

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**PROBLEMI AL CONTORNO PER
EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE
ED EQUAZIONI IPERBOLICHE
ALLE DERIVATE PARZIALI**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANGELO FAVINI

Presentata da:
FEDERICO BALLANTI

Correlatore:
Chiar.ma Prof.ssa
ELENA LOLI PICCOLOMINI

**II Sessione - 27 Settembre 2013
Anno Accademico 2012/2013**

*Alla mia prozia Maria,
che pur avendo fatto solo la terza elementare
ha sempre avuto un grande amore per la Matematica.*

*Se guardo il tuo cielo, opera delle tue dita, la luna e le stelle che tu hai fissate,
che cosa è l'uomo perché te ne ricordi e il figlio dell'uomo perché te ne curi?
Eppure l'hai fatto poco meno degli angeli, di gloria e di onore lo hai coronato:
gli hai dato potere sulle opere delle tue mani, tutto hai posto sotto i suoi piedi;
tutti i greggi e gli armenti, tutte le bestie della campagna;
Gli uccelli del cielo e i pesci del mare, che percorrono le vie del mare.
O Signore, nostro Dio, quanto è grande il tuo nome su tutta la terra.
(dal Salmo 8)*

Indice

Indice	i
Introduzione	iii
0.1 Problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine	iii
0.2 Equazioni differenziali ordinarie di ordine n a coefficienti costanti	iv
0.3 Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti variabili	vi
1 Problemi al contorno per equazioni differenziali ordinarie	1
1.1 Problemi al contorno omogenei	1
1.2 Problemi agli autovalori	3
1.3 Funzioni ortogonali e serie di Fourier generalizzate	4
1.3.1 Funzioni ortogonali	4
1.3.2 Funzioni peso	6
1.3.3 Serie di Fourier generalizzate	6
1.4 Il problema di Sturm-Liouville	8
1.5 Teoremi su autovalori e autofunzioni	10
1.6 Serie di Fourier ordinarie	11
1.7 Serie di Fourier-Bessel	13
2 L'equazione delle onde in una dimensione	15
2.1 Equazioni differenziali alle derivate parziali	15
2.2 Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine	15
2.3 L'equazione delle onde 1-dimensionale	17
2.3.1 La corda vibrante	17
2.3.2 Soluzione per separazione delle variabili	19
2.3.3 Soluzione per serie di Fourier	22
2.3.4 Soluzione di D'Alembert	23
2.3.5 Unicità della soluzione e conservazione dell'energia	25
3 L'equazione delle onde in due dimensioni	27
3.1 La membrana circolare vibrante	27
A L'equazione di Bessel	33
Bibliografia	37
Elenco delle figure	39

Introduzione

0.1 Problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è un'equazione in cui l'incognita è una funzione $y(x)$ in una variabile indipendente x che compare all'interno dell'equazione con la sua derivata prima $y'(x)$. La forma più generale di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine è

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0$$

dove $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di \mathbb{R}^3 non vuoto.

Sotto opportune ipotesi si può esplicitare $y'(x)$ applicando il teorema delle funzioni implicite e così l'equazione si riduce alla cosiddetta **forma normale**

$$y'(x) = f(x, y(x)) \quad (1)$$

dove $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con Ω aperto di \mathbb{R}^2 non vuoto.

Preso un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ si può definire la **soluzione locale** dell'equazione (1) $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] = I$ con I intorno di x_0 data la **condizione iniziale** $y(x_0) = y_0$. Quindi $\exists y : I \rightarrow J = [y_0 - h, y_0 + h]$ con $I \times J \subseteq \Omega$ e $y \in C^1(I)$ tale che $y'(x) = f(x, y(x)) \forall x \in I$ data la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. La struttura definita dall'equazione differenziale unita alla condizione iniziale si chiama **problema di Cauchy**.

Uno degli elementi fondamentali nello studio dei problemi di Cauchy è trovare sotto quali condizioni si ha la garanzia dell'**esistenza** e dell'**unicità** della soluzione. Consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

con $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ e f funzione continua. $f(x, y(x))$ è continua per composizione di funzioni continue. Quindi risulta, integrando entrambi i membri da x_0 a x e svolgendo tutti i calcoli

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3)$$

E l'equazione differenziale è così diventata un'equazione integrale. Viceversa dall'equazione (3) si ottiene l'equazione (1) per il teorema fondamentale del calcolo integrale. Il problema differenziale si è dunque trasformato in un problema integrale definito dall'equazione (3).

Definizione 1. $f(x, y)$ si dice *funzione localmente lipschitziana* in $(x_0, y_0) \in \Omega$ se esistono un intorno U di (x_0, y_0) con $U \subset \Omega$ e una costante $L > 0$ tali che $\forall (x, y_1), (x, y_2) \in U$ risulti $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$. L si dice *costante di Lipschitz*.

In particolare se $f \in C(\Omega)$ di classe C^1 rispetto a y , allora f é automaticamente localmente lipschitziana in $(x_0, y_0) \in \Omega$ generico con costante di Lipschitz $L = \max_{(x,y) \in K} |f_y(x, y)|$ con $K \subset \Omega$ compatto contenente U intorno di (x_0, y_0) . Con $f_y(x, y)$ si intende $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Inoltre se f_y é limitata in Ω allora f é globalmente lipschitziana in Ω .

Torniamo al problema integrale (3) con la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$. Prendiamo $(x_0, y_0) \in I \times J$ ($I \times J \subset \Omega$) con $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta], J = [y_0 - h, y_0 + h]$ per $\delta > 0, h > 0$ opportuni. Definiamo $M = \sup_{I \times J \subset \Omega} |f(x, y)|$. M é in realtà un massimo in quanto $I \times J$ é compatto. Prendiamo $\delta_1 = \min \left\{ \delta, \frac{h}{M} \right\}$ così risulta $M\delta_1 \leq h$ e rinominiamo $\delta = \delta_1$.

Teorema 1. Se $f \in C(\Omega)$ é localmente lipschitziana in $(x_0, y_0) \in \Omega$, scelto $\delta > 0$ come sopra si ha che il problema di Cauchy (2) ha una e una sola soluzione $y(x)$ locale definita nell'intervallo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Tale soluzione si esprime mediante la formula integrale (3).

Prendiamo ora $\Omega =]a, b[\times \mathbb{R}$ con $]a, b[$ intervallo aperto di \mathbb{R} .

Teorema 2. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ e sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continua e globalmente lipschitziana, ovvero $\exists L > 0$ tale che $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \forall x \in]a, b[\forall y_1, y_2 \in C([a, b])$. Allora la soluzione del problema di Cauchy (2) é definita su tutto l'intervallo $[a, b]$ ed é dunque globale.

Dalla singola equazione differenziale ordinaria del primo ordine si può poi passare al **sistema di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine** esprimibile in maniera compatta utilizzando la notazione vettoriale:

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0 \end{cases} \quad (4)$$

dove $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x)) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0 = (y_{0_1}, \dots, y_{0_n}) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ con Ω^* aperto di \mathbb{R}^{n+1} non vuoto.

0.2 Equazioni differenziali ordinarie di ordine n a coefficienti costanti

In generale un'equazione differenziale ordinaria di ordine n é un'equazione in cui l'incognita é una funzione $y(x)$ in una variabile indipendente x che compare all'interno dell'equazione con le sue derivate fino all'ordine n incluso. La sua espressione più generale (detta equazione in forma implicita) sarà dunque:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

dove $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ con A aperto di \mathbb{R}^{n+2} non vuoto.

In particolare consideriamo il caso delle **equazioni differenziali ordinarie di ordine n lineari a coefficienti costanti** ovvero le equazioni scritte nella forma:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) \quad (5)$$

con $a_i \in \mathbb{R} \forall i = 0, \dots, n - 1$.

Se $f(x) \equiv 0$ l'equazione si dice **omogenea**, altrimenti si dice **non omogenea**.

Teorema 3. *L'insieme delle soluzioni dell'equazione (5) costituisce uno spazio vettoriale su \mathbb{R} di dimensione n .*

Definizione 2. *Se $\{y_1, \dots, y_n\}$ sono n soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (5), allora l'insieme $\{y_1, \dots, y_n\}$ si dice un **sistema fondamentale di soluzioni** dell'equazione (5).*

Definizione 3. *Se $\{y_1, \dots, y_n\}$ sono soluzioni dell'equazione (5) si definisce **Wronskiano** di queste soluzioni e si indica con W il seguente oggetto:*

$$W = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Si verifica che il Wronskiano o è sempre identicamente nullo o non lo è mai. Così basta accertarsi che sia diverso da 0 in un punto affinché sia diverso da 0 su tutto il dominio.

Teorema 4. *$\{y_1, \dots, y_n\}$ costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione (5) se e solo se il loro Wronskiano è sempre diverso da zero ($W \neq 0$).*

Assegnare un problema di Cauchy per l'equazione (5) significa assegnare le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n)}(x_0) = y_n \end{cases}$$

All'interno di questa tesi interesseranno solamente i casi delle equazioni omogenee, dunque proseguiremo lo studio solo per le equazioni del tipo

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1y'(x) + a_0y(x) = 0 \quad (7)$$

Esiste un metodo molto rapido per scrivere la soluzione generale dell'equazione (7) che opera nel seguente modo:

Consideriamo l'equazione (7) e cerchiamo per questa la soluzione generale $y(x)$ sotto la forma $y(x) = e^{\lambda x}$. Sostituendo questa nell'equazione (7) si ottiene

$$e^{\lambda x}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0 \quad (8)$$

Poiché $e^{\lambda x} \neq 0 \forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione (8) si riduce a

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (9)$$

Ponendo $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ risolvere l'equazione (9) si riduce a ricercare le radici del polinomio $P(\lambda)$, che per il teorema fondamentale dell'Algebra sono esattamente n in \mathbb{C} . Il polinomio $P(\lambda)$ viene detto **polinomio caratteristico** associato all'equazione (7) mentre le radici di $P(\lambda)$ sono detti **autovalori** dell'equazione (7).

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ le radici del polinomio caratteristico $P(\lambda)$ nel campo complesso di molteplicità algebrica rispettivamente n_1, \dots, n_s . Allora un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione (7) è dato da

$$\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \dots, x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \dots, x^{n_2-1}e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, \dots, x^{n_s-1}e^{\lambda_s x}\} \quad (10)$$

Poiché i coefficienti a_i sono reali, se esistesse $\lambda^* \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ radice di $P(\lambda)$ allora anche $\bar{\lambda}^*$ sarebbe radice di $P(\lambda)$. In tal caso nel sistema fondamentale di soluzioni (10) si possono sostituire $\{e^{\lambda^* x}, e^{\bar{\lambda}^* x}\}$ con $\{e^{\operatorname{Re}(\lambda^*)x} \cos(\operatorname{Im}(\lambda^*)x), e^{\operatorname{Re}(\lambda^*)x} \sin(\operatorname{Im}(\lambda^*)x)\}$ così (10) diventa un sistema fondamentale di soluzioni

reali.

La soluzione generale dell'equazione (7) sarà dunque una combinazione lineare di queste soluzioni, e le costanti arbitrarie che vi appariranno all'interno saranno univocamente determinate dalle condizioni iniziali date dal problema di Cauchy.

0.3 Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine a coefficienti variabili

Una generica equazione differenziale di ordine n a coefficienti variabili si presenta sotto la forma

$$a_n(x) \frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)y(x) = f(x)$$

dove $a_0(x), \dots, a_n(x), f(x)$ sono funzioni assegnate in x .

Noi considereremo solo il caso delle equazioni del secondo ordine, ovvero le equazioni del tipo:

$$a_2(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy(x)}{dx} + a_0(x)y(x) = f(x) \quad (11)$$

In ogni intervallo in cui si verifica $a_2(x) \neq 0$ si possono dividere entrambi i membri dell'equazione (11) per $a_2(x)$ e così si ottiene l'equazione scritta nella forma che verrà da noi studiata:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = R(x) \quad (12)$$

Noi ci limiteremo ulteriormente al caso $R(x) \equiv 0$, ovvero al caso dell'equazione omogenea:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \quad (13)$$

Un metodo molto efficace per la ricerca della soluzione di un'equazione di questo tipo é il metodo delle **serie di potenze**. Esso consiste nel ricercare la soluzione attorno ad un opportuno punto $x = a$ come somma di una serie di potenze, in potenze di $(x - a)$, ovvero sotto la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots$$

dove i coefficienti a_0, a_1, a_2, \dots sono da determinare.

Definizione 4. Sia $a \in \mathbb{R}$ (oppure \mathbb{C}) e sia U_a un intorno aperto di a in \mathbb{R} (o \mathbb{C}). Una funzione $f(x)$ si dice **analitica** in $x = a$ se si può scrivere come somma di una serie di potenze, in potenze di $(x - a)$, che converge a $f(x)$ in U_a , ovvero se in U_a vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - a)^n$$

Condizione **necessaria** affinché una funzione $f(x)$ sia analitica in $x = a$ é che la funzione e le sue derivate esistano in $x = a$, pertanto la funzione sarà C^∞ su U_a . Pertanto lo sviluppo in serie di potenze di $f(x)$ coinciderà col suo sviluppo di Taylor, e i coefficienti a_n dello sviluppo saranno univocamente determinati dalla formula $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

Definizione 5. Se una funzione $f(x)$ non é analitica in $x = a$ si dice che é **singolare** (o che ha una singolarità) in $x = a$.

0.3. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI VARIABILI

Definizione 6. Il punto $x = a$ si dice **punto ordinario** dell'equazione differenziale (13) se sia $P(x)$ che $Q(x)$ sono analitiche in $x = a$. Se almeno una tra $P(x)$ e $Q(x)$ non è analitica in $x = a$, allora il punto $x = a$ si dice **punto singolare** (o *singularità*) dell'equazione differenziale (13).

Teorema 5. Se il punto $x = a$ è un punto ordinario dell'equazione differenziale (13) allora l'equazione ammette due soluzioni linearmente indipendenti scritte come somma di serie di potenze della forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

Queste soluzioni saranno valide in un opportuno intorno aperto U_a di a e le corrispondenti serie di potenze convergeranno per almeno tutti i valori di x tali per cui valga $|x-a| < R$ dove R è la distanza tra il punto $x = a$ e il più vicino punto singolare dell'equazione (13) all'interno del piano complesso.

Esaminiamo ora il comportamento generale delle soluzioni dell'equazione differenziale (13) vicino ai punti singolari. Per un particolare tipo di singularità si può estendere il metodo di risoluzione per serie di potenze, utilizzando una tecnica nota come **metodo di Frobenius**.

Definizione 7. Un punto $x = a$ si dice **punto singolare regolare** (o *singularità regolare*) per l'equazione differenziale (13) se:

1. $x = a$ è un punto singolare
2. $(x-a)P(x)$ e $(x-a)^2Q(x)$ sono analitiche in $x = a$ secondo la definizione vista prima

Cerchiamo la soluzione attorno a questo punto singolare sotto la forma

$$y(x) = (x-a)^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-a)^k \quad (14)$$

Oltre ai coefficienti a_k bisognerà cercare di determinare anche l'indice α che potrebbe non essere intero.

Per semplicità, spostiamo la singularità dal punto $x = a$ al punto $x = 0$ mediante una traslazione $t = x - a$ e poi rinominiamo $x = t$. Così la soluzione da ricercare si riduce a

$$y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{\alpha+k} = a_0 x^\alpha + a_1 x^{\alpha+1} + \dots \quad (15)$$

Derivando questa soluzione rispettivamente una e due volte rispetto a x , sfruttando il fatto che per definizione si ha che le funzioni $xP(x)$ e $x^2Q(x)$ sono analitiche in $x = 0$, sostituendo quanto ottenuto all'interno dell'equazione (13), e apportando le modifiche necessarie otteniamo

$$a_0[\alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0] + \{a_1[(\alpha+1)\alpha + p_0(\alpha+1) + q_0] + a_0(p_1\alpha + q_1)\}x + \dots = 0 \quad (16)$$

I coefficienti di una serie di potenze sono univocamente determinati, e dunque affinché l'identità (16) sia verificata dovranno necessariamente annullarsi tutti i coefficienti.

In particolare varrà $a_0[\alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0] = 0$ e poichè per ipotesi $a_0 \neq 0$ questo implica $\alpha(\alpha-1) + p_0\alpha + q_0 = 0$ ovvero

$$\alpha^2 + (p_0 - 1)\alpha + q_0 = 0 \quad (17)$$

L'equazione (17) viene detta **equazione indiciale** in quanto viene utilizzata per determinare l'indice α .

Teorema 6. *Se l'equazione differenziale (13) ha una singolarità regolare in $x = 0$ e se le radici α_1, α_2 dell'equazione indiciale (17) sono distinte e non differiscono per un intero allora esistono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (13) della forma*

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

. Queste soluzioni sono valide almeno in un qualche intervallo $(0, R), R > 0$.

Se invece le radici α_1, α_2 dell'equazione indiciale (17) sono coincidenti o differiscono per un intero allora esistono due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (13) della forma

$$y_1(x) = x^{\alpha_1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

$$y_2(x) = x^{\alpha_2} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k + C y_1(x) \ln(x)$$

dove la costante C è non nulla se $\alpha_1 = \alpha_2$ e potrebbe essere nulla o non nulla se α_1 e α_2 differiscono per un intero.

Un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti variabili molto importante che ricorrerà spesso durante la tesi è l'**equazione di Bessel**

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0$$

la cui risoluzione è approfondita nell'appendice A.

Capitolo 1

Problemi al contorno per equazioni differenziali ordinarie

Iniziamo ora l'analisi approfondita dei problemi al contorno (o problemi al bordo). Mentre i problemi di Cauchy possono essere visti come problemi di tipo temporale, in quanto vengono imposte condizioni iniziali e si studia l'evolvere dell'equazione nel tempo, i problemi al contorno possono essere visti come problemi di tipo spaziale, con condizioni sul bordo del dominio su cui è definita l'equazione differenziale coinvolta nel problema. Le **condizioni al contorno** sono anche dette **condizioni al bordo** o **condizioni di Dirichlet**.

A differenza dei problemi di Cauchy, i problemi al contorno potrebbero non avere nessuna soluzione, oppure infinite soluzioni o un'unica soluzione. Crolla dunque il risultato di unicità visto per i problemi di Cauchy.

1.1 Problemi al contorno omogenei

Consideriamo l'operatore lineare del secondo ordine

$$L[y(x)] = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) \quad (1.1)$$

e l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Siano $a_0 \neq 0$ e $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ continue su $[a, b]$. Consideriamo il problema al contorno omogeneo

$$\begin{cases} L[y(x)] = 0 & x \in [a, b] \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

con $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ costanti. Assumiamo $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ e $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$. Le condizioni al contorno del problema sono dette **lineari** e **omogenee** poichè se $u(x)$ e $v(x)$ soddisfano queste condizioni al contorno allora ciò avviene anche per qualsiasi combinazione lineare di $u(x)$ e $v(x)$. Si nota facilmente che questo problema al contorno omogeneo ammette sempre la soluzione banale $y(x) \equiv 0$. Ci chiediamo sotto quali condizioni esistono soluzioni non banali.

Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale $L[y(x)] = 0$. La soluzione generale sarà pertanto della forma $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Per soddisfare le condizioni al contorno si deve verificare

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

ovvero

$$\begin{cases} \alpha_1[c_1y_1(a) + c_2y_2(a)] + \beta_1[c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a)] = 0 \\ \alpha_2[c_1y_1(b) + c_2y_2(b)] + \beta_2[c_1y_1'(b) + c_2y_2'(b)] = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

che diventa

$$\begin{cases} c_1[\alpha_1y_1(a) + \beta_1y_1'(a)] + c_2[\alpha_1y_2(a) + \beta_1y_2'(a)] = 0 \\ c_1[\alpha_2y_1(b) + \beta_2y_1'(b)] + c_2[\alpha_2y_2(b) + \beta_2y_2'(b)] = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Poniamo $B_a(u) = \alpha_1u(a) + \beta_1u'(a)$, $B_b(u) = \alpha_2u(b) + \beta_2u'(b)$ e così le condizioni al contorno diventano

$$\begin{cases} c_1B_a(y_1) + c_2B_a(y_2) = 0 \\ c_1B_b(y_1) + c_2B_b(y_2) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

che in forma matriciale si scrivono come

$$\begin{pmatrix} B_a(y_1) & B_a(y_2) \\ B_b(y_1) & B_b(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Questo sistema possiede soluzioni non banali se e solo se si verifica

$$\det \begin{pmatrix} B_a(y_1) & B_a(y_2) \\ B_b(y_1) & B_b(y_2) \end{pmatrix} = 0 \quad (1.8)$$

e questo fornisce una condizione di esistenza di soluzioni non banali del problema (1.2).

Esempio 1. Consideriamo il problema al contorno

$$\begin{cases} y''(x) + 4y(x) = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Per quanto detto nell'introduzione la soluzione generale dell'equazione di questo problema è $y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$. Imponendo le condizioni al contorno alla soluzione otteniamo $y(0) = y(\pi) = c_1 = 0$ e dunque il problema è soddisfatto dalle funzioni del tipo $y(x) = c_2 \sin(2x)$ con c_2 costante arbitraria. Queste soluzioni saranno pertanto infinite.

Il risultato dell'esempio 1 è generalizzato dal seguente teorema.

Teorema 7. *Se $u(x)$ è una soluzione particolare non banale del problema al contorno (1.2) allora tutte le altre soluzioni sono della forma $y(x) = cu(x)$ con c costante arbitraria.*

Dimostrazione. Sia $v(x)$ una soluzione qualunque del problema (1.2) e sia $u(x)$ come nell'enunciato. Per le condizioni al contorno si ha

$$\begin{cases} \alpha_1u(a) + \beta_1u'(a) = 0 \\ \alpha_1v(a) + \beta_1v'(a) = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

poichè $u(x)$ e $v(x)$ sono entrambe soluzioni di (1.2). Questo è un sistema nelle incognite (α_1, β_1) che ammette una soluzione non banale. Pertanto deve per forza verificarsi

$$\det \begin{pmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{pmatrix} = 0 \quad (1.11)$$

Questo determinante è il Wronskiano di $u(x)$ e $v(x)$ valutato in $x = a$. Si è visto nell'introduzione che se il Wronskiano è nullo in un punto allora è identicamente nullo ovunque. Ciò implica che $u(x)$ e $v(x)$ sono linearmente dipendenti e pertanto esiste una costante c tale per cui si verifica $v(x) = cu(x)$. \square

1.2 Problemi agli autovalori

Molti problemi al contorno omogenei che compaiono nei modelli fisici contengono un parametro. Vediamo un particolare tipo di questi problemi.

Definiamo l'operatore lineare del secondo ordine $L[y(x)]$ e l'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ come nella sezione precedente.

Consideriamo il problema al contorno

$$\begin{cases} L[y(x)] + \lambda y(x) = 0 & x \in [a, b] \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

dove λ è un parametro indipendente da x . Come nella sezione precedente assumiamo $(\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0)$ e $(\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0)$.

La soluzione banale $y(x) \equiv 0$ esiste per tutti i valori del parametro λ . Tuttavia potrebbe verificarsi che le soluzioni non banali esistano per determinati valori del parametro λ ma non per altri valori.

Definizione 8. Se per un determinato valore $\lambda = \lambda_i$ esiste una soluzione non banale del problema (1.12) allora λ_i si dice **autovalore** dell'operatore L (relativo alle condizioni al contorno del problema (1.12)) e la corrispondente soluzione non banale $y_i(x)$ si dice **autofunzione**.

Le autofunzioni sono determinate a meno di una costante moltiplicativa, ovvero se $y_i(x)$ è un'autofunzione corrispondente all'autovalore λ_i lo è anche $c y_i(x)$, con c costante arbitraria.

Quando l'operatore L viene applicato ad una funzione questa potrebbe modificarsi drasticamente. Se invece lo si applica ad un'autofunzione, questa viene semplicemente moltiplicata per una costante, ovvero l'opposto dell'autovalore corrispondente. Questo poichè l'autofunzione risolve l'equazione differenziale del problema (1.12) e dunque risulta $L[y_i(x)] + \lambda_i y_i(x) = 0$ da cui $L[y_i(x)] = -\lambda_i y_i(x)$. Vedremo l'importanza degli autovalori e delle autofunzioni nella risoluzione di determinati problemi fisici retti da equazioni alle derivate parziali.

Esempio 2. Vediamo l'esempio di un problema al contorno agli autovalori che regola lo studio fisico del piegamento di una colonna di lunghezza $L > 0$.

Sia $L > 0$ e consideriamo il problema

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 & x \in [0, L] \\ y(0) = y(L) = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

Si distinguono i casi $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda = 0$. I casi $\lambda < 0$ e $\lambda = 0$ non sono accettabili in quanto entrambi portano solo alla soluzione banale $y(x) \equiv 0$ mentre noi cerchiamo soluzioni non banali. Consideriamo dunque solo il caso $\lambda > 0$. La soluzione generale di $y''(x) + \lambda y(x) = 0$ sarà, per quanto detto nell'introduzione, $y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Applicando la condizione al contorno $y(0) = 0$ si trova $A = 0$ da cui $y(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x)$. La condizione $y(L) = 0$ fornisce invece $y(L) = B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$. Ciò apre la strada a due possibilità: $B = 0$ oppure $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$. $B = 0$ non può essere accettabile in quanto fornirebbe la soluzione banale. Se invece consideriamo i valori λ per cui $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ possiamo assumere $B \neq 0$ ed esistono soluzioni non banali. $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ implica $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ con $n = 1, 2, 3, \dots$ ovvero $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$. Poichè questi autovalori λ dipendono dal valore di n li possiamo denotare con λ_n .

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad (1.14)$$

Questi sono dunque gli autovalori del problema e le corrispondenti autofunzioni sono

$$y_n(x) = B_n(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.15)$$

con B_n costanti reali arbitrarie.

Fisicamente questa soluzione del problema (1.13) implica che la colonna non si piega finchè non raggiunge un certo valore critico, noto come il carico di Eulero. La corrispondente forma della colonna in questo primo stato di piegamento è l'onda $y_1(x) = B_1(x) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ che sembra sia l'unico stato ottenibile sperimentalmente per la maggior parte delle colonne.

1.3 Funzioni ortogonali e serie di Fourier generalizzate

Prima di procedere con lo studio dei problemi al contorno è necessario introdurre le funzioni ortogonali, che studieremo come estensione dei vettori ortogonali, e le serie di Fourier generalizzate.

1.3.1 Funzioni ortogonali

Ricordiamo che un vettore \mathbf{v} dello spazio a tre dimensioni (che identifichiamo con \mathbb{R}^3) è una tripla ordinata di numeri reali $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2, v_3 sono dette le **componenti** di \mathbf{v} . Il vettore \mathbf{v} può essere però visto anche come una funzione $v(x) : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$ con le proprietà $v(1) = v_1, v(2) = v_2, v(3) = v_3$. Questa rappresentazione si estende facilmente ai vettori n -dimensionali.

In tal modo le operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare si leggono come le usuali operazioni tra funzioni. Ad esempio se $v(x)$ e $w(x)$ sono due funzioni definite sull'insieme $\{1, 2, 3\}$ come sopra, allora la funzione somma di $v(x)$ e $w(x)$ è la funzione $u(x) = v(x) + w(x)$ i cui valori $u(1) = v(1) + w(1), u(2) = v(2) + w(2), u(3) = v(3) + w(3)$ altro non sono che le tre componenti della somma dei vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} definiti dalle funzioni $v(x)$ e $w(x)$. Analogamente si definisce l'operazione di moltiplicazione per uno scalare.

Queste considerazioni suggeriscono che le funzioni definite su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ possono essere considerate come vettori e i suoi valori $f(x)$ possono essere visti come le componenti del vettore funzione f . Una differenza fondamentale tra i vettori funzione e i vettori ordinari è che il numero di componenti di un vettore funzione è infinito e più che numerabile. Ciò rende necessario modificare la definizione di prodotto interno (o prodotto scalare) per adattarlo ai vettori funzione. Ricordiamo che il prodotto interno tra due vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} di \mathbb{R}^3 è definito come

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k w_k = \sum_{k=1}^{+\infty} v(k) w(k)$$

L'ultima scrittura è valida se si vedono i vettori come funzioni.

Prendiamo due funzioni continue f e g definite su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e definiamo il prodotto interno tra f e g come

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \tag{1.16}$$

Questo prodotto interno soddisfa le stesse proprietà del prodotto interno tra i vettori ordinari, ovvero:

- a. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
- b. $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- c. $\langle f, f \rangle \geq 0$ e $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

Definiamo poi la **norma** di una funzione continua f , indicata con $\|f\|$, come

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2 dx} \tag{1.17}$$

Definizione 9. Due funzioni f e g continue a valori reali sull'intervallo $[a, b]$ si dicono **ortogonali** sull'intervallo $[a, b]$ se $\langle f, g \rangle = 0$ su $[a, b]$.

Notiamo che la funzione nulla è ortogonale a tutte le funzioni.

Definizione 10. Un insieme infinito di funzioni $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$ a due a due ortogonali su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, ovvero tali per cui si verifica $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ per $i \neq j$, si dice **insieme ortogonale** di funzioni sull'intervallo $[a, b]$. Se le funzioni sono poi tali per cui si verifica $\langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1 \ \forall i = 1, 2, \dots$ allora l'insieme si dice **insieme ortonormale** su $[a, b]$.

Introducendo il simbolo della **delta di Kronecker**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (1.18)$$

si può affermare che un insieme $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots}$ è un insieme ortonormale se vale $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} \ \forall i, j = 1, 2, \dots$

Dato un insieme ortogonale di funzioni non nulle $\{\psi_i\}_{i=1,2,\dots}$ si costruisce facilmente un insieme ortonormale $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots}$ ponendo

$$\varphi_i = \frac{\psi_i}{\|\psi_i\|} \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

Definizione 11. Se un insieme ortonormale ha la proprietà che l'unica funzione continua ortogonale a tutte le funzioni dell'insieme è la funzione nulla allora l'insieme si dice **insieme ortonormale completo**.

Un insieme ortogonale si dice **insieme ortogonale completo** se il corrispondente insieme ortonormale è un insieme ortonormale completo.

Esempio 3. L'insieme di funzioni $\{\sin(\frac{n\pi x}{L})\}_{n=1,2,\dots}$ con $L > 0$ è un insieme ortogonale sull'intervallo $[0, L]$.

Infatti per $m \neq n$ si ha

$$\left\langle \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\rangle = \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) \right] dx = \quad (1.20)$$

$$= \frac{L}{2\pi(m-n)} \left[\sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) \right]_{x=0}^{x=L} - \frac{L}{2\pi(m+n)} \left[\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right) \right]_{x=0}^{x=L} = \quad (1.21)$$

$$= \frac{L}{2\pi(m-n)} \sin[(m-n)\pi] - \frac{L}{2\pi(m+n)} \sin[(m+n)\pi] = 0 \quad (1.22)$$

Per svolgere questi calcoli si è sfruttata l'identità goniometrica $\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$. Per costruire un insieme ortonormale calcoliamo

$$\left\| \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\| = \sqrt{\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx} = \sqrt{\frac{L}{2}}$$

e dunque un insieme ortonormale è dato da

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1,2,\dots}$$

1.3.2 Funzioni peso

Definiamo ora un nuovo tipo di ortogonalità tra funzioni, più generico di quello enunciato nella sezione 1.3.1.

Definizione 12. Due funzioni f e g continue sull'intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ si dicono ortogonali sull'intervallo $[a, b]$ rispetto ad una funzione peso continua $w(x)$ se si verifica

$$\int_a^b w(x)f(x)g(x)dx = 0$$

. Assumiamo $w(x) \geq 0$ e $w(x) \neq 0$.

Ciò equivale a definire un nuovo prodotto interno

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx \quad (1.23)$$

Si verifica che questo prodotto interno ha le stesse proprietà del prodotto interno definito nella sezione precedente.

Anche in questo caso si può definire la norma di una funzione continua f come

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle_w}$$

Definizione 13. Un insieme di funzioni continue a valori reali $\{\varphi_k(x)\}_{k=1,2,\dots}$ si dice insieme ortogonale su $[a, b]$ rispetto alla funzione peso $w(x)$ se si verifica $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_w = 0$ per $k \neq j$ e $\langle \varphi_k, \varphi_k \rangle_w \neq 0$.

L'insieme di funzioni $\{\varphi_k(x)\}_{k=1,2,\dots}$ si dice insieme ortonormale su $[a, b]$ rispetto alla funzione peso $w(x)$ se si verifica $\langle \varphi_k, \varphi_j \rangle_w = \delta_{kj} \forall k, j = 1, 2, \dots$. Un insieme ortonormale rispetto alla funzione peso $w(x)$ si dice completo se l'unica funzione ortogonale a tutte le funzioni dell'insieme è la funzione nulla e un insieme ortogonale rispetto alla funzione peso $w(x)$ di funzioni non nulle si dice completo se il corrispondente insieme ortonormale (ottenibile come nella sezione 1.3.1) è completo.

L'enunciato di insieme ortogonale lo si può dare anche per insiemi di funzioni a valori complessi in base alla seguente definizione.

Definizione 14. Un insieme di funzioni continue a valori complessi $\{\varphi_k(x)\}_{k=1,2,\dots}$ si dice insieme ortogonale in senso Hermitiano su $[a, b]$ rispetto alla funzione peso $w(x)$ se si verifica $\int_a^b w(x)\varphi_k(x)\overline{\varphi_j(x)}dx = 0$ per $k \neq j$ e $\int_a^b w(x)|\varphi_k(x)|^2 dx \neq 0$. Il nuovo prodotto scalare definito da $\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x)f(x)\overline{g(x)}dx$ ha le stesse proprietà di quello definito nel caso reale tranne $\langle f, g \rangle_w = \langle g, f \rangle_w$. Vale invece $\langle f, g \rangle_w = \overline{\langle g, f \rangle_w}$.

1.3.3 Serie di Fourier generalizzate

In \mathbb{R}^3 un insieme ortonormale completo è necessariamente composto da tre elementi. E' noto che un qualunque vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ può sempre essere espresso come combinazione lineare degli elementi di un insieme ortonormale completo $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3\}$, ovvero esistono tre coefficienti reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tali per cui $\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}^1 + \alpha_2\mathbf{u}^2 + \alpha_3\mathbf{u}^3$. Si verifica facilmente che i coefficienti α_i si calcolano come $\alpha_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^i \rangle \forall i = 1, 2, 3$ ovvero $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^1 \rangle \mathbf{u}^1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^2 \rangle \mathbf{u}^2 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}^3 \rangle \mathbf{u}^3$. Questa scrittura si dice anche **serie di Fourier finita**.

1.3. FUNZIONI ORTOGONALI E SERIE DI FOURIER GENERALIZZATE

Cerchiamo ora di estendere questa notazione alle funzioni continue definite su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Sia $\{\varphi_i(x)\}_{i=1,2,\dots}$ un insieme ortonormale completo rispetto alla funzione peso $w(x)$ con $\varphi_i(x)$ funzione continua sull'intervallo $[a, b] \forall i = 1, 2, \dots$ e sia f una funzione continua su $[a, b]$. Vogliamo cercare dei coefficienti c_i per cui si verifichi

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \varphi_i(x)$$

Consideriamo la somma parziale

$$S_N(x) = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x)$$

A noi interessa determinare quei coefficienti c_i tali per cui $\|S_N(x) - f(x)\|$ è minima.

Per definizione di norma si ha

$$\left\| \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x) - f(x) \right\|^2 = \tag{1.24}$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i - f, \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i - f \right\rangle_w = \tag{1.25}$$

$$= \sum_{i=1}^N c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^N c_i \langle \varphi_i, f \rangle_w + \langle f, f \rangle_w = \tag{1.26}$$

$$= \sum_{i=1}^N |c_i - \langle \varphi_i, f \rangle_w|^2 - \sum_{i=1}^N \langle \varphi_i, f \rangle_w + \|f\|^2 \tag{1.27}$$

Questa espressione è minima quando $\sum_{i=1}^N |c_i - \langle \varphi_i, f \rangle_w|^2 = 0$ ovvero quando si verifica

$$c_i = \langle \varphi_i, f \rangle_w \tag{1.28}$$

I coefficienti c_i forniti dall'espressione (1.28) si chiamano **coefficienti generalizzati di Fourier** mentre lo sviluppo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle \varphi_i, f \rangle_w \varphi_i(x) \tag{1.29}$$

si chiama **serie di Fourier generalizzata**.

Se invece di avere a che fare con un insieme ortonormale completo abbiamo a che fare con un insieme ortogonale completo $\{\psi_i\}_{i=1,2,\dots}$ di funzioni non nulle i coefficienti generalizzati di Fourier sono definiti dalla formula

$$c_i = \frac{\langle \psi_i, f \rangle_w}{\langle \psi_i, \psi_i \rangle_w} \tag{1.30}$$

In tal caso la serie generalizzata di Fourier sarà ovviamente della forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\langle \psi_i, f \rangle_w}{\langle \psi_i, \psi_i \rangle_w} \psi_i(x) \tag{1.31}$$

1.4 Il problema di Sturm-Liouville

Consideriamo l'equazione differenziale

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0 \quad (1.32)$$

Si definisce **aggiunta** dell'equazione (1.32) l'equazione

$$[a_0(x)y(x)]'' - [a_1(x)y(x)]' + a_2(x)y(x) = 0 \quad (1.33)$$

Definizione 15. L'equazione (1.32) si dice **autoaggiunta** se è uguale alla sua aggiunta (1.33).

Si dimostra che una condizione necessaria affinché l'equazione (1.32) sia autoaggiunta è

$$a_0'(x) = a_1(x)$$

Si nota in particolare che ogni equazione del secondo ordine del tipo

$$[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = 0$$

è autoaggiunta. Di conseguenza l'operatore

$$L[y(x)] = [p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) \quad (1.34)$$

si dice autoaggiunto.

Si dimostra che se l'operatore $M[y(x)] = a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x)$ non è autoaggiunto lo si può rendere autoaggiunto moltiplicandolo per il fattore

$$\mu(x) = \frac{1}{a_0(x)} \exp \int_0^x \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt$$

supposto $a_0(x) \neq 0$.

Infatti si ha

$$\begin{aligned} M_1[y(x)] &= \mu(x)M[y(x)] = \\ &= a_0(x)\mu(x)y''(x) + a_1(x)\mu(x)y'(x) + a_2(x)\mu(x)y(x) = \\ &= [a_0(x)\mu(x)y'(x)]' + a_2(x)\mu(x)y(x) \end{aligned}$$

Posto $p(x) = a_0(x)\mu(x)$ e $q(x) = a_2(x)\mu(x)$ si ha $M_1[y(x)] = [p(x)y'(x)]' + q(x)y(x)$ che per quanto detto è autoaggiunto.

D'ora in poi nel corso di questa sezione lavoreremo con l'operatore $L[y(x)]$ definito da (1.34) supponendo $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ continue e $p(x) \neq 0$ su un intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Consideriamo il problema agli autovalori:

$$\begin{cases} L[y(x)] + \lambda w(x)y(x) = 0 & x \in [a, b] \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 & (\alpha_1, \beta_1) \neq (0, 0) \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 & (\alpha_2, \beta_2) \neq (0, 0) \end{cases} \quad (1.35)$$

dove $w(x)$ è una funzione continua su $[a, b]$ e vale $w(x) > 0$ su (a, b) . Un problema di questo tipo si chiama **problema di Sturm-Liouville**.

Teorema 8. *Le autofunzioni del problema (1.35) corrispondenti a diversi autovalori sono ortogonali tra loro rispetto alla funzione peso $w(x)$.*

Dimostrazione. Siano λ_n e λ_m ($\lambda_n \neq \lambda_m$) due autovalori distinti e siano $y_n(x)$, $y_m(x)$ le corrispondenti autofunzioni. Si ha

$$L[y_n(x)] = -\lambda_n w(x) y_n(x)$$

e

$$L[y_m(x)] = -\lambda_m w(x) y_m(x)$$

Moltiplichiamo la prima equazione per $-y_m(x)$ e la seconda equazione per $y_n(x)$ e poi sommiamo membro a membro. Così otteniamo

$$y_n(x)L[y_m(x)] - y_m(x)L[y_n(x)] = (\lambda_n - \lambda_m)w(x)y_n(x)y_m(x)$$

Integriamo entrambi i membri da a a b

$$\int_a^b \{y_n(x)L[y_m(x)] - y_m(x)L[y_n(x)]\} dx = (\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w(x)y_n(x)y_m(x) dx$$

Valutiamo

$$\begin{aligned} & \int_a^b \{y_n(x)L[y_m(x)] - y_m(x)L[y_n(x)]\} dx = \\ & = \int_a^b \{y_n(x)[p(x)y'_m(x)]' - y_m(x)[p(x)y'_n(x)]'\} dx = \\ & = [p(x)[y_n(x)y'_m(x) - y_m(x)y'_n(x)]]_{x=a}^{x=b} \end{aligned}$$

L'identità

$$\int_a^b \{y_n(x)L[y_m(x)] - y_m(x)L[y_n(x)]\} dx = [p(x)[y_n(x)y'_m(x) - y_m(x)y'_n(x)]]_{x=a}^{x=b}$$

è nota come **identità di Lagrange**.

Applicando le condizioni al contorno si ha che

$$[p(x)[y_n(x)y'_m(x) - y_m(x)y'_n(x)]]_{x=a}^{x=b} = 0$$

Di conseguenza si ottiene

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int_a^b w(x)y_n(x)y_m(x) dx = 0$$

ma poichè per ipotesi $\lambda_n \neq \lambda_m$ rimane solo

$$\int_a^b w(x)y_n(x)y_m(x) dx = 0$$

ovvero

$$\langle y_n, y_m \rangle_w = 0$$

□

Se le condizioni al contorno fossero periodiche del tipo

$$\begin{cases} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{cases} \quad (1.36)$$

con l'ipotesi aggiuntiva $p(a) = p(b)$ il teorema 8 continuerebbe a valere.

Se nel problema di Sturm-Liouville (1.35) valesse $p(a) = 0$ la dimostrazione del teorema 8 varrebbe senza assumere la prima delle due condizioni al contorno. Tuttavia in questo caso è possibile che una soluzione $y(x)$ dell'equazione differenziale del problema (1.35) tenda a $+\infty$ per $x \rightarrow a$ e che l'integrale che coinvolge questa soluzione $y(x)$ non esista. Allora nel caso $p(a) = 0$ bisogna rimpiazzare la prima condizione al contorno del problema (1.35) con la condizione che $y(x)$ sia limitata in $x = a$. Con questa condizione si ha nuovamente che le autofunzioni corrispondenti a diversi autovalori sono tra loro ortogonali.

Il ragionamento è analogo nel caso in cui si verifichi $p(b) = 0$ e in questo caso bisogna rimpiazzare la seconda condizione al contorno del problema (1.35) con la condizione che $y(x)$ sia limitata in $x = b$.

Nel caso in cui si verifichi $p(a) = 0$ e $p(b) = 0$ contemporaneamente si uniscono i due casi appena esposti.

1.5 Teoremi su autovalori e autofunzioni

Consideriamo il problema di Sturm-Liouville (1.35) con le medesime ipotesi della sezione precedente e supponiamo ulteriormente $p(x) > 0$ su (a, b) . Valgono i seguenti quattro teoremi, di cui vedremo solo in parte o non vedremo affatto le dimostrazioni.

Teorema 9. *Il problema di Sturm-Liouville (1.35) possiede un numero infinito di autovalori λ_n reali distinti. L'insieme degli autovalori $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\dots}$ può essere ordinato in ordine crescente $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ in modo tale che si verifichi $\lambda_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$.*

Dimostrazione. Noi dimostreremo solo che gli autovalori sono reali.

Prendiamo un autovalore $\lambda_n = \alpha + i\beta$ visto come autovalore complesso ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) e la corrispondente autofunzione $y_n(x) = u(x) + iv(x)$ (è lecito supporre che $y_n(x)$ non sia la funzione nulla).

Sostituiamo l'autofunzione $y_n(x)$ all'interno dell'equazione differenziale del problema (1.35). Svolgendo i calcoli e separando la parte reale e la parte immaginaria otteniamo un sistema di due equazioni

$$\begin{cases} [p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) + w(x)[\alpha u(x) - \beta v(x)] = 0 \\ [p(x)v'(x)]' + q(x)v(x) + w(x)[\alpha v(x) + \beta u(x)] = 0 \end{cases}$$

Analogamente alla dimostrazione del teorema 8 moltiplichiamo la prima equazione per $v(x)$ e la seconda equazione per $-u(x)$ poi sommiamo membro a membro ed integriamo da a a b entrambi i membri dell'equazione risultante.

Ricordando che in senso complesso $|y_n(x)|^2 = u^2(x) + v^2(x)$ otteniamo

$$[p(x)u'(x)v(x) - p(x)u(x)v'(x)]_{x=a}^{x=b} = \beta \int_a^b w(x) |y_n(x)|^2 dx$$

Applicando le condizioni al contorno del problema (1.35) si trova che

$$[p(x)u'(x)v(x) - p(x)u(x)v'(x)]_{x=a}^{x=b} = 0$$

e dunque rimane

$$\beta \int_a^b w(x) |y_n(x)|^2 dx = 0$$

Il valore di $\int_a^b w(x) |y_n(x)|^2 dx$ non può essere 0 in quanto $w(x) > 0$ per ipotesi e se assumiamo che $y_n(x)$ sia un'autofunzione non banale risulta $|y_n(x)| \neq 0$ e a maggior ragione $|y_n(x)|^2 \neq 0$. Dunque necessariamente $\beta = 0$ da cui $\lambda_n = \alpha \in \mathbb{R} \forall n = 1, 2, \dots$ □

Teorema 10. *Ad ogni autovalore è associata una sola autofunzione a meno di una costante moltiplicativa.*

Dimostrazione. E' analoga a quella del teorema 7. □

Teorema 11. *L'insieme di autofunzioni $\{\varphi_n(x)\}_{n=1,2,\dots}$ associate agli autovalori $\{\lambda_n\}_{n=1,2,\dots}$ formano un insieme ortogonale completo sull'intervallo $[a, b]$ rispetto alla funzione peso $w(x)$.*

Di rilevante importanza è però il teorema seguente.

Teorema 12. *Se $f(x)$ è una funzione regolare a tratti (ovvero $f(x)$ è continua a tratti e $f'(x)$ è continua a tratti) su $[a, b]$ allora $f(x)$ è sviluppabile in serie generalizzata di Fourier. Questa serie è uniformemente convergente e converge a $f(x) \forall x \in (a, b)$ tale per cui $f(x)$ è continua e converge al valor medio del limite destro e del limite sinistro di $f(x) \forall x \in (a, b)$ tale per cui $f(x)$ è discontinua. Ovvero, mettendo tutto insieme*

$$\frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow 0^+} f(t+s) + f(t-s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n \varphi_n(x) \quad x \in (a, b) \tag{1.37}$$

dove

$$\gamma_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle_w}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle_w}$$

Se le condizioni al contorno del problema (1.35) vengono sostituite con le condizioni periodiche (1.36) e aggiungiamo la condizione $p(a) = p(b)$ i teoremi 9, 11 e 12 continuano a valere mentre il teorema 10 non vale più, potrebbero esistere due autofunzioni linearmente indipendenti che corrispondono allo stesso autovalore.

1.6 Serie di Fourier ordinarie

Le serie di Fourier ordinarie sono le serie di Fourier generalizzate della forma (1.31) dove l'insieme ortogonale $\{\psi_n\}_{n=1,2,\dots}$ è formato da funzioni di tipo sinusoidale.

Un tipico esempio di questi insiemi, dato $L > 0$, è

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1,2,\dots} \tag{1.38}$$

Sia $f(x)$ una funzione regolare a tratti su $[0, 2L]$. Per il teorema 12 $f(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier e il suo sviluppo sarà

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.39}$$

In base alla formula (1.30) i coefficienti a_0, a_n, b_n saranno dati da

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

I coefficienti a_0, a_n, b_n sono detti **coefficienti di Fourier** della funzione $f(x)$. Notiamo che il termine a_0 è il valor medio di $f(x)$ nell'intervallo $[0, 2L]$.

Il membro destro della formula (1.39) è una funzione periodica di periodo $2L$, e pertanto la serie (1.39) convergerà $\forall x$ ad una funzione $F(x)$ definita da

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & x \in (0, 2L) \\ F(x + 2L) = f(x) \end{cases}$$

adottando per i punti di discontinuità la convenzione data dal teorema 12. La funzione $F(x)$ viene detta **estensione periodica** di $f(x)$.

Se l'insieme ortogonale (1.38) fosse solo della forma

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1,2,\dots}$$

allora la serie di Fourier (1.39) si ridurrebbe a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Il membro di destra di questa espansione è una funzione dispari e l'estensione periodica $F(x)$ viene in questo caso detta **estensione periodica dispari** ed è definita da

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & x \in (0, L) \\ F(x) = -f(-x) & x \in (-L, 0) \\ F(x + 2L) = f(x) \end{cases}$$

Analogamente se l'insieme ortogonale (1.38) fosse della forma

$$\left\{ 1, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1,2,\dots}$$

la serie di Fourier (1.39) si ridurrebbe a

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

In questo caso il membro di destra di questa espansione è una funzione pari e l'estensione periodica $F(x)$ viene detta **estensione periodica pari** ed è definita da

$$\begin{cases} F(x) = f(x) & x \in (0, L) \\ F(x) = f(-x) & x \in (-L, 0) \\ F(x + 2L) = f(x) \end{cases}$$

1.7 Serie di Fourier-Bessel

Un importante problema al contorno che coinvolge l'equazione di Bessel (il cui studio è approfondito nell'appendice A) è

$$\begin{cases} x^2 y''(x) + xy'(x) + (\lambda^2 x^2 - n^2)y(x) = 0 & x \in [0, c] \\ y(c) = 0 \\ y(0) \text{ finito} \end{cases} \quad (1.40)$$

con n intero, $n \geq 0$. L'equazione differenziale del problema (1.40) si può anche scrivere nella forma autoaggiunta

$$[xy'(x)]' + \frac{\lambda^2 x^2 - n^2}{x} y(x) = 0 \quad (1.41)$$

e così notiamo che il problema (1.40) è un caso speciale del problema di Sturm-Liouville (1.35) con $p(x) = x$ e funzione peso $w(x) = x$.

Poichè $p(0) = 0$ non occorrono condizioni in $x = 0$ e per quanto detto assumiamo $y(0)$ finito in modo tale che tutta la teoria vista resti valida.

La soluzione generale dell'equazione del problema (1.40) può essere espressa come combinazione lineare delle funzioni di Bessel di ordine n del primo e del secondo tipo ovvero

$$y(x) = AJ_n(\lambda x) + BN_n(\lambda x)$$

Si dimostra che $N_n(x)$ non è limitato in $x = 0$ e dunque dobbiamo assumere $B = 0$ per soddisfare la seconda condizione al contorno. Dunque la soluzione si riduce a

$$y(x) = AJ_n(\lambda x)$$

Per soddisfare la prima condizione al contorno deve risultare $y(c) = AJ_n(\lambda c) = 0$. Non possiamo assumere $A = 0$ altrimenti otterremmo solo la soluzione banale. Dovrà dunque essere $J_n(\lambda c) = 0$.

Sia $\{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots}$ l'insieme delle radici positive dell'equazione $J_n(\alpha) = 0$. Allora gli autovalori dell'equazione differenziale del problema (1.40) sono dati da

$$\lambda_i = \frac{\alpha_i}{c} \quad i = 1, 2, \dots$$

e le corrispondenti autofunzioni sono

$$\{J_n(\lambda_i x)\}_{i=1,2,\dots}$$

La soluzione $y(x)$ dipenderà dunque dall'indice i e pertanto può essere scritta come

$$y_i(x) = A_i J_n(\lambda_i x)$$

L'insieme delle funzioni $\{J_n(\lambda_i x)\}_{i=1,2,\dots}$ con n fissato è un insieme ortogonale sull'intervallo $[0, c]$ rispetto alla funzione peso x .

L'espansione in serie di Fourier rispetto a questo insieme ortogonale è

$$y(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} A_i J_n(\lambda_i x) \quad (1.42)$$

dove i coefficienti A_i sono dati dal solito procedimento

$$A_i = \frac{\int_0^c x J_n(\lambda_i x) f(x) dx}{\int_0^c x [J_n(\lambda_i x)]^2 dx} \quad (1.43)$$

La serie (1.42) viene detta **serie di Fourier-Bessel**.

Calcoliamo $\int_0^c x[J_n(\lambda_i x)]^2 dx$.

Notiamo che $y(x) = J_n(\lambda_i x)$ soddisfa l'equazione

$$[xy'(x)]' + \left(\lambda_i^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y(x) = 0$$

Moltiplichiamo entrambi i membri di questa equazione per $2xy'(x)$ e una volta svolti i calcoli arriviamo alla formula

$$\frac{d}{dx}[xy'(x)]^2 + (\lambda_i^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx}[y(x)]^2 = 0$$

Integriamo da 0 a c

$$\begin{aligned} \int_0^c \frac{d}{dx}[xy'(x)]^2 dx + \int_0^c (\lambda_i^2 x^2 - n^2) \frac{d}{dx}[y(x)]^2 dx &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow [[xy'(x)]^2 + (\lambda_i^2 x^2 - n^2)[y(x)]^2]_{x=0}^{x=c} &= 2\lambda_i^2 \int_0^c x[y(x)]^2 dx \end{aligned}$$

Sfruttando le proprietà $y(c) = J_n(\lambda_i c) = 0 \forall i = 1, 2, \dots$, $J_n(0) = 0$, $y(x) = J_n(\lambda_i x)$, $y'(x) = \lambda_i J_n'(\lambda_i x)$ si ottiene

$$\int_0^c x[J_n(\lambda_i x)]^2 dx = \frac{c^2}{2} [J_n'(\lambda_i c)]^2$$

Vale la proprietà

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

che nel nostro caso diventa

$$\begin{aligned} \lambda_i c J_n'(\lambda_i c) &= nJ_n(\lambda_i c) - \lambda_i c J_{n+1}(\lambda_i c) \Rightarrow \\ \Rightarrow J_n'(\lambda_i c) &= -J_{n+1}(\lambda_i c) \end{aligned}$$

poichè $J_n(\lambda_i c) = 0$. Dunque vale

$$\int_0^c x[J_n(\lambda_i x)]^2 dx = \frac{c^2}{2} [J_{n+1}(\lambda_i c)]^2$$

In conclusione i coefficienti A_i si possono scrivere come

$$A_i = \frac{2}{c^2 [J_{n+1}(\lambda_i c)]^2} \int_0^c x J_n(\lambda_i x) f(x) dx \quad (1.44)$$

Capitolo 2

L'equazione delle onde in una dimensione

2.1 Equazioni differenziali alle derivate parziali

Passiamo ora allo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali, ovvero equazioni differenziali le cui soluzioni sono funzioni in più di una variabile indipendente e pertanto conterranno al loro interno le derivate parziali di queste soluzioni.

Sia Ω un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^m . Ricordiamo che una funzione $u(\mathbf{x}) = u(x_1, \dots, x_m)$ si dice di **classe** C^n su Ω (n può anche essere ∞) e si indica con $u \in C^n(\Omega)$ se u è continua su Ω ed è differenziabile su Ω fino alla derivata n -esima e tutte le derivate parziali di ordine $1, \dots, n$ sono continue. Si dice anche che u ha regolarità uguale a n .

Si dice che $u \in C^n(\Omega; X)$ se $u \in C^n(\Omega)$ e u è a valori nell'insieme X .

Consideriamo una funzione $u(\mathbf{x}) \in C^\infty(\Omega)$. Introduciamo una notazione che permetta di abbreviare la scrittura delle derivate parziali della funzione $u(\mathbf{x})$ rispetto alle variabili x_1, \dots, x_m .

$$u_{x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_i} \quad u_{x_i x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \quad u_{x_i x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_i^2}$$

e così via.

Definizione 16. *Un'equazione differenziale alle derivate parziali (o equazione alle derivate parziali) di ordine $n \in \mathbb{N}$ in m variabili indipendenti è una scrittura del tipo (posto $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$)*

$$\varphi \left(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 u(\mathbf{x})}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^n u(\mathbf{x})}{\partial x_m^n} \right) = 0 \quad (2.1)$$

dove $u(\mathbf{x})$ è una funzione incognita a valori in \mathbb{R} (o \mathbb{C}) definita su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

L'**ordine** di un'equazione alle derivate parziali è l'ordine massimo di derivazione con cui è presente la funzione incognita, che dovrà avere la regolarità almeno uguale all'ordine.

Noi ci limiteremo al caso delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in due o tre variabili indipendenti.

2.2 Equazioni alle derivate parziali del secondo ordine

In base a quanto detto un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine in due variabili indipendenti x e y sarà una scrittura del tipo

$$\varphi(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y), u_{xx}(x, y), u_{xy}(x, y), u_{yy}(x, y)) = 0 \quad (2.2)$$

con $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$, Ω sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 . Notiamo che non è presente $u_{yx}(x, y)$ in quanto essendo $u \in C^2(\Omega)$ si ha per il teorema di Schwarz $u_{xy}(x, y) = u_{yx}(x, y)$ su Ω . Per semplicità nel corso dei calcoli ometteremo la dipendenza della funzione incognita dalle variabili indipendenti, ovvero indicheremo $u \equiv u(x, y)$, $u_x \equiv u_x(x, y)$ e via dicendo.

Noi considereremo solamente le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti, ovvero le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine del tipo

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + f = 0 \quad (2.3)$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Se $f = 0$ l'equazione si dice omogenea, altrimenti si dice non omogenea. Questa scrittura ricorda l'equazione di secondo grado che regola la rappresentazione delle coniche nel piano

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2.4)$$

La conica rappresentata è un'ellisse se $b^2 - 4ac < 0$, una parabola se $b^2 - 4ac = 0$, un'iperbole se $b^2 - 4ac > 0$.

Esiste una classificazione analoga per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine del tipo (2.3). L'equazione viene detta **ellittica** se $b^2 - 4ac < 0$, **parabolica** se $b^2 - 4ac = 0$, **iperbolica** se $b^2 - 4ac > 0$. All'interno della Fisica Matematica sono presenti tre modelli molto importanti regolati da equazioni alle derivate parziali del secondo ordine lineari a coefficienti costanti omogenee in due variabili indipendenti di cui una ellittica, una parabolica e una iperbolica.

Le due variabili indipendenti si indicano tipicamente con (x, t) per indicare il caso di una variabile spaziale e una variabile temporale o con (x, y) per indicare il caso di due variabili spaziali.

I tre modelli sono:

1. Modello delle onde regolato dall'equazione iperbolica

$$y_{xx} = \frac{1}{a^2} y_{tt} \quad a^2 > 0$$

2. Modello del calore regolato dall'equazione parabolica

$$u_{xx} = \frac{1}{k} u_t \quad k > 0$$

3. Modello di Laplace regolato dall'equazione ellittica

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Notiamo che questo modello a differenza degli altri due è stazionario, ovvero non presenta dipendenza dal tempo t .

Noi studieremo nel dettaglio solo il modello iperbolico delle onde.

2.3 L'equazione delle onde 1-dimensionale

2.3.1 La corda vibrante

Consideriamo una corda flessibile di lunghezza $L > 0$ e massa $m > 0$ estesa al massimo in orizzontale e fissata agli estremi. Possiamo visualizzare la corda all'interno del piano cartesiano (x, y) fissando l'estremo sinistro della corda nell'origine $(0, 0)$ e l'estremo destro nel punto $(L, 0)$. Se esercitiamo sulla corda un piccolo spostamento verticale e in seguito rilasciamo la corda, essa inizierà a vibrare in verticale. In particolare un preciso punto P a distanza x dall'estremo sinistro della corda vibrerà verticalmente, e lo spostamento verticale y varierà col tempo t . Così y dipenderà sia dalla posizione x che dal tempo t , $y = y(x, t)$.

Assumiamo y di classe C^2 sull'aperto Ω di \mathbb{R}^2 , $\Omega = (0, L) \times (0, +\infty)$. Assumiamo che l'unica forza esercitata sulla corda sia la tensione T , senza considerare gli effetti della gravità, dell'attrito ecc. Assumiamo che la densità di lunghezza δ (massa per unità di lunghezza) sia costante lungo la corda $\delta = \frac{m}{L}$. Assumiamo infine che lo spostamento $y(x, t)$ sia abbastanza piccolo in modo tale che l'angolo d'inclinazione α della curva di spostamento sia sempre piccolo.

Consideriamo un elemento della corda di lunghezza Δs compreso tra due punti P_1 e P_2 . Siano x e $x + \Delta x$ le ascisse rispettivamente di P_1 e P_2 e siano T_1 la tensione della corda in P_1 e T_2 la tensione della corda in P_2 . Siano α_1 e α_2 gli angoli formati da T_1 e T_2 con l'orizzontale. La figura 2.1 riassume tutto ciò.

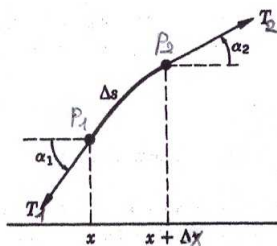


Figura 2.1: Modello della corda vibrante

Le componenti orizzontali di T_1 e T_2 devono essere uguali altrimenti si violerebbe il fatto che le vibrazioni dei punti della corda sono verticali. Ciò vuol dire

$$T_1 \cos(\alpha_1) = T_2 \cos(\alpha_2) = T_0$$

con T_0 costante. La componente verticale F della forza esercitata sull'elemento Δs sarà

$$F = T_1 \sin(\alpha_1) - T_2 \sin(\alpha_2)$$

ovvero

$$F = T_0 \frac{\sin(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} - T_0 \frac{\sin(\alpha_2)}{\cos(\alpha_2)} = T_0 [\tan(\alpha_1) - \tan(\alpha_2)]$$

Dalla definizione di derivata si ottiene

$$F = T_0 [y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)]$$

La massa dell'elemento considerato è per quanto detto $m = \delta \Delta s$. Le nostre ipotesi ci permettono di approssimare Δs con Δx . Pertanto applicando la legge di Newton abbiamo

$$T_0 [y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)] = \delta \Delta x y_{tt}(x, t)$$

2.3. L'EQUAZIONE DELLE ONDE 1-DIMENSIONALE

dove assumiamo che lo spostamento verticale sia abbastanza piccolo in modo tale che l'accelerazione di tutti i punti dell'elemento sia approssimativamente $y_{tt}(x, t)$. Dividendo l'equazione per $\delta\Delta x$ otteniamo

$$\frac{T_0}{\delta} \left[\frac{y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)}{\Delta x} \right] = y_{tt}(x, t)$$

Se facciamo tendere Δx a 0 rimane

$$\frac{T_0}{\delta} y_{xx}(x, t) = y_{tt}(x, t)$$

Pochè $\frac{T_0}{\delta} > 0$ poniamo $a^2 = \frac{T_0}{\delta}$ e così otteniamo l'equazione alle derivate parziali per lo spostamento di una corda vibrante, nota anche come **equazione delle onde 1-dimensionale**, ed è il tipico esempio di equazione iperbolica.

$$y_{xx}(x, t) = \frac{1}{a^2} y_{tt}(x, t) \tag{2.5}$$

La costante a viene detta **velocità di propagazione**.

Dobbiamo aggiungere ulteriori condizioni affinché questa equazione risolva il nostro problema. Le estremità della corda devono sicuramente rimanere fisse, ovvero y deve annullarsi in $x = 0$ e in $x = L \forall t \geq 0$. Abbiamo così le condizioni al contorno $y(0, t) = 0 \forall t \geq 0$ e $y(L, t) = 0 \forall t \geq 0$.

Lo spostamento dipenderà anche da come la corda viene messa in movimento. Se assumiamo che la corda abbia una curva di spostamento iniziale $y = f(x)$ e che sia rilasciata dalla condizione di riposo abbiamo le condizioni iniziali $y(x, 0) = f(x) \forall x \in [0, L]$ e $y_t(x, 0) = 0 \forall x \in [0, L]$

Da questo si deduce che la funzione $f(x)$ non può essere completamente arbitraria. Ad esempio dovrà essere $f(0) = f(L) = 0$. Altre restrizioni su $f(x)$ verranno imposte durante la ricerca della soluzione.

Queste restrizioni su $f(x)$ assicureranno l'esistenza e l'unicità della soluzione al problema

$$\begin{cases} y_{xx}(x, t) = \frac{1}{a^2} y_{tt}(x, t) & (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty) \\ y(0, t) = y(L, t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ y(x, 0) = f(x) & \forall x \in [0, L] \\ y_t(x, 0) = 0 & \forall x \in [0, L] \end{cases} \tag{2.6}$$

Un problema come questo si dice anche **problema di Cauchy-Dirichlet** in quanto presenta sia condizioni al contorno che condizioni iniziali. Il problema di Cauchy Dirichlet (2.6) con tutte le condizioni sia iniziali che al contorno è rappresentato graficamente nella figura 2.2.

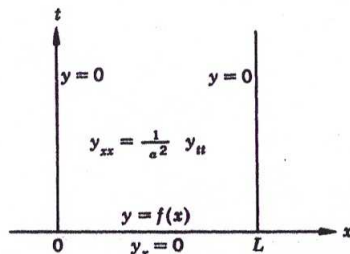


Figura 2.2: Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde

2.3.2 Soluzione per separazione delle variabili

Il moto più semplice possibile per la corda sarà una vibrazione periodica in cui ogni punto sulla corda si muove di semplice moto armonico e in cui tutti i punti sulla corda si muovono con lo stesso periodo e la stessa frequenza e sono tra loro in fase durante il moto. Questi moti vengono chiamati modi normali. Se lo spostamento iniziale è dato da una funzione $X(x)$ allora il punto x eseguirà vibrazioni armoniche con ampiezza $X(x)$. Così lo spostamento sarà rappresentato da una funzione della forma $y(x, t) = X(x) \cos(\omega t)$.

In generale possiamo aspettarci che i moti più semplici della corda siano rappresentati da funzioni periodiche $T(t)$ dipendenti dal tempo t con ampiezza $X(x)$ dipendente dalla posizione x . Ovvero ci aspettiamo soluzioni della forma

$$y(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.7)$$

Se riusciamo a trovare soluzioni di questa forma allora, poichè l'equazione differenziale (2.5) è lineare e omogenea, possiamo combinare queste soluzioni per produrre moti più complicati. Questo metodo di ricerca della soluzione si chiama **metodo di separazione delle variabili**.

Sostituiamo la formula (2.7) nell'equazione (2.5) e otteniamo così

$$X''(x)T(t) = \frac{1}{a^2} X(x)T''(t) \quad (2.8)$$

Poichè cerchiamo soluzioni non banali possiamo supporre $y(x, t) = X(x)T(t) \neq 0$. In tal modo possiamo dividere entrambi i membri dell'equazione (2.8) per $X(x)T(t)$. Così rimane

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (2.9)$$

Il membro di sinistra dell'equazione (2.9) dipende solo da x e non da t , mentre viceversa il membro di destra dipende solo da t e non da x . Ma l'unico modo per far sì che due funzioni così fatte siano uguali, poichè x e t sono tra loro indipendenti, è che entrambe le funzioni siano uguali ad una costante k . Si ottengono così le due equazioni

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = k \quad \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = k$$

che equivalgono alle equazioni

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad (2.10)$$

$$T''(t) - a^2 k T(t) = 0 \quad (2.11)$$

In tal modo il problema della ricerca di una soluzione di un'equazione alle derivate parziali si è ridotta al problema della ricerca della soluzione di due equazioni differenziali ordinarie. Abbiamo così separato le variabili x e t . Se riusciamo a trovare le soluzioni $X(x)$ e $T(t)$ delle equazioni (2.10) e (2.11) allora la funzione (2.7) sarà soluzione dell'equazione (2.5) (non vale però il viceversa, non tutte le soluzioni dell'equazione (2.5) sono della forma (2.7)).

Se $y(x, t) = X(x)T(t)$ è effettivamente una soluzione, deve soddisfare le condizioni al contorno del problema (2.6), ovvero deve annullarsi in $x = 0$ e in $x = L$. Così dovrà per forza verificarsi $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ altrimenti l'altra alternativa sarebbe $T(t) = 0 \forall t \geq 0$ ma ciò porterebbe alla sola soluzione banale che abbiamo escluso. Per $X(x)$ otteniamo così il problema al contorno

$$\begin{cases} X''(x) - kX(x) = 0 & x \in (0, L) \\ X(0) = X(L) = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

2.3. L'EQUAZIONE DELLE ONDE 1-DIMENSIONALE

L'equazione (2.10) è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine lineare, omogenea, a coefficienti costanti e la soluzione si trova mediante il metodo visto nell'introduzione. Tuttavia bisogna distinguere i casi $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

Per $k > 0$ e $k = 0$ si dimostra che l'unica soluzione al problema al contorno (2.12) è la soluzione banale $X(x) \equiv 0$, e dunque questi casi non sono accettabili.

Invece se $k < 0$, ovvero $k = -\lambda^2$ con $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, l'equazione (2.10) diventa

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

la cui soluzione generale è

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x) \quad (2.13)$$

con c_1, c_2 costanti.

Applicando la condizione al contorno $X(0) = 0$ alla soluzione (2.13) otteniamo $X(0) = c_1 = 0$ da cui

$$X(x) = c_2 \sin(\lambda x)$$

Per soddisfare la condizione al contorno $X(L) = 0$ deve verificarsi $c_2 \sin(\lambda L) = 0$. Il caso $c_2 = 0$ non è accettabile in quanto porterebbe nuovamente alla soluzione banale. Dunque l'unico modo per ottenere soluzioni non banali è avere $\sin(\lambda L) = 0$ ovvero $\lambda L = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ che possiamo anche scrivere come

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Pertanto il problema (2.12) ha una soluzione non banale solo per determinati valori del parametro λ . Questi valori di λ sono gli autovalori del problema (2.12) e le corrispondenti autofunzioni sono

$$X_n(x) = \tilde{c}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.14)$$

con \tilde{c}_n costanti dipendenti da n .

Notiamo che se $n = 0$ otteniamo la soluzione banale $X(x) = 0$ mentre i valori $n = -1, -2, \dots$ forniscono le soluzioni opposte a quelle generate da $n = 1, 2, \dots$. Pertanto possiamo ulteriormente restringerci a

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, \dots$$

L'equazione (2.11) per $T(t)$ diventa in base a quanto dimostrato finora

$$T''(t) + a^2 \lambda_n^2 T(t) = 0$$

che ha come soluzione

$$T(t) = c_3 \cos(a\lambda_n t) + c_4 \sin(a\lambda_n t) \quad (2.15)$$

con c_3, c_4 costanti. Per quanto visto si può scrivere la soluzione (2.15) come

$$T(t) = c_3 \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + c_4 \sin\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \quad (2.16)$$

da cui

$$T'(t) = \frac{an\pi}{L} \left[-c_3 \sin\left(\frac{an\pi t}{L}\right) + c_4 \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \right] \quad (2.17)$$

Applicando la seconda condizione iniziale del problema (2.6) a (2.7) otteniamo $X(x)T'(0) = 0$ $\forall x \in [0, L]$ e ciò implica $T'(0) = 0$ ovvero $c_4 = 0$. Per cui si ottiene

$$T(t) = T_n(t) = c_3 \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \quad (2.18)$$

Poniamo $c_n = c_3 \tilde{c}_n$. Coi calcoli svolti abbiamo mostrato che una soluzione candidata al problema di Cauchy-Dirichlet (2.5) è

$$y_n(x, t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

con c_n costanti dipendenti da n .

Dobbiamo ancora applicare l'altra condizione iniziale del problema (2.6), $y(x, 0) = f(x)$. Supponiamo per ora che lo spostamento iniziale della corda sia dato da

$$y(x, 0) = f(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

Questa condizione può essere soddisfatta da una soluzione del tipo (2.19) prendendo $n = 1$ e $c_1 = A$. Si ottiene così la soluzione

$$y(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{a\pi t}{L}\right) \quad (2.20)$$

che soddisfa l'equazione e tutte le condizioni del problema di Cauchy-Dirichlet (2.6).

Il moto descritto da questa soluzione si chiama **primo modo normale di vibrazione** ed è rappresentato dalla figura 2.3.

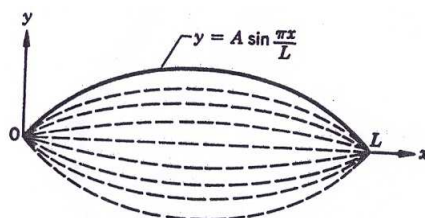


Figura 2.3: Primo modo normale di vibrazione

In realtà le soluzioni date dalla formula (2.19) sono tutti modi normali per ogni valore di n e sono soluzioni del problema (2.6) nel caso in cui la condizione iniziale sia della forma

$$y(x, 0) = f(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

I moti descritti dalle soluzioni (2.19) sono moti periodici nel tempo t con frequenza circolare

$$\omega_n = \frac{an\pi}{L}$$

. Queste frequenze ω_n sono chiamate le **frequenze naturali** del sistema. Notiamo che il caso $n = 0$ implica la soluzione banale $y(x, t) \equiv 0$ che si verifica nel caso in cui alla corda non sia dato alcuno spostamento iniziale.

2.3.3 Soluzione per serie di Fourier

Se lo spostamento iniziale $y(x, 0) = f(x)$ della corda non è esattamente della forma di una delle autofunzioni $\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ allora il problema (2.6) non lo si può risolvere con una singola funzione come nel caso appena visto.

Tuttavia se $f(x)$ si può rappresentare come combinazione lineare di autofunzioni del tipo (2.14), ovvero

$$y(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

allora, poichè l'equazione delle onde (2.5) è lineare e omogenea, la soluzione si può scrivere come

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^N A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \quad (2.21)$$

e questa soluzione soddisfa l'equazione e tutte le condizioni del problema di Cauchy-Dirichlet (2.6). In generale però la funzione $f(x)$ non si può esprimere come somma finita di funzioni del tipo (2.14). Però come conseguenza del teorema 12 abbiamo che se $f(x)$ è continua e regolare a tratti nell'intervallo $[0, L]$ e se $f(0) = f(L) = 0$ allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier rispetto all'insieme ortogonale

$$\left\{ \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=1,2,\dots}$$

come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.22)$$

dove A_n sono i coefficienti di Fourier di $f(x)$ definiti dalla formula

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (2.23)$$

La prima condizione iniziale del problema (2.6) richiede $y(x, 0) = f(x)$ e così se $f(x)$ è della forma (2.22) è naturale estendere la somma finita (2.21) in una serie infinita del tipo

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{an\pi t}{L}\right) \quad (2.24)$$

Se sostituiamo $t = 0$ nella formula (2.24) otteniamo

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

e dunque la condizione iniziale del problema (2.6) sarà soddisfatta se scegliamo i coefficienti A_n come i coefficienti di Fourier di $f(x)$ dati dalla formula (2.23).

Vale $y_t(x, 0) = 0$ e dunque anche la seconda condizione iniziale del problema (2.6) è soddisfatta. La soluzione (2.24) coi coefficienti A_n dati dalla formula (2.23) è dunque una soluzione formale del problema di Cauchy-Dirichlet (2.6).

2.3.4 Soluzione di D'Alembert

Le funzioni $F(x + at)$ e $G(x - at)$ soddisfano l'equazione delle onde (2.5) se F e G sono due funzioni di classe almeno C^2 .

Infatti se si ha $y(x, t) = F(x + at)$ vale (posto $r = x + at$)

$$y_x = F_r \quad y_{xx} = F_{rr} \quad y_t = aF_r \quad y_{tt} = a^2 F_{rr}$$

e sostituendo queste identità all'interno dell'equazione delle onde (2.5) si trova $F_{rr} = F_{rr}$.

Se invece si ha $y(x, t) = G(x - at)$ si pone $s = x - at$ e con un procedimento analogo si trova $G_{ss} = G_{ss}$. Ciò permette di semplificare l'equazione delle onde (2.5) introducendo le nuove variabili indipendenti $r = x + at$ e $s = x - at$.

Se poniamo $y(x, t) = Y(r, s)$ otteniamo le identità

$$y_x = Y_r + Y_s \quad y_{xx} = Y_{rr} + 2Y_{rs} + Y_{ss} \quad y_t = a(Y_r - Y_s) \quad y_{tt} = a^2(Y_{rr} - 2Y_{rs} + Y_{ss})$$

Se sotituiamo queste identità all'interno dell'equazione delle onde (2.5) troviamo

$$Y_{rr} + 2Y_{rs} + Y_{ss} = Y_{rr} - 2Y_{rs} + Y_{ss}$$

da cui

$$Y_{rs} = 0 \tag{2.25}$$

L'equazione (2.25) si può risolvere direttamente in quanto equivale all'equazione $(Y_r)_s = 0$ ovvero $Y_r = f(r)$ dove f è una funzione arbitraria nella sola variabile indipendente r continua e differenziabile. $Y_r = f(r)$ implica

$$Y(r, s) = \int_0^r f(\tau) d\tau + G(s)$$

$\int_0^r f(\tau) d\tau$ è un'arbitraria funzione di classe almeno C^2 nella sola variabile indipendente r . Chiamiamo questa funzione $F(r)$.

Possiamo dunque scrivere la soluzione generale dell'equazione (2.25) come

$$Y(r, s) = F(r) + G(s)$$

Ritornando alle variabili originarie (x, t) notiamo che la soluzione generale dell'equazione delle onde (2.5) si può scrivere come

$$y(x, t) = F(x + at) + G(x - at) \tag{2.26}$$

dove F e G sono due funzioni arbitrarie di classe almeno C^2 .

Cercheremo ora di determinare le funzioni F e G in modo tale che soddisfino sia le condizioni al contorno che le condizioni iniziali del problema di Cauchy-Dirichlet (2.6).

Le condizioni iniziali richiedono $y(x, 0) = f(x)$ e $y_t(x, 0) = 0$ con $x \in [0, L]$. Sostituendo queste condizioni nella formula (2.26) otteniamo le condizioni

$$F(x) + G(x) = f(x) \tag{2.27}$$

e

$$a[F'(x) - G'(x)] = 0 \tag{2.28}$$

Integrando la condizione (2.28) otteniamo $F(x) - G(x) = C$ con C costante. Applicando questo risultato alla condizione (2.27) otteniamo

$$F(x) = \frac{1}{2}[f(x) + C] \quad G(x) = \frac{1}{2}[f(x) - C] \quad (2.29)$$

Sostituendo le condizioni (2.29) nella formula (2.26) otteniamo

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f(x + at) + f(x - at)] \quad (2.30)$$

La formula (2.30) fornisce la soluzione generale del problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} y_{xx}(x, t) = \frac{1}{a^2}y_{tt}(x, t) \\ y(x, 0) = f(x) \\ y_t(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

Una soluzione di questo tipo viene detta **soluzione di D'Alembert**.

Prima di imporre anche le condizioni al contorno del problema (2.6) analizziamo il significato fisico di quanto trovato finora.

La formula (2.30) significa che lo spostamento $y(x, t)$ della corda è una combinazione degli spostamenti $\frac{1}{2}f(x + at)$ e $\frac{1}{2}f(x - at)$ dove $f(x)$ è lo spostamento iniziale della corda. La funzione $f(x + at)$ può essere interpretata fisicamente come un'onda di forma $f(x)$ che si muove verso sinistra lungo l'asse x con velocità a , mentre la funzione $f(x - at)$ rappresenta un'onda di forma $f(x)$ che si muove verso destra lungo l'asse x con velocità a . In tal modo lo spostamento risultante $y(x, t)$ dato dalla formula (2.30) consiste nella somma di due onde che viaggiano in direzioni opposte e le cui velocità sono uguali in modulo.

Per completare la soluzione del problema (2.6) imponiamo anche le condizioni al contorno e notiamo che la soluzione data dalla formula (2.30) include tutte le soluzioni del problema (2.6). In particolare include anche la soluzione per serie di Fourier vista prima.

Consideriamo infatti la formula (2.24) e ricordiamo l'identità goniometrica

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

In tal modo risulta

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \left\{ \sin \left[\frac{n\pi}{L}(x + at) \right] + \sin \left[\frac{n\pi}{L}(x - at) \right] \right\}$$

ovvero

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \left[\frac{n\pi}{L}(x + at) \right] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \left[\frac{n\pi}{L}(x - at) \right] \quad (2.32)$$

Così la soluzione $y(x, t)$ data dalla formula (2.24) è rappresentata come la somma di una funzione di $(x + at)$ e di una funzione di $(x - at)$ che è proprio ciò che volevamo.

L'espressione

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin \left[\frac{n\pi}{L}(x + at) \right] \quad (2.33)$$

con i coefficienti A_n dati dalla formula

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(r) \sin \left(\frac{n\pi r}{L} \right) dr \quad (2.34)$$

2.3. L'EQUAZIONE DELLE ONDE 1-DIMENSIONALE

è precisamente l'espansione in serie di Fourier di $f(x + at)$ per $(x + at) \in [0, L]$ (notiamo che la convergenza della serie di Fourier di $f(x)$ implica la convergenza della serie (2.33) e la validità della formula (2.34)). Per i valori al di fuori dell'intervallo $[0, L]$ la formula (2.33) rappresenta l'estensione periodica dispari di $f(x + at)$. Per $f(x - at)$ si ragiona in maniera analoga. Così se introduciamo una funzione f_1 come l'estensione periodica dispari di f allora la soluzione completa del problema (2.6) può essere scritta come

$$y(x, t) = \frac{1}{2}[f_1(x + at) + f_1(x - at)] \quad (2.35)$$

2.3.5 Unicità della soluzione e conservazione dell'energia

Completiamo lo studio sull'equazione delle onde 1-dimensionale mostrando l'unicità della soluzione del problema (2.6). Per fare ciò basta mostrare che il problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo

$$\begin{cases} y_{xx}(x, t) = \frac{1}{a^2}y_{tt}(x, t) & (x, t) \in (0, L) \times (0, +\infty) \\ y(0, t) = y(L, t) = 0 & \forall t \geq 0 \\ y(x, 0) = y_t(x, 0) = 0 & \forall x \in [0, L] \end{cases} \quad (2.36)$$

ammette solo la soluzione nulla $y(x, t) \equiv 0$. Per fare ciò utilizzeremo una tecnica nota come **tecnica dell'energia**.

Come nel caso generale assumiamo $y \in C^2(\Omega)$ con $\Omega = (0, L) \times (0, +\infty)$. Scriviamo l'equazione delle onde (2.5) come

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} \quad (2.37)$$

e moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione (2.37) per y_t

$$y_t y_{tt} = a^2 y_t y_{xx} \quad (2.38)$$

Notiamo che

$$y_t y_{tt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{y_t^2}{2} \quad y_t y_{xx} = (y_x y_t)_x - y_{xt} y_t = (y_x y_t)_x - \frac{\partial}{\partial t} \frac{y_x^2}{2}$$

Sostituiamo queste identità nell'equazione (2.38) e una volta svolti i calcoli otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y_t^2}{2} + a^2 \frac{y_x^2}{2} \right) = a^2 (y_x y_t)_x \quad (2.39)$$

Integriamo entrambi i membri dell'equazione (2.39) da 0 a L rispetto a x e otteniamo

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{y_t^2}{2} + a^2 \frac{y_x^2}{2} \right) dx = [a^2 y_x y_t]_{x=0}^{x=L} \quad (2.40)$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \left(\frac{y_t^2}{2} + a^2 \frac{y_x^2}{2} \right) dx = [a^2 y_x y_t]_{x=0}^{x=L} \quad (2.41)$$

Definiamo l'energia $E(t)$ come

$$E(t) = \int_0^L \left(\frac{y_t^2}{2} + a^2 \frac{y_x^2}{2} \right) dx \quad (2.42)$$

L'equazione (2.41) implica

$$E'(t) = [a^2 y_x y_t]_{x=0}^{x=L} = a^2 [y_x(L, t) y_t(L, t) - y_x(0, t) y_t(0, t)] \quad (2.43)$$

Dalle condizioni al contorno del problema (2.36) e dalla definizione di derivata abbiamo

$$y_t(L, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(L, t+h) - y(L, t)}{h} = 0 \quad y_t(0, t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(0, t+h) - y(0, t)}{h} = 0$$

Ciò implica $E'(t) = 0 \forall t \geq 0$ da cui $E(t) = c$ con c costante. Il valore di questa costante c è in particolare il valore che l'energia assume in $t = 0$. Dunque abbiamo $E(t) = E(0) \forall t \geq 0$. Questa proprietà si chiama **conservazione dell'energia**.

Ma dalla definizione dell'energia (2.42) otteniamo

$$E(0) = \int_0^L \left(\frac{y_t^2(x, 0)}{2} + a^2 \frac{y_x^2(x, 0)}{2} \right) dx \quad (2.44)$$

Dalle condizioni iniziali del problema (2.36) e dalla definizione di derivata abbiamo

$$y_t(x, 0) = 0 \quad y_x(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{y(x+h, 0) - y(x, 0)}{h} = 0$$

e poichè abbiamo assunto y di classe C^2 possiamo concludere $E(0) = 0$.

Da tutto ciò segue che $E(t) \equiv 0 \forall t \geq 0$. Dalla definizione di energia (2.42) notiamo che $E(t)$ è l'integrale di funzioni positive. Ciò implica necessariamente $y_t(x, t) = 0$ e $y_x(x, t) = 0$ ovvero $y(x, t) = c$ con c costante. Ma dalle condizioni iniziali del problema (2.36) abbiamo che $y(x, 0) = 0$ che implica $c = 0$ ovvero $y(x, t) \equiv 0$. Dunque l'unica soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet omogeneo (2.36) è la soluzione nulla $y(x, t) \equiv 0$ e da questo segue l'unicità della soluzione nel caso generale (2.6).

Capitolo 3

L'equazione delle onde in due dimensioni

3.1 La membrana circolare vibrante

Passiamo ora dal caso 1-dimensionale della corda vibrante al caso 2-dimensionale della membrana vibrante (es. un tamburo). Ci soffermeremo solo sul caso della membrana circolare.

Assumiamo che la membrana sia sottile, flessibile ed ancorata ad un bordo nel piano (x, y) . Poichè consideriamo solo il caso della membrana circolare possiamo identificare la nostra membrana con una circonferenza nel piano (x, y) di centro $(0, 0)$ e raggio $c > 0$. Assumiamo che su ogni punto della membrana agisca tangenzialmente una tensione T costante per unità di lunghezza lungo qualsiasi direzione. Assumiamo che la densità δ (intesa come massa per unità di superficie) sia costante e che lo spostamento della membrana in ogni punto sia abbastanza piccolo da poter permettere approssimazioni simili a quelle fatte nel caso della corda vibrante.

Se sulla membrana non agiscono forze esterne lo spostamento trasversale $z = z(x, y, t)$ della membrana soddisferà in ogni punto l'equazione delle onde 2-dimensionale

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{1}{a^2} z_{tt} \quad (3.1)$$

con $a^2 = \frac{T}{\delta} > 0$.

L'equazione (3.1) si può anche scrivere come

$$\Delta z = \frac{1}{a^2} z_{tt} \quad (3.2)$$

dove Δz indica il Laplaciano di z rispetto alle coordinate spaziali (x, y) . Ricordiamo che in generale in \mathbb{R}^n il Laplaciano di una funzione u di classe almeno C^2 su un aperto Ω di \mathbb{R}^n è definito come

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x_1, \dots, x_n)$$

Dunque in particolare se z è una funzione definita su un aperto di \mathbb{R}^2 vale $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$. In realtà lo spostamento z della membrana è una funzione di tre variabili indipendenti, è presente anche il tempo t , ma considerando il Laplaciano solo rispetto alle variabili spaziali (x, y) si può scrivere l'equazione delle onde 2-dimensionale nella forma (3.2).

Poichè la membrana è ancorata al bordo circolare si avrà come condizione al contorno

$$z(x, y, t) = 0 \quad \text{con} \quad x^2 + y^2 = c^2 \quad (3.3)$$

3.1. LA MEMBRANA CIRCOLARE VIBRANTE

Introduciamo le coordinate cilindriche (ρ, ϑ, t) definite da

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \\ t = t \end{cases} \quad (3.4)$$

Se vediamo lo spostamento z della membrana come funzione delle nuove variabili (ρ, ϑ, t) , ovvero $z = z(\rho, \vartheta, t)$, la condizione al contorno (3.3) diventa

$$z(c, \vartheta, t) = 0 \quad \forall \vartheta \in (-\pi, \pi] \quad \forall t \geq 0 \quad (3.5)$$

Se cambiamo le variabili all'interno dell'equazione (3.1) da (x, y, t) a (ρ, ϑ, t) e svolgiamo i calcoli, otteniamo una nuova espressione per l'equazione delle onde 2-dimensionale

$$z_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}z_{\rho} + \frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{a^2}z_{tt} \quad (\rho, \vartheta, t) \in [0, c) \times (-\pi, \pi) \times (0, +\infty) \quad (3.6)$$

Oltre alla condizione al contorno (3.5) servono anche condizioni iniziali. Se assumiamo che la membrana abbia uno spostamento iniziale $f(\rho, \vartheta)$ e sia rilasciata dalla condizione di riposo abbiamo come condizioni iniziali

$$z(\rho, \vartheta, 0) = f(\rho, \vartheta) \quad z_t(\rho, \vartheta, 0) = 0 \quad \forall \rho \in [0, c] \quad \forall \vartheta \in (-\pi, \pi] \quad (3.7)$$

Mettendo tutto insieme dobbiamo dunque risolvere il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} z_{\rho\rho}(\rho, \vartheta, t) + \frac{1}{\rho}z_{\rho}(\rho, \vartheta, t) + \frac{1}{\rho^2}z_{\vartheta\vartheta}(\rho, \vartheta, t) = \frac{1}{a^2}z_{tt}(\rho, \vartheta, t) & (\rho, \vartheta, t) \in [0, c) \times (-\pi, \pi) \times (0, +\infty) \\ z(c, \vartheta, t) = 0 & \forall \vartheta \in (-\pi, \pi] \quad \forall t \geq 0 \\ z(\rho, \vartheta, 0) = f(\rho, \vartheta) & \forall \rho \in [0, c] \quad \forall \vartheta \in (-\pi, \pi] \\ z_t(\rho, \vartheta, 0) = 0 & \forall \rho \in [0, c] \quad \forall \vartheta \in (-\pi, \pi] \end{cases} \quad (3.8)$$

Cerchiamo la soluzione del problema (3.8) applicando il metodo della separazione delle variabili all'equazione (3.6), ovvero cerchiamo una soluzione del tipo

$$z(\rho, \vartheta, t) = R(\rho)S(\vartheta)T(t) \quad (3.9)$$

Poichè cerchiamo soluzioni non banali possiamo sostituire la formula (3.9) nell'equazione (3.6) e dividere per $R(\rho)S(\vartheta)T(t)$. In tal modo otteniamo

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{R'(\rho)}{\rho R(\rho)} + \frac{S''(\vartheta)}{\rho^2 S(\vartheta)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} \quad (3.10)$$

Poichè il membro di sinistra dell'equazione (3.10) è indipendente da t mentre il membro di destra è indipendente da ρ e da ϑ entrambi i membri devono essere uguali ad una costante. Analogamente al caso della corda vibrante questa costante risulta essere negativa e dunque la indichiamo con $-\lambda^2$. Si ha dunque

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{R'(\rho)}{\rho R(\rho)} + \frac{S''(\vartheta)}{\rho^2 S(\vartheta)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2 \quad (3.11)$$

Dalla formula (3.11) vediamo che l'equazione per $T(t)$ diventa

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda^2$$

ovvero

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0$$

la cui soluzione, per quanto detto nell'introduzione, è

$$T(t) = \alpha_1 \cos(a\lambda t) + \alpha_2 \sin(a\lambda t) \quad (3.12)$$

La condizione iniziale

$$z_t(\rho, \vartheta, 0) = 0 \quad \forall \rho \in [0, c] \quad \forall \vartheta \in (-\pi, \pi]$$

implica

$$R(\rho)S(\vartheta)T'(0) = 0 \quad \forall \rho \in [0, c] \quad \forall \vartheta \in (-\pi, \pi]$$

e dunque necessariamente $T'(0) = 0$ ovvero, sostituendo questo risultato nella formula (3.12), $\alpha_2 = 0$. Quindi vale

$$T(t) = \alpha_1 \cos(a\lambda t) \quad (3.13)$$

Dalla formula (3.11) notiamo invece che l'equazione per $R(\rho)$ e $S(\vartheta)$ diventa

$$\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \frac{R'(\rho)}{\rho R(\rho)} + \frac{S''(\vartheta)}{\rho^2 S(\vartheta)} = -\lambda^2$$

ovvero, una volta svolti tutti i calcoli,

$$\frac{\rho}{R(\rho)} [\rho R''(\rho) + R'(\rho)] + \lambda^2 \rho^2 = -\frac{S''(\vartheta)}{S(\vartheta)} \quad (3.14)$$

Anche in questo caso entrambi i membri dell'equazione (3.14) devono essere uguali ad una costante. Sia questa costante $\mu^2 > 0$, ovvero

$$\frac{\rho}{R(\rho)} [\rho R''(\rho) + R'(\rho)] + \lambda^2 \rho^2 = -\frac{S''(\vartheta)}{S(\vartheta)} = \mu^2 \quad (3.15)$$

Dalla formula (3.15) notiamo che per $S(\vartheta)$ otteniamo l'equazione

$$-\frac{S''(\vartheta)}{S(\vartheta)} = \mu^2$$

che equivale all'equazione

$$S''(\vartheta) + \mu^2 S(\vartheta) = 0$$

la cui soluzione è

$$S(\vartheta) = \tilde{c}_1 \cos(\mu\vartheta) + \tilde{c}_2 \sin(\mu\vartheta) \quad (3.16)$$

Ma poichè lo spostamento z deve essere una funzione *single-valued* (ovvero ad ogni punto del dominio deve essere associato uno ed un solo elemento nel codominio) necessariamente la funzione (3.16) deve essere periodica in ϑ di periodo 2π . Da questo segue che deve verificarsi $\mu = n$ $n = 0, 1, 2, \dots$ e quindi

$$S(\vartheta) = \tilde{c}_1 \cos(n\vartheta) + \tilde{c}_2 \sin(n\vartheta) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Dalla formula (3.15) e da quanto appena detto notiamo che l'equazione per $R(\rho)$ è

$$\frac{\rho}{R(\rho)} [\rho R''(\rho) + R'(\rho)] + \lambda^2 \rho^2 = n^2$$

ovvero

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) + (\lambda^2 \rho^2 - n^2)R(\rho) = 0 \quad (3.18)$$

L'equazione (3.18) è una forma dell'equazione di Bessel di ordine n la cui soluzione (si veda l'appendice A) è

$$R(\rho) = c_3 J_n(\lambda \rho) + c_4 Y_n(\lambda \rho) \quad (3.19)$$

dove J_n indica le funzioni di Bessel del primo tipo di ordine n .

Tuttavia vale che la seconda soluzione Y_n dell'equazione di Bessel tende a $-\infty$ al tendere di ρ a 0, mentre lo spostamento z (e dunque la funzione R) deve essere finito in $\rho = 0$.

Dunque dovrà necessariamente valere $c_4 = 0$ e così si ha

$$R(\rho) = c_3 J_n(\lambda \rho) \quad (3.20)$$

La condizione al bordo (3.5) è soddisfatta se $J_n(\lambda c) = 0$, ovvero se λ è della forma λ_{nk} $k = 1, 2, \dots$ in modo tale che $\lambda_{nk}c$ sia il k -esimo zero della funzione J_n . Ciò significa

$$J_n(\lambda_{nk}c) = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots$$

Combinando tra loro le formule (3.13), (3.17) e (3.20) e ponendo

$$c_1 = \tilde{c}_1 c_3 \alpha_1 \quad c_2 = \tilde{c}_2 c_3 \alpha_1$$

otteniamo una soluzione $z(\rho, \vartheta, t)$ che soddisfa l'equazione e tutte le condizioni del problema di Cauchy-Dirichlet (3.8) fatta eccezione per la condizione iniziale $z(\rho, \vartheta, 0) = f(\rho, \vartheta)$ che dobbiamo ancora considerare.

Questa soluzione trovata è

$$z(\rho, \vartheta, t) = J_n(\lambda_{nk}\rho)[c_1 \cos(n\vartheta) + c_2 \sin(n\vartheta)] \cos(a\lambda_{nk}t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

La funzione (3.21) è soluzione per ogni coppia (n, k) con $n = 0, 1, 2, \dots$ e $k = 1, 2, \dots$ e dunque scegliendo le costanti c_1 e c_2 separatamente per ogni coppia (n, k) possiamo costruire una doppia infinità di soluzioni (o autofunzioni) z_{nk} per il problema (3.8) della forma

$$z_{nk}(\rho, \vartheta, t) = J_n(\lambda_{nk}\rho)[a_{nk} \cos(n\vartheta) + b_{nk} \sin(n\vartheta)] \cos(a\lambda_{nk}t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

con a_{nk}, b_{nk} costanti.

Per soddisfare la condizione iniziale $z(\rho, \vartheta, 0) = f(\rho, \vartheta)$ supponiamo che $f(\rho, \vartheta)$ sia sviluppabile in serie di Fourier rispetto all'insieme ortogonale $\{1, \cos(n\vartheta), \sin(n\vartheta)\}_{n=1,2,\dots}$ come

$$f(\rho, \vartheta) = A_0(\rho) + \sum_{n=1}^{+\infty} [A_n(\rho) \cos(n\vartheta) + B_n(\rho) \sin(n\vartheta)] \quad (3.23)$$

In base alla formula (1.28) abbiamo che i coefficienti di Fourier $A_0(\rho), A_n(\rho), B_n(\rho)$ sono dati dalle formule

$$\begin{aligned} A_0(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \vartheta) d\vartheta \\ A_n(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \vartheta) \cos(n\vartheta) d\vartheta \quad n = 1, 2, \dots \\ B_n(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\rho, \vartheta) \sin(n\vartheta) d\vartheta \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.1. LA MEMBRANA CIRCOLARE VIBRANTE

Per $t = 0$ la funzione (3.22) diventa

$$z_{nk}(\rho, \vartheta, 0) = f(\rho, \vartheta) = J_n(\lambda_{nk}\rho)[a_{nk} \cos(n\vartheta) + b_{nk} \sin(n\vartheta)] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.25)$$

L'espressione (3.25) è uguale all'espressione (3.23) solo se i coefficienti di Fourier $A_0(\rho)$, $A_n(\rho)$, $B_n(\rho)$ possono essere rappresentati come somma delle funzioni di Bessel del primo tipo $J_n(\lambda_{nk}\rho)$ ovvero

$$A_n(\rho) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{nk} J_n(\lambda_{nk}\rho) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$B_n(\rho) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_{nk} J_n(\lambda_{nk}\rho) \quad n = 1, 2, \dots$$

In tal modo i coefficienti a_{nk} e b_{nk} risultano essere i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier-Bessel (si veda la sezione 1.9). Così in base alla formula (1.44) abbiamo

$$a_{nk} = \frac{2}{c^2 [J_{n+1}(\lambda_{nk}c)]^2} \int_0^c \rho J_n(\lambda_{nk}\rho) A_n(\rho) d\rho \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots$$

$$b_{nk} = \frac{2}{c^2 [J_{n+1}(\lambda_{nk}c)]^2} \int_0^c \rho J_n(\lambda_{nk}\rho) B_n(\rho) d\rho \quad n = 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

dove $A_0(\rho)$, $A_n(\rho)$, $B_n(\rho)$ sono dati dalle formule (3.24).

Così assumendo la convergenza delle serie coinvolte otteniamo la seguente soluzione al problema di Cauchy-Dirichlet (3.8)

$$z(\rho, \vartheta, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} J_n(\lambda_{nk}\rho)[a_{nk} \cos(n\vartheta) + b_{nk} \sin(n\vartheta)] \cos(a\lambda_{nk}t) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

dove i coefficienti a_{nk} , b_{nk} sono dati dalle formule (3.26).

Notiamo che le autofunzioni z_{nk} date dalla formula (3.22) coinvolgono termini della forma $g(\rho, \vartheta) \cos(a\lambda_{nk}t)$, ovvero le vibrazioni della membrana hanno frequenze pari a $a\lambda_{nk}$. Ma queste frequenze sono multipli degli autovalori λ_{nk} che sono in generale numeri irrazionali. Ciò implica che le frequenze più alte non saranno multipli interi di una qualche frequenza fondamentale. Così le vibrazioni della membrana non si combineranno tra di loro come le vibrazioni armoniche della corda e lo spostamento totale (3.27) non sarà in generale una funzione periodica nel tempo t .

Questo spiega matematicamente perchè percuotendo un tamburo non si produce una nota musicale come quando si pizzica la corda di una chitarra, proprio perchè le vibrazioni della membrana non sono periodiche nel tempo mentre quelle della corda sì.

Appendice A

L'equazione di Bessel

In questa appendice analizziamo un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti variabili molto importante che è ricorsa spesso durante la tesi, ovvero l'**equazione di Bessel**.

Questa equazione si presenta scritta nella forma:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - p^2)y(x) = 0 \quad (\text{A.1})$$

con p costante. Noi ci restringiamo al caso $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$. Le soluzioni di questa equazione si chiamano **funzioni di Bessel**.

L'equazione di Bessel (A.1) ha una singolarità regolare in $x = 0$ e così possiamo assumere che abbia una soluzione del tipo (15) (si veda l'introduzione).

Sostituendo l'espressione (15) e le espressioni delle derivate prima e seconda di (15) all'interno dell'equazione di Bessel (A.1) e svolgendo tutti i calcoli si arriva all'identità

$$(\alpha^2 - p^2)a_0 x^\alpha + [(\alpha + 1)^2 - p^2]a_1 x^{\alpha+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \{[(\alpha + n)^2 - p^2]a_n + a_{n-2}\} x^{\alpha+n} = 0$$

Questa identità è vera se e solo se i coefficienti sono tutti nulli, e dunque si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} (\alpha^2 - p^2)a_0 = 0 \\ [(\alpha + 1)^2 - p^2]a_1 = 0 \\ [(\alpha + n)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0 \quad n = 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Assumiamo $a_0 \neq 0$ così l'equazione indiciale è data da

$$\alpha^2 - p^2 = 0 \quad (\text{A.3})$$

da cui si deduce $\alpha = \pm p$. Consideriamo il caso $\alpha = p$, $p \geq 0$. Sostituendo questo nelle altre equazioni del sistema si ottiene $(2p + 1)a_1 = 0$ e la formula ricorsiva

$$(2pn + n^2)a_n + a_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 2 \quad (\text{A.4})$$

Poichè $p \geq 0$ si ha necessariamente $a_1 = 0$ e dalla formula ricorsiva (A.4) si ottiene che tutti i coefficienti di posto dispari sono nulli ($a_{2k-1} = 0 \forall k \geq 2$). Poi essendo $p \geq 0$ risulta $2pn + n^2 \neq 0$ e i coefficienti di posto pari sono dati dalla formula ricorsiva

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{k! 2^{2k} (p+k)(p+k-1)\dots(p+2)(p+1)} \quad k \geq 1$$

Così una soluzione dell'equazione di Bessel risulta essere

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{p+2k}}{k! 2^{2k} (p+k)(p+k-1)\dots(p+2)(p+1)} \quad (\text{A.5})$$

Poniamo $a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$ con $\Gamma(p+1)$ la funzione gamma definita come $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ con la proprietà $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ con $s > 1$. Così la soluzione dell'equazione di Bessel, che indichiamo ora con $J_p(x)$, diventa

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k} \quad (\text{A.6})$$

Questa viene anche detta **funzione di Bessel del primo tipo di ordine p** . Utilizzando il criterio del rapporto si nota che questa serie converge. Così $J_p(x)$ è soluzione dell'equazione di Bessel almeno per $x \geq 0$ e $p \geq 0$. Nel caso fosse $\alpha = -p$ con $p > 0$ si pone

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p+2k} \quad (\text{A.7})$$

e si ha che $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ sono due soluzioni linearmente indipendenti, così la soluzione generale dell'equazione di Bessel per $x > 0$ è data da

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \quad (\text{A.8})$$

Si può calcolare che le funzioni di Bessel godono delle proprietà

$$x J_p'(x) = p J_p(x) - x J_{p+1}(x) \quad (\text{A.9})$$

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x) \quad (\text{A.10})$$

Se $p = 0$ o p è un intero positivo la seconda soluzione dell'equazione di Bessel è da ricercare diversamente in quanto in tal caso $J_p(x)$ e $J_{-p}(x)$ sono tra loro proporzionali. Questa nuova soluzione da ricercare viene detta **funzione di Bessel del secondo tipo**. Analizziamo il caso $p = n$ con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. In questo caso si ha $\Gamma(n+k+1) = (n+k)!$ e dunque la soluzione dell'equazione di Bessel si scriverà come

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (\text{A.11})$$

Nel caso $n = 0$ si ha

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

mentre nel caso $n = 1$ si ha

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{1+2k}$$

Poichè $J_0(x)$ converge $\forall x$ si può derivare e si verifica facilmente che valgono $J_0'(x) = -J_1(x)$ e $\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x)$.

Cerchiamo di determinare la seconda soluzione nel caso $n = 0$. In questa situazione l'equazione di Bessel si riduce a

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Applicando il metodo di Frobenius cerchiamo una soluzione della forma (15) e otteniamo l'equazione indiciale

$$\alpha^2 = 0 \quad (\text{A.13})$$

e la formula ricorsiva

$$a_n = -\frac{1}{(\alpha + n)^2} a_{n-2} \quad (\text{A.14})$$

L'equazione indiciale (A.13) fornisce $\alpha = 0$ ma ignoriamo momentaneamente questo risultato e concentriamoci solo sulla formula ricorsiva (A.14). Nel caso $n = 2k$ la formula ricorsiva diventa

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(\alpha + 2k)^2(\alpha + 2k - 2)^2 \dots (\alpha + 2)^2} a_0 \quad (\text{A.15})$$

Definiamo l'operatore lineare

$$L[y(x)] = x^2 y''(x) + x y'(x) + x^2 y(x) \quad (\text{A.16})$$

Ciò permette di scrivere l'equazione di Bessel come $L[y(x)] = 0$. Poiché i coefficienti a_{2k} dipendono da α si possono indicare come $a_{2k}(\alpha)$ e si può vedere $y(x)$ come una funzione di due variabili

$$y(x, \alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}(\alpha) x^{\alpha+2k} \quad (\text{A.17})$$

Le derivate di $y(x)$ che compaiono all'interno dell'equazione di Bessel si possono vedere ora come derivate parziali rispetto a x della funzione $y(x, \alpha)$. Sostituendo quanto appena trovato in $L[y(x, \alpha)]$ troviamo, una volta svolti i calcoli

$$L[y(x, \alpha)] = a_0 \alpha^2 x^\alpha \quad (\text{A.18})$$

Gli altri termini svaniscono poichè è soddisfatta la formula ricorsiva. Ponendo $\alpha = 0$ come dato dall'equazione indiciale si ha $L[y(x, 0)] = 0$ e risulta

$$y(x, 0) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}(0) x^{2k} = \quad (\text{A.19})$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \quad (\text{A.20})$$

$$= a_0 J_0(x) \quad (\text{A.21})$$

Ma poichè il membro destro dell'equazione (A.18) contiene il termine α^2 allora l'equazione ha una radice di molteplicità 2 in $\alpha = 0$ e ciò implica che anche $\frac{\partial}{\partial \alpha} \{L[y(x, \alpha)]\}$ si annulla in $\alpha = 0$. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \{L[y(x, \alpha)]\} = a_0 x^\alpha [2\alpha + \alpha^2 \ln(x)]$$

Si può dimostrare che gli operatori L e $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ commutano e così risulta

$$L\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha)\right] = a_0 x^\alpha [2\alpha + \alpha^2 \ln(x)]$$

e in $\alpha = 0$ si ha

$$L\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha)\right]_{\alpha=0} = 0$$

Così $[\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x, \alpha)]_{\alpha=0}$ è soluzione dell'equazione di Bessel e si può dimostrare che è linearmente indipendente da $J_0(x)$ ed è dunque la seconda soluzione cercata.

Da (A.17) otteniamo

$$\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} = x^\alpha \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\partial a_{2k}(\alpha)}{\partial \alpha} x^{2k} + \ln(x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k}(\alpha) x^{2k} \right]$$

e ponendo $\alpha = 0$ rimane

$$\left[\frac{\partial y(x, \alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\frac{\partial a_{2k}(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} x^{2k} + \ln(x) a_0 J_0(x)$$

Notiamo che

$$\left[\frac{\partial a_{2k}(\alpha)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=0} = \frac{(-1)^{k+1} a_0}{2^{2k} (k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right)$$

con $k \geq 1$.

Così abbiamo trovato una seconda soluzione per l'equazione di Bessel di ordine zero. Nel caso $a_0 = 1$ questa soluzione si chiama **soluzione di Neumann** e si indica con $N_0(x)$. Così risulta

$$N_0(x) = J_0(x) \ln(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k} (k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{x}{2} \right)^{2k} \quad (\text{A.22})$$

e la soluzione generale dell'equazione di Bessel $L[y(x)] = 0$ per $x > 0$ sarà

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 N_0(x) \quad (\text{A.23})$$

con c_1, c_2 costanti.

Questo metodo si estende alla ricerca di una seconda soluzione per l'equazione di Bessel nel caso in cui le radici dell'equazione indiciale differiscono per un intero, ad esempio nell'equazione di Bessel di ordine n con n intero positivo. In questi casi la soluzione generale dell'equazione di Bessel può essere scritta come combinazione lineare delle funzioni di Bessel di ordine n del primo e del secondo tipo. Queste ultime si indicano con $N_n(x)$.

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 N_n(x) \quad (\text{A.24})$$

Riguardo la ricerca della seconda soluzione dell'equazione di Bessel, specifichiamo che, se p non è un intero, si può definire la funzione

$$Y_p(x) = \frac{J_p(x) \cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\sin(p\pi)} \quad (\text{A.25})$$

Si dimostra che $J_p(x)$ e $Y_p(x)$ sono una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Bessel di ordine p .

Se n è un intero si può definire la funzione

$$Y_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} Y_p(x) \quad (\text{A.26})$$

Si dimostra che $J_n(x)$ e $Y_n(x)$ sono una coppia di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione di Bessel di ordine n e che vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} Y_n(x) = -\infty$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$

Bibliografia

- [1] Paul D. Ritger and Nicholas J. Rose, *Differential Equations with Applications*, Dover, 2000
- [2] Prof. Pietro Zecca, *Problemi al bordo per le Equazioni Differenziali*, Università di Firenze
(<http://www2.de.unifi.it/anum/zecca/ED/Equazioni%20Differenziali.pdf>)
- [3] Antonio Ambrosetti, *Appunti sulle equazioni differenziali ordinarie*, Springer, 2012
- [4] Paolo Perfetti, *Equazione delle Onde, Equazione del Calore, lineari in una dimensione (su di un intervallo finito)*, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria
(http://www.mat.uniroma2.it/~perfetti/didattica/analisi3online/onde_calore.pdf)
- [5] Viorel Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, 1998
- [6] Oltre ai testi appena elencati ho attinto informazioni da appunti personali presi durante le lezioni dei corsi di
 1. *Analisi Matematica 2*, Prof. A.Favini—Prof.ssa B.R.Bellomo, Università di Bologna, A.A. 2011/2012
 2. *Fisica Matematica 2*, Prof.ssa E.Caliceti, Università di Bologna, A.A. 2011/2012
 3. *Equazioni Differenziali 1*, Prof. A.Favini, Università di Bologna, A.A. 2012/2013
 4. *Meccanica Dei Sistemi Complessi*, Prof.ssa F.Franchi, Università di Bologna, A.A. 2012/2013
 5. *Complementi Di Analisi Matematica*, Prof.ssa A.Montanari, Università di Bologna, A.A. 2012/2013
 6. *Istituzioni Di Geometria Superiore*, Prof. S.Coen, Università di Bologna, A.A. 2012/2013

Elenco delle figure

2.1	Modello della corda vibrante	17
2.2	Problema di Cauchy-Dirichlet per l'equazione delle onde	18
2.3	Primo modo normale di vibrazione	21

Tutte le figure sono state tratte dal testo

Paul D. Ritger and Nicholas J. Rose, *Differential Equations with Applications*, Dover, 2000

