue proportionales.

Et istud esse, dato adgregato laterum, & adgregato cuborum, invenire latera. Evidens fiet per processum. Sit igitur data *Z* summa extremarum, & *G* summa mediarum in serie quatuor continue proportionalium. Oportet invenire continue proportionales. Rectangulum sub mediis, vel extremis esto *A planum*. Et vero mediæ maioris cubus æquatur solido ab extrema maiore in rectangulum sub extremis. Et mediæ minoris cubus, solido ab extrema minore in rectangulum sub extremis. Quare *Z in A planum*, æquabitur adgregato cuborum a mediis. Si autem a cubo adgregati laterum subducatur adgregatum cuborum, quod reliquetur æquale est solido triplo ex summa laterum in rectangulum sub lateribus, ut adparet ex genesi cubi a duobus lateribus. Quare *G cubo*, $-Z$ in *A planum*, æquabitur *G in A planum* 3. Qua æqualitate ordinata; $\frac{G \text{ cubus}}{Z+G^3}$ æquabitur *A plano*. Dato autem rectangulo sub lateribus, & adgregato laterum, dantur latera. Data igitur adgregato extremarum, & adgregato mediarum in serie quatuor continue proportionalium, dantur continue proportionales.

Enimvero est,

Ut adgregatum extremarum, plus triplo adgregati mediarum ad adgregatum mediarum, ita quadratum adgregati mediarum ad rectangulum sub mediis vel extremis.

Sit *Z* 9, *G* 6. *A planum* 18. Fit 8 rectangulum sub extremis 1 & 8 vel mediis 2 & 4. Quod si ex adgregato extremarum, & rectangulo inquireretur de adgregato mediarum, ut si innotescat *A planum*, esse *B planum*, at de *G* esset quæstio, sit illa *A*. Ita procederet æqualitas. *A cubus* - *B plano* ter in *A*, æquatur *B plano* in *Z*.

Id est,

Cubus adgregati mediarum, minus solido triplo ex eodem adgregato in rectangulum sub extremis vel mediis, æquatur solido ex adgregato extremarum & rectangulo sub mediis vel extremis.

Quod adnotasse fuit oportuntim.

LIBER QUARTUS.

ZETETICUM I

Invenire numero duo quadrata, æqualia dato quadrato.

Sit datum numero, *F quadratum*. Oportet invenire duo quadrata, æqualia dato *F quadrato*. Exponatur triangulum quodcumque rectangulum numero, & sit hypotenusam *Z*, basis *B*, perpendiculum *D*. Et fiat triangulum ei simile habens hypotenusam *F*, nempe faciendo, ut *Z* ad *F*, ita *B* ad aliquam basim; quæ ideo erit $\frac{B \text{ in } F}{Z}$. Et rursus, ut *Z* ad *F*, ita *D* ad perpendiculum; quod ideo erit $\frac{D \text{ in } F}{Z}$. Ergo quadrata abs $\frac{B \text{ in } F}{Z}$ & $\frac{D \text{ in } F}{Z}$ æquabuntur dato *F* quadrato. Quod erat faciendum. Eoque recidit Analysis Diophantæa, secundum quam oporteat *B quadratum*, in duo quadrata dispescere. Latus primi quadrati esto *A*, secundi $B - \frac{S \text{ in } A}{R}$. Primi lateris in quadratum, est *A quadratum*. Secundi, $B \text{ quad.} - \frac{S \text{ in } A \text{ in } D \text{ } 2}{R} + \frac{S \text{ quad. in } A \text{ quad.}}{R \text{ quad.}}$. Quæ duo quadrata ideo æqualia sunt *B quadrato*. Æqualitas igitur ordinetur. $\frac{S \text{ in } R \in B \text{ } 2}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ æquabitur *A* lateri primi singularis quadrati. Et latus secundi fit $\frac{R \text{ quad. in } B - S \text{ quad. in } B}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$. Nempe triangulum rectangulum numero effingitur a lateribus duobus *S* & *R*, & fit hypotenusam similis *S quad. R quad.* basis similis *S quadrato - R quadrato*. Perpendiculum simile *S in R* 2. Itaque ad dispectionem *B quadrati* fit ut *S quad. + R quad.* ad *B* hypotenusam similis trianguli, ita *R quad. - S quad.* ad basim, latus unius singularis quadrati, & ita *S in R* 2 ad perpendiculum, latus alterius.

Sit *B* 100, cuius quadrato invenienda sint duo quadrata æqualia. Effingatur triangulum rectangulum numero abs *R* 4, *S* 3. Fit effecti trianguli hypotenusam 25, basis 7, perpendiculum 24. Itaque fiet, ut 25 ad 7, ita 100 ad 28. Et ut 25 ad 24 ita 100 ad 96. Quadratum igitur abs 100 æquabitur quadrato ab 28, plus quadrato abs 96.

ZETETICUM II

Invenire numero duo quadrata, æqualia duobus aliis datis quadratis.

Sint data numero *B quadratum* & *D quadratum*. Oportet invenire alia duo quadrata his æqualia. Intelligitor *B* basis trianguli rectanguli, *D* perpendicu-

lum, atque adeo quadratum hypotenusæ æquale $B \text{ quadr.} + D \text{ quadr.}$ & sit illa hypotenusæ Z , latus rationale, irrationaleve. Et exponatur aliud triangulum quodcumque rectangulum numero, cuius hypotenusæ X , basis F , perpendicularum G . Et ab iis duobus constituatur tertium triangulum rectangulum via synæreseos, diæreseos-ve, per ea quæ exposita sunt in notis. Erit per primam methodum hypotenusæ similis $Z \text{ in } X$, perpendicularum simile $B \text{ in } G + D \text{ in } F$, basis similis $B \text{ in } F, = D \text{ in } G$. Per secundam hypotenusæ erit similis $Z \text{ in } X$, perpendicularum $B \text{ in } G, = D \text{ in } F$, basis $B \text{ in } F, + D \text{ in } G$. Et plana omnia similia lateribus effecti trianguli adplicetur ad X . Stante igitur Z hypotenusæ, fit basis $\frac{B \text{ in } F=D \text{ in } G}{X}$, perpendicularum $\frac{B \text{ in } G+D \text{ in } F}{X}$, per primam methodum. Vel per secundam, fit basis $\frac{B \text{ in } F+D \text{ in } G}{X}$, perpendicularum $\frac{B \text{ in } G=D \text{ in } F}{X}$. Itaque hæc duo a lateribus rectum angulum includentibus quadrata, æquabuntur Z hypotenusæ quadrato, cui etiam æquari constructum est $B \text{ quad} + D \text{ quad}$. Quod erat faciendum. Eoque recidit Analysis Diophantæa, secundum quam oporteat Z quadratum, planumve, in duo quadrata iam dispectum, videlicet $B \text{ quadratum} \& D \text{ quadratum}$, rursus in duo alia quadrata dispescere. Latus primi constituendi quadrati, esto $A + B$. Secundi $\frac{S \text{ in } A}{R} - D$. Et ab iis effingantur quadrata, & comparentur duobus datis quadratis. Ergo $A \text{ quadr.} + B \text{ in } A^2, + B \text{ quadr.} + \frac{S \text{ quadrato in } A \text{ quadratum}}{R \text{ quadrato}}, - \frac{S \text{ in } D \text{ in } A^2}{R}, + D \text{ quadr.}$ æquabitur $B \text{ quadr.} + D \text{ quadrato}$. Qua æqualitate ordinata $\frac{S \text{ in } R \text{ in } D^2 - R \text{ quadr. in } B^2}{S \text{ quad.} + R \text{ quad}}$ æquabitur A . Itaque latus primi constituti quadrati, quod erat $A + B$, fit $\frac{S \text{ in } R \text{ in } D^2 + S \text{ quad. in } B - R \text{ quad in } B}{S \text{ quad.} + R \text{ quad}}$. Latus secundi quadrati constituti, quod erat $\frac{S \text{ in } A}{R} - D$, fit $\frac{S \text{ quad. in } D - S \text{ in } R \text{ in } B^2 - R \text{ quad. in } D}{S \text{ quad.} + R \text{ quad}}$. Quibus bene retextis, duo sunt constituta triangula. Primum cuius hypotenusæ rationalis, irrationalisve Z , basis B , perpendicularum D . Secundum effectum a duobus lateribus $S \& R$, cuius ideo hypotenusæ fit similis $S \text{ quad} + R \text{ quad}$, basis $S \text{ quad} - R \text{ quad}$, perpendicularum $S \text{ in } R^2$, & ab iis effingitur tertium exposita via diæreseos. Et similia lateribus effecta solido adplicantur ad $S \text{ quad.} + R \text{ quad}$. Unde fit Z communis sive primi sive tertii hypotenusæ. Atque adeo quadrata a lateribus circa rectum illius primi, æqualia sunt quadratis a lateribus circa rectum huius tertii. Quod si latus primi quadrati constituatur $A - B$, secundi $\frac{S \text{ in } A}{R} - D$, $\frac{S \text{ in } R \text{ in } D^2 + R \text{ quad. in } B^2}{S \text{ quad.} + R \text{ quad}}$ æquatur A . Et fit latus primi constituti quadrati $\frac{S \text{ in } R \text{ in } D^2 - S \text{ quad. in } B + R \text{ quad. in } B}{S \text{ quad.} + R \text{ quad}}$. Secundi $\frac{S \text{ in } R \text{ in } B^2 + S \text{ quad. in } D - R \text{ quad. in } D}{S \text{ quad.} + R \text{ quad}}$. Quod est effingere tertium triangulum via exposita synæreseos.

Sit B 15, D 10, unde fit $Z \sqrt{325}$. Exponatur triangulum rectangulum numero, 5, 3, 4. Fit latus unum e quæsitis 18, alterum 1. Vel unum 6, alterum 17.

ZETETICUM III

Rursus, invenire numero duo quadrata, æqualia duobus datis quadratis.

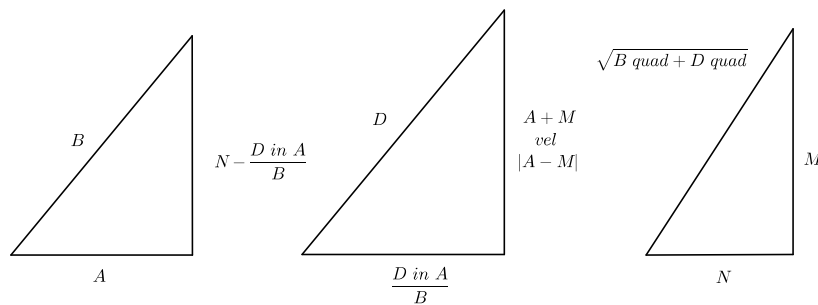
Sint data duo quadrata, B quadratum, D quadratum. Oportet invenire duo alia quadrata iis æqualia. Effingatur triangulum rectangulum numero cuius B sit hypotenusa. Aliud rursus effingatur simile cuius D sit hypotenusa, & ab iis duobus similibus effingatur tertium triangulum, cuius hypotenusæ quadratum æquale sit quadrato hypotenusæ primi & secundi, methodo quæ exposita est in notis. Ergo quadratum hypotenusæ huius effecti tertii æquabitur B quad. + D quad. Quibus etiam quadratis æquabantur quadrata laterum circa rectum. Et is etiam modus elicitur ex iam tradita Analysis Diophantæa.

Sit B 10, D 15. Primi trianguli constituentur latera circa rectum 8 & 6. Secundi primo similis, 12 & 9. Tertii latera circa rectum erunt 18 & 1, vel 6 & 17 a quibus binis quadrata, æquabuntur quadratis 10 & 15.

ZETETICUM IV

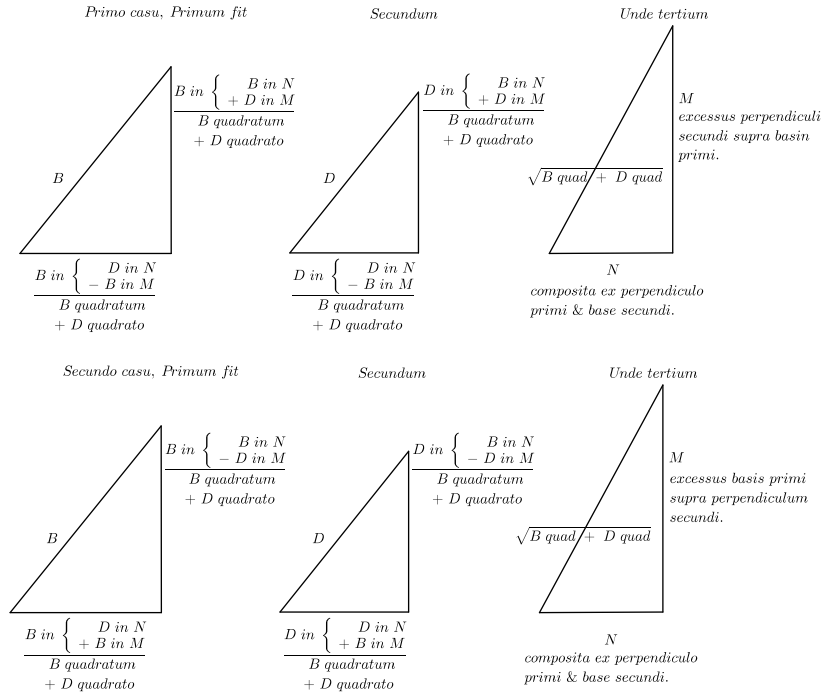
Invenire duo triangula rectangula similia datas habentes hypotenusas, & diducti ab iis tertii trianguli basis, composita ex perpendicularo primi & base secundi, erit ea quæ præfinitur. Oportebit autem basim illam præfinitam præstare hypotenusæprimi.

Sit trianguli primi data B hypotenusa, secundi primo similis D . Oportet ab iis diducere tertium triangulum, cuius basis æquetur N , compositæ ex perpendicularo primi & base secundi. B quad. + D quad. - N quad. æquetur M quad. Ergo diducti trianguli perpendicularum erit M . Sit autem A basis primi. Igitur basis similis secundi erit $\frac{D \text{ in } A}{B}$. Perpendicularum ideo primi $N - \frac{D \text{ in } A}{B}$. Perpendicularum vero secundi erit $A + M$, vel $A - M$, ut sit M differentia inter basim primi & perpendicularum secundi.



Sit sane primo casu $A + M$, erit igitur ut B ad D , ita $N - \frac{D \text{ in } A}{B}$ ad $A + M$. Quo analogismo resolutis & omnibus bene ordinatis, fit $\frac{D \text{ in } N \text{ in } B - B \text{ in } M \text{ in } B}{M \text{ quad} + D \text{ quad}}$ æquale A . Seu revocata ad analogismum æqualitate, est, ut $Bq + Dq$ ad D in

$N - B$ in M , ita B ad A . Secundo vero casu, sit perpendicularum secundi $A - M$. Erit igitur ut B ad D , ita $N - \frac{D \text{ in } A}{B}$ ad $A - M$. Quo analogismo resoluto, & omnibus rite peractis fit $\frac{D \text{ in } N \text{ in } B + B \text{ in } M \text{ in } B}{B \text{ quad.} + D \text{ quad.}}$ æquale A . Seu revocata ad analogismum æqualitate, est, ut $Bq + Dq$ ad D in $N + B$ in M , ita B ad A . Duo igitur quæsitæ triangula ita se habent,



Apparet autem primo casui tum demum locum esse, cum D in N præstat ipsi B in M . Secundo vero cum B in N præstat ipsi D in M .

ZETETICUM V

Invenire numero duo quadrata, æqualia duobus datis quadratis, ut quæditorum alterum consistat intra limites præstitutos.

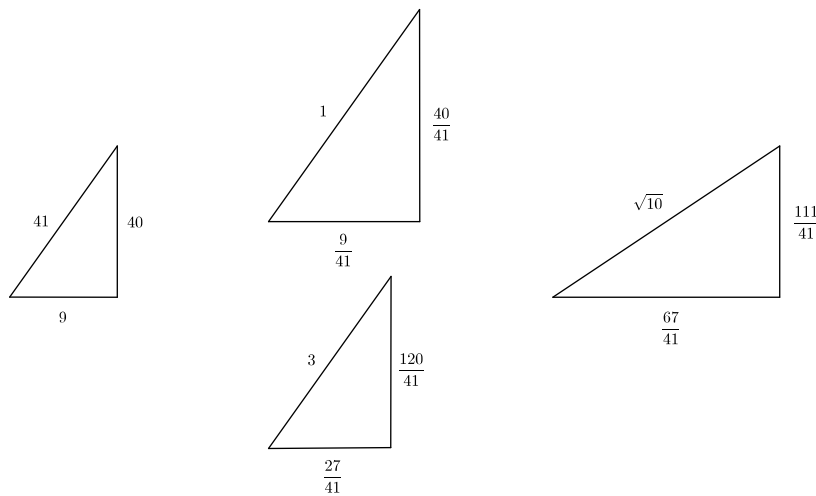
Sint data B quadratum, Dq . Oportet alia duo quadrata iis æqualia constituere, quorum alterum præstet quidem F plano, sed cedat G plano. Intelligatur Zq aliudve planum æquale $Bq + Dq$. Ergo Z rationalis, irrationalisve est hypotenusa trianguli rectanguli, cuius latera circa rectum sunt B & D . Quæritur autem aliud triangulum rectangulum, cuius hypotenusa quoque sit Z , unum vero e lateribus circa rectum (ut pote basis) sit maior N , sed minor quam S . Eo igitur reducitur res. Ut

Inveniendæ sint numero duo triangula rectangula similia, datas habentes B & D hypotenusas, & diducti ab iis tertii trianguli basis, composita ex perpendicularo

primi & base secundi, consistat intra limites præfinitos. Itaque $Zq - Nq$ æquetur Mq . Et $Zq - Sq$ æquetur Rq . si igitur N statuatur basis tertii diducendi trianguli in duobus similibus triangulis datas habentibus hypotenusas, erit per primum casum antecedentis Zeteticæ ratio differentiæ basis & hypotenusæ ad perpendicularum, ut $Zq = D$ in $N + B$ in M ad B in N , $+D$ in M , seu ut X ad $\frac{X \text{ in } B \text{ in } N + X \text{ in } D \text{ in } M}{Z \text{ quad} = D \text{ in } N + B \text{ in } M}$ qui limes est primus. Et si S statuatur basis eius tertii trianguli, erit ob eandem expositam causam ratio differentiæ basis & hypotenusæ ad perpendicularum, ut $Zq = D$ in S , B in R ad B in S , $+D$ in R , seu ut X ad $\frac{X \text{ in } B \text{ in } S + X \text{ in } D \text{ in } R}{Z \text{ quad} = D \text{ in } S + B \text{ in } R}$. Qui limes est secundus. Posita igitur X ad differentiam basis & hypotenusæ in effingendis duobus similibus triangulis, adsumatur quælibet alia rationalis. Et sit T , consistens inter $\frac{X \text{ in } B \text{ in } N + X \text{ in } D \text{ in } M}{Z = D \text{ in } N + B \text{ in } M}$ & $\frac{X \text{ in } B \text{ in } S + X \text{ in } D \text{ in } R}{Z \text{ quad} = D \text{ in } S + B \text{ in } R}$. Et ab iis duabus radicibus X & T effingetur triangulum rectangulum numero, cui similia duo effingentur triangula, primum habens B hypotenusam, alterum D & ab iis duobus diducetur tertium, ita ut basis tertii illius composita sit ex perpendicularo primi & base secundi, ipsaque consistens inter N & S , iuxta problematis conditionem.

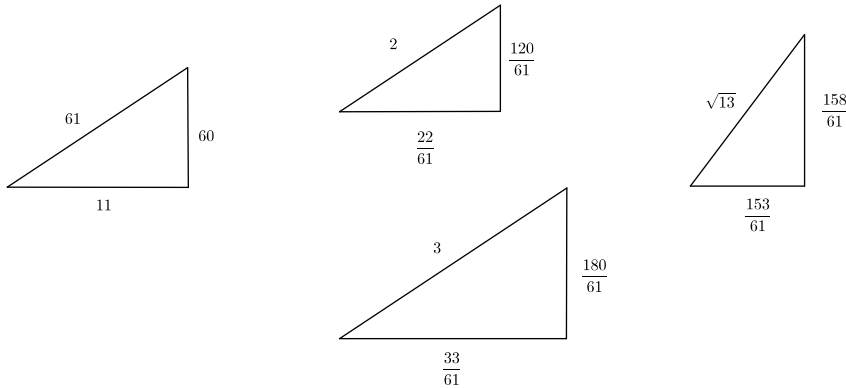
Sit B 1, D 3, N $\sqrt{2}$, S $\sqrt{3}$ fit Z $\sqrt{10}$, M $\sqrt{8}$, R $\sqrt{7}$. Positaque X 1, eligitur quædam T consistens inter $\frac{\sqrt{98}}{10 - \sqrt{2}}$ & $\frac{\sqrt{63} + \sqrt{3}}{10 - \sqrt{27} + \sqrt{7}}$.

Sit illa $\frac{5}{4}$. Ergo ab 1 & $\frac{5}{4}$, seu abs 4 & 5 effingetur triangulum. Et ei similia duo effingentur triangula habentia hypotenusas 1 & 3. Et diducti ab iis tertii basis composita ex perpendicularo similis & base simili secundi fit $\frac{67}{41}$, cuius quadratum est $\frac{4489}{1681}$ maius quam 2, sed minor quam 3. Perpendicularum vero eveniet $\frac{111}{41}$, cuius quadratum est $\frac{12321}{1681}$. Qua duo quadrata valent 10 sicut quadrata abs 1 & 3.



Aliud exemplum.

Sit B 2, D 3, N $\sqrt{6}$, S $\sqrt{7}$ fit Z $\sqrt{13}$, M $\sqrt{7}$, R $\sqrt{6}$. Positaque X 1, eligitur quædam T consistens inter $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{63}}{13+\sqrt{28}-\sqrt{54}}$ & $\frac{\sqrt{28}+\sqrt{54}}{13+\sqrt{54}-\sqrt{63}}$. Sit illa $\frac{5}{6}$, ergo ab 1 & $\frac{5}{6}$ effingetur triangulum, seu abs 5 & 6. Et ei similia effingentur duo triangula datas habentia hypotenusas 2 & 3. Et diducti ab iis tertii basis fit $\frac{153}{61}$ composita ex perpendicularo primi & base secundi. Huius quadratum est $\frac{23409}{3721}$ maius quam 6, seu $\frac{22326}{3721}$, sed minor quam 7, seu $\frac{26047}{3721}$. Perpendicularum est $\frac{158}{61}$, cuius quadratum est $\frac{24964}{3721}$. Qua duo quadrata valent $\frac{48373}{3721}$ seu 13, sicut quadrata abs 2 & 3.



ZETETICUM VI

Invenire numero duo quadrata, distantia dato intervallo.

Sit datum intervallum, B planum. Oportet invenire numero duo quadrata, distantia per B planum. Est igitur B planum quadratum a base trianguli rectanguli, & quærentur quadrata hypotenusæ & perpendiculari rationalia, quæ distabunt per datum basis quadratum. At vero basis proportionalis est inter differentiam perpendiculari & hypotenusæ & adgregatum eorumdem laterum. Quare adsumatur quæcumque rationalis longitudo ad quam adplicetur B planum, oriatur quoque latitudo rationalis. Longitudo itaque ad quam facta adplicatio est, si quidem latitudine sit minor, erit differentia perpendiculari & hypotenusæ, latitudo vero ipsa adgregatum, & e converso. Atque adeo habebuntur numero perpendicularum & hypotenusam.

ALITER. A quadratum sit quadratum unum e quæsitis, utpote quadratum perpendiculari. Ergo A quad. + B plano æquabitur quadrato, videlicet hypotenusæ. Sit illud abs $A + D$. Unde cum sit D differentia inter perpendicularum & hypotenusam, A quad. + D in A 2, D quad æquabitur A quad + B plano. Qua æqualitate ordinata: $\frac{B \text{ plan} - D \text{ quad}}{D^2}$ æquabitur A .

Unde

THEOREMA

In triangulo rectangulo, si quadratum lateris primi circa rectum, multatum quadrato differentiae inter latus secundum & hypotenusam, adplicetur ad duplum illius differentiae, latitudo quae oritur, erit ipsi lateri secundo circa rectum aequalis.

ALITER. Sit E quadratum unum e quæsitis, utpote quadratum hypotenusæ. Ergo E quad. $- B$ plano æquabitur alteri quadrato, nimirum quadrato perpendiculari. Sit abs $E - D$, unde fit D differentia inter perpendicularum & hypotenusam. Ergo E quad. $- D$ in E 2, $+D$ quad. æquabitur E quad. $- B$ plano. Et omnibus bene ordinatis $\frac{B \text{ plan.} + D \text{ quad.}}{D^2}$ æquabitur E .

Unde

THEOREMA

In triangulo rectangulo, si quadratum unius lateris circa rectum, plus quadrato differentiae inter latus reliquum circa rectum & hypotenusam adplicetur ad duplum illius differentiae, latitudo quae oritur, erit ipsi hypotenusæ aequalis.

Æque,

Si quadratum lateris unius circa rectum plus quadrato adgregati ex latere circa rectum reliquo & hypotenusæ, adplicetur ad duplum illius adgregati, latitudo quae oritur, erit ipsi hypotenusæ aequalis.

Unde est,

Ut adgregatum hypotenusæ & alterius laterum circa rectum ad differentiam eorumdem, ita quadratum adgregati adiunctum multatum-ve quadrato lateris circa rectum reliqui ad quadratum lateris reliqui adiunctum multatum-ve quadrato differentiae.

Sit B planum 240, D 6. Fit A $\frac{240-36}{12}$ seu 17, E $\frac{240+36}{12}$ seu 23. Quadratum igitur lateris 23 distat abs quadrato lateris 17 per 240. Illud nempe est 529, hoc 289. Sit triangulum 5, 4, 3 est ut 9 ad 1, ita 90 ad 10, & ita 72 ad 8. Sic licet

Dato plano quadratulum addere, & efficere quadratum.

Datum enim planum intelligetur quadratum alterius e lateribus circa rectum. Quadratum autem differentiae lateris circa rectum reliqui ab hypotenusæ, vel horum summæ adsumetur bene proxima dato plano.

Sit 17 datum planum, sumetur differentia 4. Ergo $17 - 16$ adplicabitur ad 8 & oritur $\frac{1}{8}$ perpendicularum. Unde hypotenusæ quadratum est $17\frac{1}{64}$, cuius latus est $\frac{33}{8}$, seu $4\frac{1}{8}$ latus bene proximum vero quadrati 17.

Sit 15 datum planum, sumetur adgregatum 4. Ergo $15 - 16$ adplicabitur ad 8, &

orietur $-\frac{1}{8}$ perpendicularum. Unde hypotenusæ quadratum est $15\frac{1}{64}$, cuius latus est $\frac{31}{8}$ seu $3\frac{7}{8}$.

ZETETICUM VII

Invenire numero planum, quod adiectum alterutri datorum duorum planorum, conficiat quadratum.

Sint data duo plana *B planum*, *D planum*. Oportet invenire aliud planum quod adiectum sive *B plano*, sive *D plano*, sit numero quadratum. adiectitium illud planum, sit *A planum*. Ergo *B planum* + *A plano* æquatur quadrato. Et rersus *D planum* + *A plano* æquatur quadrato. Hic igitur duplex ordinanda æquatio, inquit Diophantus. Sit autem *B planum* maius *D plano*. Differentia igitur hrum effingendorum quadratorum, est *B planum* – *D plano*. At vero quadratum adgregati duorum laterum præstat quadrato differentia eorumdem, per quadruplum rectangulum sub lateribus. Ergo *B planum* – *D plano* intelligitor esse quadruplum rectangulum sub lateribus. Unde fit *B planum* + *A plano* quadratum adgregati laterum. *D planum* + *A plano* quadratum differentia. Atque adeo *A planum*, quadratum adgregati laterum, multatum *B plano*. Vel quadratum differentia laterum, multatum *D plano*. Eo igitur recidit res ut $\frac{B \text{ planum} - D \text{ plano}}{4}$, idest rectangulum sub lateribus, resolvatur in duo sub quibus fit, latera. Unum esto *G*, idemque maius differentia $\sqrt{B \text{ plani}} \& D \text{ plani}$, vel minus adgregato. Alterum $\frac{B \text{ planum} - D \text{ plano}}{G 4}$. Latus igitur maioris quadrati erit $\frac{B \text{ planum} - D \text{ plano} + G \text{ quadrato}}{G 4}$, minoris $\frac{B \text{ planum} - D \text{ plano} - G \text{ quadrato}}{G 4}$.

Sit *B planum* 192, *D planum* 128. Differentia est 64 quadruplum rectangulum sub duobus lateribus. Simplum ideo est 16, factum abs lateribus 1 & 16, quorum summa 17, differentia 15, & cum a summa quadrato 289, aufertur 192, reliquit 97. Ergo 192 + 97 facit quadratum adgregati laterum, quod est 289; & 128 + 97 consequenter facit quadratum differentia, quod est 225. Itaque Problemati satisfit.

Potuit autem opus quoque ita peragi. Quoniam sive *B plano*, sive *D plano* adiciendum est idem planum ut efficiatur quadratum. Planum illud sit *A quadratum* – *B plano*. Cum igitur ei addetur *B planum*, fiet quadratum, nempe *A quadratum*. Superest igitur ut *D planum* + *Aq* – *B plano*, æquetur quadrato. Effingatur abs *F* – *A*. Ergo *Aq* + *Fq* – *F* in *A* 2 æquabitur *D plano*, *Aq* – *B plano*. Qua æqualitate bene ordinata, $\frac{Fq + B \text{ plano} - D \text{ plano}}{F 2}$ æquabitur *A*.

Sit *B planum* 18, *D planum* 9, *F* 9. Fiat *A* 5. Planum addititium 7, quod additum ad 18 facit 25, ad 9 facit 16 quadrata ab 5 & 4.

ZETETICUM VIII

Invenire numero planum, quod ablatum alterutri duorum datorum planorum, reliquant quadratorum.

Sint data numero duo plana, *B planum*, *D planum*. Oportet invenire numero aliud planum, quod demptum sive a *B plano*, sive *D plano* relinquat quadratum. Planum illud ablatitium quæsitum, esto *B planum* – *Aq*. Cum igitur ab *B plano* auferetur *B planum* – *Aq* reliquentur *Aq*. Idem cum auferetur a *D plano*, relinquet *D planum* – *B plano* + *Aq* idcirco adæquandum quadrato. Sit illud abs *A* – *F*. Ergo $\frac{Fq+B \text{ plano}-D \text{ plano}}{F 2}$ æquabitur *A*. Rursus obvoluta est electio *F*, ut *A* latitudinis ortivæ quadratum cedat sive *B plano*, sive *D plano*. Quare duplex potius ordinanda æqualitas. Nempe planum ablatitium, esto *A planum*. Ergo *B planum* – *A plano* æquatur quadrato, & *D planum* – *A plano* æquatur quadrato. Sit *B planum* maius *D plano* differentia horum est *B planum* – *D plano*. Quare *B planum* – *D plano*, intelligetur quadruplum rectangulum sub lateribus. *B planum* – *A plano*, summæ illorum laterum quadratum. *D planum* – *A plano* differentia illorum laterum quadratum. Ipsum vero *A planum*, est excessus quo *B planum* præstat quadrato adgregati, vel *D planum* quadrato differentia. Sit igitur latus unus *G*, idemque maius differentia $\sqrt{B \text{ plani}}$ & $\sqrt{D \text{ plani}}$, vel minus adgregato; alterum erit $\frac{B \text{ planum}-D \text{ plano}}{G 4}$, & horum summæ quadratum cum auferetur abs *B plano*, vel quadratum differentia abs *D plano*, residuum erit *A planum*.

Sit *B planum* 44, *D* 36, *G* 1 latus unum, oritur 2 latus alterum, summa laterum 3. Differentia 1 quadrata 9 & 1. Planum igitur ablatitium 35, quod cum auferetur abs 44 relinquit 9, cum autem a 36 relinquit 1.

ZETETICUM IX

Invenire numero planum, a quo cum auferetur alterutrum datorum duorum planorum, conficiatur quadratum.

Sint data numero duo plana, *B planum*, *D planum*. Oportet invenire planum a quo cum auferetur sive *B plano*, sive *D plano* relinquat numero quadratum. Planum huiusmodi a quo subductio facienda est, esto *A planum*. Igitur *A planum* – *D plano* æquatur quadrato. Et rursus *A planum* – *B plano* æquatur quadrato. Atque in hac hypothesi duplex rursus æquatio ordinanda. Sit autem *B planum* maius *D plano*. Ergo maius quadratum, *A planum* – *D plano* intelligetur quadratum adgregati duorum laterum; minus vero, *A planum* – *B plano* quadratum differentia; intervallum denique *B planum* – *D plano* quadruplum rectangulum sub lateribus. Sit igitur latus unum *G*, alterum erit $\frac{B \text{ planum}-D \text{ plano}}{G 4}$ & horum summæ quadratum cum adiungetur *B plano*, vel

quadratum differentiae *B plano*, summa erit *A planum*, a qua cum auferetur *D planum* reliquetur quadratum adgregati, cum *B planum* quadratum differentiae.

Sit *B planum* 56, *D planum* 48, *G* 1 latus unum, oritur 2 latus alterum. Summa horum 3 differentia 1. Unde *A planum* fit 57 quod cum multabitur *D plano*, relinquitur 9; cum *B plano*, relinquitur 1.

ZETETICUM X

Invenire numero duo latera sub quibus quod fit planum, addito utriusque quadrato, sit quadratum.

Sit latus unum *B*, alterum *A*. Oportet *Aq + B in A + Bq* æquari quadrato. Fingatur illud abs *A - D* & ordinetur æquatio $\frac{D \text{ quad} - B \text{ quad}}{B + D 2}$ æquabitur *A*. Unde latus primum fit simile *Bq + B in D 2*, secundum *Dq - Bq*. Quod autem sub iis fit, adiectum utriusque quadrato est simile *D quadrato - quadrato*, *+B quadrato - quadrato*, *+B quadrato in D quadratum 3*, *+B cubo in D 2*, *+B in D cubum 2*. Ipsa autem radix *B quadrato*, *+D quadrato*, *+B in D*. Sit *D 2*, *B 1*. Unum a lateribus est 5, alterum 3 radix autem quadrati compositi e singulis horum quadratis & plano sub lateribus, est 7; nempe 49 constat 25, 15, 9.

Lemma ad sequens Zeteticum

Sunt æqualia tria solida a duobus lateribus diducta,

Unum a latere primo in quadratum secundi, adiectum rectangulo sub lateribus.

Alterum a latere secundo in quadratum primi adiectum rectangulo.

Tertium ab laterum summa in ipsum rectangulum.

Sunto duo latera *B* & *D*. Dico tria solida ab iis diducta esse æqualia.

Primum abs *B in $\overline{D \text{ quad.} + B \text{ in } D}$* .

Secundum abs *D in $\overline{B \text{ quad.} + B \text{ in } D}$* .

Tertium abs *$\overline{B + D}$ in $\overline{B \text{ in } D}$* .

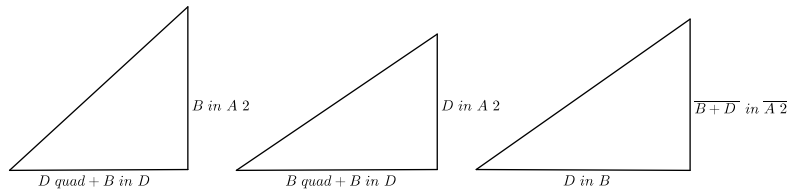
Id autem in conspicuo est: quoniam singula hæc tria solida faciunt *B in Dq + D in Bq*.

ZETETICUM XI

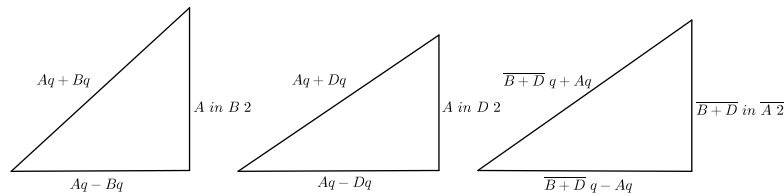
Invenire numero tria triangula rectangula, æqualis areae.

Perpendicularum primi trianguli, esto simile *B in A 2*. Basis vero, *Dq + B in D*.

Secundi, *D in A 2*. Basis, *Bq + B in D*. Tertii, *$\overline{B + D}$ in A 2*. Basis, *D in B*.

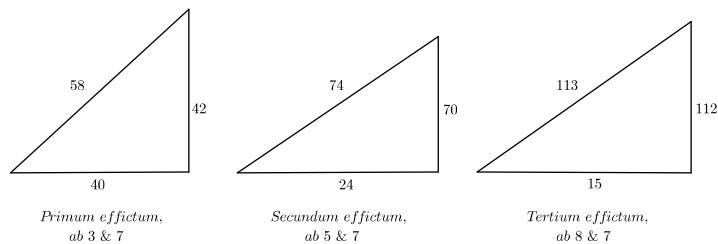


Areæ igitur erunt æquales ex antecedente Lemmate, nempe singulæ erunt B in Dq in A , $+D$ in Bq in A . Superest igitur ut plana hypotenusis similia, sint rationalia. At vero talia latera B & D possunt per antecedens Zeteticum eligi, ut $Bq + Dq + B$ in D , æquetur quadrato. Tale quadratum, esto Aq fit primi trianguli basis per interpretationem $Aq - Bq$. Secundi $Aq - Dq$. Tertii $\overline{B + D}$ quadratum, $-A$ quad.



A qualibus autem lateribus bases sunt differentiæ quadratorum, perpendiculara sunt similia duplo sub iis rectangulo. Constabunt igitur hypotenusæ adgregato eorundem quadratorum, ex regulari triangulorum effectione. Unde hypotenusæ primi similis fit $Aq + Bq$. Secundi $Aq + Dq$. Tertii $\overline{B + D}q + Aq$. Itaque problemati satisfit.

Sit B 3, D 5, fit A 7. Et triangula se habent in numeris, ut hic



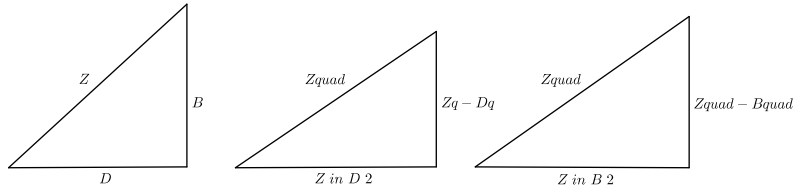
Horum trium communis area 840.

ZETETICUM XII

Invenire numero tria triangula rectangula, ut solidum sub perpendicularis ad solidum sub basibus, se habeat ut quadratus numerus ad quadratum numerum.

Exponatur numero rectangulum quodcumque triangulum, cuius hypotenusæ detur Z , bisis D ; perpendicularum B . Et effingatur triangulum secundum abs Z &

D , & Z in D^2 adsignetur basi. Effingatur denique triangulum tertium ab Z & B , & Z in B^2 adsignetur basi.



Solidum sub perpendicularis ad solidum sub basibus se habet ut Bq ad Zq^4 .

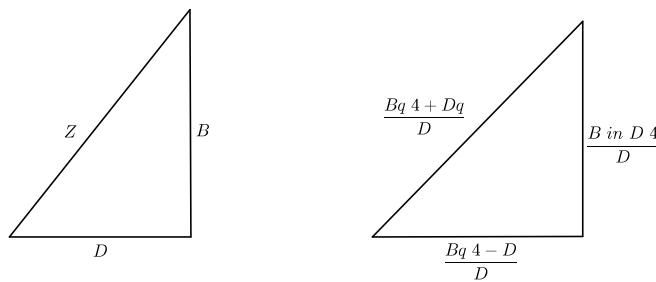
<i>Sit primum triangulum</i>	5,	3,	4
<i>Secundum erit</i>	34,	30,	16
<i>Tertium</i>	41,	40,	9

Solidum sub perpendicularis 4, 16, 9 ad solidum sub basibus 3, 30, 40 se habet ut quadratum abs 4 ad quadratum abs 10.

ZETETICORUM XIII

Invenire numero duo triangula rectangula, ut planum sub perpendicularis, minus plano sub basibus, sit quadratum.

Exponatur numero triangulum quodvis rectangulum, cuius hypotenusa detur Z , basis D , perpendicularum B , ita tamen ut perpendicularum duplum præstet D basi. Et effingatur aliud triangulum abs B dupla & D , vel iis similibus radicibus, & B in D^4 adsignetur perpendicularo, & generaliter similia lateribus plana adplicentur ad D . Planum sub perpendicularis, multatum sub basibus plano, relinquit D qu. vel aliud simile B qu. prout radicem cum ipsis B dupla & D similitudo opus immutavit.

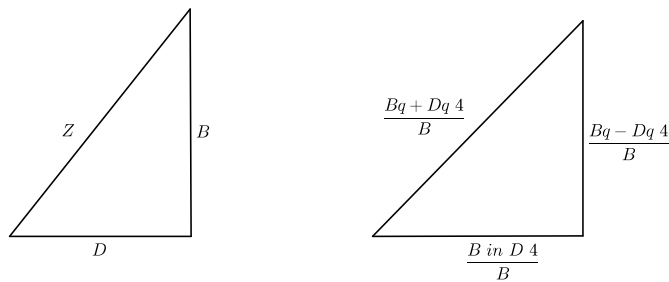


Sit primum triangulum rectangulum 15, 9, 12. Secundum erit 73, 55, 48, factum sub perpendicularis 576 differt a facto sub basibus 495, differentia 81 quadrata, cuius radix est 9.

ZETETICUM XIV

Invenire numero duo triangula rectangula, ut planum sub perpendicularis, adiunctum plano sub basibus, sit quadratum.

Exponatur numero triangulum quodvis rectangulum, cuius hypotenusa detur Z , basis D , perpendicularum B , ita tamen ut perpendicularum B præstet basi D duplæ. Et effingatur aliud triangulum abs B & D dupla, & B in D 2 bis adsignetur basi, & generaliter similia lateribus plana adplicentur ad B . Planum sub perpendicularis, adiunctum plano sub basibus componit B quadratum.

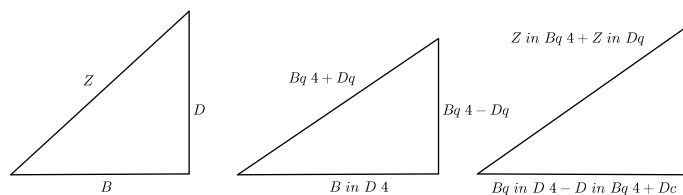


Sit primum triangulum rectangulum 13, 12, 5. Effictio triangulo abs 5 & 6, vel similibus 10 & 12. Secundum erit 61, 60, 11. Factum sub perpendicularis 396. Sub basibus 900. Summa 1296 quadrata, cuius radix est 36.

ZETETICUM XV

Invenire numero tria triangula rectangula, ut solidum sub hypotenusis ad solidum sub basibus, se habeat ut quadratus numerus ad quadratum numerum.

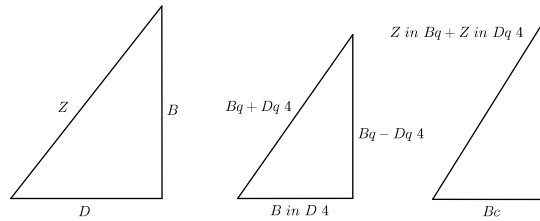
Exponatur numero triangulum quodvis rectangulum cuius hypotenusa Z , basis B , perpendicularum D , ita tamen ut basis B duplum præstet D perpendicularo. Et effingatur secundum triangulum abs B dupla & D . Et B in D 4 adsignetur basi. Tertii denique trianguli hypotenusa similis esto facto sub hypotenusis primi & secundi. Basis facto sub basibus eorumdem, minus facto sub perpendicularis. Unde consequenter perpendicularum æquale est factis a basibus in perpendiculara alterne. Solidum sub hypotenusis ad solidum sub basibus se habebit, ut quadratum ad quadratum.



Sit primum triangulum 5, 3, 4. Secundum erit 13, 12, 5. Tertium 65, 16, 63. Et se habet solidum sub hypotenusa ad solidum sub basibus, ut quadratum abs 65 ad quadratum abs 24.

Vel exponatur numero triangulum rectangulum, cuius hypotenusa Z , basis D , perpendicularum B , ita tamen ut B præstet D basis duplo, & illud sit primum Secundum autem effingatur abs B & D dupla, & B in D 4 adsignetur basi. Tertii denique hypotenusa similis esto, facto sub hypotenusa primi & secundi. Basis, facto sub basibus, plus facto sub perpendicularis. Unde perpendicularum æquale fit differentiæ factorum a basibus in perpendiculara alterne.

Solidum sub hypotenusa ad solidum sub basibus se habebit, ut quadratum ad quadratum.



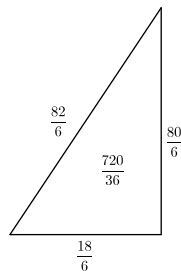
Sit primum triangulum 13, 5, 12. Secundum erit 61, 60, 11. Tertium 793, 432, 665. Et se habebit solidum sub hypotenusa ad solidum sub basibus, ut quadratum abs 793 ad quadratum abs 360.

ZETETICUM XVI

Invenire numero triangulum rectangulum, cuius area æquetur datæ statutis conditionibus.

Ut pote si area detur $\frac{B \cdot q \cdot q - X \cdot q \cdot q}{D \text{ quad}}$. Effingetur triangulum abs $B \cdot q$ & $X \cdot q$ & plano-plana lateribus similia adplicabuntur ad X in D in B .

Sit B 3, X 1, D 2. Sunt igitur duo quadrato-quadrata 8 & 1, differentia quadrato-quadrata 80. Detur area $\frac{80}{4}$ id esto 20; effingetur triangulum abs 9 & 1, & fit area $\frac{720}{36}$.



Itaque cum præscribitur numerus areæ, videndum est an idem qui proponitur, vel idem per quadratum numerum multiplicatus, adiecta unitate aliove quadrato-quadrato, fiat quadrato-quadratum.

Ut si ponitur 15, quoniam 15 ad 1 adiectus, facit 16 quadrato-quadratum abs 2, fiet triangulum abs 4 & 1.

Et si area detur $\frac{D \text{ cubus in } X-X \text{ cubo in } D}{X \text{ quad}}$. Effingetur triangulum abs D & X , & plana lateribus similia adplicabuntur ad X .

Sit D 2, X 1. Atque ideo detur area 6; effingetur triangulum abs 2 & 1, & eveniet area 6. Itaque cum præscribitur numerus area, videndum erit an is qui proponitur, vel idem per quadratum numerum multiplicatus, sit cubus multatus latere.

Ut si proponatur 60. Fiet triangulum abs 4 & 1.

ZETETICUM XVII

Invenire numero tria proportionalia plana, quorum medium adscito sive primo sive postremo, sit quadratum.

Sit medium planorum E planum. Et primum statuitur B quad – E plano, postremum G q. – E plano. Cum igitur primo plano addetur E planum, fiet quadratum, nempe B quadratum. Æque cum postremo addetur E planum, fiet quadratum, nempe G quadratum. Restat igitur ut ea tria plana proportionalia sint, & consequenter quod a medio fit in se, æquetur ei quod fit sub extremis, qua comparatione secundum artem inita, $\frac{B \text{ quad in } G \text{ quad}}{B \text{ quad}+G \text{ quad}}$ invenitur æquari E plano. Unde tria proportionalia plana se habent huiusmodi.

Primum	Secundum	Tertium
$\frac{B \text{ quad. quad.}}{B \text{ q.}+G \text{ quad.}}$	$\frac{B \text{ quad. in } G \text{ quad.}}{B \text{ quad.}+G \text{ quad.}}$	$\frac{G \text{ quad. quad.}}{B \text{ q.}+G \text{ quad.}}$

Sit B 1, G 2. Plana quæsita erunt. Primum $\frac{1}{5}$, Secundum $\frac{4}{5}$. Tertium $\frac{16}{5}$. Medium adscito primo facit 1; adscito secundo, facit 4. Eadem plana ducantur in aliquot quadratum ut pote 25, ad tollenda pacta. Fient 5, 20, 80, plana conditionis imperata.

ZETETICUM XVIII

Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum summa æqualis sit differentiæ datorum.

Sit dati duo cubi, B cubus, D cubus; ille maior, hic minor. Oportet invenire duos alios cubos, quorum summa æqualis sit B cubo – D cubo. Latus primi quærendi cubi, esto $B - A$. Latus secundi, $\frac{B \text{ quad. in } A}{D \text{ quad.}} - D$. Et efformentur cubi & comparentur B cubo – D cubo, invenitur $\frac{D \text{ cubus in } B \text{ 3}}{B \text{ cubo}+D \text{ cubo}}$ æquari A . Itaque primi quæsiti cubi latus $\frac{B \text{ in } B \text{ cubum} - D \text{ cubo } 2}{B \text{ cubo}+D \text{ cubo}}$. Secundi $\frac{D \text{ in } B \text{ cubum } 2 - D \text{ cubo}}{B \text{ cubo}+D \text{ cubo}}$.

Et horum cuborum summa æqualis est $B \text{ cubo} - D \text{ cubo}$. Sic licet invenire quatuor cubos quorum maior tribus reliquis erit æqualis. Enimvero adsumptis duobus lateribus B & D , illo maiore, hoc minore. Latus compositi cubi fit simile \overline{B} in $\overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo}}$. Latus singularis primi cubi \overline{D} in $\overline{B \text{ cubo} + D \text{ cubo}}$. Secundi \overline{B} in $\overline{B \text{ cubum} - D \text{ cubo}}$. Tertii \overline{D} in $\overline{B \text{ cubum} - D \text{ cubo}}$. Evidens autem est ex processu exigi, ut maioris adsumpti lateris cubus præstet cubo duplo minoris.

Sit B 2, D 1. Cubus a radice 6 æquabit singulares cubos a radicibus 3, 4, 5. Cum itaque dabuntur cubi ab 6 N, & 3 N: exhibentur cubi abs 4 N & 5 N, & horum summa illorum differentia, erit æqualis.

ZETETICUM XIX

Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia æquet summam datorum.

Sint dati illi duo cubi, $B \text{ cubus}$, $D \text{ cubus}$; ille maior, hic minor. Latus primi quærendi cubi $A + B$, secundi $\frac{B \text{ quad. in } A}{D \text{ quad.}} - D$. Et efformentur cubi & horum differentia comparetur $B \text{ cubo} + D \text{ cubo}$, invenietur $\frac{D \text{ cubus in } B \text{ } 3}{B \text{ cubo} - D \text{ cubo}}$ æquari A . Itaque maioris quærendi cubi latus erit $\frac{B \text{ in } \overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo}}}{B \text{ cubo} - D \text{ cubo}}$. Secundi $\frac{\overline{D} \text{ in } \overline{B \text{ cubum} - D \text{ cubo}}}{B \text{ cubo} - D \text{ cubo}}$. Et horum differentia æqualis est $B \text{ cubo} + D \text{ cubo}$.

Sic licet invenire quatuor cubos quorum maior tribus reliquis erit æqualis. Enimvero adsumptis duobus lateribus B & D ; illo maiore, hoc minore. Latus compositi cubi fit simile, \overline{B} in $\overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo}}$. Latus singularis primi, \overline{D} in $\overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo}}$. Secundi, \overline{B} in $\overline{B \text{ cubum} - D \text{ cubo}}$. Tertii, \overline{D} in $\overline{B \text{ cubum} - D \text{ cubo}}$.

Sit B 2, D 1. Cubus ab 20 invenitur æqualis singularibus cubis abs 17, 14, 7. Cum itaque dabuntur cubi a 14 N & 7 N: exhibebuntur cubi abs 20 N & 17 N, & horum differentia summa illorum erit æqualis.

ZETETICUM XX

Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia æquet differentiam datorum.

Sint dati illi duo cubi, $B \text{ cubus}$, $D \text{ cubus}$; hic maior, ille minor. Latus primi quærendi cubi esto $A - D$. Secundi $\frac{D \text{ quad. in } A}{B \text{ quad.}} - B$, & efformentur cubi & horum differentia comparetur $B \text{ cubo} - D \text{ cubo}$, invenietur $\frac{D \text{ in } B \text{ cubum } 3}{B \text{ cubo} + D \text{ cubo}}$ æquari A . Itaque latus primi cubi fit $\frac{D \text{ in } B \text{ cubum } 2 - D \text{ cubo}}{B \text{ cubo} + D \text{ cubo}}$. Secundi $\frac{B \text{ in } D \text{ cubum } 2 - B \text{ cubo}}{B \text{ cubo} + D \text{ cubo}}$. Et horum differentia, æqualis est differentię $B \text{ cubi}$ & $D \text{ cubi}$. Eodem opus recidit si primi quærendi cubi radix statuatur $B - A$, secundi $D - \frac{B \text{ quad. in } A}{D \text{ quad.}}$. Sic licet invenire quatuor cubos ut bini cubi sint binis cubis æquales. Enimvero adsumptis duobus lateribus B & D ; illo maiore, hoc minore latus primi cubi fit

simile \overline{D} in $\overline{B cubum 2 - D cubo}$, latus secundi \overline{D} in $\overline{B cubum + D cubo}$, latus tertii \overline{B} in $\overline{B cubum + D cubo}$, latus quarti \overline{B} in $\overline{D cubum 2 - B cubo}$. Evidens autem est ex processu oportere $B cubum$ etsi maiorem $D cubo$, minorem tamen esse $D cubo 2$.

Sit $B 5$, $D 4$. Cubus abs 252 & 248 æqualis est cubo abs 5 & 315. Cum itaque dabuntur cubi abs 315 N & 252 N: exhibebuntur cubi abs 248 N & 5 N, & horum differentia illorum differentia erit æqualis.

LIBER QUINTUS.

ZETETICUM I

Invenire numero tria plana, conficientia quadratorum, & rursus bina iuncta quadratum constituent.

Summa trium planorum, esto quadratum abs $A+B$, nempe $A quad. + B$ in $A 2 + B quadrato$. Primum autem cum secundo, faciat $A quadratum$. Tertium igitur planum erit B in $A 2 + B quad.$ Secundum cum tertio faciat quadratum abs $A - B$, hoc est $A quad. - B$ in $A 2 + B quad.$ Secundum igitur planum relinquitur $A quad. - B$ in $A 4$. Atque adeo primum planum erit B in $A 4$ quod adiunctum tertio plano facit B in $A 6 + B quadrato$. Superest igitur ut compositum istud postremum planum ex primo & tertio, adæquetur quadrato. Sit illud $D quadratum$, ergo $\frac{D quad. - B quad.}{B 6}$ æquabitur A . Primum igitur planum simile fit $D quad. in B quad. 24 - B quad. quad. 24$. Secundum simile $D quad. quad. + B quad. quad. 25 - B quad. in D quad. 26$. Tertium simile $B quad. in D quad. 12 + B quad. quad. 24$.

Sit $D 11$, $B 1$. Primum planum fit 2880. Secundum 11520. Tertium 1476 & satisfaciunt quæstioni. Ut etiam satisfacient omnibus per aliquot quadratum divisis, ut pote per 36: exurgunt plana 80, 320, 41.

Sit $D 6$, $B 1$. Primum planum fit 840. Secundum 385. Tertium 456.

ZETETICUM II

Invenire numero tria quadrata, æquo distantia intervallo.

Sit primum, $A quad.$ Secundum $A quad. + B$ in $A 2 + B quad.$ Tertium igitur erit $A quad. + B$ in $A 4 + B quad. 2$, cuius latus si statuatur $D - A$: fit $D quad. - A$ in $D 2 + A quad.$ æquale $A quad. + B$ in $A 4 + B quad. 2$. Itaque $\frac{D quad. - B quad. 2}{B 4 + D 2}$ æquabitur A . Ergo latus primum fit simile $D quad. - B quad. 2$, latus secundum simile $D quad. + B quad. 2 + B$ in $D 2$. Tertium simile $D quad. + B quad 2 + B D 4$.

Sit $D 8$, $B 1$. Fit latus primi quadrati 62, secundi 82, tertii 98. Ipsa vero ab

iis quadrata sunt 3844, 6724, 9604. Et omnibus per aliquot quadratum divisis, ut pote per 4961, 1681, 2401 æquo inter se distantia intervallo; illa nempe per 2280; hac per 720.

ZETETICUM III

Invenire numero tria æquidistantia plana, & bina iuncta quadratum conficiant.

EXponantur per antecedens Zeteticum tria quadrata æquo distantia intervallo, ac primum idemque minus sit *B quadratum*. Secundum *B quad. + D plano*. Tertium *B quadratum + D plano 2*. Primum autem & secundum æquidistantium trium quæ invenienda proponuntur planorum faciant *B quad.* Primum & tertium *B quad + D plano*. Secundum denique & tertium *B quad. + D plano 2*. Summa vero trium esto *A planum*. Tertium itaque erit *A planum, -B quadrato*. Secundum *A planum, -B quadrato, -D plano*. Primum *A planum, -B quadrato, -D plano 2*. Itaque æquidistabunt hæc tria plana. Primi enim & secundi differentia est *D planum*, sicuti secundi & tertii. Restat igitur ut hæc trium planorum summa quæ est *A planum 3, -B quad. 3, -D plano 3*, æquetur *A plano*, fit $\frac{B \text{ quad. } 3 + D \text{ plano } 3}{2}$ æquale *A plano*. Primum igitur planum erit $\frac{B \text{ quad.} - D \text{ plano}}{2}$. Secundum $\frac{B \text{ quad.} + D \text{ plano}}{2}$. Tertium $\frac{B \text{ quad.} + D \text{ plano } 3}{2}$. Et omnibus quadruplicatis. Fit primum simile *B quad. 2 - D plano 2*. Secundum simile *B quad. 2 + D plano 2*. Tertium simile *B quad. 2 + D plano 6*. Intervallum est *D planum 4* sive inter primum & secundum, sive secundum & tertium. Primum cum secundo facit *B quad. 4*. Primum cum tertio *B quad. 4 + D plano 4* quadratum ex hypothesi, quoniam *B quad + D plano* statuitur quadratum. Secundum cum tertio *B quad. 4 + D plano 8* quadratum quoque ex hypothesi, quoniam *B quad + D plano 2* statuitur quadratum. Sit *B quad. 961. D planum 720*. Primum planum erit 482. Secundum 3362. Tertium 6242 horum intervallum est 2880. Primum cum secundo facit quadratum a latere 62. Cum tertio a latere 82. Secundum denique cum tertio quadratum a latere 98.

ZETETICUM IV

Invenire numero tria plana, quæ bina iuncta, ac etiam ipsa trium summa adscito dato plano, quadratum constituent.

Sit datum *Z planum*. Adgregatum vero primi quæsiti plani & secundi, sit *A quad. + B in A 2, +B quad. - Z plano*, ut cum ei adgregato adiungetur *Z planum* efficiatur quadratum abs *A + B*. Adgregatum autem secundi & tertii sit *A quad. + D in A 2 + D quad. - Z plano*, ut cum ei adiungetur *Z planum* efficiatur quadratum abs *A + D*. Summa autem trium *A quad. + G in A 2, +G quad. - Z plano*, ut cum ei adiungetur *Z planum* efficiatur quadratum

abs $A + G$. Cum igitur a summa subducatur adgregatum primi & secundi, relinquetur ad tertium planum G in A^2 , $+G$ quad. $-B$ in A^2 , $-B$ quad. Et cum ab eadem summa subducatur adgregatum secundi & tertii, relinquetur ad primum planum G in A^2 , $+G$ quad. $-D$ in $A^2 - D$ quadrato. Adgregatum igitur primi & tertii plani adscito Z plano erit, G in A^4 , $+G$ quad. $2-B$ in A^2 , $-B$ quad. $-D$ in A^2 , $-D$ quad. $+Z$ plano, adæquandum quadrato. Sit illud F quadratum. Ergo, $\frac{F \text{ quad.} + D \text{ quad.} + B \text{ quad.} - G \text{ quad.} \cdot 2 - Z \text{ plano}}{G^4 - B^2 - D^2}$ æquabitur A . Sit Z planum 3, B 1, D 2, G 3, F 10, fit A 14. Adgregatum primi & secundi plani est 222, quadratum videlicet abs 15, multatum 3. Adgregatum secundi & tertii est 253, quadratum videlicet a 16, multatum 3. Adgregatum primi & tertii est 97, quadratum videlicet a 10, multatum 3. Summa trium est 286 quadratum videlicet a 17 multatum 3. Primum igitur planum a quæsitis erit 33, secundum 189, tertium 64, qua præstant imperata.

ZETETICUM V

Invenire numero tria plana, quæ bina iuncta, ac etiam ipsa trium summa dempto dato plano, quadratum constituent.

Sit datum Z planum. Summa primi & secundi sit A quad. $+Z$ plano, ut cum auferetur Z planum, residuum sit quadratum abs A . Summa secundi & tertii sit eadem causa A quad. $+B$ in $A^2 + B$ quad. $+Z$ plano, ut cum auferetur Z planum, residuum sit quadratum abs $A + B$. Summa denique omnium trium sit eadem causa A quad. $+D$ in A^2 , $+D$ quad. $+Z$ plano, ut cum auferetur Z planum, residuum sit quadratum abs $A + D$. Si igitur ab summa trium auferatur adgregatum primi & secundi, relinquetur ad tertium D in $A^2 + D$ quadrato. Et si ab eadem auferatur adgregatum secundi & tertii, relinquetur ad primum D in $A^2 + D$ quad. $-B$ in A^2 , $-B$ quad. Adgregatum igitur primi & tertii, dempto Z plano, erit D in $A^4 + D$ quad. 2 , $-B$ in A^2 , $-B$ quad. $-Z$ plano. Sit illud F quadratum. Ergo $\frac{F \text{ quad.} + B \text{ quad.} + Z \text{ plano} - D \text{ quad.} \cdot 3}{D^4 - B^2}$ æquabitur A . Sit Z planum 3, B 1, D 2, F 8, fit A 10. Adgregatum primi & secundi plani est 103, quadratum videlicet a 10, adfectum adiunctione 3. Adgregatum secundi & tertii 124, quadratum videlicet abs 11, auctum 3. Summa trium 147, quadratum videlicet abs 12, adscito 3. Adgregatum denique primi & tertii 67, quadratum abs 8, auctum 3. Primum igitur planum e quæsitis erit 23, secundum 80, tertium 44, quæ præstant imperata.

ZETETICUM VI

Invenire numero infinita quadrata, quorum singula adscito dato plano faciant quadratum, & reciproce infinita, quæ eodem dempto.

Sit datum Z planum, cuius subquadruplum resolvitur in duo latera, quæ ipsum conficiant, veluti B in D , & rursus F in G : unde B in D 4 æquetur Z plano, vel etiam F in G 4. Ergo $\overline{B - D}$ quad. adscito Z plano, quod est quadruplum rectangulum sub lateribus faciet quadratum nempe $\overline{B + D}$ quadratum. Et rursus $\overline{F - G}$ quadratum adscito Z plano faciet quadratum, nempe $\overline{F + G}$ quad. Idem quoque locum habebit in duobus quibuscumque lateribus, ad quorum unum cum adplicabitur Z subquadruplum planum, alterum ex adplicatione orietur.

Sit Z planum 96. Huius subquadruplum 24 fit sub 1 & 24, vel sub 2 & 12, vel sub 3 & 8, vel sub 4 & 6 & fractis innumeris aliis. Itaque quadratum abs 23 adscito 96, facit quadratum abs 25; & quadratum abs 10 adscito 96, faciet quadratum abs 14; & quadratum abs 5 adscito 96, faciet quadratum ab 11; & quadratum ab 2 adscito 96, faciet quadratum abs 10, & ita de reliquis.

Et contra $\overline{B + D}$ quadratum, multatum Z plano quod est quadruplum rectangulum sub lateribus, relinquet $\overline{B - D}$ quad. & $\overline{F + G}$ quadratum, multatum Z plano, relinquet $\overline{F - G}$ quadratum.

625 - 96 facit 529, quadratum abs 23. Et 196 - 96, facit 100, quadratum abs 10.

ZETETICUM VII

Invenire numero tria latera, sub quibus binis quod fit planum adscito dato plano, eveniat quadratum.

Sit datum Z planum. Quod autem fit sub primo & secundo latere statuitur B quadratum - Z plano, ut adscito Z plano sit quadratum, ipsumque latus secundum esto A . Primum igitur erit $\frac{B \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$. Quod vero fit sub secundo & tertio latere ea ipsa de causa sit D quad. - Z plano. Stante igitur latere secundo A , fit tertium $\frac{D \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$. Restat igitur ut quod sit à primo in tertium, id est, abs $\frac{B \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$ in $\frac{D \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$ sit adscito Z plano, quadratum. Quod si B quad. - Z plano, faceret quadratum, ut pote F quadratum; & D quadratum - Z plano, faceret quadratum, ut pote G quad. expedita esset æquatio, eo siquidem casu $\frac{F \text{ quad. in } G \text{ quad.} + Z \text{ plano in } A \text{ quad.}}{A \text{ quad.}}$ adæquandum erit quadrato. Quod non erit negotiosum, velut effingendo illud quadratum abs $\frac{F \text{ in } G = H \text{ in } A}{A}$. Unde $\frac{H \text{ in } F \text{ in } G}{H \text{ quad.} = Z \text{ plano}}$ æquabitur A . Et illa effictione præstat H quadratum ipsi Z plano, hoc cedit. At licet invenire infinita quadrata quæ dempto dato plano quadratum exhibeant, & reciproce infinita quæ eodem adscito. Itaque non libera quadrata, B quadratum vel D quadratum adsumenda sunt, sed quæ conditiones illas impleant, talia videlicet latera F & G eligendo à quibus singulis quadrato adscito Z plano, faciant quadratum; ut hic faciunt B quadratum, & D quadratum, & erit omnino expositæ æquationi locus.

Sit Z planum 192, F 8, G 2. Sumitor H 6 fit A $\frac{16}{13}$. Primum latus erit 52 secun-

dum $\frac{16}{13}$, tertium $\frac{13}{4}$. Primum in secundum, facit 64. Secundum in tertium, facit 4. Primum in tertium 169. Quod fit itaque sub primo & secundo adiunctum 192 est 256, quadratum à latere 16. Quod sub secundo & tertio adiunctum 192 est 196, quadratum à latere 14. Quod denique sub primo & tertio adiunctum 192 est 361, quadratum à later 19.

ZETETICUM VIII

Invenire numero tria latera, sub quibus binis quod fit planum, detracto dato plano, eveniat quadratum.

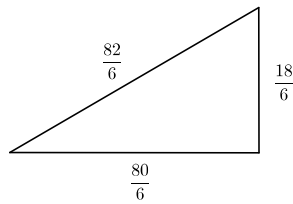
Sit datum planum Z *planum*. Quod autem fit sub primo & secundo latere statuitur B *quad.* + Z *plano*, ut dempto Z *plano*, sit B *quad.* Ipsum latus secundum esto A . Primum igitur erit $\frac{B \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$. Quod vero fit sub secundo & tertio latere ea ipsa de causa sit D *quad.* + Z *plano*. Stante igitur latere secundo A , fit tertium $\frac{D \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$. Restat igitur ut quod fit a primo in tertium, id est, abs $\frac{B \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$ in $\frac{D \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$ detracto Z *plano* sit quadratum. Quod si B *quad.* + Z *plano* faceret quadratum, ut pote F quadratum; & D *quad.* + Z *plano* faceret quoque quadratum, ut pote G quadratum; expedita esset æquatio. Eo quidem cafu $\frac{F \text{ quad. in } G \text{ quad.} - Z \text{ plano in } A \text{ quad}}{A \text{ quad}}$ adæquandum erit quadrato. Quod non erit negotiosum, veluti effingendo illius quadr. abs $\frac{F \text{ in } G - H \text{ in } A}{A}$ unde $\frac{H \text{ in } F \text{ in } G \text{ 2}}{Z \text{ planum} + H \text{ quad.}}$ æquabitur A . At licet invenire infinita quadrata quæ adscito dato plano quadratum exhibeant, & reciproce infinita quæ eodem dempto. Itaque non libera adsumenda sunt B *quadratum* & D *quadratum*, sed quæ conditiones illas impleant, videlicet latera F & G eligendo à quibus singulis quadrato dempto Z *plano*, faciant quadratum, ut hic faciunt B *quadratum* & D *quadratum*, & erit omnino expositæ æquationi locus. Sit Z *planum* 40, F 7, G 11. Fit B 3, D 9. Sumatur H 24 fit A 6. Primum latus $\frac{49}{6}$. Secundum 6. Tertium $\frac{121}{6}$. Factum ex primo in secundum est 49 & dempto 40 relinquitur 9, numerus quadratus, cuius radix 3. Factum ex secundo in tertium est 121, & dempto 40 relinquitur 8, numerus quadratus, cuius radix 9. Factus est primo in tertium est $\frac{5929}{36}$ & dempto $\frac{1440}{36}$, id est 40, relinquitur $\frac{4489}{36}$, numerus quadratus, cuius radix $\frac{67}{6}$.

ZETETICUM IX

Invenire numero triangulum rectangulum, cuius area adiuncta dato plano ex duobus quadratis composito, conficiat quadratum.

Sit datum planum Z , planum compositum ex B *quadrato* & D *quadrato*. Effingatur triangulum rectangulum abs quadrato adgregati laterum B , D , & quadrato differentię eorundem. Hypotenusa igitur similis erit B *quad. quad.* 2 +

B quad. in D quad. $12 + D$ quad. quad. 2. Basis B in D in Z planum 8. Perpendicularum $\overline{B + D}$ quadrato in $\overline{B - D}$ quadratum 2. Adplicentur omnia ad $\overline{B + D}$ in $\overline{B - D}$ quad. 2, fiet area similis $\frac{Z \text{ plano in } B \text{ in } D 2}{\overline{B - D} \text{ quad.}}$. Adde Z planum; quoniam $\overline{B - D}$ quad. + B in D 2 æquatur B quadrato + D quadrato, id est æquatur Z plano. Summa erit $\frac{Z \text{ plano} - \text{planum}}{\overline{B - D} \text{ quad.}}$. Quadratum à radice $\frac{Z \text{ plani}}{\overline{B - D}}$. Sit Z planum 5, D 1, B 2. Triangulum rectangulum erit huiusmodi. Area $\frac{720}{36}$ id est 20. Adde 5. Summa fit 25, cuius radix est 5.



ZETETICUM X

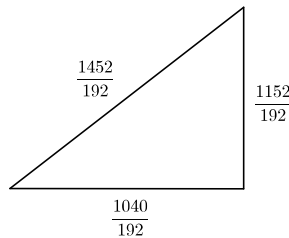
Invenire numero triangulum rectangulum, cuius area diminuta dato plano, conficiat quadratum.

Sit datum planum Z planum, aliter B in D 2, & effingatur triangulum rectangulum abs quadrato adgregati laterum B , D , & quadrato differentiæ eorumdem. Hypotenusa igitur similis erit B quad. quad. 2 + B quad. in D quad. $12 + D$ quad. quad. 2. Basis B quad. in Z planum $4 + D$ quad in Z planum 4. Perpendicularum $\overline{B + D}$ quad. in $\overline{B - D}$ quad. 2. Adplicetur omnia ad $\overline{B + D}$ in $\overline{B - D}$ quad. 2, fiet area similis $\frac{B \text{ quad. in } Z \text{ planum} + D \text{ quad. in } Z \text{ planum}}{\overline{B - D} \text{ quad.}}$. Aufer Z planum, quoniam B quad. + D quad. - $\overline{B - D}$ quad. valet Z planum.

Relinquetur $\frac{Z \text{ plano} - \text{planum}}{\overline{B - D} \text{ quad.}}$ quadratum a radice $\frac{Z \text{ plani}}{\overline{B - D}}$.

Sit D 1, B 5. Unde Z planum 10. Triangulum rectangulum erit huiusmodi.

Area $\frac{599040}{36864}$. Aufer 10. Relinquetur $\frac{230400}{36864}$ quadratum abs radice $\frac{480}{192}$ seu $\frac{10}{4}$.



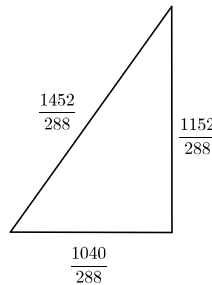
ZETETICUM XI

Invenire numero triangulum rectangulum, cuius area diminutum datum planum, conficiat quadratum.

Sit datum planum Z planum, aliter B in D 2. Effingatur triangulum rectangulum abs quadrato adgregati laterum $B + D$ & quadrato differentiae eorundem. Hypotenusa igitur similis erit B quad. quad. $2 + B$ quad. in D quad. $12 + D$ quad. quad. 2. Basis B quad. in Z planum $4 + D$ quad. in Z planum 4. Perpendiculum $\overline{B + D}$ quad. in $\overline{B - D}$ quad. 2. Adplicentur omnia ad $\overline{B - D}$ in $\overline{B + D}$ quad. 2. Fiet area similis $\frac{B \text{ quad. in } Z \text{ planum} + D \text{ quad. in } Z \text{ plan.}}{\overline{B + D} \text{ quad.}}$. Dematur ex Z plano, quoniam $\overline{B + D}$ quadratum $- B$ quad. $- D$ quad. valet B in D 2.

Relinquetur $\frac{Z \text{ plano} - \text{planum}}{\overline{B + D} \text{ quad.}}$ quadratum a radice $\frac{Z \text{ plani}}{\overline{B + D}}$.

Sit D 1, B 5. Unde Z planum 10 triangulum rectangulum erit huiusmodi. Area $\frac{599400}{82944}$ auferatur a 10, relinquetur $\frac{230400}{82944}$ quadratum abs radice $\frac{480}{288}$ seu $\frac{5}{3}$.



ZETETICUM XII

Invenire numero tria quadrata, ut quod fit sub binis plano-planum, adiunctum ei quod fitab adgregato binorum in datæ longitudis quadratum, conficiat quadratum.

Data longitudine X . Sit primum quadratum, A quad. $- X$ in A 2 $+ X$ quad. cuius radix $A - X$. Aterum, A quad. cuius radix A . Tertium, A quad. $4 - X$ in A 4 $+ X$ quadrato 4. Ex ductu igitur primi in secundum, adiecta summa primi & secundi ducta in X quadratum, fiet quadratum a radice plana A quad. $- X$ in $A + X$ quad. Ex ductu vero secundi in tertium, adiecta summa secundi & tertii ducta in X quadratum, fiet quadratum a radice plana A quad. $2 - X$ in $A, + X$ quad. 2. Ex ductu denique primi in tertium, adiecta summa primi & tertii ducta in X quadratum, fiet quadratum a radice plana A quad. 2, $- X$ in A 3, X quad. 3. Tertii adæquandi radix esto $D - A$ 2. Ergo $\frac{D \text{ quad.} - X \text{ quad.}}{D - X} \frac{4}{4}$ æquabitur A .

Sit X 3, D 30, fit A 8. Itaque quadrata quæsita sunt, primum 25, secundum 64, tertium 196, & satisfaciunt postulatis. Quod enim fit e primo in secundum adiectis 801 conficit 2401, quadratum abs 49. Et rursus quod fit e secundo in tertium adiectis 2340 facit 14884, quadratum abs 122. Ac denique quod fit e primo in tertium adiectis 1989 ficit 6889, quadratum abs 83. Porro eadem quadrata tria cum adsciscent singula duplum datæ longitudinis quadratum: quod fit sub

binis plano-planum detracto eo quod fit ab adgregato binorum in data longitudinis quadratum, erit quadratum. Ut in exposita hypothesi duplum longitudinis quadratum est 18, quo addicto unicuique trium quadratorum fiunt plana tria, primum 43, secundum 82, tertium 214 & satisfaciunt postulatis. Quod enim fit e primo in secundum ablatis 1125, relinquit ipsa 2401. Et rursus quod fit e secundo in tertium ablatis 2664, relinquit ipsa 14884. Ac denique quod fit e primo in tertium ablatis 2313, relinquit ipsa 6889.

ZETETICUM XIII

Datam X longitudinem ita secare, ut cum primo segmento addetur B , secundo D , & ita productæ partes ducentur altera in alteram, fiat quadratum.

Primum segmentum esto $A - B$. Alterum igitur $X - A + B$. Cum itaque primo segmento addetur B , ipsum productum fiet A . Cum vero secundo segmento addetur D , ipsum fiet $X - A + B + D$. Quare $\overline{B + D + X}$ in \overline{A} , $-A$ quad. adæquandu erit quadrato. Sit radix $\frac{S \text{ in } A}{X}$ atque adeo ab ea quadratum, fit $\frac{S \text{ quad. in } A \text{ quad.}}{X \text{ quad.}}$. Ergo $\frac{\overline{B + D + X} \text{ in } X \text{ quad.}}{S \text{ quad.} + X \text{ quad.}}$ æquabitur A .

Ad positiones primum segmentum erit $\frac{\overline{D + X} \text{ in } X \text{ quad.} - B \text{ in } S \text{ quad.}}{S \text{ quad.} + X \text{ quad.}}$.

Alteru $\frac{\overline{B + X} \text{ in } S \text{ quad.} - D \text{ in } X \text{ quad.}}{S \text{ quad.} + X \text{ quad.}}$. Itaque ut sit subtractionis locus oportebit S quadratum minus esse $\frac{X \text{ quad. in } \overline{D + X}}{B}$, sed maius $\frac{X \text{ quad. in } D}{B + X}$.

Sit X 4, B 12, D 20. Oportebit S quadratum minus esse 32, sed maius 20. Sit 25 fit segmentum primum $\frac{84}{41}$, secundum $\frac{80}{41}$ hoc dum producet fit $\frac{900}{41}$. Illud $\frac{576}{41}$. Factum sub illis $\frac{418400}{1681}$ quadratum a radice $\frac{720}{41}$.

Sit X 3, B 9, D 15. Oportebit S quadratum minus esse 18, sed maius $11\frac{1}{4}$. Sit 16 fit primum segmentum $\frac{18}{25}$, alterum $\frac{57}{25}$ hoc dum producit fit $\frac{432}{25}$. Illud $\frac{243}{25}$. Factum sub illis $\frac{104976}{625}$ quadratum abs radice $\frac{324}{25}$.

ZETETICUM XIV

A quadratum minus G plano adæquare uni quadrato, quod sit minus quam D in A , sed maius quam B in A .

Effingatur quadratum ab $A - F$, igitur $A \text{ quad.} - F \text{ in } A$ 2, $+F \text{ quad.}$ æquabitur $A \text{ quad.} - G \text{ plano}$, & consequenter $\frac{F \text{ quad.} + G \text{ plano}}{F}$ æquabitur A . At quoniam $A \text{ quad.} - G \text{ plano}$ est minus quam $D \text{ in } A$. Ideo A quadratum erit minus quam $D \text{ in } A + G \text{ plano}$. Et rursus $A \text{ quad.} - D \text{ in } A$ cedet $G \text{ plano}$. Unde fiet A minor qua $\sqrt{D \text{ quad.} \cdot \frac{1}{4} + G \text{ plano} + D}$ frac12. Ergo A minor erit quam S . Contra quoniam $A \text{ quad.} - G \text{ plano}$ est maius quam $B \text{ in } A$. Et rursus $A \text{ quad.} - B \text{ in } A$ præstabit $G \text{ plano}$. Unde fiet A maior quam $\sqrt{B \text{ quad.} \cdot \frac{1}{4} + G \text{ plano} + B \cdot \frac{1}{2}}$. Proponatur autem R æquari vel cedere $\sqrt{B \text{ quad.} \cdot \frac{1}{4} + G \text{ plano} + B \cdot \frac{1}{2}}$. Ergo A maior erit quam R . Quare $F \text{ quad.} + G \text{ plano}$ erit minus quam $S \text{ in } F$ 2, sed

maius quam R in S 2. Itaque non quævis F adsumenda est sed quæ non evagetur extra limites constitutos. Ad Zetesin sit illa E . Ergo S in $E^2 - E$ quad. maius erit quam G planum. Unde adsumetur F minor quam $S + \sqrt{S}$ quad. — G plano. Contra R in $E^2 - E$ quad. minus erit quam G planum. Unde adsumetur F maior quam $R + \sqrt{R}$ quad. — G plano.

Sit G planum 60, B 5, D 8, A IN minor erit $\sqrt{76} + 4$, maior vero $\sqrt{\frac{265}{4}} + \frac{5}{2}$. At 12 est minor quam $\sqrt{76} + 4$. Et 11 est maior quam $\sqrt{\frac{265}{4}} + \frac{5}{2}$. Sumatur ergo S 13, R 10 eligenda erit F monir quam $3 + \sqrt{109}$, sed maior quam $10 + \sqrt{40}$. At 23 est minor quam $13 + \sqrt{109}$. Et 17 est maior quam $10 + \sqrt{40}$. Quare commode F adsumetur 21 vel 19, vel alia qualibet rationalis intermedia. Adsumatur 20 fit IN, $11\frac{1}{2}$.

Atque hinc solutio Problematis ab Epigrammatario Græco propositi.

- „ Οκτάδραχμους ἔ πεντάδραχμους χοίρας τις ἔμξει,
 „ Τοῖς περπολοῖς ποιῆν χρῆσθ' ἑπιπέγμων.
 „ Καὶ πμὴν ἀπίδωκεν ὑπὲρ πάντων πετράγωνον,
 „ Τὰς ἑπιπεχθείσας δεξάμην μονάδας,
 „ Καὶ ποιῶντας πάλιν ἐπρόν σε φέρην πετράγωνον
 „ Κτησίμηνον πλάραν σῶθ' ἑμαῖ τ' χοιῶν.
 „ Ὡς δὲ διάσφλον, τὸς οκτάδραχμους πῆσον,
 „ Καὶ πάλι τὸς ἐπίρας, πμὴν, λέγε πεντάδραχμους.

σῶθ' ἑμαῖ τ' χοιῶν	II $\frac{1}{2}$	A
πεντάδραχμοι	6 $\frac{7}{12}$	
οκτάδραχμοι	4 $\frac{11}{12}$	

πμὴ πεντάδραχμῶν	32 $\frac{11}{12}$	B in A
πμὴ οκτάδραχμῶν	39 $\frac{1}{3}$	D in A
πμὴ συμπᾶσαι	72 $\frac{1}{4}$ πετράγωνον	A quad. — Z plano.

μονάδες	60	Z planum
περπολοῖς πμὴς ἑμονάδων	132 $\frac{1}{4}$ πετράγωνον	κτησίμηνον πλάραν
11 $\frac{1}{2}$ A quad.		

Retulit Diophantus quæstione ultima libri V. Quare & Zeticorum quintus noster finem hic accipito.

FINIS.

Traduzione e commento

3.1 Libro Primo

ZETETICO I

Data la differenza di due lati e la somma dei medesimi, trovare i lati.

Sia B la differenza dei due lati e sia D la loro somma; si vogliono trovare i due lati. Sia A il lato minore, conseguentemente sia $(A + B)$ il maggiore e $(2A + B)$ la loro somma. Poiché la somma dei due lati è nota ed uguale a D si ha

$$2A + B = D,$$

per antitesi si ottiene $2A = D - B$, quindi dividendo tutto per 2 risulta che

$$A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}.$$

Se invece si pone il lato maggiore uguale a E e quello minore uguale a $(E - B)$, la somma dei lati corrisponde a

$$2E - B = D,$$

quindi analogamente a prima

$$E = \frac{D}{2} + \frac{B}{2}.$$

In questo modo si sono trovati i due lati incogniti: il lato minore A e quello maggiore E

$$A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}, \quad E = \frac{D}{2} + \frac{B}{2}. \quad (3.1)$$

[In termini moderni risolvere questo zetetico equivale a risolvere un sistema lineare in due incognite, il problema infatti può essere enunciato anche nel seguente modo: *trovare due numeri X e Y tali che*

$$\begin{cases} X - Y = B \\ X + Y = D \end{cases}.$$

Risolvendo il sistema si ritrovano i risultati (3.1)

$$\begin{cases} X = \frac{D+B}{2} \\ Y = \frac{D-B}{2} \end{cases}.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 40$ e $D = 100$, quindi applicando il precetto (3.1), risulta che

$$A = \frac{100 - 40}{2} = 30, \quad E = \frac{100 + 40}{2} = 70.$$

[Bombelli e Diofanto affrontano il problema esclusivamente dal punto di vista numerico e lo enunciano nel modo seguente:¹

- Diofanto, I, 1: *Dividere un numero dato in due parti, conoscendo la loro differenza.*

Sia 100 il numero dato, 40 la differenza fra le due parti ed x una delle due parti incognite. L'equazione risolvente è la seguente:

$$2x + 40 = 100,$$

da cui segue $x = 30$. I numeri cercati sono 70 e 30.

- Bombelli, III, 2: *Faccisi di 80 due parti, che l'uno sia 20 più dell'altro.*

Poste le due parti incognite uguali a x e $(x + 20)$, la relativa equazione risolvente sarà

$$x + (x + 20) = 80,$$

da cui si ricava $x = 30$ e $(x + 20) = 50$.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA²

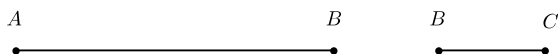
*Commento di Vaulézard*³

Sia AB la somma di due lati incogniti, tali che la loro differenza corrisponda al segmento BC :

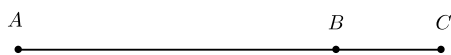
¹Vedi [1] e [13].

²Viète prende in esame grandezze e non solo numeri, quindi attraverso le operazioni algebriche, cerca di condurre una lettura in termini di proporzioni del problema, che non si riscontra nè in Diofanto, nè in Bombelli, i quali al contrario sono fortemente ancorati alle operazioni aritmetiche. Essi infatti presentano impostazioni diverse non solo trattatistiche, ma anche epistemologiche sul ruolo della geometria in relazione all'algebra. La seguente interpretazione, proposta da Vaulézard, mette chiaramente in luce il significato geometrico dello zetetico e la crucialità della teoria delle proporzioni nell'interpretazione viètiana.

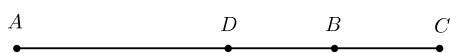
³In [17] pp. 10-11.



Ora si consideri la somma di AB e BC



e sia D il suo punto medio



È evidente che AD corrisponde al lato maggiore e DB a quello minore, infatti $AD - DB = BC$, che coincide proprio alla differenza dei due lati incogniti.

Inoltre questo procedimento può essere applicato non solo per trovare due lati ma anche se le incognite sono due quadrati, due cubi e così via, sempre però rispettando la legge degli omogenei. Per esempio se la somma D e la differenza B sono due *piani*, i due *quadrati* incogniti sono

$$A = \frac{D \text{ piano} - B \text{ piano}}{2}, \quad E = \frac{D \text{ piano} + B \text{ piano}}{2}. \quad]\text{n.c.}$$

ZETETICO II

Data la differenza di due lati e il loro rapporto, trovare i lati.

[ZETETICA]n.c.

Sia B la differenza dei due lati ed il rapporto fra il più piccolo e il più grande sia come R sta ad S . Sia A il lato minore, conseguentemente sia $A + B$ il lato maggiore. Pertanto:

$$A : (A + B) = R : S.$$

[PORISTICA⁴]n.c.

Risolvendo la proporzione si ha che

$$SA = RA + RB,$$

per antitesi⁵

$$SA - RA = RB,$$

⁴L'obiettivo della *poristica* è quello di sviluppare l'uguaglianza derivante dallo Zetetico, applicando le regole algebriche più opportune, per giungere ad una nuova uguaglianza, dalla quale si ricava la *soluzione* del problema.

⁵Con il termine *antithesi*, come mostrato a p. 9 di [18], si intende il trasporto di un termine da un membro all'altro di un'equazione.

da cui si ottiene, dividendo entrambi i membri per $|S - R|$, la *soluzione*

$$A = \frac{RB}{|S - R|}, \quad (3.2)$$

ossia

$$|S - R| : R = B : A. \quad (3.3)$$

[ZETETICA]n.c.

Se invece si pone il lato maggiore uguale ad E e conseguentemente quello minore uguale a $(E - B)$, si ha

$$E : (E - B) = S : R.$$

[PORISTICA]n.c.

Risolviendo la proporzione $RE = SE - SB$, per antitesi

$$|S - R| = SB,$$

[da cui si ottiene, dividendo entrambi i membri per $|S - R|$, la soluzione

$$E = \frac{SB}{|S - R|}]n.c. \quad (3.4)$$

ossia

$$|S - R| : S = B : E. \quad (3.5)$$

[In termini moderni risolvere questo zetetico equivale a risolvere il seguente sistema in due incognite

$$\begin{cases} X - Y = B \\ \frac{X}{Y} = \frac{R}{S} \end{cases}$$

dove X e Y sono i due lati. La (3.2) e la (3.4) si ottengono semplicemente ricavando una delle incognite dalla seconda equazione, per poi sostituirla nella prima

$$\begin{cases} X = \frac{RB}{S-R} \\ Y = \frac{XS}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} Y = \frac{SB}{S-R} \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases} . \quad]n.c.$$

La (3.3) e la (3.5) affermano che:

*La differenza di due lati simili sta al lato simile maggiore o minore come la differenza dei lati incogniti sta al lato incognito maggiore o minore*⁶.

[Invece la (3.2) e la (3.4) corrispondono alla formula risolutiva delle equazioni di primo grado

$$|S - R|A - RB = 0 \quad \text{e} \quad |S - R|E - SB = 0,$$

associate alle proporzioni (3.3) e (3.5).

⁶Due lati R ed S si dicono "simili" rispettivamente a due altri lati A ed E , assegnati o incogniti, se $A : E = R : S$. A ed E vengono chiamati lati "veri".

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 12$, $R = 2$ e $S = 3$, quindi applicando i precetti (3.2) e (3.4), risulta che

$$A = \frac{2 \cdot 12}{3 - 2} = 24, \quad E = \frac{3 \cdot 12}{3 - 2} = 36.$$

[Bombelli e Diofanto enunciano e sviluppano il problema nel seguente modo:⁷

- Diofanto, I, 4: *Trovare due numeri noto il loro rapporto e la loro differenza.*
Il rapporto fra i due numeri sia $5 : 1$, la loro differenza 20 e il numero più piccolo x . L'equazione risolvente è

$$4x = 20,$$

da cui segue che $x = 5$. I numeri cercati sono 25 e 5.

- Bombelli, III, 10: *Trovansi due numeri de' quali il maggiore sia quattro volte il minore e che il maggiore sia 21 più del minore.*

Posto il numero minore uguale a x , la relativa equazione risolvente è

$$4x = 21 + x.$$

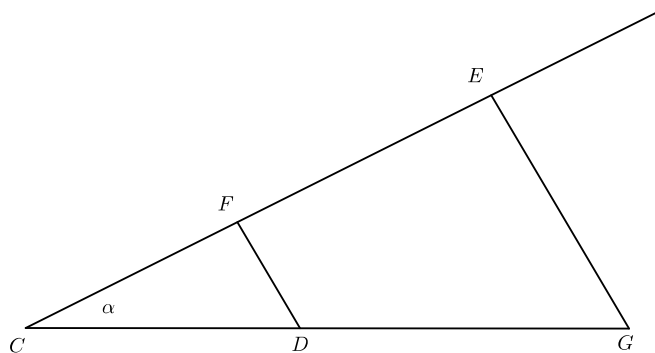
I numeri cercati sono 7 e 28.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA⁸

*Commento di Vaulézar*⁹

Dato il segmento CD si tracci da C , con angolo acuto α , il segmento CE , tale che $CE = CF + FE$. Si congiunga poi il punto F con il punto D e si tracci la trasversale parallela a FD e passante per E , individuando sul prolungamento di CD il punto G . Si ha che

$$CG : DG = CE : FE. \quad (3.6)$$



⁷Vedi [1] e [13].

⁸Segue ora una rilettura del problema in termini strettamente geometrico sintetico, che tenta di dare un'interpretazione al *præceptum* individuato dalla poristica.

⁹In [17] pp.13-14.

Relativamente alla simbologia adottata nello zetetico, se si pone

- CD uguale alla differenza dei due lati: $CD = B$,
- DG uguale al lato minore: $DG = A$,
- CG uguale al lato maggiore: $CG = A + B$,
- CE e FE uguali ai due lati simili: $CE = S$ e $FE = R$,

la (3.6) diventa

$$(A + B) : A = S : R.$$

La dimostrazione della proporzione (3.6) si basa sul teorema di Talete, grazie al quale si può affermare che

$$CD : DG = CF : FE,$$

e sulla proprietà del comporre, da cui segue

$$(CD + DG) : DG = (CE + FE) : FE$$

$$CG : DG = CE : FE. \quad]n.c.$$

ZETETICO III

Data la somma di due lati e noto il loro rapporto, trovare i lati.

Sia G la somma dei due lati ed il rapporto fra il lato minore e quello maggiore sia come R sta ad S . Sia A il lato minore, conseguentemente quello maggiore sia $(G - A)$. Pertanto

$$A : (G - A) = R : S.$$

Risolvendo la proporzione si ha

$$SA = RG - RA,$$

per antitesi

$$SA + RA = RG,$$

[da cui, dividendo entrambi i membri per $(S + R)$, si ottiene la soluzione

$$A = \frac{RG}{S + R} \quad]n.c. \quad (3.7)$$

ossia

$$(S + R) : R = G : A. \quad (3.8)$$

Se invece si pone il lato maggiore uguale ad E e conseguentemente quello minore uguale a $(G - E)$, si ha

$$E : (G - E) = S : R.$$

Risolvendo la proporzione risulta

$$RE = SG - SE,$$

per antitesi

$$RE + SE = SG,$$

[da cui, dividendo entrambi i membri per $(R + S)$, si ottiene la soluzione

$$E = \frac{SG}{R + S} \quad]\text{n.c.} \quad (3.9)$$

ossia

$$(R + S) : S = G : E. \quad (3.10)$$

[In termini moderni risolvere questo zetetico equivale a risolvere il seguente sistema in due incognite

$$\begin{cases} X + Y = G \\ \frac{X}{Y} = \frac{R}{S} \end{cases}$$

dove X e Y sono i due lati. La (3.7) e la (3.9) si ottengono semplicemente ricavando una delle incognite dalla seconda equazione, per poi sostituirla nella prima

$$\begin{cases} X = \frac{RG}{S+R} \\ Y = \frac{XS}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} Y = \frac{SG}{S+R} \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases} \quad]\text{n.c.}$$

Le proporzioni (3.8) e (3.10) affermano che:

La somma di due lati simili sta al lato simile maggiore o minore, come la somma dei lati incogniti sta al lato incognito maggiore o minore.

[Invece la (3.7) e la (3.9) corrispondono alla formula risolutiva delle equazioni di primo grado

$$(S + R)A - RG = 0 \quad \text{e} \quad (S + R)E - SG = 0,$$

associate alle proporzioni (3.8) e (3.10).

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $G = 60$, $R = 2$ e $S = 3$, applicando i precetti (3.7) e (3.9), risulta che

$$A = \frac{2 \cdot 60}{2 + 3} = 24, \quad E = \frac{3 \cdot 60}{2 + 3} = 36.$$

[Bombelli e Diofanto enunciano e sviluppano il problema nel seguente modo:¹⁰

¹⁰Vedi [1] e [13].

- Diofanto, I, 2: *Dividere un numero in due parti, il cui rapporto sia dato.*
Il numero noto sia 60, il rapporto sia 3 : 1 e sia x una delle due parti incognite. I due numeri cercati sono 15 e 45.
- Bombelli, III, 8: *Trovare due numeri che siano in proporzione l'uno all'altro come 2 gionti insieme facciano 25.*
Posti i due numeri da trovare uguali a $2x$ e $3x$, la relativa equazione risolvente è

$$2x + 3x = 25,$$

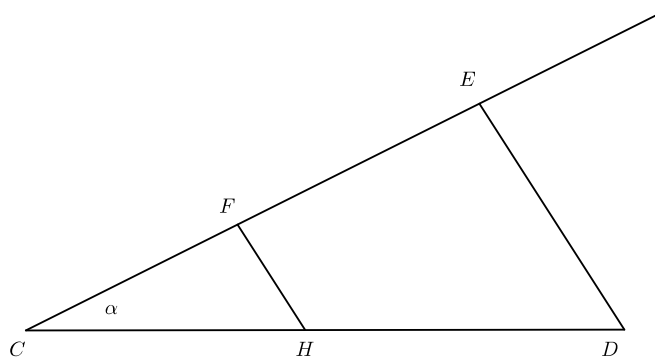
da cui segue $x = 5$. I numeri richiesti sono 10 e 15.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*¹¹

Dato il segmento CD si tracci da C , con angolo acuto α , il segmento CE , tale che $CE = CF + FE$. Si congiunga poi il punto E con il punto D e si tracci la trasversale parallela a ED e passante per F , individuando su CD il punto H . Si ha che

$$CH : HD = CF : FE. \quad (3.11)$$



Relativamente alla simbologia adottata nello zetetico, se si pone

- CD uguale alla somma dei due lati: $CD = G$,
- HD uguale al lato minore: $HD = A$,
- CH uguale al lato maggiore: $CH = G - A$,
- CF e FE uguali ai due lati simili: $CF = S$ e $FE = R$,

¹¹In [17] pp.16-17.

la (3.11) diventa

$$(G - A) : A = S : R.$$

La proporzione (3.11) si ricava immediatamente applicando il teorema di Talete.]n.c.

ZETETICO IV

Dati due lati minori di un terzo, detto *latus iustum*, e il rapporto dei difetti, trovare il terzo lato.

Siano B e D i due lati minori rispetto al terzo lato incognito e il rapporto del difetto del primo e del difetto del secondo sia $\frac{R}{S}$. Sia A il difetto del primo e di conseguenza sia $(A + B)$ il lato *iustum*. Il difetto del secondo lato viene fornito dalla seguente proporzione

$$R : S = A : \frac{SA}{R}$$

e corrisponde a $\frac{SA}{R}$. In questo modo il terzo lato incognito corrisponde ad $(A + B)$ ed a $(D + \frac{SA}{R})$:

$$D + \frac{SA}{R} = A + B. \quad (3.12)$$

Moltiplicando tutti e due i membri per R

$$DR + SA = BR + AR,$$

che equivale a

$$|D - B| R = |R - S| A,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{|D - B| R}{|R - S|} \quad (3.13)$$

e che

$$|R - S| : R = |D - B| : A. \quad (3.14)$$

Se invece si pone il difetto del secondo lato uguale ad E , allora si ha che il terzo lato incognito è uguale a $D + E$ e che il difetto del primo lato è $\frac{RE}{S}$, in quanto

$$S : R = E : \frac{RE}{S}.$$

Pertanto il lato "giusto" è uguale a $(D + E)$ e a $(B + \frac{RE}{S})$:

$$B + \frac{RE}{S} = D + E. \quad (3.15)$$

Moltiplicando tutti i termini per S

$$BS + RE = DS + ES,$$

che equivale a

$$|D - B| S = |R - S| E,$$

da cui si ricava che

$$E = \frac{|D - B|S}{|R - S|} \quad (3.16)$$

e che

$$|R - S| : S = |D - B| : E. \quad (3.17)$$

[In termini moderni risolvere questo zetetico equivale a risolvere il seguente sistema in due incognite

$$\begin{cases} B + X = D + Y \\ \frac{X}{Y} = \frac{R}{S} \end{cases}$$

dove X e Y sono i due difetti, mentre $(B + X)$ e $(D + Y)$ corrispondono al terzo lato incognito. La (3.12) e la (3.15) si ottengono semplicemente ricavando una delle due incognite dalla seconda equazione e sostituendola nella prima

$$\begin{cases} B + X = D + \frac{SX}{R} \\ Y = \frac{SX}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} B + \frac{RY}{S} = D + E \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases},$$

per poi ottenere

$$\begin{cases} X = \frac{(D-B)R}{R-S} \\ Y = \frac{SX}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} Y = \frac{(D-B)S}{R-S} \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases} \quad \text{.]n.c.}$$

Le proporzioni (3.14) e (3.17) sostengono che:

Come la differenza dei difetti simili sta al difetto simile del primo o del secondo lato, così la vera differenza dei lati minori, rispetto a quello giusto, sta al difetto vero del primo o del secondo lato. Tale difetto aggiunto al lato minore corrispondente fornisce il lato giusto.

[Invece la (3.13) e la (3.16) corrispondono alla formula risolutiva delle equazioni di primo grado

$$AR - AS - DR + BR = 0, \quad ER - ES - DS + BS = 0,$$

associate alle proporzioni (3.14) e (3.17).

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 76$, $D = 4$, $R = 1$ e $S = 4$, quindi applicando i precetti (3.13) e (3.16), risulta che

$$A = \frac{|4 - 76|}{|1 - 4|} = 24, \quad E = \frac{|4 - 76|4}{|1 - 4|} = 96.$$

[Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano il problema nel modo seguente:¹²

¹²Vedi [1] e [13].

- Diofanto, I, 7: *Sottrarre due numeri dati dallo stesso numero incognito in modo tale che i resti abbiano l'uno con l'altro un rapporto fissato.*

Siano 100 e 20 i due numeri dati da sottrarre al numero incognito x e sia 3 : 1 il rapporto dei due resti. L'equazione risolvente è

$$3(x - 100) = x - 20,$$

da cui segue che $x = 140$.

- Bombelli, III, 14: *Trovare un numero che cavatone 90 e 30, li due restanti il maggiore sia quattro volte il minore.*

Posto il numero incognito uguale a x , la relativa equazione risolvente è

$$x - 30 = 4(x - 90).$$

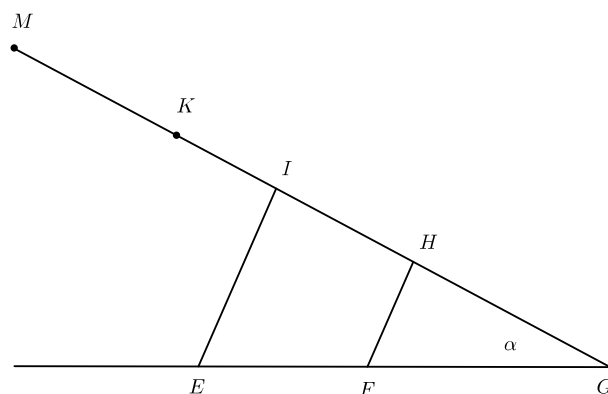
Il numero cercato è $x = 110$.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*¹³

Dato il segmento EG tale che $EG = EF + FG$, si tracci da G , con angolo acuto α , il segmento GI , con $GI = GH + HI$. Si congiungano poi il punto F e il punto H , il punto E e il punto F , individuando due trasversali parallele FH e EI . Si prolunghi dalla parte di I il segmento HI e si considerino due punti K e M tali che $KG = MH$. Si può concludere che

$$(EG - EF) : EG = (IM - IK) : IG. \quad (3.18)$$



Relativamente alla simbologia adottata nello zetetico, se si pone

¹³In [17] pp. 20-22.

- IG uguale al difetto del primo: $IG = A$,
- IH uguale al difetto del secondo: $IH = \frac{SA}{R}$,
- IK uguale al primo lato minore rispetto al lato giusto: $IK = B$,
- IM uguale al secondo lato minore rispetto al lato giusto: $IM = D$,
- EG e EF uguali ai due difetti simili: $EG = R$ e $EF = S$,

la (3.18) diventa

$$(R - S) : R = (D - B) : A.$$

In base a noti risultati euclidei si può dimostrare che

$$FG : HG = EG : IG = EF : IH,^{14}$$

da cui

$$FG : EG = GH : IG.$$

Inoltre dalla costruzione risulta:

$$FG = EG - EF \quad \text{e} \quad GH = IG - IH,$$

quindi sostituendo nella proporzione precedente si ottiene

$$(EG - EF) : EG = (IG - IH) : IG.$$

Ricordando che per ipotesi $MH = GK$ e in particolare che

$$MH = MK + KI + IH \quad \text{e} \quad GK = KI + IH + HG,$$

si ha

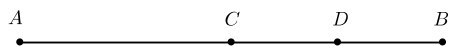
$$GH = MK;$$

perciò si può concludere che vale la relazione (3.18).

L'uguaglianza $MH = GK$, fornisce anche la possibilità di affermare che in generale la differenza dei lati minori, rispetto a quello giusto, è uguale alla differenza dei difetti, ciò risulta evidente dalla seguente costruzione:

¹⁴Questo risultato deriva dall'applicazione, alla costruzione geometrica considerata, prima del teorema di Talete, poi delle proprietà delle proporzioni del comporre e del permutare:

Teorema di Talete:	$EF : FG = IH : HG$	$FG : EF = HG : IH$
Proprietà del comporre:	$EG : FG = IG : IH$	$EG : EF = IG : IH$
Proprietà del permutare:	$EG : IG = FG : HG$	$EG : IG = EF : IH$



dove AB corrisponde al lato giusto, AC e AD ai lati minori e CB e DB ai loro difetti; pertanto

$$(CB - DB) = (AD - AC) = CD.$$

Questo risultato viene enunciato e dimostrato dalla *Proposizione VIII* delle *Notæ Priores*¹⁵.]n.c.

ALITER¹⁶

Dati due lati minori di un terzo, detto *latus iustum*, ed il rapporto dei difetti, trovare il terzo lato.

Siano B e D i due lati minori rispetto al terzo lato incognito e il rapporto dei loro difetti sia $\frac{R}{S}$. Sia A il lato giusto, conseguentemente siano $(A - B)$ il difetto del primo e $(A - D)$ il difetto del secondo. Si ha che

$$\frac{A - B}{A - D} = \frac{R}{S},$$

ovvero

$$(A - B) : (A - D) = R : S,$$

quindi risolvendo la proporzione

$$RA - RD = SA - SB,$$

applicando l'antitesi

$$|S - R| A = |SB - RD|$$

da cui si ricava immediatamente il lato giusto

$$A = \frac{|SB - RD|}{|S - R|}.^{17}$$

¹⁵Vedi p. 16 di [18].

¹⁶Nell'Aliter Viète segue la strada risolutiva adottata da Diofanto. È opportuno osservare che in questo modo mediante la poristica non si giunge ad una proporzione che può esprimere un teorema geometrico non banale. Per questo nello zetetico si pone come incognita il difetto del primo lato.

¹⁷Geometricamente Viète legge quest'uguaglianza nel seguente modo: «Cum differentia inter rectangulum sub primo latere deficiente & simili defectu secundi, & rectangulum sub secundo latere deficiente & simili defectu primi adplicabitur ad differentiam similium defectuum, orietur latus iustum de quo qæritur.» Vedi p. 44 di [18].

Letteralmente: «La differenza tra il prodotto del primo lato minore e del difetto simile al secondo e il prodotto del secondo lato minore e il difetto simile al primo, diviso per la differenza dei difetti simili, dà il lato giusto richiesto.»

Sia per esempio $B = 76$, $D = 4$, $R = 1$, e $S = 4$. Applicando il precetto risulta che

$$A = \frac{|4 \cdot 76 - 4|}{|4 - 1|} = 100.$$

ZETETICO V

Dati due lati maggiori di un terzo, detto *latus iustum*, e il rapporto degli eccessi, trovare il terzo lato.

Siano B e D i due lati maggiori rispetto al terzo lato incognito e il rapporto dell'eccesso del primo e dell'eccesso del secondo sia $\frac{R}{S}$. Sia A l'eccesso del primo e di conseguenza sia $(B - A)$ il lato *iustum*. L'eccesso del secondo lato viene fornito dalla seguente proporzione

$$R : S = A : \frac{SA}{R}$$

e corrisponde a $\frac{SA}{R}$. In questo modo il terzo lato incognito corrisponde ad $(B - A)$ ed a $(D - \frac{SA}{R})$:

$$D - \frac{SA}{R} = B - A. \quad (3.19)$$

Moltiplicando tutti e due i membri per R

$$DR - SA = BR - AR,$$

che equivale a

$$|D - B| R = |S - R| A,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{|D - B| R}{|S - R|} \quad (3.20)$$

e che

$$|S - R| : R = |D - B| : A. \quad (3.21)$$

Se invece si pone l'eccesso del secondo lato uguale ad E , allora si ha che il terzo lato incognito è uguale a $D - E$ e che l'effetto del primo lato è $\frac{RE}{S}$, in quanto

$$S : R = E : \frac{RE}{S}.$$

Pertanto il lato "giusto" è uguale a $(D - E)$ ed a $(B - \frac{RE}{S})$:

$$B - \frac{RE}{S} = D - E. \quad (3.22)$$

Moltiplicando tutti i termini per S

$$BS - RE = DS - ES,$$

che equivale a

$$|D - B|S = |S - R|E,$$

da cui si ricava che

$$E = \frac{|D - B|S}{|S - R|} \quad (3.23)$$

e che

$$|S - R| : S = |D - B| : E. \quad (3.24)$$

[In termini moderni risolvere questo zetetico equivale a risolvere il seguente sistema in due incognite

$$\begin{cases} B - X = D - Y \\ \frac{X}{Y} = \frac{R}{S} \end{cases}$$

dove X e Y sono i due eccessi, mentre $(B - X)$ e $(D - Y)$ corrispondono al terzo lato incognito. La (3.19) e la (3.22) si ottengono semplicemente ricavando una delle due incognite dalla seconda equazione e sostituendola nella prima

$$\begin{cases} B - X = D - \frac{SX}{R} \\ Y = \frac{SX}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} B - \frac{RY}{S} = D - E \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases},$$

per poi ottenere

$$\begin{cases} X = \frac{(D-B)R}{S-R} \\ Y = \frac{SX}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} Y = \frac{(D-B)S}{S-R} \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases} . \quad]\text{n.c.}$$

Le proporzioni (3.21) e (3.24) sostengono che:

Come la differenza degli eccessi simili sta all'eccesso simile del primo o del secondo lato, così la vera differenza dei lati maggiori, rispetto a quello giusto, sta all'eccesso vero del primo o del secondo lato. Tale eccesso sottratto al lato maggiore corrispondente fornisce il lato giusto.

[Invece la (3.20) e la (3.23) corrispondono alla formula risolutiva delle equazioni di primo grado

$$AS - AR - DR + BR = 0, \quad ES - ER - DS + BS = 0,$$

associate alle proporzioni (3.21) e (3.24).

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 60$, $D = 40$, $S = 3$ e $R = 1$, quindi applicando i precetti (3.20) e (3.23), risulta che

$$A = \frac{|40 - 60|}{|3 - 1|} = 40, \quad E = \frac{|40 - 60|3}{|3 - 1|} = 120.$$

[Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano il problema nel modo seguente, utilizzando gli stessi valori numerici:¹⁸

- Diofanto, I, 9: *Sottrarre da due numeri dati lo stesso numero incognito in modo tale che i resti abbiano l'uno con l'altro un rapporto fissato.*
Condizione necessaria: Il rapporto dato deve essere maggiore del rapporto del numero assegnato più grande e di quello più piccolo.

Siano 20 e 100 i due numeri dati a cui sottrarre il numero incognito x e sia 6 : 1 il rapporto dei due resti. L'equazione risolvente è

$$120 - 6x = 100 - x,$$

da cui segue che $x = 4$.

- Bombelli, III, 16: *Trovare un numero che cavato di 20 e di 100 il maggior restante sia sei volte quanto il minore.*

Posto il numero incognito uguale a x , la relativa equazione risolvente è

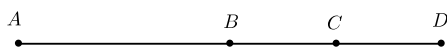
$$x - 20 = 6(x - 100).$$

Il numero cercato è $x = 110$.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*¹⁹

La retica esegetica geometrica proposta da Vaulézard è del tutto analoga a quella precedente. Inoltre anche in tal caso accade che la differenza degli eccessi sia uguale alla differenza dei lati maggiori, rispetto a quello giusto, come mostra la seguente figura:



dove AB è il lato giusto, AC e AD corrispondono ai due lati maggiori e BC e BD ai loro eccessi. Si ha

$$(BD - BC) = (AD - AC) = CD.$$

Questo risultato viene dimostrato dalla *Proposizione IX* delle *Notæ Priores*²⁰.

]n.c.

¹⁸Vedi [1] e [13].

¹⁹In [17] pp. 27-28.

²⁰Vedi p. 16 di [18].

ALITER

Dati due lati maggiori di un terzo, detto *latus iustum*, e il rapporto degli eccessi, trovare il terzo lato.

Siano B e D i due lati maggiori rispetto al terzo lato incognito e il rapporto dei loro eccessi sia $\frac{R}{S}$. Sia A il lato giusto, conseguentemente siano $(B - A)$ l'eccesso del primo e $(D - A)$ l'eccesso del secondo. Si ha che

$$\frac{B - A}{D - A} = \frac{R}{S},$$

ovvero

$$(B - A) : (D - A) = R : S,$$

quindi risolvendo la proporzione

$$RD - RA = SB - SA,$$

applicando l'antitesi

$$|S - R| A = |SB - RD|$$

da cui si ricava immediatamente il lato giusto

$$A = \frac{|SB - RD|}{|S - R|}.^{21}$$

Sia per esempio $B = 60$, $D = 140$, $S = 3$, e $R = 1$. Applicando il precetto risulta che

$$A = \frac{|3 \cdot 60 - 140|}{|3 - 1|} = 20.$$

ZETETICO VI

Dati due lati, uno maggiore e uno minore di un terzo, detto *latus iustum*, e il rapporto del difetto e dell'eccesso, trovare il terzo lato.

Siano B il lato minore e D quello maggiore rispetto al terzo lato incognito e il rapporto fra il difetto del primo e dell'eccesso del secondo sia $\frac{R}{S}$. Sia A il difetto del lato minore e di conseguenza sia $(A + B)$ il lato *iustum*. L'eccesso del secondo lato viene fornito dalla seguente proporzione

$$R : S = A : \frac{SA}{R}$$

²¹Geometricamente Viète legge quest'uguaglianza nel seguente modo: «Cum differentia inter rectangulum sub primo latere excedente & simili excessu secundi, & rectangulum sub secundo latere excedente & simili excessu primi adplicabitur ad differentiam similium excessuum, orietur latus iustum.» Vedi p. 44 di [18].

Letteralmente: «La differenza tra il prodotto del primo lato maggiore e dell'eccesso simile al secondo e il prodotto del secondo lato maggiore e l'eccesso simile al primo, diviso per la differenza degli eccessi simili, dà il lato giusto richiesto.»

e corrisponde a $\frac{SA}{R}$. In questo modo il terzo lato incognito corrisponde ad $(B + A)$ ed a $(D - \frac{SA}{R})$:

$$D - \frac{SA}{R} = B + A. \quad (3.25)$$

Moltiplicando tutti e due i membri per R

$$DR - SA = BR + AR,$$

che equivale a

$$(R + S)A = |D - B|R,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{|D - B|R}{|R + S|} \quad (3.26)$$

e che

$$(R - S) : R = |D - B| : A. \quad (3.27)$$

Se invece si pone l'eccesso del primo lato uguale ad E , allora si ha che il terzo lato incognito è uguale a $D - E$ e che il difetto del secondo lato è $\frac{RE}{S}$, in quanto

$$S : R = E : \frac{RE}{S}.$$

Pertanto il lato "giusto" è uguale a $(D - E)$ e a $(B - \frac{RE}{S})$:

$$B - \frac{RE}{S} = D - E. \quad (3.28)$$

Moltiplicando tutti i termini per S

$$BS + RE = DS - ES,$$

che equivale a

$$(R + S)E = |D - B|S,$$

da cui si ricava che

$$E = \frac{|D - B|S}{R + S} \quad (3.29)$$

e che

$$(R + S) : S = |D - B| : E. \quad (3.30)$$

[In termini moderni risolvere questo zetetico equivale a risolvere il seguente sistema in due incognite

$$\begin{cases} B + X = D - Y \\ \frac{X}{Y} = \frac{R}{S} \end{cases}$$

dove X è l'eccesso del lato maggiore e Y il difetto di quello minore, mentre $(B + X)$ e $(D - Y)$ corrispondono al terzo lato incognito. La (3.25) e la (3.28)

si ottengono semplicemente ricavando una delle due incognite dalla seconda equazione e sostituendola nella prima

$$\begin{cases} B + X = D - \frac{SX}{R} \\ Y = \frac{SX}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} B + \frac{RY}{S} = D - E \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases},$$

per poi ottenere

$$\begin{cases} X = \frac{(D-B)R}{S+R} \\ Y = \frac{SX}{R} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} Y = \frac{(D-B)S}{S+R} \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases} \quad \text{n.c.}$$

Le proporzioni (3.27) e (3.30) sostengono che:

Come la somma del difetto simile e dell'eccesso simile sta al difetto simile del primo lato o all'eccesso simile del secondo, così la differenza del lato maggiore e del lato minore, rispetto a quello giusto, sta al difetto del lato minore o all'eccesso di quello maggiore. La somma del difetto al lato minore e la sottrazione dell'eccesso dal lato maggiore corrispondono al lato giusto.

[Invece la (3.26) e la (3.29) corrispondono alla formula risolutiva delle equazioni di primo grado

$$AR + AS - DR + BR = 0, \quad ER + ES - DS + BS = 0,$$

associate alle proporzioni (3.27) e (3.30).

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 60$, $D = 180$, $R = 1$ e $S = 5$, quindi applicando i precetti (3.26) e (3.29), risulta che

$$A = \frac{|180 - 60|}{|5 + 1|} = 20, \quad E = \frac{|180 - 60|5}{|5 + 1|} = 100.$$

[Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano il problema nel modo seguente:²²

- Diofanto, I, 10: *Dati due numeri, sommare al minore e sottrarre al maggiore lo stesso numero incognito, in modo tale che il rapporto fra il difetto del primo e l'eccesso del secondo sia fissato.*

Siano 20 e 100 i due numeri dati da sommare e da sottrarre al numero incognito x e sia 4 : 1 il rapporto del difetto e dell'eccesso. L'equazione risolvente è

$$20 + x = 4(100 - x),$$

da cui segue che $x = 76$.

²²Vedi [1] e [13].

- Bombelli, III, 18: *Trovinsi un numero che aggiunto con 18 e cavato di 100 la somma Iuu restante siano in proportione tripla.*

Posto il numero incognito uguale a x , la relativa equazione risolvente è

$$x + 18 = 3(100 - x),$$

oppure

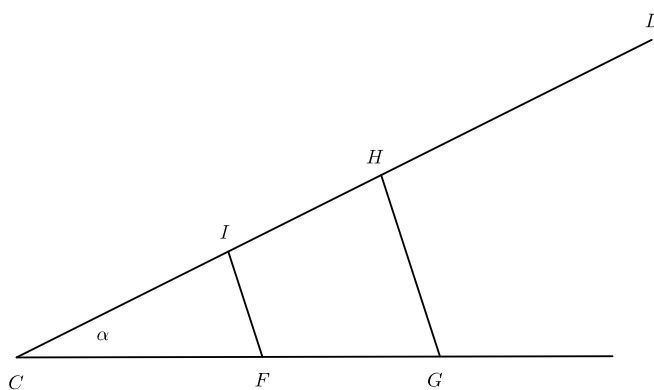
$$100 - x = 3(x + 18).$$

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*²³

Dati i segmenti consecutivi CF e FG , si tracci da C , con angolo acuto α , il segmento CH e si congiunga il punto G con il punto H , quindi si disegni la trasversale parallela a GH e passante per F , individuando il punto I . In seguito si prolunghi dalla parte di H il segmento IH , considerando sul prolungamento il punto L . Si può concludere che

$$CG : FG = CH : IH \quad \text{e} \quad CG : CF = CH : CI. \quad (3.31)$$



Relativamente alla simbologia adottata nello zetetico, se si pone

- HI uguale al difetto del primo: $HI = A$,
- CI uguale all'eccesso del secondo: $CI = \frac{SA}{R}$,
- CH uguale alla differenza del lato maggiore e del lato minore: $CH = (D - B)$,
- HL uguale al lato minore rispetto al lato giusto: $HL = B$,
- CL uguale al lato maggiore rispetto al lato giusto: $CL = D$,

²³In [17] pp. 31-32.

- CF e FG uguali al difetto simile e all'eccesso simile: $CF = R$ e $FG = S$,

le (3.31) diventano

$$(S + R) : S = (D - B) : A, \quad \text{e} \quad (S + R) : R = (D - B) : E.$$

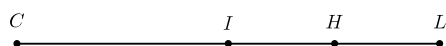
Questo risultato si dimostra facilmente applicando prima il teorema di Talete:

$$CF : FG = CI : IH \quad \text{e} \quad FG : CF = HI : CI,$$

poi impiegando la proprietà del comporre

$$CG : FG = CH : IH \quad \text{e} \quad CG : CF = CH : CI.$$

Inoltre dalla *Proposizione X* delle *Notæ Priores*²⁴ segue che la somma dell'eccesso e del difetto dei due lati corrisponde alla differenza del lato maggiore e di quello minore, rispetto al lato giusto:



$$CI + IH = CL - HL = CH. \quad]\text{n.c.}$$

ALITER

Dati due lati, uno maggiore e uno minore di un terzo, detto *latus iustum*, e il rapporto del difetto e dell'eccesso, trovare il terzo lato.

Siano B e D , rispettivamente, il lato minore e quello maggiore in relazione al lato giusto e sia $\frac{R}{S}$ il rapporto fra il difetto del primo e l'eccesso del secondo. Sia A il lato giusto, conseguentemente siano $(A - B)$ il difetto del primo lato e $(D - A)$ l'eccesso del secondo. Si ha che

$$\frac{A - B}{D - A} = \frac{R}{S},$$

ovvero

$$(A - B) : (D - A) = R : S,$$

quindi risolvendo la proporzione

$$RD - RA = SA - SB,$$

applicando l'antitesi

$$(S + R)A = RD + SB,$$

²⁴Vedi p. 16 di [18].

da cui si ricava immediatamente il lato giusto

$$A = \frac{RD + SB}{(S + R)}.^{25}$$

Sia per esempio $B = 60$, $D = 180$, $R = 1$, e $S = 5$. Applicando il precetto risulta che

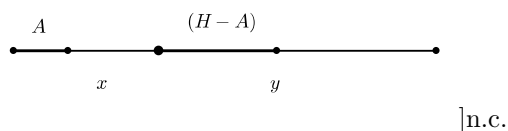
$$A = \frac{180 + 5 \cdot 60}{5 + 1} = 80.$$

ZETETICO VII

Dato un lato, dividerlo in due parti in modo tale che una porzione definita della prima parte più una porzione definita della seconda sia uguale ad una grandezza data.

Sia B il lato assegnato da dividere in due parti in modo tale che la porzione del primo segmento, che sta all'intero, cioè al primo segmento, come D sta a B , sommata alla porzione del secondo segmento, che sta all'intero come F sta a B , sia H . Infine sia A la porzione del primo segmento, conseguentemente $(H - A)$ quella del secondo.

[Se si pone il primo segmento uguale ad x e il secondo uguale ad y le condizioni espresse precedentemente determinano la seguente costruzione:



Si può affermare che

$$D : B = A : \frac{BA}{D},$$

quindi $\frac{BA}{D}$ corrisponde al primo segmento, il secondo invece si ricava dalla proporzione

$$F : B = (H - A) : \frac{|BH - BA|}{F}$$

ed esso corrisponde a $\frac{|BH - BA|}{F}$. Sommando questi due segmenti e tenendo presente le condizioni iniziali, si ha

$$\frac{BA}{D} + \frac{|BH - BA|}{F} = B,$$

²⁵Geometricamente Viète legge quest'uguaglianza nel seguente modo: «Cum adgregatum factum ex simili defectu in latus excedens, & facti ex simili excessa in latus deficiens, applicabitur ad adgregatum similium excessus & defectus, orietur latus iustum.» Vedi p. 45 di [18].

Letteralmente: «La somma del prodotto fra il lato maggiore e il difetto simile e il prodotto fra il lato minore e l'eccesso simile, diviso la somma dell'eccesso simile e del difetto simile, coincide con il lato giusto richiesto.»

successivamente moltiplicando per DF entrambi i membri e dividendoli per B , si ottiene che

$$A = \frac{HD - FD}{D - F}, \quad (3.32)$$

supposto $D > F$. La (3.32) equivale alla proporzione

$$(D - F) : (H - F) = D : A.$$

Diversamente posta la porzione del secondo segmento uguale ad E e di conseguenza quella del primo uguale ad $(H - E)$, si può affermare che

$$F : B = E : \frac{BE}{F} \quad \text{e} \quad D : B = (H - E) : \frac{BH - BE}{D},$$

pertanto $\frac{BE}{F}$ corrisponde al secondo segmento, mentre $\frac{BH - BE}{D}$ al primo. Analogamente a prima, sommando i due segmenti determinati, risulta che

$$\frac{BE}{F} + \frac{BH - BE}{D} = B,$$

quindi moltiplicando tutti i termini per DF e poi dividendoli per B , si ha

$$E = \frac{DF - HF}{D - F}, \quad (3.33)$$

ovvero

$$(D - F) : (D - H) = F : E.$$

Una volta note anche le porzioni dei due segmenti si potranno conoscere anche il primo e il secondo segmento; essi saranno rispettivamente

$$\frac{BA}{D} \quad \text{e} \quad \frac{BE}{F}.$$

Dunque si può concludere che

Diviso il lato in proporzione alle porzioni dei segmenti,

risulta che

come la porzione simile del primo segmento (se di questo si prende una parte maggiore, rispetto a quella del secondo) meno la porzione simile del secondo sta alla somma data delle porzioni, meno la porzione simile del secondo segmento, così la porzione simile del primo sta alla porzione vera del primo segmento.

$$[(D - F) : (H - F) = D : A, \quad \text{con} \quad D > F.] \text{n.c.}$$

Oppure

come la porzione simile del primo segmento meno la porzione simile del secondo sta alla porzione simile del primo segmento meno la somma data delle porzioni, così la porzione simile del secondo segmento sta alla porzione vera del secondo segmento.

$$[(D - F) : (D - H) = F : E.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 60$, $D = 20$, $F = 12$, $H = 14$ formato da A ed E . Applicando i precetti (3.32) e (3.33) si ha:

$$A = \frac{14 \cdot 20 - 12 \cdot 20}{20 - 12} = 5 \quad \text{e} \quad E = \frac{20 \cdot 12 - 14 \cdot 12}{20 - 12} = 9.$$

È necessario che il valore assegnato ad H , il quale corrisponde alla somma delle porzioni dei due segmenti, sia compreso fra D ed F , con $D > F$. Infatti nell'esempio proposto 14 è minore di 20, ma maggiore di 12:

$$F = 12 < H = 14 < D = 20.$$

[Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano il problema nel seguente modo:²⁶

- Diofanto *I*, 5: *Dividere un numero dato in due numeri tali che la somma di una frazione dell'uno con una frazione dell'altro sia data.*

Condizione necessaria: l'ultimo numero assegnato deve essere compreso fra i numeri che si ottengono una volta note le frazioni relative al primo numero assegnato.

Sia 100 il primo numero assegnato, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ le frazioni date e 30 la somma delle frazioni dei due numeri in cui è diviso il numero di partenza. Se si pone il secondo numero richiesto uguale a $5x$, allora il primo corrisponde a $3(30 - x)$. Dunque l'equazione risolvente è

$$90 + 2x = 100,$$

da cui segue $x = 5$. I due numeri richiesti sono 75 e 25.

- Bombelli *III*, 11: *Dividasi 100 in due numeri tali che il terzo dell'uno e il quinto dell'altro giunti insieme facciano 30.*

Se si pone il primo numero incognito uguale ad x e conseguentemente il secondo uguale a $(100 - x)$ l'equazione risolvente risulta

$$\frac{x}{3} + \frac{100 - x}{5} = 30,$$

da cui segue $x = 5$. I numeri cercati sono 75 e 25.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

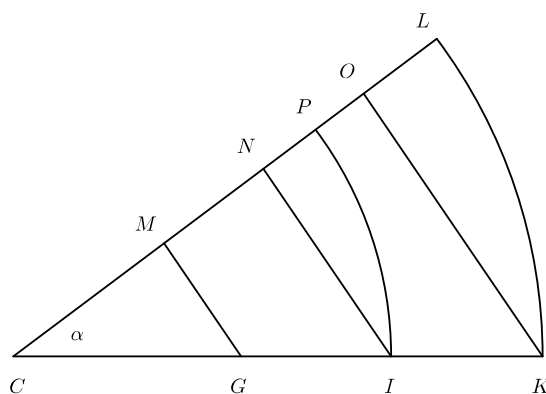
*Commento di Vauléard*²⁷

²⁶Vedi [1] e [13].

²⁷In [17] pp. 43-45.

Si consideri il segmento CK tale che $CK = CG + GI + IK$. Si tracci da C con angolo acuto α il segmento CL tale che $CL = CK$. Si consideri poi il punto M e si congiunga G con M . Quindi si traccino le trasversali parallele al segmento GM e passanti per i punti I e K , individuando i punti N ed O . Si consideri infine il punto P tale che $MP = GI$, si ha

$$CG : CM = CI : CN \quad (3.34)$$



Relativamente alla simbologia dello zetetico se si pone:

- CK uguale al segmento iniziale: $CK = B$,
- CP uguale alla somma delle porzioni: $CP = H$,
- CI uguale alla porzione simile del primo segmento: $CI = D$,
- GI uguale alla porzione simile del secondo segmento: $GI = F$,
- CN uguale alla porzione del primo segmento: $CN = A$,
- NP uguale alla porzione del secondo segmento: $NP = E$,
- CO uguale al primo segmento: $CO = \frac{BE}{F}$,
- OL uguale al secondo segmento: $OL = \frac{BH - BE}{D}$,

la (3.34) diventa

$$(D - F) : (H - F) = D : A.$$

L'uguaglianza (3.34) si dimostra applicando il teorema di Talete e le proprietà delle proporzioni; infatti per il teorema di Talete

$$CG : GI = CM : MN,$$

applicando le proprietà del comporre e dell'invertire risulta che

$$CG : CI = CM : CN$$

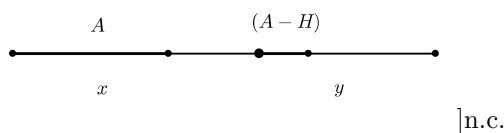
ed infine permutando i medi tra loro si ottiene proprio la proporzione (3.34).]n.c.

ZETETICO VIII

Dato un lato, dividerlo in due parti in modo tale che una porzione definita della prima parte meno una porzione definita della seconda sia uguale ad una grandezza data.

Sia B il lato assegnato da dividere in due parti in modo tale che la porzione del primo segmento, che sta all'intero, cioè al primo segmento, come D sta a B , meno la porzione del secondo segmento, che sta all'intero come F sta a B , sia H . Non è importante esplicitare quale delle due porzioni sia maggiore o minore, in quanto entrambi i casi si sviluppano allo stesso modo, pertanto sia D la porzione simile maggiore o minore. Sia A la porzione del primo segmento, conseguentemente $(A - H)$ quella del secondo.

[Se si pone il primo segmento uguale ad x e il secondo uguale ad y le condizioni espresse precedentemente determinano la seguente costruzione:



Si può affermare che

$$D : B = A : \frac{BA}{D},$$

quindi $\frac{BA}{D}$ corrisponde al primo segmento, il secondo invece si ricava dalla proporzione

$$F : B = (A - H) : \frac{BA - BH}{F}$$

ed esso corrisponde a $\frac{BA - BH}{F}$. Sommando questi due segmenti e tenendo presente le condizioni iniziali, si ha

$$\frac{BA}{D} + \frac{BA - BH}{F} = B,$$

successivamente moltiplicando per DF entrambi i membri e dividendoli per B , si ottiene che

$$A = \frac{DF + DH}{D + F}, \quad (3.35)$$

ovvero,

$$(D + F) : (F + H) = D : A.$$

Inoltre, poiché la porzione del secondo segmento E è stata definita $(A - H)$, risulta che

$$E = \frac{DF + DH}{D + F} - H = \frac{DF - HF}{D + F}, \quad (3.36)$$

da cui

$$(D + F) : (D - H) = F : E.$$

Una volta note anche le porzioni dei due segmenti si potranno conoscere anche il primo e il secondo segmento; essi saranno rispettivamente

$$\frac{BA}{D} \quad \text{e} \quad \frac{BE}{F}.$$

Dunque si può concludere che

Diviso il lato in proporzione alle porzioni dei segmenti,

risulta che

come la porzione simile tanto del primo segmento, quanto del secondo²⁸ sta alla differenza data delle porzioni, più la porzione simile del secondo segmento, così la porzione simile del primo sta alla porzione vera del primo segmento.

$$[(D + F) : (F + H) = D : A.]\text{n.c.}$$

Oppure

come la porzione simile, tanto del primo segmento, quanto del secondo, sta alla porzione simile del primo segmento meno la differenza data delle porzioni, così la porzione simile del secondo segmento sta alla porzione vera del secondo segmento.

$$[(D + F) : (D - H) = F : E.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 84$, $D = 28$, $F = 21$ e $H = 7$. Applicando i precetti (3.35) e (3.36) si ha:

$$A = \frac{28 \cdot 21 + 28 \cdot 7}{28 + 21} = 16 \quad \text{e} \quad E = \frac{28 \cdot 21 - 28 \cdot 7}{28 + 21} = 9.$$

È necessario che il valore assegnato ad H , il quale corrisponde alla differenza delle porzioni dei due segmenti, sia minore della porzione simile del primo segmento D e, a seconda del caso considerato, maggiore o minore della porzione del secondo. Nell'esempio proposto si può assegnare ad H il valore 7 o 21.

[Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano il problema nel seguente modo:²⁹

²⁸Si intende la somma delle porzioni simili del primo e del secondo segmento, cioè in relazione alla simbologia adottata nello zetetico $(D + F)$.

²⁹Vedi [1] e [13].

- Diofanto *I*, 6: *Dividere un numero dato in due numeri tali che la differenza di una frazione dell'uno e una frazione dell'altro sia data.*

Condizione necessaria: l'ultimo numero assegnato deve essere inferiore a ciò che si ottiene quando la frazione del primo numero supera l'altra.

Sia 100 il numero assegnato, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ le frazioni date e 20 la differenza delle frazioni dei due numeri in cui è diviso il numero di partenza. Se si pone il secondo numero richiesto uguale a $6x$, allora il primo corrisponde a $4(x + 20)$. Dunque l'equazione risolvente è

$$10x + 80 = 100,$$

da cui segue $x = 2$. I due numeri richiesti sono 88 e 12.

- Bombelli *III*, 13: *Dividasi 100 in due parti che il quarto del primo superi il sesto del secondo di 18.*

Se si pone il primo numero incognito uguale ad x e conseguentemente il secondo uguale a $(100 - x)$, l'equazione risolvente risulta

$$\frac{x}{4} = \frac{100 - x}{6} + 18,$$

da cui segue $x = \frac{416}{5}$. I numeri cercati sono $\frac{416}{5} = 83.2$ e $\frac{84}{5} = 16.8$.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*³⁰

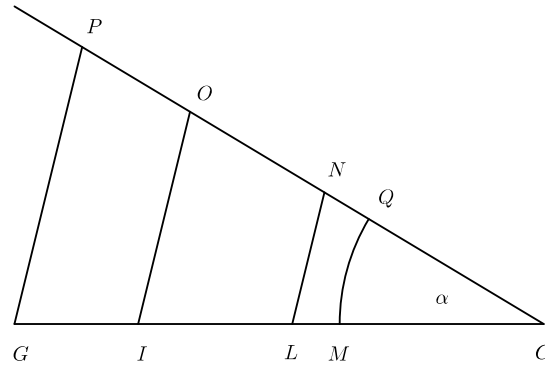
Si consideri il segmento CG tale che $CG = CM + MI + IG$ e su di esso si consideri il punto L , in modo tale che $CL = IM$. Si tracci, con angolo acuto α , la semiretta di origine il punto C e su di esso si consideri il punto O tale che $CO = CM + QO$, poi si congiunga con il punto I individuando la trasversale IO . Successivamente si traccino le trasversali parallele ad IO e passanti per L e G , individuando i punti N e P . Si ha

$$(IM + CM) : (OQ + CM) = IM : CN,$$

ovvero

$$IC : CO = CL : CN \tag{3.37}$$

³⁰In [17] pp. 50-51.



Relativamente alla simbologia dello zetetico se si pone:

- CG uguale al segmento iniziale: $CG = B$,
- OQ uguale alla differenza delle porzioni del primo e del secondo segmento: $OQ = H$,
- IM uguale alla porzione simile del primo segmento: $IM = D$,
- CM uguale alla porzione simile del secondo segmento: $CM = F$,
- CN uguale alla porzione del primo segmento: $CN = A$,
- CP uguale al primo segmento: $CP = \frac{BA}{D}$,

la (3.37) diventa

$$(D + F) : (H + F) = D : A.$$

Inoltre dalla costruzione segue anche che

$$CL : CG = CN : CP,$$

ovvero

$$D : B = A : \frac{BA}{D},$$

condizione richiesta inizialmente dal teorema individuato dalla poristica.]n.c.

ZETETICO IX

Determinare due lati, la cui differenza è nota e tali che una porzione definita del primo più una porzione definita del secondo sia uguale ad una grandezza nota.

Sia B la differenza nota dei due lati e la porzione del primo segmento, che sta all'intero, cioè al primo segmento, come D sta a B , più la porzione del secondo, che sta all'intero come F sta a B , sia H . Il primo segmento può essere sia maggiore sia minore del secondo, sia per esempio il lato maggiore. Sia A la porzione del primo segmento, conseguentemente $(H - A)$ quella del secondo.

Si può affermare che

$$D : B = A : \frac{BA}{D},$$

quindi $\frac{BA}{D}$ corrisponde al segmento maggiore, quello minore invece si ricava dalla proporzione

$$F : B = (H - A) : \frac{BH - BA}{F}$$

ed esso corrisponde a $\frac{BH - BA}{F}$. Sottraendo questi due segmenti e tenendo presente le condizioni iniziali, si ha

$$\frac{BA}{D} - \frac{BH - BA}{F} = B,$$

successivamente moltiplicando per DF entrambi i membri e dividendoli per B , si ottiene che

$$A = \frac{DF + DH}{F + D}, \quad (3.38)$$

ovvero,

$$(F + D) : (F + H) = D : A.$$

Inoltre, poiché la porzione del secondo segmento E è stata definita $(H - A)$, risulta che

$$E = H - \frac{DF + DH}{F + D} = \frac{HF - DF}{F + D}, \quad (3.39)$$

da cui

$$(F + D) : (H - D) = F : E.$$

Diversamente se il primo segmento è minore rispetto al secondo si procede allo stesso modo. Sia E la porzione del secondo segmento, cioè quella relativa al lato maggiore, conseguentemente sia $(H - E)$ quella relativa al segmento minore.

Si può affermare che

$$F : B = E : \frac{BE}{F},$$

quindi $\frac{BE}{F}$ corrisponde al segmento maggiore, quello minore invece si ricava dalla proporzione

$$D : B = (H - E) : \frac{BH - BE}{D}$$

ed esso corrisponde a $\frac{BH - BE}{D}$. Sottraendo questi due segmenti e tenendo presente le condizioni iniziali, si ha

$$\frac{BE}{F} - \frac{BH - BE}{D} = B,$$

successivamente moltiplicando per DF entrambi i membri e dividendoli per B , si ottiene che

$$E = \frac{FH + FD}{D + F},$$

ovvero,

$$(D + F) : (H + D) = F : E.$$

Inoltre, poiché la porzione del secondo segmento A è stata definita $(H - E)$, risulta che

$$A = H - \frac{FH + FD}{D + F} = \frac{HD - FD}{F + D},$$

da cui

$$(F + D) : (H - F) = D : A.$$

Una volta note anche le porzioni dei due segmenti si potranno conoscere anche il primo e il secondo segmento; essi saranno rispettivamente

$$\frac{BA}{D} \quad \text{e} \quad \frac{BE}{F}.$$

Dunque si può concludere che

Divisi i lati sui quali ci si interroga in proporzione alle porzioni dei segmenti, risulta che

come la porzione simile tanto del segmento maggiore, quanto di quello minore sta alla somma nota delle porzioni, più la porzione simile del segmento minore, così la porzione simile del segmento maggiore sta alla porzione vera di quello maggiore.

$$[(F + D) : (H + F) = D : A.]\text{n.c.}$$

Oppure

come la porzione simile, tanto del segmento maggiore, quanto di quello minore, sta alla somma nota delle porzioni, meno la parte simile del segmento maggiore, così la porzione simile del segmento minore sta alla porzione vera del segmento minore.

$$[(F + D) : (H - D) = F : E.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 84$, $D = 28$, $F = 21$ e $H = 98$. Applicando i precetti (3.38) e (3.39) si ha:

$$A = \frac{28 \cdot 21 + 28 \cdot 98}{21 + 28} = 68 \quad \text{e} \quad E = \frac{98 \cdot 21 - 28 \cdot 21}{21 + 28} = 30.$$

È necessario che il valore assegnato ad H , il quale corrisponde alla somma delle porzioni dei due segmenti, sia maggiore della porzione simile del segmento maggiore D , infatti nell'esempio poposto

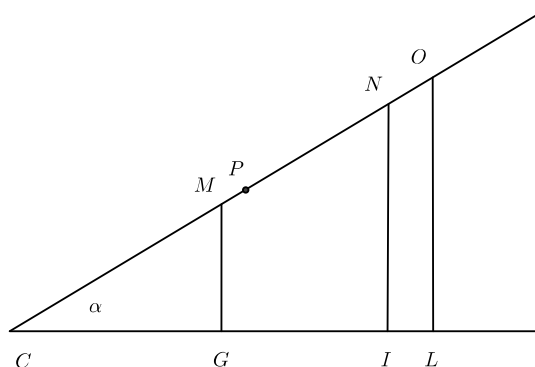
$$H = 98 > 28 = D.$$

[RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézar*³¹

Si consideri il segmento CL tale che $CL = CG + GI + IL$ e si tracci, con angolo acuto α , la semiretta di origine il punto C . Successivamente si determinino le trasversali perpendicolari a CL e passanti per G , I e L , individuando, sul segmento CM , i punti d'intersezione M , N e O . Si determini infine sul segmento CN il punto P tale che $PN = GI$. Si ha

$$CI : CN = CG : CM \quad (3.40)$$



Relativamente alla simbologia dello zetetico se si pone:

- CP uguale alla somma delle porzioni del primo e del secondo segmento: $CP = H$,
- CG uguale alla porzione simile del segmento maggiore: $CG = D$,
- GI uguale alla porzione simile del segmento minore: $GI = F$,
- CM uguale alla porzione del segmento maggiore: $CM = A$,
- MP uguale alla porzione del segmento minore: $MP = E$,

la (3.40) diventa

$$(D + F) : (H + F) = D : A.]n.c.$$

ZETETICO X

Determinare due lati, la cui differenza è nota e tali che una porzione definita del primo meno una porzione definita del secondo sia uguale ad una grandezza nota.

³¹In [17] pp. 56-57.

Sia B la differenza nota dei due lati e la porzione del primo segmento, che sta all'intero, cioè al primo segmento, come D sta a B , meno la porzione del secondo, che sta all'intero come F sta a B , sia H . Poiché il primo segmento può essere maggiore o minore rispetto al secondo, si supponga che il primo sia quello maggiore e che D sia la rispettiva porzione simile, anch'essa maggiore, in relazione a quella del secondo segmento. Sia poi A la porzione del segmento maggiore, conseguentemente $(A - H)$ quella relativa al lato minore. Analogamente a prima, $\frac{BA}{D}$ corrisponde al segmento maggiore, invece $\frac{BA-BH}{F}$ a quello minore, pertanto

$$\frac{BA}{D} - \frac{BA - BH}{F} = B,$$

da cui segue, supposto $F > D$,

$$A = \frac{FD - HD}{F - D},$$

ovvero

$$(F - D) : (F - H) = D : A. \quad (3.41)$$

Inoltre, poiché la porzione del secondo segmento E è stata definita $(A - H)$, risulta che

$$E = \frac{FD - HD}{F - D} - H = \frac{FD - FH}{F - D},$$

da cui

$$(F - D) : (D - H) = F : E. \quad (3.42)$$

Se invece si fosse supposto $D > F$, le relazioni determinate sarebbero state le seguenti:

$$(D - F) : (H - F) = D : A \quad \text{e} \quad (D - F) : (H - D) = F : E. \quad (3.43)$$

Il caso successivo da analizzare è quello in cui si suppone che il primo segmento sia minore rispetto al secondo.

Sia A la porzione del secondo segmento, cioè quella relativa al lato minore, conseguentemente sia $(A - H)$ quella relativa al segmento maggiore.

Analogamente ai casi precedenti, $\frac{BA}{D}$ corrisponde al segmento minore, invece $\frac{BA-BH}{F}$ a quello maggiore, pertanto

$$\frac{BA - BH}{F} - \frac{BA}{D} = B,$$

da cui segue, supposto $D > F$,

$$A = \frac{FD + HD}{D - F},$$

ovvero

$$(D - F) : (F + H) = D : A.$$

Inoltre, poiché la porzione del secondo segmento E è stata definita ($A - H$), risulta che

$$A = \frac{FD + HD}{D - F} - H = \frac{DF + HF}{D - F},$$

da cui

$$(D - F) : (D + H) = F : E.$$

Una volta note anche le porzioni dei due segmenti si potranno conoscere anche il primo e il secondo segmento; essi saranno rispettivamente

$$\frac{BA}{D} \quad \text{e} \quad \frac{BE}{F}.$$

Dunque si può concludere che

Divisi i lati sui quali ci si interroga in proporzione alle porzioni dei segmenti, risulta che

come la porzione simile del primo segmento, meno la porzione simile del secondo sta alla differenza nota delle porzioni meno la parte simile del secondo segmento, così la porzione simile del primo sta alla porzione vera del primo segmento.

$$[(D - F) : (H - F) = D : A.] \text{n.c.}$$

Oppure

come la porzione simile del primo segmento, meno la porzione simile del secondo sta alla differenza nota delle porzioni meno la parte simile del primo segmento, così la porzione simile del secondo sta alla porzione vera del secondo segmento.

$$[(D - F) : (H - D) = F : E.] \text{n.c.}$$

Ma se la porzione [simile]n.c. minore deriva dal primo segmento maggiore piuttosto che dal secondo segmento minore, quelle stesse proporzioni rimangono valide, poiché è stata fatta l'inversione delle negazioni.³²

[Pertanto se la porzione simile del primo segmento è minore o maggiore di quella del secondo, cioè se $D < F$ oppure $D > F$, le proporzioni (3.41) (3.42) e (3.43) rimangono le stesse. Infatti

$F > D$	$D > F$
$(F - D) : (F - H) = D : A$	$(D - F) : (H - F) = D : A$
$(F - D) : (D - H) = F : E$	$(D - F) : (H - D) = F : E$
\Downarrow	\Uparrow
“Inversione delle negazioni”	
$-(D - F) : -(H - F) = D : A$	
$-(D - F) : -(H - D) = F : E$	
]n.c.	

³²«Quod si a primo illo maiore minores exigantur unciae quam a secundo minore, eadem vigent analogiae factae negationum inversione.» Vedi p. 49 di [18].

Quando il primo lato corrisponde al segmento minore fra i due cercati e la sua porzione è maggiore rispetto a quella del secondo, [cioè $D > F$] n.c.,

si ha che

come la porzione simile del primo segmento, meno la porzione simile del secondo sta alla porzione simile del secondo segmento più la differenza nota delle porzioni, così la porzione simile del primo sta alla porzione vera del primo segmento.

$$[(D - F) : (F + H) = D : A.] \text{n.c.}$$

Oppure

come la porzione simile del primo segmento, meno la porzione simile del secondo sta alla porzione simile del primo segmento più la differenza nota delle porzioni, così la porzione simile del secondo sta alla porzione vera del secondo segmento.

$$[(D - F) : (D + H) = F : E.] \text{n.c.}$$

Riassumendo, i casi che si presentano sono tre:

Primo caso: il primo lato è maggiore rispetto al secondo, così come la sua porzione, ossia $D > F$;

Secondo caso: il primo lato è maggiore rispetto al secondo, mentre la sua porzione è quella minore, ossia $D < F$;

Terzo caso: il primo lato è minore rispetto al secondo, mentre la sua porzione è quella maggiore, ossia $D > F$.

Se ci si trova nel primo caso è necessario che H sia maggiore delle porzioni simili del primo e secondo segmento:

$$H > D \quad \text{e} \quad H > F.$$

Nel secondo caso H deve essere minore di D o di F , mentre nel terzo H è minore o maggiore di D o di F , da cui si deduce che il terzo caso può coincidere sia col primo, sia con il secondo caso.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

I.

Sia $B = 12$ la differenza dei due lati, $D = 4$, $F = 3$ e $H = 9$ la differenza delle porzioni, dove $A > F$.

Poiché H è maggiore dello stesso D o dello stesso F , o $\frac{BA}{D}$ corrisponde al lato maggiore, o a quello minore.

1. Se $\frac{BA}{D}$ è il lato maggiore $A = 24$ ed $E = 15$.

[Infatti, poiché il primo lato è maggiore rispetto al secondo e

$$D = 4 > 3 = F,$$

per determinare il valore di A ed E , occorre utilizzare i precetti relativi al primo caso

$$A = \frac{HD - FD}{D - F} \quad \text{ed} \quad E = \frac{HF - DF}{D - F},$$

da cui

$$A = \frac{9 \cdot 4 - 3 \cdot 4}{4 - 3} = 24 \quad \text{ed} \quad E = \frac{9 \cdot 3 - 4 \cdot 3}{4 - 3} = 15. \quad]\text{n.c.}$$

$\frac{BA}{D}$ è il primo lato maggiore e corrisponde a 72, mentre $\frac{BE}{F}$ è il secondo minore e pari a 60. La differenza di questi ultimi è proprio il valore assegnato B .

2. Se $\frac{BA}{D}$ è il lato minore $A = 48$ ed $E = 39$.

[Infatti, poiché il primo lato è minore rispetto al secondo e

$$D = 4 > 3 = F,$$

per determinare il valore di A ed E , occorre utilizzare i precetti relativi al terzo caso

$$A = \frac{FD + HD}{D - F} \quad \text{ed} \quad E = \frac{DF + HF}{D - F},$$

da cui

$$A = \frac{3 \cdot 4 + 9 \cdot 4}{4 - 3} = 48 \quad \text{ed} \quad E = \frac{3 \cdot 4 + 9 \cdot 3}{4 - 3} = 39. \quad]\text{n.c.}$$

$\frac{BA}{D} = 144$, $\frac{BE}{F} = 156$ e la loro differenza corrisponde proprio al valore assegnato B .

II.

1. Sia $B = 48$ la differenza dei due lati, $D = 16$, $F = 12$ e $H = 10$ la differenza delle porzioni, dove $A > D$.

Poiché H è minore dello stesso D e dello stesso F e D risulta maggiore di F , $\frac{BA}{D}$ corrisponde al lato minore, mentre $\frac{BE}{F}$ a quello maggiore. Pertanto $A = 88$ ed $E = 78$.

[Infatti, poiché il primo lato è minore rispetto al secondo e

$$D = 16 > 12 = F,$$

per determinare il valore di A ed E , occorre utilizzare i precetti relativi al terzo caso

$$A = \frac{FD + HD}{D - F} \quad \text{ed} \quad E = \frac{DF + HF}{D - F},$$

da cui

$$A = \frac{12 \cdot 16 + 10 \cdot 16}{16 - 12} = 88 \quad \text{ed} \quad E = \frac{16 \cdot 12 + 10 \cdot 12}{16 - 12} = 78. \quad]\text{n.c.}$$

$\frac{BA}{D} = 264$, $\frac{BE}{F} = 312$ e la loro differenza corrisponde proprio al valore assegnato B .

2. Oppure sempre ponendo $B = 48$ e $H = 10$, sia $D = 12$ ed $F = 16$. Necessariamente $\frac{BA}{D}$ corrisponde al lato maggiore, pertanto $A = 18$ ed $E = 8$.

[Infatti, poiché il primo lato è maggiore rispetto al secondo e

$$D = 12 < 16 = F,$$

per determinare il valore di A ed E , occorre utilizzare i precetti relativi al secondo caso

$$A = \frac{FD - HD}{F - D} \quad \text{ed} \quad E = \frac{FD - FH}{F - D},$$

da cui

$$A = \frac{16 \cdot 12 - 10 \cdot 12}{16 - 12} = 18 \quad \text{ed} \quad E = \frac{16 \cdot 12 - 16 \cdot 10}{16 - 12} = 8. \quad]\text{n.c.}$$

$\frac{BA}{D} = 72$, $\frac{BE}{F} = 24$ e la loro differenza corrisponde proprio al valore assegnato B .

[RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*³³

PRIMO CASO

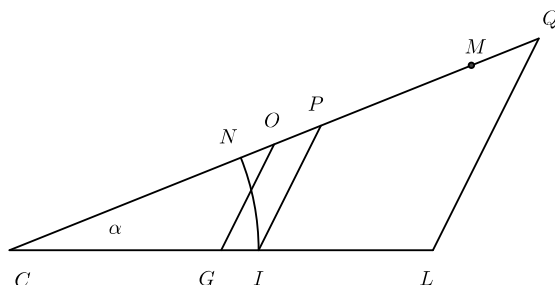
Dato il segmento CL tale che $CL = CG + GI + IL$, si tracci, con angolo acuto α , la semiretta di origine il punto C e su di essa si considerino i punti N, O, M , tali che $CN = CI$ e $MO = GL$. Successivamente si congiungano i punti G ed O , quindi si traccino le trasversali parallele al segmento GO e passanti per I e L , individuando i punti P e Q . Si ha

$$(CL - GL) : (CM - MO) = CL : CQ, \quad (3.44)$$

ovvero

$$CG : CO = CL : CQ.$$

³³In [17] pp. 65-66.



Relativamente alla simbologia dello zetetico se si pone

- GI uguale alla differenza dei due lati richiesti: $GI = B$,
- CM uguale alla differenza delle porzioni del primo e del secondo segmento: $CM = H$,
- CL uguale alla porzione simile del primo segmento maggiore: $CL = D$,
- GL uguale alla porzione simile del secondo segmento minore: $GL = F$,
- CQ uguale alla porzione del primo segmento maggiore: $CQ = A$,
- MQ uguale alla porzione del secondo segmento minore: $MQ = E$,
- CP uguale al primo segmento maggiore: $CP = \frac{BA}{D}$,
- NP uguale al secondo segmento minore: $NP = \frac{BE}{F}$,

la (3.44) diventa

$$(D - F) : (H - F) = D : A.$$

Si procede analogamente per gli altri casi rimanenti.]n.c.

3.2 Libro Secondo

ZETETICO I

Noto il prodotto di due lati ed il loro rapporto determinare i due lati.

Sia B *piano* il prodotto dei due lati, mentre il rapporto del maggiore sul minore sia come S sta ad R . Indicato con A il lato maggiore, quello minore deriva dall'uguaglianza

$$S : R = A : \frac{RA}{S},$$

esso corrisponde a $\frac{RA}{S}$. Tenendo presenti le condizioni iniziali, dal prodotto dei due lati si ricava che

$$\frac{RA^2}{S} = B, \text{ con } B \text{ piano.}$$

Moltiplicando entrambi i membri per S

$$RA^2 = SB, \text{ con } B \text{ piano,}$$

che equivale alla proporzione

$$R : S = B : A^2, \text{ con } B \text{ piano.}$$

Altrimenti, indicato con E il lato minore, quello maggiore si ricava dalla proporzione

$$R : S = E : \frac{SE}{R},$$

esso corrisponde a $\frac{SE}{R}$. Tenendo presenti le condizioni iniziali, dal prodotto dei due lati si ricava che

$$\frac{SE^2}{R} = B, \text{ con } B \text{ piano.}$$

Moltiplicando entrambi i membri per R

$$SE^2 = RB, \text{ con } B \text{ piano,}$$

che equivale alla proporzione

$$S : R = B : E^2, \text{ con } B \text{ piano.}$$

[In termini moderni risolvere questo zetetico equivale a risolvere il seguente sistema in due incognite:

trovare due numeri X e Y tali che

$$\begin{cases} XY = B \\ \frac{X}{Y} = \frac{R}{S} \end{cases} .$$

Ricavando una delle due incognite dalla seconda equazione, poi sostituendola nella prima si ottengono i risultati precedentemente enunciati:

$$\begin{cases} \frac{RY^2}{S} = B \\ X = \frac{RY}{S} \end{cases} . \text{]n.c.}$$

Dunque si può concludere che

come il segmento simile del primo lato sta al segmento simile del secondo maggiore o minore, così il prodotto dei lati sta al quadrato del secondo segmento maggiore o minore.

$$[R : S = B : A^2, \quad \text{e} \quad S : R = B : E^2, \text{ con } B \text{ piano.}$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B piano = 20, $R = 1$ ed $S = 5$, risulta che

$$A^2 = \frac{5 \cdot 20}{1} = 100 \Rightarrow A = 10,$$

oppure

$$E^2 = \frac{1 \cdot 20}{5} = 4 \Rightarrow E = 2.$$

[RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

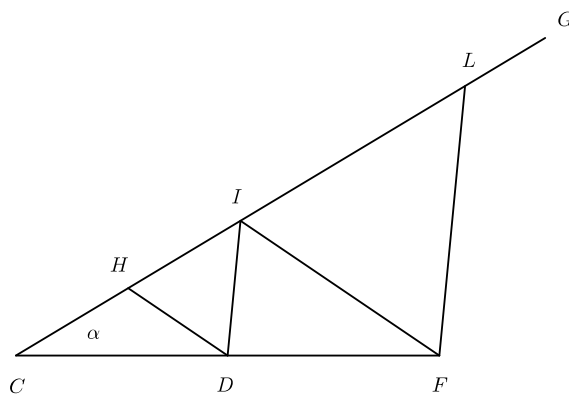
*Commento di Vaulézard*³⁴

Sia il prodotto dei due lati uguale al piano B e sia il rapporto del minore sul maggiore pari a $\frac{R}{S}$. Si vogliono trovare i due lati.

Si consideri il segmento CF tale che $CF = CD + DF$ e si determini il medio proporzionale T fra R ed S , che soddisfi la relazione

$$R : T = CD : CF.$$

Successivamente si tracci partendo dal punto C , con angolo acuto α , il segmento CG e si individui su di esso il punto I , tale che CI corrisponda al prodotto dei due lati richiesti. Si congiungano i punti D, I e F, I , quindi si traccino le trasversali DH e FL , la prima parallela a FI e passante per D , la seconda parallela a DI e passante per F .



Si ha che

- CG corrisponde al lato maggiore: $CG = A$,
- CH corrisponde al lato minore: $CH = E$.]n.c

³⁴In [17] pp. 70-71.

ZETETICO II

Dato il prodotto di due lati e la somma dei loro quadrati, si determinino i due lati.

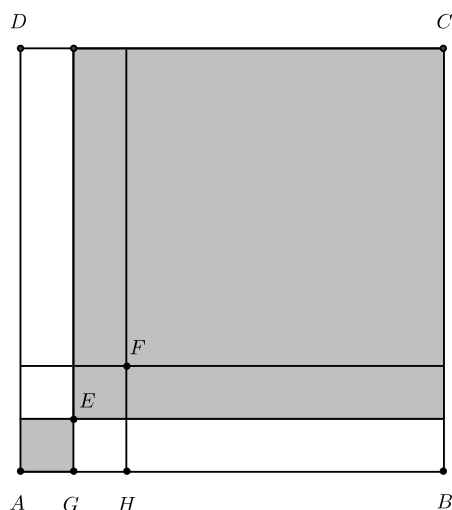
Da alcuni risultati enunciati e dimostrati in precedenza³⁵ segue che

Il doppio prodotto dei due lati più la somma dei loro quadrati è uguale al quadrato della somma dei lati, mentre la somma dei quadrati dei lati meno il loro doppio prodotto corrisponde al quadrato della differenza dei lati.

[Siano A ed E i due lati richiesti, allora

$$2AE + A^2 + E^2 = (A + E)^2 \quad \text{e} \quad A^2 + E^2 - 2AE = (A - E)^2.$$

Geometricamente queste considerazioni si possono rappresentare nel modo seguente:



Il quadrilatero $ABCD$ è un quadrato di lato il segmento AB tale che $AB = AG + GB$. Se si considera la somma dei due quadrati AE ed EC e dei due rettangoli EB ed ED si ottiene tutto il quadrato, cioè $(AG + BG)^2$. Se invece si vogliono sottrarre alla somma dei due quadrati AE ed EC , i due rettangoli

³⁵Viète fa riferimento al Teorema relativo alla genesi dei quadrati, riportato nelle Notæ Priores:

Dati due lati: il quadrato del primo, più il doppio prodotto dei due, più il quadrato del secondo equivale al quadrato della somma dei due lati.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A^2 + 2AB + B^2) = (A + B)^2,$$

risultante dal prodotto di $(A + B)$ per se stesso.

EB ed ED , si ottiene il quadrato FC , ovvero $(AG - BG)^2$.]n.c.

Questo risultato era già noto dalla *genesis quadrati* secondo la quale, nota la differenza e la somma di due lati è possibile determinare questi ultimi.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 20 il prodotto dei due lati e sia 104 la somma dei loro quadrati. La somma dei lati al quadrato sarà uguale a 144, mentre la differenza dei lati al quadrato sarà 64.

[Indicati con A ed E i due lati incogniti si ha

$$AE = 20, \quad \text{e} \quad A^2 + E^2 = 104.$$

La somma dei lati si ricava dall'uguaglianza

$$(A + E)^2 = A^2 + E^2 + 2AE = 104 + 40 = 144$$

e corrisponde a $\sqrt{144}$, cioè 12. La differenza di A e di E invece segue dalla relazione

$$(A - E)^2 = A^2 + E^2 - 2AE = 104 - 40 = 64$$

e corrisponde a $\sqrt{64}$, cioè 8.

Ora per ricavare il valore numerico di A e di E occorre applicare lo *Zetetico I* del primo libro, occorre quindi semplicemente risolvere il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} A + E = 12 \\ A - E = 8 \end{cases},$$

da cui segue

$$\begin{cases} 8 + 2E = 12 & A = 10 \\ A = 8 + E & E = 2 \end{cases}.$$

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

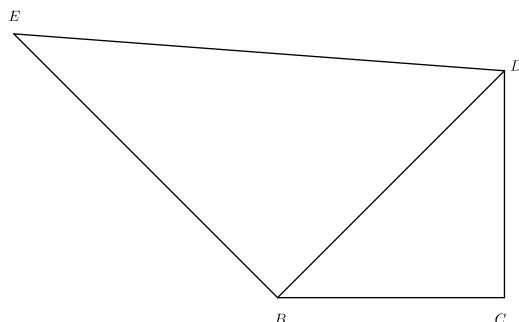
*Commento di Vaulézard*³⁶

Si consideri il segmento BC tale che il quadrato costruito su di esso corrisponda al prodotto dei due lati richiesti e si tracci il segmento CD perpendicolare a BC , tale che

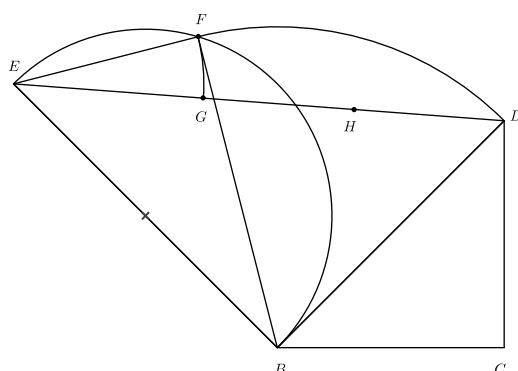
$$CD = BC,$$

quindi si congiunga il punto B con il punto D . Successivamente si costruisca il segmento BE , perpendicolare a BD e pari alla somma dei quadrati dei due lati, poi si congiungano i punti D ed E , individuando il segmento ED corrispondente alla somma dei due lati incogniti.

³⁶In [17] pp. 72-73.



Si costruisca la semicirconferenza BEF , dentro la quale si tracci il segmento $BF = BD$ e si congiungano i punti E ed F . Il segmento EF appena determinato corrisponde alla differenza dei due lati richiesti. Quindi sottraendo ad ED il segmento $EG = EF$ e poi dividendo il resto ottenuto in due parti uguali, individuando il punto H , si ottengono i due lati cercati EH e HD .³⁷



Infine, ricordando che il quadrato costruito su BE corrisponde alla somma dei quadrati dei due lati e che il quadrato costruito su BC coincide con il loro prodotto (da cui segue che il quadrato di BD coincide col doppio prodotto dei lati) si può dedurre che:

- il doppio prodotto dei lati più la somma dei loro quadrati corrisponde al quadrato costruito su ED , cioè al quadrato della somma dei lati:

$$ED^2 = (EH + HD)^2 \quad \text{e} \quad ED^2 = (BD^2 + BE^2).$$

³⁷Algebricamente il passaggio appena descritto si traduce nel modo seguente: indicati i due lati incogniti con X e Y , risulta che $ED = X + Y$ ed $EG = X - Y$. Pertanto dividendo la differenza di ED ed EG in due parti uguali si ha

$$\frac{X + Y - X + Y}{2} = \frac{2Y}{2} = Y.$$

- la somma dei quadrati dei lati meno il loro doppio prodotto equivale al quadrato costruito su EF , cioè al quadrato della differenza dei lati:

$$EF^2 = (EH - HD)^2 \quad \text{e} \quad EF^2 = (BE^2 - BF^2) = (BE^2 - BD^2). \quad]\text{n.c.}$$

ZETETICO III

Noti il prodotto di due lati e la loro differenza, determinare i lati.

Da alcuni risultati enunciati e dimostrati in precedenza³⁸ segue che

Il quadrato della differenza dei lati, più il quadruplo del loro prodotto è uguale al quadrato della somma dei lati.

[Indicati con A ed E i due lati richiesti, allora

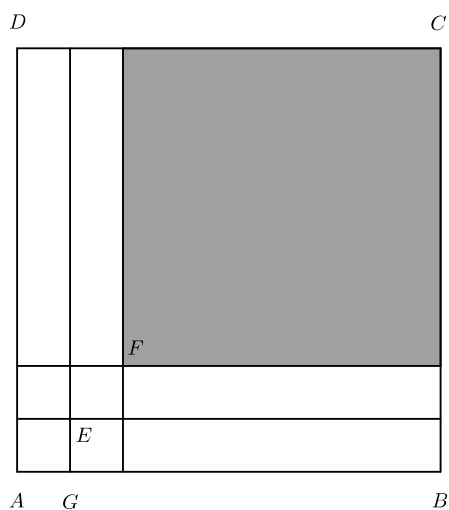
$$(A - E)^2 + 4AE = (A + E)^2 \quad]\text{n.c.}$$

Applicando l'antitesi

$$(A + E)^2 - (A - E)^2 = 4AE,$$

dunque nota la somma e la differenza, è possibile determinare i due lati.

[Geometricamente queste considerazioni si possono rappresentare nel modo seguente:



³⁸Viète fa riferimento alla *Proposizione XIII* delle *Notæ Priores*:

Sottrarre al quadrato della somma di due lati il quadrato della loro differenza.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB,$$

ciò che risulta è il quadruplo del prodotto di A e B .

La somma del quadrato $FC = (AG - GB)^2$ e dello gnomone DFB , uguale a quattro volte il rettangolo EB , corrisponde proprio al quadrato di lato AB , ossia $(AG + GB)^2$:

$$(AG + GB)^2 - (AG - GB)^2 = 4AG \cdot GB.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 20 il prodotto dei due lati e la loro differenza sia 8. La somma dei lati al quadrato sarà uguale a 144.

[Infatti per determinare il quadrato della somma dei due lati basta sommare il quadrato della loro differenza, 64, al quadruplo del loro prodotto, 80, dunque la somma dei lati corrisponde a $\sqrt{144} = 12$. Pertanto, indicati con A ed E i due lati incogniti, per trovare i loro valori numerici occorre semplicemente risolvere il seguente sistema lineare in due incognite:

$$\begin{cases} A + E = 12 \\ A - E = 8 \end{cases},$$

da cui segue

$$\begin{cases} 8 + 2E = 12 \\ A = 8 + E \end{cases}$$

quindi $A = 10$ ed $E = 2$.

Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano lo zetetico nel modo seguente:³⁹

- Diofanto, I, 30: *Determinare due numeri, essendo nota la loro differenza e il loro prodotto.*

Condizione necessaria: quattro volte il prodotto dei due numeri più il quadrato della loro differenza corrisponde ad un quadrato.

Sia 4 la differenza dei due numeri, 96 il loro prodotto e $2x$ la loro somma. Indicati con $(x + 2)$ e $(x - 2)$ i due numeri incogniti, l'equazione risolvente risulta

$$x^2 - 4 = 96,$$

da cui segue $x = 10$. I numeri che soddisfano le condizioni richieste sono 12 e 8.

- Bombelli, III, 53: *Trovare due numeri over quantità che l'una sia 4 più dell'altra e che moltiplicati l'un per l'altra facciano 60.*

Posti $(x + 2)$ e $(x - 2)$ i due numeri incogniti, l'equazione risolvente risulta

$$(x + 2)(x - 2) = 60.$$

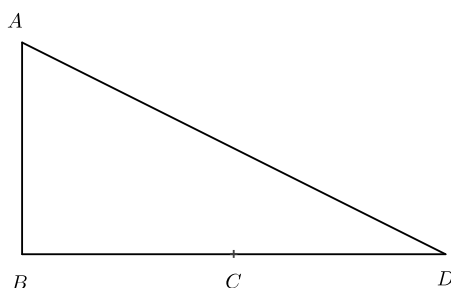
³⁹Vedi [1] e [13].

I numeri richiesti sono 6 e 10.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézar*⁴⁰

Si tracci il segmento BD , tale che $BD = 2BC$ e sia BC il prodotto dei due lati incogniti. Successivamente si tracci il segmento BA , perpendicolare a BD e pari alla differenza dei lati, quindi si congiungano i punti A e D . Dunque la costruzione ottenuta corrisponde ad un triangolo rettangolo di ipotenusa la somma dei due lati incogniti:



Dal Teorema di Pitagora segue che

$$BD^2 + AB^2 = AD^2,$$

pertanto quattro volte il prodotto dei due lati incogniti più il quadrato della loro differenza equivale al quadrato della somma.]n.c.

ZETETICO IV

Noti la somma e il prodotto di due lati, determinare i lati.

Da alcuni risultati enunciati e dimostrati in precedenza, segue che

Il quadrato della somma dei lati, meno il quadruplo del loro prodotto è uguale al quadrato della differenza dei lati.

Questo risultato deriva direttamente dall'applicazione dell'antitesi [all' uguaglianza risultate dalla *Proposizione XIII* delle *Notæ Prioeres*.

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 20 il prodotto dei due lati e sia 12 la loro somma. La loro differenza al quadrato sarà 64.

[Indicati con A ed E i due lati incogniti si ha

$$AE = 20, \quad \text{e} \quad A + E = 12.$$

⁴⁰In [17] pp. 74-75.

La differenza dei lati si ricava dall'uguaglianza

$$(A - E)^2 = (A + E)^2 - 4AE = (12)^2 - 4 \cdot 20 = 64$$

e corrisponde a $\sqrt{64}$, cioè 8. Ora per ricavare il valore numerico di A e di E occorre applicare lo *Zetetico I* del primo libro, quindi occorre semplicemente risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} A + E = 12 \\ A - E = 8 \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} 8 + 2E = 12 \\ A = 8 + E \end{cases},$$

ovvero $A = 10$ ed $E = 2$.

Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano lo zetetico nel modo seguente:⁴¹

- Diofanto I, 27: *Detreminare due numeri, essendo noti la somma e il prodotto.*

Condizione necessaria: il quadrato della metà della somma deve differire dal prodotto dei due lati di una quantità quadrata.

Sia 20 la somma dei due numeri, 96 il loro prodotto e $2x$ la loro differenza, quindi siano $(10 + x)$ e $(10 - x)$ i due numeri incogniti. Risulta che

$$100 - x^2 = 96,$$

da cui $x = 2$. I numeri che soddisfano le condizioni iniziali sono 12 e 8.

- Bombelli, III, 49: *Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicate l'una via l'altra faccino 16.*

Indicati con x e $(10 - x)$ i due numeri incogniti, l'equazione risolvente corrisponde a

$$x(10 - x) = 16.$$

Dunque i numeri cercati sono 8 e 2.

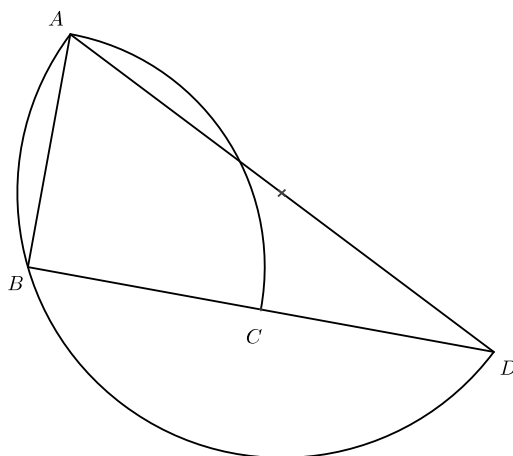
RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézar*⁴²

Si consideri il segmento AD , pari alla somma dei due lati richiesti, poi si tracci la semicirconferenza ABD e si determini su di essa il punto B tale che il segmento BD corrisponda al doppio prodotto dei lati. Infine si congiungano i punti B ed A , individuando il segmento AB , uguale alla differenza dei due lati.

⁴¹Vedi [1] e [13].

⁴²In [17] p. 76.



Per Teorema di Pitagora

$$AB^2 = AD^2 - BD^2,$$

il quadrato della differenza dei due lati è uguale al quadrato della loro somma, meno quattro volte il loro prodotto.]n.c.

ZETETICO V

Nota la differenza di due lati e la somma dei loro quadrati, determinare i lati.

Da alcuni risultati enunciati e dimostrati in precedenza⁴³ segue che

Il doppio della somma dei quadrati dei due lati incogniti meno il quadrato della loro differenza è uguale al quadrato della loro somma.

[Indicati con A ed E i due lati richiesti, allora

$$2(A^2 + E^2) - (A - E)^2 = (A + E)^2 \quad]n.c..$$

Applicando l'antitesi

$$(A + E)^2 + (A - E)^2 = 2(A^2 + E^2).$$

⁴³Viète fa riferimento alla *Proposizione XII* delle *Notæ Priores*:

Sommare il quadrato della somma di due lati al quadrato della loro differenza.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2),$$

ciò che risulta è il doppio della somma dei quadrati di A e B .

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 8 la differenza dei due lati e sia 104 la somma dei loro quadrati. Il quadrato della somma dei lati sarà uguale a 144.

[Sfruttando l'uguaglianza

$$(A + E)^2 = 2(A^2 + E^2) - (A - E)^2$$

si ottiene che il quadrato della somma dei lati corrisponde a

$$(2 \cdot 104 - 64) = 144,$$

da cui segue che $(A + E) = \sqrt{144} = 12$. Pertanto

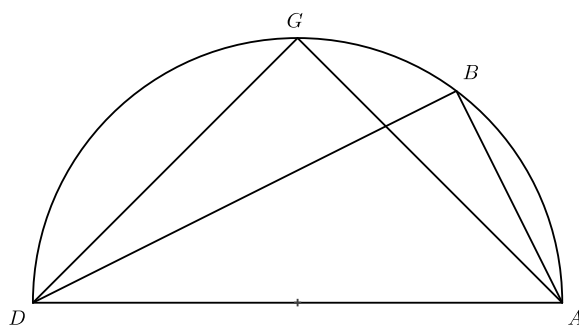
$$\begin{cases} A + E = 12 \\ A - E = 8 \end{cases},$$

quindi i due lati incogniti corrispondono a 10 e 2.

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézar*⁴⁴

Si consideri il segmento GD , tale che il suo quadrato sia uguale alla somma dei quadrati dei due lati, poi si tracci la linea GA , tale che $GA = GD$ e l'angolo AGD sia retto, quindi si congiungano A e D . Successivamente si costruisca la semicirconfenza AGD e si determini su di essa il punto B in modo tale che il segmento AB corrisponda alla differenza dei due lati. Congiungendo i punti B e D , si individua il segmento BD , che risulta uguale alla somma dei due lati.



Per il Teorema di Pitagora

$$AD^2 = GD^2 + GD^2 = 2GD^2$$

⁴⁴In [17] pp. 77.

pertanto

$$BD^2 = AD^2 - AB^2 = 2GD^2 - AB^2,$$

il quadrato della somma dei due lati richiesti è uguale al doppio della somma dei loro quadrati meno il quadrato della loro differenza.]n.c.

ZETETICO VI

Nota la somma di due lati e la somma dei loro quadrati, determinare i lati

Da alcuni risultati enunciati e dimostrati in precedenza segue che

Il doppio della somma dei quadrati dei due lati incogniti meno il quadrato della loro somma è uguale al quadrato della loro differenza.

[Indicati con A ed E i due lati richiesti, allora

$$2(A^2 + E^2) - (A + E)^2 = (A - E)^2.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 12 la somma dei due lati e sia 104 la somma dei loro quadrati. Il quadrato della differenza dei lati sarà uguale a 64.

[Sfruttando l'uguaglianza

$$(A - E)^2 = 2(A^2 + E^2) - (A + E)^2$$

si ottiene che il quadrato della differenza dei lati corrisponde a

$$(2 \cdot 104 - 144) = 64,$$

da cui segue che $(A - E) = \sqrt{64} = 8$. Pertanto

$$\begin{cases} A + E = 12 \\ A - E = 8 \end{cases},$$

dunque i due lati incogniti risultano 10 e 2.

Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano il problema nel modo seguente:⁴⁵

- Diofanto, I, 28: *Determinare due numeri, essendo nota la loro somma e la somma dei loro quadrati.*

Condizione necessaria: il doppio della somma dei loro quadrati meno il quadrato della loro somma deve essere un quadrato.

Sia 20 la somma dei due numeri richiesti, 208 la somma dei loro quadrati e sia $2x$ la loro differenza. Quindi i due numeri incogniti siano $(10 + x)$ e $(10 - x)$. L'equazione risolvente risulta

$$200 + 2x^2 = 208,$$

da cui segue $x = 2$. I numeri cercati sono 12 e 8.

⁴⁵Vedi [1] e [13].

- Bombelli, III, 49: *Faccisi di 12 due parti tali che li loro quadrati giunti insieme faccino 104.*

Posti uguali ad x e $(12 - x)$ i due numeri incogniti l'equazione risolvente è

$$x^2 + (12 - x)^2 = 104.$$

ZETETICO VII

Nota la differenza dei due lati e la differenza dei loro quadrati, determinare i lati.

Da alcuni risultati enunciati e dimostrati in precedenza⁴⁶ segue che

Dividendo per la differenza dei due lati la differenza dei loro quadrati, si ottiene la somma dei lati stessi.

[Indicati con A ed E i due lati richiesti, allora

$$\frac{A^2 - E^2}{A - E} = A + E.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 8 la differenza dei due lati e sia 96 la differenza dei loro quadrati. Allora la somma dei due lati è uguale a 12, in particolare il lato maggiore è 10, quello minore 2.

[Sfruttando l'uguaglianza

$$(A + E) = \frac{A^2 - E^2}{A - E}$$

si ottiene che la somma dei lati corrisponde a

$$\frac{96}{8} = 12.$$

Pertanto

$$\begin{cases} A + E = 12 \\ A - E = 8 \end{cases},$$

quindi i due lati incogniti sono 10 e 2.]n.c.

ZETETICO VIII

Nota la somma di due lati e la differenza dei loro quadrati, determinare i lati.

⁴⁶Viète fa riferimento alla *Proposizione XIV* delle *Notæ Priores*:

Moltiplicare la differenza di due lati per la loro somma.

Siano A e B i due lati, allora

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2,$$

ciò che risulta è la differenza dei quadrati di A e B .

Da alcuni risultati enunciati e dimostrati in precedenza segue che
Dividendo per la somma dei due lati la differenza dei loro quadrati, si ottiene la differenza dei lati stessi.

[Indicati con A ed E i due lati richiesti, allora

$$\frac{A^2 - E^2}{A + E} = A - E.$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 12 la somma dei due lati e sia 96 la differenza dei loro quadrati. Allora la differenza dei due lati è uguale a 8, in particolare il lato maggiore è 10, quello minore 2.

[Sfruttando l'uguaglianza

$$(A - E) = \frac{A^2 - E^2}{A + E}$$

si ottiene che la differenza dei lati corrisponde a

$$\frac{96}{12} = 8.$$

Pertanto

$$\begin{cases} A + E = 12 \\ A - E = 8 \end{cases},$$

quindi i lati che soddisfano le condizioni iniziali sono 10 e 2.

Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano lo zetetico nel modo seguente:⁴⁷

- Diofanto, I, 29: *Determinare due numeri, essendo note la loro somma e la differenza dei loro quadrati.*

Sia 20 la somma dei due numeri cercati, 80 la differenza dei loro quadrati e $2x$ la loro differenza. Posti i due valori incogniti uguali a $(10 + x)$ e $(10 - x)$, l'equazione risolvente risulta

$$(10 + x)^2 - (10 - x)^2 = 80,$$

da cui $x = 2$. I numeri richiesti sono 12 e 8.

- Bombelli, III, 51: *Faccisi di 20 due parti tali che lo eccesso delli loro quadrati sia 120.*

Siano $(10 + x)$ e $(10 - x)$ i due numeri incogniti, l'equazione risolvente è

$$(10 + x)^2 - (10 - x)^2 = 120,$$

da cui $x = 3$. I numeri richiesti sono 13 e 7.]n.c.

⁴⁷Vedi [1] e [13].

ZETETICO IX

Noto il prodotto di due lati e la differenza dei loro quadrati, determinare i lati.

Sia B *piano* il prodotto dei due lati richiesti e sia D *piano* la differenza dei loro quadrati. Si vogliono trovare i due lati.

Indicando con A *piano* la somma dei quadrati dei lati, si ha che il quadrato della somma dei lati corrisponde a

$$A \text{ piano} + 2B \text{ piano}.$$

Inoltre, poiché la somma dei lati moltiplicata per la loro differenza è uguale alla differenza dei loro quadrati, il quadrato della somma dei lati moltiplicato per il quadrato della loro differenza corrisponde al quadrato della differenza dei quadrati, pertanto

$$[(A + 2B)(A - 2B) = A^2 - 4B^2 \quad \text{e} \quad A^2 - 4B^2 = D^2,$$

ovvero]n.c.

$$A \text{ piano piano} - 4B \text{ piano piano} = D \text{ piano piano}.$$

Applicando l'antitesi

$$A \text{ piano piano} = D \text{ piano piano} + 4B \text{ piano piano}.$$

Inoltre nota la somma dei quadrati dei due lati e la loro differenza o il loro prodotto, è possibile risalire ai lati stessi; infatti

Il quadrato della differenza dei quadrati più il quadrato del doppio prodotto dei lati è uguale al quadrato della somma dei quadrati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia il prodotto dei lati, B *piano*, uguale a 20 e la differenza dei loro quadrati, D *piano*, pari a 96. Il quadrato della somma dei quadrati dei lati, A *piano*, sarà 10816.

[Infatti, indicati con E ed F i due lati richiesti, risulta che

$$A \text{ piano piano} = (96)^2 + 4 \cdot (20)^2,$$

da cui $A = 10816$.]n.c.

ZETETICO X

Dato il piano, risultante dalla somma del prodotto di due lati e dei loro singoli quadrati, e noto uno dei due lati, determinare quello rimanente.

Sia dato B piano, composto dal prodotto e dai singoli quadrati dei due lati, sia D piano uno di essi. Si vuole determinare il lato rimanente.

Sia uguale ad A la somma del lato incognito e della metà di quello noto, pertanto

$$A - \frac{D}{2}$$

corrisponde al lato da determinare e il suo quadrato

$$A^2 - AD + \frac{D^2}{4}$$

sommato al quadrato del lato noto e al prodotto dei due lati

$$\left(A - \frac{D}{2}\right)^2 + D^2 + \left(A - \frac{D}{2}\right)D,$$

equivale al piano B , perciò

$$A^2 + \frac{3}{4}D^2 = B.$$

Quindi ordinando l'equazione, risulta che

$$A^2 = B - \frac{3}{4}D^2.$$

Si può concludere che

Il piano risultante dalla somma del prodotto dei due lati e dei loro singoli quadrati, meno i tre quarti del quadrato del lato dato, è uguale al quadrato del lato derivante dal lato incognito e dalla metà del lato dato.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B piano = 124, $D = 2$ e $A^2 = 121$. Il lato incognito corrisponde a

$$A - \frac{D}{2} = \sqrt{121} - 1 = 10.$$

Oppure se B piano = 124, $D = 10$ e $A^2 = 49$. Il lato incognito è

$$\sqrt{49} - 5 = 2.$$

[RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

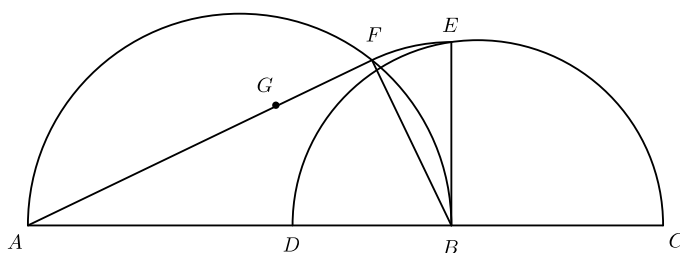
*Commento di Vaulézard*⁴⁸

Si consideri il segmento AC tale che $AC = AB + BC$, dove AB corrisponde al piano formato dal prodotto dei due lati e dai loro singoli quadrati, e BC al lato noto. Si vuole determinare quello restante.

Si individui il punto D tale che il segmento DB sia uguale a $\frac{3}{4}BC$, si descriva la semicirconferenza di diamentro DC e si tracci la perpendicolare al segmento

⁴⁸In [17] pp. 83-84.

AC e passante per B , che interseca la semicirconferenza in E . Si descriva la semicirconferenza di diametro AB e si determini su di essa il punto F tale che $FB = EB$, quindi si congiungano i punti A ed F . Sul segmento appena individuato si consideri il punto G , tale che FG sia uguale a $\frac{BC}{2}$ e il restante AG al lato richiesto.



I quadrati di BE e BF corrispondono ai $\frac{3}{4}BC^2$, che sottratto al quadrato di AB restituisce il piano formato dal prodotto dei due lati e dai loro singoli quadrati, assegnato inizialmente, cioè

$$AB^2 - \frac{3}{4}BC^2 = AF^2.$$

ZETETICO XI

Dato il piano, risultante dalla somma del prodotto di due lati e dei loro singoli quadrati, e nota la loro somma, determinare i due lati.

Sia dato B piano, risultante dalla somma del prodotto dei lati e dei loro singoli quadrati e sia G la loro somma. Si vogliono trovare i due lati.

Sia A piano il prodotto dei lati e poiché il quadrato della loro somma è uguale ai singoli quadrati dei lati più il loro doppio prodotto risulta

$$G^2 = B \text{ piano} + A \text{ piano},$$

ordinata l'equazione

$$G^2 - B \text{ piano} = A \text{ piano}.$$

Nota la somma dei lati e il loro prodotto, è possibile determinare i due lati, dunque noti il piano, formato dalla somma del prodotto dei lati e dai loro singoli quadrati e nota la loro somma, i due lati richiesti vengono determinati.

Infatti

Il quadrato della somma meno il piano, composto dal prodotto dei lati e dai loro singoli quadrati, corrisponde al prodotto dei lati richiesti.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B piano = 124, G = 12, quindi A piano = 20, mentre il quadrato della differenza dei lati vale 64. Il doppio del lato maggiore è $12 + \sqrt{64}$ e il doppio di quello minore $12 - \sqrt{64}$.

ZETETICO XII

Dato il piano, risultante dalla somma del prodotto dei due lati e dei loro singoli quadrati, e noto il loro prodotto, determinare i lati.

Infatti

il piano, risultante dalla somma del prodotto dei lati e dai loro singoli quadrati è uguale al quadrato della somma dei lati.

Ciò segue dalle considerazioni fatte nello zetetico precedente.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 124 il piano dato dalla somma del prodotto dei due lati e dei loro singoli quadrati e sia 20 il loro prodotto. La somma dei lati al quadrato è uguale a 144, pertanto se a questo si sottrae il quadruplo di 20, il resto risultante, 64, corrisponde al quadrato della differenza dei lati. Così $\sqrt{144} + \sqrt{64}$ risulta il doppio del lato maggiore e $\sqrt{144} - \sqrt{64}$ il doppio di quello minore.

ZETETICO XIII

Nota la somma dei quadrati di due lati e la loro differenza, determinare i due lati.

Siano dati D piano, somma dei quadrati dei lati e B piano, la loro differenza. Si vogliono trovare i due lati.

Dunque il doppio del quadrato del lato maggiore corrisponde a D piano + B piano. Una volta noto il doppio del quadrato del lato maggiore si può risalire al suo quadrato e conseguentemente, noti i due quadrati, risultano noti anche i due lati incogniti.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia D piano = 104, B piano = 96, il quadrato del lato maggiore è uguale a 100, mentre il quadrato di quello minore è 4.

ZETETICO XIV

Nota la differenza dei cubi e la loro somma, determinare i lati.

Sia B solido la differenza dei cubi e D solido la loro somma. Si vogliono trovare i lati.

Il doppio del cubo del lato maggiore corrisponde a $D \text{ solido} + B \text{ solido}$, il doppio del cubo di quello minore invece a $D \text{ solido} - B \text{ solido}$. Il procedimento è analogo a quello descritto nello zetetico precedente, infatti noto il doppio del cubo del lato maggiore si può risalire al suo cubo e conseguentemente, noti i due cubi, risultano noti anche i due lati. Per la sua semplicità questo non è neanche degno di essere chiamato zetetico.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia la differenza dei cubi $B \text{ solido} = 136$ e la loro somma $D \text{ solido} = 370$. Il cubo del lato maggiore corrisponde a 343, il cubo di quello minore a 27.

ZETETICO XV

Nota la differenza dei cubi e il prodotto dei lati, determinare i lati.

Infatti

il quadrato della differenza dei cubi più il quadruplo del prodotto dei cubi dei lati è uguale al quadrato della somma dei cubi.

Pertanto applicando l'antitesi si ottiene che il quadrato della somma dei cubi meno il quadrato della loro differenza è uguale al quadruplo cubo del prodotto dei lati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 316 la differenza dei cubi e 21 il prodotto dei lati. Il quadrato della somma dei cubi corrisponde a 136900.

Il doppio del cubo del lato maggiore è $\sqrt{136900} + 316$, mentre quello del lato minore è $\sqrt{136900} - 316$.

ZETETICO XVI

Nota la somma dei cubi e il prodotto di due lati, determinare i lati.

Infatti

il quadrato della somma dei cubi meno il quadruplo cubo del prodotto dei lati è uguale al quadrato della differenza dei cubi.

L'equazione successiva si può ricavare mediante antitesi.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 370 la somma dei cubi e 21 il prodotto dei lati. Il quadrato della differenza dei cubi è 99256.

ZETETICO XVII

Nota la differenza dei lati e quella dei loro cubi, determinare i due lati.

Sia B la differenza dei lati e D *solido* quella dei cubi. Si vogliono trovare i due lati.

Indicando la somma dei lati con E , segue che $E + B$ corrisponde al doppio del lato maggiore, mentre $E - B$ al doppio di quello minore. Inoltre si ha che

$$6BE^2 + 2B^3 = 8D, \quad \text{con } D \text{ } \textit{solido}, \quad (3.45)$$

da cui si ricava il valore di E :

$$E^2 = \frac{4D - B^3}{3B}. \quad (3.46)$$

[Infatti, indicati i due lati incogniti con X e Y , per le condizioni imposte inizialmente risulta che

$$\begin{cases} X - Y = B \\ X^3 - Y^3 = D \text{ } \textit{solido} \\ X + Y = E \end{cases},$$

pertanto la (3.45) equivale a

$$6(X - Y)(X + Y)^2 + 2(X - Y)^3,$$

quindi sviluppando i calcoli si ha proprio

$$6(X - Y)(X + Y)^2 + 2(X - Y)^3 = 8(X^3 - Y^3). \quad]\text{n.c.}$$

Ora dal quadrato si può risalire al valore semplice E e una volta nota la somma dei lati e la loro differenza, si possono determinare i due lati incogniti [applicando il procedimento descritto nello *Zetetico I*.]n.c.

Si può concludere che

il quadruplo della differenza dei cubi meno il cubo della differenza dei lati, diviso il triplo della differenza dei lati equivale al quadrato della somma dei lati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 6$, D *solido* = 504, il quadrato della somma dei lati è 100.

[Infatti applicando il precetto (3.46)

$$E^2 = \frac{4 \cdot 504 - 6^3}{3 \cdot 6} = 100$$

da cui segue $E = 10$. Pertanto

$$\begin{cases} E = X + Y = 10 \\ B = X - Y = 6 \end{cases},$$

quindi i due lati corrispondono a 8 e 2.]n.c.

ZETETICI XVIII

Nota la somma di due lati e la somma dei loro cubi, determinare i lati.

Sia B la somma dei lati e D *solido* la somma dei cubi. Si vogliono determinare i due lati.

Sia E la differenza dei lati, quindi sia $B + E$ il doppio del lato maggiore e $B - E$ il doppio di quello minore. Inoltre si ha che

$$2B^3 + 6BE^2 = 8D, \quad \text{con } D \text{ } \textit{solido}, \quad (3.47)$$

da cui si ricava il valore di E :

$$E^2 = \frac{4D - B^3}{3B}. \quad (3.48)$$

[Infatti, indicati i due lati incogniti con X e Y , per le condizioni imposte inizialmente risulta che

$$\begin{cases} X + Y = B \\ X^3 + Y^3 = D \text{ } \textit{solido} \\ X + Y = E \end{cases},$$

pertanto la (3.47) equivale a

$$2(X + Y)^3 + 6(X + Y)(X - Y)^2,$$

quindi sviluppando i calcoli si ha proprio

$$2(X + Y)^3 + 6(X + Y)(X - Y)^2 = 8(X^3 + Y^3). \quad]\text{n.c.}$$

Ora dal quadrato si può risalire al valore semplice E e una volta nota la somma dei lati e la loro differenza, si possono determinare i due lati incogniti [applicando il procedimento descritto nello *Zetetico I*.]n.c.

Si può concludere che

il quadruplo della somma dei cubi meno il cubo della somma dei lati, diviso il triplo della somma dei lati equivale al quadrato della differenza dei lati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 10$, D *solido* = 370, il quadrato della differenza dei lati è 16.

[Infatti applicando il precetto (3.48)

$$E^2 = \frac{4 \cdot 370 - 10^3}{3 \cdot 10} = 16$$

da cui segue $E = 4$. Pertanto

$$\begin{cases} E = X - Y = 4 \\ B = X + Y = 10 \end{cases},$$

quindi i due lati corrispondono a 7 e 3.]n.c.

ZETETICO XIX

Nota la differenza di due lati e la differenza dei loro cubi, determinare i lati.

Sia B la differenza dei lati e D *solido* la differenza dei cubi. Si vogliono determinare i due lati.

Sia A *piano* il prodotto dei due lati, quindi dalla *genesì cubi* segue che la differenza dei cubi meno il cubo della differenza dei lati equivale al triplo del solido risultante dal prodotto della differenza dei lati e del loro prodotto.

[Indicati con X e Y i lati in questione dunque si ha

$$(X^3 - Y^3) - (X - Y)^3 = 3(X - Y)XY. \quad]n.c.$$

Pertanto

$$D - B^3 = 3AB,$$

poi dividendo entrambi i membri per $3B$, risulta

$$A = \frac{D - B^3}{3B}, \quad \text{con } A \text{ } *piano*. \quad (3.49)$$

Ora dal prodotto dei due lati e dalla loro differenza si possono determinare i due lati incogniti.

Infatti, si può concludere che

la differenza dei cubi meno il cubo della differenza dei lati, divisa per il triplo della differenza dei lati equivale al piano risultante dal prodotto dei lati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia la differenza dei lati $B = 4$ e quella dei loro cubi D *solido* $= 316$. Il prodotto A *piano*, è uguale a 21 e i due lati da cui esso deriva sono 7 e 3.

[Infatti applicando il precetto (3.49)

$$A \text{ } *piano* = \frac{316 - 4^3}{3 \cdot 4} = 21.$$

Ora per determinare i due lati incogniti, occorre risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} X - Y = 4 \\ XY = 21 \end{cases},$$

da cui si ricava $X = 7$ e $Y = 3$.]n.c.

Se invece fossero noti la differenza dei cubi e il prodotto dei lati, per determinare questi ultimi si dovrebbe individuare la loro differenza. Quindi dato il prodotto A *piano* e la differenza dei cubi D *solido*, la differenza dei due lati F *piano* viene determinata analogamente a prima, sfruttando l'uguaglianza

$$A^3 + 3AF = D, \quad \text{con } D \text{ } *solido*.$$

Pertanto

il cubo della differenza dei lati, più il solido risultante dalla moltiplicazione del triplo prodotto dei due lati e della loro differenza, equivale alla differenza dei loro cubi.

ZETETICO XX

Nota la somma di due lati e la somma dei loro cubi, determinare i lati.

Sia G la somma dei lati e D *solido* la somma dei cubi. Si vogliono determinare i due lati.

Sia A *piano* il prodotto dei due lati, quindi dalla *genesis cubi* segue che il cubo della somma dei lati meno la somma dei cubi equivale al triplo del solido risultante dal prodotto della somma dei lati e del loro prodotto.

[Indicati con X e Y i lati in questione dunque si ha

$$(X + Y)^3 - (X^3 + Y^3) = 3(X + Y)XY. \quad]\text{n.c.}$$

Pertanto

$$G^3 - D = 3GA,$$

poi dividendo entrambi i membri per $3G$, risulta

$$A = \frac{G^3 - D}{3G}, \quad \text{con } A \text{ piano.} \quad (3.50)$$

Ora dal prodotto dei due lati e dalla loro somma si possono determinare i due lati incogniti.

Infatti, si può concludere che

il cubo della somma dei lati meno la somma dei loro cubi, divisa per il triplo della somma dei lati equivale al piano risultante dal prodotto dei lati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia la somma dei lati $G = 10$ e quella dei loro cubi D *solido* $= 370$. Il prodotto A *piano*, è uguale a 21 e i due lati da cui esso deriva sono 7 e 3.

[Infatti applicando il precetto (3.50)

$$A \text{ piano} = \frac{10^3 - 370}{3 \cdot 10} = 21.$$

Ora per determinare i due lati incogniti, occorre risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} X + Y = 10 \\ XY = 21 \end{cases},$$

da cui si ricava $X = 7$ e $Y = 3$.]n.c.

Se invece fossero noti la somma dei cubi e il prodotto dei lati, per determinare

questi ultimi si dovrebbe individuare la loro somma. Quindi dato il prodotto A *piano* e la somma dei cubi D *solido*, la somma dei due lati B *piano* viene determinata analogamente a prima, sfruttando l'uguaglianza

$$A^3 - 3BA = D, \text{ con } D \text{ solido.}$$

Pertanto

il cubo della somma dei lati, meno il solido risultante dalla moltiplicazione del triplo prodotto dei due lati e della loro somma, equivale alla somma dei loro cubi.

ZETETICO XXI

Dati due solidi, uno risultante dal prodotto della differenza dei lati e della differenza dei loro quadrati e l'altro risultante dalla moltiplicazione della somma dei lati e della somma dei loro quadrati, determinare i due lati.

Siano B e D i due solidi dati e sia A la somma dei lati. Conseguentemente, il quadrato della differenza dei lati e la somma dei loro quadrati corrispondono rispettivamente a

$$\frac{B \text{ solido}}{A} \text{ e } \frac{D \text{ solido}}{A}.$$

Il doppio della somma dei quadrati meno il quadrato della differenza dei lati è uguale al quadrato della somma dei lati.

[Indicati con X e Y i lati in questione dunque si ha

$$2(X^2 + Y^2) - (X - Y)^2 = (X + Y)^2. \quad]\text{n.c.}$$

Pertanto

$$A^2 = \frac{2D - B}{A} \text{ con } D \text{ solido, } B \text{ solido,}$$

moltiplicando entrambi i membri per A si ha

$$A^3 = 2D - B \text{ con } D \text{ solido, } B \text{ solido.} \quad (3.51)$$

Quindi si può concludere che

il doppio del solido risultante dalla moltiplicazione della somma dei lati e della somma dei loro quadrati, meno il solido risultante dal prodotto della differenza dei lati e della differenza dei loro quadrati, equivale al cubo della somma dei lati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Siano i due solidi dati B e D uguali rispettivamente a 32 e 272. Il cubo della somma dei lati, A^3 , corrisponde a 512, pertanto la somma dei lati è 8. Il

quadrato della differenza è $\frac{32}{8} = 4$, quindi la differenza dei lati è uguale a $\sqrt{4} = 2$. Così il lato minore è 4 meno la metà del lato $\sqrt{4} = 2$, mentre quello maggiore è 4 più la metà del lato 2.

[Infatti applicando il precetto (3.51) si ottiene proprio che

$$(X + Y)^3 = 2 \cdot 272 - 32 = 512,$$

e che $(X + Y) = \sqrt[3]{512} = 8$. Il quadrato della differenza dei due lati si determina invece ricordando che

$$\frac{(X^2 - Y^2)}{(X + Y)} = (X - Y),$$

così dividendo il solido assegnato B per la somma A appena individuata si ha

$$\frac{B}{A} = \frac{(X - Y)(X^2 - Y^2)}{(X + Y)} = (X - Y)^2,$$

quindi $(X - Y) = \sqrt{\frac{32}{8}} = 2$. Infine una volta nota la somma e la differenza dei due lati, applicando il procedimento descritto nello *zetetico I* del primo libro è possibile ricavare il valore dei due lati.]n.c.

Siano i due solidi dati B e D uguali rispettivamente a 10 e 20. Il cubo della somma dei lati, A^3 , corrisponde a 30, pertanto la somma dei lati è $\sqrt[3]{30}$. Il quadrato della differenza è $\frac{10}{\sqrt[3]{30}} = \sqrt[3]{\frac{100}{3}}$, quindi la differenza dei lati è uguale a $\sqrt[6]{\frac{100}{3}}$. Così il lato minore è $\sqrt[3]{\frac{30}{8}} - \sqrt[6]{\frac{100}{192}}$, mentre quello maggiore è $\sqrt[3]{\frac{30}{8}} + \sqrt[6]{\frac{100}{192}}$. Cardano, nel problema 93 del capitolo 66 della *Pratica Arithmeticae*, esplicita la relazione esistente fra i due lati, secondo cui il minore sta al maggiore come $2 - \sqrt{3}$ sta ad 1, o come 1 sta a $2 + \sqrt{3}$, ma sfortunatamente Cardano non determina il valore numerico dei due lati.

ZETETICO XXII

Nota la somma dei quadrati e il rapporto fra il prodotto dei lati e il quadrato della loro differenza, determinare i lati.

Sia B *piano* la somma dei quadrati, inoltre il prodotto dei due lati stia al quadrato della loro differenza come R sta ad S . Si vogliono trovare i due lati.

Sia A *piano* il prodotto dei lati, conseguentemente $\frac{SA}{R}$ corrisponde al quadrato della loro differenza e la somma di quest'ultimo con il doppio prodotto dei lati equivale alla somma dei loro quadrati.

[Indicati con X e Y i lati in questione dunque si ha

$$(X - Y)^2 + 2XY = X^2 + Y^2 \quad]n.c.$$

Pertanto

$$B = \frac{SA + 2RA}{R} \quad \text{con } A \text{ piano, } B \text{ piano,}$$

ovvero

$$(S + 2R) : R = B : A, \text{ con } A \text{ piano, } B \text{ piano.} \quad (3.52)$$

Quindi si può concludere che

Come il quadrato della differenza dei lati, più il loro doppio prodotto simile, sta al prodotto simile dei lati, così la somma dei loro quadrati veri sta al vero prodotto dei lati.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 20 la somma dei quadrati e il prodotto dei due lati stia al quadrato della loro differenza come 2 sta ad 1, pertanto

$$(S + 2R) : R = 20 : 8$$

e 8 corrisponde al prodotto dei due lati incogniti.

[Infatti, alla luce delle condizioni poste inizialmente, la relazione (3.52) diventa

$$(1 + 2 \cdot 2) : 2 = 20 : A \implies A = \frac{2 \cdot 20}{5},$$

da cui segue che il prodotto dei lati A è uguale ad 8.]n.c.

Inoltre il quadrato della differenza dei lati e il quadrato della loro somma corrispondono rispettivamente a

$$20 - 16 = 4 \quad \text{e} \quad 20 + 16 = 36,$$

e conseguentemente la differenza dei lati sarà $\sqrt{4} = 2$, mentre la loro somma $\sqrt{36} = 6$. Pertanto si ha che il lato minore è uguale a $\sqrt{9} - \sqrt{1}$ o $\sqrt{9} - \sqrt{2}$, mentre quello maggiore corrisponde a $\sqrt{9} + \sqrt{1}$ o $\sqrt{9} - \sqrt{4}$.

[Il valore numerico dei due lati si ricava applicando il procedimento descritto nello *zetetico I* del primo libro, cioè per determinare i lati incogniti è necessario risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} X + Y = \sqrt{36} \\ X - Y = \sqrt{4} \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} Y = \sqrt{36} - \frac{\sqrt{36}}{2} - \frac{\sqrt{4}}{2} & Y = \sqrt{9} + \sqrt{1} \\ X = \frac{\sqrt{36}}{2} + \frac{\sqrt{4}}{2} & X = \sqrt{9} - \sqrt{1} \end{cases} \quad \text{]n.c.}$$

Ancora sia 20 la somma dei quadrati e il prodotto dei due lati stia al quadrato della loro differenza come 1 sta ad 1, pertanto

$$3 : 1 = 20 : \frac{20}{3}$$

e $\frac{20}{3}$ corrisponde al prodotto dei due lati incogniti.

Inoltre il quadrato della differenza dei lati e il quadrato della loro somma corrispondono rispettivamente a

$$20 - \frac{40}{3} = \frac{20}{3} \quad \text{e} \quad 20 + \frac{40}{3} = \frac{100}{3},$$

e conseguentemente la differenza dei lati sarà $\sqrt{\frac{20}{3}}$, mentre la loro somma $\sqrt{\frac{100}{3}}$. Ora applicando il procedimento descritto nello *zetetico I* del primo libro si ha che il lato minore è uguale a $\sqrt{\frac{25}{3}} - \sqrt{\frac{5}{3}}$, mentre quello maggiore corrisponde a $\sqrt{\frac{25}{3}} + \sqrt{\frac{5}{3}}$. Anche Cardano sviluppa questo zetetico nel problema 94 del capitolo 66 della *Pratica Arithmeticae*.

3.3 Libro Terzo

ZETETICO I

Noto il termine medio proporzionale fra tre linee rette proporzionali e nota la differenza degli estremi, determinare gli estremi.

Il quadrato del termine medio corrisponde al prodotto degli estremi, perciò la prima condizione equivale a dire che il prodotto dei termini estremi è noto. Quindi noti il prodotto degli estremi e la loro differenza, si vogliono trovare i due estremi.

Il quadrato della differenza della metà degli estremi, più il quadrato del termine medio, è uguale al quadrato della somma della metà degli estremi.

[Indicati con A , B e C i tre termini proporzionali si ha

$$A : B = B : C$$

e per la legge fondamentale delle proporzioni $B^2 = AC$. Pertanto

$$\left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2}\right)^2 + B^2 = \left(\frac{A}{2} - \frac{C}{2}\right)^2 + AC = \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)^2. \quad (3.53)$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 10 la differenza degli estremi e 12 il termine medio. L'estremo minore è 8, quello maggiore 18.

[Applicando il precetto (3.53), si ha

$$\left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2}\right)^2 = 25 + 144 = 169,$$

da cui segue che la somma degli estremi è uguale a 26. Ora essendo note la differenza e la somma degli estremi, è possibile determinare il loro valore

numerico, semplicemente applicando il procedimento descritto nello *zetetico I* del primo libro:

$$\begin{cases} X + Y = 26 \\ X - Y = 10 \end{cases},$$

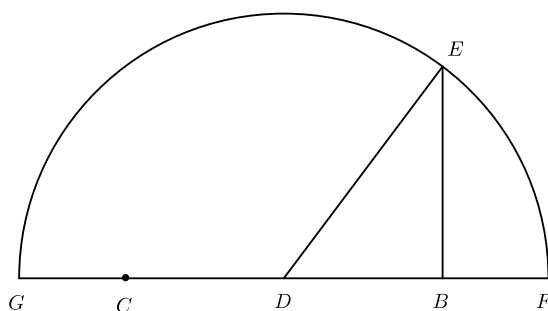
da cui

$$\begin{cases} Y = 18 \\ X = 8 \end{cases}.$$

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*⁴⁹

Si consideri il segmento BC , corrispondente alla differenza degli estremi incogniti, poi si tracci il segmento BE perpendicolare a BC e corrispondente al termine medio proporzionale assegnato. Si individui il punto medio D del segmento BC , poi si congiunga con il punto E . Successivamente si tracci la semicirconferenza di centro il punto D e raggio DE ; essa determina sui prolungamenti del segmento BC i punti F e G . Gli estremi cercati corrispondono ai due segmenti FB e BG .



Dal teorema di Pitagora segue che

$$BE^2 + BD^2 = DE^2 = \left(\frac{FG}{2}\right)^2,$$

ovvero la somma del quadrato del termine medio, BE^2 , e del quadrato della metà della differenza, BD^2 , equivale al quadrato della metà della somma dei lati $\left(\frac{FG}{2}\right)^2$. Pertanto FG e BD corrispondono rispettivamente alla somma e alla differenza degli estremi, mentre questi ultimi sono uguali a FB e BG .

Inoltre dalla costruzione risulta che

$$FB = GC \quad \text{e} \quad DB = DC,$$

⁴⁹In [17] pp. 102-103.

quindi $FB \cdot BG = FB(FB + 2DB)$ e sommando a entrambi i membri il quadrato del segmento BD si ha

$$FB \cdot BG + BD^2 = FB^2 + 2FB \cdot DB + DB^2 = (FB + BD)^2 = FD^2 = ED^2.$$

Pertanto

$$FB \cdot BG + BD^2 = BE^2 + BD^2 \implies FB \cdot BG = BE^2$$

e i segmenti FB , BG e BE risultano tra di loro proporzionali, essendo soddisfatta la relazione fondamentale delle proporzioni.]n.c.

ZETETICO II

Noto il termine medio proporzionale fra tre grandezze e nota la somma degli estremi, determinare gli estremi.

Questo problema si sviluppa analogamente allo zetetico precedente, in particolare noto il prodotto degli estremi e la loro somma, si vogliono trovare i due estremi.

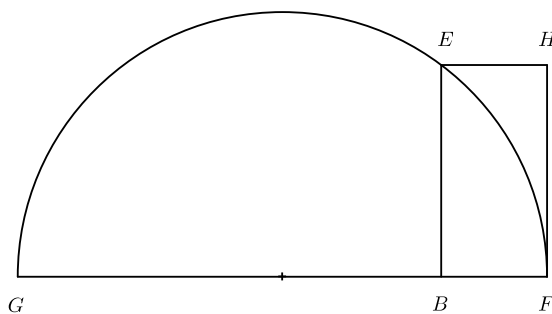
[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 12 il termine medio proporzionale e 16 la somma degli estremi. Il lato minore è uguale a 8, quello maggiore a 18.

[RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vauléard*⁵⁰

Si consideri il segmento FG , corrispondente alla somma degli estremi incogniti, poi si tracci su di esso la semicirconferenza di diametro FG . Si tracci la perpendicolare ad FG , FH , tale che essa corrisponda al termine medio proporzionale assegnato e si tracci da H la parallela ad FG , che interseca la semicirconferenza nel punto E . Infine tracciando la perpendicolare a FG passante per E , si individua il punto di intersezione con il segmento FG , B . Gli estremi cercati corrispondono ai due segmenti FB e BG .



⁵⁰In [17] pp. 103.

ZETETICO III

Noto il perpendicolare di un triangolo rettangolo e nota la differenza della sua base e della sua ipotenusa, determinare la base e l'ipotenusa.

Per giungere alla soluzione occorre ricordare un problema già affrontato, in cui note la differenza di due lati e quella dei loro quadrati, è possibile determinare il valore dei due lati incogniti. Infatti il quadrato del perpendicolare corrisponde alla differenza del quadrato dell'ipotenusa e del quadrato della base.

Sia D il perpendicolare del triangolo rettangolo e sia B la differenza della base e dell'ipotenusa. Si vogliono determinare queste ultime.

Sia A la somma della base e dell'ipotenusa, allora $BA = D^2$, da cui si ricava che $A = \frac{D^2}{B}$.

Quindi si può concludere che

il perpendicolare del triangolo rettangolo è il medio proporzionale fra la differenza e la somma della base e dell'ipotenusa.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

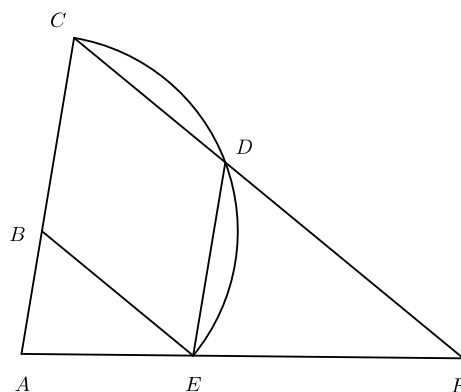
Sia il perpendicolare $D = 5$ e la differenza della base e dell'ipotenusa $B = 1$. I numeri 1, 5, 25 sono fra loro proporzionali, perciò l'ipotenusa del triangolo rettangolo vale 13, la base 12 e il perpendicolare 5, che corrisponde anche al rapporto di proporzionalità.

[RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*⁵¹

Si consideri il segmento AB , corrispondente alla differenza della base e dell'ipotenusa del triangolo rettangolo considerato e il segmento BC , coincidente con il suo perpendicolare. Si tracci l'arco di circonferenza di centro B e raggio BC e su di esso si considerino i punti D ed E , tali che $CD = DE = BC$, quindi si congiungano A ed E . Infine si prolunghino i segmenti CD ed AE , finchè non si intersecano in F . Il segmento DF corrisponde alla somma della base e dell'ipotenusa del triangolo.

⁵¹In [17] pp. 105-106.



Poiché i segmenti BC , CD , DE , ed EB sono stati costruiti in modo tale che siano uguali fra loro e paralleli a due a due, i triangoli BAE e DEF sono simili, pertanto

$$AB : DE = EB : DF \implies AB : BC = BC : DF,$$

cioè la differenza della base e dell'ipotenusa, il perpendicolare e la somma della base e dell'ipotenusa sono tre grandezze proporzionali.]n.c.

ZETETICO IV

Noto il perpendicolare di un triangolo rettangolo e nota la somma della base e dell'ipotenusa, determinare la base e l'ipotenusa.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 5 il perpendicolare del triangolo rettangolo considerato e 25 la somma della base e dell'ipotenusa. I numeri 25, 5, 1 sono fra loro proporzionali, perciò la differenza della base e dell'ipotenusa è uguale a 1, la base vale 12 e l'ipotenusa 13.

ZETETICO V

Nota l'ipotenusa di un triangolo rettangolo e la differenza dei loro cateti, determinare i cateti.

Per giungere alla soluzione occorre ricordare un problema già affrontato, in cui note la differenza di due lati e la somma dei loro quadrati, è possibile determinare il valore dei due lati incogniti. Infatti il quadrato del perpendicolare corrisponde alla differenza del quadrato dell'ipotenusa e del quadrato della base.

Sia D l'ipotenusa del triangolo rettangolo e sia B la differenza dei cateti. Si vogliono determinare questi ultimi.

Sia A la somma dei cateti, allora $A + B$ corrisponde al doppio del cateto maggiore, mentre $A - B$ al doppio di quello minore. Inoltre si ha che

$$2A^2 + 2B^2 = 4D^2,$$

da cui

$$A^2 = 2D^2 - B^2.$$

Quindi si può concludere che

il doppio del quadrato dell'ipotenusa, meno il quadrato della differenza dei cateti è uguale al quadrato della loro somma.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia l'ipotenusa del triangolo rettangolo considerato $D = 13$ e la differenza dei cateti $B = 7$. Il quadrato della somma dei cateti, A^2 , è uguale a 289, per cui la somma risulta uguale a $\sqrt{289}$. Pertanto i due cateti valgono 12 e 5.

ZETETICO VI

Nota l'ipotenusa di un triangolo rettangolo e la somma dei loro cateti, determinare i cateti.

Infatti

il doppio del quadrato dell'ipotenusa, meno il quadrato della somma dei cateti è uguale al quadrato della loro differenza.

Attraverso l'antitesi è possibile ricondursi a quanto enunciato nello zetetico precedente. [RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia 13 l'ipotenusa del triangolo rettangolo considerato e 17 la somma dei suoi cateti. Il quadrato della differenza dei cateti è uguale a 49, per cui la differenza risulta uguale a $\sqrt{49}$. Pertanto i due cateti valgono 12 e 5.

ZETETICO VII

Si determinino numericamente tre linee rette proporzionali.

Considerati due numeri l'estremo maggiore delle grandezze proporzionali è simile al quadrato del lato maggiore, il termine medio proporzionale al prodotto dei due numeri, l'estremo minore al quadrato del lato minore.

Sia B la prima grandezza proporzionale, D la seconda e $\frac{D^2}{B}$ la terza. Moltiplicando tutti i termini per B si ha

$$\begin{array}{ccc} I & II & III \\ B^2 & BD & D^2 \end{array}$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 2$ e $D = 3$, allora le tre grandezze proporzionali cercate sono 4, 6, 9.

ZETETICO VIII⁵²

Assegnati tre numeri costruire un triangolo rettangolo.

Considerati tre numeri proporzionali fra loro, l'ipotenusa del triangolo rettangolo richiesto risulta simile alla somma degli estremi, la base è simile alla loro differenza e il perpendicolare al doppio del termine medio.

Inoltre il perpendicolare del triangolo rettangolo è il medio proporzionale fra la somma e la differenza dell'ipotenusa e della base.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Si considerino i tre numeri proporzionali 4, 6, 9. Il triangolo rettangolo costruito partendo da essi ha ipotenusa, base e perpendicolare pari, rispettivamente, a 13, 5 e 12.

ZETETICO IX

Assegnati due numeri costruire un triangolo rettangolo.

Considerati due numeri razionali, l'ipotenusa del triangolo rettangolo richiesto risulta simile alla somma dei quadrati dei numeri assegnati, la base è simile alla loro differenza e il perpendicolare al doppio prodotto dei due numeri dati.

Siano B e D i due numeri assegnati, allora tre numeri proporzionali sono B , D , e $\frac{D^2}{B}$, che moltiplicati per B diventano B^2 , BD e D^2 . Pertanto dalle considerazioni sviluppate nello zetetico precedente, dati tre numeri è possibile costruire un triangolo rettangolo con ipotenusa, base e perpendicolare simili rispettivamente a $(B^2 + D^2)$, $|B^2 - D^2|$ e $2BD$. Infatti, per il Teorema di Pitagora⁵³

$$(B^2 + D^2)^2 = (B^2 - D^2)^2 + (2BD)^2.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

I due numeri assegnati siano $B = 2$ e $D = 3$, il triangolo rettangolo costruito partendo da essi ha ipotenusa, base e perpendicolare simili a 13, 5 e 12.

ZETETICO X

Nota la somma dei quadrati di tre grandezze proporzionali fra loro e noto uno degli estremi, determinare l'estremo rimanente.

⁵²Questo zetetico e quello successivo sono equivalenti alla *Proporzioe XLV* delle Notæ Piores.

⁵³«Quadratum ab adgregato quadratorum, æquare quadratum à differentia quadratorum, adiunctum quadrato dupli rectanguli sub lateribus.» Vedi p. 59 di [18].

La somma dei quadrati delle tre grandezze proporzionali meno i tre quarti del quadrato dell'estremo noto, è uguale al quadrato della somma della metà dell'estremo noto e di quello rimanente.

Questo problema è già stato sviluppato e dimostrato precedentemente [nello *Zeteticò X* del secondo libro.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia uguale a 21 la somma delle tre grandezze proporzionali e sia 4 l'estremo maggiore. Allora $21 - 12 = 9$ corrisponde al quadrato della somma di 2 e dell'estremo minore incognito, che risulta uguale a $\sqrt{9} - 2 = 1$.

Oppure sia 21 la somma delle grandezze proporzionali e sia 1 l'estremo minore. Allora $20 + \frac{1}{4} = \frac{81}{4}$ è il quadrato della somma di $\frac{1}{2}$ e dell'estremo maggiore incognito, che risulta uguale a $\sqrt{\frac{81}{4}} - \frac{1}{2} = 4$.

ZETETICO XI

Nota la somma dei quadrati di tre grandezze proporzionali fra loro e nota la somma degli estremi, determinare gli estremi.

Il quadrato della somma degli estremi, meno la somma dei quadrati delle tre grandezze proporzionali, è uguale al quadrato del termine medio.

Da risultati precedenti segue che una volta nota la somma degli estremi e il termine medio, è possibile determinare gli estremi.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia uguale a 21 la somma delle tre grandezze proporzionali e sia 5 la somma degli estremi. Allora $25 - 21 = 4$ corrisponde al quadrato del termine medio e i due estremi incogniti sono 1 e 4.

ZETETICO XII

Nota la somma dei quadrati di tre grandezze proporzionali fra loro e noto il termine medio, determinare gli estremi.

La somma dei quadrati delle tre grandezze proporzionali più il quadrato del termine medio, è uguale alla somma degli estremi.

Da risultati precedenti segue che una volta nota la somma degli estremi e il termine medio, è possibile determinare gli estremi.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia uguale a 21 la somma delle tre grandezze proporzionali e sia 2 il termine medio. Allora $21 + 4 = 25$ corrisponde al quadrato della somma degli estremi, perciò i due estremi sono 1 e 4.

ZETETICO XIII

Determinare quattro termini in proporzione continua, nota la differenza degli estremi e quella dei medi.

Questo problema è già stato sviluppato e dimostrato precedentemente in altri due zetetici, infatti determinare i due estremi e i due medi, in base alle condizioni imposte, equivale ad individuare due lati, essendo nota la loro differenza e quella dei loro cubi.

Sia dunque D la differenza degli estremi e B quella dei medi. Si vogliono determinare i quattro termini in proporzione continua.

Sia A la somma degli estremi e conseguentemente $A + D$ e $A - D$ siano il doppio dell'estremo maggiore e il doppio dell'estremo minore.

[Infatti indicati con X, Z, T, Y i quattro termini in proporzione continua, cioè tali che

$$X : Z = Z : T = T : Y, \quad (3.54)$$

A corrisponde alla somma $(X+Y)$, D alla differenza $(X-Y)$ e conseguentemente

$$A + D = X + Y + X - Y = 2X \quad \text{e} \quad A - D = X + Y - X + Y = 2Y.$$

Inoltre dalla (3.54), si ha che

$$\begin{array}{ll} X : Z = Z : T & Z^2 = XT \\ Z : T = T : Y & T^2 = ZY \\ X : Z = T : Y & ZT = XY \end{array}$$

da cui si ricava

$$\begin{array}{lll} T = \frac{XY}{Z} & \implies & Z^2 = X \cdot \frac{XY}{Z} \quad Z^3 = X \cdot XY \\ Z = \frac{XY}{T} & \implies & T^2 = \frac{XY}{T} \cdot Y \quad T^3 = XY \cdot Y \end{array}$$

]n.c.

Pertanto il prodotto $(A + D)(A - D)$ equivale al quadruplo del prodotto degli estremi o dei medi

$$[(A + D)(A - D) = A^2 - D^2 = 4XY.] \text{n.c.}$$

In particolare

$$\frac{A^2 - D^2}{4}$$

moltiplicato per l'estremo maggiore è uguale al cubo del termine medio maggiore

$$[\frac{A^2 - D^2}{4} \cdot X = XY \cdot X = Z^3,] \text{n.c.}$$

moltiplicato per l'estremo minore corrisponde al cubo del medio minore

$$\left[\frac{A^2 - D^2}{4} \cdot X = XY \cdot Y = T^3, \right] \text{n.c.}$$

e infine moltiplicato per la differenza degli estremi equivale alla differenza dei cubi dei termini medi

$$\left[\frac{A^2 - D^2}{4} \cdot (X - Y) = XY \cdot (X - Y) = XY \cdot X - XY \cdot Y = Z^3 - T^3, \right] \text{n.c.}$$

perciò

$$\frac{DA^2 - D^3}{4} = Z^3 - T^3.$$

Inoltre poiché se si sottrae il cubo della differenza di due lati alla differenza dei loro cubi, il resto è uguale al triplo del solido risultante dal prodotto della differenza dei lati e del loro prodotto, come descritto nella *genesis cubi*,⁵⁴ si ha che

$$\frac{DA^2 - D^3 - 4B^3}{4} = \frac{3BA^2 - 3BD^2}{4},$$

quindi ordinando l'equazione si ha

$$A^2 = \frac{D^3 + 4B^3 - 3BD^2}{D - 3B}.$$

Si può concludere che

quando il cubo della differenza degli estremi, più quattro volte la differenza dei medi, meno tre volte il solido, risultante dal prodotto della differenza dei medi e del quadrato della differenza degli estremi, è diviso per la differenza degli estremi, meno tre volte la differenza dei medi, il piano risultante è uguale al quadrato della somma degli estremi.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia la differenza degli estremi $D = 7$ e quella dei medi $B = 2$, allora il quadrato della somma degli estremi, A^2 , è uguale a 81, cioè $A = 9$, gli estremi sono 1 e 8 e i medi 2 e 4. Dunque le quattro grandezze in proporzione continua sono:

1, 2, 4, 8.

ZETETICO XIV

Determinare quattro termini in proporzione continua, nota la somma degli estremi e quella dei medi.

⁵⁴

$$\begin{aligned} (A^3 - B^3) - (A - B)^3 &= A^3 - B^3 - A^3 + 3A^2B - 3AB^2 + B^3 \\ &= 3A^2B - 3AB^2 \\ &= 3AB(A - B). \end{aligned}$$

Questo problema è già stato sviluppato e dimostrato precedentemente in altri due zetetici, infatti determinare i due estremi e i due medi, in base alle condizioni imposte, equivale ad individuare due lati, essendo nota la loro somma e quella dei loro cubi.

Sia dunque D la somma degli estremi e B quella dei medi. Si vogliono determinare i quattro termini in proporzione continua.

Sia A la differenza degli estremi e conseguentemente $D + A$ e $D - A$ siano il doppio dell'estremo maggiore e il doppio dell'estremo minore.

Pertanto il prodotto $(D + A)(D - A)$ equivale al quadruplo del prodotto degli estremi o dei medi. In particolare

$$\frac{D^2 - A^2}{4}$$

moltiplicato per l'estremo maggiore è uguale al cubo del termine medio maggiore, moltiplicato per l'estremo minore corrisponde al cubo del medio minore e infine moltiplicato per la somma degli estremi equivale alla somma dei cubi dei termini medi, perciò

$$\frac{D^3 - DA^2}{4} = Z^3 + T^3, \quad \text{dove } Z \text{ e } T \text{ sono i due medi.}$$

Poiché se si sottrae al cubo della somma di due lati la somma dei loro cubi, il resto è uguale al triplo del solido risultante dal prodotto della somma dei lati e del loro prodotto, come descritto nella *genesis cubi*,⁵⁵ si ha che

$$\frac{4B^3 - D^3 + DA^2}{4} = \frac{3BD^2 - 3BA^2}{4},$$

quindi ordinando l'equazione

$$A^2 = \frac{3BD^2 + D^3 - 4B^3}{D + 3B}.$$

Si può concludere che

quando il triplo del solido risultante dal prodotto dei medi e del quadrato della somma degli estremi, più il cubo della somma degli estremi, meno quattro volte il cubo della somma dei medi, è diviso per la somma degli estremi, più il triplo della somma dei medi, il piano risultante corrisponde al quadrato della differenza degli estremi.

⁵⁵

$$\begin{aligned} (A + B)^3 - (A^3 + B^3) &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 - A^3 - B^3 \\ &= 3A^2B + 3AB^2 \\ &= 3AB(A + B). \end{aligned}$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia la somma degli estremi $D = 9$ e quella dei medi $B = 6$, allora il quadrato della differenza degli estremi, A^2 , è uguale a 49, cioè $A = 7$, gli estremi sono 1 e 8 e i medi 2 e 4. Dunque le quattro grandezze in proporzione continua sono:

$$1, 2, 4, 8.$$

ZETETICO XV

Ancora, determinare quattro termini in proporzione continua, nota la differenza degli estremi e quella dei medi.

Determinare i due estremi e i due medi, in base alle condizioni imposte, equivale ad individuare due lati, essendo nota la loro differenza e quella dei loro cubi.

Sia dunque D la differenza degli estremi e B quella dei medi. Si vogliono determinare i quattro termini in proporzione continua.

Sia A *piano* il prodotto dei medi o degli estremi, conseguentemente il cubo del termine medio maggiore, sia uguale a tre volte il solido risultante dal prodotto dei due estremi e dell'estremo maggiore, mentre il cubo del termine medio minore sia uguale a tre volte il solido risultante dal prodotto dei due estremi e dell'estremo minore. Pertanto DA *piano* corrisponde alla differenza dei cubi dei medi. Poiché se si sottrae il cubo della differenza di due lati alla differenza dei loro cubi, il resto è uguale al triplo del solido risultante dal prodotto della differenza dei lati e del loro prodotto, come descritto nella *genesis cubi*, si ha

$$DA - B^3 = 3BA, \quad \text{con } A \text{ piano,}$$

da cui si ricava ordinando l'equazione

$$A = \frac{B^3}{D - 3B}, \quad \text{con } A \text{ piano.}$$

Ora noto il prodotto di due lati e nota la differenza dei loro cubi, è possibile determinare i due lati.

Si può concludere che

come la differenza degli estremi, meno il triplo della differenza dei medi sta alla differenza dei medi, così il quadrato della differenza dei medi sta al prodotto dei medi o degli estremi.

$$[(D - 3B) : B = B^2 : A.] \text{n.c.}$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia la differenza degli estremi $D = 7$ e quella dei medi $B = 2$, allora il prodotto degli estremi o dei medi, A , è uguale a 8, gli estremi sono 1 e 8 e i medi 2 e 4. Dunque la quattro grandezze in proporzione continua sono:

$$1, 2, 4, 8.$$

Se invece fossero note la differenza dei medi e quella degli estremi, per determinare le quattro grandezze in proporzione continua, si dovrebbe individuare il prodotto dei medi o degli estremi. Quindi data la differenza dei medi A e quella degli estremi D , il prodotto dei medi o degli estremi F viene determinato analogamente a prima, sfruttando l'uguaglianza

$$F = \frac{A^3}{D - 3A} \quad \text{con } F \text{ piano,}$$

che deriva dall'equazione

$$A^3 + 3FA = FD, \quad \text{con } F \text{ piano.}$$

Pertanto il cubo della differenza dei medi, più il triplo del solido risultante dal prodotto dei due estremi, o dei due medi e della differenza dei medi è uguale al solido determinato dal prodotto degli estremi o dei medi e dalla differenza degli estremi.

ZETETICO XVI

Ancora, determinare quattro termini in proporzione continua, nota la somma degli estremi e quella dei medi.

Determinare i due estremi e i due medi, in base alle condizioni imposte, equivale ad individuare due lati, essendo nota la loro somma e quella dei loro cubi.

Sia dunque Z la somma degli estremi e G quella dei medi. Si vogliono determinare i quattro termini in proporzione continua.

Sia A il prodotto dei medi o degli estremi, conseguentemente il cubo del termine medio maggiore sia uguale al solido risultante dal prodotto dei due estremi e dell'estremo maggiore, mentre il cubo del termine medio minore sia uguale al solido risultante dal prodotto dei due estremi e dell'estremo minore. Pertanto ZA piano corrisponde alla somma dei cubi dei medi. Poiché se si sottrae al cubo della somma di due lati la somma dei loro cubi, il resto è uguale al triplo del solido risultante dal prodotto della somma dei lati e del loro prodotto, si ha

$$G^3 - ZA = 3GA, \quad \text{con } A \text{ piano,}$$

da cui si ricava ordinando l'equazione

$$A = \frac{G^3}{Z + 3G}, \quad \text{con } A \text{ piano.}$$

Ora noto il prodotto di due lati e nota la differenza dei loro cubi, è possibile determinare i due lati.

Si può concludere che

come la somma degli estremi, più il triplo della somma dei medi sta alla somma dei medi, così il quadrato della somma dei medi sta al prodotto dei medi o degli estremi.

$$[(Z + 3G) : G = G^2 : A.]_{\text{n.c.}}$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia la somma degli estremi $Z = 9$ e quella dei medi $G = 6$, allora il prodotto dei medi o degli estremi, A , è uguale a 8, gli estremi sono 1 e 8 e i medi 2 e 4. Dunque la quattro grandezze in proporzione continua sono:

$$1, 2, 4, 8.$$

Se invece fossero note la somma dei medi e quella degli estremi, per determinare le quattro grandezze in proporzione continua, si dovrebbe individuare il prodotto dei medi o degli estremi. Quindi data la somma dei medi A e quella degli estremi Z , il prodotto dei medi o degli estremi B *piano* viene determinato analogamente a prima, sfruttando l'uguaglianza

$$A^3 - 3BA = BZ, \quad \text{con } B \text{ piano.}$$

Pertanto il cubo della somma dei medi, meno il triplo del solido risultante dal prodotto dei due estremi, o dei due medi e della somma dei medi è uguale al solido determinato dal prodotto degli estremi o dei medi e dalla somma degli estremi.

3.4 Libro Quarto

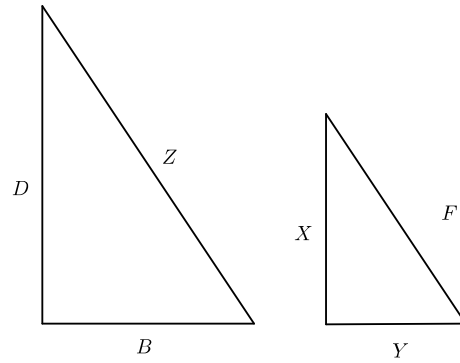
ZETETICO I

Determinare il quadrato di due numeri, la cui somma corrisponde ad un quadrato dato.

Siano X e Y i due numeri incogniti e F^2 la somma dei loro quadrati, con $F \in \mathbb{Q}^+$, allora

$$X^2 + Y^2 = F^2. \quad (3.55)$$

Si consideri il triangolo rettangolo di base B , perpendicolare D e ipotenusa Z , poi si determini un altro triangolo rettangolo simile al primo e con ipotenusa pari ad F :



Dunque si ha

$$\begin{aligned} Z : F = B : X &\implies X = \frac{BF}{Z} \\ Z : F = D : Y &\implies Y = \frac{DF}{Z}. \end{aligned}$$

pertanto

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{BF}{Z}\right)^2 + \left(\frac{DF}{Z}\right)^2 = \frac{F^2}{Z^2}(B^2 + D^2) = F^2.$$

La soluzione proposta da Diofanto invece è la seguente:

[Dalla (3.55) si ricava

$$X^2 = F^2 - Y^2,$$

ovvero

$$(F - Y) : X = X : (F + Y).$$

Posto $\frac{F-Y}{X} = m \in \mathbb{Q}^+$ e ricordando che $Y^2 = F^2 - X^2$, si ha

$$Y = F - mX \implies F^2 - 2mXF + m^2X^2 = F^2 - X^2,$$

da cui segue che

$$X = \frac{2mF}{m^2 + 1} \quad \text{e} \quad Y = \frac{F(1 - m^2)}{m^2 + 1},$$

pertanto

$$X^2 = \frac{4m^2F^2}{(m^2 + 1)^2} \quad \text{e} \quad Y^2 = \frac{F^2(1 - m^2)^2}{(m^2 + 1)^2},$$

in particolare $\forall m > 0$ e $m \neq 1$, $X^2, Y^2 \in \mathbb{Q}^+$. Sia $m = \frac{S}{R}$.]n.c.

Siano $X = A$ e $Y = F - \frac{SA}{R}$ i due numeri richiesti, che soddisfano le condizioni iniziali, cioè tali che

$$A^2 + \left(F - \frac{SA}{R}\right)^2 = F^2,$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} X = A &= \frac{2SRF}{S^2 + R^2} \\ Y = F - \frac{SA}{R} &= \frac{F|S^2 - R^2|}{S^2 + R^2}. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Infatti, come afferma la *Proposizione XLV* delle *Notæ Piores*, dati due numeri R ed S , il triangolo rettangolo da essi individuato ha ipotenusa $S^2 + R^2$, base $|R^2 - S^2|$ e perpendicolare $2RS$, perciò risulta che

$$(S^2 + R^2) : F = |R^2 - S^2| : Y$$

$$(S^2 + R^2) : F = 2RS : X,$$

da cui si ottengono le (3.56), applicando la relazione fondamentale delle proporzioni.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia il quadrato di $F = 100$ il numero da cui ricavare i due quadrati incogniti e siano $R = 4$ e $S = 3$. Il triangolo rettangolo determinato da R ed S ha ipotenusa 25, base 7 e perpendicolare 24, perciò $25 : 7 = 100 : 28$ e $25 : 24 = 100 : 96$. Dunque $100^2 = 28^2 + 96^2$.

[Diofanto e Bombelli sviluppano ed enunciano lo zetetico nel modo seguente:⁵⁶

- Diofanto, *II*, 8: *Dividere un quadrato dato in due quadrati*.⁵⁷

Sia 16 il quadrato assegnato e siano x^2 , $16 - x^2$ i due quadrati incogniti. Si consideri un quadrato della forma $(mx - 4)^2$, dove m è un intero, mentre 4 corrisponde alla radice quadrata di 16. Posto per esempio $m = 2$ e uguagliato $(2x - 4)^2$ a $16 - x^2$, si ottiene

$$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2,$$

da cui segue $x = \frac{16}{5}$. I due quadrati cercati dunque sono $\frac{256}{25}$ e $\frac{144}{25}$.

- Bombelli, *III*, 61: *Dividasi 25, numero quadrato, in due numeri quadrati*. Siano x^2 e $25 - x^2$ i due numeri quadrati richiesti e sia $5 - 3x$ la radice di $25 - x^2$. L'equazione risolvente risulta

$$25 - x^2 = (5 - 3x)^2.$$

ZETETICO II

Determinare due quadrati che siano uguali ad altri due quadrati.

⁵⁶Vedi [1] e [13].

⁵⁷È proprio in questa proposizione, che Fermat riporta la sua più celebre nota, nella quale enuncia l'*ultimo teorema di Fermat*. Egli afferma:

«Non è, invece, possibile dividere un cubo in due cubi, o un biquadrato in due biquadrati, nè, in generale, dividere alcun'altra potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado: della qual cosa ho scoperto una dimostrazione veramente mirabile, che non può essere contenuta nella ristrettezza del margine.» Vedi p. 2 di [5].

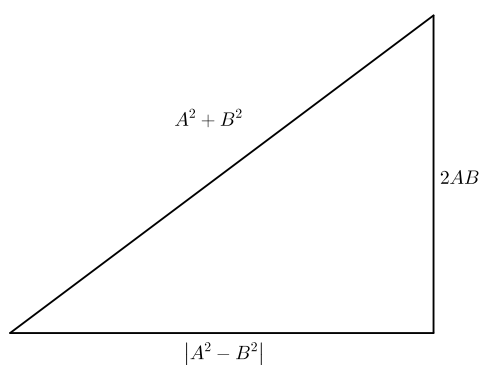
Siano X^2 e Y^2 i due numeri richiesti e B^2 e D^2 i due quadrati a cui essi sono uguali, allora

$$X^2 + Y^2 = B^2 + D^2. \quad (3.57)$$

Per determinare i due numeri quadrati richiesti occorre richiamare due proposizioni delle Notæ Priores:

Proposizione XLV: determinare un triangolo rettangolo a partire da due numeri assegnati.

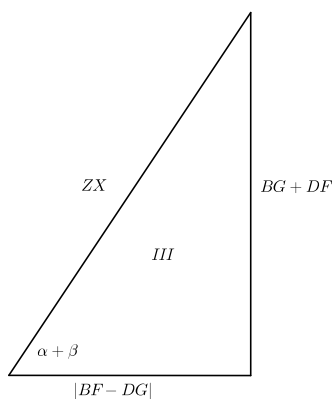
Considerati i due numeri A e B , il triangolo rettangolo da essi individuato è il seguente:



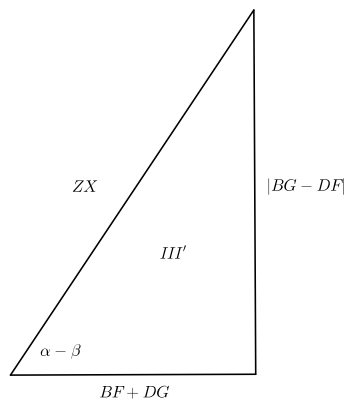
Proposizione XLVI: Dati due triangoli rettangoli costruirne un terzo.

Considerato il triangolo rettangolo di ipotenusa Z , base D e perpendicolare B e quello di ipotenusa X , base G e perpendicolare F , si possono individuare due triangoli rettangoli, uno mediante il processo della sineresi, l'altro grazie a quello della dieresi:

Synaeresis



Diaeresis



Il metodo proposto da Diofanto per risolvere lo zetetico è il seguente:

[Secondo il commentario di Massimo Planude⁵⁸, dalla (3.57) si ricava

$$X^2 - B^2 = D^2 - Y^2,$$

ovvero

$$(D + Y) : (X - B) = (X + B) : (D - Y).$$

Posto $\frac{D+Y}{X-B} = m$ e $A = X - B$, si ha

$$X = A + B \quad \text{e} \quad Y = mA - D.$$

In particolare si ponga $m = \frac{S}{R}$ con $R, S \in \mathbb{Q}^+$.]n.c.

Siano $X = A + B$ e $Y = \left| \frac{SA}{R} - D \right|$ i due numeri richiesti, che soddisfano le condizioni iniziali, cioè tali che

$$(A + B)^2 + \left(\frac{SA}{R} - D \right)^2 = B^2 + D^2,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{|2SRD - 2R^2B|}{S^2 + R^2}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X = A + B &= \frac{|2SRD + BS^2 - R^2B|}{S^2 + R^2} \\ Y = \left| \frac{SA}{R} - D \right| &= \frac{|S^2D - 2SRB - DR^2|}{S^2 + R^2}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Se invece si fosse posto $X = |A - B|$ e $Y = \left| \frac{SA}{R} - D \right|$, sostituendo nella (3.57), si avrebbe avuto

$$A = \frac{2RSD + 2R^2B}{S^2 + R^2}$$

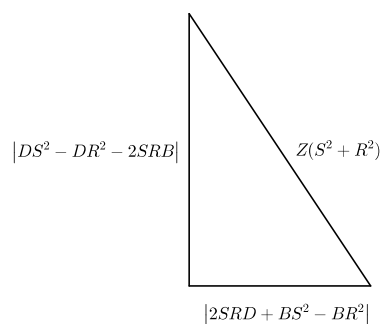
e conseguentemente

$$\begin{aligned} X = |A - B| &= \frac{|2SRD - BS^2 + R^2B|}{S^2 + R^2} \\ Y = \left| \frac{SA}{R} - D \right| &= \frac{|S^2D + 2SRB - DR^2|}{S^2 + R^2}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

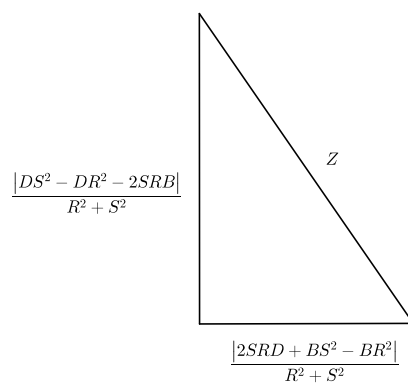
Questi stessi risultati, si possono ricavare utilizzando le proposizioni delle Notæ Priores, ricordate inizialmente.

Infatti noti i numeri B e D tali che $Z^2 = B^2 + D^2$, si può considerare il triangolo rettangolo (*I*) di ipotenusa Z , base B e perpendicolare D . Inoltre presi due numeri razionali S e R , applicando la *Proposizione XLV*, è possibile costruire un secondo triangolo rettangolo (*II*), di ipotenusa $R^2 + S^2$, base $|S^2 - R^2|$ e perpendicolare $2RS$. Ora applicando la *Proposizione XLVI*, in particolare mediante la diresi, si individua un terzo triangolo rettangolo

⁵⁸Vedi pp.23-24 di [3].

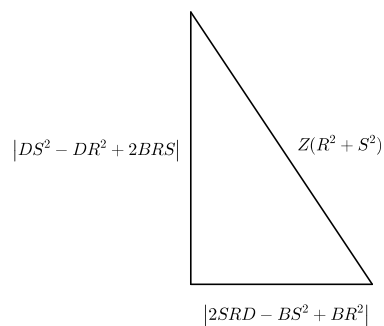


Esso risulta simile al triangolo rettangolo che si ottiene dividendo entrambi i lati per $S^2 + R^2$:

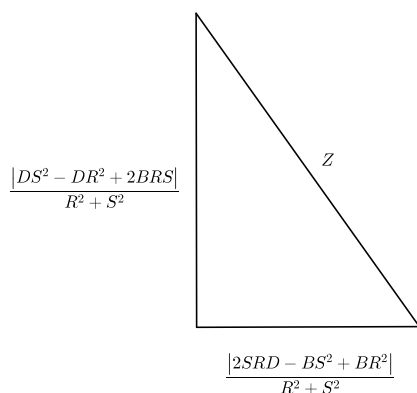


In questo modo l'ipotenusa Z è comune al primo e all'ultimo triangolo, perciò i due numeri cercati X e Y che soddisfano (3.57), corrispondono esattamente alle soluzioni (3.58).

Invece applicando la sineresi ai triangoli (I) e (II), si individua il seguente triangolo



che risulta simile al triangolo rettangolo che si ottiene dividendo i lati per $S^2 + R^2$



In questo caso i due cateti dell'ultimo triangolo corrispondono alle soluzioni (3.59).

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 15$, $D = 10$, quindi $Z = \sqrt{325}$. Posti inoltre $S = 2$ e $R = 1$, il triangolo rettangolo numerico da essi individuato è 5, 3, 4, da cui si ricava, applicando la (3.58) e la (3.59), che i due numeri cercati sono 18 e 1, oppure 17 e 6.

[Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano lo zetetico nel modo seguente:⁵⁹

- Diofanto, *II*, 9: *Scomporre un numero dato, che è la somma di due quadrati, in altri due quadrati.*

Si consideri il numero $13 = 2^2 + 3^2$. Poichè le radici dei due quadrati sono 2 e 3, siano $(x + 2)^2$ e $(mx - 3)^2$, con m intero, i due quadrati da determinare. Pertanto

$$\begin{aligned}(x^2 + 4x + 4) + (4x^2 + 9 - 12x) &= 13 \\ 5x^2 + 13 - 8x &= 13\end{aligned}$$

da cui segue $x = \frac{8}{5}$. I due quadrati richiesti sono $\frac{324}{25}$ e $\frac{1}{25}$.

- Bombelli, *III*, 62: *È 52 divisibile in due numeri quadrati, cioè in 36 e 16. Hor lo voglio ridividere in due altri numeri quadrati che non siano li medesimi: si domanda quali saranno.*

Siano $4 + x$ e $2x - 6$ i due quadrati incogniti, allora l'equazione risolvente risulta

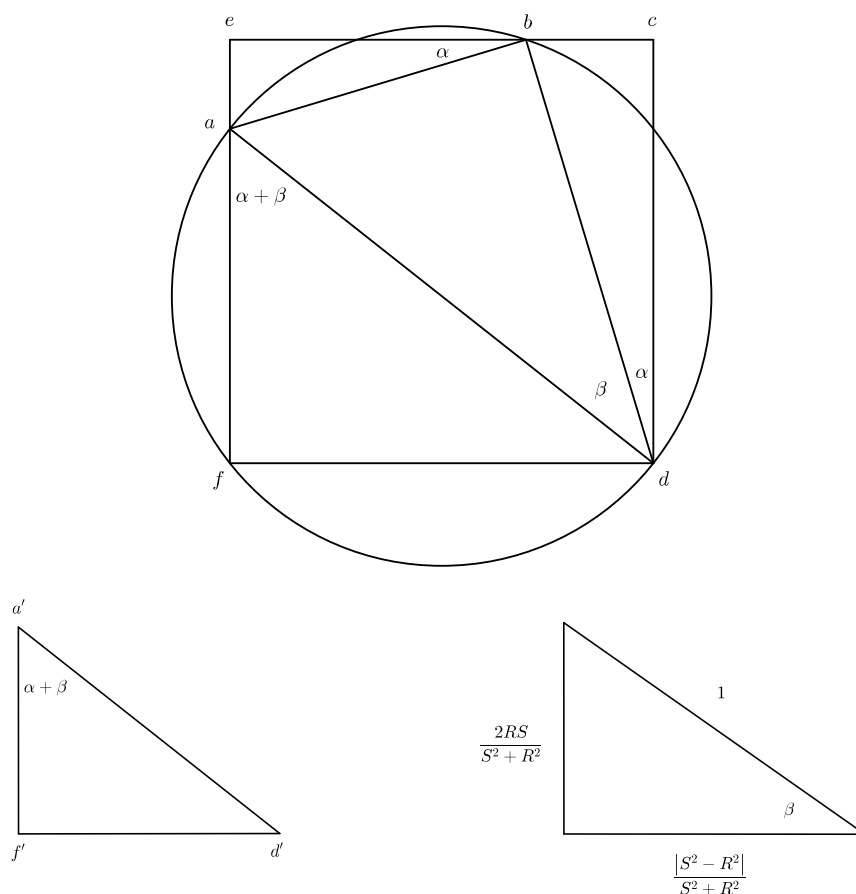
$$\begin{aligned}(4 + x)^2 + (2x - 6)^2 &= 52 \\ 5x^2 + 52 - 16x &= 52\end{aligned}$$

da cui segue $x = \frac{16}{5}$. I due quadrati ricercati sono $\frac{1296}{25}$ e $\frac{4}{25}$.

⁵⁹Vedi [1] e [13].

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA
*Commento di Vaulézard*⁶⁰

Vaulézard propone la seguente costruzione geometrica per la sineresi e quindi per la soluzione della (3.57):



Da un punto di vista strettamente geometrico ed euclideo si ha che:

Il triangolo aeb è simile al triangolo bcd, inoltre

$$a'f' = db \cdot af = db(dc - ae) = db \cdot dc - db \cdot ae = db \cdot dc - bc \cdot ba \quad (3.60)$$

$$f'd' = db \cdot fd = db(bc + be) = db \cdot bc + db \cdot be = db \cdot bc + ba \cdot dc \quad (3.61)$$

L'uguaglianza (3.60) deriva dal fatto che

$$af = ef - ae = dc - ae,$$

⁶⁰In [17] pp. 131-134.

che, moltiplicando entrambi i membri per db , risulta equivalente a

$$db \cdot af = db \cdot dc - db \cdot ae$$

e dal fatto che i triangoli aeb e bcd sono simili, cioè sono tali che

$$cb : ae = db : ba,$$

da cui segue

$$db \cdot af = db \cdot dc - cb \cdot ba.$$

Ora in relazione alla simbologia adottata nello zetetico se si pone

$$bc = B \text{ e } dc = D,$$

$$db = k \frac{|S^2 - R^2|}{S^2 + R^2},$$

$$ab = k \frac{2RS}{S^2 + R^2},$$

$$ad = k,$$

si ha che il triangolo bcd è assegnato, mentre il triangolo abd risulta simile al triangolo rettangolo individuato da R ed S , applicando la *Proposizione LXV* delle *Notæ Priores*, con rapporto di similitudine k . Quest'ultimo può essere ricavato osservando che $db = \sqrt{B^2 + D^2}$, perciò

$$k = \frac{S^2 + R^2}{|S^2 - R^2|} \sqrt{B^2 + D^2}.$$

Invece ricordando che $ae = \frac{bc \cdot ab}{db}$ e sostituendo si ottiene che

$$ae = \frac{2RBS}{|S^2 - R^2|}.$$

Dunque a sua volta il triangolo afd risulta simile al triangolo $a'f'd'$, ottenuto per sineresi dai triangoli bcd e abd , con rapporto di similitudine bd . Pertanto si può concludere che

$$a'f' = db \cdot af = |db \cdot dc - db \cdot ae| = |db \cdot dc - bc \cdot ba|$$

e in particolare sostituendo si ottiene

$$a'f' = \frac{kD|S^2 - R^2|}{S^2 + R^2} - \frac{kB2RS}{S^2 + R^2} = k \frac{|S^2D - 2SRB - R^2D|}{S^2 + R^2} = kY.$$

Allo stesso modo si ottiene dalla (3.61) che $f'd' = kX$.]n.c.

ZETETICO III

Nuovamente, determinare due quadrati che siano uguali ad altri due quadrati.

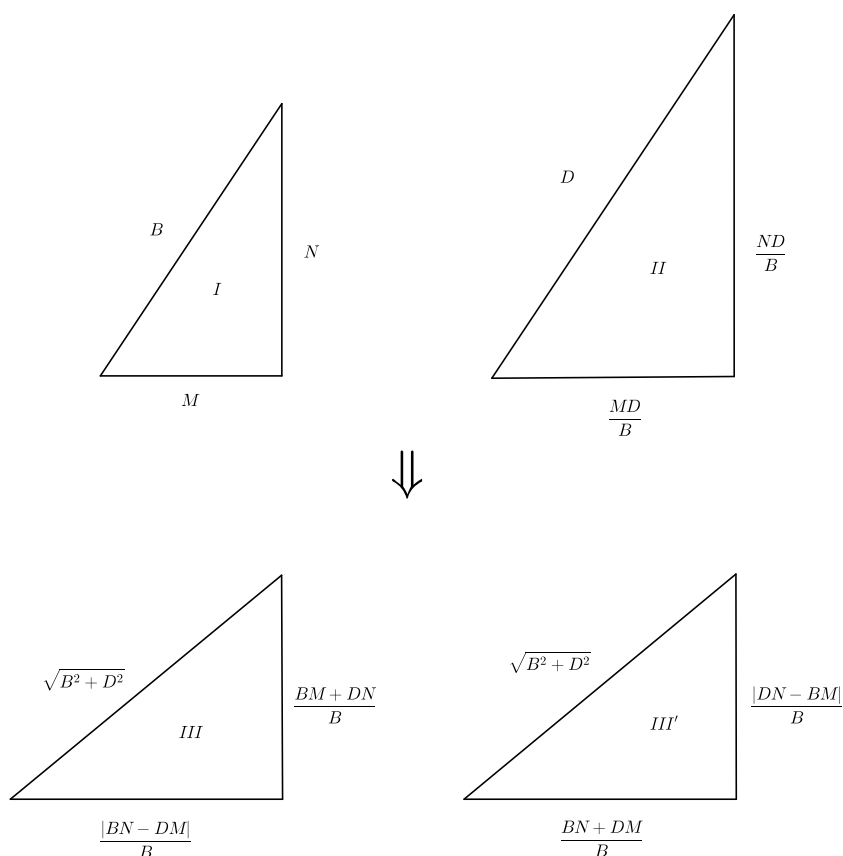
Siano X^2 e Y^2 i due numeri richiesti e B^2 e D^2 i due quadrati a cui essi sono uguali, allora

$$X^2 + Y^2 = B^2 + D^2. \quad (3.62)$$

Si costruiscano due triangoli rettangoli simili, uno di ipotenusa B e l'altro di ipotenusa D , poi si determini, a partire da questi, un terzo triangolo rettangolo di ipotenusa $\sqrt{B^2 + D^2}$. Inoltre, sotto queste condizioni, i quadrati B^2 e D^2 corrispondono alla somma dei quadrati dei rispettivi cateti.

Questo problema è già stato provato ed affrontato nelle Notæ Priores: [

Proposizione XLVII : dati due triangoli rettangoli simili, determinare un terzo triangolo rettangolo tale che il quadrato della sua ipotenusa sia uguale alla somma del quadrato dell'ipotenusa del primo e del quadrato dell'ipotenusa del secondo.



]n.c.

In questo caso, il metodo risolutivo adottato risulta più semplice e vicino a quello impiegato da Diofanto.

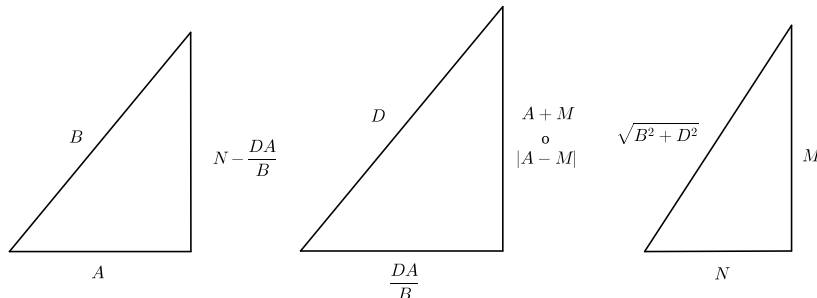
[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 10$, $D = 15$. I cateti del primo triangolo rettangolo di ipotenusa B , siano 8 e 6, quelli del secondo triangolo di ipotenusa D , invece valgano 12 e 9. Quindi i cateti del terzo triangolo rettangolo, individuato dai due precedenti, risultano essere 18 e 1, oppure 6 e 17. Infatti $18^2 + 1^2 = 10^2$ e $6^2 + 17^2 = 15^2$.

ZETETICO IV

Determinare due triangoli rettangoli simili, essendo note le loro ipotenuse e costruire da essi un terzo triangolo rettangolo, in modo tale che la sua base sia la somma del perpendicolare del primo e della base del secondo. Inoltre è necessario che la base del terzo triangolo superi l'ipotenusa del primo.

Siano B e D le ipotenuse assegnate dei due triangoli da determinare, sia N la base del terzo triangolo, composta dal perpendicolare del primo e dalla base del secondo e sia M il relativo perpendicolare, tale che $M^2 = B^2 + D^2 - N^2$. Sia A la base del primo triangolo e $\frac{DA}{B}$ quella del secondo, sia $N - \frac{DA}{B}$ il perpendicolare del primo e $A + M$ o $|A - M|$ quello del secondo, dove M corrisponde alla differenza fra la base del primo triangolo e il perpendicolare del secondo.



In particolare, se il perpendicolare del secondo triangolo rettangolo è uguale ad $A + M$, essendo i primi due triangoli simili, risulta che

$$B : D = \left(N - \frac{DA}{B} \right) : (A + M),$$

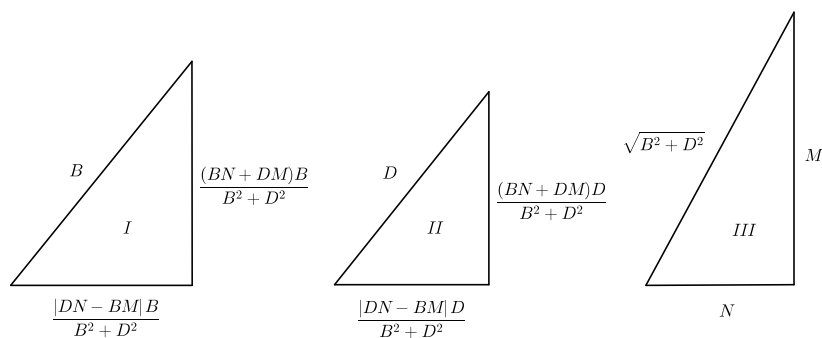
da cui si ricava che la base del primo triangolo rettangolo corrisponde a

$$A = \frac{|DN - BM| B}{B^2 + D^2},$$

ovvero

$$(B^2 + D^2) : |DN - BM| = B : A.$$

Pertanto i tre triangoli rettangoli sono i seguenti:



Se invece il perpendicolare del secondo triangolo corrisponde ad $|A - M|$, essendo i primi due triangoli simili, si ha che

$$B : D = \left(N - \frac{DA}{B} \right) : |A - M|,$$

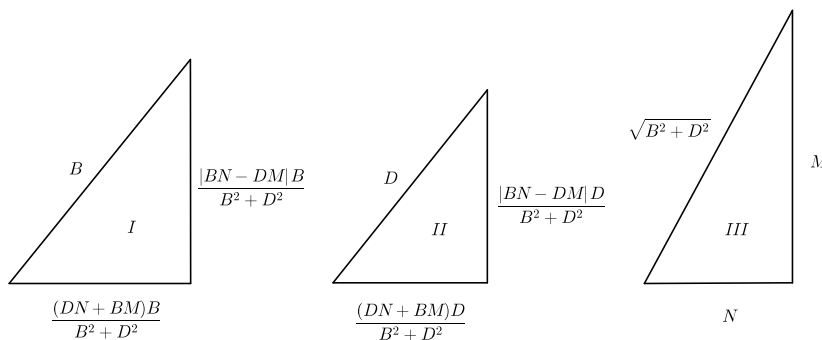
da cui si ricava che la base del primo triangolo rettangolo corrisponde a

$$A = \frac{(DN + BM)B}{B^2 + D^2},$$

ovvero

$$(B^2 + D^2) : (DN + BM) = B : A.$$

Pertanto i tre triangoli rettangoli sono i seguenti:



Inoltre è importante osservare che nel primo caso $DN > BM$, mentre nel secondo $BN > DM$.

[Indicato con Y il perpendicolare del primo triangolo rettangolo e indicati con Z e T la base e il perpendicolare del secondo, per determinare completamente i tre triangoli rettangoli richiesti, occorre semplicemente applicare la *Proposizione XLVII* delle *Notæ Piores*, ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} M = \frac{BA + DY}{B} \\ N = \frac{|BY - DA|}{B} \end{cases}.$$

Dal quest'ultimo si ricava infine che

$$A = \frac{|DN - BM|B}{B^2 + D^2} \quad \text{e} \quad Y = \frac{B(BN + DM)}{B^2 + D^2},$$

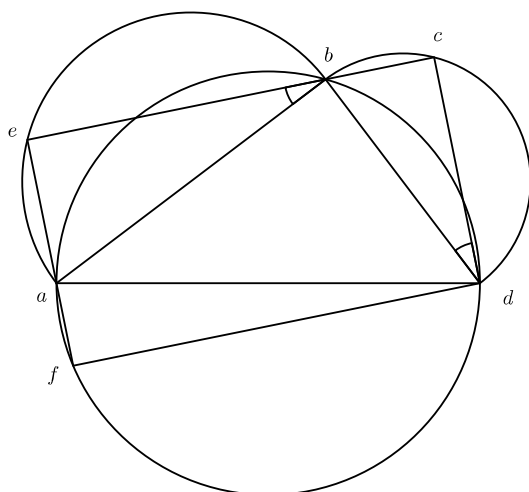
quindi

$$Z = \frac{DA}{B} = \frac{D|DN - BM|}{B^2 + D^2} \quad \text{e} \quad T = \frac{DY}{B} = \frac{D(BN + DM)}{B^2 + D^2}.$$

RETICA ESEGETICA GEOMETRICA

*Commento di Vaulézard*⁶¹

Vaulézard propone la seguente interpretazione geometrica dello zetetico:



che soddisfa le seguenti condizioni

$$\begin{array}{lll} ef // cd & ef = cd & ec = eb + bc \\ ec // fd & ec = fd & af = ef - ea \end{array}.$$

Da un punto di vista strettamente geometrico ed euclideo si ha che

il triangolo bcd è simile al triangolo bea, inoltre i triangoli (I), (II) e (III) corrispondono rispettivamente ai triangoli bae, bdc e dfa.

Infatti in relazione alla simbologia adottata nello zetetico, se si pone

$$\begin{array}{ll} ba = B & df = M \\ bd = D & af = N \end{array},$$

risulta che

⁶¹In [17] pp. 144-146.

$$\begin{array}{ll} ea = Y & dc = Z \\ eb = A & bc = T \end{array} ,$$

pertanto i triangoli bae , bdc e dfa corrispondono esattamente ai triangoli (I), (II) e (III).

ZETETICO V

Determinare due quadrati tali che la loro somma sia uguale a quella di altri due quadrati noti e tali che uno di essi sia compreso fra due valori assegnati.

Siano B^2 e D^2 i due quadrati noti, si vogliono determinare altri due quadrati U^2 e V^2 tali che

$$\begin{cases} U^2 + V^2 = B^2 + D^2 \\ N^2 < U^2 < S^2 \end{cases} .$$

Si considerino i seguenti triangoli rettangoli numerici

$$U^2 + V^2 = Z^2 \quad \text{e} \quad B^2 + D^2 = Z^2$$

con

$$N^2 < U^2 < S^2 \quad \text{e} \quad G^2 < B^2 < F^2. \quad (3.63)$$

Successivamente ponendo $M^2 = Z^2 - N^2$ e $R^2 = Z^2 - S^2$, risulta che M ed R sono tali che

$$Z^2 = M^2 + N^2 \quad \text{e} \quad Z^2 = R^2 + S^2.$$

Applicando lo *Zetetico IV* a questi ultimi, si ottiene che

$$G = \frac{B|DN - BM|}{B^2 + D^2} \quad \text{ed} \quad F = \frac{B|DS - BR|}{B^2 + D^2}, \quad (3.64)$$

poi dalla condizione (3.63) segue che

$$|G - B| > 0 \quad \text{e} \quad |F - B| > 0.$$

Quindi dalle (3.64) si può dedurre che

$$\begin{aligned} \frac{|G - B|}{B^2 - G^2} &= \frac{|Z^2 - (DN - BM)|}{BN + DM} = \frac{X|Z^2 - (DN - BM)|}{XBN + XDM} \\ \frac{|F - B|}{B^2 - F^2} &= \frac{|Z^2 - (DS - BR)|}{BS + DR} = \frac{X|Z^2 - (DS - BR)|}{XBS + XDR} \end{aligned}$$

dove X è un valore arbitrario.

Ora è possibile scegliere un numero T , tale che

$$\frac{XBN + XDM}{|Z^2 - (DN - BM)|} < T < \frac{XBS + XDR}{|Z^2 - (DS - BR)|}. \quad (3.65)$$

Pertanto, una volta fissati i valori di X e T , è possibile costruire il triangolo rettangolo (I), di ipotenusa, base e perpendicolare

$$X^2 + T^2, \quad 2XT, \quad |X^2 - T^2|,$$

semplicemente applicando la *Proposizione XLV* delle Notæ Priores. Inoltre i triangoli (II) e (III), che si ottengono moltiplicando (I) rispettivamente per $\frac{B}{X^2+T^2}$ e $\frac{D}{X^2+T^2}$, sono simili al triangolo rettangolo (I).

Triangolo rettangolo	(II)	(III)
Ipotenusa	B	D
Base	$\frac{2XTB}{X^2+T^2}$	$\frac{2XTD}{X^2+T^2}$
Perpendicolare	$\frac{B X^2-T^2 }{X^2+T^2}$	$\frac{D X^2-T^2 }{X^2+T^2}$

Quindi applicando lo *Zetetico IV* ai triangoli (II) e (III), si individua un triangolo rettangolo di ipotenusa Z , base U , uguale alla somma del perpendicolare di (II) e della base di (III)

$$U = \frac{B|X^2 - T^2| + 2XTD}{X^2 + T^2},$$

e perpendicolare V .

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Siano $B = 1$, $D = 3$, $N = \sqrt{2}$ e $S = \sqrt{3}$, allora

$$U^2 + V^2 = 1 + 9 = 10 \quad \text{con} \quad 2 < U^2 < 3.$$

Si ha che

$$Z = \sqrt{10}, \quad M = \sqrt{10-2} = \sqrt{8}, \quad R = \sqrt{10-3} = \sqrt{7}.$$

Posta $X = 1$, si ha

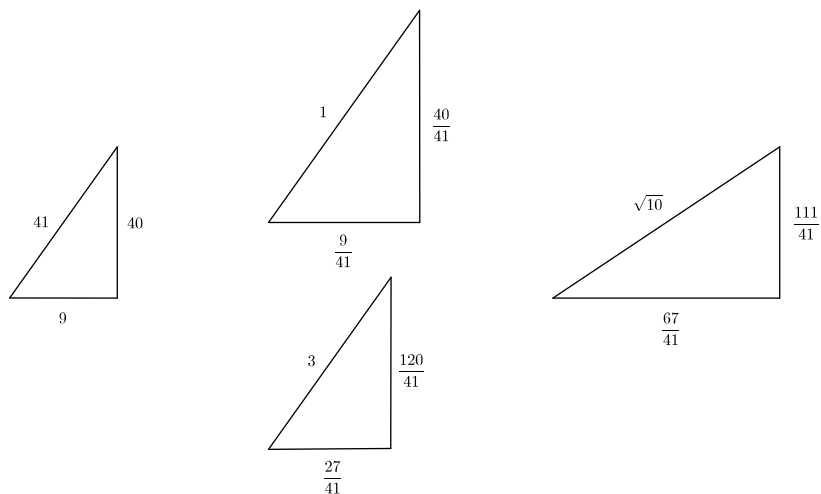
$$\frac{\sqrt{98}}{10 - \sqrt{2}} < T < \frac{\sqrt{63} + \sqrt{3}}{10 - \sqrt{27} + \sqrt{7}}.$$

Pertanto scelto, per esempio, $T = \frac{5}{4}$, le soluzioni sono

$$V = \frac{111}{41}, \quad U = \frac{67}{41},$$

in particolare $U^2 = \frac{4489}{1681}$ soddisfa la condizione posta inizialmente

$$2 < \frac{4489}{1681} < 3.$$



Ora siano $B = 2$, $D = 3$, $N = \sqrt{6}$ e $S = \sqrt{7}$, allora

$$U^2 + V^2 = 4 + 9 = 13 \quad \text{con} \quad 6 < U^2 < 7.$$

Si ha che

$$Z = \sqrt{13}, \quad M = \sqrt{13 - 6} = \sqrt{7}, \quad R = \sqrt{13 - 7} = \sqrt{6}.$$

Posta $X = 1$, si ha

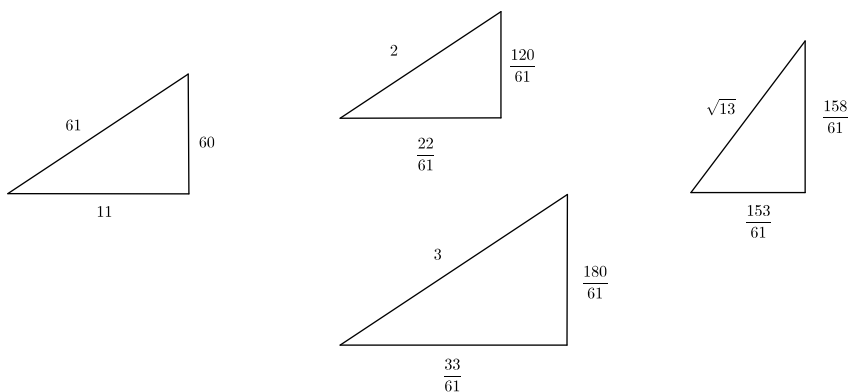
$$\frac{\sqrt{24} + \sqrt{63}}{13 + \sqrt{28} - \sqrt{54}} < T < \frac{\sqrt{28} + \sqrt{54}}{13 + \sqrt{54} - \sqrt{63}}.$$

Pertanto scelto, per esempio, $T = \frac{5}{6}$, le soluzioni sono

$$V = \frac{158}{61}, \quad U = \frac{153}{61},$$

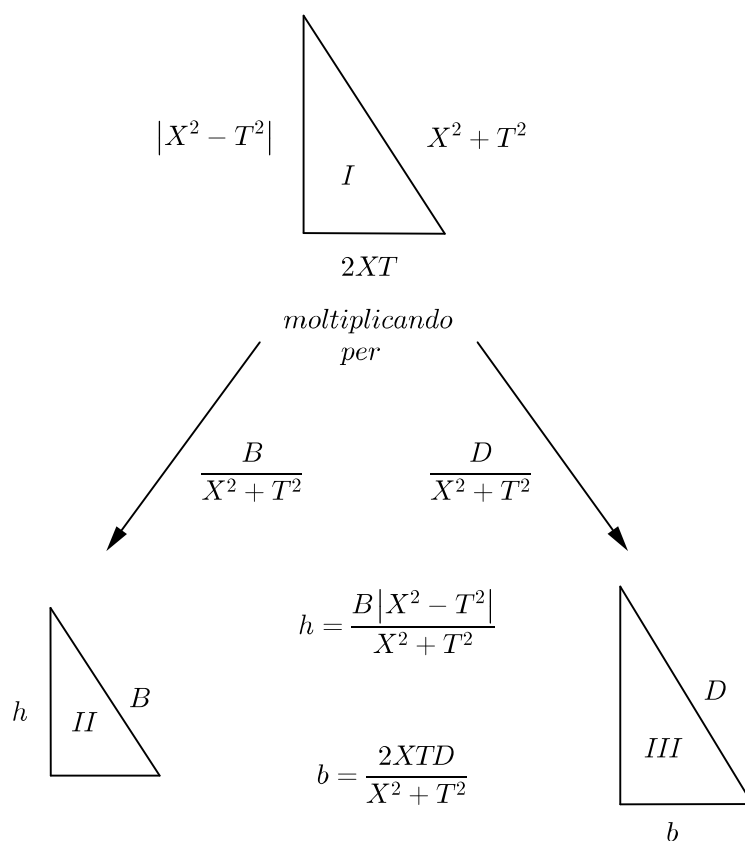
in particolare $U^2 = \frac{23409}{3721}$ soddisfa la condizione

$$6 < \frac{4489}{1681} < 7.$$

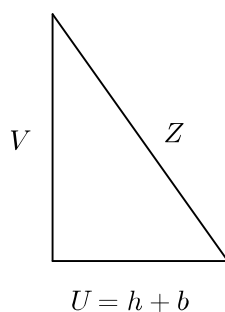


[Riassumendo:

X, T
Proposizione XLV



Zetetico IV



]n.c.

ZETETICO VI

Determinare due quadrati, la cui differenza è nota.

Sia B *piano* la differenza nota e corrisponda al quadrato della base di un triangolo rettangolo, del quale si vogliono conoscere i quadrati del perpendicolare e dell'ipotenusa. La base, inoltre, è il medio proporzionale fra la differenza e la somma del perpendicolare e dell'ipotenusa [si veda lo *zetetico III*, del terzo libro.]n.c. Pertanto se si considera la divisione di una qualunque lunghezza razionale, per B *piano*, ciò che risulta è ancora una lunghezza razionale. Quest'ultima corrisponde alla differenza del perpendicolare e dell'ipotenusa ed è certamente minore rispetto alla lunghezza divisa, che coincide invece con la loro somma. Perciò si possono ricavare i valori relativi al perpendicolare e all'ipotenusa.

Altrimenti se si indica con A^2 uno dei quadrati richiesti, per esempio il quadrato del perpendicolare, con D la differenza del perpendicolare e dell'ipotenusa e con $A + D$ l'ipotenusa stessa, si ha che

$$A^2 + B = (A + D)^2, \quad \text{con } B \text{ piano},$$

da cui segue

$$A = \frac{B - D^2}{2D}, \quad \text{con } B \text{ piano}.$$

Generalizzando

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, se il quadrato del primo cateto meno il quadrato della differenza del secondo cateto e dell'ipotenusa, viene diviso per due volte questa differenza, la lunghezza risultante corrisponde proprio al secondo cateto.

Altrimenti se si indica con E^2 uno dei quadrati richiesti, per esempio il quadrato dell'ipotenusa, con D la differenza del perpendicolare e dell'ipotenusa e con $E - D$ il perpendicolare stesso, si ha che

$$E^2 - B = (E - D)^2, \quad \text{con } B \text{ piano},$$

da cui segue

$$E = \frac{B + D^2}{2D}, \quad \text{con } B \text{ piano}.$$

Generalizzando

TEOREMA

In un triangolo rettangolo, se il quadrato di uno dei cateti più il quadrato della differenza dell'altro cateto e dell'ipotenusa, viene diviso per due volte questa differenza, la lunghezza risultante corrisponde proprio all'ipotenusa.

Inoltre,

se il quadrato di uno dei cateti, più il quadrato della somma dell'altro cateto e dell'ipotenusa, viene diviso per due volte questa somma, la lunghezza risultante corrisponde proprio all'ipotenusa.

Pertanto si ha che

come la somma dell'ipotenusa e del primo cateto sta alla loro differenza, così il quadrato della loro somma più o meno il quadrato del secondo cateto, sta al quadrato del secondo cateto più o meno il quadrato della differenza dell'ipotenusa e del primo cateto.

[Siano C_1 , C_2 e i rispettivamente i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

In base alla considerazione fatte precedentemente, si ha che

$$(i + C_1) : (i - C_1) = [(i + C_1)^2 + C_2^2] : [C_2^2 + (i - C_1)^2],$$

$$(i + C_1) : (i - C_1) = [(i + C_1)^2 - C_2^2] : [C_2^2 - (i - C_1)^2].$$

RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B piano = 240, $D = 6$, risulta $A = \frac{240-36}{12} = 17$ ed $E = \frac{240+36}{12} = 23$. In particolare la differenza fra il quadrato del lato 23 e quella del lato 17 è proprio 240:

$$529 - 289 = 240.$$

Inoltre se si considera la terna pitagorica 3, 4, 5, si può affermare che

$$(5 + 4) : (5 - 4) = (81 + 9) : (9 + 1) \implies 9 : 1 = 90 : 10,$$

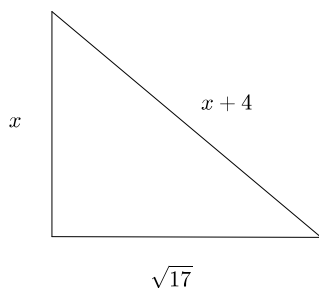
$$(5 + 4) : (5 - 4) = (81 - 9) : (9 - 1) \implies 9 : 1 = 72 : 8.$$

Aggiungere ad un piano dato un piccolo quadrato, in modo tale che la loro somma sia un quadrato.

Infatti se si considera il piano assegnato come uno dei cateti di un triangolo rettangolo, il quadrato della differenza dell'altro cateto e dell'ipotenusa o la loro somma, approssima bene il piano dato.

Sia 17 il piano dato e sia 4 la differenza. Dunque la divisione per 8 di $17 - 16$, corrisponde al perpendicolare $\frac{1}{8}$, perciò il quadrato dell'ipotenusa è $17 + \frac{1}{64}$, mentre l'ipotenusa stessa vale $4 + \frac{1}{8} = \frac{33}{8}$. Il quadrato della base quindi corrisponde esattamente a 17.

[Geometricamente il problema può essere rappresentato nel modo seguente:



Inoltre vale la relazione

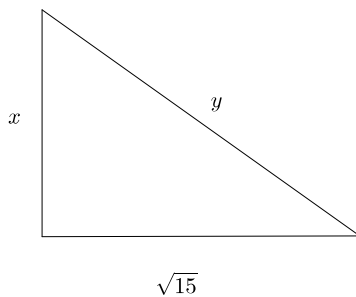
$$(x + 4)^2 - x^2 = 17,$$

da cui si ricava

$$x = \frac{17 - 16}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad (x + 4) = \frac{1}{8} + 4 = \frac{33}{8}. \quad]\text{n.c.}$$

Sia 15 il piano dato, sia 4 la somma. Dunque la divisione per 8 di $15 - 16$, corrisponde al perpendicolare $-\frac{1}{8}$, perciò il quadrato dell'ipotenusa è $15 + \frac{1}{64}$, mentre l'ipotenusa stessa vale $3 + \frac{7}{8} = \frac{31}{8}$. Il quadrato della base quindi corrisponde esattamente a 15.

[Geometricamente ed aritmeticamente il problema può essere rappresentato dalla seguente immagine



e dal sistema

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ y^2 - x^2 = 15 \end{cases}.$$

Pertanto

$$\begin{cases} y = 4 - x \\ (4 - x)^2 - x^2 = 15, \end{cases}$$

da cui si ricava

$$x = \frac{16 - 15}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad y = (4 - x) = 4 - \frac{1}{8} = 3 + \frac{7}{8} = \frac{31}{8}.$$

Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano lo zetetico nel modo seguente:⁶²

- Diofanto, *II*, 10: *Trovare due numeri quadrati, essendo nota la loro differenza*

Posta la differenza uguale a 60, sia x uno dei numeri richiesti, l'altro sia x più un valore minore di 60, per esempio sia $(x + 3)$. Pertanto

$$(x + 3)^2 - x^2 = 60,$$

da cui si ricava $x = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$, quindi i due quadrati cercati sono $72 + \frac{1}{4}$ e $132 + \frac{1}{4}$.

- Bombelli, *III*, 63: *Trovansi due numeri quadrati che l'uno sia 96 più dell'altro*

Siano x e $x + 8$ i due numeri incogniti, l'equazione risolvente è

$$(x + 8)^2 = 96x^2. \quad]n.c.$$

ZETETICO VII

Determinare un numero piano, che aggiunto a due numeri piani assegnati restituisca sempre un quadrato.

Siano B piano e D piano i due numeri assegnati. Si vuole determinare un piano che aggiunto a B e a D restituisca, in entrambi i casi, un quadrato.

Sia A piano il numero cercato, allora $(B+A)$ e $(D+A)$ sono uguali a due quadrati e Diofanto definisce queste uguaglianze *equazione doppia*. In particolare sia $B > D$, quindi poichè il quadrato della somma di due lati supera il quadrato della loro differenza di quattro volte il prodotto dei due lati, sia $(B - D)$ il quadruplo del prodotto dei lati, in modo tale che $(B + A)$ sia il quadrato della loro somma, $(D + A)$ il quadrato della loro differenza e in modo che A piano corrisponda al quadrato della somma dei due lati diminuita di B piano e al quadrato della loro differenza diminuita di D piano. Così il prodotto dei due lati corrisponde a

$$\frac{B - D}{4} \quad \text{con } B \text{ piano, } D \text{ piano.}$$

Posto uno dei due lati uguale a G tale che

$$\sqrt{B} - \sqrt{D} < G < \sqrt{B} + \sqrt{D} \quad \text{con } B \text{ piano, } D \text{ piano,}$$

l'altro lato corrisponde a

$$\frac{B - D}{4G} \quad \text{con } B \text{ piano, } D \text{ piano.}$$

⁶²Vedi [1] e [13].

Perciò il lato relativo al quadrato maggiore è

$$\frac{B - D + 4G^2}{4G},$$

mentre quello corrispondente al quadrato minore

$$\frac{|B - D - 4G^2|}{4G}.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B piano = 192 e D piano = 128, la loro differenza è 64; essa coincide con il quadruplo del prodotto dei due lati. Il prodotto dei lati quindi corrisponde a 16, mentre i due lati sono 1 e 16, la cui somma e differenza valgono rispettivamente 17 e 15. Perciò il quadrato della somma dei lati, meno 192 corrisponde a 97, che sommato a 128 restituisce esattamente il quadrato della differenza dei lati 225. Pertanto il problema è risolto.

Si può sviluppare lo zetetico anche nel modo seguente, considerando che ai due piani assegnati B e D va aggiunto uno stesso piano e che il risultato delle somme deve essere un quadrato. In particolare sia $(A^2 - B)$ il piano comune da aggiungere a B e a D . Pertanto

$$A^2 - B + B = A^2 \quad \text{con } B \text{ piano},$$

mentre, considerato il quadrato $(F - A)^2 = F^2 - 2FA + A^2$,

$$A^2 - B + D = (F - A)^2,$$

da cui si ricava

$$A = \frac{F^2 + B - D}{2F} \quad \text{con } B \text{ piano}, D \text{ piano}.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B piano = 18, D piano = 9 e $F = 9$, allora $A = 5$. Dunque, il piano comune da aggiungere a B e D è uguale a $25 - 18 = 7$ e conseguentemente il piano risultante dalla somma del piano comune e di D corrisponde a $7 + 9 = 16$. La somma di 7 con B e D restituisce esattamente i due quadrati 25 e 16.

[Diofanto e Bombelli affrontano lo zetetico nel modo seguente:⁶³

- Diofanto, *II*, 11: *Aggiungere uno stesso numero incognito a due numeri assegnati, in modo da ottenere in entrambi i casi un quadrato.*

⁶³Vedi [1] e [13].

1. Siano 2 e 3 i numeri assegnati e sia x il numero incognito richiesto, allora $(x + 2)$ e $(x + 3)$ devono essere due quadrati

$$\begin{cases} x + 3 = v^2 \\ x + 2 = u^2 \end{cases} .$$

Queste uguaglianze costituiscono un'equazione doppia, che viene risolta considerando la differenza fra le due uguaglianze e quindi affrontando un'equazione in due incognite, scomponibile in due fattori, il cui prodotto vale 1:

$$v^2 - u^2 = 1 \implies (v - u)(v + u) = 1.$$

Siano, per esempio, $(v - u) = \frac{1}{4}$ e $(v + u) = 4$, allora

$$\begin{cases} v - u = \frac{1}{4} \\ v + u = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} v = \frac{4 - \frac{1}{4}}{2} \\ u = \frac{4 + \frac{1}{4}}{2} \end{cases} .$$

Successivamente o

- (a) il quadrato della metà della differenza dei due fattori viene uguagliato all'espressione dell'equazione doppia minore:

$$\left(\frac{(v + u) - (v - u)}{2} \right)^2 = \left(\frac{2u}{2} \right)^2 = u^2 = x + 2,$$

- (b) oppure il quadrato della metà della somma dei due fattori viene uguagliato all'espressione dell'equazione doppia maggiore:

$$\left(\frac{(v + u) + (v - u)}{2} \right)^2 = \left(\frac{2v}{2} \right)^2 = v^2 = x + 3.$$

Caso (a): il quadrato della metà della differenza dei due fattori vale $\frac{225}{64}$, infatti

$$\left(\frac{4 - \frac{1}{4}}{2} \right)^2 = \left(\frac{15}{8} \right)^2 = \frac{225}{64}.$$

Pertanto $x + 2 = \frac{225}{64}$, da cui si ricava $x = \frac{97}{64}$.

I quadrati sono $\frac{225}{64}$ e $\frac{289}{64}$, risultanti da

$$\frac{97}{64} + 2 = \frac{225}{64} \quad \text{e} \quad \frac{97}{64} + 3 = \frac{289}{64}.$$

Caso (b): il quadrato della metà della somma dei due fattori vale $\frac{289}{64}$, infatti

$$\left(\frac{4 + \frac{1}{4}}{2} \right)^2 = \left(\frac{17}{8} \right)^2 = \frac{289}{64}.$$

Pertanto $x + 3 = \frac{289}{64}$, da cui si giunge allo stesso risultato del caso precedente.

2. Invece se si preferisce evitare l'utilizzo della doppia equazione, occorre determinare un numero che sommato a 2 e a 3 corrisponde in entrambi i casi ad un quadrato. Si consideri il numero $x^2 - 2$, tale che $(x^2 - 2) + 2 = x^2$ e dal momento che questo stesso numero sommato a 3 deve essere ancora un quadrato, sia

$$x^2 - 2 + 3 = x^2 + 1 = (x - 4)^2,$$

dove il termine noto del secondo membro, in tal caso 4, deve essere scelto in modo che $x^2 > 2$.

Pertanto $x = \frac{15}{8}$, perciò il numero cercato è $\frac{97}{64}$.

- Bombelli, *III*, 66: *Trovansi un numero che aggiunto a 4 e a 6 faccia due numeri quadrati.*

Sia $(x^2 - 4)$ il numero incognito, tale che $(x^2 - 4) + 4 = x^2$ e $(x^2 - 4) + 6 = x^2 + 2$ siano due quadrati. Pertanto l'equazione risolvente è

$$x^2 + 2 = (x - 5)^2,$$

dove il termine noto del secondo membro, in tal caso 5, viene scelto arbitrariamente, purchè sia maggiore di 4.]n.c.

ZETETICO VIII

Determinare un numero piano, che sottratto a due numeri piani assegnati restituisca sempre un quadrato.

Siano B piano e D piano i due numeri assegnati. Si vuole determinare un piano che sottratto a B e a D restituisca, in entrambi i casi, un quadrato.

Sia $(B - A^2)$ il piano comune da sottrarre a B e a D . Pertanto

$$B - A^2 - B = A^2 \quad \text{con } B \text{ piano,}$$

mentre, considerato il quadrato $(A - F)^2 = A^2 - 2AF + F^2$,

$$B - A^2 + D = (A - F)^2,$$

da cui si ricava

$$A = \frac{F^2 + B - D}{2F} \quad \text{con } B \text{ piano, } D \text{ piano.}$$

La scelta di F deve essere vincolata al fatto che il quadrato della lunghezza A appena ottenuta debba essere minore di B e di D . Per questo motivo, si può anche utilizzare quella che Diofanto chiama una *doppia equazione*. Sia A piano il numero cercato, allora $(B - A)$ e $(D - A)$ devono essere uguali a due quadrati. Sia

$B > D$ e sia $(B - D)$ il quadruplo del prodotto di due lati, $(B - A)$ il quadrato della loro somma, $(D - A)$ il quadrato della loro differenza. In questo modo A *piano* corrisponde all'eccesso con cui B *piano* supera il quadrato della somma dei due lati e quello con cui D *piano* supera il quadrato della loro differenza. Posto uno dei due lati uguale a G tale che

$$\sqrt{B} - \sqrt{D} < G < \sqrt{B} + \sqrt{D} \quad \text{con } B \text{ } \textit{piano}, D \text{ } \textit{piano},$$

l'altro lato corrisponde a

$$\frac{B - D}{4G} \quad \text{con } B \text{ } \textit{piano}, D \text{ } \textit{piano}.$$

Inoltre il quadrato della somma dei due lati meno B o il quadrato della differenza dei lati meno D ha sempre, risultano uguali ad A .

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B *piano* = 44, D *piano* = 36 e uno dei lati $G = 1$, allora il lato rimanente è uguale 2, la somma dei lati 3, la loro differenza 1 e i rispettivi quadrati sono 9 e 1. Il piano cercato è 35, infatti $44 - 35 = 9$ e $36 - 35 = 1$.

[Diofanto nella quæstio 12 del secondo libro dell'Aritmetica enuncia e sviluppa lo zetetico nel modo seguente:⁶⁴

Sottrarre lo stesso numero incognito da due numeri assegnati, in modo da ottenere in entrambi i casi un quadrato.

Siano 9 e 21 i due numeri assegnati e sia $(9 - x^2)$ il numero incognito. Esso è tale che $9 - (9 - x^2) = x^2$ e $21 - (9 - x^2) = 12 + x^2$ siano due quadrati, pertanto

$$12 + x^2 = (x - 4)^2,$$

dove il termine noto del secondo membro, in tal caso 4, viene scelto arbitrariamente, purchè sia maggiore di 12. In conclusione $x = \frac{4}{8}$, perciò il numero richiesto è $9 - \frac{16}{64} = \frac{576}{64}$.]n.c.

ZETETICO IX

Determinare un numero piano tale che quando gli vengono sottratti due numeri piani fissati, il resto corrisponda in entrambi i casi a un quadrato.

Siano B *piano* e D *piano* i due numeri assegnati. Si vuole determinare un piano tale che il resto della sottrazione di quest'ultimo e di B o di D sia sempre un quadrato. Sia A *piano* il numero cercato, allora $(A - B)$ e $(A - D)$ devono essere due quadrati; Diofanto definisce queste uguaglianze *equazione doppia*. In particolare sia $B > D$, il quadrato maggiore $(A - D)$ corrisponde al quadrato

⁶⁴Vedi [13].

della somma di due lati, quello minore ($A - B$) corrisponde al quadrato della loro differenza e ($B - D$) equivale a quattro volte il loro prodotto. Posto uno dei due lati uguale a G , l'altro è uguale a

$$\frac{B - D}{4G} \quad \text{con } B \text{ piano, } D \text{ piano}$$

perciò il quadrato della loro somma più D piano oppure il quadrato della loro differenza più B piano corrisponde ad A piano. Invece se a quest'ultimo viene sottratto D piano o B piano, ciò che rimane è il quadrato della somma dei lati oppure il quadrato della loro differenza.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia B piano = 56, D piano = 48 e uno dei due lati $G = 1$, allora il lato rimanente corrisponde a 2, la somma dei lati a 3, la loro differenza a 1. Per questo A piano è uguale a 57, infatti $57 - 48 = 9$ e $57 - 56 = 1$.

[Diofanto e Bombelli enunciano e sviluppano lo zetetico nel modo seguente:⁶⁵

- Diofanto, *II*, 13: *Dallo stesso numero incognito sottrarre due numeri assegnati, in modo che i resti ottenuti siano dei quadrati.*

Siano 6 e 7 due numeri assegnati.

1. Sia x il numero incognito, allora $(x-6)$ e $(x-7)$ devono essere entrambi dei quadrati. La loro differenza vale 1, che può essere il prodotto di 2 e $\frac{1}{2}$, quindi applicando il metodo risolutivo delle equazioni doppie, si ottiene che $(x-7) = \frac{9}{16}$ e che $x = \frac{121}{16}$.
2. Se si preferisce evitare l'utilizzo dell'equazione doppia, occorre determinare un numero che differisca dai numeri assegnati 6 e 7 di due quadrati. Quindi si consideri il numero (x^2+6) , tale che $(x^2+6)-6 = x^2$ e il numero $(x^2+6)-7 = x^2-1$, tale che

$$x^2 - 1 = (x - 2)^2,$$

dove il termine noto del secondo membro viene scelto arbitrariamente.

Pertanto $x = \frac{5}{4}$, perciò il numero cercato è $\frac{121}{16}$.

- Bombelli, *III*, 67: *Trovansi un numero che cavatone 20 e 30 li restanti siano numeri quadrati.*

Sia (x^2+20) il numero incognito, tale che $(x^2+20)-20 = x^2$ e $(x^2+20)-30 = x^2-10$ siano quadrati. Pertanto l'equazione risolvibile è

$$x^2 - 10 = (x - 4)^2,$$

⁶⁵Vedi [1] e [13].

dove il termine noto del secondo membro viene scelto arbitrariamente.
]n.c.

ZETETICO X

Determinare due lati, il cui prodotto risulta un piano, che sommato al quadrato dei due lati incogniti corrisponde ad un quadrato.

Siano B e A i due lati da determinare tali che $A^2 + BA + B^2$ sia un quadrato. In particolare sia

$$A^2 + BA + B^2 = (A - D)^2,$$

da cui si ricava

$$A = \frac{D^2 - B^2}{B + 2D}.$$

Per questo il primo lato sarà simile a $B^2 + 2BD$, mentre il secondo a $D^2 - B^2$. Pertanto

$$\begin{aligned} (B^2 + 2BD)^2 + (D^2 - B^2)^2 + (B^2 + 2BD)(D^2 - B^2) = \\ D^4 + B^4 + 3D^2B^2 + 2B^3D + 2DB^3 = \\ \sqrt{B^2 + D^2 + BD}. \end{aligned}$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $D = 2$, $B = 1$, allora i due lati sono uguali a 5 e 3, mentre la radice risultante della somma dei quadrati dei due lati e del loro prodotto è uguale a 7, infatti

$$\sqrt{25 + 9 + 15} = \sqrt{49} = 7.$$

Lemma: siano B e D due lati, allora⁶⁶

$$\begin{aligned} B(D^2 + DB) &= BD^2 + DB^2 \\ D(B^2 + DB) &= BD^2 + DB^2 \\ (B + D)BD &= BD^2 + DB^2. \end{aligned}$$

[Anche Diofanto propone un lemma analogo, che segue la quæstio 7 del quinto libro dell'*Aritmetica*.⁶⁷

Dati tre quadrati, è possibile determinare tre numeri che moltiplicati a due a due siano rispettivamente uguali ai quadrati assegnati.

Siano 4, 9, 16 i tre quadrati assegnati. Se si pone il primo numero da determinare

⁶⁶«Sunt æqualia tria solida a duobus lateribus diducta, unum a latere primo in quadratum secundi, adiectum rectangulo sub lateribus. Alterum a latere secundo in quadratum primi adiectum rectangulo. Tertium ab laterum summa in ipsum rectangulum.» Vedi p 70 di [18].

⁶⁷Vedi [13].

uguale a x , allora gli altri due saranno $\frac{4}{x}$ e $\frac{9}{x}$. Dalla moltiplicazione di questi ultimi segue che

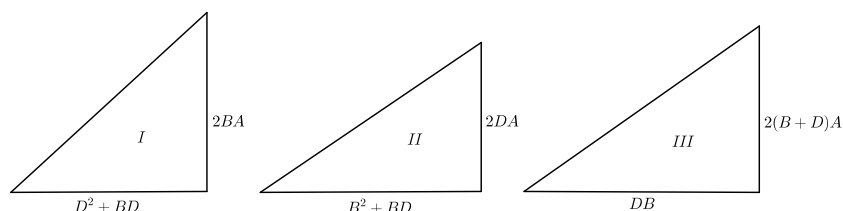
$$\frac{36}{x^2} = 16,$$

da cui si ricava che $x = \frac{6}{4}$. Quindi i numeri cercati sono $(\frac{3}{2}, \frac{8}{3}, 6)$. È importante notare che $x = \frac{6}{4}$, dove 6 corrisponde al prodotto di $2 = \sqrt{4}$ e $3 = \sqrt{9}$, mentre 4 è la radice quadrata di 16.]n.c.

ZETETICO XI

Determinare numericamente tre triangoli rettangoli, aventi la stessa area.

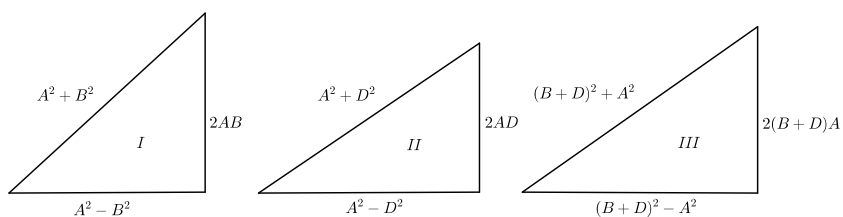
Si considerino i triangoli rettangoli (I), (II), (III):



Per il lemma precedente, le aree dei tre triangoli rettangoli sono tutte uguali e pari a

$$BD^2 A + DB^2 A.$$

Inoltre applicando lo zetetico precedente ai lati B e D , si può notare che $A^2 = B^2 + D^2 + BD$ e che le basi dei tre triangoli corrispondono alla differenza di due quadrati, i perpendicolari al doppio prodotto dei lati corrispondenti e le ipotenuse alla somma dei quadrati:

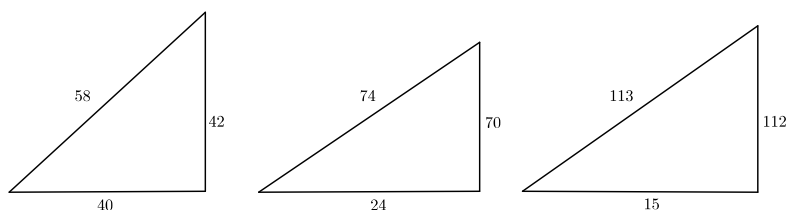


[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Siano $B = 3$ e $D = 5$, allora

$$A = \sqrt{9 + 25 + 15} = \sqrt{49} = 7.$$

I triangoli rettangoli numerici da determinare sono i seguenti

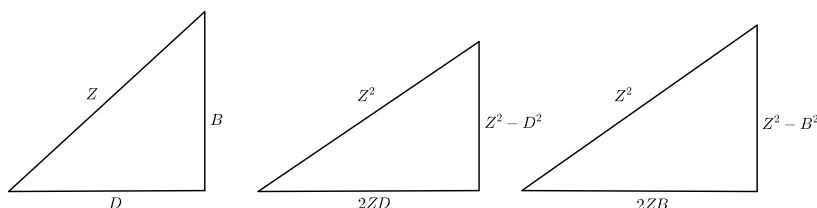


Il primo triangolo è stato costruito dai numeri 3 e 7, il secondo da 5 e 7 e il terzo da 8 e 7. Essi hanno la stessa area che vale 840.

ZETETICO XII

Determinare numericamente tre triangoli rettangoli, tali che il solido risultante dal prodotto dei perpendicolari stia a quello risultante dal prodotto delle basi, come un quadrato sta ad un altro quadrato.

Si consideri un triangolo rettangolo qualsiasi, per esempio di base D , perpendicolare B e ipotenusa Z , poi partendo da D e Z si costruisca un secondo triangolo rettangolo, di base $2BD$. Infine se ne costruisca un terzo partendo da Z e B , scegliendo come base il cateto $2ZB$.



In questo modo il prodotto dei perpendicolari sta al prodotto delle basi come B^2 sta $4Z^2$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

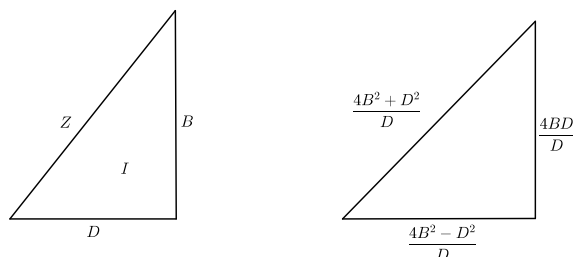
Si consideri il triangolo rettangolo numerico 5, 3, 4 e si costruiscano altri due triangoli rettangoli, partendo dai numeri 5, 3 e 5, 4. Essi corrispondono rispettivamente alle terne 34, 30, 16 e 41, 40, 9. Dunque il prodotto dei perpendicolari 4, 16, 9 sta al prodotto delle basi 3, 30, 40 come il quadrato di 4 sta al quadrato di 10.

[Infatti $\frac{4 \cdot 16 \cdot 9}{3 \cdot 30 \cdot 40} = \frac{16}{100}$, che corrisponde esattamente a $\frac{(4)^2}{(10)^2}$.]n.c.

ZETETICO XIII

Determinare numericamente due triangoli rettangoli, tali che il prodotto dei perpendicolari meno il prodotto delle basi sia un quadrato.

Si consideri il triangolo rettangolo (*I*) di base D , perpendicolare B , ipotenusa Z e tale che $2B > D$. Successivamente si costruisca, partendo da $2B$ e D , o da radici simili, il triangolo rettangolo (*II*), scegliendo $4BD$ come perpendicolare. Infine si dividano tutti e tre i lati di (*II*) per D , ottenendo un altro triangolo ad esso simile.



Conseguentemente il prodotto dei perpendicolari meno il prodotto delle basi, corrisponde a D^2 o a qualche grandezza simile a B^2 , costituita dalle radici $2B$ e D . Occorre ricordare che con la similitudine cambiano alcune operazioni.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

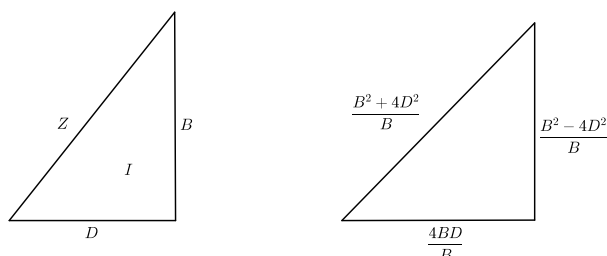
Posto il primo triangolo rettangolo uguale a 15, 9, 12, si ha che il secondo, costruito partendo dai numeri 24 e 9, corrisponde a 73, 55, 48.

Il prodotto dei perpendicolari è 576, quello delle basi 495, pertanto la loro differenza $(576 - 495) = 81 = 9^2$, corrisponde esattamente ad un quadrato.

ZETETICO XIV

Determinare numericamente due triangoli rettangoli, tali che il prodotto dei perpendicolari più il prodotto delle basi sia un quadrato.

Si consideri il triangolo rettangolo (*I*) di base D , perpendicolare B , ipotenusa Z e tale che $B > 2D$. Successivamente si costruisca, partendo da B e $2D$, il triangolo rettangolo (*II*), scegliendo $4BD$ come base. Infine si dividano tutti e tre i lati di (*II*) per B , ottenendo un altro triangolo ad esso simile.



Conseguentemente il prodotto dei perpendicolari più il prodotto delle basi, corrisponde a B^2 .

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

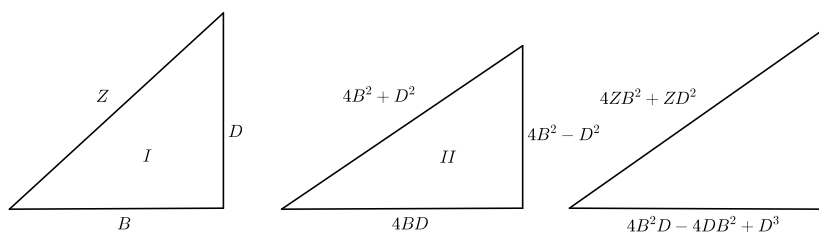
Posto il primo triangolo rettangolo uguale a 13, 12, 5, si ha che il secondo, costruito partendo dai numeri 5 e 6, o da 10 e 12, corrisponde a $\frac{61}{12}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{11}{12}$, oppure corrisponde a 183, 180, 33.

Il prodotto dei perpendicolari è 396, quello delle basi 900, pertanto la loro somma $(396 + 900) = 1296 = 36^2$, corrisponde esattamente ad un quadrato.

ZETETICO XV

Determinare numericamente tre triangoli rettangoli, tali che il prodotto delle ipotenuse stia al prodotto delle basi, come un quadrato sta ad un altro quadrato.

Si consideri il triangolo rettangolo (*I*) di base B , perpendicolare D , ipotenusa Z e tale che $2B > D$. Successivamente si costruisca, partendo da $2B$ e D , il triangolo rettangolo (*II*), scegliendo $4BD$ come base. Infine si individui un terzo triangolo rettangolo di ipotenusa il prodotto delle ipotenuse, di base il prodotto delle basi meno il prodotto dei perpendicolari e di perpendicolare il prodotto della base del primo per il perpendicolare del secondo più il prodotto della base del secondo per il perpendicolare del primo.



Il solido risultante dal prodotto delle ipotenuse sta a quello risultante dal prodotto delle basi, come un quadrato sta ad un altro quadrato.

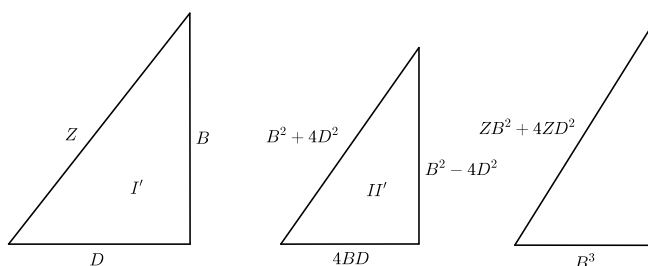
[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Posto il primo triangolo rettangolo uguale a 5, 3, 4, si ha che il secondo, costruito partendo dai numeri 6 e 4, corrisponde a 13, 12, 5. Il terzo invece è determinato dalla terna 65, 16, 63.

Il prodotto delle ipotenuse è 4225, quello delle basi 576, pertanto $\frac{4225}{576} = \frac{65^2}{24^2}$.

Oppure si consideri il triangolo rettangolo (*I'*) di base D , perpendicolare B , ipotenusa Z e tale che $B > 2D$. Successivamente si costruisca, partendo da B e $2D$, il triangolo rettangolo (*II'*), scegliendo $4BD$ come base. Infine si individui

un terzo triangolo rettangolo di ipotenusa il prodotto delle ipotenuse, di base il prodotto delle basi più il prodotto dei perpendicolari e di perpendicolare il prodotto della base del primo per il perpendicolare del secondo meno il prodotto della base del secondo per il perpendicolare del primo.



Il solido risultante dal prodotto delle ipotenuse sta a quello risultante dal prodotto delle basi, come un quadrato sta ad un altro quadrato.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Posto il primo triangolo rettangolo uguale a 13, 5, 12, si ha che il secondo, costruito partendo dai numeri 12 e 10, corrisponde a 61, 60, 11. Il terzo invece è determinato dalla terna 793, 432, 665.

Il prodotto delle ipotenuse è 628849, quello delle basi 129600, pertanto

$$\frac{628849}{129600} = \frac{793^2}{360^2}.$$

ZETETICO XVI

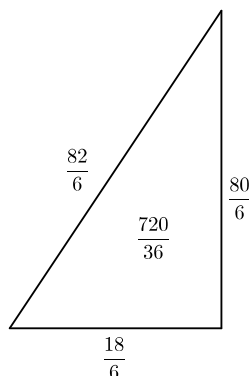
Determinare numericamente un triangolo rettangolo, la cui area è nota sotto determinate condizioni.

Si ponga l'area uguale a

$$\frac{B^4 - X^4}{D^2}.$$

Si costruisca un triangolo rettangolo, partendo da B^2 e X^2 , poi si dividano tutti e tre i lati per XDB , ottenendo un ulteriore triangolo rettangolo simile al primo.

Sia $B = 3$, $X = 1$ e $D = 2$, allora l'area sarà uguale a $\frac{81-1}{4} = \frac{80}{4} = 20$. Quindi si considerino i quadrati 9, 1 e si costruisca un triangolo rettangolo, la cui area risulta uguale a $\frac{720}{36}$.



Nel momento in cui viene assegnato il valore dell'area, esso deve essere un quadrato-quadrato, sia nel caso in cui l'area corrisponde al numero proposto inizialmente, sia quando essa coincide con il numero proposto moltiplicato per un quadrato o sommato ad un'unità o ad un quadrato-quadrato. Se si pone l'area uguale a 15, allora $15 + 1 = 16$ corrisponde al quadrato-quadrato di 2, dunque il triangolo viene costruito a partire dai numeri 4 e 1.

Oppure si ponga l'area uguale a

$$\frac{D^3 X - X^3 D}{X^2}.$$

Si costruisca un triangolo rettangolo, partendo da D e X , poi si dividano tutti e tre i lati per X , ottenendo un ulteriore triangolo rettangolo simile al primo. Sia $D = 2$ e $X = 1$, allora l'area sarà uguale a $8 - 2 = 6$. Quindi si considerino i numeri 2, 1 e si costruisca un triangolo rettangolo, la cui area risulta uguale a 6. Nel momento in cui viene assegnato il valore dell'area, esso deve essere la differenza di un cubo e un lato, sia nel caso in cui l'area corrisponde al numero proposto inizialmente, sia quando essa coincide con il numero proposto moltiplicato per un quadrato. Se si pone l'area uguale a 60, allora il triangolo viene costruito a partire dai numeri 4 e 1.

ZETETICO XVII

Determinare tre numeri piani proporzionali, tali che il medio sommato al primo o al secondo estremo sia un quadrato.

Posto il termine medio uguale ad E piano, siano $(B^2 - E)$ e $(G^2 - E)$ rispettivamente il primo e il secondo estremo. Sotto queste condizioni, la somma del primo estremo e del termine medio corrisponde al quadrato B^2 , mentre la somma del secondo estremo e del termine medio coincide con il quadrato G^2 .

Poichè i tre piani sono fra loro proporzionali, applicando la relazione fondamentale delle proporzioni, si ottiene che il quadrato del medio è uguale al prodotto degli estremi, perciò

$$E = \frac{B^2 G^2}{B^2 + G^2}, \quad \text{con } E \text{ piano.}$$

Pertanto i tre piani proporzionali richiesti sono:

<i>Primo termine</i>	<i>Secondo termine</i>	<i>Terzo termine</i>
$\frac{B^4}{B^2+G^2}$	$\frac{B^2 G^2}{B^2+G^2}$	$\frac{G^4}{B^2+G^2}$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 1$, $G = 2$. Allora i tre piano ricercati sono $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{16}{5}$. Inoltre la somma del termine medio e del primo estremo corrisponde al quadrato 1, mentre la somma del termine medio e del secondo estremo è uguale al quadrato 4. Se si vuole eliminare il denominatore basta moltiplicare per un quadrato, per esempio 25, così da ottenere tre piani 5, 20, 80, che soddisfano tutte le condizioni iniziali imposte:

$$5 : 20 = 20 : 80 \quad 20 + 5 = 25 = 5^2 \quad 20 + 80 = 100 = 10^2.$$

ZETETICO XVIII

Assegnati due cubi trovare numericamente altri due cubi la cui somma sia uguale alla differenza dei cubi dati.

Siano dati B^3 e D^3 , tali che $B > D$. Si vogliono determinare altri due cubi, la cui somma sia uguale a $B^3 - D^3$.

[Simbolicamente si vuole risolvere l'equazione

$$X^3 + Y^3 = B^3 - D^3, \quad (3.66)$$

dove $B, D \in \mathbb{Q}^+$ e $B > D$.

Secondo il commentario di Massimo Planude⁶⁸, dalla (3.66) si ricava

$$Y^3 + D^3 = B^3 - X^3,$$

ovvero

$$(Y + D) : (B - X) = (B^2 + BX + X^2) : (Y^2 - YD + D^2).$$

Posto $\frac{Y+D}{B-X} = m$ e $A = B - X$, si ha

$$X = B - A \quad \text{e} \quad Y = mA - D.$$

⁶⁸Vedi pp.27 di [3].

In particolare si ponga $m = \frac{B^2}{D^2}$ con $B, D \in \mathbb{Q}^+$.]n.c.

Siano $X = B - A$ e $Y = \frac{B^2}{D^2}A - D$ i due numeri richiesti, che soddisfano le condizioni iniziali, cioè tali che

$$(B - A)^3 + \left(\frac{B^2}{D^2}A - D\right)^3 = B^3 - D^3,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{3BD^3}{B^3 + D^3}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X &= \frac{B(B^3 - 2D^3)}{B^3 + D^3} \\ Y &= \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3} \end{aligned} \quad (3.67)$$

e la somma dei loro cubi equivale alla differenza di B^3 e D^3 .

Si può notare che il cubo maggiore è dato dalla somma dei tre restanti cubi

$$B^3 = X^3 + Y^3 + D^3,$$

inoltre esso risulta proporzionale a $B(B^3 + D^3)$. Allo stesso modo i cubi restanti, X^3, Y^3, D^3 , risultano proporzionali ai prodotti

$$B(B^3 - 2D^3) \quad D(2B^3 - D^3) \quad D(B^3 + D^3).$$

Pertanto, la scelta di B e D risulta vincolata dalla condizione $B^3 > 2D^3$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 2$ e $D = 1$.

Applicando il precetto (3.67) si ottiene che

$$X = \frac{2(8 - 2)}{9} = \frac{4}{3} \quad Y = \frac{16 - 1}{9} = \frac{5}{3},$$

quindi moltiplicando per 3 tutti i termini, si ottengono dei valori ad essi proporzionali,

$$B = 6 \quad D = 3 \quad X = 4 \quad Y = 5,$$

che soddisfano le condizioni richieste dallo zetetico:

$$6^3 = 3^3 + 4^3 + 5^3 \quad 6^3 - 3^3 = 4^3 - 5^3.$$

ZETETICO XIX

Assegnati due cubi trovare numericamente altri due cubi la cui differenza sia uguale alla somma dei cubi dati.

Siano dati B^3 e D^3 , tali che $B > D$. Si vogliono determinare altri due cubi, la cui differenza sia uguale a $B^3 + D^3$.

[Simbolicamente si vuole risolvere l'equazione

$$X^3 - Y^3 = B^3 + D^3, \quad (3.68)$$

dove $B, D \in \mathbb{Q}^+$ e $B > D$.]n.c.

Siano $X = B + A$ e $Y = \frac{B^2}{D^2}A - D$ i due numeri richiesti, che soddisfano le condizioni iniziali, cioè tali che

$$(B + A)^3 - \left(\frac{B^2}{D^2}A - D\right)^3 = B^3 + D^3,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{3D^3B}{B^3 - D^3}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X &= \frac{B(B^3 + 2D^3)}{B^3 - D^3} \\ Y &= \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 - D^3} \end{aligned} \quad (3.69)$$

e la differenza dei loro cubi equivale alla somma di B^3 e D^3 .

Si può notare che il cubo maggiore è dato dalla somma dei tre restanti cubi

$$X^3 = B^3 + D^3 + Y^3,$$

inoltre esso risulta proporzionale a $B(B^3 + 2D^3)$. Allo stesso modo i cubi restanti, B^3 , D^3 , Y^3 , risultano proporzionali ai prodotti

$$B(B^3 - D^3) \quad D(B^3 - D^3) \quad D(2B^3 - D^3).$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 2$ e $D = 1$.

Applicando il precetto (3.69) si ottiene che

$$X = \frac{2(8+2)}{7} = \frac{20}{7} \quad Y = \frac{16+1}{7} = \frac{17}{7},$$

quindi moltiplicando per 7 tutti i termini, si ottengono dei valori ad essi proporzionali,

$$B = 14 \quad D = 7 \quad X = 20 \quad Y = 17,$$

che soddisfano le condizioni richieste dallo zetetico:

$$20^3 = 14^3 + 7^3 + 17^3 \quad 20^3 - 17^3 = 14^3 - 7^3.$$

ZETETICO XX

Assegnati due cubi trovare numericamente altri due cubi la cui differenza sia uguale alla differenza dei cubi dati.

Siano dati B^3 e D^3 , tali che $B > D$. Si vogliono determinare altri due cubi, la cui differenza sia uguale a $B^3 - D^3$.

[Simbolicamente si vuole risolvere l'equazione

$$X^3 - Y^3 = B^3 - D^3, \quad (3.70)$$

dove $B, D \in \mathbb{Q}^+$ e $B > D$.]n.c.

Siano $X = A - D$ e $Y = \frac{D^2}{B^2}A - B$ i due numeri richiesti, che soddisfano le condizioni iniziali, cioè tali che

$$(A - D)^3 - \left(\frac{D^2}{B^2}A - B\right)^3 = B^3 - D^3,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{3DB^3}{B^3 + D^3}.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} X &= \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3} \\ Y &= \frac{B(2D^3 - B^3)}{B^3 + D^3} \end{aligned} \quad (3.71)$$

e la differenza dei loro cubi equivale alla differenza di B^3 e D^3 .

Si sarebbe ottenuto lo stesso risultato se si fossero posti

$$X = B - A \quad \text{e} \quad Y = D - \frac{B^2}{D^2}A.$$

Si può anche notare che la somma di due cubi equivale alla somma degli altri due cubi restanti

$$X^3 + D^3 = B^3 + Y^3,$$

inoltre X^3, D^3, B^3, Y^3 risultano proporzionali ai prodotti

$$D(2B^3 - D^3) \quad D(B^3 + D^3) \quad B(B^3 + D^3) \quad B(2D^3 - B^3).$$

Pertanto, la scelta di B e D risulta vincolata dalla condizione $D^3 < B^3 < 2D^3$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B = 5$ e $D = 4$.

Applicando il precetto (3.71) si ottiene che

$$X = \frac{4(250 - 64)}{189} = \frac{248}{63} \quad Y = \frac{5(128 - 125)}{189} = \frac{5}{63},$$

quindi moltiplicando per 63 tutti i termini, si ottengono dei valori ad essi proporzionali,

$$B = 315 \quad D = 252 \quad X = 248 \quad Y = 5,$$

che soddisfano le condizioni richieste dallo zetetico:

$$248^3 + 252^3 = 315^3 + 5^3 \quad 248^3 - 5^3 = 315^3 - 252^3.$$

3.5 Libro quinto

ZETETICO I

Detrminare tre numeri piani, tali che sommati insieme, o a due a due costituiscano sempre un quadrato.

Posta uguale ad $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ la somma dei tre numeri piani e posta pari ad A^2 la somma del primo e del secondo numero, il terzo piano risulta uguale a $2AB + B^2$. Invece indicata con $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ la somma del secondo e del terzo numero piano, si ha che il secondo numero corrisponde ad $(A^2 - 4AB)$, mentre il primo a $4AB$. Quest'ultimo sommato al terzo numero piano, deve essere uguale ad un quadrato, quindi sia

$$6AB + B^2 = D^2,$$

da cui si ottiene

$$A = \frac{D^2 - B^2}{6B}.$$

I tre piani richiesti risultano proporzionali rispettivamente a

$$24D^2B^2 - 24B^4 \quad D^4 + 25B^4 - 26B^2D^2 \quad 12B^2D^2 + 24B^4.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $D = 11$, $B = 1$. Il primo piano corrisponde a 2880, il secondo a 11520 e il terzo a 1476. Se si dividono i tre piani calcolati per un qualsiasi quadrato, per esempio 36, si ottengono altri tre piani 80, 320, 41, che soddisfano sempre le condizioni imposte inizialmente:

$$80 + 320 + 41 = 21^2 \quad 80 + 320 = 20^2 \quad 320 + 41 = 19^2 \quad 80 + 41 = 11^2.$$

Sia $D = 6$, $B = 1$, allora il primo piano è uguale a 840, il secondo a 385 e il terzo a 456.

ZETETICO II

Determinare tre quadrati che differiscono per una quantità nota.

Siano A^2 , $A^2 + 2AB + B^2$, $A^2 + 4AB + 2B^2$ i tre quadrati incogniti. Posta uguale a $(D - A)$ la radice del terzo quadrato risulta che

$$D^2 - 2AD + A^2 = A^2 + 4AB + 2B^2,$$

da cui si ricava

$$A = \frac{D^2 - 2B^2}{2D + 4B}.$$

Pertanto le radici del primo, del secondo e del terzo quadrato saranno proporzionali a

$$D^2 - 2B^2 \quad D^2 + 2BD + 2B^2 \quad D^2 + 4BD + 2B^2.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $D = 8$, $B = 1$. Le radici del primo, del secondo e del terzo quadrato sono 62, 82, 98, mentre i loro quadrati sono uguali a 3844, 6724, 9604 e differiscono fra loro di 2880. Dividendo i valori ottenuti per un qualsiasi quadrato, per esempio 4, si ottengono altri tre quadrati 961, 1681, 2401, che distano l'uno dall'altro 720.

ZETETICO III

Determinare tre numeri piani equidistanti, che sommati a due a due corrispondano ad un quadrato.

Secondo lo zetetico precedente tre quadrati differenti, fra loro equidistanti sono della forma

$$B^2 \quad B^2 + D \text{ piano} \quad B^2 + 2D \text{ piano}.$$

Quindi si ponga la somma del primo e del secondo numero piano da determinare uguale a B^2 , la somma del primo e del terzo uguale a $(B^2 + D \text{ piano})$ e la somma del secondo e del terzo uguale a $(B^2 + 2D \text{ piano})$. Successivamente, indicata con $A \text{ piano}$ la somma dei tre numeri incogniti, si ottiene che

$$\begin{aligned} \text{Primo numero piano è} & \quad A \text{ piano} - B^2 \\ \text{Secondo numero piano è} & \quad A \text{ piano} - B^2 - D \text{ piano} \quad . \\ \text{Terzo numero piano è} & \quad A \text{ piano} - B^2 - 2D \text{ piano} \end{aligned}$$

In questo modo i tre numeri incogniti sono tutti equidistanti, infatti la differenza del primo e del secondo e quella del secondo e del terzo corrisponde a $D \text{ piano}$.

La loro somma invece risulta pari a

$$3A - 3B^2 - 3D = A \quad \text{con} \quad A \text{ piano}, D \text{ piano},$$

da cui segue

$$A = \frac{3B^2 + 3D}{2} \quad \text{con} \quad A \text{ piano}, D \text{ piano}.$$

Pertanto il primo, il secondo e il terzo numero piano corrispondono rispettivamente a

$$\frac{B^2 - D}{2} \quad \frac{B^2 + D}{2} \quad \frac{B^2 + 3D}{2} \quad \text{con } D \text{ piano.}$$

Moltiplicando tutti i termini per 4, essi risultano proporzionali a

$$2B^2 - 2D \quad 2B^2 + 2D \quad 2B^2 + 6D \quad \text{con } D \text{ piano,}$$

e differiscono l'uno dall'altro di $4D$ piano. Inoltre la somma del primo e del secondo numero corrisponde a $4B^2$, quella del primo e del terzo a $4B^2 + 4D$ e quella del secondo e del terzo a $4B^2 + 8D$. In particolare questi ultimi sono tutti e tre dei quadrati in quanto lo sono $(B^2 + D)$ e $(B^2 + 2D)$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $B^2 = 961$, $D = 720$. Il primo, il secondo e il terzo numero piano sono 482, 3362, 6242 e la loro differenza vale 2880. Inoltre la somma del primo e del secondo numero piano corrisponde al quadrato di 62, quella del primo e del terzo al quadrato di 82 ed infine quella del secondo e del terzo al quadrato di 98.

[Diofanto e Bombelli sviluppano lo zetetico nel modo seguente:

- Diofanto *III*, 7: *Determinare tre numeri, tali che la somma di ogni coppia corrisponda ad un quadrato.*

Si determinino tre numeri quadrati tali che la metà della loro somma sia maggiore di ognuno di essi e siano x^2 e $(x+1)^2$ il primo e il secondo, quindi si ponga il terzo uguale a $x^2 + 4x + 2 = (x-8)^2$, allora $x = \frac{62}{20}$ o $x = \frac{31}{10}$. Pertanto si considerino i numeri 961, 1681, 2401 e si pongano uguali alla somma delle coppie che vengono formate dai tre numeri incogniti. Così la somma dei tre numeri vale $\frac{5043}{2} = 2521 + \frac{1}{2}$ e i tre numeri richiesti corrispondono a

$$120 + \frac{1}{2} \quad 840 + \frac{1}{2} \quad 1560 + \frac{1}{2}.$$

- Bombelli *III*, 106: *Trovinsi un numero tale che diviso in tre numeri e tolti a dui a dui laccino tre numeri quadrati che li loro eccessi siano eguali.*

I tre numeri incogniti siano tali che

$$\begin{array}{l} \text{il primo più il secondo sia } x^2 \\ \text{il secondo più il terzo sia } x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \\ \text{il primo più il terzo sia } x^2 + 2x + 1 + (2x+1) = x^2 + 4x + 2 \end{array} .$$

Tutte e tre le somme devono essere dei quadrati, quindi sia $x^2 + 4x + 2$ uguale a $(x - 4)^2$, oppure a $(x - 5)^2$, dove il termine noto, viene scelto arbitrariamente, purchè maggiore di 2:

$$x^2 + 4x + 2 = (x - 4)^2,$$

da cui si ricava che $x = \frac{7}{6}$ e che

$$\begin{aligned} \text{il primo pi\`u il secondo corrisponde a } & x^2 = \frac{49}{36} \\ \text{il secondo pi\`u il terzo corrisponde a } & x^2 + 2x + 1 = \frac{169}{36} \quad . \\ \text{il primo pi\`u il terzo corrisponde a } & x^2 + 4x + 2 = \frac{289}{36} \end{aligned}$$

Quindi moltiplicando per un quadrato, per esempio 36, la terna diventa 49, 169 e 289. Successivamente, indicata con y la somma dei tre numeri incogniti, si ha che il primo, il secondo e il terzo numero corrispondono a

$$y - 169 \quad y - 289 \quad y - 49.$$

Dalla loro somma $y = 3y - 507$ si ottiene che $y = \frac{507}{2}$ e che il primo e il secondo numero valgono $84 + \frac{1}{2}$ e $35 + \frac{1}{2}$.

Tuttavia occorre notare che ciascun quadrato, 49, 169, 289, deve essere minore della metà della somma totale $\frac{507}{2}$ e in tal caso $289 > \frac{507}{2}$.

Poichè il terzo numero può essere uguagliato ad un quadrato arbitrariamente, purchè sia maggiore di 2, sia

$$x^2 + 4x + 2 = (x - 8)^2,$$

da cui si ricava che $x = \frac{31}{10}$ e che

$$\begin{aligned} \text{il primo pi\`u il secondo corrisponde a } & x^2 = \frac{961}{100} \\ \text{il secondo pi\`u il terzo corrisponde a } & x^2 + 2x + 1 = \frac{1681}{100} \quad . \\ \text{il primo pi\`u il terzo corrisponde a } & x^2 + 4x + 2 = \frac{2401}{100} \end{aligned}$$

Quindi moltiplicando per un quadrato, per esempio 100, la terna diventa 961, 1681 e 2401. Successivamente, indicata con y la somma dei tre numeri incogniti, si ha che il primo, il secondo e il terzo numero corrispondono a

$$y - 961 \quad y - 1681 \quad y - 2401.$$

Dalla loro somma $y = 3y - 5043$ si ottiene che $y = 2521 + \frac{1}{2}$ e che il primo, il secondo e il terzo numero valgono

$$120 + \frac{1}{2} \quad 840 + \frac{1}{2} \quad 1560 + \frac{1}{2}. \quad]\text{n.c.}$$

ZETETICO IV

Determinare tre numeri piani, tali che sommati a due a due e sommati tutti e tre insieme ad un piano dato, corrispondono ad un quadrato.

Sia Z piano assegnato e i tre numeri piani incogniti siano tali che

$$\begin{array}{rcl}
 & & \text{Aggiungendo } Z \\
 \text{il primo pi\`u il secondo sia} & A^2 + 2AB + B^2 - Z & (A + B)^2 \\
 \text{il secondo pi\`u il terzo sia} & A^2 + 2AD + D^2 - Z & (A + D)^2 \\
 \text{la somma dei tre numeri sia} & A^2 + 2AG + G^2 - Z & (A + G)^2
 \end{array}$$

Allora il terzo e il primo numero piano sono uguali a

$$2GA + G^2 - 2AB - B^2 \quad 2GA + G^2 - 2AD - D^2,$$

mentre la loro somma corrisponde a

$$4GA + 2G^2 - 2BA - B^2 - 2AD - D^2 + Z \quad \text{con } Z \text{ piano.}$$

Essa deve essere un quadrato, pertanto

$$4GA + 2G^2 - 2BA - B^2 - 2AD - D^2 + Z = F^2,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{F^2 + D^2 + B^2 - 2G^2 - Z}{4G - 2B - 2D}.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia Z piano = 3, $B = 1$, $D = 2$, $G = 3$ ed $F = 10$, allora $A = 14$ e la somma del primo e del secondo numero vale $222 = 15^2 - 3$,

la somma del secondo e del terzo numero vale $253 = 16^2 - 3$,

la somma del primo e del terzo numero vale $97 = 10^2 - 3$,

la somma dei tre numeri è uguale a $286 = 17^2 - 3$.

Dunque i tre numeri piani richiesti corrispondono a 33, 189, 64.

ZETETICO V

Determinare tre numeri piani, tali che sommati a due a due e sommati tutti e tre insieme meno un piano dato, corrispondono ad un quadrato.

Sia Z piano assegnato e i tre numeri piani incogniti siano tali che

$$\begin{array}{rcl}
 & & \text{Sottraendo } Z \\
 \text{il primo pi\`u il secondo sia} & A^2 + Z & A^2 \\
 \text{il secondo pi\`u il terzo sia} & A^2 + 2AB + B^2 + Z & (A + B)^2 \\
 \text{la somma dei tre numeri sia} & A^2 + 2AD + D^2 + Z & (A + D)^2
 \end{array}$$

Allora il terzo e il primo numero piano sono uguali a

$$2AD + D^2 \quad 2AD + D^2 - 2AB - B^2,$$

mentre la loro somma meno Z piano corrisponde a

$$4DA + 2D^2 - 2BA - B^2 - Z.$$

Essa deve essere un quadrato, pertanto

$$4DA + 2D^2 - 2BA - B^2 - Z = F^2,$$

da cui si ricava che

$$A = \frac{F^2 + B^2 + Z - 2D^2}{4D - 2B}.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia Z piano = 3, $B = 1$, $D = 2$ ed $F = 8$, allora $A = 10$ e la somma del primo e del secondo numero vale $103 = 10^2 + 3$,

la somma del secondo e del terzo numero vale $124 = 11^2 + 3$,

la somma del primo e del terzo numero vale $67 = 8^2 + 3$,

la somma dei tre numeri è uguale a $147 = 12^2 + 3$.

Dunque i tre numeri piani richiesti corrispondono a 23, 80, 44.

ZETETICO VI

Determinare infiniti numeri, tali che ciascuno dei quali sommato o sottratto ad un piano, corrisponda ad un quadrato.

Sia dato Z piano, in modo che $Z = 4DB$ e $Z = 4FG$, allora si ha

$$(B - D)^2 + Z = (B + D)^2$$

$$(F - G)^2 + Z = (F + G)^2$$

e così via per tutte le coppie di divisori di $\frac{Z}{4}$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia Z piano = 96, allora $\frac{96}{4} = 24$ e in particolare $24 = 1 \cdot 24$, $24 = 2 \cdot 12$, $24 = 3 \cdot 8$, $24 = 4 \cdot 6$. In questo modo $23^2 + 96 = 25^2$, $10^2 + 96 = 14^2$, $5^2 + 96 = 11^2$ e $2^2 + 96 = 10^2$ e così via per i restanti.

Inoltre

$$(B + D)^2 - Z = (B - D)^2$$

$$(F + G)^2 - Z = (F - G)^2$$

Infatti $625 - 96 = 529 = 23^2$ e $196 - 96 = 100 = 10^2$.

ZETETICO VII

Determinare tre numeri tali che il piano formato da due di questi più un piano dato sia un quadrato.

Sia Z piano assegnato e sia

$$\begin{array}{rcc} & & \text{Aggiungendo } Z \\ \text{il prodotto del primo e del secondo} & B^2 - Z & B^2 \\ \text{il prodotto del secondo e del terzo} & D^2 - Z & D^2 \end{array} .$$

Indicato con A il secondo numero si ha che il primo e il terzo corrispondono a

$$\frac{B^2 - Z}{A} \quad \text{e} \quad \frac{D^2 - Z}{A} \quad \text{con } Z \text{ piano,}$$

dunque il loro prodotto è uguale a

$$\frac{B^2 - Z}{A} \cdot \frac{D^2 - Z}{A} . \quad (3.72)$$

Posti $B^2 - Z = F^2$ e $D^2 - Z = G^2$, la somma di (3.72) e Z corrisponde a

$$\frac{F^2 G^2 + Z A^2}{A^2} ,$$

che deve essere un quadrato, in particolare si ponga la sua radice uguale a $\frac{|FG-HA|}{A}$. Pertanto da quest'ultima uguaglianza segue che

$$A = \frac{2HFG}{|H^2 - Z|} \quad \text{con } Z \text{ piano.}$$

Si possono trovare infiniti quadrati che diminuiti di un piano dato corrispondono ad un quadrato e viceversa infiniti quadrati che sommati allo stesso piano sono uguali ad un quadrato. Tuttavia la scelta di B^2 e D^2 non è arbitraria, ma deve soddisfare determinate condizioni, infatti così come i lati F e G devono essere scelti in modo che $F^2 + G^2 + Z$ sia un quadrato, anche $B^2 + D^2 + Z$ deve esserlo.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia Z piano = 192, $F = 8$, $G = 2$ e $H = 6$, allora $A = \frac{16}{13}$. Quindi i numeri incogniti richiesti sono uguali a 52, $\frac{16}{13}$ e $\frac{13}{4}$, inoltre

$$\begin{array}{l} \text{il prodotto del primo e del secondo:} \quad 52 \cdot \frac{16}{13} = 64 \\ \text{il prodotto del secondo e del terzo:} \quad \frac{16}{13} \cdot \frac{13}{4} = 4 \quad . \\ \text{il prodotto del primo e del terzo:} \quad 52 \cdot \frac{13}{4} = 169 \end{array}$$

In seguito aggiungendo Z piano = 192 si ottiene $64 + 192 = 256 = 16^2$, $4 + 192 = 196 = 14^2$ e $169 + 192 = 361 = 19^2$.

ZETETICO VIII

Determinare tre numeri tali che il piano formato da due di questi, meno un piano dato, sia un quadrato.

Sia Z piano assegnato e sia

$$\begin{array}{rcc} & & \text{Aggiungendo } Z \\ \text{il prodotto del primo e del secondo} & B^2 + Z & B^2 \\ \text{il prodotto del secondo e del terzo} & D^2 + Z & D^2 \end{array} .$$

Indicato con A il secondo numero si ha che il primo e il terzo corrispondono a

$$\frac{B^2 + Z}{A} \quad \text{e} \quad \frac{D^2 + Z}{A},$$

dunque il loro prodotto è uguale a

$$\frac{B^2 + Z}{A} \cdot \frac{D^2 + Z}{A}. \quad (3.73)$$

Posti $B^2 + Z = F^2$ e $D^2 + Z = G^2$, la differenza fra (3.73) e Z piano corrisponde a

$$\frac{F^2 G^2 - Z A^2}{A^2},$$

che deve essere un quadrato, in particolare si ponga la sua radice uguale a $\frac{|FG-HA|}{A}$. Pertanto da quest'ultima uguaglianza segue che

$$A = \frac{2HFG}{|H^2 + Z|} \quad \text{con } Z \text{ piano.}$$

Si possono trovare infiniti quadrati che sommati ad un piano dato corrispondono ad un quadrato e viceversa infiniti quadrati che diminuiti dello stesso piano sono uguali ad un quadrato. Tuttavia la scelta di B^2 e D^2 non è arbitraria, ma deve soddisfare determinate condizioni, infatti così come i lati F e G devono essere scelti in modo che $F^2 + G^2 + Z$ sia un quadrato, anche $B^2 + D^2 + Z$ deve esserlo.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia Z piano = 40, $F = 7$, $G = 11$ e $H = 24$, allora $B = 3$, $D = 9$ e $A = 6$. Quindi i numeri incogniti richiesti sono uguali a $\frac{49}{6}$, 6 e $\frac{121}{6}$, inoltre

$$\begin{array}{l} \text{il prodotto del primo e del secondo:} \quad \frac{49}{6} \cdot 6 = 49 \\ \text{il prodotto del secondo e del terzo:} \quad 6 \cdot \frac{121}{6} = 121 \\ \text{il prodotto del primo e del terzo:} \quad \frac{49}{6} \cdot \frac{121}{6} = \frac{5929}{36} \end{array} .$$

Pertanto sottraendo Z piano = 40 si ottiene $49 - 40 = 9 = 3^2$, $121 - 40 = 81 = 9^2$ e $\frac{5929}{36} - \frac{1440}{36} = \frac{4489}{36} = \left(\frac{67}{6}\right)^2$.

ZETETICO IX

Determinare numericamente un triangolo rettangolo, la cui area sommata ad un piano dato, composto da due quadrati, sia un quadrato.

Sia dato Z piano, tale che $Z = B^2 + D^2$. Si costruisca un triangolo rettangolo, partendo da $(B + D)^2$ e da $(B - D)^2$; esso ha ipotenusa, base e perpendicolare proporzionali a

$$2B^4 + 12B^2D^2 + 2D^4 \quad 8BDZ \quad 2(B + D)^2(B - D)^2.$$

Dividendo tutti i lati per $2(B + D)(B - D)^2$, si ottiene un altro triangolo rettangolo simile a quello precedente, la cui area misura

$$\frac{2ZBD}{(B - D)^2} \quad \text{con } Z \text{ piano.}$$

Poichè

$$(B - D)^2 + 2BD = B^2 + D^2,$$

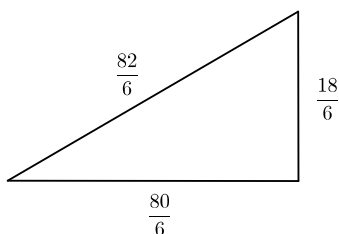
aggiungendo all'area del triangolo Z si ottiene

$$\frac{Z(2BD + (B - D)^2)}{(B - D)^2} = \frac{Z^2}{(B - D)^2},$$

che è un quadrato di radice $\frac{Z}{B - D}$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia Z piano = 5, $D = 1$, $B = 2$. Il triangolo rettangolo costruito, come descritto precedentemente,



avrà area uguale a $\frac{720}{36} = 20$, quindi aggiungendo 5 si otterrà $25 = 5^2$.

ZETETICO X

Determinare numericamente un triangolo rettangolo, la cui area diminuita di un piano dato, sia un quadrato.

Sia dato Z piano, tale che $Z = 2BD$. Si costruisca un triangolo rettangolo, partendo da $(B + D)^2$ e da $(B - D)^2$; esso ha ipotenusa, base e perpendicolare proporzionali a

$$2B^4 + 12B^2D^2 + 2D^4 \quad 4B^2Z + 4D^2Z \quad 2(B + D)^2(B - D)^2.$$

Dividendo tutti i lati per $2(B + D)(B - D)^2$, si ottiene un altro triangolo rettangolo simile a quello precedente, la cui area misura

$$\frac{B^2Z + D^2Z}{(B - D)^2} \quad \text{con } Z \text{ piano.}$$

Poichè

$$B^2 + D^2 - (B - D)^2 = 2BD,$$

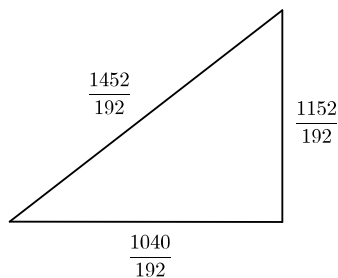
sottraendo all'area del triangolo Z si ottiene

$$\frac{Z(B^2 + D^2 - (B - D)^2)}{(B - D)^2} = \frac{Z^2}{(B - D)^2},$$

che è un quadrato di radice $\frac{Z}{B-D}$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $D = 1$, $B = 2$, allora Z piano = 10. Il triangolo rettangolo costruito, come descritto precedentemente,



avrà area uguale a $\frac{599040}{36864}$, quindi sottraendogli 10 risulterà $\frac{230400}{36864} = \left(\frac{480}{192}\right)^2$.

ZETETICO XI

Determinare numericamente un triangolo rettangolo, la cui area sottratta ad un piano dato, sia un quadrato.

Sia dato Z piano, tale che $Z = 2BD$. Si costruisca un triangolo rettangolo, partendo da $(B + D)^2$ e da $(B - D)^2$; esso ha ipotenusa, base e perpendicolare proporzionali a

$$2B^4 + 12B^2D^2 + 2D^4 \quad 4B^2Z + 4D^2Z \quad 2(B + D)^2(B - D)^2.$$

Dividendo tutti i lati per $2(B - D)(B + D)^2$, si ottiene un altro triangolo rettangolo simile a quello precedente, la cui area misura

$$\frac{B^2Z + D^2Z}{(B + D)^2} \quad \text{con } Z \text{ piano.}$$

Poichè

$$(B + D)^2 - B^2 - D^2 = 2BD,$$

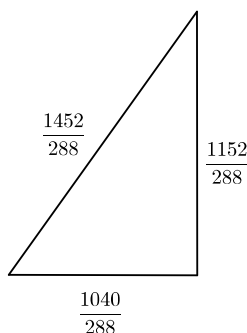
sottraendo l'area del triangolo a Z si ottiene

$$\frac{Z((B + D)^2 - B^2 - D^2)}{(B + D)^2} = \frac{Z^2}{(B + D)^2},$$

che è un quadrato di radice $\frac{Z}{B+D}$.

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $D = 1$, $B = 5$, allora $Z \text{ piano} = 10$. Il triangolo rettangolo costruito, come descritto precedentemente,



avrà area uguale a $\frac{599040}{82944}$, quindi sottraendola a 10 risulterà $\frac{230400}{82944} = \left(\frac{480}{288}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$.

ZETETICO XII

Determinare tre numeri quadrati, che presi a due a due, sono tali che il piano-piano risultante dal loro prodotto più il quadrato della loro somma per il quadrato di una lunghezza, corrisponda ad un quadrato.

Assegnata la lunghezza X , il primo, il secondo e il terzo quadrato siano

$$A^2 - 2AX + X^2 = (A - X)^2 \quad A^2 \quad 4A^2 - 4XA + 4X^2$$

Il prodotto del primo e del secondo quadrato, più la loro somma moltiplicata per X^2 , corrisponde ad un quadrato di radice $A^2 - XA + X^2$.

Il prodotto del secondo e del terzo quadrato, più la loro somma moltiplicata per

X^2 , corrisponde ad un quadrato di radice $2A^2 - XA + 2X^2$.

Infine il prodotto del primo e del terzo quadrato più la loro somma moltiplicata per X^2 , corrisponde ad un quadrato di radice $2A^2 - 3XA + 3X^2$.

Pertanto la radice relativa al terzo quadrato è $D - 2A$, mentre

$$A = \frac{D^2 - 4X^2}{4D - 4X}.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $X = 3$, $D = 30$, allora $A = 8$ e i quadrati richiesti sono $25 = 5^2$, $64 = 8^2$, $196 = 14^2$. Risulta che

$$25 \cdot 64 + 801 = 2401 = 49^2$$

$$64 \cdot 196 + 2340 = 14884 = 122^2$$

$$25 \cdot 196 + 1989 = 6889 = 83^2$$

In particolare, se ciascuno di questi quadrati viene sommato a $2X^2$, si otterranno tre piani, tali che il piano-piano risultante dal prodotto di due di essi meno il quadrato della loro somma, moltiplicato per X^2 sia un quadrato.

Facendo riferimento all'esempio precedente $X^2 = 18$, che sommato a ciascuno dei quadrati determinati corrisponde ai piani 43, 82, 214. Essi soddisfano quanto richiesto, infatti

$$43 \cdot 82 - 1125 = 2401 = 49^2$$

$$82 \cdot 214 - 2664 = 14884 = 122^2.$$

$$43 \cdot 214 - 2313 = 6889 = 83^2$$

ZETETICO XIII

Dividere una lunghezza data, in modo che sommato B al primo segmento e D al secondo, il prodotto delle due somme sia un quadrato.

Il primo segmento sia $(A - B)$, il secondo $(X - A + B)$. Sommando B al primo segmento si ottiene A , invece sommando D al secondo $X - A + B + D$. Perciò il prodotto

$$(B + D + X)A - A$$

deve essere un quadrato, sia per esempio uguale a $\frac{S^2 A^2}{X^2}$, pertanto

$$A = \frac{(B + D + X)X^2}{S^2 + X^2}.$$

Il primo segmento sarà

$$\frac{(D + X)X^2 - BS^2}{S^2 + X^2},$$

il secondo

$$\frac{(B + X)S^2 - DX}{S^2 + X^2}.$$

Affinchè sia possibile la sottrazione, è necessario che

$$\frac{X^2 D}{B} < S^2 < \frac{X^2(D+X)}{B}.$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $X = 4$, $B = 12$, $D = 20$ e poichè necessariamente $20 < S^2 < 32$, sia $S = 25$.

Il primo segmento risulta uguale a $\frac{84}{41}$, il secondo a $\frac{80}{41}$. Pertanto il prodotto di $\frac{84}{41} + 12 = \frac{576}{41}$ e $\frac{80}{41} + 20 = \frac{900}{41}$, corrisponde al quadrato $\frac{518400}{1681} = \left(\frac{720}{41}\right)^2$.

Sia $X = 3$, $B = 9$, $D = 15$ e poichè necessariamente $11 + \frac{1}{4} < S^2 < 18$, sia $S = 16$.

Il primo segmento risulta uguale a $\frac{18}{25}$, il secondo a $\frac{57}{25}$. Pertanto il prodotto di $\frac{18}{25} + 9 = \frac{243}{25}$ e $\frac{57}{25} + 15 = \frac{432}{25}$, corrisponde al quadrato $\frac{104976}{625} = \left(\frac{324}{5}\right)^2$.

ZETETICO XIV

Determinare la grandezza A in modo che ($A^2 - G$ piano) sia uguale ad un quadrato e che sia minore di DA e maggiore di BA .

Si supponga $(A^2 - G) = (A - F)^2$, perciò

$$A^2 - G = A^2 - 2AF + F^2,$$

da cui segue che

$$A = \frac{F^2 + G}{2F} \quad \text{con } G \text{ piano.}$$

Dall'ipotesi $A^2 - G < AD$, si deduce che

$$D^2 < DA + G \implies A^2 - DA < G,$$

pertanto

$$A < \sqrt{\frac{D^2}{4} + G} + \frac{D}{2} \quad \text{con } G \text{ piano}$$

e

$$S \geq \sqrt{\frac{D^2}{4} + G} + \frac{D}{2} \quad \text{con } G \text{ piano,}$$

ovvero $A < S$. Allo stesso modo dall'ipotesi $A^2 - G > BA$ segue che

$$A^2 - BA > G,$$

perciò

$$A > \sqrt{\frac{B^2}{4} + G} + \frac{B}{2} \quad \text{con } G \text{ piano}$$

e

$$R \leq \sqrt{\frac{B^2}{4} + G} + \frac{B}{2} \quad \text{con } G \text{ piano,}$$

ovvero $A > R$. In conclusione

$$2SR < F^2 + G < 2SF \quad \text{con } G \text{ piano.}$$

Quindi F non può essere scelto a piacere, ma deve essere compreso entro certi limiti prestabiliti, per lo zetetico questi siano rappresentati da E , pertanto sia $2SE - E^2 > G$ e $2RE - E^2 < G$, allora

$$R + \sqrt{R^2 - G} < F < S + \sqrt{S^2 - G} \quad \text{con } G \text{ piano.}$$

[RETICA ESEGETICA NUMERICA]n.c.

Sia $G \text{ piano} = 60$, $B = 5$, $D = 8$, allora essendo

$$\sqrt{\frac{B^2}{4} + G} + \frac{B}{2} < A < \sqrt{\frac{D^2}{4} + G} + \frac{D}{2},$$

A risulta compresa fra $(\sqrt{\frac{256}{4}} + \frac{5}{2})$ e $(\sqrt{76} + 4)$. Essendo

$$12 < \sqrt{76} + 4 \quad \text{e} \quad 11 > \sqrt{\frac{265}{4}} + \frac{5}{2}$$

si pongano $S = 13$ e $R = 10$, poi si scelga F uguale a 21 o a 19 o a qualunque altro razionale appartenente al suddetto intervallo. Pertanto $A = 11 + \frac{1}{2}$.

Ecco di seguito la soluzione dello zetetico, proposta dal seguente epigramma greco:⁶⁹

Un uomo acquista un certo numero di litri di vini, alcuni al prezzo di 8 dracme e i restanti a 5 dracme al litro. Egli paga in tutto un numero quadrato di dracme, che sommato a 60, rimane un quadrato e la cui radice corrisponde al numero totale di litri di vino acquistati. Quanti litri di vino vengono comprati a 8 dracme? Quanti a 5?

⁶⁹Tenendo presente la traduzione inglese proposta dal testo [13].

	<i>Diofanto</i>	<i>Viète</i>
Litri di vino acquistati	$11 + \frac{1}{2}$	A
Litri di vino acquistati a 8 dracme	$6 + \frac{7}{12}$	
Litri di vino acquistati a 5 dracme	$4 + \frac{11}{12}$	
Limite inferiore	$57 + \frac{1}{2}$	BA
Limite superiore	92	DA
Spesa totale	$72 + \frac{1}{4}$	$A^2 - G \text{ piano}$
	60	$G \text{ piano}$
	$132 + \frac{1}{4}$	A^2

Diofanto enuncia e sviluppa questo zetetico nell'ultimo problema del quinto libro dell'Aritmetica e allo stesso modo termina il libro degli zetetici.

Capitolo 4

Alcune osservazioni di Pierre de Fermat.

DA una prospettiva storiografica si possono considerare due filoni di lettura e interpretazione dell'*Aritmetica* di Diofanto, uno di tipo aritmetico, relativo all'ambito dei numeri razionali, promosso da autori come Rafael Bombelli, Simon Stevin e Pierre de Fermat. L'altro di stampo algebrico-geometrico, in cui si conduce la lettura dei problemi diofantei in termini di grandezze; quest'ultimo fu sviluppato da Viète e i suoi allievi. Gli scritti di Bombelli, Xylander e Stevin, relativi all'*Aritmetica*, infatti erano complessivamente delle semplici traduzioni, in cui la presentazione e il linguaggio erano differenti, ma il contenuto matematico era esattamente quello proposto da Diofanto. Proprio per questo motivo il loro approccio viene definito "aritmetico". Al contrario negli *Zeteticorum libri* si possono individuare numerosi elementi innovativi: Viète non si limita ad una mera traduzione del testo diofanteo in termini di *logistica speciosa*, ma inserisce nuove tipologie di problemi e affianca all'approccio aritmetico, una nuova interpretazione che prevede l'utilizzo di oggetti geometrici come segmenti, superfici, quadrati e così via. Dunque l'interpretazione viètiana sembra evidenziare un maggior impegno tecnico e una certa consapevolezza metodologica che non si riscontrano nelle traduzioni proposte dagli altri lettori. Tuttavia fu proprio dall'approccio aritmetico che si svilupparono spunti di grande interesse matematico, come dimostrano le celebri *Osservazioni su Diofanto* di Pierre de Fermat. Egli era solito riportare le proprie note ed osservazioni sul margine della sua copia dell'*Aritmetica*, talvolta riferendosi direttamente a Viète, la cui influenza fu particolarmente significativa. Qui di seguito verranno analizzate e messe in relazione con i rispettivi zetetici due importanti osservazioni, riguardanti le

equazioni diofantee di secondo e terzo grado. Di particolare interesse risultano l'ottava osservazione, relativa allo zetetico *IV*, 18 e la seconda, celebre osservazione, inerente allo zetetico *IV*, 1, in cui viene enunciato l'*ultimo teorema di Fermat*.

Si considerino i seguenti zetetici, corrispondenti alle *Quæstiones I, II, III* di Bachet:

- ZETETICO *IV*, 18 (Bachet, *Quæstio I*): *Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum summa æqualis sit differentiaë datorum*¹

$$X^3 + Y^3 = B^3 - D^3,$$

con $B, D \in \mathbb{Q}^+$ e $B > D$.

Soluzione:

$$X = \frac{B(B^3 - 2D^3)}{B^3 + D^3} \quad \text{e} \quad Y = \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3} \quad \text{dove} \quad B^3 > 2D^3.$$

- ZETETICO *IV*, 19 (Bachet, *Quæstio II*): *Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia æquet summam datorum*²

$$X^3 - Y^3 = B^3 + D^3.$$

Soluzione:

$$X = \frac{B(B^3 + 2D^3)}{B^3 - D^3} \quad \text{e} \quad Y = \frac{D(2B^3 + D^3)}{B^3 - D^3} \quad \text{dove} \quad B^3 > D^3.$$

- ZETETICO *IV*, 20 (Bachet, *Quæstio III*): *Datis duobus cubis, invenire numero duos alios cubos, quorum differentia æquet differentiam datorum*³

$$X^3 - Y^3 = B^3 - D^3,$$

con $B, D \in \mathbb{Q}^+$ e $B > D$.

Soluzione:

$$X = \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3} \quad \text{e} \quad Y = \frac{B(2D^3 - B^3)}{B^3 + D^3} \quad \text{dove} \quad B^3 < 2D^3.$$

Nell'ottava osservazione, relativa allo zetetico *IV*, 18, Fermat afferma che

¹Assegnati due cubi, trovare numericamente altri due cubi, la cui somma sia uguale alla differenza dei cubi dati.

²Assegnati due cubi, trovare numericamente altri due cubi, la cui differenza sia uguale alla somma dei cubi dati.

³Assegnati due cubi, trovare numericamente altri due cubi, la cui differenza sia uguale alla differenza dei cubi dati.

Determinationem operationis iteratione facillime tollimus et generaliter tum hanc quaestionem, tum sequentes quaestiones construimus, quod nec Bachetus nec ipse Vieta expedire potuti.

Sint dati cubi 64 et 125, inveniendi alii duo quorum summa aequalis sit datorum intervallo. Ex questione tertia [Zet. IV, 20]n.c. [...] quaerantur duo alii cubi quorum differentia aequet differentia datorum. Illos Bachetus inventi et sunt:

$$\frac{15252992}{250047} \quad \text{et} \quad \frac{125}{250047} .$$

Isti duo cubi ex constructione habent intervallum aequale intervallo datorum; sed isti duo cubi, inventi per quaestionis tertiae operationem, possunt iam transferri ad quaestionem primam, quum duplum minoris non superet maiorem. Datis itaque his duobus cubis quaeruntur alii duo quorum summa aequetur intervallo datorum; id quid licet per determinationem huius quaestionis primae. At intervallum datorum horum cuborum est per quaestionem tertiam aequale intervallo cuborum prius sumptorum 64 et 125; igitur construere nihil vetat duos cubos quorum summa aequalis sit intervallo datorum 64 et 125, quod sane miraretur ipse Bachetus.⁴

Quindi anche quando la condizione $B^3 > 2D^3$ non è soddisfatta, è possibile risolvere lo zetetico IV, 18. Infatti mediante lo zetetico IV, 20 si possono determinare due valori X_1 e Y_1 tali che

$$X_1^3 - Y_1^3 = B^3 - D^3,$$

⁴«Ripetendo l'operazione [descritta nello zetetico per determinare la soluzione]n.c., superiamo con grande facilità le condizioni, e in modo generale risolviamo prima questo problema, poi i problemi seguenti, ciò che non seppero fare né Bachet, né lo stesso Viète.

Siano dati i cubi 64 e 125, e se ne debbano trovare altri due, la cui somma sia uguale alla differenza fra i dati.

In base alla questione 3 di Bachet, [Zet. IV, 20]n.c. [...] occorre cercare altri due cubi, la cui differenza sia uguale a quella dei due cubi dati. Bachet ha trovato questi due cubi, che sono

$$\frac{15252992}{250047} \quad \text{e} \quad \frac{125}{250047} .$$

La differenza tra questi due cubi è uguale, per costruzione, alla differenza fra i dati; ma questi due cubi, trovati mediante il procedimento della terza questione, possono già riguardare la prima questione, poichè il doppio del minore non supera il maggiore. Dati quindi questi due cubi, se ne cerchino altri due, la cui somma sia uguale alla differenza dei due dati; ciò infatti è possibile, essendo soddisfatta la condizione della prima questione. Ma la differenza fra questi cubi dati è uguale, per la terza questione, alla differenza tra i cubi assunti prima, 64 e 125; quindi niente vieta di costruire due cubi la cui somma sia uguale alla differenza fra i dati 64 e 125, ciò che certo desterebbe lo stupore dello stesso Bachet.» Vedi pp.13-14 di [5]

pertanto se $X_1^3 > 2Y_1^3$, si può risolvere lo zetetico *IV*, 18, ottenendo

$$X^3 + Y^3 = X_1^3 - Y_1^3 = B^3 - D^3.$$

In particolare Fermat considera il caso in cui $B = 5$ e $D = 4$, per cui

$$X^3 + Y^3 = 125 - 64$$

e poichè $2D^3 = 2 \cdot 64 = 128 > 125 = B^3$, lo zetetico *IV*, 18, non ha soluzione, diversamente dallo zetetico *IV*, 20. Quindi risolvendo l'equazione

$$X^3 - Y^3 = 125 - 64$$

si determinano le soluzioni

$$X_1^3 = \frac{15252992}{250047} \quad \text{e} \quad Y_1^3 = \frac{125}{250047}.$$

Esse sono tali che

$$\frac{15252992}{250047} - \frac{125}{250047} = 125 - 64 = 61$$

e $X_1^3 > 2Y_1^3$. Pertanto se si considerano come cubi noti X_1^3 e Y_1^3 , è possibile applicare e risolvere lo zetetico *IV*, 18:

$$X^3 + Y^3 = \frac{15252992}{250047} - \frac{125}{250047}.$$

In generale se anche X_1 e Y_1 non soddisfano la condizione $X_1^3 > 2Y_1^3$, occorre applicare nuovamente ad essi lo zetetico *IV*, 20, finchè non si individuano due valori X_m e Y_m tali che

$$X_m^3 - Y_m^3 = B^3 - D^3 \quad \text{e} \quad X_m^3 > 2Y_m^3.$$

In questo modo è possibile ottenere le soluzioni dello zetetico *IV*, 18, anche se non viene soddisfatta la condizione $B^3 > 2D^3$.

Generalizzando, si può dedurre il seguente lemma:⁵

LEMMA: *Se lo zetetico IV, 20 viene iterato opportunamente un certo numero di volte m allora la condizione $X_m^3 > 2Y_m^3$ sarà verificata.*

Dimostrazione: Le soluzioni dello zetetico *IV*, 20, determinate da Viète, sono le seguenti

$$X = \frac{D(2B^3 - D^3)}{B^3 + D^3} \quad \text{e} \quad Y = \frac{B(2D^3 - B^3)}{B^3 + D^3} \quad \text{dove} \quad B^3 < 2D^3. \quad (4.1)$$

⁵Si veda p. 91 di [10].

Si ponga $\alpha = \frac{B^3}{D^3}$, dove $1 < \alpha < 2$, allora le (4.1) si possono riscrivere nel modo seguente

$$X_1 = D \frac{2B^3 - D^3}{B^3 + D^3} = D \frac{2\alpha - 1}{1 + \alpha} \quad Y_1 = B \frac{2D^3 - B^3}{B^3 + D^3} = B \frac{2 - \alpha}{1 + \alpha}$$

e analogamente a prima si ponga

$$\alpha_1 = \frac{X_1^3}{Y_1^3} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{2\alpha - 1}{2 - \alpha} \right)^3 = \alpha^2 \left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha - \alpha^2} \right)^3.$$

Se $1 < \alpha < 2$ allora $\left(\frac{2\alpha - 1}{2\alpha - \alpha^2} \right) > 1$, ovvero $(2\alpha - 1) > 2\alpha - \alpha^2$. Pertanto

$$\alpha_1 = \frac{X_1^3}{Y_1^3} > \alpha^2. \quad (4.2)$$

Se $\alpha_1 = \frac{X_1^3}{Y_1^3} > 2$, allora $X_1^3 > 2Y_1^3$, perciò si può applicare e risolvere lo zetetico *IV*, 18.

Se invece $\alpha_1 < 2$, allora $X_1^3 < 2Y_1^3$, per cui si procede applicando nuovamente lo zetetico *IV*, 20, ottenendo due nuovi valori X_2 e Y_2 tali che

$$X_2^3 - Y_2^3 = B^3 - D^3.$$

Quindi ripetendo il ragionamento precedente, si ponga

$$\alpha_2 = \frac{X_2^3}{Y_2^3} = \alpha_1^2 \left(\frac{2\alpha_1 - 1}{2\alpha_1 - \alpha_1^2} \right)^3.$$

Se $1 < \alpha_1 < 2$ allora $\left(\frac{2\alpha_1 - 1}{2\alpha_1 - \alpha_1^2} \right) > 1$, pertanto

$$\alpha_2 = \frac{X_2^3}{Y_2^3} > \alpha_1^2.$$

Inoltre poiché dalla (4.2) risulta che $\alpha_1 > \alpha^2$, si ha

$$\alpha_2 > \alpha_1^2 > \alpha^4.$$

Se $\alpha_2 > 2$, allora $X_2^3 > 2Y_2^3$, perciò si può applicare e risolvere lo zetetico *IV*, 18.

Se invece $\alpha_2 < 2$, allora $X_2^3 < 2Y_2^3$, per cui si procede, analogamente a prima, riapplicando lo zetetico *IV*, 20, fino ad ottenere, dopo k iterazioni, $\alpha_k < 2$ e due valori X_k e Y_k tali che

$$X_k^3 - Y_k^3 = B^3 - D^3 \quad \text{con} \quad \alpha_k > \alpha^{2k}.$$

Riassumendo, vale che

$$\alpha > 1 \quad \alpha_1 > \alpha^2 \quad \alpha_2 > \alpha^4 \quad \alpha_3 > \alpha^6 \quad \dots \quad \alpha_k > \alpha^{2k} \quad \dots$$

per cui, primo o poi, α^{2k} sarà maggiore di 2, ovvero $\alpha_k > \alpha^{2k} > 2$. Esisterà, quindi, un $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{X_m^3}{Y_m^3} > \alpha_m > 2,$$

da cui si ricava che $X_m^3 > 2Y_m^3$.

Pertanto si può affermare che

COROLLARIO: *Lo zetetico IV, 18, può essere sempre risolto, indipendentemente dalla condizione $B^3 > 2D^3$.*

Conseguentemente Fermat conclude la propria osservazione, studiando l'equazione

$$X^3 + Y^3 = B^3 + D^3, \quad (4.3)$$

che non viene trattata né da Viète, né da Bachet; egli sostiene che

Imo, si tres istæ quæstiones eant in circulum et iterentur in infinitum, dabuntur duo cubi in infinitum idem præstantes; ex inventis enim ultimo duobus cubis quorum summa æquet differentiam datorum [Zet. IV, 18]n.c., per quæstionis secundæ operationem quæremus duos alios quorum diffentia æquet summam ultimorum [Zet. IV, 19]n.c., hoc est intervallum priorum, et ex hac differentia rursus quæremus summam et sic in infinitum.⁶

Dati due numeri B e D , con $B > D$, si applichi lo zetetico IV, 19

$$Z^3 - W^3 = B^3 + D^3$$

le cui soluzioni, determinate da Viète, corrispondono a

$$Z_1 = \frac{B(B^3 + 2D^3)}{B^3 - D^3} \quad \text{e} \quad W_1 = \frac{D(2B^3 + D^3)}{B^3 - D^3} \quad \text{dove} \quad B^3 > D^3$$

e verificano l'uguaglianza

$$Z_1^3 - W_1^3 = B^3 + D^3. \quad (4.4)$$

In seguito, si applichi lo zetetico IV, 18

$$X^3 + Y^3 = Z_1^3 - W_1^3,$$

⁶«Anzi, se queste tre questioni si collegano in circolo, e si ripetono all'infinito le operazioni, si otterranno all'infinito coppie di cubi, che hanno la stessa proprietà; infatti, dai due cubi trovati per ultimo, la cui somma è uguale alla differenza dei dati [Zet. IV, 18]n.c., mediante la seconda questione ne ricercheremo altri due la cui differenza sia uguale alla somma degli ultimi [Zet. IV, 19]n.c., cioè alla differenza fra i primi, e dalla differenza di nuovo ricercheremo la somma e così all'infinito.» Vedi p. 14 di [5].

le cui soluzioni X_1, Y_1 soddisfano l'equazione

$$X_1^3 + Y_1^3 = Z_1^3 - W_1^3. \quad (4.5)$$

Dai risultati (4.4) e (4.5) si deduce che

$$X_1^3 + Y_1^3 = B^3 + D^3,$$

pertanto X_1 e Y_1 corrispondono alle soluzioni dell'equazione (4.3). In particolare iterando il procedimento appena descritto, è possibile determinarne infinite. In conclusione

[...] Imo ex supradictis quæstionem, quam Bachetus ignoravit, feliciter construemus:
Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos dividere,
 idque infinitis modis per operationum continuatam, ut supra monuimus, iterationem, [...].⁷

Quindi, Fermat con la sua osservazione, ha esplicitato la relazione che lega gli zetetici 18, 19, 20 e (4.3), fornendo la possibilità di utilizzare un procedimento iterativo per il calcolo delle infinite e possibili soluzioni delle relative equazioni diofantee di terzo grado.

In conclusione non si può non citare la seconda osservazione di Fermat, relativa allo

ZETETICO IV, 1: *Invenire numero duo quadrata, æqualia dato quadrato.*⁸

$$X^2 + Y^2 = F^2 \quad F \in \mathbb{Q}^+.$$

Egli afferma

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere: cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.⁹

⁷«Anzi, da quanto precede risolveremo felicemente la questione che Bachet non ha considerato: *Scorporre un numero dato, composto di due cubi, in due altri cubi*, e questo in infiniti modi, per ripetizione continua delle operazioni, [...].» Vedi p. 15 di [5].

⁸Determinare il quadrato di due numeri, la cui somma corrisponde ad un quadrato dato.

⁹«Non è, invece, possibile dividere un cubo in due cubi, o un biquadrato in due biquadrati, nè, in generale, dividere alcun'altra potenza di grado superiore al secondo in due altre potenze dello stesso grado: della qual cosa ho scoperto una dimostrazione veramente mirabile, che non può essere contenuta nella ristrettezza del margine.» Vedi p. 2 di [5].

enunciando così il suo più celebre teorema.

In questa nota Fermat sostiene che, per $n > 2$, la somma di due potenze n -esime di numeri interi non può a sua volta essere la potenza n -esima di un numero intero. Nel linguaggio dell'algebra moderna, ciò significa che l'equazione

$$X^n + Y^n = Z^n$$

non possiede soluzioni intere, non tutte nulle, per $n > 2$. Al contrario l'equazione

$$X^2 + Y^2 = Z^2$$

ha infinite soluzioni. Quanto appena enunciato prende il nome di *Grande* o *Ultimo teorema di Fermat*. Tuttavia egli non ritornò più sulla sua affermazione e non lasciò traccia nelle sue opere della *dimostrazione mirabile*, che sostiene di aver trovato.

Bibliografia

- [1] R. Bombelli, *L'algebra* (prima edizione integrale) a cura di U. Forti e E. Bortolotti, Roma, Feltrinelli, 1966.
- [2] U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni, 1992.
- [3] J. Christianidis, *Une interpretation Byzantine de Diophante*, in "Historia Mathematica", 25, 1998, pp. 22-28.
- [4] Euclide, "Elementi", trad. it. F. Commandino, Urbino, 1575.
- [5] P. de Fermat, *Osservazioni su Diofanto* a cura di A. Conte, Torino , Universale Bollati Boringhieri, 2006.
- [6] P. Freguglia, *Algebra e geometria in Viète*, in "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", IX, 1989, pp. 49-90.
- [7] P. Freguglia, *L'Arithmétique di Simon Stevin e gli sviluppi dell'algebra nella seconda metà del Cinquecento*, in "La matematizzazione dell'universo" a cura di L. Conti, Assisi, Ed. Porziuncola, 1992, pp. 131-151.
- [8] P. Freguglia, *La geometria fra tradizione e innovazione*, Torino, Bollati Boringhieri, 1999.
- [9] P. Freguglia, *Sur la théorie des équations algébriques entre le XVI et le XVII siècle*, in "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", XIV, fasc. 2, 1994, pp. 259-298.
- [10] P. Freguglia, *Viète reader of Diophantus. An analysis of Zeteticorum libri quinque.*, in "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", XXVIII, 2008, pp.51-95.
- [11] M. Giaquinta, *La forma delle cose*, Roma, Edizione di Storia e Letteratura, 2010.

-
- [12] E. Giusti, *Algebra and Geometry in Bombelli and Viète*, in “Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche”, XII, 1992, pp. 303-328.
- [13] T.L. Heath, *Diophantus of Alexandria, a study in the history of greek algebra.*, Cambridge, University Press, 1910.
- [14] J. Hume, *Algèbre de Viète, d'une methode nouvelle, Claire et facile par laquelle toute l'obscurité de l'inventeur est ostée, Et ses termes pour la plus-part inutiles, changez ès termes ordinaries des Artist*, Parigi, Chez Louis Boulenger, 1636.
- [15] J. Klein, *Greek mathematical thought and the origin of algebra*, New York, Dover Publications, 1992.
- [16] J. L. Vauléard, *La nouvelle algèbre de M. Viète*, Parigi, Chez Iulian Iacquin, 1630.
- [17] J. L. Vauléard, *Les cinq livres des zetetiques de François Viette*, Parigi, Chez Iulian Iacquin, 1630.
- [18] F. Viète, *Francisci Vietæ Opera mathematica, in unum volumen congesta, ac recognita, operâ atque studio Francisci à Schooten Leydensis, Matheseos Professoris*, Elzevier, Lugduni Batavorum, 1646.

Ringraziamenti

Il primo ringraziamento desidero rivolgerlo al Professor Paolo Freguglia per la disponibilità, per i preziosi consigli e per la bella opportunità che mi ha dato.

Ringrazio tutti i miei compagni di corso con cui ho condiviso la fatica e la gioia di questi cinque anni di studio e che porterò sempre nel mio cuore.

Grazie alla mia famiglia e a Matteo per essermi sempre stati vicino nei momenti più duri e più belli, per avermi ascoltato con pazienza e per essere sempre stati presenti.

Infine ringrazio tutti i miei amici, gli anni di vita scout e tutte le persone che ho incontrato che hanno saputo lasciare un segno.