

ALMA Mater Studiorum
Università degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Astronomia

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Dinamica delle galassie a spirale
e
delle galassie ellittiche

Elaborato Finale

Candidato:
Raffaella Guerra

Relatore:
Prof. Daniele Dallacasa



Sessione _II° 1 autunnale___
Anno Accademico __2012/2013__

*Dinamica delle Galassie a spirale
e
dinamica delle galassie ellittiche*

“ Il processo di una scoperta scientifica è un continuo conflitto di meraviglie”

Albert Einstein

*“La più sublime,
la più nobile tra le Fisiche Scienze
ella è senza dubbio l' Astronomia.
L' uomo s'innalza per mezzo di essa
come al di sopra di sé medesimo,
e giunge a capire la causa
dei fenomeni più straordinari”*
G. Leopardi. Storia dell' Astronomia, 1813

*“L' Astronomia costringe l' anima a guardare oltre e ci conduce
da un mondo ad un altro”*

Platone, Repubblica, 390/ 360 a.C.

*Ai miei genitori e ai miei nonni,
che possiate essere finalmente fieri
della vostra
“campionessa”*

Indice

Abstract	7
1. Struttura e morfologia delle galassie	8
2. Sistemi collisionali e non collisionali	9
2.1 Tempo di rilassamento ai due corpi	10
2.2 Equazione di Boltzmann ed equazioni di Jeans	11
2.3 Teorema del viriale in forma tensoriale	12
3. Dinamica e cinematica delle galassie ellittiche	13
3.1 Le galassie ellittiche come sistemi anisotropi	14
3.2 Il modello dinamico di Jeans e il rapporto massa/luminosità	16
3.3 Fundamental plane	17
4. Dinamica e cinematica delle galassie a spirale	18
4.1 Curva di rotazione	19
4.2 Dinamica dei bracci e teoria di Lin-Shu	21
Bibliografia	23

Abstract

Questa tesi è una panoramica di alcuni concetti base su cui si fonda la dinamica delle galassie.

Nel primo capitolo vengono messi in evidenza i concetti più generali dal punto di vista morfologico- strutturale attraverso la classificazione di Hubble.

Nel secondo capitolo si mette in evidenza come un sistema possa essere definito non collisionale (attraverso la stima del tempo di rilassamento ai due corpi) e le conseguenze che ne derivano come, per esempio, l' anisotropia dello stesso sistema che conferisce alla galassia la sua classica forma “schiacciata”. Vengono poi descritti la *collisional Boltzmann equation (CBE)* e il *teorema del viriale in forma tensoriale*.

Integrando la CBE nello spazio delle velocità otteniamo tre equazioni note come *equazioni di Jeans*: queste hanno una struttura del tutto identica a quelle della fluidodinamica ma con alcune eccezioni significative che non permettono di descrivere completamente la dinamica delle galassie attraverso la fluidodinamica.

Il terzo capitolo è un excursus generale sulle galassie ellittiche: dalla loro struttura alla loro dinamica. Dall' applicazione del teorema del viriale ad un sistema ellittico si può notare come la forma “schiacciata” delle galassie sia una conseguenza dell' anisotropia del sistema e sia dovuta solo in minima parte alla rotazione. Successivamente viene presentato un modello galattico (quello di Jeans), che ci permette di calcolare una distribuzione di massa del sistema attraverso un' equazione che purtroppo non ha soluzione unica e quindi ci rende impossibile calcolare il rapporto massa- luminosità. Infine viene descritto il *fundamental plane* che è una relazione empirica tale per cui ad ogni galassia viene associato un determinato valore di *raggio effettivo, dispersione di velocità e luminosità*.

Nel quarto ed ultimo capitolo viene trattata la dinamica delle parti più esterne di una galassia: disco e bracci. La dinamica del disco è descritta attraverso la *curva di rotazione* che, come vedremo, ha delle caratteristiche abbastanza diverse da una curva di rotazione di tipo kepleriano (quella che ad esempio descrive l' andamento della velocità in funzione della distanza nel nostro sistema solare). Infine viene descritta la dinamica dei bracci e la teoria delle *onde di densità* di Lin e Shu, due astronomi americani, che riesce a descrivere compiutamente la nascita e l' evoluzione dei bracci a spirale.

1.STRUTTURA E MORFOLOGIA DELLE GALASSIE

L' Universo ha avuto origine da un' immensa esplosione chiamata Big Bang. All' inizio vi erano temperature elevatissime ed appariva composto da particelle elementari (quark e leptoni) che progressivamente, andando raffreddandosi, si univano in strutture più complesse come atomi e molecole. Solo a circa $10^8 - 10^9$ anni dopo il Big Bang si sono formate le galassie.

Le galassie sono definite come grandi insiemi di stelle, sistemi, ammassi ed associazioni stellari, gas e polveri legati insieme dalla reciproca forza di gravità. Una galassia può arrivare a contenere un numero di stelle pari a $N \sim 10^9 - N \sim 10^{12}$, mentre le loro masse vanno dalle 10^9 alle $10^{13} M_{sol}$ (M_{sol} è la massa solare che è pari circa a $2 \cdot 10^{33}$ g).

Una classificazione dal punto di vista morfologico – strutturale è data dalla *classificazione di Hubble* (Fig.1)

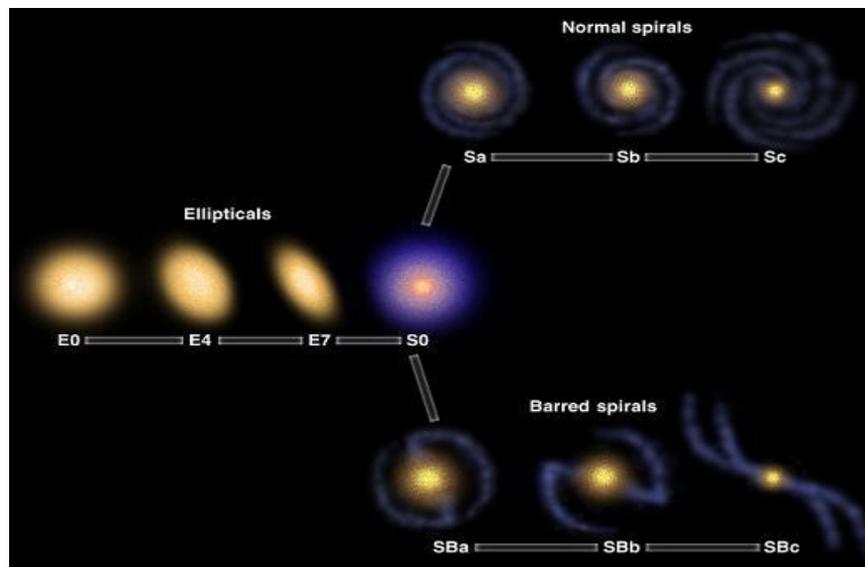


Fig.1 *Classificazione di Hubble*

1. **Galassie ellittiche** (a sinistra) che vengono classificate in base alla loro ellitticità. Vengono denominate attraverso la lettera maiuscola E ed un numero che va da 0 a 7 a seconda del valore, arrotondato all' intero più vicino, del rapporto $10(a-b)/a$ dove a è il semiasse maggiore e b il semiasse minore dell' ellissoide. Per quanto riguarda la formazione stellare sono composte principalmente da stelle vecchie (di colore rosso) a causa della quantità minima (circa l' 1%) di gas freddo.

2. **Galassie a spirale** (nell' immagine a destra) che si dividono in *normali* e *barrate*. Sono composte da un nucleo centrale chiamato *bulge* leggermente oblatto simile ad una piccola galassia ellittica, mentre all' esterno è possibile osservare un disco rotante che si dirama in diversi bracci (bracci a spirale) composti principalmente da gas freddo e per questo vi si trovano molte stelle giovani. Vengono denominate attraverso la lettera S seguita da una lettera minuscola a, b o c che sta ad indicare la diversa apertura dei bracci rispetto al nucleo. Le barrate sono invece caratterizzate sempre da un *bulge* centrale attraversato da una struttura stellare lineare dalla quale si diramano i bracci. Vengono denominate tramite due lettere maiuscole SB ed una minuscola seguita da a, b o c secondo lo stesso criterio delle normali.

3. **Galassie lenticolari** (galassie S0 nell' immagine) che si trovano a metà fra le prime e le seconde in quanto hanno dei nuclei simili a quelli delle spirali senza, tuttavia, presentare dei veri e propri bracci a spirale, ma un disco stellare con sole tracce di gas.

4. **Galassie irregolari** che vengono divise in due sottogruppi (indici I e II) del primo fanno parte quelle senza nucleo e senza simmetria rotazionale, mentre del secondo fanno parte galassie con alcune peculiarità (indicate con il suffisso p) come ad esempio le galassie ad anello che presentano una struttura anulare composta di stelle e mezzo interstellare (Fig.2)



Fig.2 Galassia ad anello

Poiché per i sistemi stellari non si può parlare di un vero e proprio “ bordo ” preciso, si usa definire le dimensioni di una galassia in termini di luminosità: viene dunque descritto un profilo di brillantezza la cui intensità decresce man mano che ci si allontana dal centro.

Il profilo di brillantezza per una galassia ellittica viene definito attraverso il *profilo di Sérsic* :

$$I(R) = I(0) * \exp(-b(m)(R/R_e)^{1/m})$$

dove R_e è il raggio effettivo ovvero il raggio di un' isofota¹ contenente metà della luminosità totale, R una distanza arbitraria, mentre m è detto *indice di Sérsic* ed assume valori fra $1 < m < 10$ e precisamente:

- per m=1 ottengo una legge esponenziale che descrive bene i dischi galattici;
- per m=4 si ottiene la legge di de Vaucouleurs, che descrive la brillantezza superficiale delle ellittiche e i bulge delle galassie a disco;
- per m=6, descrive ellittiche molto luminose;

Di conseguenza R_e può essere una buona stima delle dimensioni di una galassia (è dell' ordine di circa qualche kiloparsec).

Il profilo di brillantezza delle galassie a spirale è invece descritto dalla *relazione di Tully-Fisher*, che pone in relazione la luminosità con la velocità del disco:

$$\log\left(\frac{Lh_7^2}{10^{10} L_{sol}}\right) = 3.5 \log\left(\frac{v_{rot}}{200 \text{ km/s} + 0.5}\right)$$

Ad esempio per la Milky Way si avrà una $v_{rot} = 220 \pm 20 \text{ km s}^{-1}$ e quindi una luminosità pari a $L = (4.4 \pm 1.5) 10^{10} L_{sol}$.

2. SISTEMI COLLISIONALI E NON COLLISIONALI

Per comprendere la dinamica delle galassie è opportuno andare a studiare le mutue interazioni che si esercitano fra le stelle che le compongono.

In prima analisi ci concentreremo sull' aspetto puramente geometrico: consideriamo un

1 Le isofote sono descritte come il luogo dei punti in cui è costante l' intensità luminosa. Per le galassie ellittiche le isofote sono tutte ellissi concentriche e possono essere di tipo boxy o diskly .

sistema di raggio r composto da N stelle di raggio R pari a quello del sole ($7 \cdot 10^{10}$ cm). La condizione affinché non si verifichi un urto di tipo geometrico fra due stelle (supposte perfettamente sferiche) è che $d \leq 2R$ dove d è la distanza fra i due centri. La sezione d'urto di ciascuna stella è $\sigma = 4\pi R^2$ e quindi ad ogni stella è possibile associare un volume efficace $\lambda \sigma$ dove λ è il percorso che una stella può compiere senza avere alcuna collisione geometrica. Per N stelle quindi si avrà:

$$N \lambda \sigma = \frac{4}{3} \pi r^3$$

ossia $\frac{\lambda}{2r} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{1}{6N}$

assumendo per una galassia ellittica N pari circa a 10^{11} ed $r \sim 10^4$ pc, si ottiene che $\lambda/2r \approx 3 \cdot 10^{11}$ e di conseguenza:

Per un sistema stellare, l'urto geometrico è del tutto trascurabile su tempi scala pari all'età dell'Universo.

2.1 TEMPO DI RILASSAMENTO AI DUE CORPI

Poiché risolvere il problema degli N corpi per un sistema composto da un così alto numero di oggetti è abbastanza complesso, conviene utilizzare un' approssimazione che renderà il problema più semplice ma comunque ne darà un' approssimazione corretta. Consideriamo un sistema ideale dove il sistema “granulare” degli N corpi è sostituito con una densità continua $\rho(x, t)$ e focalizziamoci sul moto di una singola stella campione immersa nel campo gravitazionale generato dalle stelle circostanti: il moto (e quindi l' orbita) della stella campione dipenderà univocamente dal potenziale Φ

$$\ddot{r} = -\nabla \Phi$$

con il potenziale definito come:

$$\Phi(x, t) = -G \int_{R^3} \frac{\rho(x', t)}{\|x - x'\|} d^3 x'$$

A questo punto definiamo un importante parametro che serve a determinare la collisionalità di un sistema: il *tempo di rilassamento ai due corpi*. Considerando tutti gli “incontri” tra stelle come problemi ai due corpi, possiamo ulteriormente semplificare il problema considerando una massa di test m_t che si muove con velocità v_i e parametro d' impatto b rispetto ad una massa m a riposo. L' orbita compiuta dalla massa m_t sarà data dall' equazione:

$$\mu \ddot{r} = -G \frac{m_t * m}{r^2} \hat{r}$$

Dopo l' urto l' energia cinetica iniziale T_0 della particella sarà variata di un valore pari a ΔT . Definendo v_t come la velocità di test, se dopo un tempo t_{2b} la variazione totale di energia per tutti gli urti che è data da:

$$\sum_i \Delta T_i = \frac{m_t \|\Delta(v_t)_{per}\|^2}{2} \sim 2 \frac{G^2 m m_t}{b^2 v_i^2}$$

sarà pari al valore iniziale T_0 ed introducendo t_{cross} come il tempo che impiega una

stella ad attraversare il sistema, posso definire il tempo di *rilassamento ai due corpi* come

$$t_{2b} = n_{2b} * t_{cross}$$

dove $n_{2b} = \frac{T_0}{\sum_i \Delta T_0}$ è il numero di attraversamenti. Per un numero molto grande di stelle

$N \rightarrow \infty$ si ottiene:

$$t_{2b} \sim 0.1 \frac{N t_{cross}}{\ln N}$$

che descrive per quanto tempo l' approssimazione al sistema ideale è valido.

Per tempi $t < t_{2b}$ il sistema è detto *non collisionale*, mentre in caso contrario il sistema è detto *collisionale*. Nel caso di una galassia si avrà, ad esempio, $N \simeq 10^{11}$ e $t_{cross} \simeq 10^8$ yr per cui otterremo valori per $t_{2b} \simeq 10^{15}$: se ne deduce quindi che *le galassie sono in assoluto regime non collisionale*.

2.2. EQUAZIONE DI BOLTZMANN ED EQUAZIONI DI JEANS

Per avere una descrizione completa della dinamica delle galassie occorre conoscere l' equazione di Boltzmann.

Consideriamo una funzione $f \leq 0$ detta *funzione di distribuzione* (FD) che descrive una densità nello spazio delle fasi. Il numero di oggetti all' interno di un dato volume V (che corrisponde alla massa totale contenuta nel volume) è dato da $dn = f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v$ con \vec{x} vettore posizione e \vec{v} vettore velocità.

Integrando la FD nello spazio delle velocità, si possono ottenere importanti informazioni macroscopiche sulla cinematica e la dinamica delle galassie: infatti conoscendo la FD ad un istante di tempo t_0 sarà possibile conoscere la configurazione del sistema ad un qualsiasi istante di tempo successivo. Il metodo per “estrapolare” le informazioni è quello di calcolare i momenti della FD.

Introduciamo, quindi, un generico punto dello spazio delle fasi definito da una data posizione e una data velocità $\omega = (\vec{x}, \vec{v})$ tale che la sua derivata sia pari a

$\dot{\omega} = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\vec{\nabla} \Phi)$ (la derivata della velocità è pari al potenziale perché in un sistema non collisionale la dinamica delle particelle in esso contenute dipende dal solo potenziale). Poiché il numero di stelle in una galassia si conserva, per $f(\omega, t)$ deve valere un' equazione di continuità simile a quella dei fluidi incompressibili:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial (f \dot{\omega}_i)}{\partial \omega_i} = 0$$

poiché x_j e v_j sono coordinate indipendenti dallo spazio delle fasi, andando a sostituire nell' equazione precedente il valore di $\dot{\omega}$ ottengo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 (v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) - \sum_{i=1}^3 (\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} * \frac{\partial f}{\partial v_i})$$

che è detta *equazione non collisionale di Boltzmann* (CBE).

A questo punto introduciamo tre osservabili:

$$\bar{v}_i(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{R^3} v_i f d^3 v \quad (2.2.1)$$

$$v_i \bar{v}_j(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{R^3} v_i v_j f d^3 v \quad (2.2.2)$$

$$\sigma_{ij}^2(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \int_{R^3} (v_i - \bar{v}_i)(v_j - \bar{v}_j) \quad (2.2.3)$$

che indicano rispettivamente: (2.2.1) e (2.2.2) le velocità medie e la (2.2.3) il *tensore di dispersione di velocità*. Possiamo quindi integrare la CBE rispetto alla velocità

$\int_{R^3} (CBE) d^3 v = 0$ ed otteniamo:

$$\int_{R^3} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) d^3 v + \int_{R^3} v_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) d^3 v - \int_{R^3} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) * \left(\frac{\partial f}{\partial v_i} \right) d^3 v = 0$$

perché non esistono stelle con velocità infinita $f(v_i = \pm\infty) = 0$, il risultato dell'integrazione sarà:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.4)$$

La (2.2.4) è la *1° equazione di Jeans (momento di ordine 0)*, che corrisponde alla legge di continuità per la massa.

Adesso andiamo a calcolare il secondo integrale

$\int_{R^3} v_i (CBE) d^3 v = 0$ da cui si ottiene

$$\frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{v}_i \bar{v}_j)}{\partial x_j} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.5)$$

che corrisponde alla *2° equazione di Jeans (momento di ordine 1)* ossia alla legge di conservazione dell' impulso.

Un altro importante risultato si ottiene combinando le (2.2.4) e (2.2.5):

$$\rho \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} - \frac{\partial(\rho \sigma_{ij}^2)}{\partial x_i} \quad (2.2.6)$$

che è l' analogo dell' equazione di Eulero per un fluido incompressibile sotto l' azione di un potenziale gravitazionale Φ e di un tensore di stress $\rho \sigma^2$ che ha le caratteristiche di una pressione anisotropa (diversi valori a seconda della direzione considerata) ed è chiamata *3° equazione di Jeans²*.

2.3 TEOREMA DEL VIRIALE IN FORMA TENSORIALE

Utilizzando i momenti ottenuti attraverso l' integrazione della CBE, possiamo ottenere ulteriori informazioni sulla dinamica di un sistema non collisionale. Per prima cosa moltiplichiamo la 2° equazione di Jeans per x_k ed integriamo tutto rispetto a x :

2 La (2.2.4), (2.2.5) e (2.2.6) corrispondono alle leggi base della fluidodinamica per fluidi non comprimibili

$$\int_{R^3} x_k \frac{\partial(\rho \bar{v}_i)}{\partial t} d^3x = - \sum_i \int_{R^3} x_k \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_i} d^3x - \int_{R^3} \rho x_k \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} d^3x$$

per il teorema della divergenza, il primo termine al secondo membro diventa:

$$- \sum_i \int_{R^3} x_k \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_i} d^3x = 2K_{ij} + \Sigma_{ij}$$

con $K_{jk} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3x$ *tensore cinetico* e $\Sigma_{ij} = - \sum_i \int_{R^3} x_k \rho (\bar{v}_j \bar{v}_i) d^3x$ che ha le caratteristiche di una pressione superficiale.

Il secondo termine a destra è invece il *tensore di energia potenziale di Chandrasekhar* W_{jk} .

Riscriviamo quindi l'equazione come:

$$\int_{R^3} x_k \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} d^3x = 2K_{jk} + W_{ij} + \Sigma_{jk} \quad (2.3.1)$$

Introduciamo ora il tensore di dispersione di velocità per cui il tensore cinetico può essere

riscritto come la somma di altri due tensori: $K_{jk} = T_{jk} + \frac{\Pi_{jk}}{2}$

con $T_{jk} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho \bar{v}_j \bar{v}_k d^3x$ e $\Pi_{jk} = \int_{R^3} \rho \sigma_{jk}^2 d^3x$

Poichè sono tutti tensori simmetrici, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{R^3} \rho (x_k \bar{v}_j + x_j \bar{v}_k) d^3x = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} + \Sigma_{jk} \quad (2.3.2)$$

La (2.3.2) può essere riscritta in termini di *tensore d'inerzia* $I_{jk} = \int_{R^3} \rho x_j x_k d^3x$ ossia:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I_{jk}}{dt^2} = 2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} + \Sigma_{jk}$$

che è l'espressione generale del *teorema del viriale in forma tensoriale*. In forma scalare diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2K + W + \Sigma \quad 3$$

3.DINAMICA E CINEMATICA DELLE GALASSIE ELLITTICHE

Come già accennato precedentemente, le galassie ellittiche sono delle strutture ellissoidali⁴ contenenti molte stelle rosse (ossia stelle vecchie) in quanto sono composte da materiale quasi del tutto ionizzato che non riesce a raffreddarsi prima di un tempo superiore all'età stessa dell'Universo e di conseguenza non riesce a creare stelle blu (stelle giovani).

Nella sezione precedente abbiamo introdotto il concetto di tensore di dispersione di velocità, ma solo adesso possiamo andarne a capire la sua vera utilità, in quanto riesce a

3 La forma scalare del teorema è ottenuta andando a considerare solo le tracce dei tensori.

4 In realtà la forma delle galassie ellittiche non dipende solo dalla loro forma intrinseca ma anche dell'angolo sotto il quale queste vengono osservate.

descrivere compiutamente il motivo per cui queste galassie appaiono schiacciate. Questo appiattimento dipende solo in minima parte dalla rotazione che la galassia ellittica compie attorno al suo asse, ma principalmente esso dipende dall'anisotropia del tensore di dispersione di velocità: per un sistema non collisionale, infatti, dove gli urti geometrici sono altamente improbabili, la temperatura e la pressione che generalmente vengono considerati valori costanti, diventano quantità tensoriali e di conseguenza assumono valori diversi a seconda della direzione considerata. Per una galassia ellittica, ad esempio, la temperatura è più alta lungo il semiasse maggiore dell'ellissoide descritto dal tensore σ_{jk}^2 e più bassa lungo quello minore.

3.1 LE GALASSIE ELLITTICHE COME SISTEMI ANISOTROPI

Il tensore σ_{jk}^2 descrive le deviazioni dalla velocità media ed è scomponibile come:

$$\sigma_{jk}^2 = \overline{v_j v_k} - \overline{v_j} \overline{v_k} .$$

È rappresentato da una matrice simmetrica diagonale definita positiva con tutti gli elementi sulla diagonale principale della matrice $\sigma^2 = \sigma_{jk}^2 n_j n_k$ diversi da zero e geometricamente è raffigurato da “*ellissoidi di dispersione di velocità* con orientamento e lunghezza degli assi diversa da punto a punto e variabile col tempo”⁵. Questo concetto è fondamentale per capire la distinzione che esiste fra le leggi della fluidodinamica e i *momenti di Jeans*: se infatti le prime studiano i fluidi *isotropi* dove con isotropo si intende un sistema il cui tensore di dispersione assume lo stesso valore in tutte le direzioni ed è quindi rappresentato da una sfera di raggio σ (ossia è un valore costante), i secondi, contrariamente, studiano sistemi caratterizzati dall'anisotropia del tensore di dispersione.

Vediamo questo concetto più nel dettaglio.

Consideriamo il teorema del viriale in forma tensoriale che per un sistema stellare stazionario può essere scritto come:

$$2T_{jk} + \Pi_{jk} + W_{jk} = 0 \quad (3.1.1)$$

Se il sistema ruota attorno l'asse z, allora $W_{xx} = W_{yy}$, $W_{jk} = 0$ per $j \neq k$. Quindi riscriviamo la (3.1.1) come:

$$2T_{xx} + \Pi_{xx} + W_{xx} = 0 \quad \text{e} \quad 2T_{zz} + \Pi_{zz} + W_{zz} = 0 \quad (3.1.2)$$

Poichè il moto è lungo z si verifica che $T_{zz} = 0$, mentre

$$2T_{xx} = \frac{1}{2} M v_0^2$$

con v_0 velocità di rotazione ed M massa totale del sistema. Per Π valgono le relazioni:

$$\Pi_{xx} = M \sigma_0^2 \quad \text{e} \quad \Pi_{zz} = (1 - \delta) M \sigma_0^2 \quad (3.1.3)$$

con $\sigma_0^2 \equiv \frac{1}{M} \int \rho \sigma_{xx}^2 d^3 x$ velocità di dispersione lungo la linea di vista e $\delta < 1$ parametro che misura l'anisotropia della dispersione di velocità.

Facendo il rapporto fra le (3.1.2) e sostituendo la (3.1.3) ottengo:

5 Luca Ciotti, Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare, ZANICHELLI EDITORE S.p.A.

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = \frac{1}{1-\delta} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\sigma_0^2} \right) \quad (3.1.3)$$

Dalla formula risulta chiaro che *una galassia ellittica risulta appiattita sia a causa della velocità di rotazione sia a causa della dispersione anisotropa della velocità.*

Per i sistemi oblati, la (3.1.3) dipende univocamente dall'ellitticità ϵ secondo l'equazione:

$$\frac{W_{xx}}{W_{zz}} = \frac{1}{2} \frac{\sin^{-1}(-e(1-e^2)^{\frac{1}{2}})}{e(1-e^2)^{1/2} - (1-e^2) \sin^{-1} e}$$

con $e = \sqrt{1 - (1-\epsilon)^2}$.

Misurando sperimentalmente σ_0 e v_0 , possiamo stimare quanto vale δ .

Comunemente si tende a sostituire i valori di σ_0 con il suo valore medio $\bar{\sigma}$ mentre v_0 con $4v_m/\pi$ dove v_m che il valore massimo che può assumere la velocità.

Dal grafico (Fig.3)

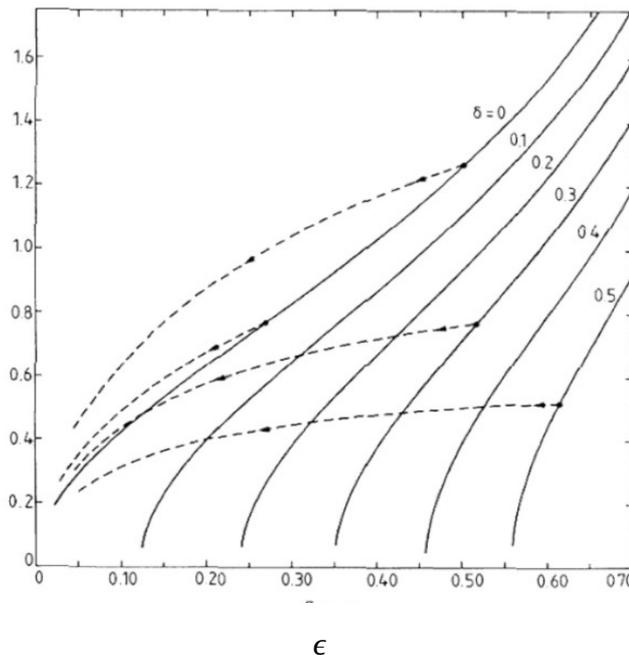


Fig.3 Mostra la relazione fra il parametro cinematico $v_m/\bar{\sigma}$ vs ϵ per diversi valori del parametro di anisotropia δ . Le linee tratteggiate indicano le galassie viste sotto un determinato angolo che tuttavia nella maggior parte delle volte non è stimabile.

si nota come per galassie oblate per cui il parametro δ è = 0, il rapporto

$$\frac{v_m}{\bar{\sigma}} \approx \sqrt{\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}$$

sia semplicemente in funzione dell'ellitticità. Molte galassie ellittiche hanno quindi il

tensore di dispersione anisotropo e questo contribuisce in modo evidente alla forma ellittica di questi oggetti.

Dalle osservazioni della cinematica e della fotometria, si evince che galassie boxy con luminosità elevata ($M_b \leq -20.5$) hanno basse velocità ($v_m/\bar{\sigma} < \sqrt{\epsilon/(1-\epsilon)}$) e sono poco schiacciate ($0 \leq \delta \leq 0.3$), mentre galassie disky⁶ poco luminose hanno alti valori di $v_m/\bar{\sigma}$.

Infine va sottolineato che per le galassie ellittiche disky di media luminosità con magnitudine assoluta compresa fra -20.5 e -18 così come per i bulge delle galassie a spirale diventa importante anche l' appiattimento rotazionale.

3.2 IL MODELLO DI JEANS E IL RAPPORTO MASSA- LUMINOSITÀ

Una delle applicazioni più utili delle equazioni di Jeans è quella di riuscire a stimare una distribuzione di massa per un sistema partendo da dati osservativi (come ad esempio I(R)). Consideriamo l' equazione di Jeans scritta in funzione della dispersione di velocità radiale:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} v_r^2 + 2\beta \frac{v_r^2}{r} - \frac{d\Phi}{dr} = 0$$

dove Φ è sempre il potenziale, v_r è la componente radiale della velocità e β è il parametro di anisotropia.

Poichè $d\Phi/dr = GM(r)/r^2$ allora:

$$M(r) = \frac{-v_r^2 r}{G} \left(\frac{d \ln \rho}{d \ln r} + \frac{d \ln v_r^2}{d \ln r} + 2\beta \right)$$

mentre per σ^2 :

$$\sigma^2(R) = \frac{2}{I(R)} \int_R^\infty \left(1 - \beta \frac{R^2}{r^2}\right) \frac{v_r^2}{\sqrt{r^2 - R^2}} r dr \quad (3.2.1)$$

dove v è la distribuzione di luce. Tuttavia la (3.2.1) non riesce a determinare in modo univoco il valore di M in quanto servirebbero maggiori restrizioni derivanti da momenti di Jeans di ordine superiore al primo. A questo pone rimedio Schwarzschild che riesce a determinare un valore per la massa tramite il suo modello "Orbit-superposition models" e questo ci consentirà di calcolare il rapporto *massa- luminosità*.

Alcune delle caratteristiche più importanti di una galassia possono essere studiate tramite il rapporto *luminosità massa* dato dalla relazione $L \propto M^{3.5}$.

Facciamo un esempio. Andando a stimare, attraverso la fotometria, la luminosità totale della galassia e conoscendo quanto vale la massa di un sistema che si suppone sia composto da N stelle con stessa massa e luminosità di quella del Sole, possiamo calcolare quanto vale il rapporto M/L: dal valore ottenuto che risulta essere circa $M/L \sim 10$, si osserva che la massa complessiva che dovrebbe essere presente è di gran lunga superiore alla sola massa che irradia. Questa considerazione può essere vista come una prova dell' esistenza della materia oscura (*dark matter*) nelle galassie ellittiche che tenteremo di descrivere meglio nella prossima sezione.

6 Con boxy e diskly si fa riferimento alla forma delle isofote della galassia

3.3 FUNDAMENTAL PLANE

Le proprietà delle galassie ellittiche sono descritte dalle seguenti leggi:

1. *Legge di Fareb-Jackson* che trova una relazione fra la luminosità L e la dispersione σ

$$L \propto \sigma^4 \quad (3.3.1)$$

2. *Legge di Kormendy* che descrive la relazione fra il raggio effettivo e la luminosità:

$$L \propto R_e^a \quad (3.3.2)$$

3. *Legge $R-\sigma$* che descrive la relazione fra il raggio effettivo e la dispersione:

$$R \propto \sigma \quad (3.3.3)$$

Possiamo quindi definire un piano chiamato *fundamental plane* (FP) descritto dall'equazione

$$\log L = \alpha \log \sigma + \beta \log R_e + \gamma \quad (3.3.4)$$

che descrive una relazione che lega fra di loro quantità che caratterizzano la struttura delle galassie ellittiche ossia dispersione di velocità, luminosità e raggio effettivo.

Ad ogni punto del piano viene associato una galassia ellittica alla quale corrispondono determinati valori di L , σ ed R_e .

Proiettando il FP sui tre piani definiti dai tre assi cartesiani nello spazio R^3 ottengo le tre leggi (3.3.1)-(3.3.2) e (3.3.3) (Fig.4). Inoltre:

- il FP non è parallelo a nessuno dei tre piani ma è leggermente inclinato
- è molto sottile infatti ha una dispersione di circa lo 0.05%

Erroneamente si pensava che il FP fosse ottenuto come conseguenza del teorema del viriale. Adesso vedremo perché questo non è possibile.

Scriviamo il teorema del viriale come per un sistema all'equilibrio:

$$U = -2T$$

quindi si verifica che:

$$\frac{GM}{r} \propto \bar{v}^2 \quad (3.3.5)$$

definendo $\sigma_0^2 = k_v \bar{v}^2$ e $R_e = k_t r$ riscrivo la (3.3.5) come:

$$k_v M \sigma^2 = \frac{GM k_t}{R_e}$$

moltiplicando e dividendo per L si ottiene:

$$L = \sigma^2 R_e \frac{k_v}{G k_t M / L} \quad (3.3.6)$$

dove M/L è il rapporto massa luminosità e $k_v - k_t$ sono delle costanti arbitrarie.

Considerando il logaritmo della (3.3.6):

$$\log L = 2 \log \sigma + \log R_e + \log \left(\frac{k_t}{GK_u(M/L)} \right) \quad (3.3.7)$$

Se assumiamo M/L costante (che equivale a dire che le galassie ellittiche sono una famiglia omologa), il teorema del viriale definirebbe un piano fondamentale che è ben diverso da quello trovato attraverso dati osservativi. Se ne deduce che le galassie ellittiche non sono omologhe e che quindi M/L non è un valore costante. In definitiva il piano fondamentale non è una conseguenza del teorema del viriale.

È inoltre importante sottolineare che L ed R_e cambiano a seconda della banda spettrale a cui le galassie vengono osservate, così come succede, di conseguenza, all'inclinazione del piano.

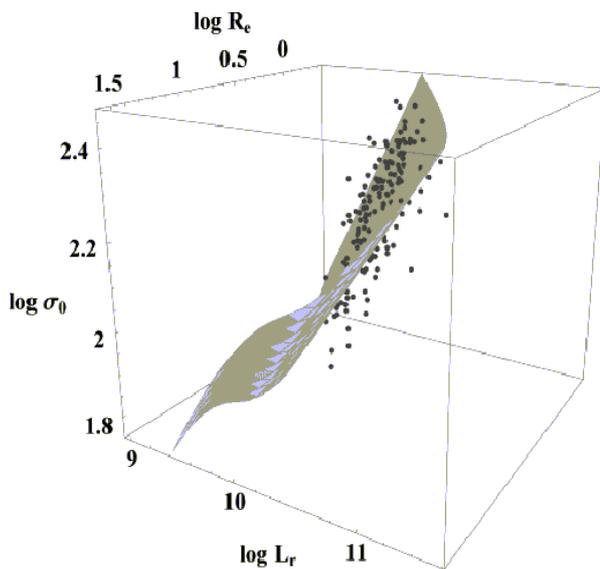


Fig.4 *Fundamental plane*

4. DINAMICA E CINEMATICA DELLE GALASSIE A SPIRALE

Tramite le osservazioni fatte attraverso la riga a 21 cm nel radio dell' H atomico si è potuto studiare il movimento delle galassie a spirale. Queste sono caratterizzate da una rotazione differenziale e da altri diversi moti che si accompagnano a questa rotazione.

Il metodo più diretto per studiare la dinamica dei moti è determinare la curva di rotazione di una *galassia a spirale*.

4.1 CURVA DI ROTAZIONE

Per stimare come si muove il disco della galassia cominciamo a fare alcune approssimazioni (Fig. 6):

- consideriamo una massa unitaria m posta ad una distanza R tale che la massa della galassia possa essere considerata tutta concentrata nel suo centro. La massa m sarà soggetta ad una forza di gravità pari a:

$$\frac{v^2(R)}{R} = G \frac{M}{R^2} \quad (4.1.1)$$

risolvendo la (4.1.1) rispetto alla velocità si ottiene $v(R) \propto R^{-1/2}$ in perfetto accordo con le *leggi di Keplero*⁷.

⁷ Per la 3° legge di Keplero la velocità diminuisce con l'aumentare della distanza.

- Diminuendo la distanza a qualche parsec, la galassia può essere approssimata come una sfera di densità $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$ e, di conseguenza, la velocità della massa unitaria a questa distanza sarà :

$$v(R) \propto R^{1-\alpha/2}$$



Fig.5 Galassia a spirale NGC 1232

Secondo questo modello la curva di rotazione risultante dovrebbe essere:

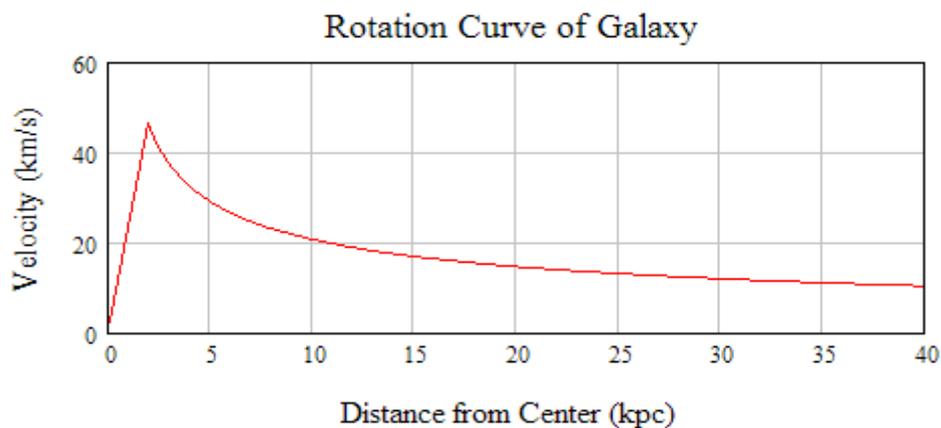


Fig.6 Curva di rotazione kepleriana

dove si nota un iniziale irripidimento della curva (da 0 a 2,5 kpc) che poi lentamente decresce all' aumentare della distanza.

La causa dell' iniziale crescita della curva è la presenza di grande quantità di materia (circa $10^9 - 10^{10} M_{sol}$) in uno spazio molto piccolo. Questo può essere indice della presenza di

un *black hole* (buco nero) che ingloba dentro di sé stelle, gas e luce che oltrepassano l'*orizzonte degli eventi*⁸ (è questo il motivo della forte luminosità osservata).

Dai dati osservativi risulta che la curva di rotazione non decresce ma rimane sostanzialmente piatta anche a grandi distanze dal nucleo galattico (vedi Fig. 7).

Questa dicotomia fra i dati sperimentali e osservativi è stata spiegata supponendo l'esistenza della materia oscura:

La *dark matter* è così definita in quanto non amette in nessuna regione dello spettro elettromagnetico (cioè non interagisce con la radiazione elettromagnetica ossia con i fotoni) . Compone circa il 90% della materia totale presente nell' Universo ed è formata da particelle fredde ($T \sim 10^{\circ} K$) e pesanti (si suppone possano essere monopoli magnetici).

Questa componente oscura della materia contribuisce a mantenere piatta la curva di rotazione e a mantenere stabile la galassia. Infatti la galassia è resa stabile da un potenziale gravitazionale prodotto da una quantità di massa ben superiore a quella luminosa. Si può quindi considerare la galassia a spirale come un disco con un rigonfiamento centrale posto all' interno di una sfera di dark matter.

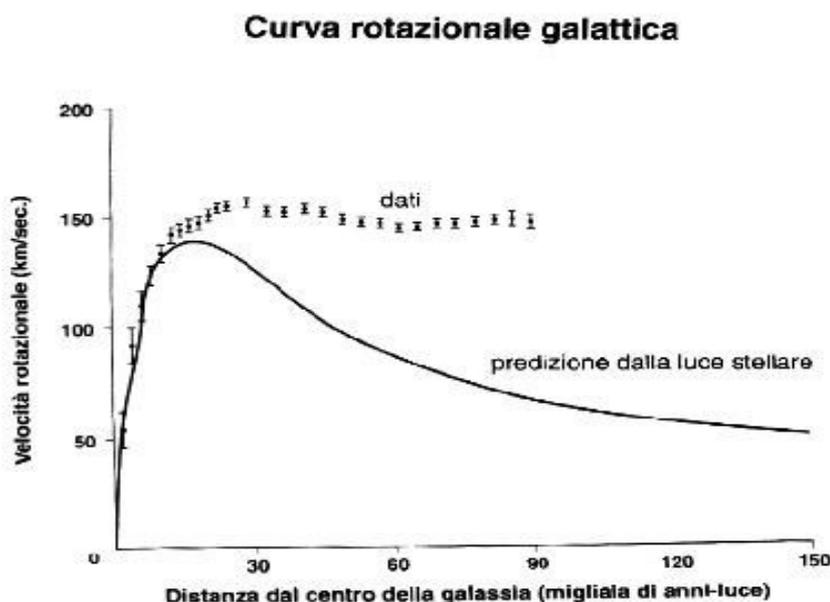


Fig. 7 *Curva di rotazione di una galassia a spirale*

Un' altra prova dell' esistenza della materia oscura è fornita da considerazioni cinematiche: le stelle all' interno del disco si muovono con una velocità di circa 200 km/s che è un valore maggiore della velocità di fuga. Per questa ragione, le galassie dovrebbero “evaporare”, ma questo non succede perché è presente la materia oscura che aumenta il campo gravitazionale impedendone l' evaporazione.

4.2 DINAMICA DEI BRACCI E TEORIA DI LIN- SHU

I bracci sono costituiti principalmente da gas freddo (H atomico) che permettono la

8 *Orizzonte degli eventi*: superficie limite immaginaria che circonda il buco nero. Ogni punto di questa superficie ha come velocità di fuga quella della luce (quindi anche la luce stessa cade all' interno del buco nero)

formazione di stelle blu (giovani). Questi possono essere due (come nelle barrate) o in numero superiore.

Come abbiamo visto nella prima parte i bracci possono essere più o meno avvolti attorno al bulge. Poiché non esistono prove certe del come questi bracci si siano formati vennero fatte diverse ipotesi.

La prima ipotesi (Fig.8) parte dal considerare concentrazioni di densità in strutture lineari (il motivo per cui possano esistere è ignoto) ad un tempo t_1 . Con il passare del tempo (t_2), a causa della rotazione differenziale, hanno cominciato a muoversi e ad assumere la loro “classica” forma a spirale (t_3). Se questo modello fosse corretto, allora dopo un tempo pari all' età dell' Universo le galassie a spirale non dovrebbero più esistere in quanto i bracci si sarebbero dovuti avvolgere completamente intorno alla galassia e di conseguenza non dovrebbero più essere visibili . A questo problema hanno posto rimedio Lin e Shu, due astronomi americani, con la loro teoria delle *onde di densità*. Secondo Lin e Shu, i bracci sono una conseguenza del passaggio di onde di densità

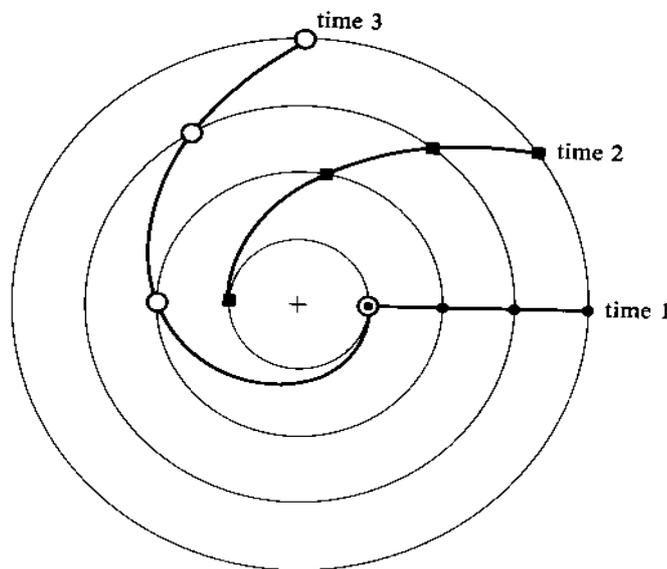


Fig. Modello dell' avvolgimento dei bracci

che comprimono il mezzo (gas freddo) e creano stelle giovani giustificando in questo modo sia la composizione stellare dei bracci e sia il loro caratteristico colore azzurro. Il passaggio dell' onda addensa il materiale già presente (ecco perché i bracci sono così luminosi) in determinate regioni che si muovono di rotazione differenziale (come detto precedentemente) dando così vita alla forma a spirale della galassia.

È inoltre importante sottolineare che grazie a questo modello si ha anche una spiegazione del perché i bracci non spariscono: durante il collasso della nube che diede origine alla galassia si vennero a formare delle asimmetrie nella formazione stellare che diede origine a perturbazioni gravitazionali che sono all' origine della creazione delle onde. Per questa ragione le onde verranno create costantemente.

Riguardo il moto dei bracci all' interno del disco conviene fare una differenza fra bracci *trailing* e quelli *leading*: se i bracci hanno una rotazione in verso opposto a quello del disco vengono chiamati trailing, mentre in caso contrario leading . Di solito si osservano galassie di tipo trailing, ma possono esserci delle galassie in cui esiste una combinazione di entrambi come nell' esempio in Fig. 9: la galassia NGC 1622 ha i bracci esterni con le estremità rivolte nella stessa direzione di rotazione del disco, mentre internamente presenta

un braccio avvolto in senso opposto a quello della rotazione del disco.



Fig.9

Galassia NGC 4622

BIBLIOGRAFIA

- “Alcune questioni matematiche riguardanti la dinamica stellare”, Luca Ciotti, ZANICHELLI EDITORE S.p.A., Bologna
- “Elementi di Astronomia”, P. Giannoni, Pitagora editrice Bologna
- “Dynamics of Galaxies”, Bertin, Cambridge University Press
- “Galactic Dynamics”, J. Binney and S. Tremaine, Second edition, Princeton series of Astrophysics
- “Spiral Structure in Galaxies, A DENSITY WAVE THEORY”, G. Bertin and C.C. Lin, The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, Massachusetts 02142 BERJH
- http://www.danielegasparri.com/italiano/libri/galassie/capitolo_galassie.pdf