

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

SCUOLA di INGEGNERIA E ARCHITETTURA
Sede di Forlì

Corso di Laurea
in
Ingegneria Aerospaziale
(Classe LM-20)

TESI DI LAUREA IN
Sistemi di Propulsione Avanzati LM

***“Sviluppo e Implementazione di un Simulatore per la
Balistica Interna per un Razzo a Propellente Solido”***

CANDIDATO

Baffa Marco Francesco

RELATORE

Prof. Ponti Fabrizio

CORRELATORI

Ing. Bertacin Roberto

Ing. Fedele Domenico

Anno Accademico 2012/2013
Sessione I

Riassunto

Il lavoro di tesi presentato nella seguente trattazione riguarda lo sviluppo di un Modello per la Balistica Interna per un Razzo a Propellente Solido. Tale modello costituirà una parte del Simulatore di Combustione Anisotropa di Endoreattori a Propellente Solido in fase di sviluppo presso il Laboratorio di Propulsione e Macchine della Seconda Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna in collaborazione con l'azienda AVIO-BPD. Tale Simulatore sarà composto da due moduli, il primo capace di simulare la regressione della superficie di combustione del grano propellente ed il secondo capace di simulare la balistica interna.

INDICE

Lista delle Figure	<i>Pag.</i> 11
Lista delle Tabelle	<i>Pag.</i> 14
Lista dei Simboli	<i>Pag.</i> 15
1. Introduzione:	<i>Pag.</i> 20
1.1. Motivazioni	" 20
1.2. Sistemi Propulsivi	" 22
2. Endoreattori a propellente solido:	<i>Pag.</i> 25
2.1. Componenti di un SRM	" 25
2.1.1. Case	" 27
2.1.2. Protezioni Termiche	" 27
2.1.3. Propellente	" 28
2.1.4. Accenditore	" 31
2.1.5. Ugello	" 33
2.2. Descrizione della Motorizzazione "Zefiro 9"	" 34
2.3. Principio di Funzionamento	" 35
2.4. Balistica Interna di Endoreattori a Propellente Solido	" 38
2.4.1. Impulso Specifico	" 40
2.4.2. Parametri dell'Ugello	" 41
2.4.3. Velocità Caratteristica	" 44
2.4.4. Coefficiente di Spinta	" 44
2.4.5. Velocità di Combustione	" 45
2.4.6. Pressione di Camera e MEOP	" 51

2.5. Modelli di Balistica Interna	"	53
3. Sviluppo Modulo Balistico	<i>Pag.</i>	56
3.1. Modello Zero-Dimensionale non Stazionario	"	56
3.1.1. Sistema di Equazioni Differenziali	"	57
3.1.2. Contributo Dei Vari Parametri	"	58
3.1.3. Integrazione numerica	"	67
3.1.4. Fattori Correttivi per la Velocità di Combustione	"	70
3.2. Modello Mono-Dimensionale Stazionario	"	72
3.2.1. Formulazione del Flusso Mono-Dimensionale Generalizzato	"	73
3.2.2. Equazioni di Lavoro del Flusso di Tipo Semplice	"	83
3.2.2.1. Variazione Mach dovuto alla Variazione di Area	"	84
3.2.2.2. Variazione Mach dovuto alla Variazione di Portata	"	85
3.2.2.3. Variazione Mach dovuto alla Variazione di Temperatura Totale	"	86
3.2.3. Bilancio Energetico di un Singolo Nodo	"	86
3.2.4. Velocità di Ablazione delle Protezioni Termiche	"	88
3.3. Accoppiamento Modello 0D non Stazionario e Modello 1D Stazionario	"	90

4. Accoppiamento Modulo Balistico e Simulatore di Regressione	<i>Pag.</i>	96
4.1. Rappresentazione della Geometria	"	97
4.2. Identificazione della Superficie di Combustione	"	97
4.3. Simulatore di Regressione	"	98
4.4. Estrapolazione delle Caratteristiche Geometriche della Camera di Combustione	"	101
4.4.1. Area di Porta del Canale	"	102
4.4.2. Volume dei Singoli Nodi	"	103
4.4.3. Superficie di Combustione	"	104
4.4.4. Superficie di Protezione Termica Esposta	"	105
5. Validazione del Modello Balistico e Risultati ottenuti	<i>Pag.</i>	108
5.1. Validazione modello 0D mediante dati forniti da AVIO:	"	108
5.1.1. Integrazione numerica RK	"	109
5.1.2. Integrazione numerica RKF	"	110
5.1.3. Integrazione con Funzioni "odesuite" di MATLAB	"	111
5.1.4. Confronto dei Metodi di Integrazione Numerica	"	112
5.2. Applicazione del Modello 0D non Stazionario e Simulatore di Regressione alla Motorizzazione <i>Zefiro 9</i> :	"	115
5.2.1. Impostazione del Problema	"	115
5.2.2. Analisi dei risultati	"	117

5.3. Applicazione Modulo Balistico e Simulatore di Regressione alla Motorizzazione <i>Zefiro 9</i>	"	122
5.3.1. Combustione Erosiva dovuto all'Accenditore	"	122
5.3.2. Validazione del Modulo Balistico	"	123
5.3.3. Applicazione del Simulatore Completo allo <i>Zefiro 9</i>	"	125
5.4. Applicazione Modulo Balistico e Simulatore di Regressione ad un SRM con elevato L/D_h	"	134

6. Conclusioni e Sviluppi Futuri *Pag.* 138

Bibliografia *Pag.* 140

Lista Figure

1.1	Struttura Simulatore	<i>Pag.</i> 22
1.2	Schema Endoreattore a Propellente Liquido	" 23
1.3	Schema Endoreattore a Propellente Solido	" 23
1.4	Schema Endoreattore Ibrido	" 23
1.5	Schema Endoreattore Nucleare	" 24
1.6	Schema Endoreattore Solare	" 24
1.7	Motore a Ioni	" 24
1.8	Motore Magnetoplasmadinamico	" 24
2.1	Componendi Solid Rocket Motor	" 26
2.2	Schema Accenditore Pellets Basket	" 31
2.3	Schema Inziatore Elettrico	" 32
2.4	Schema Ugello Fisso	" 33
2.5	Schema Ugello Immerso	" 34
2.6	Schema Ugello Mobile	" 34
2.7	Motorizzazione <i>Zefiro 9</i>	" 35
2.8	Schema Motore	" 35
2.9	Espansione Ottima (a), Sovra-Espansione (b) , Sotto-Espansione (c)	" 37
2.10	Fasi della Balistica Interna di un SRM	" 38
2.11	Transient Ignition	" 39
2.12	Schematizzazione Semplificata Camera di Combustione	" 42
2.13	Andamento Prestazioni Ugello	" 45
2.14	Velocità di Combustione	" 46
2.15	Andamento Velocità di Combustione	" 47
2.16	Combustione Erosiva	" 49
2.17	Camera di Combustione SRM	" 51
2.18	Geometria Iniziale Grano Propellente	" 52
3.1	Volume di Controllo di un SRM	" 57

3.2	Andamento Volume Camera di Combustione	"	59
3.3	Andamento Variazione Volume Camera di Combustione	"	59
3.4	Andamento Portata Massica dei Prodotti di Combustione	"	60
3.5	Andamento Pressione in Uscita dall'Accenditore	"	61
3.6	Andamento Portata Massica dell'Accenditore	"	62
3.7	Variazione Diametro di Gola dell'Ugello	"	63
3.8	Configurazione di una BARIA	"	71
3.9	Fattore HUMP	"	72
3.10	Discretizzazione Camera di Combustione	"	73
3.11	Volume di Controllo	"	75
3.12	Bilancio Energetico del Nodo in Esame	"	87
3.13	Zone della Protezione Termica	"	89
3.14	Schema Modello Balistico	"	91
3.15	Nodo di Calcolo	"	92
3.16	Schema Logico Nodo di Calcolo	"	93
3.17	Schema Logico Ciclo Motore	"	94
4.1	Schema Simulatore di Regressione	"	96
4.2	Esempio Matrici di Triangolazione	"	97
4.3	Mesh Superficiale Grano Propellente	"	98
4.4	Profilo Velocità di Combustione dei Vertici	"	99
4.5	Variazione Camera di Combustione	"	100
4.6	Volumi di Controllo Camera di Combustione	"	101
4.7	Intersezione Grano Propellente e Case	"	102
4.8	Andamento Volume di Controllo lungo la Camera di Combustione	"	103
4.9	Superficie di Combustione compreso tra e Sezioni	"	104
4.10	Suddivisione Area di un Triangolo	"	104
4.11	Distribuzione Superficie di Combustione	"	105
4.12	Discretizzazione Superfici Protezioni Termiche Totalmente Esposte	"	106
4.13	Superficie Protezione Termica associata a ciascun Nodo	"	107

5.1	Confronto Pressione con Metodo Runge-Kutta	"	109
5.2	Confronto Pressione con Metodo Runge-Kutta-Fehlberg	"	110
5.3	Confronto Pressione con <i>ode45</i> e <i>ode113</i>	"	111
5.4	Tempo di Calcolo con Passo di Integrazione Costante	"	112
5.5	Andamento Errore Percentuale dei Metodi RK e RKF	"	113
5.6	Andamento Passo di Integrazione	"	114
5.7	Passo di Integrazione <i>Zefiro 9</i>	"	117
5.8	Andamento Pressione Motorizzazione <i>Zefiro 9</i> con RK e RKF	"	118
5.9	Andamento Superficie di Combustione ottenuto attraverso dV	"	119
5.10	Sovrastima della Pressione	"	119
5.11	Andamento Temperatura Totale RK	"	120
5.12	Andamento Velocità di Combustione con RK	"	120
5.13	Regressione Grano Propellente	"	121
5.14	Regione di Impingement	"	123
5.15	Differenza Distribuzione Superficie di Combustione	"	124
5.16	Validazione Modello Balistico 0D-1D	"	124
5.17	Andamento Pressione <i>Zefiro 9</i> con S_b	"	125
5.18	Andamento Superficie di Combustione <i>Zefiro 9</i>	"	126
5.19	Andamento Superficie di Combustione <i>Zefiro 9</i> ottenuto mediante dV	"	127
5.20	Andamento Pressione <i>Zefiro 9</i> con $S_b _{dV}$	"	127
5.21	Andamento Pressione <i>Zefiro 9</i> con e senza Perdite di Calore	"	128
5.22	Andamento Superficie di Protezione Termica Esposta nello <i>Zefiro 9</i>	"	129
5.23	Perdite di Calore nello <i>Zefiro 9</i>	"	129
5.24	Andamento Pressione e Temperatura Totale nello <i>Zefiro 9</i>	"	130
5.25	Andamento Calore Specifico nello <i>Zefiro 9</i>	"	130
5.26	Andamento Pressione e Temperatura Statica nello <i>Zefiro 9</i>	"	131
5.27	Andamento Mach nello <i>Zefiro 9</i>	"	131
5.28	Velocità di Combustione nello <i>Zefiro 9</i>	"	132
5.29	Portate in Ingresso ed in Uscita dal Volume di Controllo nello <i>Zefiro 9</i>	"	133
5.30	Coefficiente di Spinta dello <i>Zefiro 9</i>	"	133

5.31	Profilo di Spinta dello <i>Zefiro 9</i>	"	134
5.32	Grano Propellente Motorizzazione con Elevato L/D_h	"	135
5.33	Distribuzione Pressione e Temperatura Statica Motorizzazione con Elevato L/D_h	"	136
5.34	Distribuzione Mach Motorizzazione con Elevato L/D_h	"	136
5.35	Distribuzione Velocità di Combustione Motorizzazione con Elevato L/D_h	"	137

Lista Tabelle

3.1	Variabili Differenziali	<i>Pag.</i>	79
3.2	Coefficienti di Influenza	"	80
3.3	Coefficienti di Influenza con Variazione Calore Specifico e Massa Molecolare Trascurabile	"	82
5.1	Errore Percentuale dei Metodi di Integrazione Numerica con Passo di Integrazione Costante	"	113
5.2	Tempo ed Errore Percentuale Medio dei Metodi RK e RKF con Passo di Integrazione Variabile	"	114

Lista Simboli

a	Coefficiente Termico	[-]
A	Area Sezione	[m^2]
A_b	Superficie di Combustione	[m^2]
A_{bore}	Area Sezione di Passaggio nella Camera di Combustione	[m^2]
a_{ref}	Coefficiente Termico di Riferimento	[-]
A_w	Superficie Bagnata	[m^2]
c	Velocità del Suono	[m/s]
C^*	Velocità Caratteristica	[m/s]
$C_{\mathcal{F}}$	Coefficiente di Spinta	[-]
c_p	Calore Specifico a Pressione Costante	[$J/Kg K$]
\bar{c}_{p_g}	Calore Specifico Medio	[$J/Kg K$]
C_{ref}^*	Velocità Caratteristica di Riferimento	[m/s]
c_s	Capacità Termica dei Gas	[$J/Kg K$]
D_h	Diametro Idraulico	[m]
$\frac{dp}{dt}$	Variazione Pressione nel Tempo	[Pa/s]
ds	Variazione di Entropia	[$J/Kg K$]
$\frac{dT}{dt}$	Variazione Temperatura nel Tempo	[K/s]
$\frac{dV}{dt}$	Variazione Volume Camera di Combustione	[m^3/s]
\mathcal{F}	Spinta Propulsiva	[N]
f	Friction Factor	[-]
Fr	Frazione di Massa	[-]
F_x	Forza lungo l'Asse Motore	[N]
G	Flusso di Massa	[$Kg/m^2 s$]

g_e	Accelerazione Gravitazionale	$[m/s^2]$
G_{IRe}	Flusso di Massa nella Regione di Impingement	$[Kg/m^2 s]$
h	Passo di Integrazione Temporale	$[s]$
h_c	Coefficiente di Scambio Termico Convettivo	$[W/m^2 K]$
h_0	Entalpia Totale	$[J/Kg]$
$HUMP$	Coefficiente Correttivo dovuto al Colaggio	$[-]$
I_s	Impulso Specifico	$[s]$
I_t	Impulso Totale	$[N s]$
k_{gas}	Conducibilità dei Gas	$[W/m K]$
L	Lunghezza Camera di Combustione	$[m]$
m	Parametro Sperimentale	$[-]$
M	Numero di Mach	$[-]$
M_{mol}	Massa Molecolare	$[Kg/mol]$
M_p	Massa Totale Propellente	$[Kg]$
M_0	Massa della Miscela di Gas	$[Kg]$
\dot{m}	Portata Massica	$[Kg/s]$
\dot{m}_g	Portata Massica della Miscela	$[Kg/s]$
n	Indice di Combustione	$[-]$
Nu	Numero di Nusselt	$[-]$
p	Pressione Statica	$[Pa]$
p_a	Pressione Ambiente	$[Pa]$
Pr	Numero di Prandtl	$[-]$
P_{ref}	Pressione di Riferimento	$[bar]$
p_0	Pressione Totale	$[Pa]$
Q_{conv}	Flusso Termico Convettivo	$[W/m^2]$
Q_R	Calore introdotto dall'Esterno	$[J/Kg]$

Q_{rad}	Flusso Termico Radiante	$[W/m^2]$
\dot{Q}_{loss}	Perdite di Calore	$[W]$
R	Costante dei Gas	$[J/Kg K]$
r_b	Velocità di Combustione	$[m/s]$
Re	Numero di Reynolds	$[-]$
r_{be}	Velocità di Combustione Erosiva	$[mm/s]$
r_{int}	Raggio Intersezione Sezione di Discretizzazione-Grano Propellente o Sezione di Discretizzazione-Case	$[m]$
r_m	Raggio Medio della Sezione di Passaggio nella Camera di Combustione	$[m]$
r_0	Velocità di Combustione ottenuta mediante Legge di Vieille	$[mm/s]$
$S_{b_{AVIO_{tot}}}$	Superficie di Combustione Totale fornita da AVIO-BPD	$[m^2]$
$S_b _{dV}$	Superficie di Combustione ottenuta mediante dV	$[m^2]$
SF	Fattore di Scala	$[-]$
S_{PT}	Superficie di Protezione Termica Esposta	$[m^2]$
T	Temperatura Statica	$[K]$
T_{abl}	Temperatura di Ablazione delle Protezioni Termiche	$[K]$
t_b	Tempo di Propulsione	$[s]$
T_b	Temperatura Iniziale Grano Propellente	$[K]$
T_{cc}	Temperatura Camera di Combustione	$[K]$
T_i	Temperatura Iniziale	$[K]$
t_f	Tempo Finale Propulsione	$[s]$
T_{ref}	Temperatura di Riferimento	$[K]$
T_s	Temperatura Superficiale del Grano Propellente	$[K]$
T_0	Temperatura Totale	$[K]$
T_1	Temperatura Assoluta dei Gas di Combustione	$[K]$
u	Velocità del Fluido	$[m/s]$
u_{eq}	Velocità Equivalente	$[m/s]$
V	Volume Camera di Combustione	$[m^3]$

w_{eb}	Spessore Grano Propellente	[m]
W_x	Lavoro delle Forze d'Attrito	[J/Kg]
X	Somma delle Forze Resistenti	[N]
α	Costante Empirica	[$-$]
α_g	Coefficiente di Assorbimento del Gas	[$-$]
β	Costante Empirica	[$-$]
β_{IRe}	Costante Empirica nella Regione di Impingement	[$-$]
γ	Rapporto Calori Specifici	[$-$]
Δx	Lunghezza Nodo	[m]
ε_g	Emissività del Gas	[$-$]
ε_s	Emissività della Parete	[$-$]
η_{ref}^*	Rendimento di Riferimento	[$-$]
μ	Viscosità dei Prodotti di Combustione	[$Kg/m s$]
ρ	Densità Statica	[Kg/m^3]
ρ_p	Densità del Grano Propellente	[Kg/m^3]
ρ_0	Densità Totale della Miscela di Gas	[Kg/m^3]
σ	Costante di Stefan-Boltzman	[$W/m^2 K^4$]
σ_p	Sensibilità della Velocità di Combustione	[$1/K$]
τ_w	Sforzo di Attrito alle Pareti	[Pa]

Pedice

a	Accenditore
e	Sezione d'Uscita dell'Ugello
i	Numero del Nodo
j	Sezione di Discretizzazione
n	Ugello
p	Propellente

PT Protezioni Termiche
* Sezione di Gola dell'Ugello

1. Introduzione

Il seguente elaborato consiste nello sviluppo di un modello per la balistica interna capace di interfacciarsi con un simulatore di regressione superficiale, in modo da sviluppare un simulatore completo del processo di combustione di razzi a propellente solido (Solid Rocket Motor).

Lo sviluppo del modulo balistico e del simulatore di regressione è svolto, in collaborazione con l'azienda AVIO-BPD, all'interno del Laboratorio di Propulsione e Macchine della Seconda Facoltà di Ingegneria con sede a Forlì dell'Università di Bologna.

Come già esposto precedentemente, il simulatore si compone di 2 moduli:

- "*Simulatore di Regressione*" capace di simulare la regressione della superficie di combustione del propellente;
- "*Modulo Balistico*" capace di simulare la balistica interna di un razzo a propellente solido.

Durante la stesura dell'elaborato si è optato, inizialmente, all'introduzione dei Sistemi Propulsivi con particolare attenzione ad Endoreattori a Propellente Solido. Successivamente andremo a descrivere le caratteristiche geometriche della camera di combustione fornite dal simulatore di regressione, e la struttura del modulo balistico composta dall'accoppiamento di un "*Modello Zero-Dimensionale non Stazionario*" e di un "*Modello Mono-Dimensionale Stazionario*". In conclusione saranno illustrati i risultati ottenuti, in seguito ad una validazione del modello attraverso dati forniti da AVIO-BPD.

1.1. Motivazioni

Il Laboratorio di Propulsione e Macchine della Seconda Facoltà di Ingegneria di Forlì si è proposto di superare i limiti degli attuali simulatori di combustione di razzi a propellente solido attraverso un simulatore anisotropo. Il principale limite dei simulatori attualmente in uso è la loro dipendenza dai modelli di regressione geometrica o dall'applicazione del *Level Set Methods* [1], con le seguenti conseguenze negative:

- Utilizzo per sole geometrie di cui è nota, analiticamente, la formula di regressione, oppure in cui è possibile utilizzare considerazioni di simmetria o periodicità;
- Necessario utilizzo di coefficienti correttivi sperimentali.

Il simulatore in fase di sviluppo si articola, come già accennato, in:

- **Simulatore di Regressione:** la geometria della superficie di combustione viene rappresentata attraverso l'utilizzo di una "*Mesh Triangolare*". La regressione della suddetta superficie viene simulata applicando, a ciascun vertice della mesh, uno spostamento specifico dipendente dalla geometria e dalla velocità di combustione, così da poter considerare le eventuali anisotropie;
- **Modulo Balistico:** affinché il simulatore di regressione possa movimentare i vertici della mesh, è necessario un modello fluidodinamico capace di valutare la balistica interna del razzo a propellente solido preso in esame. Il seguente modulo dovrà valutare, inizialmente, pressione, velocità e proprietà fisiche della miscela di gas presente all'interno della camera di combustione così da poter valutare, in seguito, la velocità di combustione che agisce su ciascun nodo. In tal modo il simulatore di regressione potrà valutare i vettori spostamento da applicare a ciascun vertice della mesh.

Al fine di sviluppare il simulatore completo è necessario, per il simulatore di regressione, il modello della geometria del motore così da poter generare la mesh attraverso un software agli elementi finiti, mentre per il modulo balistico sono necessari le condizioni iniziali della camera di combustione.

Per comprendere meglio il simulatore completo, in figura 1.1 è riportato un diagramma di flusso rappresentante l'accoppiamento tra simulatore di regressione e modulo balistico.

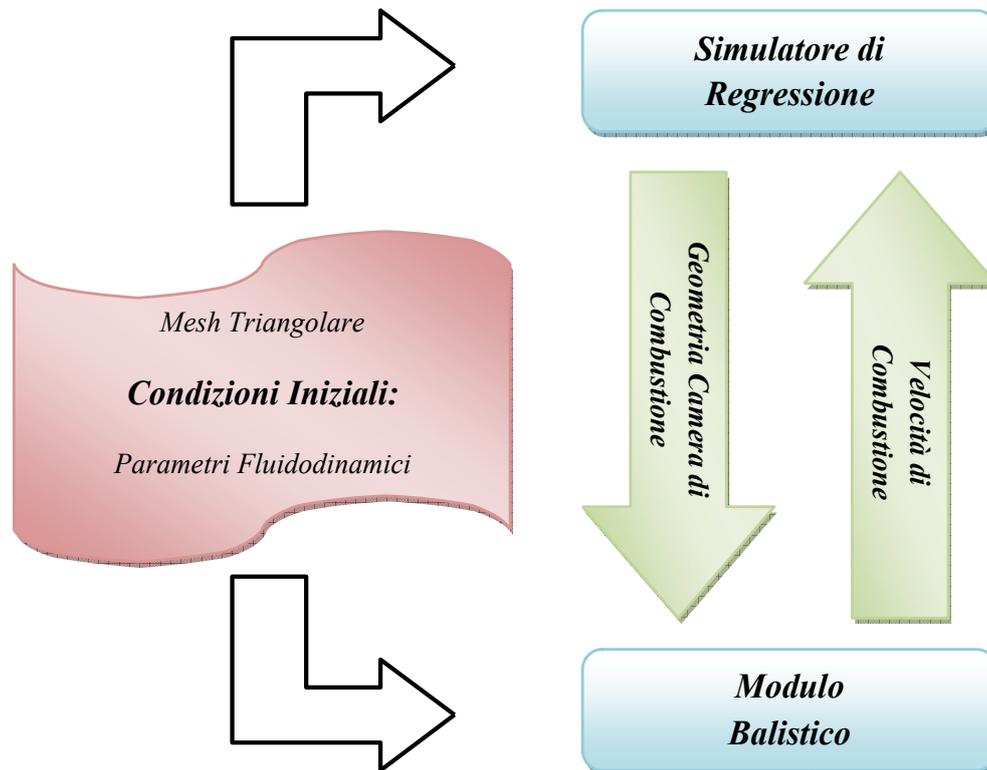


FIGURA 1.1: STRUTTURA DEL SIMULATORE

1.2. Sistemi Propulsivi

Un "*Sistema Propulsivo*" è un qualunque sistema in grado di imprimere al veicolo, su cui è montato, una spinta propulsiva [2]. Nel campo Aerospaziale i sistemi propulsivi utilizzati sono denominati "*Endoreattori (Rocket)*" in cui *tutto* il fluido propulsivo è contenuto all'interno del motore. Essi si distinguono in funzione della sorgente energetica utilizzata per l'accelerazione del fluido propulsivo. Possono essere:

- **Endoreattori Chimici:** l'energia primaria contenuta nei propellenti viene inizialmente convertita in energia termica, attraverso reazioni chimiche di combustione, ed in seguito in energia cinetica, attraverso l'ugello. Questi propulsori sono i più utilizzati nei sistemi di lancio e nella gran parte dei motori di manovra orbitale. In figura 1.2 è rappresentato uno schema di "*Endoreattore a Propellente Liquido (Liquid Rocket Motor)*". Tale sistema necessita di un sistema di pompaggio, trascinato da una turbina a gas alimentata dal "*Gas Generator*", per pressurizzare il propellente e indirizzarlo nella camera di combustione. In figura 1.3 è rappresentato uno schema di "*Endoreattore a Propellente Solido (Solid Rocket Motor)*". A differenza degli endoreattori a propellente liquido, il propellente viene direttamente

immagazzinato all'interno della camera di combustione; ciò causa, durante la fase operativa del motore, una variazione delle caratteristiche geometriche della stessa. Infine in figura 1.4 è rappresentato un "*Endoreattore Ibrido (Hybrid Rocket)*". A differenza degli endoreattori a propellente liquido e solido in cui sia combustibile sia ossidante sono in forma liquida e solida, rispettivamente, nei motori ibridi possiamo avere ossidante in forma liquida e combustibile in forma solida, o viceversa.

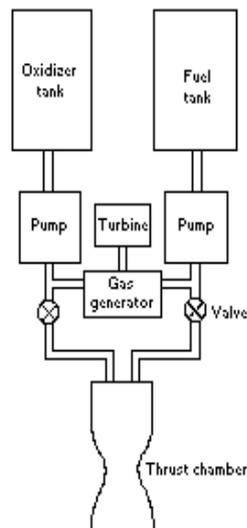


FIGURA 1.2:
SCHEMA
ENDOREATTORE A
PROPELLENTE LIQUIDO

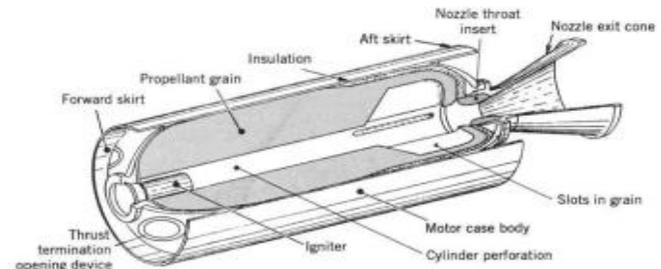


FIGURA 1.3: SCHEMA ENDOREATTORE A PROPELLENTE SOLIDO

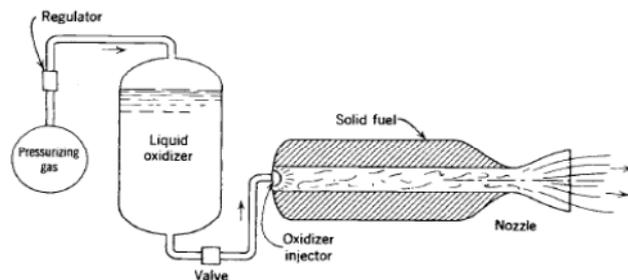


FIGURA 1.4: SCHEMA ENDOREATTORE IBRIDO

- **Endoreattori Nucleari:** sfruttano le reazioni di fissione o decadimento di un combustibile radioattivo per trasferire calore ad un fluido propulsivo, che in seguito sarà accelerato dall'ugello. Questi tipi di endoreattori sono molto efficienti ma possiedono problematiche relative ad un elevato impatto ambientale. Inoltre necessitano di schermature antiradiazioni con elevato aumento del peso del motore. In figura 1.5 è rappresentato un classico schema di "*Endoreattore Nucleare (Nuclear Rocket)*".
- **Endoreattori Solari:** attraverso uno specchio parabolico viene concentrata l'energia solare (Energia Primaria) su uno scambiatore di calore riscaldando il fluido propulsivo, che, fatto espandere in un ugello, genera spinta. In figura 1.6 è rappresentato uno schema di "*Endoreattore Solare (Solar Rocket)*".

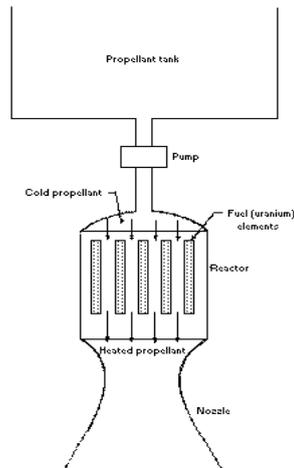


FIGURA 1.5:
SCHEMA ENDOREATTORE
NUCLEARE

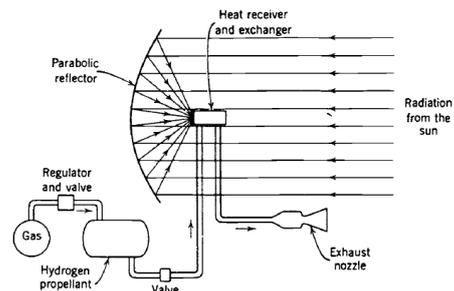


FIGURA 1.6: SCHEMA ENDOREATTORE SOLARE

- **Endoreattori Elettrici:** per convertire l'energia primaria in energia propulsiva è necessaria la generazione di energia elettrica. Questa viene sfruttata per generare campi elettrostatici (*Motore a Ioni*) o elettromagnetici (*Motori Magnetoplasmadinamici*). Nei "*Motori a Ioni*" gli ioni, solitamente a carica positiva, vengono accelerati da un campo elettrostatico fornendo così spinta, come mostrato in figura 1.7. Nei "*Motori Magnetoplasmadinamici*" attraverso gli elettrodi si genera gas ionizzato che attraverso un campo magnetico viene fortemente accelerato, come mostrato in figura 1.8.

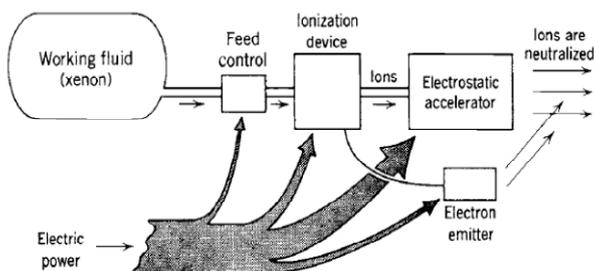


FIGURA 1.7: MOTORE A IONI

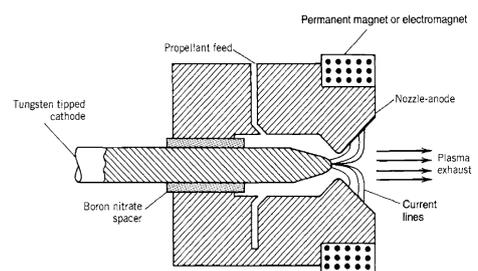


FIGURA 1.8: MOTORE
MAGNETOPLASMADINAMICI

2. Endoreattori a Propellente Solido

L'obiettivo del simulatore è quello di prevedere le caratteristiche geometriche e termo-fluidodinamiche caratterizzanti la fase operativa di un Razzo a Propellente Solido (Solid Rocket Motor). Come già descritto precedentemente, il simulatore è composto da un modulo Balistico, capace di prevedere le caratteristiche termo-fluidodinamiche del fluido all'interno della camera di combustione, obiettivo del seguente lavoro di tesi, e dal simulatore di regressione, capace di prevedere le caratteristiche geometriche della camera di combustione.

E' necessario, a tal proposito, descrivere in modo dettagliato le caratteristiche di un Endoreattore a Propellente Solido, in modo tale da analizzare i parametri d'interesse necessari allo sviluppo del modulo balistico. In particolare andremo ad analizzare:

1. Componenti di un Solid Rocket Motor (SRM);
2. Principio di Funzionamento;
3. Balistica Interna;
4. Parametri Balistici;
5. Velocità di Combustione;

2.1. Componenti di un Solid Rocket Motor

In un *Solid Rocket Motor* il propellente è contenuto all'interno della camera di combustione. Solitamente esso viene sigillato ermeticamente, per tempi di immagazzinamento che vanno da 5 a 20 anni, per prevenire contaminazioni esterne capaci di degradare le caratteristiche del propellente, e quindi di variare il profilo di spinta previsto. A differenza dei *Liquid Rocket Motor*, i *Solid Rocket Motor* sono caratterizzati da semplicità costruttiva, prontezza d'impiego, economicità e profilo di spinta predefinita durante la fase progettuale. Nonostante la loro incapacità di variazione della spinta, questi sono spesso utilizzati nelle prime fasi della missione, in quanto presentano:

- elevate portate in uscita dell'ordine delle Tonnellate al secondo, e quindi elevata spinta;
- minore ingombro a parità di spinta, con conseguente riduzione della resistenza aerodinamica.

Le parti principali di un SRM, come mostrato in figura 2.1, sono:

- *Case*;
- *Protezioni Termiche*;
- *Grano Propellente (Propellant Grain)*;
- *Accenditore*;
- *Ugello*.

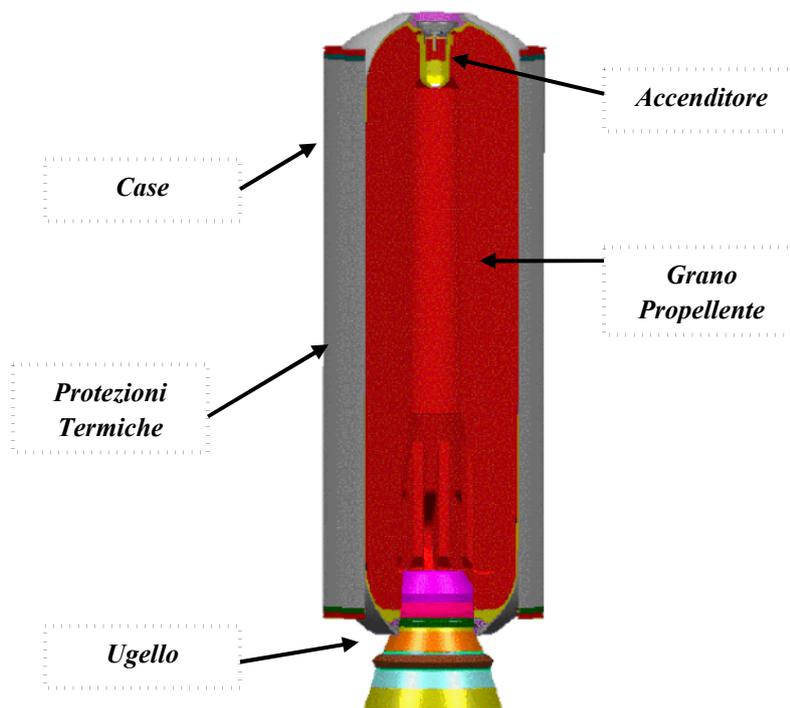


FIGURA 2.1: COMPONENTI SOLID ROCKET MOTOR

Il *Grano Propellente*, in cui è presente sia l'ossidante sia il combustibile, costituisce gran parte della massa totale del motore, che varia dall'82 al 94%. L'*Accenditore*, attivato elettronicamente, fornisce l'energia necessaria all'avviamento del motore. La principale differenza con gli altri endoreattori è che nei SRM una volta avviati, la combustione procede fino all'esaurimento del propellente. E' possibile effettuare lo spegnimento del motore attraverso l'espulsione dell'ugello ma con un'irreversibilità di una nuova accensione. Avviata la combustione, i gas caldi all'interno della camera di combustione vengono accelerati dall'*Ugello* che per reazione genera spinta. Affinché i gas caldi non impattino con il *Case*, degradando le caratteristiche strutturali, viene

posto tra grain e case uno strato di *Protezione Termica*, capace di resistere alle elevate temperature presenti all'interno della camera di combustione.

Nei seguenti paragrafi andremo ad analizzare nel dettaglio tutti i vari componenti principali che costituiscono un Solid Rocket Motor.

2.1.1. Case

Il case di un Solid Rocket Motor ha una funzione, nel suo complesso, puramente strutturale. Infatti esso ha il compito di resistere:

- alla pressione interna dei gas di combustione, dalla quale dipende principalmente la spinta necessaria per la missione;
- all'accelerazione del veicolo;
- ai carichi trasmessi dall'intero sistema propulsivo.

Il case è la struttura portante del motore dove vengono installate le componenti del propulsore come il grain, accenditore, protezioni termiche, ugello ed eventuali sistemi di controllo, e che consenta l'alloggiamento del carico utile, nel caso si tratti dell'ultimo stadio.

Il case può essere realizzato attraverso materiali metallici, come acciaio, alluminio o titanio, oppure attraverso materiali compositi. Attraverso la collaborazione con AVIO-BPD riguardante il vettore VEGA, avremo un case realizzato mediante materiale composito.

2.1.2. Protezioni Termiche

Come già esposto precedentemente, la presenza dei gas di combustione ad alte temperature (che varia tra 2000 e 3500 K) comporta l'utilizzo delle protezioni termiche. Queste hanno il compito di proteggere il case e l'interfaccia tra case-accenditore e case-ugello. Le 2 principali categorie dei materiali che compongono le protezioni termiche sono materiali:

- **Non-Pirolizzanti**: il consumo del materiale è superficiale, attraverso erosione termochimica e meccanica;
- **Pirolizzanti**: sono composti da fibre di rinforzo in una matrice di resina fenolica. La resina ad alte temperature genera gas di pirolisi, che si aggiungono al fluido presente in camera di combustione, trasformando il

materiale restante in un materiale poroso (detto *Char*). Infine tale materiale viene consumato attraverso erosione termochimica e meccanica.

Affinché le protezioni termiche possano evitare il surriscaldamento delle strutture esse devono presentare bassa conduttività termica, elevata capacità termica e capacità di dissipare calore mediante raffreddamento ablativo. Quest'ultimo dipende principalmente dalla decomposizione del materiale e dall' "*Effetto di Bloccaggio*" dei gas di pirolisi che si oppongono alla propagazione del calore. E' necessario però tenere in considerazione l'effetto delle protezioni termiche all'interno della camera di combustione. Per tal motivo durante l'analisi della balistica interna è necessario considerare la portata entrante nella camera di combustione, dovuto al loro consumo, e alla sottrazione di calore (necessario alla pirolisi) che comporta una riduzione della pressione e della temperatura.

I sistemi di protezione termica utilizzati presso AVIO-BPD, in particolare nei vettori Ariane 5 e VEGA, sono [18]:

- **GSM55-A**: caratterizzati da elevato modulo elastico, elevato allungamento, bassa resistenza all'erosione;
- **EG2**: caratterizzati da elevata rigidità, basso allungamento, elevata resistenza all'erosione.

In definitiva risulta evidente come a causa del suo consumo, il sistema di protezione termica debba essere opportunamente dimensionato in modo tale garantire una temperatura limite della struttura metallica.

2.1.3. Grano Propellente

Il grano propellente è una miscela che contiene al suo interno sia Combustibile sia Ossidante. Lo scopo principale è quello di fornire, durante la combustione, una portata massica ad alta energia entalpica. Quest'ultima sarà in seguito convertita in energia cinetica mediante l'ugello.

Durante la fase di progetto di un endoreattore a propellente solido è necessario che il propellente soddisfi le seguenti caratteristiche:

- Elevato impulso specifico (esposto nella sezione 2.3.1), quindi elevata temperatura di combustione e basso peso molecolare del gas;
- Bassa variazione dell'esponente della velocità di combustione (esposto nella sezione 2.5) e del coefficiente di temperatura;

- Adeguate proprietà meccaniche tali da sopportare le accelerazioni del veicolo;
- Alta densità, così da ridurre il volume di ingombro;
- Basso assorbimento di umidità, che comporta un deterioramento chimico;
- Buona Reperibilità;
- Basso costo di produzione;
- Elevata temperatura di accensione, per evitare fenomeni di autoaccensione;
- Bassa tossicità dei prodotti di combustione;
- Bassa abrasività dei prodotti di combustione, tale da ridurre il consumo dell'ugello ed evitarne il danneggiamento.

Come già esposto, i propellenti solidi contengono, al loro interno, tutto il necessario per far avvenire la combustione. Esistono 2 tipi di propellenti solidi che si differenziano secondo la loro distribuzione di combustibile e ossidante. Se il combustibile e l'ossidante sono contenuti all'interno della stessa molecola allora il propellente è detto "*Omogeneo*", o "*Double-Base*". Mentre i propellenti che costituiscono un grano "*Eterogeneo*" con cristalli di ossidante e polvere di combustibile, uniti attraverso un legante sono detti propellenti "*Compositi*".

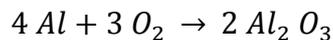
Passiamo ora alla descrizione dei 2 tipi di propellenti sopra citati:

- ***Double-Base:***

Solitamente questi tipi di propellenti sono caratterizzati da *Nitrocellulosa* ($C_6H_7O_2(NO_2)_3$), un ingrediente solido dissolto in *Nitroglicerina* ($C_3H_5(NO_2)_3$). Essi possono essere modificati aggiungendo ossidanti cristallini, come il *Perclorato d'Ammonio* (NH_4ClO_4), e combustibili come *Alluminio* (Al) o composti solidi di *Nitro-Ammine* (NH_2). Però se il propellente è così modificato allora non sarà più un propellente *Double-Base*, bensì un propellente "*Double-Base Composito Modificato* (*CMDB - Composite Modified Double Base*)". Con questi tipi di propellenti si riescono a raggiungere temperature in camera di combustione dell'ordine dei 2700 K, con impulsi specifici dell'ordine dei 200 s.

- **Composito:**

Solitamente questi tipi di propellenti sono caratterizzati da un ossidante che contiene un consistente quantitativo di ossigeno. Il "*Perclorato d'Ammonio*" è uno dei comburenti più utilizzati, dovuto principalmente al basso costo. Il principale problema del suddetto comburente è la generazione di acido cloridrico che, combinato con il vapor d'acqua, genera pioggia acida. Alternativamente, è possibile utilizzare il "*Nitrato d'Ammonio*" (NH_4NO_3), meno performante del perclorato ma elimina la possibilità di formazione di acido cloridrico. Il principale problema del seguente comburente è la ridotta velocità di combustione. Il legante, che contiene l'ossidante, serve come combustibile ed ha il compito di resistere alle sollecitazioni termiche e meccaniche durante la fase di lancio. Solitamente i leganti sono formati da gomma sintetica come "*Hydroxyl Terminated PolyButaliene (HTPB)*" o "*Carboxyl Terminated PolyButaliene (CTPB)*". Infine il più comune combustibile attualmente utilizzato è l'"*Alluminio*", impiegato in proporzioni che vanno dal 5% al 20% della massa totale del propellente. Durante la combustione la sua reazione sarà:



Alla temperatura di camera di combustione il prodotto di tale reazione, detto "*Ossido di Alluminio*" o "*Allumina*", è allo stato liquido. Durante l'espulsione dalla camera di combustione la temperatura diminuisce modificando il proprio stato da liquido a solido. Ciò comporta una modifica sul flusso e sull'ugello (nel seguente lavoro di tesi tale effetto è stato trascurato).

Per prevenire la trasmissione di calore per radiazione, che potrebbe causare la combustione interna del propellente, viene aggiunto carbone nero, dando così un colore scuro al propellente.

Realizzato il propellente, quest'ultimo viene colato all'interno del case, già provvisto di protezioni termiche, attraverso varie colate. La camera di combustione è ottenuta mediante "*Punzonatura*" oppure mediante l'inserimento di una spina prima della fase di colaggio.

La geometria della camera di combustione è particolarmente importante, come sarà esposto nella sezione 2.4.6, nella determinazione del profilo di pressione.

2.1.4. Accenditore

L'Accenditore di un endoreattore a propellente solido è un sistema che fornisce energia sotto forma di gas ad alte temperature e pressioni tali da far avvenire la combustione del propellente. Esso può essere collocato in varie posizioni sul motore, ma nel presente elaborato considereremo accenditori posti alla testa del motore. Per una trattazione dettagliata sul posizionamento dell'accenditore si rimanda a [3].

Gli iniettori per endoreattori a propellente solido possono essere distinti in:

➤ **Accenditori Pirotecnici:**

Questi tipi di accenditori utilizzano esplosivo solido oppure propellente con formulazione altamente energetica per generare calore. Solitamente vengono utilizzati piccoli *pellets di propellente* con alta superficie di combustione. Il calore fornito al propellente dell'endoreattore è di tipo convettivo, conduttivo e radiativo.

La configurazione maggiormente utilizzata è il "*Pellets Basket*", mostrato in figura 2.2.

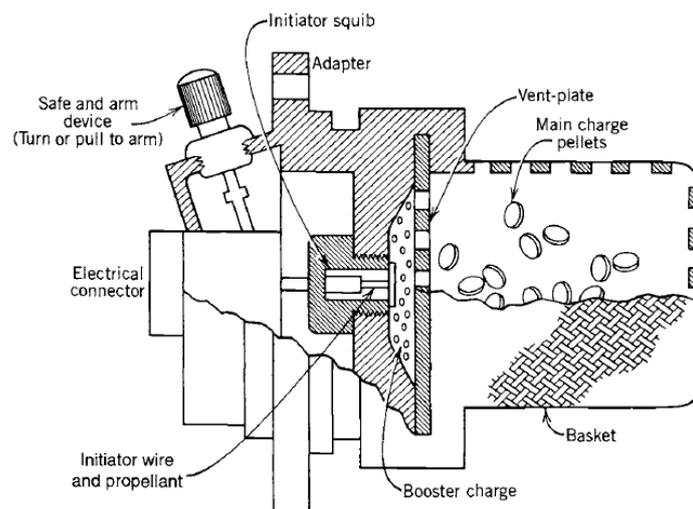


FIGURA 2.2: SCHEMA ACCENDITORE PELLET BASKET

Esso è composto da una *Carica Primaria*, o *Iniziatore*, con il solo scopo di accendere una seconda carica di dimensioni più grandi denominata

Booster. Infine, tale carica provoca l'accensione delle cariche principali dell'accenditore, e quindi dei pellets di propellente.

➤ ***Accenditori Pirogenici:***

Questi tipi di accenditori sono dei piccoli motori a razzo caratterizzati da uno o più ugelli. A differenza degli accenditori pirotecnici il calore fornito al propellente dell'endoreattore è di tipo convettivo, perciò il riscaldamento del propellente avviene attraverso il contatto con i gas caldi provenienti dall'accenditore.

La detonazione della carica detta *Iniziatore*, detonata per via elettrica, come mostrato in figura 2.3, provoca la detonazione di una carica più grande, denominata *Booster*, causando così la combustione del propellente dell'accenditore. Avvenuta la combustione del propellente dell'accenditore, i prodotti di combustione interagiscono con il propellente dell'endoreattore che, attraverso scambio termico convettivo, determinano la combustione. Questi prodotti di combustione interagiscono con il propellente in una determinata zona detta "*Regione di Impingement*", causando un maggior consumo del propellente.

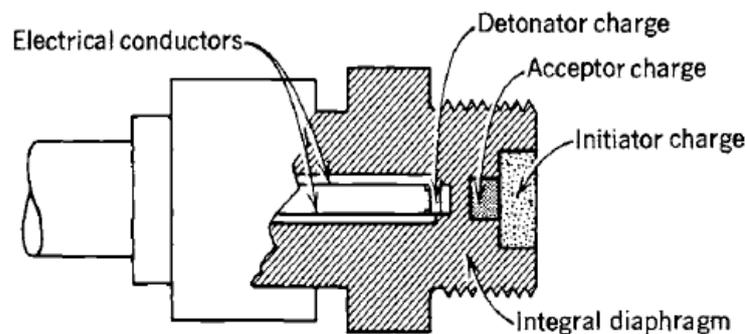


FIGURA 2.3: SCHEMA INIZIATORE ELETTRICO

Il progetto dell'accenditore segue la stessa logica del propulsore; infatti, la struttura dell'accenditore viene progettata per resistere alla pressione dei prodotti della combustione interni all'accenditore stesso. Inoltre, essi devono essere dotati di una protezione termica sia interna che esterna in modo tale da proteggere la struttura dai gas caldi, da un lato, dell'accenditore stesso, e dall'altro dai gas caldi del motore.

2.1.5. Ugello

L'*Ugello Supersonico* ha il principale compito di convertire l'energia termica dei gas di combustione in energia cinetica, generando spinta propulsiva. Per le elevate temperature e velocità dei gas che lo attraversano è necessario l'utilizzo di materiali particolari capaci di resistere in queste condizioni. Durante la fase operativa del motore, il materiale che compone l'ugello tende a degradarsi attraverso fenomeni *ablativi* ed *erosivi*. La zona maggiormente influenzata da tali fenomeni è la sezione di gola che può comportare un errato funzionamento dell'ugello. All'esterno del materiale ablativo è necessario realizzare una struttura, con materiale alluminio o acciaio, capace di sopportare i carichi strutturali.

Gli ugelli per un endoreattore a propellente solido possono essere:

➤ ***Ugelli Fissi:***

Questi tipi di ugelli sono collegati rigidamente alla struttura del motore, come mostrato in figura 2.4. Inoltre, non permettono il controllo della vettorizzazione della spinta.

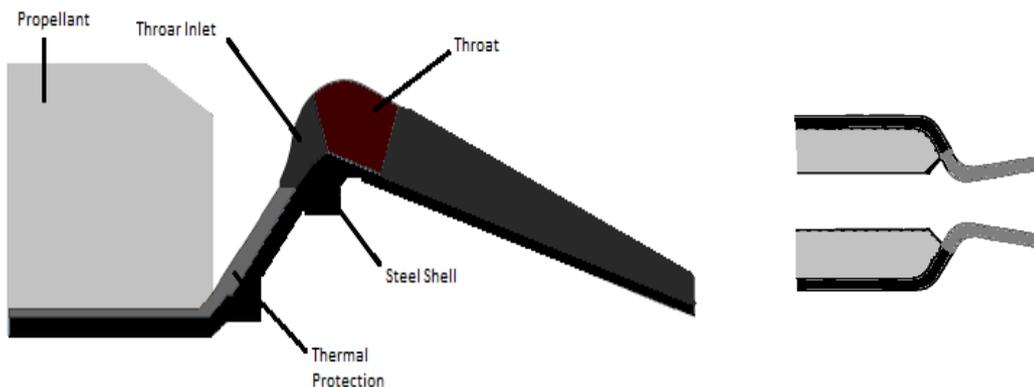


FIGURA 2.4: SCHEMA UGELLO FISSO

➤ ***Ugelli Immersi:***

In questi tipi di ugelli una porzione della struttura dell'ugello è immersa all'interno della camera di combustione. In tal modo si ottiene un duplice vantaggio, il primo riguardante la riduzione della lunghezza totale del motore e quindi riduzione della resistenza aerodinamica, il secondo, a parità di lunghezza, è possibile espandere maggiormente il flusso nel divergente aumentando così la spinta. In figura 2.5 è raffigurato un classico schema di ugello immerso.

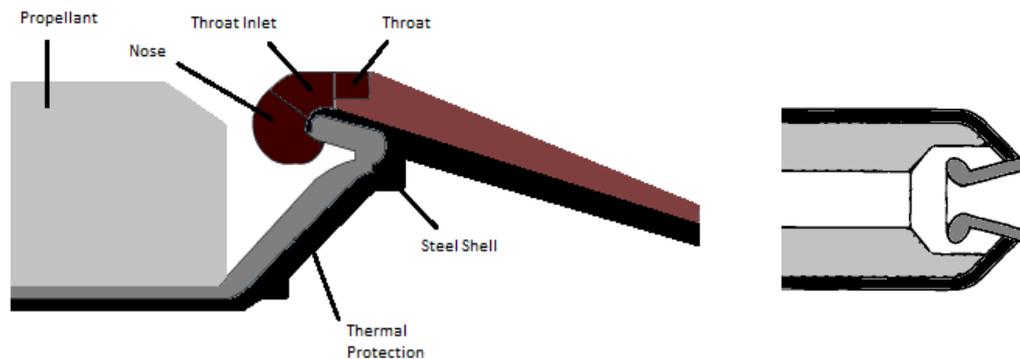


FIGURA 2.5: SCHEMA UGELLO IMMERSO

➤ **Ugelli Mobili:**

Questi tipi di ugelli sono in grado di orientare la spinta durante il volo. E' possibile il controllo dell'*imbardata* e del *beccheggio*, ma per il controllo del *rollio* sono necessari 2 ugelli. Gli ugelli mobili sono, tipicamente, immersi ed utilizzano un giunto flessibile o un cuscinetto con 2 attuatori idraulici capaci di movimentare l'ugello di pochi gradi (intorno a 6 gradi). Un classico schema di un ugello mobile è raffigurato in figura 2.6.

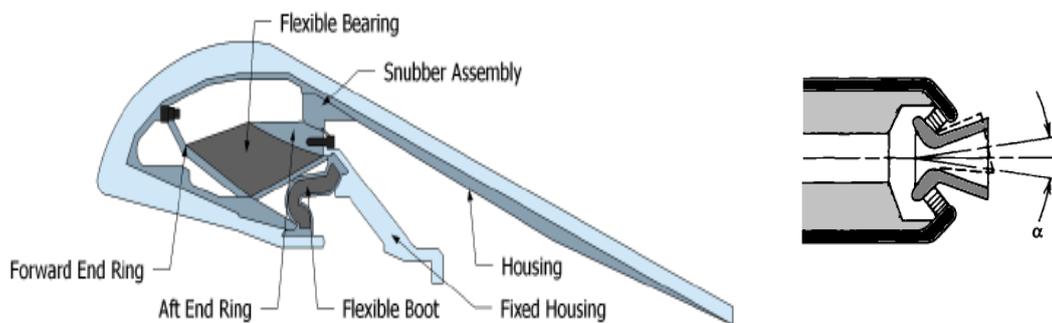


FIGURA 2.6: SCHEMA UGELLO MOBILE

2.2. Descrizione della Motorizzazione "Zefiro 9"

Nel presente lavoro di tesi, attraverso la collaborazione con l'azienda AVIO-BPD, l'accoppiamento del modello 0D non stazionario e del simulatore di regressione è stato applicato al terzo stadio del vettore VEGA denominato *Zefiro 9*, come mostrato in figura 5.7.

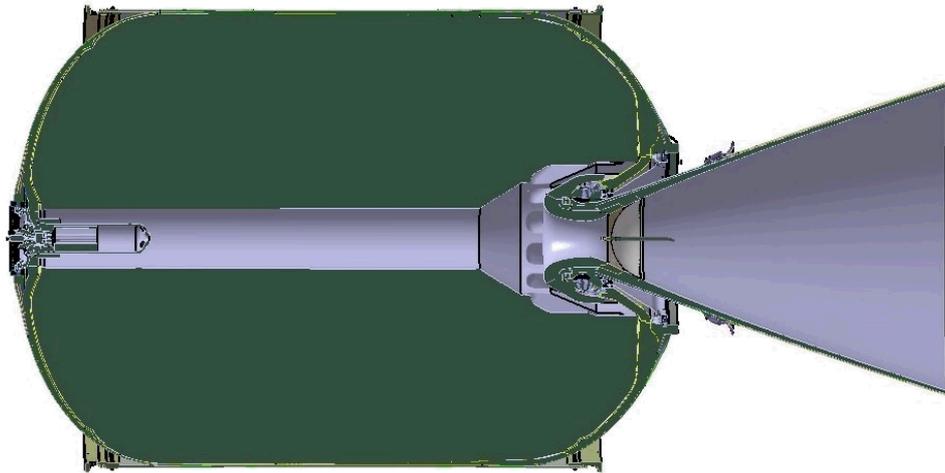


FIGURA 2.7: MOTORIZZAZIONE ZEFIRO 9

Come si osserva dalla figura 2.7 tale motorizzazione presenta bassi valori di L/D_h . Come esposto precedentemente le motorizzazioni che presentano tali peculiarità sono soggette ad un contributo della combustione erosiva trascurabile. Per tal motivo è possibile applicare il solo modello 0D non stazionario per prevedere l'andamento della pressione in funzione del tempo di propulsione.

2.3. Principio di Funzionamento

Nel seguente paragrafo andremo ad individuare quali grandezze fisiche influenzano la "Spinta", così da poter procedere allo sviluppo del modulo balistico. Considerando il volume di controllo, rappresentato in figura 2.8 con linea tratteggiata, è possibile esprimere la Seconda Legge di Newton lungo l'asse del moto, come:

$$F_x = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV \quad (2.1)$$

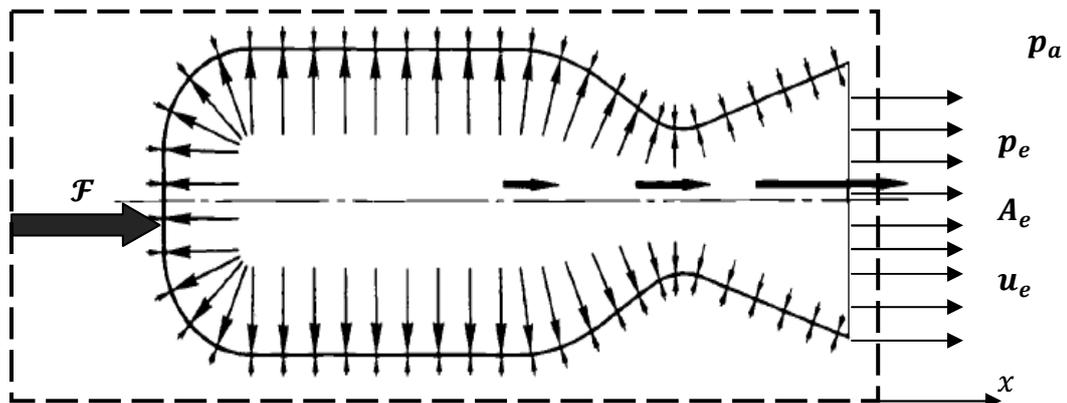


FIGURA 2.8: SCHEMA MOTORE

Le forze che agiscono sul volume di controllo possono essere forze di volume, come ad esempio quelle gravitazionali, e di superficie, come la pressione. Perciò la somma delle forze lungo l'asse motore può essere espresso come:

$$\sum F_x = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \int_S \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \quad (2.2)$$

dove "A" è la superficie del volume di controllo ed "n" è la normale a tale superficie. Ipotizzando un flusso stazionario il primo integrale sarà nullo, perciò le forze agenti sul motore, dirette lungo l'asse x, dipendono dalla distribuzione di pressione sulla superficie e dalla reazione della spinta "F". Possiamo scrivere perciò che la somma delle forze agenti sul volume di controllo lungo l'asse x sarà:

$$\sum F_x = \mathcal{F} + A_e p_a - A_e p_e \quad (2.3)$$

dove "A_e" è la sezione d'uscita dell'ugello, "p_e" è la pressione statica in uscita dall'ugello e "p_a" è la pressione ambiente.

Ipotizzando che la velocità in uscita dei gas, indicato con "u_e", sia diretta lungo l'asse x l'equazione (2.2) diventa:

$$\sum F_x = \int_S \rho u (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA = \int_S \rho_e u_e^2 dA = \rho_e u_e^2 A_e = \dot{m}_e u_e \quad (2.4)$$

dove "ρ_e" è la densità dei gas nella sezione d'uscita dell'ugello ed "ṁ_e" è la portata massica in uscita dall'ugello.

In definitiva uguagliando la (2.3) e la (2.4) otteniamo:

$$\mathcal{F} = \dot{m}_e u_e + (p_e - p_a) A_e \quad (2.5)$$

Solitamente la relazione (2.5) viene espressa come:

$$\mathcal{F} = \dot{m}_e u_{eq} \quad (2.6)$$

in funzione di una velocità equivalente "u_{eq}" che sarà pari a:

$$u_{eq} = u_e + \frac{(p_e - p_a) A_e}{\dot{m}_e} \quad (2.7)$$

Dalla relazione (2.6) è possibile osservare, a parità di portata massica e di velocità in uscita dall'ugello, il tipo di espansione in funzione della pressione nella sezione d'uscita dell'ugello:

➤ ***Espansione Ottima:***

In questa situazione il flusso in uscita dall'ugello raggiunge la pressione ambiente, perciò il fluido fuoriesce dall'ugello indisturbato, come mostrato in figura 2.9 (a).

➤ ***Sovra-Espansione:***

Il flusso in uscita dall'ugello raggiunge una pressione minore rispetto a quella atmosferica. Affinché il flusso possa immettersi nell'ambiente esterno è necessaria la riduzione della velocità con conseguente aumento di pressione, come mostrato in figura 2.9 (b) . La riduzione della velocità è causata da onde d'urto oblique che si richiudono man mano che la pressione in uscita dall'ugello diminuisce, causando una riduzione della spinta propulsiva.

➤ ***Sotto-Espansione:***

Si presenta tale condizione quando il flusso in uscita presenta una pressione maggiore di quella dell'ambiente esterno. Come nel caso di sovra-espansione, affinché possa immettersi nell'ambiente è necessario un aumento di velocità con conseguente riduzione di pressione. In tal caso il flusso subisce un'ulteriore espansione, come mostrato in figura 2.9 (c), determinando un aumento della spinta propulsiva.

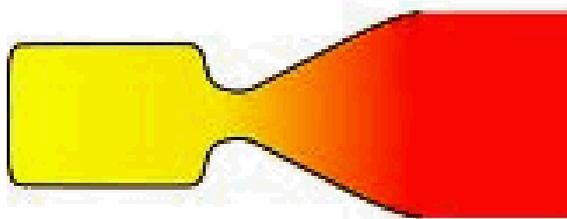


FIGURA 2.9 (A): SCHEMA ESPANSIONE OTTIMA

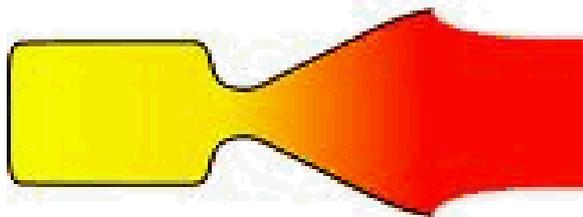


FIGURA 2.9 (B): SCHEMA SOVRA- ESPANSIONE

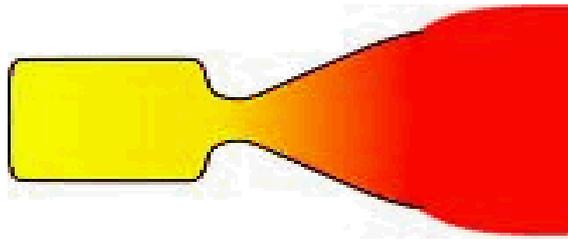


FIGURA 2.9 (C): SCHEMA SOTTO-ESPANSIONE

2.4. Balistica Interna di Endoreattori a Propellente Solido

La *Balistica Interna* di un endoreattore a propellente solido studia le condizioni del flusso all'interno della camera di combustione durante tutta la sua fase operativa. In tal modo è possibile la previsione delle prestazioni del motore in esame. L'intera fase operativa di un SRM, che va dall'accensione allo spegnimento, detta "*Combustion Time*", è divisa in 3 fasi temporali, come mostrato in figura 2.10, dipendenti dai fenomeni che influenzano l'andamento della pressione [4]:

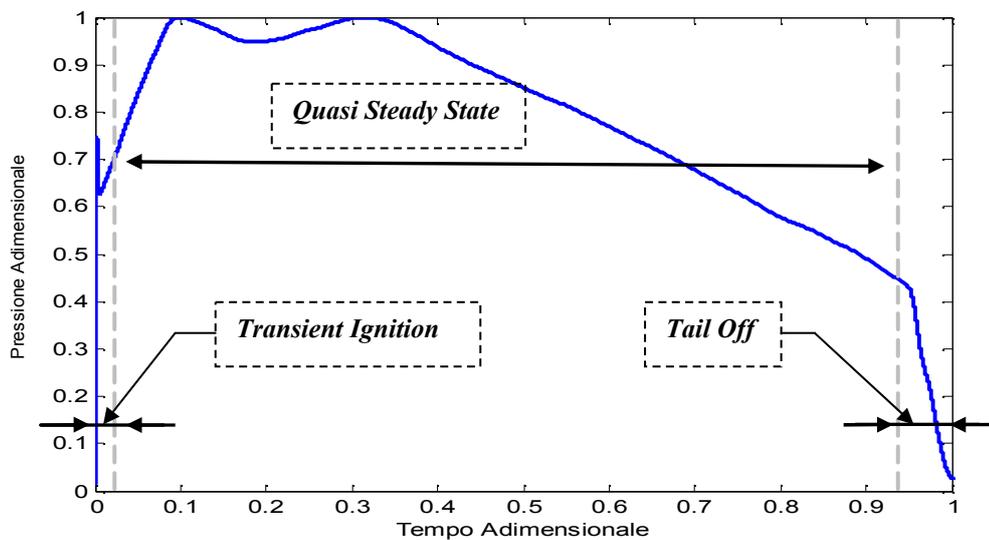


FIGURA 2.10: FASI DELLA BALISTICA INTERNA DI UN SRM

➤ *Transient Ignition:*

Il tempo necessario affinché il grano propellente vada in combustione è detta "*Induction Interval*". In seguito ad un ritardo dovuto all'accenditore (*Delay*), i gas caldi provenienti dall'accenditore impattano con il grano propellente causando l'accensione nella *regione di impingement*. Di conseguenza la propagazione della fiamma innesca l'accensione del

restante propellente causando un'adduzione di massa crescente con conseguente aumento di pressione all'interno della camera di combustione. Il tempo necessario affinché la fiamma propaghi lungo tutta la camera di combustione è detta "*Flame Spreading Interval*".

L'aumento della pressione all'interno della camera di combustione genera la rottura del sigillo nell'ugello, facendo fuoriuscire i gas presenti all'interno, generando l'effettiva spinta propulsiva. La pressione tale da rompere il sigillo, denominata "*Pressione di Stappamento*" dell'ugello, è di circa 6 bar.

Nella fase di Transient Ignition, solitamente, avremo un picco di pressione causata dalla direzione assiale e normale dei gas dell'accenditore, causando una maggiore velocità di combustione nella regione di impingement. Raggiunto tale picco, la portata in uscita dall'accenditore va diminuendo, diminuendo così la velocità di combustione nella regione di impingement e di conseguenza la pressione all'interno della camera di combustione.

Cessata l'adduzione di massa da parte dell'accenditore, la superficie di combustione del propellente è completamente accesa raggiungendo così lo "*Steady State Conditions*".

In figura 2.11 è possibile osservare il picco di pressione nella fase di Transient Ignitions.

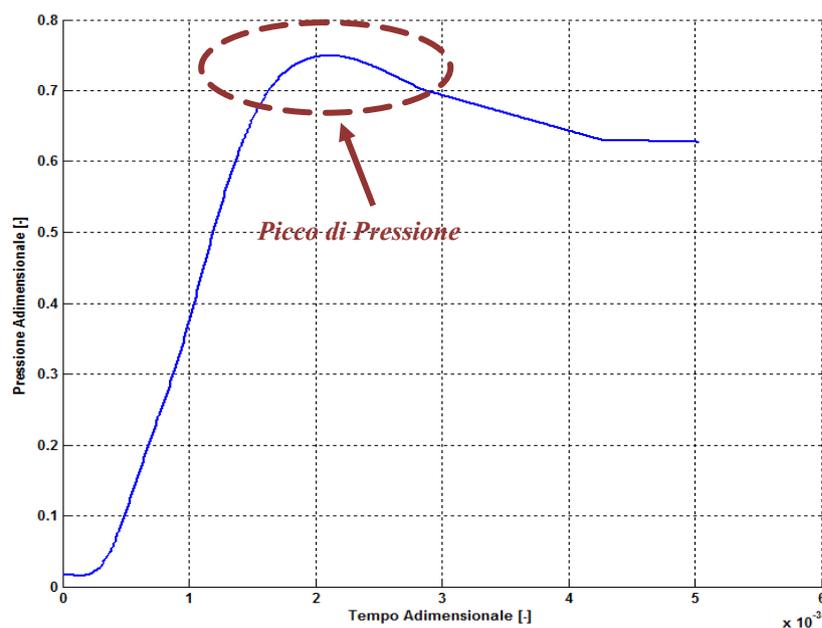


FIGURA 2.11: TRANSIENT IGNITION

Un modello balistico adatto allo studio di questa fase dovrà essere in grado di rappresentare la forte non stazionarietà degli aspetti esposti precedentemente.

➤ ***Quasi Steady State:***

La seconda fase della balistica interna di un SRM è principalmente legata all'adduzione di massa fornita dalla combustione del grano propellente. Come esposto precedentemente, l'aumento della sezione di gola dell'ugello causa una variazione di portata d'efflusso durante la fase operativa del motore. Un ulteriore fenomeno che dovrà essere considerato è l'aggiunta di massa dovuto all'ablazione della Protezione Termica. Infatti all'aumentare del tempo di propulsione, avremo un aumento della superficie di protezione termica esposta che causa sia un aumento di massa, determinata dall'ablazione della protezione termica, e sia la perdita di calore che fuoriesce dal sistema.

➤ ***Tail Off:***

In quest'ultima fase la superficie di combustione del grano propellente sta per esaurirsi e l'adduzione di massa, dovuto all'ablazione delle protezioni termiche, e il calore che fuoriesce dal sistema è massima. In questa situazione il sistema non è più in grado di mantenere la pressione, all'interno della camera di combustione, causando così una rapida riduzione. Per tal motivo si presentano dei fenomeni non stazionari dovuti alla rapida riduzione di pressione ed al miscelamento dei prodotti di combustione con quelli di ablazione della protezione termica.

2.4.1. Impulso Specifico

L'Impulso per unità di massa di propellente è un importante parametro di prestazioni del motore. Per poter definire tale impulso, detto *Impulso Specifico*, è necessario definire inizialmente l'*Impulso Totale*. Esso è definito come l'integrale della spinta, che può variare nel tempo, sul tempo di combustione [3]:

$$I_t = \int_0^{t_f} \mathcal{F} dt \quad (2.8)$$

Se la velocità equivalente u_{eq} è costante, l'impulso totale impartito al veicolo durante l'accelerazione può essere riscritta, attraverso la (2.6), come [5]:

$$I_t = M_p u_{eq} \quad (2.9)$$

dove " M_p " è la massa totale di propellente espulsa. Tale parametro è proporzionale all'energia totale rilasciata da tutto il propellente in un sistema propulsivo.

L'*Impulso Specifico* è definito come *l'impulso totale per unità di peso del propellente* [3]. Esso è un importante figura di merito delle prestazioni di un sistema propulsivo. Indicando con " \dot{m} " la portata massica totale di propellente e con " g_e " l'accelerazione di gravità a livello del mare, possiamo scrivere [3]:

$$I_s = \frac{\int_0^{t_f} \mathcal{F} dt}{g_e \int_0^{t_f} \dot{m} dt} \quad (2.10)$$

La relazione (2.10) fornirà un valore medio dell'impulso specifico del sistema propulsivo. Se si considera una spinta e una portata massica costante nel tempo, combinando la relazione (2.10) con (2.9) è possibile scrivere:

$$I_s = \frac{u_{eq}}{g_e} \quad (2.11)$$

Poiché per un endoreattore a propellente solido la massa di propellente è gran parte della massa totale, è desiderabile avere un Impulso Specifico più alto possibile.

2.4.2. Parametri dell'Ugello

La valutazione della spinta del motore è ottenuta attraverso le seguenti ipotesi [5]:

1. Il fluido di lavoro si comporta come un gas perfetto;
2. Il processo di combustione è rappresentato da un'aggiunta di calore dall'esterno Q_R ;
3. Il processo di espansione è Stazionario, Mono-Dimensionale ed Isoentropico.

Come mostrato in figura 2.12, il propellente, entrando in "*condizione 1*", raggiunge la sezione d'ingresso dell'ugello in "*condizioni 2*" mediante l'introduzione di calore Q_R . Il fluido accelera fino alla sezione di gola dell'ugello raggiungendo Mach unitario, per poi, espandendo *isoentropicamente*, fuoriuscire alle condizioni *e*, e con

velocità u_e . Poiché l'Entalpia di Ristagno rimane costante, per l'ipotesi 3, possiamo scrivere:

$$h_{02} = h_{0e}$$

$$c_p T_{02} = c_p T_e + \frac{1}{2} u_e^2 \quad (2.12)$$

Inoltre per l'ipotesi di trasformazione isoentropica è possibile legare la temperatura con la pressione attraverso la seguente relazione:

$$\frac{T_{02}}{T_e} = \left(\frac{p_{02}}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (2.13)$$

In definitiva combinando la (2.12) con la (2.13) è possibile ottenere la velocità del fluido in uscita dall'ugello:

$$u_e = \sqrt{2 c_p T_{02} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_{02}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (2.14)$$

La temperatura T_{02} può essere ottenuta attraverso l'equazione dell'energia:

$$\dot{Q} = \dot{m}(h_{02} - h_{01}) = \dot{m} c_p (T_{02} - T_{01})$$

$$T_{02} = T_{01} + \frac{Q_R}{c_p} \quad (2.15)$$

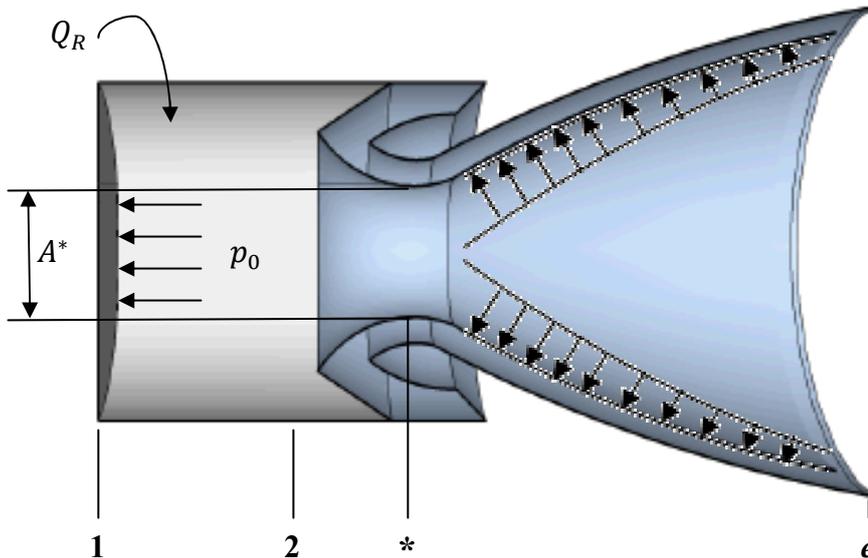


FIGURA 2.12: SCHEMATIZZAZIONE SEMPLIFICATA CAMERA DI COMBUSTIONE

Un ulteriore parametro necessario per la valutazione della spinta di un endoreattore è il *Rapporto d'Espansione dell'Ugello* A_e/A^* . Come già esposto precedentemente in un endoreattore a propellente solido la sezione di gola dell'ugello regredisce per fenomeni ablativi ed erosivi. Per tale motivo è necessario caratterizzare il *Diametro di Gola* D^* in modo tale da garantire le condizioni soniche per tutta la fase operativa del motore.

Applicando l'equazione di continuità tra la sezione d'uscita e la sezione di gola dell'ugello, è possibile ricavare il rapporto d'espansione:

$$\dot{m} = \rho_e A_e u_e = \frac{A_e M_e p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}}}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}} \quad (2.16)$$

$$\dot{m} = \rho^* A^* u^* = \frac{A^* p_0 \sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}}}{\left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}} \quad (2.17)$$

$$\frac{A_e}{A^*} = \frac{1}{M_e} \left[\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \quad (2.18)$$

In definitiva, nota la velocità in uscita dall'ugello e il rapporto di espansione è possibile valutare la spinta fornita sostituendo semplicemente nella relazione (2.6), perciò:

$$\mathcal{F} = A^* p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right]} + (p_e - p_a) A_e \quad (2.19)$$

Dalla seguente relazione è possibile osservare, per un dato ugello, che la spinta è funzione dei parametri geometrici " A_e " e " A^* ", della pressione in camera di combustione (precisamente dalla pressione nella sezione d'ingresso dell'ugello) " p_0 ", delle caratteristiche del fluido " γ " e della pressione statica, alla sezione d'uscita, " p_e ". Quest'ultima non è nota a priori, perciò dovrà essere ricavata attraverso la relazione:

$$\frac{p_0}{p_e} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \quad (2.20)$$

Con il valore di Mach " M_e " ottenuto in modo iterativo dalla relazione (2.18).

Dalla figura 2.11 è possibile osservare come la componente principale della spinta si sviluppa sul fondo della camera di combustione, mentre la restante parte sulla parete del tratto divergente dell'ugello, tenuto in considerazione dal *Coefficiente di Spinta* che sarà esposto nella sezione 2.3.4.

2.4.3. Velocità Caratteristica

La *Velocità Caratteristica* " C^* " è un coefficiente che descrive le prestazioni del motore considerando solamente la qualità del propellente e la geometria della camera di combustione. Tale coefficiente è definito come [5]:

$$C^* = \frac{p_0 A^*}{\dot{m}} \quad (2.21)$$

Sostituendo la (2.17) in (2.21) è possibile osservare come tale coefficiente dipenda solo dalle caratteristiche del fluido all'interno della camera di combustione:

$$C^* = \sqrt{\frac{R T_0}{\gamma}} \left(\frac{\gamma + 1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.22)$$

Spesso la velocità caratteristica è una funzione della sola pressione della camera di combustione, per tal motivo spesso viene espressa attraverso parametri di riferimento [6,7]:

$$C^* = \eta_{ref}^* C_{ref}^* \left(\frac{p_0}{p_{ref}} \right)^m \quad (2.23)$$

dove " η_{ref}^* ", " C_{ref}^* " e " m " sono parametri sperimentali misurati ad una data pressione di riferimento " p_{ref} ".

2.4.4. Coefficiente di Spinta

Un altro coefficiente di prestazione del motore è il cosiddetto *Coefficiente di Spinta* " $C_{\mathcal{F}}$ ". Esso, a differenza della velocità caratteristica, tiene in considerazione le prestazioni del solo Ugello. Tale coefficiente è definito come [5]:

$$C_{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{F}}{p_0 A^*} \quad (2.24)$$

Attraverso la relazione (2.19) otteniamo:

$$C_F = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} + \frac{(p_e - p_a) A_e}{p_0 A^*} \quad (2.25)$$

Come è possibile osservare dalla relazione (2.25), il coefficiente di spinta dipende solamente dalla geometria dell'ugello. Mentre il termine " $(p_e - p_a)/p_0$ " rappresenta la prestazione dell'ugello a lavorare a quel determinato rapporto di pressione. Per fissati valori p_a/p_0 il coefficiente di spinta, e quindi la spinta, presenta un massimo per $p_e = p_a$, come mostrato in figura 2.13. Questo picco massimo è noto come "*Coefficiente di Spinta Massimo*" ed è utilizzato durante la progettazione dell'ugello.

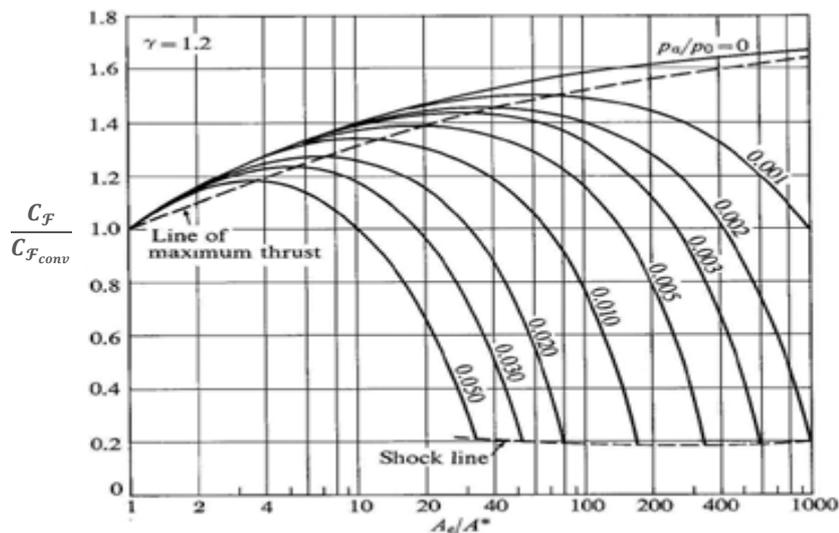


FIGURA 2.13: ANDAMENTO PRESTAZIONI UGELLO

Noti i coefficienti di prestazione del motore, e quindi la velocità caratteristica e il coefficiente di spinta, è possibile valutare la spinta attraverso la seguente relazione:

$$F = \dot{m} C^* C_F \quad (2.26)$$

I coefficienti prestazionali valutati sono riferiti ad un motore *Ideale*. Per valutare le performance di un motore *Reale* è necessario confrontare " C^* " e " C_F " con i valori ottenuti dalle relazioni (2.22) e (2.25), così da poter indicare le prestazioni reali del motore.

2.4.5. Velocità di Combustione

La regressione del grano propellente dipende da molti fattori. Per poter descrivere tale fenomeno è necessario utilizzare modelli semplificati tali da evidenziare i soli parametri di maggior influenza.

Attraverso un'analisi macroscopica, come mostrato in figura 2.14, la variabile di maggior interesse è la "*Velocità di Combustione*", definita come rapporto tra lo spessore del grano propellente e l'unità di tempo.

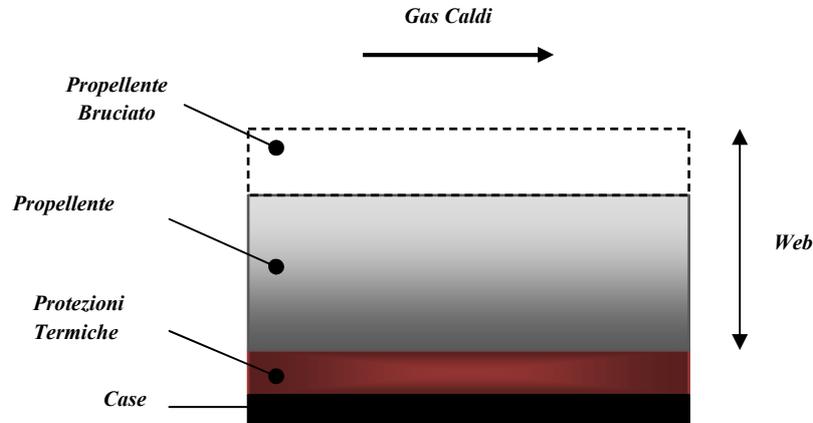


FIGURA 2.14: VELOCITÀ DI COMBUSTIONE

$$r_b = \frac{web}{t_b} \quad (2.27)$$

Dove "*web*" è lo spessore del grano propellente e "*t_b*" è il tempo di propulsione del motore. La relazione (2.27) rappresenta la velocità di combustione media, nello spazio e nel tempo, del motore.

Per poter procedere alla valutazione della velocità di combustione attraverso modelli semi-empirici è necessario imporre le seguenti ipotesi [7]:

1. I gas all'interno della camera di combustione sono costituiti da una miscela di gas perfetti, e quindi da prodotti di combustione all'equilibrio chimico, da gas di riempimento che sono presenti solo ai primi istanti di combustione e da prodotti di ablazione;
2. Tutte le reazioni chimiche sono molto più veloci rispetto alle dinamiche dei parametri fluidodinamici e termici; inoltre avvengono in uno strato sottile in corrispondenza della superficie di combustione.

Attraverso analisi sperimentali su piccoli motori detti BARIA (presso AVIO-BPD) è possibile valutare alcuni coefficienti sperimentali necessari per la valutazione della velocità di combustione di un determinato propellente. Questi piccoli motori sono caratterizzati da una superficie di combustione *Cilindrica*, all'interno dei quali viene colato il propellente di interesse per un determinato SRM. Inoltre, vengono utilizzati ugelli con diverse sezioni di gola in modo da variare la pressione all'interno della

camera di combustione e poter così ricavare i coefficienti sperimentali in funzione della pressione.

In definitiva, la velocità di combustione può considerarsi costituita da 3 differenti contributi:

1. Contributo dovuto al termine "*Quasi-Stazionario*", che dipende dalla sola pressione presente all'interno della camera di combustione;
2. Contributo dovuto al termine "*Erosivo*", che dipende dalla velocità della miscela di gas presente all'interno della camera di combustione;
3. Contributo dovuto al termine "*Dinamico*", che dipende dalla variazione di pressione nel tempo all'interno della camera di combustione.

Di seguito saranno illustrati i vari contributi che costituiscono la velocità di combustione.

➤ ***Termine Quasi-Stazionario:***

Per determinare le equazioni relative al *Termine Quasi-Stazionario* si è scelto di utilizzare un modello semi-empirico che caratterizza la velocità di combustione in funzione della sola pressione totale media all'interno della camera di combustione. Effettuando alcune prove sperimentali su un determinato propellente, attraverso prove al banco (*Firing Tests* di BARIA), è possibile ottenere, su di un diagramma doppio logaritmico, un andamento della velocità di combustione in funzione della pressione come mostrato in figura 2.15.

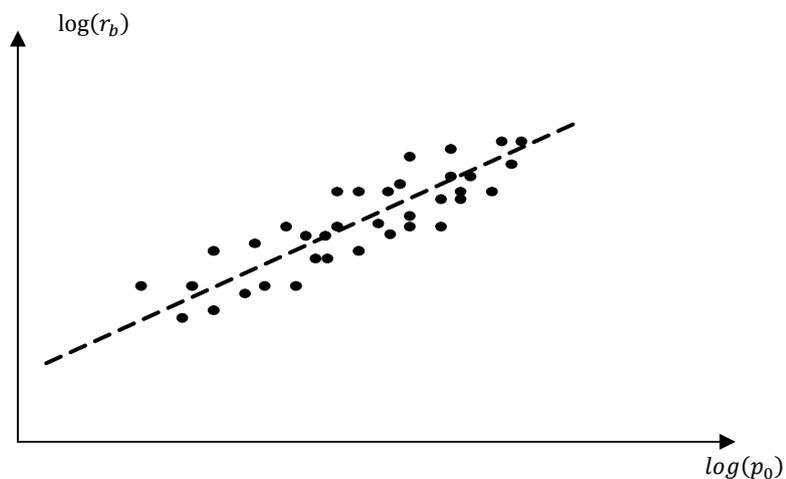


FIGURA 2.15: ANDAMENTO VELOCITÀ DI COMBUSTIONE

Si può osservare come i vari punti sperimentali, che ricadono all'interno del diagramma, possono essere approssimati attraverso una retta con legge:

$$\log(r_b) = m \log(p_0) + q \quad (2.28)$$

Attraverso semplici passaggi matematici è possibile ottenere l'espressione della ben nota "*Legge di Vieille*":

$$r_b = a p_0^n \quad (2.29)$$

Dove " p_0 " è la *Pressione Totale Media* della camera di combustione, " a " ed " n " sono coefficienti semi-empirici denominati *Coefficiente Termico* e *Indice di Combustione* rispettivamente. L'indice di combustione rappresenta la pendenza della curva perciò dipende soltanto dalla pressione in camera, mentre il coefficiente termico è funzione sia della temperatura del propellente e sia dalla pressione. Generalmente tale valore è valutato attraverso la seguente relazione:

$$a = f(p, T_i) = a_{ref} e^{\sigma_p (T_i - T_{ref})} \quad (2.30)$$

dove " T_i " e " T_{ref} " sono, rispettivamente, la temperatura iniziale e la temperatura di riferimento del grano propellente, " a_{ref} " e " σ_p " sono coefficienti sperimentali forniti da AVIO-BPD, e rappresentano il coefficiente termico alla temperatura di riferimento T_{ref} e la *Sensibilità della Velocità di Combustione alla Temperatura*, rispettivamente.

➤ ***Contributo Erosivo:***

Questo contributo si riferisce all'incremento della velocità di combustione causato dall'alta velocità della miscela di gas, presenti all'interno della camera di combustione, sulla superficie del propellente. Il contributo dovuto alla combustione erosiva deve essere preso in considerazione se vengono considerati motori con elevati rapporti *Lunghezza-Diametro Idraulico*.

L'alta velocità della miscela di gas vicino alla superficie di combustione e la natura turbolenta dello strato limite causa un incremento dello scambio termico aumentando così la velocità di combustione. Per la complessa natura del problema, come mostrato in figura 2.16, è possibile qualitativamente osservare come, tale contributo, determini un incremento nelle fasi iniziali della velocità di combustione, e, quindi, un aumento della pressione

all'interno della camera di combustione. Ciò causa un aumento dell'area di porta causando una riduzione della velocità della miscela di gas, e quindi una riduzione del contributo erosivo. Infine, il maggior consumo di propellente nelle fasi iniziali causa una riduzione del tempo di propulsione del razzo.

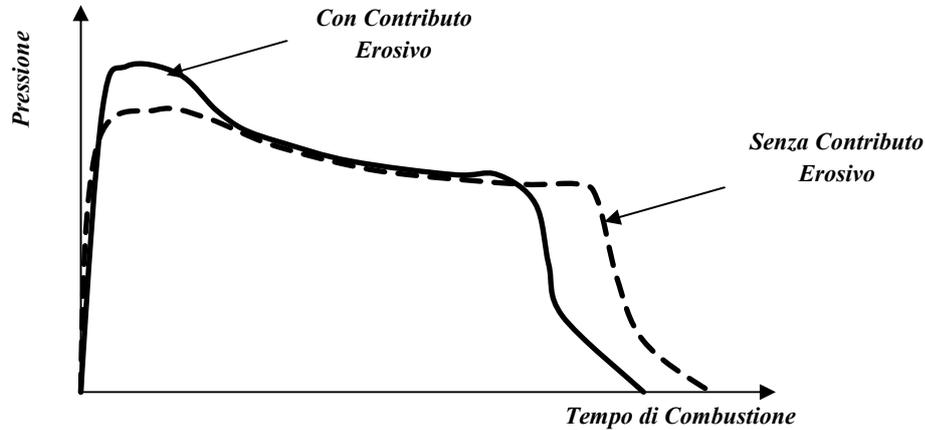


FIGURA 2.16: COMBUSTIONE EROSIVA

Un ulteriore effetto, causato dalla combustione erosiva, è il maggior consumo di propellente nella parte terminale della camera di combustione, nei pressi della sezione d'ingresso dell'ugello. La rapida esposizione delle protezioni termiche in tale regione dovrà essere tenuta in considerazione durante la progettazione dello spessore dell'isolamento per evitare il cedimento termico. Un modello analitico semplice per valutare l'influenza della combustione erosiva, basata sullo scambio di calore, è il "Modello Lenoir-Robillard" [8]. Tale modello scompone la velocità di combustione in 2 contributi:

- r_0 che dipende principalmente dalla pressione e dalla temperatura del propellente;
- r_{b_e} che tiene in considerazione la velocità dei gas e quindi del contributo erosivo.

Perciò la velocità di combustione può essere ricavata come [3]:

$$r_b = r_0 + r_{b_e} \quad (2.31)$$

$$r_b = \alpha p_0^n + \alpha \frac{G^{0.8}}{D_h^{0.2}} e^{-\frac{\beta r_b \rho_p}{G}} \quad (2.32)$$

Dove:

- " $G = \dot{m}/A_p$ " rappresenta il flusso di massa, con " \dot{m} " la portata massica della miscela di gas e " A_p " l'area di porta;

- " $D_h = \sqrt[4]{A_p/P_p}$ " rappresenta il diametro idraulico, con " P_p " il perimetro di porta;
- " ρ_p " rappresenta la densità del propellente;
- " α " e " β " sono costanti empiriche.

La costante empirica β è indipendente dal propellente ed assume un valore di circa 53. mentre la costante α può essere ricavata attraverso la seguente relazione:

$$\alpha = \frac{0.0288 c_p \mu^{0.2} Pr^{-0.67}}{\rho_b c_s} \frac{T_1 - T_s}{T_2 - T_b} \quad (2.33)$$

in cui:

- " c_p " è il calore specifico medio dei gas di combustione, espresso in $[Kcal/Kg K]$;
- " μ " è la viscosità dei gas di combustione, espresso in $[Kg/m s]$;
- " $Pr = \mu c_p/k$ " è il numero adimensionale di Prandtl, con " k " la conduttività termica dei gas;
- " c_s " è la capacità termica del propellente solido, espressa in $[Kcal/Kg K]$;
- " T_1 " è la temperatura assoluta dei gas di combustione;
- " T_s " è la temperatura superficiale del propellente solido;
- " T_b " è la temperatura iniziale del grano propellente.

La relazione (2.31) non è utilizzata tutt'ora in AVIO-BPD, bensì è stata modificata realizzando il "*Modello S.P.P.*", ottenuta attraverso *fitting* di dati sperimentali. La modifica consiste nell'adottare al posto del semplice diametro idraulico, una funzione del diametro stesso [9]:

$$D_h = f(D_h) \quad (2.34)$$

$$D_h = 0.9 + 0.189 D_h [1 + 0.043 D_h (1 + 0.023 D_h)] \quad (2.35)$$

E' necessario sottolineare che le relazioni scritte finora, si basano sullo studio di *Flussi Paralleli*. Durante la fase di Ignition Transient avremo, nella regione

di impingement, una combustione erosiva causata dai gas in uscita dall'accenditore. Tale fenomeno è causato da una velocità del gas sia assiale che normale. Per tal motivo non è possibile utilizzare le relazioni precedentemente scritte.

➤ **Contributo Dinamico:**

Il termine di velocità di combustione dinamica rappresenta una correzione del termine quasi-stazionario, in modo da tener in considerazione effetti non stazionari all'interno della camera di combustione. Questo contributo è relativamente importante nelle fasi transitorie, e quindi durante l'*Ignition Transient* e *Tail off*.

Nel seguente lavoro di tesi questo contributo è stato tralasciato. Ma è possibile implementare un modello dinamico, come il "*Modello Zeldovich-Novozhilov*", esposto in [4].

2.4.6. Pressione e MEOP

I modelli di balistica interna hanno come obiettivo la previsione del profilo di pressione, quindi di spinta, di un endoreattore a propellente solido. Per tal motivo è necessario la valutazione di una relazione atta a mostrare i parametri fondamentali che influenzano la pressione all'interno della camera di combustione.

La portata massica che attraversa l'ugello \dot{m}_n e la portata massica generata all'interno della camera di combustione \dot{m}_g influenzano fortemente la pressione. Come mostrato in figura 2.17, la variazione di massa all'interno della camera di combustione è data da:

$$\frac{dM_0}{dt} = \frac{d(V_0 \rho_0)}{dt} = \dot{m}_g - \dot{m}_n \quad (2.36)$$

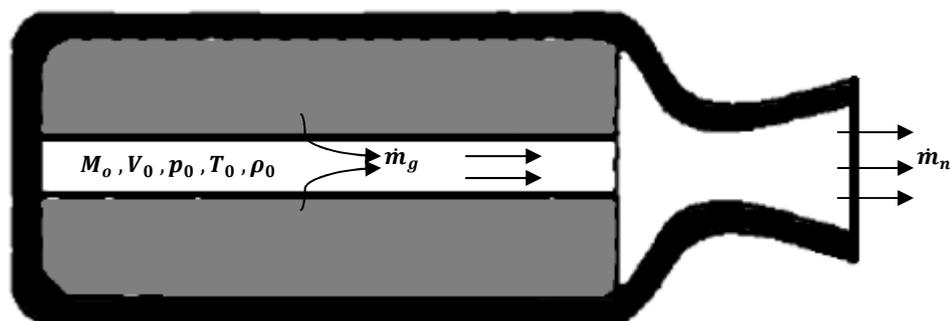


FIGURA 2.17: CAMERA DI COMBUSTIONE SRM

La portata massica \dot{m}_g può essere valutata attraverso la seguente relazione:

$$\dot{m}_g = \rho_p A_b r_b \quad (2.37)$$

con " ρ_p " la densità del propellente, " A_b " la superficie di combustione e " r_b " la velocità di combustione valutata attraverso (2.29). Mentre \dot{m}_n può essere valutata attraverso la relazione (2.21). Sfruttando l'equazione dei gas perfetti, e ricordando che $dV_0/dt = A_b r_b$, possiamo scrivere:

$$\frac{V_0}{R T_0} \frac{d p_0}{dt} + \rho_0 A_b r_b = \rho_g A_b r_b - \frac{p_0 A^*}{C^*} \quad (2.38)$$

Supponendo che la pressione all'interno della camera di combustione rimanga costante, è possibile valutare la pressione in funzione della superficie di combustione:

$$p_0 = \left[\frac{A_b}{A^*} a (\rho_p - \rho_0) C^* \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (2.39)$$

in cui " ρ_0 " è la densità totale del gas all'interno della camera di combustione. E' possibile osservare come la pressione dipenda dalla superficie di combustione A_b . La variazione della superficie di combustione dipende dalla velocità di combustione e dalla geometria iniziale del grano propellente. Pertanto attraverso la geometria del grano propellente è possibile ottenere curve di pressione (quindi di spinta) *Progressive*, *Regressive* e *Neutrali*, come mostrato in figura 2.18 [10].

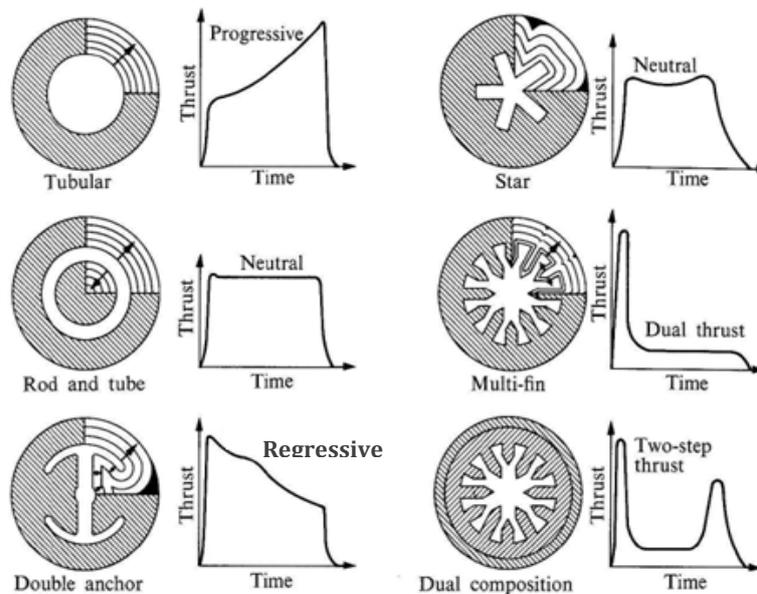


FIGURA 2.18: GEOMETRIA INIZIALE GRANO PROPELENTE

Un parametro particolarmente importante durante la fase progettuale del motore è il "MEOP, Maximum Expected Operating Pressure". Infatti attraverso tale parametro vengono dimensionati i componenti strutturali, come il Case.

2.5. Modelli di Balistica Interna

I modelli per la balistica interna di un endoreattore a propellente solido possono essere distinti in 4 categorie:

➤ **Modelli Balistici Zero-Dimensionali non Stazionari:**

I modelli balistici Zero-Dimensionali non stazionari sono modelli particolarmente semplici che non permettono la valutazione delle variabili termofluidodinamiche lungo l'asse motore, bensì permettono la loro variazione temporale. Pertanto le variabili di interesse saranno considerate uniformi lungo tutta la camera di combustione. Essi possono essere suddivisi in:

- *Modelli Isotermici:* in cui la temperatura dei gas all'interno della camera di combustione è supposta costante nel tempo [11];
- *Modelli Dinamici:* in cui è considerata la variazione della temperatura dei gas nel tempo, permettendo di considerare, nelle fasi transitorie, la sua influenza nelle variabili termofluidodinamiche [12].

Come esposto nella sezione 2.3.5, questi modelli non permettono di valutare la velocità dei gas all'interno della camera di combustione, e quindi di quantificare l'influenza della combustione erosiva, per cui sono particolarmente adatti per motori caratterizzati da bassi valori di L/D così da poter trascurare tale effetto. Un ulteriore svantaggio di tali modelli è l'impossibilità di valutare lo scambio di calore per convezione tra gas e superficie termica esposta. Ciò diventa rilevante nelle fasi terminali di propulsione del motore, in cui si hanno elevate superfici di protezioni termiche in contatto con la miscela di gas.

In definitiva, questi tipi di modelli, abbastanza semplici, sono adatti alla valutazione, in prima approssimazione, delle variabili termofluidodinamiche all'interno della camera di combustione di motori

caratterizzati da bassi valori di L/D , come BARIA, accenditori e piccoli stadi di un sistema propulsivo.

➤ **Modelli Balistici Mono-Dimensionali Stazionari:**

I modelli balistici Mono-Dimensionali Stazionari necessitano la discretizzazione monodimensionale della camera di combustione. In tal modo essa viene suddivisa in un certo numero di *Volumi di Controllo*, in cui vengono distribuite le variabili termofluidodinamiche di interesse.

Le equazioni di lavoro utilizzate dal seguente modello sono l'*Equazione di Continuità*, l'*Equazione di Bilancio della Quantità di Moto* e l'*Equazione di Bilancio dell'Energia*. Analizziamo il procedimento di calcolo utilizzato dai modelli mono-dimensionali:

1. Come condizione al contorno è necessario stimare le variabili termodinamiche di interesse nel primo volume di controllo, cioè nella testa dell'endoreattore. Ciò può essere fatto attraverso un bilancio energetico, come sarà esposto nella sezione 3.2;
2. Note le variabili sul primo volume di controllo è possibile valutare, in cascata, le caratteristiche termofluidodinamiche dei restanti volumi di controllo;
3. Si ripete tale procedimento per ogni passo di integrazione temporale.

Questi modelli, a differenza dei modelli zero-dimensionali, hanno la capacità di stimare la velocità della miscela dei gas, perciò è possibile stimare l'effetto della combustione erosiva e delle dispersioni termiche per convezione. Per tal motivo questi tipi di modelli possono essere applicati su motorizzazioni con rapporti L/D elevati. E' importante osservare che questi tipi di modelli considerano valida l'ipotesi di *Flusso Stazionario*, per tal motivo non sono adatti alla valutazione delle fasi transitorie come l'Ignition Transient e il Tail Off.

➤ **Modelli Balistici Mono-Dimensionali non Stazionari:**

I modelli balistici mono-dimensionali non stazionari uniscono i vantaggi dei 2 modelli precedentemente esposti eliminando gli svantaggi [13]. Lo

schema di calcolo è essenzialmente uguale ai modelli mono-dimensionali stazionari, con le equazioni di lavoro:

- *Equazione di Continuità;*
- *Equazione di Bilancio della Quantità di Moto;*
- *Equazione di Bilancio dell'Energia.*

In questi tipi di modelli, a differenza dei modelli stazionari, i termini non stazionari delle equazioni di lavoro non vengono trascurati. Per tal motivo questi modelli sono adatti, anche, alla previsione delle fasi transitorie. Ciò comporta un aumento del tempo di calcolo a fronte di piccolo aumento di precisione nella fase quasi-stazionaria.

➤ ***Modelli Balistici Ibridi:***

I modelli balistici ibridi forniscono una stima non stazionaria con un tempo di calcolo basso. I seguenti modelli sono realizzati mediante accoppiamento tra Modello Zero-Dimensionale non Stazionario e Modello Mono-Dimensionale Stazionario.

Lo schema di calcolo dei suddetti modelli comprende:

1. Valutazione dei valori medi delle grandezze fluidodinamiche al variare del tempo attraverso il modello zero-dimensionale non stazionario;
2. Attraverso la stima dei valori medi forniti dal modello 0-D non stazionario, il modello 1-D stazionario ricava le variazioni spaziali lungo l'asse motore,.

Le equazioni di lavoro utilizzate dal modello zero-dimensionale non stazionario sono l'*Equazione di Continuità* e l'*Equazione di Bilancio dell'Energia*, mentre le equazioni di lavoro del modello mono-dimensionale stazionario sono derivanti dalla teoria dei *Flussi Semplici* [14].

Il modello balistico sviluppato ed implementato nel seguente lavoro di tesi è un Modello Balistico Ibrido che sarà esposto nel capitolo 3.

3. Sviluppo Modulo Balistico

Come descritto nel capitolo precedente, il modulo balistico sviluppato ed implementato nel seguente lavoro di tesi è un "*Modello Ibrido*", caratterizzato da un *Modello Zero-Dimensionale non Stazionario* e un *Modello Mono-Dimensionale Stazionario*.

Gli obiettivi da raggiungere con lo sviluppo del suddetto modello sono:

- la capacità del modulo balistico di poter valutare le fasi transitorie della balistica interna di un razzo a propellente solido, attraverso l'ausilio del modello 0D non stazionario;
- la capacità del modulo balistico di poter valutare la variazione delle variabili termofluidodinamiche di interesse lungo l'asse motore, attraverso l'ausilio del modello 1D stazionario.

Mediante l'accoppiamento dei modelli, il *Modulo Balistico* è adatto sia a motorizzazioni con bassi valori di L/D_h , ovvero con basse cadute di pressione tra testa del motore e sezione d'ingresso dell'ugello e basse velocità della miscela di gas all'interno della camera di combustione, sia a motorizzazioni con elevati rapporti di L/D_h , quindi con alte cadute di pressione e alte velocità che corrispondono ad un contributo della velocità di combustione erosiva non trascurabile.

Nel seguente capitolo andremo ad analizzare nel dettaglio i modelli che caratterizzano il *Modulo Balistico*, così da poterli successivamente implementare ed accoppiare.

3.1. Modello Zero-Dimensionale non Stazionario

Il *Modello Zero-Dimensionale non Stazionario* è un modello capace di valutare le grandezze termofluidodinamiche medie all'interno della camera di combustione. Essendo un modello non stazionario, ha la capacità di valutare le fasi transitorie durante la fase operativa del motore, come il *Transient Ignition* e il *Tail Off*.

E' necessario sottolineare che il seguente modello fornisce valori "*totali*" ed "*efficaci*" delle variabili termofluidodinamiche di interesse e non fornisce nessuna informazione sulla distribuzione spaziale delle suddette variabili.

3.1.1. Sistema di Equazioni Differenziali

Si consideri, in figura 3.1, il volume di controllo (rappresentato in blu) al quale vengono applicate le seguenti ipotesi [15]:

1. Il gas presente all'interno del volume di controllo si comporta come un gas perfetto $p = \rho R T$;
2. Le pareti del volume di controllo a contatto con il propellente solido sono considerate adiabatiche;
3. La portata massica prodotta dall'accenditore è un dato in ingresso e non dipende dalla pressione all'interno della camera di combustione;
4. Le proprietà della miscela del gas dipendono dalla pressione della camera di combustione;
5. Le variabili termodinamiche (Pressione, Temperatura, Densità) sono funzioni del tempo;
6. Il fluido è considerato non viscoso.

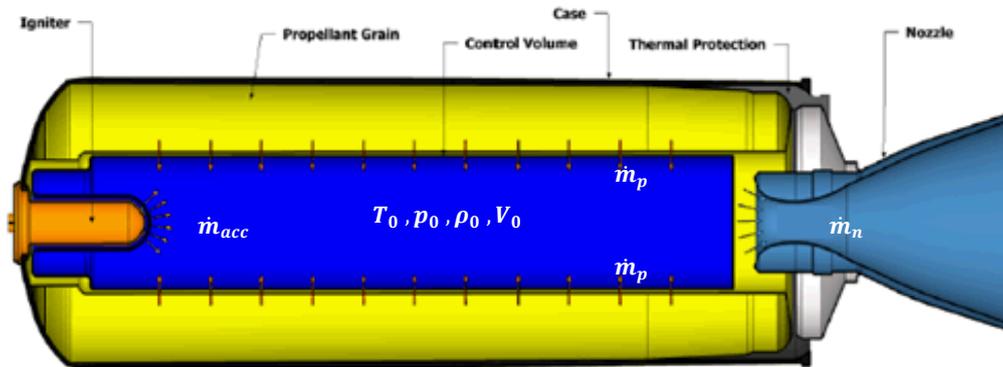


FIGURA 3.1: VOLUME DI CONTROLLO DI UN SRM

Le equazioni di lavoro utilizzate nella formulazione del modello 0D non stazionario sono:

- **Equazione di Continuità:**

$$\dot{m} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \dot{m}_{acc} + \dot{m}_p + \dot{m}_{PT} - \dot{m}_n \quad (3.1)$$

- **Equazione di Bilancio dell'Energia:**

$$\dot{E} = \dot{Q}_w - \dot{W} + \sum_{i=1}^4 \dot{m}_i h_i \quad (3.2)$$

Inoltre, supponendo che le reazioni di combustione avvengano sulla superficie del propellente, al di fuori del volume di controllo, e che il flusso sia ampiamente subsonico così da poter trascurare i termini cinetici, dalle relazioni (3.1) e (3.2) è possibile ricavare "p" e "T". Per una dettagliata esplicitazione delle equazioni di lavoro si rimanda al lavoro di "Preparazione alla Tesi" [26]. In definitiva il *Sistema di Equazioni Differenziali* che sarà utilizzato nel seguente lavoro di tesi è:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{R}{(c_p - R)V} \left[\dot{Q}_{loss} + C_a + C_p + C_{PT} - C_n - \frac{(c_p - R)}{R} p \frac{dV}{dt} \right] \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho R V} \left[V \frac{dp}{dt} + p \frac{dV}{dt} - \frac{p}{\rho} (\dot{m}_a + \dot{m}_p + \dot{m}_{PT} - \dot{m}_n) \right] \end{cases} \quad (3.3)$$

dove " $C_a = \dot{m}_a c_{pa} T_a$ " è il contributo dovuto all'accenditore, " $C_p = \dot{m}_p c_{pp} T_p$ " è il contributo dei prodotti di combustione, " $C_{PT} = \dot{m}_{PT} c_{pPT} T_{PT}$ " è il contributo dei prodotti di ablazione delle protezioni termiche e " $C_n = \dot{m}_n c_{pn} T_n$ " è il contributo dell'efflusso dall'ugello.

3.1.2. Contributo dei Vari Parametri

E' importante osservare come la prima equazione della relazione (3.3) rappresenti la variazione infinitesimale della pressione all'interno della camera di combustione. Infatti, lo scopo del modulo balistico è quello di prevedere l'andamento della pressione interna nel tempo così da poter valutare la *Velocità di Combustione* necessaria al Simulatore di Regressione.

Come si osserva dalla relazione (3.3), la variazione infinitesimale della "*Pressione Totale*" e della "*Temperatura Totale*" dipendono principalmente:

➤ **dalle Proprietà Geometriche della Camera di Combustione:**

Un importante parametro geometrico che compare nel sistema di equazioni differenziali è il volume della camera di combustione "V" e la sua variazione nel tempo " dV/dt ". Questi valori sono un *input* per il modulo balistico, infatti, il simulatore di regressione, che simula la regressione della mesh triangolare, quindi del propellente, fornisce il volume della camera di combustione ad ogni istante temporale, come mostrato in figura 3.2.

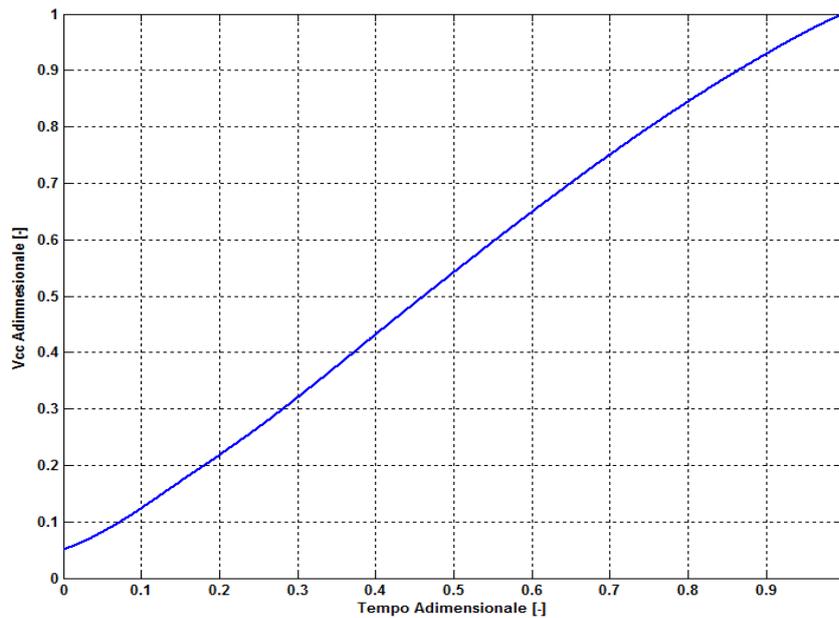


FIGURA 3.2: ANDAMENTO VOLUME CAMERA DI COMBUSTIONE

Noto il volume della camera di combustione e il passo di integrazione temporale, è possibile valutare la variazione del volume nel tempo attraverso la seguente relazione:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V^j - V^{j-1}}{h} \quad (3.4)$$

dove " V^j " e " V^{j-1} " sono i volumi della camera di combustione al tempo j e $j - 1$, mentre " h " è il passo di integrazione temporale. In figura 3.3 è rappresentato un classico andamento in funzione del tempo.

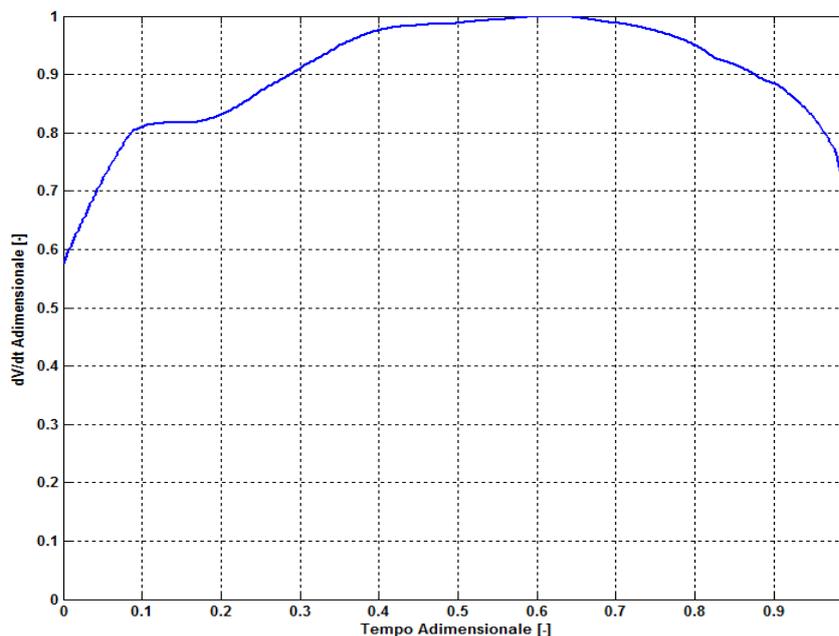


FIGURA 3.3: ANDAMENTO VARIAZIONE VOLUME CAMERA DI COMBUSTIONE

➤ *dal Contributo dei Prodotti di Combustione:*

Il contributo dei prodotti di combustione è il termine che influenza maggiormente la variazione infinitesimale della pressione. Esso è composto dal seguente prodotto:

$$C_p = \dot{m}_p c_{p_p} T_p \quad (3.5)$$

dove " \dot{m}_p " è la portata massica, " c_{p_p} " è il calore specifico a pressione costante e " T_p " è la temperatura dei prodotti di combustione. Per poter valutare la portata massica dei prodotti di combustione è necessaria la conoscenza della variazione del volume della camera di combustione e della densità del propellente " ρ_p ", fornita da AVIO-BPD, per cui:

$$\dot{m}_p = \rho_p \frac{dV}{dt} \quad (3.6)$$

Infine i valori del calore specifico e della temperatura possono essere ottenute attraverso le tabelle termochimiche *NASA CEA2* [16] oppure da valori ottenuti sperimentalmente e forniti da AVIO-BPD. In figura 3.4 è rappresentato un tipico andamento delle portate massiche dei prodotti di combustione in funzione del tempo.

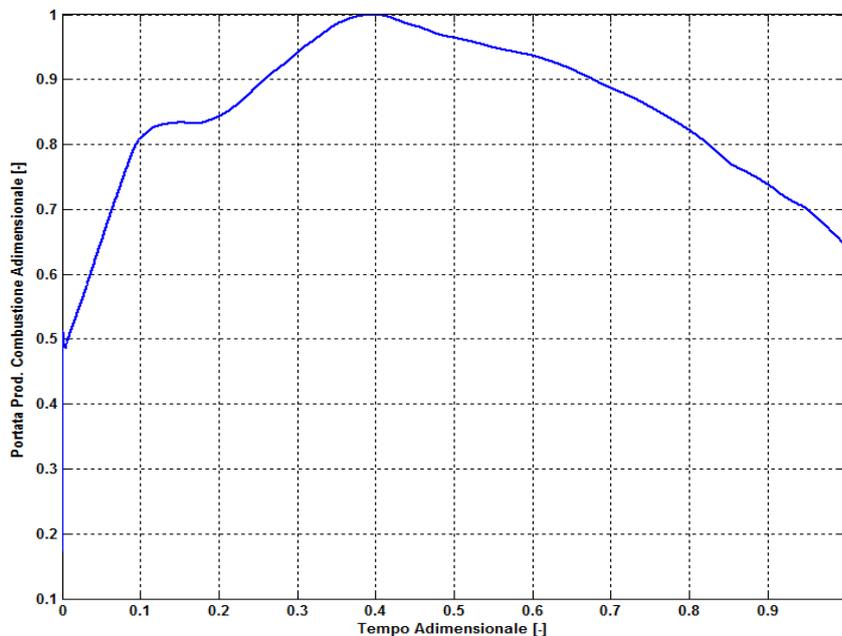


FIGURA 3.4: ANDAMENTO PORTATA MASSICA DEI PRODOTTI DI COMBUSTIONE

➤ *dal Contributo dell'Accenditore:*

Il contributo dell'accenditore contribuisce nella variazione della pressione solo nella fase del *Transient Ignition*. Il suo contributo è fornito dalla seguente relazione:

$$C_a = \dot{m}_a c_{p_a} T_a \quad (3.7)$$

Attraverso i dati forniti da AVIO-BPD, riguardante la motorizzazione *Zefiro 9*, è possibile valutare il seguente contributo mediante interpolazione dei dati nel tempo.

In generale, se le proprietà fluidodinamiche dei gas dell'accenditore non sono note, è possibile considerarli analoghi a quelli del grano propellente. Di seguito vengono rappresentati, in figura 3.5 e 3.6, l'andamento della pressione in uscita dall'accenditore e la portata massica fornita alla camera di combustione nella regione di impingement. E' necessario osservare che nella suddetta regione la velocità dei gas di combustione in uscita dall'accenditore hanno componente sia assiale sia normale alla superficie propellente, causando un maggior consumo del grano propellente. Inizialmente tale effetto, durante lo sviluppo del modello zero-dimensione non stazionario, non potrà essere preso in considerazione, in quanto non è nota la velocità del flusso, ma sarà considerata durante lo sviluppo del modello mono-dimensionale stazionario esposto successivamente.

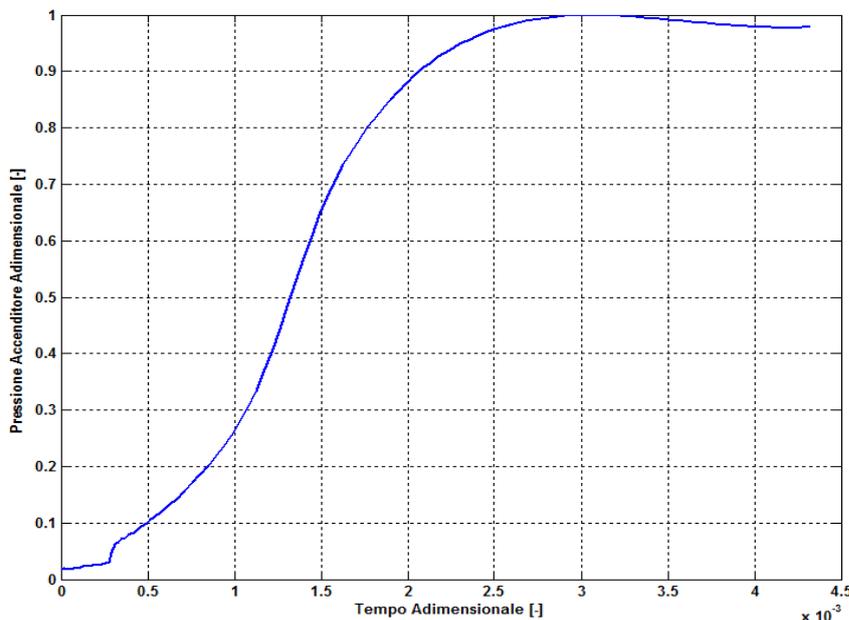


FIGURA 3.5: ANDAMENTO PRESSIONE IN USCITA DALL'ACCENDITORE

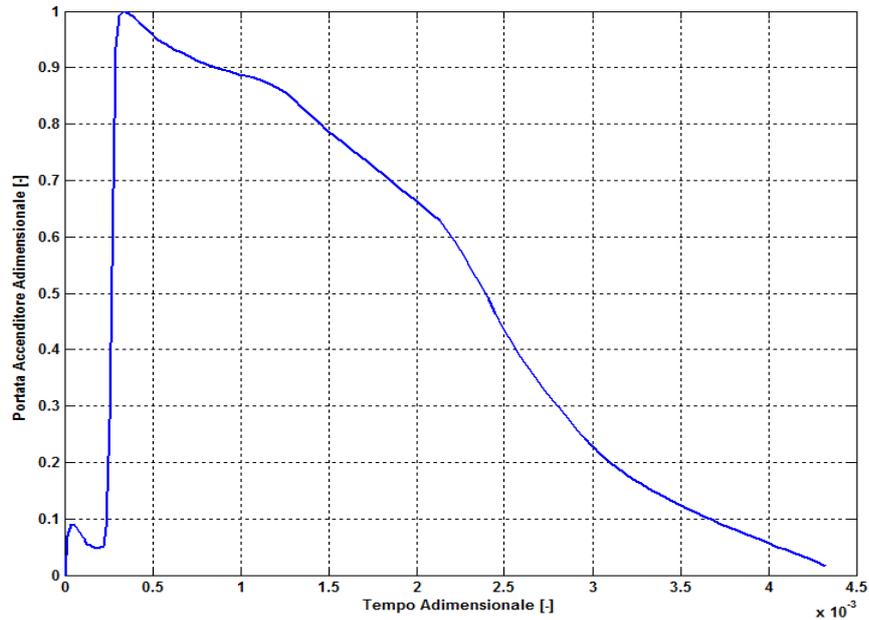


FIGURA 3.6: ANDAMENTO PORTATA MASSICA DELL'ACCENDITORE

➤ *dal Contributo dell'Efflusso dall'Ugello:*

Come già descritto nella sezione 2.3, per preservare le caratteristiche del grano propellente il motore viene posto ad una pressione superiore a quella atmosferica attraverso opportuni sigilli posti nella sezione di gola dell'ugello. Durante la fase di *Transient Ignition*, quando la differenza di pressione tra la camera di combustione e l'ambiente esterno raggiunge un valore intorno ai 7 bar, avviene la rottura del sigillo. In seguito alla rottura, i gas presenti all'interno della camera di combustione vengono accelerati attraverso l'ugello, generando l'effettiva *Spinta Propulsiva*.

Il contributo dovuto alla portata dei gas che attraversano l'ugello, ottenuta mediante la seguente relazione:

$$C_n = \dot{m}_n c_{p_n} T_n \quad (3.8)$$

è particolarmente importante nella valutazione della variazione di pressione. Infatti, trascurando i termini relativi all'accumulo di massa, la combustione risulta *Stabile* se la portata di gas in uscita dall'ugello è uguale a quella prodotta all'interno della camera di combustione [5].

Dalla relazione (3.8) è possibile quantificare il suddetto contributo ipotizzando che le proprietà dei gas in uscita dall'ugello risultino

uguali a quelle in ingresso. Per tal motivo sono noti i valori del calore specifico " c_{p_n} " e della temperatura " T_n ".

Considerando l'ugello operante in *Condizioni Soniche* è possibile utilizzare le relazioni (2.21) e (2.23) per quantificare la portata di gas che fuoriesce dall'ugello:

$$\dot{m}_n = \frac{p_0 A^*}{C^*} \quad (3.9)$$

I valori necessari per la valutazione della velocità caratteristica " C^* " sono sperimentali e forniti da AVIO-BPD. E' necessario osservare che la sezione di gola di un endoreattore a propellente solido aumenta nel tempo, come mostrato in figura 3.7, dovuto a fenomeni ablativi ed erosivi esposti nella sezione 2.1.5.

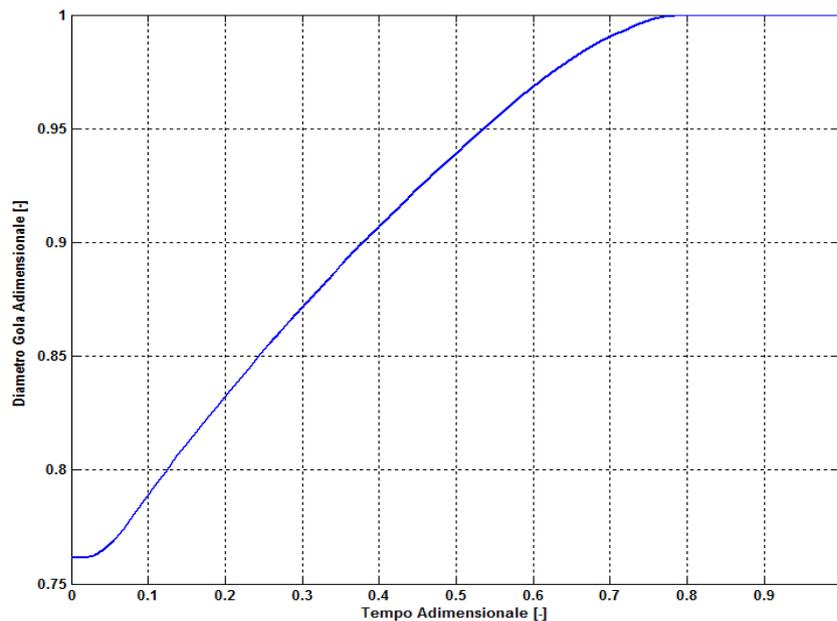


FIGURA 3.7: VARIAZIONE DIAMETRO DI GOLA DELL'UGELLO

➤ *dal Contributo dei Prodotti di Ablazione delle Protezioni Termiche:*

Durante la fase operativa del motore la superficie esposta delle protezioni termiche aumenta all'aumentare del tempo di propulsione, ciò è dovuto alla regressione del propellente, che causa l'esposizione delle protezioni termiche alla miscela di gas presente all'interno della camera di combustione. Per le elevate temperature la superficie delle protezioni termiche è soggetta a fenomeni ablativi contribuendo

all'introduzione di massa all'interno della camera di combustione. Questo contributo è rappresentato dalla seguente relazione:

$$C_{PT} = \dot{m}_{PT} c_{p_{PT}} T_{PT} \quad (3.10)$$

dove " T_{PT} " è la temperatura dei prodotti di ablazione, " $c_{p_{PT}}$ " è il calore specifico, forniti da AVIO-BPD, e la portata dei prodotti di ablazione " \dot{m}_{PT} " può essere ricavata attraverso:

$$\dot{m}_{PT} = \rho_{PT} S_{PT} r_{abl} \quad (3.11)$$

dove " r_{abl} " è la velocità di regressione della superficie di protezione termica. Nelle prime fasi dello sviluppo del modulo balistico i valori della densità " ρ_{PT} " e della velocità di regressione venivano assunti costanti (erano forniti da AVIO-BPD), mentre il valore della superficie di protezione termica esposta veniva valutata dal simulatore di regressione attraverso una function dedicata. Successivamente attraverso l'accoppiamento del modello 0D non stazionario e 1D stazionario è stato possibile valutare la velocità della miscela di gas all'interno della camera di combustione, quindi lo scambio di calore per convezione con le protezioni termiche. Attraverso la conoscenza della velocità lungo il canale è stato possibile valutare la velocità di regressione delle superfici di protezione termica attraverso un modello denominato "*MAR - Materia Affected Rate*" sviluppato da AVIO-BPD.

E' necessario osservare che il contributo delle protezioni termiche non è trascurabile nelle fasi finali della propulsione, a differenza delle fasi di Transient Ignition e gran parte dello Quasi-Steady State, poiché la superficie esposta, specialmente nella fase di Tail Off, è massima. Per cui è particolarmente importante considerare il seguente contributo se si è interessati alla spinta propulsiva residua in prossimità dello spegnimento del motore.

➤ ***dall'Influenza della Potenza Termica Dissipata:***

Il flusso di calore fuoriesce dal volume di controllo attraverso la superficie di protezione termica esposta. Tale flusso può essere diviso in un contributo:

- Convettivo;
- Radiante.

$$Q_{loss} = Q_{conv} + Q_{rad} \quad (3.12)$$

Inizialmente andiamo ad analizzare il flusso di calore del solo contributo **Convettivo**. Esso può essere valutato attraverso la seguente relazione:

$$Q_{conv} = h_c (T_{cc} - T_{PT}) \quad (3.13)$$

dove " T_{cc} " è la temperatura della miscela di gas all'interno della camera di combustione e " T_{PT} " è la temperatura di ablazione delle protezioni termiche. Per la valutazione del *Coefficiente di Scambio Termico Convettivo* " h_c " è possibile utilizzare la relazione di *Dittus-Boelter*:

$$h_c = 0.0265 \frac{k_{gas}}{D_h} Re^{0.8} Pr^{0.33} \quad (3.14)$$

dove " k_{gas} " è la conducibilità termica del gas, " Re " è il numero adimensionale di Reynolds, " Pr " è il numero adimensionale di Prandtl e " D_h " è il diametro idraulico. La relazione (3.14) può essere riscritta in funzione di parametri a noi noti:

$$h_c = C_1 \frac{(9\gamma - 5)^{0.66} \gamma^{0.33}}{(\gamma - 1)} \frac{T^{0.12}}{M_{mol}^{0.8}} \frac{\dot{m}_{gas}^{0.8}}{D_h^{1.8}} \quad (3.15)$$

Essendo tale relazione valida per una lastra piana senza distinzione tra flusso turbolento e laminare, essa comporta errori di circa il 25%. Per ridurre l'errore, al di sotto del 10%, è possibile esprimere il coefficiente di scambio termico convettivo attraverso la *Correlazione di Gnielinski*.

Mediante l'espressione del *Numero di Nusselt*, il coefficiente di scambio termico convettivo può essere espresso come:

$$h_c = \frac{Nu \ k}{D_h} \quad (3.16)$$

La conducibilità termica del gas " k " può essere valutata mediante la seguente relazione:

$$k = C \frac{(9\gamma - 5)}{(\gamma - 1)} \frac{T_{gas}^{0.6}}{M_{mol}^{0.5}} \quad (3.17)$$

Attraverso la *Correlazione di Gnielinski*, che considera un flusso all'interno di un condotto e tiene in considerazione il tipo di moto, è possibile esprimere il numero di Nusselt in funzione del numero di Reynolds [17,18], perciò:

$$N_u = \begin{cases} 3.66 & , \quad Re < 2300 \\ \frac{\frac{f}{8} (Re - 1000) Pr}{1 + 1.27 \left(\frac{f}{8}\right)^{0.5} (Pr^{0.66} - 1)} & , \quad Re \geq 2300 \end{cases} \quad (3.18)$$

Con:

$$\begin{cases} f = (0.79 \ln Re_D - 1.64)^{-2} \\ Pr = \frac{4 \gamma}{9 \gamma - 5} \end{cases} \quad (3.19)$$

dove "f" è la *Friction Factor*, ottenuto attraverso il *Diagramma di Moody*.

Il secondo termine che contribuisce al flusso di calore uscente è quello **Radiante**. In letteratura il flusso di calore trasmesso per Irraggiamento è dato dalla relazione:

$$Q_{rad} = \sigma \varepsilon_s (\varepsilon_g T_{gas}^4 - \alpha_g T_{PT}^4) \quad (3.20)$$

dove "σ" è la *Costante di Stefan-Boltzman* pari a "5.67 * 10⁻⁸ [$\frac{W}{m^2 K^4}$]", "ε_s" è l'*Emissività della Parete*, "ε_g" è l'*Emissività del Gas* e "α_g" è il *Coefficiente di Assorbimento del Gas*. Secondo [19,20] questi valori possono essere assunti pari a:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= 0.95 \\ \varepsilon_g &= 1 * 10^{-2} \div 4 * 10^{-2} \\ \alpha_g &\cong \varepsilon_g \end{aligned} \quad (3.21)$$

Essendo l'emissività del gas molto bassa, posta pari a 1 * 10⁻², e considerando valida l'uguaglianza tra il coefficiente di assorbimento e l'emissività del gas, la relazione (3.20) può essere riscritta come:

$$Q_{rad} = \sigma \varepsilon_s \varepsilon_g (T_{gas}^4 - T_{PT}^4) \quad (3.22)$$

In definitiva, essendo *Q_{conv}* e *Q_{rad}* flussi di calore, è necessario moltiplicare la loro somma per la superficie di protezione termica esposta, ottenendo così la potenza termica dispersa dal volume di controllo.

$$\dot{Q}_{loss} = S_{PT} [h_c (T_{cc} - T_{PT}) + \sigma \varepsilon_s \varepsilon_g (T_{gas}^4 - T_{PT}^4)] \quad (3.23)$$

➤ dalle **Proprietà della Miscela di Gas**:

Come esposto nel lavoro di "*Preparazione alla Tesi*" le proprietà della miscela di gas sono ottenute mediante media ponderale sulla frazione di massa dei singoli gas. Pertanto i loro valori sono ottenuti mediante la relazione (3.24).

$$\begin{aligned} c_p &= c_{p_g} Fr1 + c_{p_a} Fr2 + c_{p_{PT}} Fr3 + c_p Fr4 \\ \gamma &= \gamma_p Fr1 + \gamma_a Fr2 + \gamma_{PT} Fr3 + \gamma Fr4 \\ R &= R_p Fr1 + R_a Fr2 + R_{PT} Fr3 + R Fr4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

con:

$$\begin{aligned} Fr1 &= \frac{\rho_p dV/dt dt}{m_p + m_a + m_{PT} + m} & Fr3 &= \frac{\dot{m}_{PT} dt}{m_p + m_a + m_{PT} + m} \\ Fr2 &= \frac{\dot{m}_a dt}{m_p + m_a + m_{PT} + m} & Fr4 &= \frac{m}{m_p + m_a + m_{PT} + m} \end{aligned} \quad (3.25)$$

dove "*Fr1*" è la frazione di massa dovuta al propellente, "*Fr2*" è la frazione di massa dovuta all'accenditore, "*Fr3*" è la frazione di massa dovuta all'ablazione delle protezioni termiche e "*Fr4*" è la frazione di massa dovuta al gas presente all'interno della camera di combustione.

3.1.3. *Integrazione Numerica*

Al fine di integrare il sistema di equazioni differenziali (3.3) è necessaria la valutazione delle variazioni temporali di pressione e temperatura. Dall'osservazione di tale sistema, si nota che le 2 equazioni differenziali possono essere risolte separatamente. Valutata la variazione di pressione nel tempo dp/dt , mediante sostituzione nella seconda, è possibile valutare la variazione di temperatura dT/dt .

Considerando le equazioni differenziali rappresentate nella forma:

$$\begin{aligned} y' &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

è possibile prevedere il valore della *Pressione* e della *Temperatura* in tutti gli istanti di tempo, attraverso l'ausilio di tecniche numeriche. Nel lavoro di "*Preparazione alla Tesi*" il sistema di equazioni differenziali è stato risolto mediante l'utilizzo del *Metodo di Eulero Esplicito*. Esso è un modello relativamente semplice con bassa

precisione e alto tempo di calcolo. Per ridurre il tempo di calcolo e gli errori introdotti dal modello numerico sono state utilizzate, durante il lavoro di tesi, i seguenti metodi di integrazione:

➤ **Metodo di Runge-Kutta:**

Il Metodo di Eulero Esplicito è un metodo ad un passo di ordine 1. Per ottenere un metodo di ordine superiore al primo è necessario utilizzare "Metodi Runge-Kutta". La forma generale in cui si presentano tali metodi è [21,23]:

$$u_{n+1} = u_n + h F(t_n, u_n, h, f) \quad (3.27)$$

dove "F" è la funzione incremento definita come:

$$F(t_n, u_n, h, f) = \sum_{i=1}^s b_i K_i \quad (3.28)$$

$$K_i = f \left(t_n + c_i h, u_n + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, s$$

dove "s" indica il *numero di stadi* del metodo, mentre i coefficienti " a_{ij} ", " c_i " e " b_i " caratterizzano il metodo Runge-Kutta. Generalmente questi coefficienti vengono raccolti in una matrice, detta "*Matrice di Butcher*", così composta:

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{array} \quad (3.29)$$

Per ottenere un metodo Esplicito è necessario che i termini a_{ij} per $j \geq i$ siano *nulli* cosicché ogni K_i possa essere calcolato in funzione dei soli $i - 1$ coefficienti.

Nel lavoro di tesi si è scelto di utilizzare un *Metodo Runge-Kutta Esplicito del 4° ordine*, per tal motivo esplicitando il caso generale al caso in esame avremo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{n+1} &= \mathbf{u}_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 &= f(t_n, u_n) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2} K_2\right) \\
K_4 &= f(t_{n+1}, u_n + h K_3)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

➤ **Metodo Runge-Kutta-Fehlberg:**

Per ridurre il tempo di calcolo è possibile utilizzare il "Metodo Runge-Kutta-Fehlberg" caratterizzato da un passo di integrazione *adattivo*. A differenza del metodo classico di Runge-Kutta, il suddetto metodo ha la necessità di confrontare 2 differenti soluzioni così da poter valutare un passo di integrazione adatto. Per tal motivo ad ogni passo di integrazione temporale è necessario valutare i seguenti parametri [22]:

$$\begin{aligned}
K_1 &= f(t_n, u_n) \\
K_2 &= f\left(t_n + \frac{1}{4}h, u_n + \frac{1}{4}h K_1\right) \\
K_3 &= f\left(t_n + \frac{3}{8}h, u_n + \frac{3}{12}h K_1 + \frac{9}{12}h K_2\right) \\
K_4 &= f\left(t_n + \frac{12}{13}h, u_n + \frac{1932}{2197}h K_1 - \frac{7200}{2197}h K_2 + \frac{7296}{2197}h K_3\right) \\
K_5 &= f\left(t_n + h, u_n + \frac{439}{216}h K_1 - 8h K_2 + \frac{3680}{513}h K_3 - \frac{845}{4104}h K_4\right) \\
K_6 &= f\left(t_n + \frac{1}{2}h, u_n - \frac{8}{27}h K_1 - 2h K_2 - \frac{3544}{2565}h K_3 + \frac{1859}{4104}h K_4 - \frac{11}{40}h K_5\right)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

L'approssimazione della soluzione è ottenuta mediante il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine, perciò:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + h \left(\frac{25}{216} K_1 + \frac{1408}{2565} K_3 + \frac{2197}{4101} K_4 - \frac{1}{5} K_5 \right) \tag{3.32}$$

Per ottenere una migliore approssimazione della soluzione è possibile utilizzare il metodo di Runge-Kutta del 5° ordine:

$$z_{n+1} = z_n + h \left(\frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6 \right) \tag{3.33}$$

Attraverso il confronto tra le soluzioni " u_{n+1} " e " z_{n+1} " è possibile determinare uno scalare, che indicheremo con "s", che moltiplicherà il

passo di integrazione "h". Il suddetto scalare è ottenuto mediante la seguente relazione:

$$s = \left(\frac{\text{Tolleranza}}{2 |z_{n+1} - u_{n+1}|} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (3.34)$$

dove "Tolleranza" è la tolleranza massima di errore scelta fra le soluzioni.

3.1.4. Fattori Correttivi per la Velocità di Combustione

Nella sezione 2.3.5. sono stati presentati alcuni modelli atti alla valutazione della velocità di combustione. E' necessario osservare che tali modelli non sono in grado di valutare il *reale* valore della velocità di combustione in un motore, ma possono prevedere il valore *teorico* in condizioni ideali.

Per poter ottenere il valore reale della velocità di combustione attraverso i modelli esposti precedentemente è necessario l'utilizzo di opportuni fattori correttivi. In generale si suddividono in:

➤ **Fattore di Scala:**

Per ottenere un valore della velocità di combustione, ottenuta mediante i modelli esposti nella sezione 2.3.5., che sia prossimo a quello reale è necessario innanzitutto tenere in considerazione il cosiddetto "*Fattore di Scala*" o "*Scale Factor*". Tale fattore tiene in considerazione la differenza della velocità di combustione ottenuta in piccole motorizzazioni come la BARIA, rappresentata in figura 3.8, utilizzata per la caratterizzazione del propellente, e la velocità di combustione ottenuta in motorizzazioni di grandi dimensioni (*Reale*), caratterizzata dallo stesso propellente.

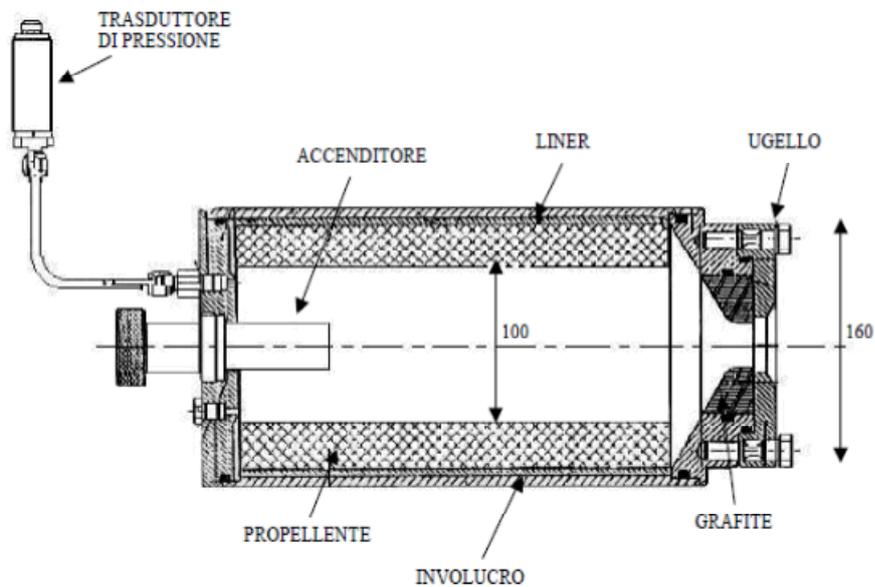


FIGURA 3.8: CONFIGURAZIONE DI UNA BARIA

➤ **Correzione Locale sulla Velocità di Combustione:**

Oltre al fattore di scala, per ottenere un valore della velocità di combustione che si avvicini ancor di più al valore reale è necessario considerare l'anisotropia del grano propellente lungo la direzione di propagazione della superficie di combustione mediante un ulteriore fattore correttivo che dipenda dal *web*, quindi dallo spessore del propellente consumato.

Attraverso l'esperienza di AVIO-BPD e pubblicazioni presenti in letteratura [27, 28], è stato confermato che l'anisotropia della velocità di combustione è causata dal processo di fabbricazione come ad esempio di colaggio utilizzato per il riempimento della motorizzazione. Durante tale fase, essendo il propellente viscoso, gli strati di propellente scorrono fra loro favorendo la generazione di zone a diversa concentrazione.

La non isotropicità della velocità di combustione comporta 2 effetti differenti.

Il primo è da imputarsi al processo di colaggio, indicato con il termine "*HUMP*" mostrato in figura 3.9, in cui si ha una riduzione dell'1 ÷ 2%, rispetto al valore di riferimento, al momento dell'accensione, quindi per bassi valori del *web* consumato. Successivamente un

aumento del 2 ÷ 3% per valori del web consumato compresi tra il 20% e il 50%. Infine si ha nuovamente una riduzione del 5 ÷ 6% in prossimità del web totale consumato.

Il secondo effetto è imputabile alla superficie di combustione che non procede a strati paralleli, indicato con il termine "BCRF".

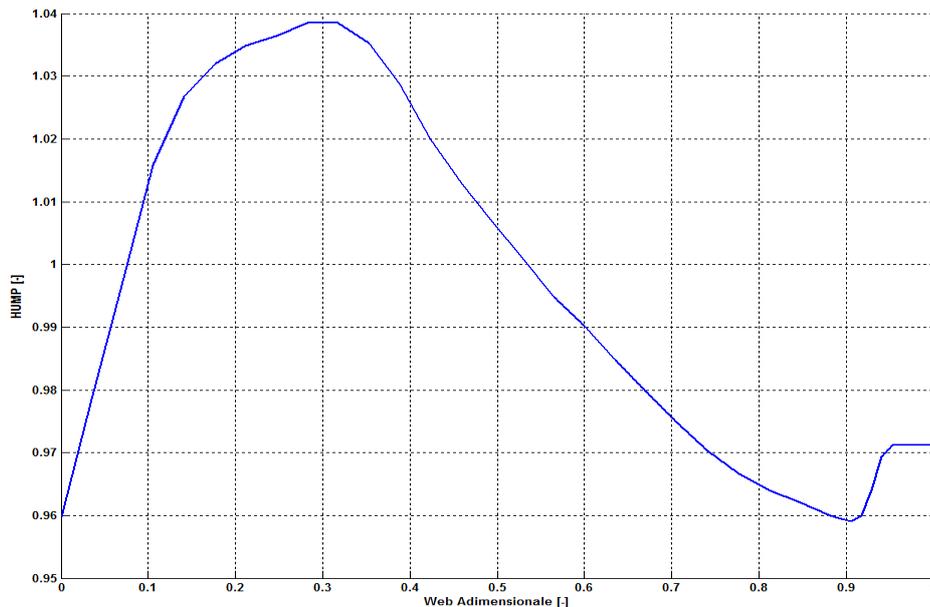


FIGURA 3.9: FATTORE HUMP

I fattori correttivi considerati durante lo sviluppo del modello per la balistica interna, forniti da AVIO-BPD, sono il Fattore di Scala e l'HUMP. Tali fattori dovranno moltiplicare direttamente il valore ottenuto mediante la relazione (2.29).

Applicati tali fattori correttivi non è necessario applicare il fattore BCRF poiché il simulatore di regressione sviluppato presso il Laboratorio di Propulsione e Macchine è anisotropo, perciò è considerata un'evoluzione reale che non considera l'ipotesi di regressione per strati paralleli.

3.2. Modello Mono-Dimensionale Stazionario

Il *Modello Mono-Dimensionale Stazionario*, a differenza del modello Zero-Dimensionale non Stazionario, è un modello capace di valutare l'andamento delle grandezze termofluidodinamiche all'interno della camera di combustione.

Nel seguente paragrafo saranno illustrate le varie relazioni necessarie alla valutazione delle distribuzioni, lungo la camera di combustione, delle variabili termofluidodinamiche di interesse. Per tal motivo è necessaria una discretizzazione

spaziale mono-dimensionale della camera di combustione, come mostrato in figura 3.10.

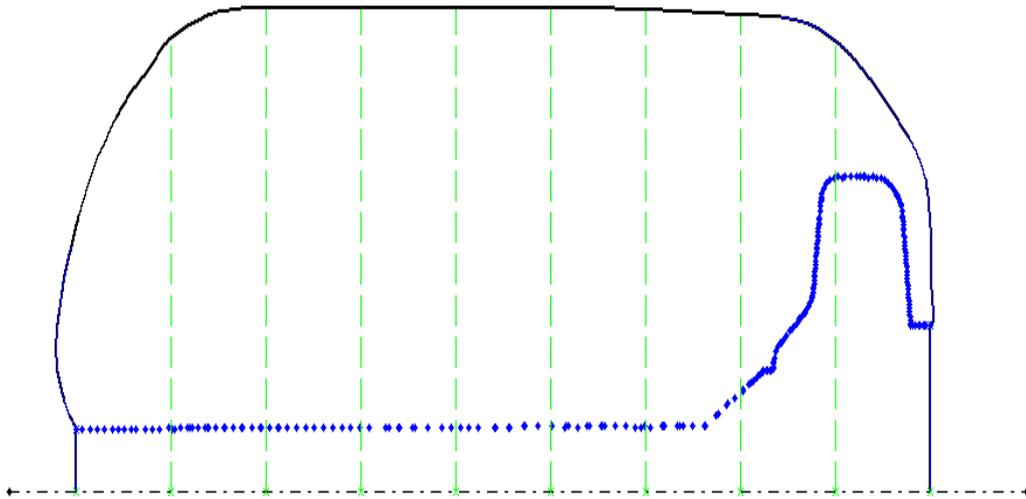


FIGURA 3.10: DISCRETIZZAZIONE CAMERA DI COMBUSTIONE

3.2.1. Formulazione del Flusso Mono-Dimensionale Generalizzato

La formulazione del flusso mono-dimensionale generalizzato prevede [14]:

- Variazione di Area;
- Attrito alla parete;
- Resistenza indotta dalla presenza di corpi immersi nel flusso;
- Scambio di calore con l'ambiente esterno;
- Presenza di reazioni chimiche nel flusso;
- Cambiamenti di fase, come evaporazione o condensazione di liquidi;
- Adduzione di massa e miscelazione con il flusso principale;
- Variazione di massa molecolare e calore specifico dovuto alla combustione, evaporazione, adduzione di massa, ecc ...

Le ipotesi considerate valide durante la formulazione del problema in esame sono [14]:

1. *Il Flusso è Mono-Dimensionale e Stazionario;*
2. *Le variazioni delle Proprietà, lungo le linee di flusso, sono Continue;*
3. *Le variazioni delle Proprietà del Gas sono funzioni della Temperatura e della Composizione della Miscela Fluida;*
4. *I gas si comportano come Termicamente Perfetti.*

Prima di procedere all'esplicitazione delle equazioni di bilancio, è necessario introdurre alcune relazioni utili:

➤ **Equazione di Stato:**

La relazione che lega Pressione, Densità e Temperatura è data da:

$$p = \rho \frac{R}{M_{mol}} T \quad (3.35)$$

Attraverso una differenziazione logaritmica è possibile scrivere la relazione (3.35) in una forma a noi più consona:

$$\begin{aligned} \log p &= \log \rho + \log R + \log T - \log M_{mol} \\ \frac{dp}{p} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T} - \frac{dM_{mol}}{M_{mol}} \end{aligned} \quad (3.36)$$

➤ **Velocità del Suono:**

La velocità del suono per un gas perfetto è data dalla seguente relazione:

$$c^2 = \gamma \frac{R}{M_{mol}} T \quad (3.37)$$

Riscrivendo la relazione (3.37) in un'altra forma otteniamo:

$$\begin{aligned} 2 \log c &= \log \gamma + \log R + \log T - \log M_{mol} \\ \frac{dc}{c} &= \frac{1}{2} \left(\frac{d\gamma}{\gamma} + \frac{dT}{T} - \frac{dM_{mol}}{M_{mol}} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

➤ **Numero di Mach:**

Il numero di Mach è definito come:

$$M = \frac{V}{c} \quad (3.39)$$

Considerando la relazione (3.37) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{V^2 M_{mol}}{\gamma R T} \\ 2 \log M &= 2 \log V + \log M_{mol} - \log \gamma - \log R - \log T \\ 2 \frac{dM}{M} &= 2 \frac{dV}{V} + \frac{dM_{mol}}{M_{mol}} - \frac{d\gamma}{\gamma} - \frac{dT}{T} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Attraverso le relazioni (3.36), (3.38) e (3.40) è possibile scrivere le varie equazioni di bilancio considerando un *Volume di Controllo* di lunghezza infinitesima dx , come mostrato in figura 3.11.

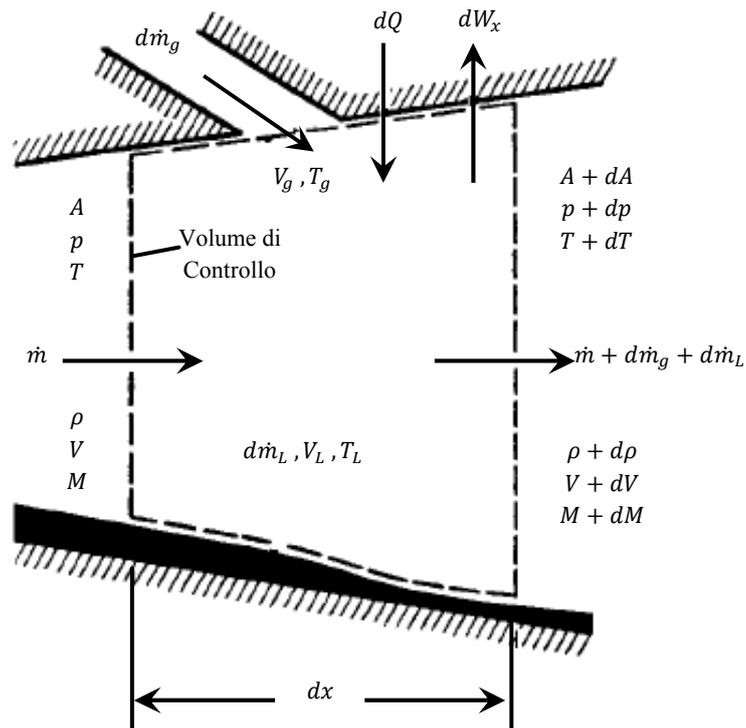


FIGURA 3.11: VOLUME DI CONTROLLO

Di seguito saranno analizzate le varie equazioni di bilancio:

➤ **Equazione di Continuità:**

Sfruttando la differenziazione logaritmica è possibile scrivere l'equazione di continuità come:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \rho A V \\ \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} &= \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} \end{aligned} \quad (3.41)$$

La relazione (3.41) è verificata se le componenti di velocità della massa addotta al flusso sono trascurabili. Il termine " $d\dot{m}$ " rappresenta il flusso di massa totale del flusso principale ed include sia il gas iniettato " $d\dot{m}_g$ " e sia quello evaporato " $d\dot{m}_L$ ", perciò:

$$d\dot{m} = d\dot{m}_g + d\dot{m}_L \quad (3.42)$$

Bisogna osservare che se il vapore è in condensazione allora il termine $d\dot{m}_L$ è negativo.

➤ **Equazione di Bilancio dell'Energia:**

L'equazione di conservazione dell'energia per il flusso che attraversa il volume di controllo può essere scritta, trascurando le forze gravitazionali, come:

$$\begin{aligned}
 \dot{m}(dQ - dW_x) &= [\dot{m}(h + dh) + h_{gT}d\dot{m}_g + h_V d\dot{m}_L] \\
 &- [\dot{m} h + h_g d\dot{m}_g + h_L d\dot{m}_L] \\
 &+ (\dot{m} + d\dot{m}_g + d\dot{m}_L) \left[\frac{V^2}{2} + d\left(\frac{V^2}{2}\right) \right] \\
 &- \left[\dot{m} \frac{V^2}{2} + \frac{V_g^2}{2} d\dot{m}_g + \frac{V_L^2}{2} d\dot{m}_L \right]
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

dove " dQ " è il calore scambiato, " dW_x " è il lavoro delle forze d'attrito dovuto alle pareti e ai corpi immersi nel flusso, " h_{gT} " è l'entalpia dei gas iniettati che si trovano a temperatura T , " h_g " è l'entalpia dei gas iniettati alla temperatura del flusso, " h_V " è l'entalpia della massa liquida vaporizzata e " h_L " è l'entalpia della massa liquida che entra nel volume di controllo. Attraverso semplici passaggi matematici, la relazione (3.43) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned}
 dQ - dW_x = dh + d\left(\frac{V^2}{2}\right) &\left[h_{gT} - h_g + \frac{V^2 - V_g^2}{2} \right] \frac{d\dot{m}_g}{\dot{m}} \\
 &+ \left[h_V - h_L + \frac{V^2 - V_L^2}{2} \right] \frac{d\dot{m}_L}{\dot{m}}
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

La variazione di entalpia del flusso principale è data dalle variazioni dovute alle reazioni chimiche e dalla variazione di temperatura, perciò essa può essere valutata come:

$$dh = -dh_{pr} + c_p dT \tag{3.45}$$

dove " dh_{pr} " è l'entalpia di reazione a pressione costante. Sostituendo la relazione (3.45) in (3.44) e tenendo in considerazione che:

$$\bar{c}_{p_g} = \frac{1}{T - T_{0_g}} \int_{T_{0_g}}^T c_{p_g} dT \tag{3.46}$$

è il calore specifico medio, si ottiene la formulazione finale dell'equazione di bilancio dell'energia:

$$\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p T} = \frac{dT}{T} + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \frac{dV^2}{V^2} \quad (3.47)$$

con "dH" un termine energetico definito come:

$$dH = dh_{pr} - \left[\bar{c}_{p_g} (T - T_{0_g}) + \frac{V^2}{2} \right] \frac{d\dot{m}_g}{\dot{m}} - \left[h_L - h_V + \frac{V^2 - V_L^2}{2} \right] \frac{d\dot{m}_L}{\dot{m}} \quad (3.48)$$

➤ **Equazione di Bilancio della Quantità di Moto:**

Per poter esplicitare la seguente equazione di bilancio è necessario assumere che:

- le forze agiscono in direzione del flusso;
- il liquido e il gas iniettato, all'interno del volume di controllo, sia alla stessa pressione;
- la variazione dell'area sia piccola.

Attraverso le seguenti ipotesi, considerando la figura 3.9, è possibile scrivere:

$$\begin{aligned} pA + (p + dp)dA - (p + dp)(A + dA) - \tau_w dA_w - dX \\ = (\dot{m} + d\dot{m}_g + d\dot{m}_L)(V + dV) - V'_g d\dot{m}_g \\ - V'_L d\dot{m}_L - \dot{m}V \end{aligned} \quad (3.49)$$

dove " τ_w " è lo sforzo di attrito alla parete, " dA_w " è la superficie bagnata dal flusso, " V'_g " e " V'_L " rappresentano le componenti di velocità, dei vettori V_g e V_L , in direzione del moto e " dX " è la somma delle forze resistenti dovuta a corpi immersi nel flusso.

Lo sforzo di attrito alla parete può essere relazionato con il coefficiente di frizione " f ", mentre la superficie bagnata dal flusso può essere relazionata attraverso il diametro idraulico, perciò:

$$\tau_w = f \rho \frac{V^2}{2} \quad (3.50)$$

$$dA_w = 4 \frac{dx}{D_h} A \quad (3.51)$$

Inoltre definendo le quantità:

$$\begin{aligned} y_g &= \frac{V'_g}{V} \\ y_L &= \frac{V'_L}{V} \end{aligned} \quad (3.52)$$

E' possibile ottenere, mediante sostituzione delle relazioni (3.50), (3.51) e (3.52) in (3.49), la seguente equazione di bilancio:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{2} \frac{dV^2}{V^2} + \frac{\gamma M^2}{2} \left(4f \frac{dx}{D_h} + \frac{dX}{\frac{1}{2} \gamma p A M^2} \right) \\ + \gamma M^2 (1 - y) \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

con:

$$y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} = y_g \frac{d\dot{m}_g}{\dot{m}} + y_L \frac{d\dot{m}_L}{\dot{m}} \quad (3.54)$$

Per poter definire la formulazione generale del flusso mono-dimensionale è necessario determinare altre 2 relazioni attraverso l'esplicitazione della "*Funzione Impulso*" e della "*Seconda Legge della Termodinamica*".

La funzione impulso è definita come:

$$F = pA + \rho AV^2 = pA(1 + \gamma M^2) \quad (3.55)$$

Questa è utilizzata per la valutazione della spinta in un sistema propulsivo. Infatti essa rappresenta la forza totale esercitata dal flusso sulle pareti interne del condotto ed agisce in direzione opposta al flusso. Attraverso la differenziazione logaritmica è possibile scrivere:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dA}{A} + \frac{dp}{p} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{dM^2}{M^2} + \frac{\gamma M^2}{1 + \gamma M^2} \frac{d\gamma}{\gamma} \quad (3.56)$$

L'ultima relazione è ottenuta mediante la variazione di entropia del gas principale, considerando che non ci siano reazioni chimiche, perciò:

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{dT}{T} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} \quad (3.57)$$

Le relazioni (3.36), (3.38), (3.40), (3.47), (3.53), (3.56), (3.57) rappresentano un set di equazioni differenziali indipendenti. Esse sono composte da 14 variabili differenziali, 6 delle quali possono essere scelte come variabili indipendenti e le restanti 8 come variabili dipendenti. Di seguito, in tabella 3.1, sono rappresentate le suddette variabili:

TABELLA 3.1: VARIABILI DIFFERENZIALI

<i>INDIPENDENTI</i>	<i>DIPENDENTI</i>
$\frac{dA}{A}$	$\frac{dM^2}{M^2}$
$\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p T}$	$\frac{dV}{V}$
$4f \frac{dx}{D_h} + \frac{dX}{\frac{1}{2} \gamma p A M^2} - 2y \frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$	$\frac{dc}{c}$
$\frac{d\dot{m}}{\dot{m}}$	$\frac{dT}{T}$
$\frac{dM_{mol}}{M_{mol}}$	$\frac{d\rho}{\rho}$
$\frac{d\gamma}{\gamma}$	$\frac{dp}{p}$
	$\frac{dF}{F}$
	$\frac{ds}{c_p}$

Con la risoluzione di un sistema lineare algebrico è possibile ottenere ogni variabile dipendente in funzione delle 6 variabili indipendenti, come mostrato in tabella 3.2. I coefficienti delle variabili indipendenti, detti "*Coefficienti di Influenza*", indicano l'influenza di ogni variabile indipendente sulle variabili dipendenti.

TABELLA 3.2: COEFFICIENTI DI INFLUENZA

	$\frac{dA}{A}$	$\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p T}$	$4f \frac{dx}{D_h} + \frac{1}{2} \gamma p A M^2 \frac{dx}{D_h} - 2\gamma \frac{dm}{\dot{m}}$	$\frac{dm}{\dot{m}}$	$\frac{dM_{mol}}{M_{mol}}$	$\frac{dy}{y}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$-\frac{2\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1-M^2}$	$\frac{1 + \gamma M^2}{1 - \gamma M^2}$	$\frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1 - M^2}$	$\frac{2(1 + \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1 - M^2}$	$-\frac{1 + \gamma M^2}{1 - M^2}$	-1
$\frac{dV}{V}$	$-\frac{1}{1 - M^2}$	$\frac{1}{1 - M^2}$	$\frac{\gamma M^2}{2(1 - M^2)}$	$\frac{1 + \gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{1}{1 - M^2}$	0
$\frac{dc}{c}$	$\frac{\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1 - M^2}$	$\frac{1 - \gamma M^2}{2(1 - M^2)}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{4(1 - M^2)}$	$-\frac{\frac{\gamma-1}{2}M^2(1 + \gamma M^2)}{1 - M^2}$	$\frac{\gamma M^2 - 1}{2(1 - M^2)}$	$1 - \frac{1}{2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma-1)M^2}{1 - M^2}$	$\frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma-1)M^4}{2(1 - M^2)}$	$-\frac{(\gamma-1)M^2(1 + \gamma M^2)}{1 - M^2}$	$\frac{(\gamma-1)M^2}{1 - M^2}$	0
$\frac{d\rho}{\rho}$	$\frac{M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{1}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1 - M^2)}$	$-\frac{(\gamma+1)M^2}{1 - M^2}$	$\frac{1}{1 - M^2}$	0
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2 [1 + (\gamma-1)M^2]}{2(1 - M^2)}$	$-\frac{2\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}{1 - M^2}$	$\frac{M^2}{1 - M^2}$	0
$\frac{dF}{F}$	$\frac{1}{1 + \gamma M^2}$	0	$-\frac{\gamma M^2}{2(1 + \gamma M^2)}$	0	0	0
$\frac{ds}{c_p}$	0	1	$\frac{(\gamma-1)M^2}{2}$	$(\gamma-1)M^2$	0	0

Per semplificare il problema in esame, nel proseguo del lavoro di tesi si assume trascurabile la variazione del calore specifico e della massa molecolare, riducendo a 4 le variabili indipendenti. Le variabili di interesse nello sviluppo del seguente lavoro sono " dM^2/M^2 ", " dT/T ", " $d\rho/\rho$ " e " dp/p ", perciò la tabella dei coefficienti di influenza (generalizzata) si riduce alla tabella 3.3.

Con l'assunzione del calore specifico e massa molecolare costante lo scambio di calore e il lavoro delle forze d'attrito può essere espresso attraverso la temperatura di ristagno. Essa può essere espressa attraverso:

$$T_0 = T + \frac{V^2}{2c_p} = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \quad (3.58)$$

che in forma differenziale sarà:

$$\frac{dT_0}{T_0} = \frac{dT}{T} + \frac{\frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2} \frac{dM^2}{M^2} \quad (3.59)$$

Combinando la relazione (3.58) con (3.47) otteniamo:

$$\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p T} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \frac{dT_0}{T_0} \quad (3.60)$$

In definitiva la relazione (3.59) è una rappresentazione dell'equazione dell'energia, ragion per cui è possibile sostituire " $\frac{dQ - dW_x + dH}{c_p T}$ " con " $\frac{dT_0}{T_0}$ " nella tabella dei coefficienti di influenza, come mostrato nella tabella 3.3.

TABELLA 3.3: COEFFICIENTI DI INFLUENZA CON VARIAZIONE CALORE SPECIFICO E MASSA MOLECOLARE TRASCURABILE

	$\frac{dA}{A}$	$\frac{dT_0}{T_0}$	$4f \frac{dx}{D_h} + \frac{dX}{\frac{1}{2} \gamma p A M^2} - 2\gamma \frac{dm}{\dot{m}}$	$\frac{dm}{\dot{m}}$
$\frac{dM^2}{M^2}$	$-\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 - M^2}$	$\frac{(1 + \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 - M^2}$	$\frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 - M^2}$	$\frac{2(1 + \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 - M^2}$
$\frac{dT}{T}$	$\frac{(\gamma - 1)M^2}{1 - M^2}$	$\frac{(1 - \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma(\gamma - 1)M^4}{2(1 - M^2)}$	$-\frac{(\gamma - 1)M^2(1 + \gamma M^2)}{1 - M^2}$
$\frac{dp}{\rho}$	$\frac{M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2}{2(1 - M^2)}$	$-\frac{(\gamma + 1)M^2}{1 - M^2}$
$\frac{dp}{p}$	$\frac{\gamma M^2}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 - M^2}$	$-\frac{\gamma M^2 [1 + (\gamma - 1)M^2]}{2(1 - M^2)}$	$-\frac{2\gamma M^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)}{1 - M^2}$

3.2.2. Equazioni di Lavoro del Flusso di Tipo Semplice

Un *Flusso di Tipo Semplice* è definito come un flusso caratterizzato dalla combinazione di tutte le variabili indipendenti e i loro effetti possono essere sommati linearmente, ipotizzando che si manifestino uno alla volta.

Per ridurre la complessità e il tempo di calcolo del problema in esame è possibile assumere un flusso non viscoso, trascurando in tal modo il contributo delle forze d'attrito. Questa ipotesi è verificata, in quanto il gas che entra all'interno del volume di controllo funge da lubrificante nei confronti del flusso principale.

Attraverso la tabella 3.3 è possibile ottenere analiticamente la variazione della variabile dipendente " dM^2/M^2 " considerando ogni singola variabile indipendente.

Per cui considerando la sola variazione di area:

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{M^2} &= - \frac{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) dA}{1 - M^2} \frac{1}{A} \\ \frac{dA}{A} &= - \frac{1 - M^2}{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \frac{dM^2}{M^2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

ed integrando tra la sezione critica, in cui si ha Mach unitario, e una sezione generica:

$$\int_{A^*}^A \frac{dA}{A} = - \int_1^{M^2} \frac{1 - M^2}{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \frac{dM^2}{M^2} \quad (3.62)$$

si ottiene:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (3.63)$$

Effettuando lo stesso procedimento per la variazione di Mach dovuto alla sola variazione di portata ed alla sola variazione di temperatura totale si ottengono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \int_{\dot{m}^*}^{\dot{m}} \frac{d\dot{m}}{\dot{m}} &= \int_1^{M^2} \frac{1 - M^2}{2(1 + \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)} \frac{dM^2}{M^2} \\ \frac{\dot{m}}{\dot{m}^*} &= M \frac{\sqrt{2(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}}{(1 + \gamma M^2)} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\int_{T_0^*}^{T_0} \frac{dT_0}{T_0} = \int_1^{M^2} \frac{1 - M^2}{(1 + \gamma M^2) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)} \frac{dM^2}{M^2} \quad (3.65)$$

$$\frac{T_0}{T_0^*} = \frac{2(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right) M^2}{(1 + \gamma M^2)^2}$$

E' necessario osservare che nella realtà questi fenomeni, che consideriamo separati fra loro, sono *Accoppiati*, per tal motivo, per ottenere una soluzione prossima a quella *esatta*, sarà necessario effettuare una "*Combinazione Lineare*" delle soluzioni dei flussi semplici.

Per una completa risoluzione delle restanti variabili dipendenti è possibile consultare [14, 25].

Le relazioni (3.63), (3.64) e (3.65) sono riferite alla sezione critica, che nel caso in esame è uguale per tutti ed in particolare pari alla sezione di gola, perciò è possibile esprimere le suddette relazioni in funzione del rapporto dei nodi caratterizzanti la discretizzazione della camera di combustione.

3.2.2.1. *Variazione Mach dovuto alla Variazione di Area*

Attraverso la relazione (3.63) è possibile esprimere la variazione di Mach dovuta alla sola variazione di area, perciò:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2}{A^*} \frac{A^*}{A_1} = \frac{\frac{1}{M_2} \left[\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}{\frac{1}{M_1} \left[\frac{2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}} \quad (3.66)$$

Noto il valore di Mach in ingresso al nodo " M_1 " ed il rapporto fra le sezioni " A_2/A_1 ", è possibile valutare, mediante la relazione (3.66), il valore del Mach in uscita " M_2 " attraverso un metodo iterativo. In tal modo è possibile ricavare l'evoluzione del Mach lungo l'intera camera di combustione e considerando il flusso *Isoentropico*, è possibile sfruttare le relazioni (3.67)

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\end{aligned}\quad (3.67)$$

per ottenere la distribuzione di pressione e temperatura statica lungo la camera di combustione, mediante le seguenti relazioni :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (3.68)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2} \quad (3.69)$$

3.2.2.2. *Variazione Mach dovuto alla Variazione di Portata*

Come fatto per la variazione di area è possibile valutare la variazione di Mach dovuto alla sola variazione di portata mediante la relazione (3.64):

$$\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}^*} \frac{\dot{m}^*}{\dot{m}_1} = \frac{M_2}{M_1} \frac{\frac{\sqrt{2(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)}}{(1 + \gamma M_2^2)}}{\frac{\sqrt{2(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)}}{(1 + \gamma M_1^2)}} \quad (3.70)$$

A differenza della valutazione del Mach in uscita dovuta alla sola variazione di area, nel seguente caso, noto il rapporto " \dot{m}_2/\dot{m}_1 " ed il valore di Mach in ingresso " M_1 ", è possibile risolvere analiticamente la relazione (3.70) per ottenere il valore di Mach in uscita dal nodo, perciò rimodellando la relazione:

$$\begin{aligned}&\left\{\left(\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1}\right)^2 \gamma^2 M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) - \frac{\gamma - 1}{2} (1 + \gamma M_1^2)^2\right\} M_2^4 \\ &+ \left\{\left(\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1}\right)^2 2\gamma M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right) - (1 + \gamma M_1^2)^2\right\} M_2^2 \\ &+ \left\{\left(\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1}\right)^2 M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)\right\} = 0\end{aligned}\quad (3.71)$$

otteniamo un'equazione di quarto grado che fornisce 4 possibili soluzioni. Logicamente la soluzione da noi cercata è quella soluzione che presenta Mach *Subsonico*.

3.2.2.3. *Variazione Mach dovuto alla Variazione di Temperatura Totale*

L'ultimo parametro di influenza sulla variazione del Mach è la variazione di temperatura totale. Tale variazione è ottenuta mediante lo stesso metodo utilizzato per le precedenti variazioni, infatti:

$$\frac{T_{02}}{T_{01}} = \frac{T_{02}}{T_o^*} \frac{T_o^*}{T_{01}} = \frac{M_2^2}{M_1^2} \frac{\frac{2(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)}{(1 + \gamma M_2^2)^2}}{\frac{2(\gamma + 1) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)}{(1 + \gamma M_1^2)^2}} \quad (3.72)$$

Anche nel seguente caso, noto il rapporto di temperatura totale " T_{02}/T_{01} " e il Mach in ingresso " M_1 ", è possibile valutare analiticamente la variazione di Mach in uscita attraverso un'equazione del quarto ordine:

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right) 2\gamma^2(\gamma + 1)M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) - (\gamma^2 - 1)(1 + \gamma M_1^2)^2 \right\} M_2^4 \\ & + \left\{ \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right) 4\gamma(\gamma + 1)M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \right. \\ & \left. - 2(\gamma + 1)(1 + \gamma M_1^2)^2 \right\} M_2^2 \\ & + \left\{ \left(\frac{T_{02}}{T_{01}} \right) 2(\gamma + 1)M_1^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

3.2.3. *Bilancio Energetico di un Singolo Nodo*

Per poter valutare la distribuzione della pressione e della temperatura statica nella camera di combustione, è necessario valutare la distribuzione del Mach in tale area, attraverso un Bilancio Energetico per ogni singolo nodo di calcolo. Attraverso tale bilancio è possibile valutare la temperatura totale, quindi valutare, per il primo nodo, il valore del Mach. Con riferimento alla figura 3.12 è possibile scrivere il seguente *Bilancio Energetico*:

$$\begin{aligned} & (\dot{m}_{gas} c_{p_{gas}} T_{gas} + \dot{m}_{PT} c_{p_{PT}} T_{PT} + \dot{m}_a c_{p_a} T_a) dt + M_0 c_{p_0} T_0 \\ & = (Q_{loss} + \dot{m}_{out} c_{p_{out}} T_{out}) dt + M_0 c_{p_{out}} T_{out} \end{aligned} \quad (3.74)$$

dove con il pedice "gas" ci si riferisce ai prodotti di combustione del propellente, con "PT" alle protezioni termiche, con "a" all'accenditore, con "0" alla miscela di gas presente al passo di integrazione precedente e con "out" alla miscela di gas in uscita dal nodo. Per poter valutare la temperatura totale in uscita è necessario valutare " $c_{p_{out}}$ " attraverso una media pesata con le rispettive portate massiche, per cui:

$$\begin{aligned} & (\dot{m}_{gas} c_{p_{gas}} + \dot{m}_{PT} c_{p_{PT}} + \dot{m}_a c_{p_a}) dt + M_0 c_{p_0} = \dot{m}_{out} c_{p_{out}} dt + M_0 c_{p_{out}} \\ & c_{p_{out}} = \frac{(\dot{m}_{gas} c_{p_{gas}} + \dot{m}_{PT} c_{p_{PT}} + \dot{m}_a c_{p_a}) dt + M_0 c_{p_0}}{\dot{m}_{out} dt + M_0} \end{aligned} \quad (3.75)$$

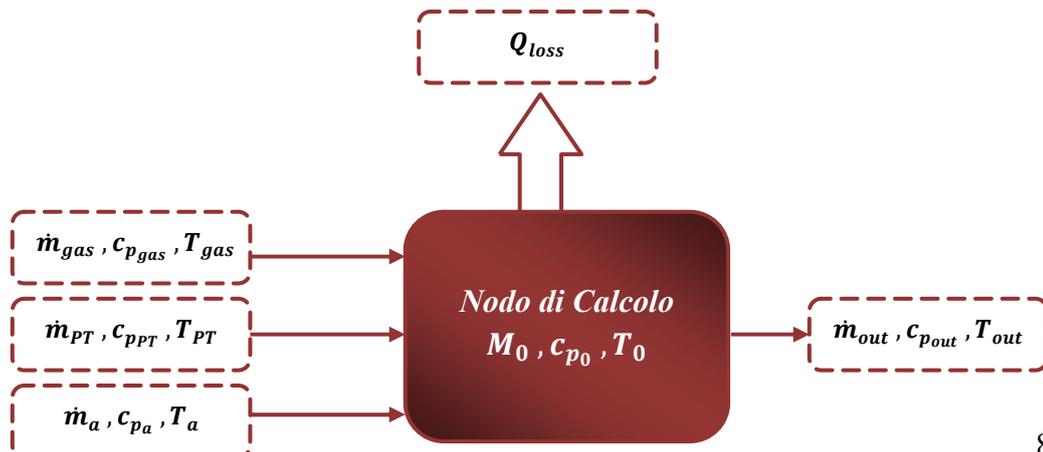
Determinato il valore del calore specifico in uscita dal nodo, mediante la relazione (3.74), è possibile valutare la temperatura totale " T_{out} " come:

$$T_{out} = \frac{(\dot{m}_{gas} c_{p_{gas}} T_{gas} + \dot{m}_{PT} c_{p_{PT}} T_{PT} + \dot{m}_a c_{p_a} T_a - Q_{loss}) dt + M_0 c_{p_0} T_0}{\dot{m}_{out} c_{p_{out}} dt + M_0 c_{p_{out}}} \quad (3.76)$$

Come accennato in precedenza, è necessario valutare il valore del Mach corrispondente al primo nodo di calcolo. Esso può essere valutato, con riferimento alla relazione (3.39), come:

$$\begin{aligned} \dot{m} & = \rho AV = \rho AM \sqrt{\gamma RT} \\ M_{NODO1} & = \left(\frac{\dot{m}}{\rho A \sqrt{\gamma RT}} \right)_{NODO1} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Essendo " T " la temperatura statica riferita al primo nodo, non nota a priori, è possibile utilizzare il valore di temperatura totale uscente dal nodo " T_{out} ". In tal modo viene introdotto un errore relativamente basso dovuto alla bassa velocità del flusso, perciò è possibile considerare " $T_0 \cong T$ ".



Mediante la valutazione del calore specifico in uscita dal nodo, attraverso una media pesata sulle portate massiche, è possibile inoltre valutare il rapporto dei calori specifici in uscita " γ_{out} " ed il peso molecolare " PM_{out} " della miscela di gas. Per cui:

$$\gamma_{out} = \frac{(\dot{m}_{gas} \gamma_{gas} + \dot{m}_{PT} \gamma_{PT} + \dot{m}_a \gamma_a) dt + M_0 \gamma_0}{\dot{m}_{out} dt + M_0} \quad (3.78)$$

$$PM_{out} = \frac{(\dot{m}_{gas} PM_{gas} + \dot{m}_{PT} PM_{PT} + \dot{m}_a PM_a) dt + M_0 PM_0}{\dot{m}_{out} dt + M_0} \quad (3.79)$$

3.2.4. Velocità di Ablazione delle Protezioni Termiche

Un ulteriore fenomeno, che dovrà essere preso in considerazione, è l'influenza delle Protezioni Termiche durante lo sviluppo del modello per la balistica interna di un razzo a propellente solido. Il modello che sarà preso in considerazione è un modello semi-empirico sviluppato presso AVIO-BPD denominato "*MAR (Material Affected Rate)*". Esso si concentra sulla determinazione della *Velocità di Ablazione delle Protezioni Termiche* mediante *fitting* di dati sperimentali i cui parametri dipendono dalle caratteristiche chimiche e strutturali della protezione termica in esame. Indicando con " B " il calore assorbito durante l'ablazione, per unità di volume, e con " Q " il flusso di calore incidente è possibile valutare la velocità di ablazione attraverso il seguente prodotto [18]:

$$MAR = B Q = B (Q_{conv} + Q_{rad}) \quad (3.80)$$

Mediante la relazione (3.13) è possibile esprimere la (3.80) come:

$$MAR = A + B Q_{conv} \quad (3.81)$$

dove " A " dipende dal flusso di calore per radiazione, quindi dipende dalla percentuale di alluminio presente nel grano propellente.

Come è possibile intuire, durante il contatto con i gas caldi, il materiale caratterizzante la protezione termica si degrada, come mostrato in figura 3.13, realizzando 3 zone principali con caratteristiche chimico-fisiche diverse fra loro [24]:

- *Zona di Materiale Vergine*: caratterizzato dalle stesse proprietà chimico-fisiche del materiale caratterizzante la protezione termica;
- *Zona di Reazione (o di Pirolisi)*: avviene la vera e propria ablazione del materiale in cui i gas, per effetto della sublimazione del materiale,

traspirano attraverso lo strato di char per immettersi in camera di combustione;

- *Zona di CHAR*: caratterizzato da proprietà chimico-fisiche diverse dal materiale vergine.



FIGURA 3.13: ZONE DELLA PROTEZIONE TERMICA

Per ottenere una relazione finale della velocità di ablazione è necessario considerare la temperatura di ablazione della protezione termica, la distribuzione della temperatura nello strato di *Char* e la regressione della protezione termica. Per tal motivo vengono considerate valide le seguenti ipotesi:

1. La *Temperatura di Ablazione* è costante e pari a 1100 K;
2. La distribuzione della temperatura nello strato di char è lineare:

$$T_{PT} = T_{abl} + \chi S \quad (3.82)$$

dove "S" è lo spessore di Char;

3. Lo spessore del char segue la legge temporale esponenziale semi-empirica:

$$S(t, Q) = S_0(1 - e^{-\eta t}) e^{-\xi Q_{conv}} \quad (3.83)$$

dove " S_0 " è lo spessore massimo di char, " η " è il tempo per cui S è il 63% di S_0 e " ξ " è il flusso di calore che comporta una formazione di char del 33%.

Mediante le seguenti ipotesi è possibile valutare la velocità di ablazione come:

$$MAR = A + BQ_{conv} [1 - C(1 - e^{-\eta t})]e^{-\xi Q_{conv}} \quad (3.84)$$

dove "Q" è il flusso di calore convettivo che incide sulla superficie di protezione termica, mentre i restanti termini sono forniti da AVIO-BPD. E' necessario sottolineare i limiti del modello semi-empirico, infatti esso non riesce a prevedere [24]:

- il rateo di ablazione nelle fasi transitorie essendo un modello stazionario;
- il profilo termico all'interno della protezione termica, come descritto in [18].

Inoltre la relazione (3.84) è valida per i seguenti valori di riferimento in camera di combustione:

<i>Pressione</i> p_0 [bar]	<i>Temperatura</i> T_0 [K]	<i>Coefficiente e Flusso termico Convettivo</i> <i>Costanti</i> h_{conv} e Q_{conv}
45	3200	<i>Costanti</i>

Nella realtà essendo i valori di pressione, temperatura e flusso termico convettivo variabili nel tempo, il suddetto modello introduce un'approssimazione sulla portata di ablazione delle protezioni termiche.

Sviluppato il modello mono-dimensionale stazionario è, quindi, nota la distribuzione della velocità della miscela di gas lungo la camera di combustione. Per tal motivo, come esposto nella sezione 3.1.2., è possibile valutare la potenza termica dissipata dal volume di controllo mediante la relazione (3.23).

3.3. Accoppiamento Modello 0D non Stazionario e Modello 1D Stazionario

Nel seguente paragrafo andremo ad illustrare lo schema di funzionamento logico dell'accoppiamento dei modelli Zero-Dimensionale non Stazionario e Mono-Dimensionale Stazionario. Con riferimento allo schema, mostrato in figura 3.14, è possibile osservare come il modello 1D Stazionario, per poter funzionare, necessita di condizioni iniziali forniti dal modello 0D non stazionario riferiti al passo temporale precedente.

La condizione iniziale fornita al modello 1D stazionario permette di valutare la distribuzione delle variabili termofluidodinamiche lungo la camera di combustione

mediante le relazioni ottenute nella sezione 3.2.2. Essendo le condizioni iniziali " p_0^t " e " T_0^t " valori totali, attraverso la relazione (3.67) è possibile valutare i valori statici di pressione e temperatura, in tal modo mediante le relazioni (3.68) e (3.69) è possibile ottenere la distribuzione di *Pressione e Temperatura Statica* lungo l'intera camera di combustione. E' necessario, perciò, la valutazione della distribuzione di Mach ottenuta mediante l'ipotesi di *Flusso di Tipo Semplice*.

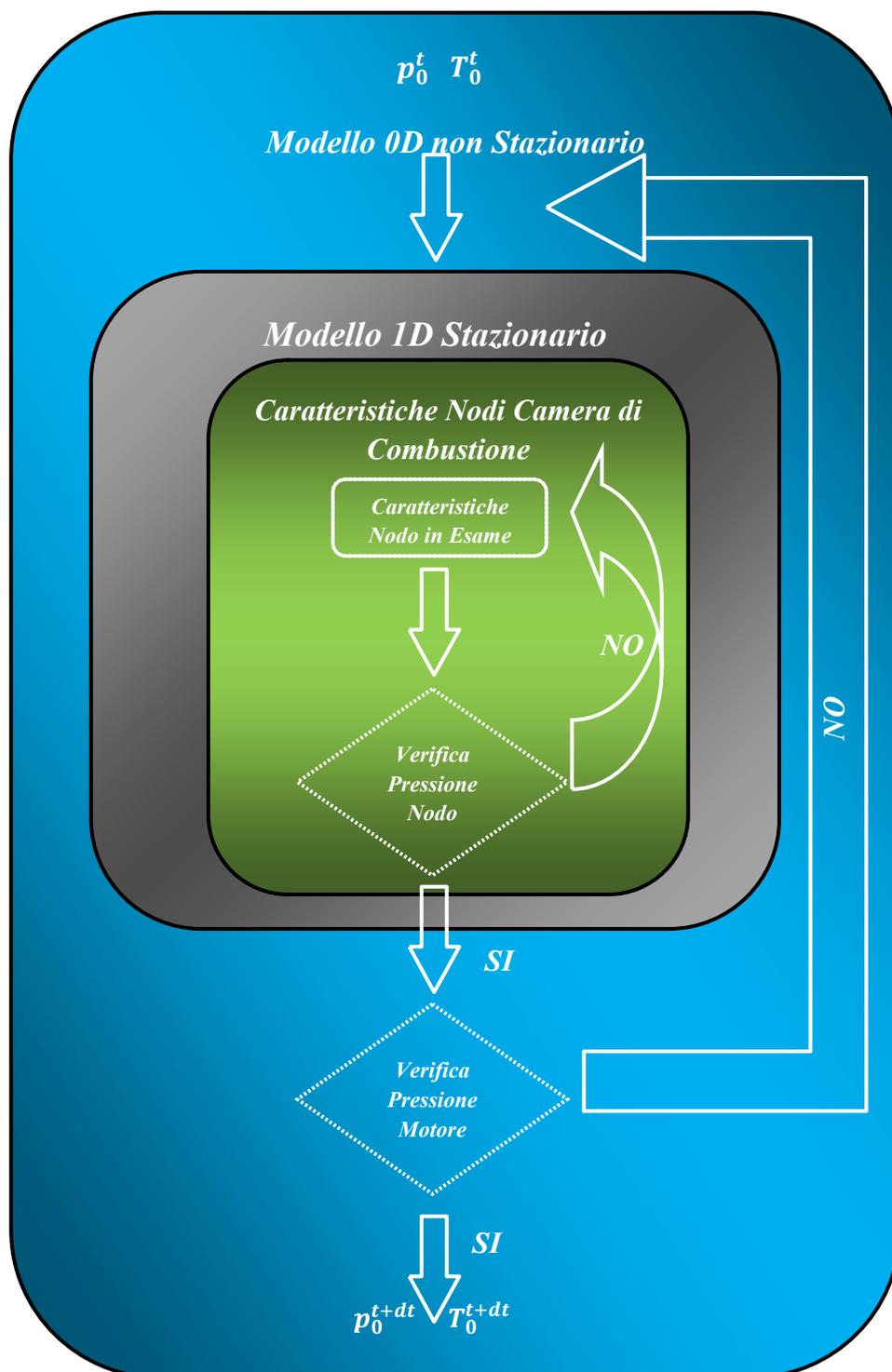


FIGURA 3.14: SCHEMA MODULO BALISTICO

Ogni singolo nodo caratterizzante la camera di combustione, come mostrato in figura 3.15, è suddiviso in 2 zone, una considera la variazione di Mach dovuto alla sola variazione di area e l'altra considera la variazione di Mach dovuta alla variazione di portata e temperatura totale. Mediante la relazione (3.66) è possibile, innanzitutto, valutare la variazione di Mach dovuta alla sola variazione di area, quindi ottenere il valore di pressione statica del nodo in esame. Successivamente, mediante le relazioni (3.71) e (3.72), è possibile valutare la variazione di Mach dovuta alla variazione di portata e temperatura totale. Affinché il valore di pressione statica in uscita sia corretto è necessario un ciclo di convergenza sulla pressione, come mostrato in figura 3.16, tale da ottenere i valori di portata e temperatura totale che influenzano il suddetto nodo.

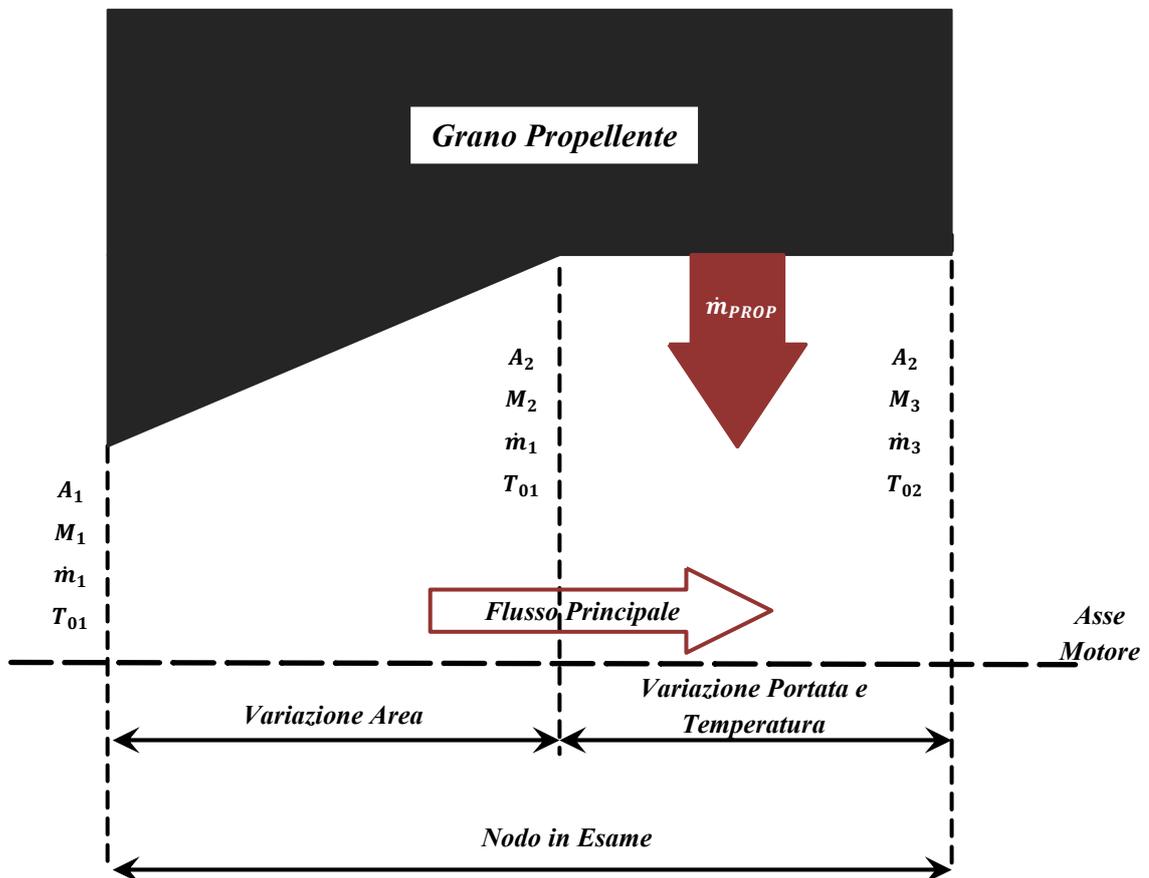


FIGURA 3.15: NODO DI CALCOLO

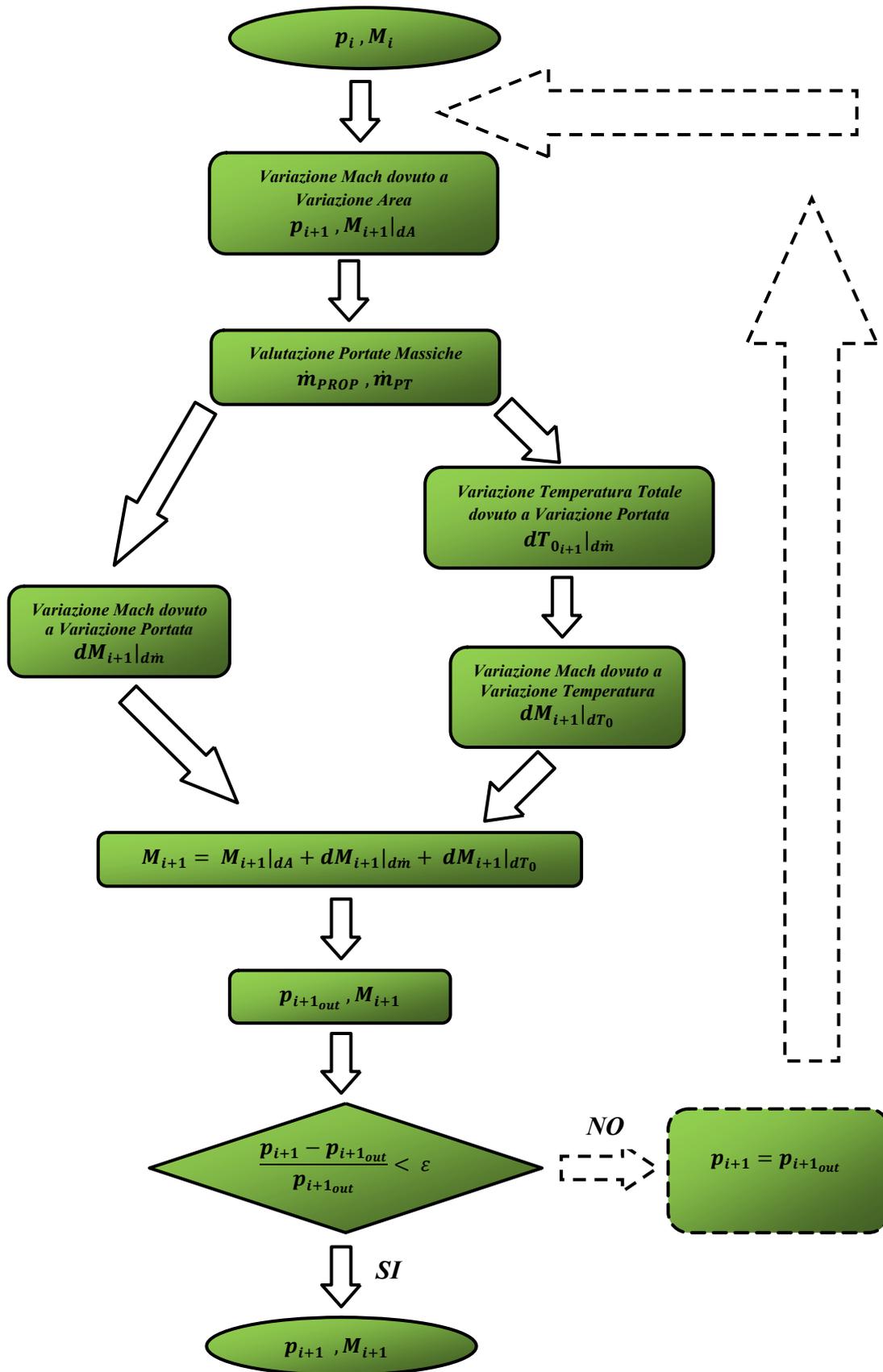


FIGURA 3.16: SCHEMA LOGICO NODO DI CALCOLO

Ottenuta la distribuzione di pressione statica, temperatura statica e Mach lungo la camera di combustione è necessario il confronto, come mostrato in figura 3.17, tra la pressione totale " p_{0D} ", fornita dal modello 0D non stazionario, e la pressione totale media " p_{0med} ", pesata sui rispettivi volumi, fornita dal modello 1D stazionario.

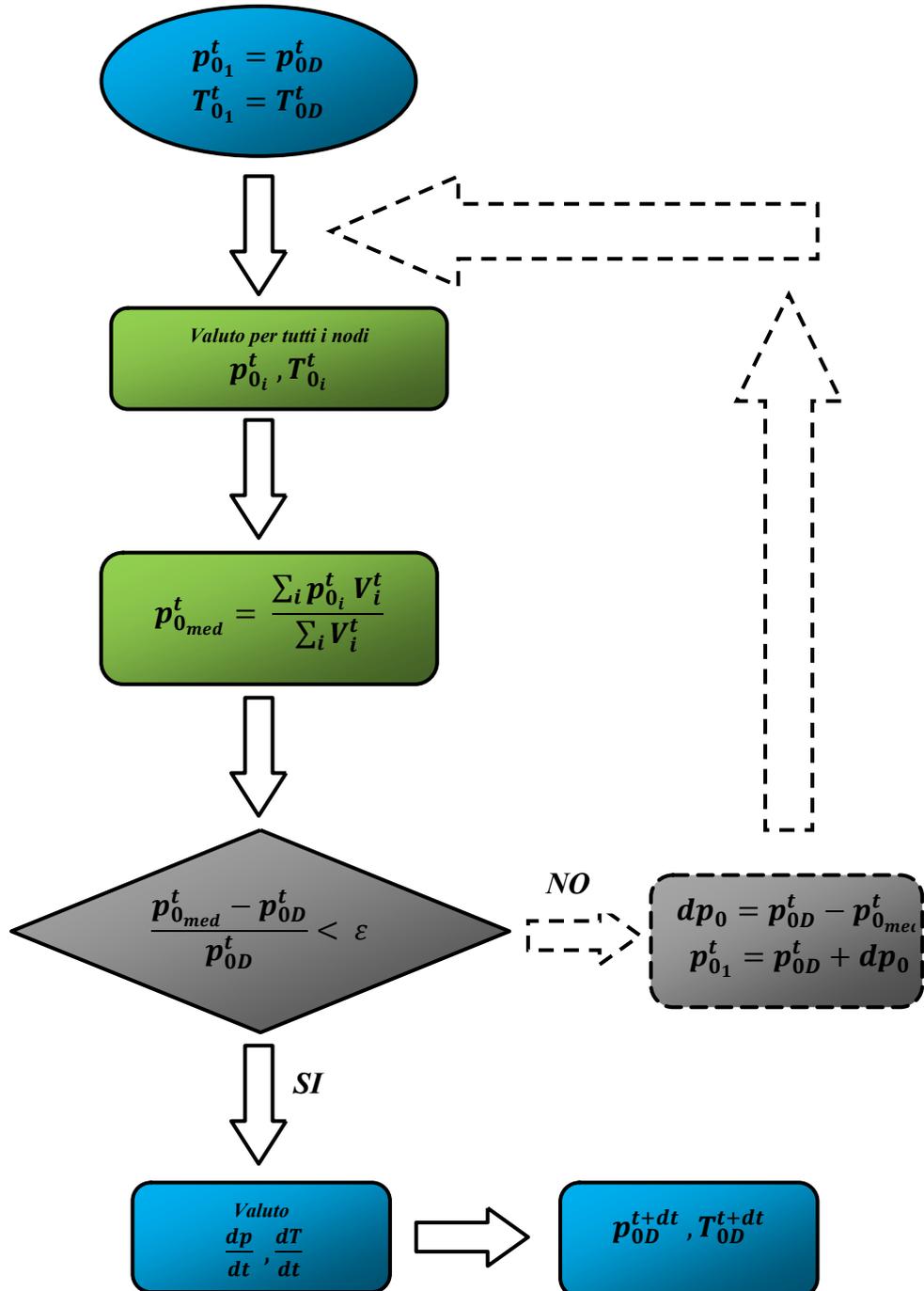


FIGURA 3.17: SCHEMA LOGICO CICLO MOTORE

Con l'ausilio del modello mono-dimensionale è possibile la valutazione, lungo la camera di combustione, di termini che, mediante il solo utilizzo del modello zero-

dimensionale, non erano valutabili. Infatti il principale vantaggio del modello 1D è la possibilità di valutazione:

- *del flusso termico su ciascun nodo e quindi la possibilità di valutare la portata di ablazione delle protezioni termiche;*
- *della velocità di combustione caratterizzata dal contributo erosivo e dal contributo di impingement dell'accenditore;*
- *dei profili di Mach, velocità, calore specifico, pressione, temperatura e densità statica.*

Oltre alla possibilità di valutare i termini sopra esposti, il modello 1D stazionario fornisce alcuni termini al modello 0D non stazionario, che compaiono nel sistema di equazioni differenziali, mostrati in verde nella relazione (3.85), come le varie portate massiche e la variazione di volume nel tempo " $dV/dt = \sum_{i=1}^n S_{b_i} r_{b_i}$ ".

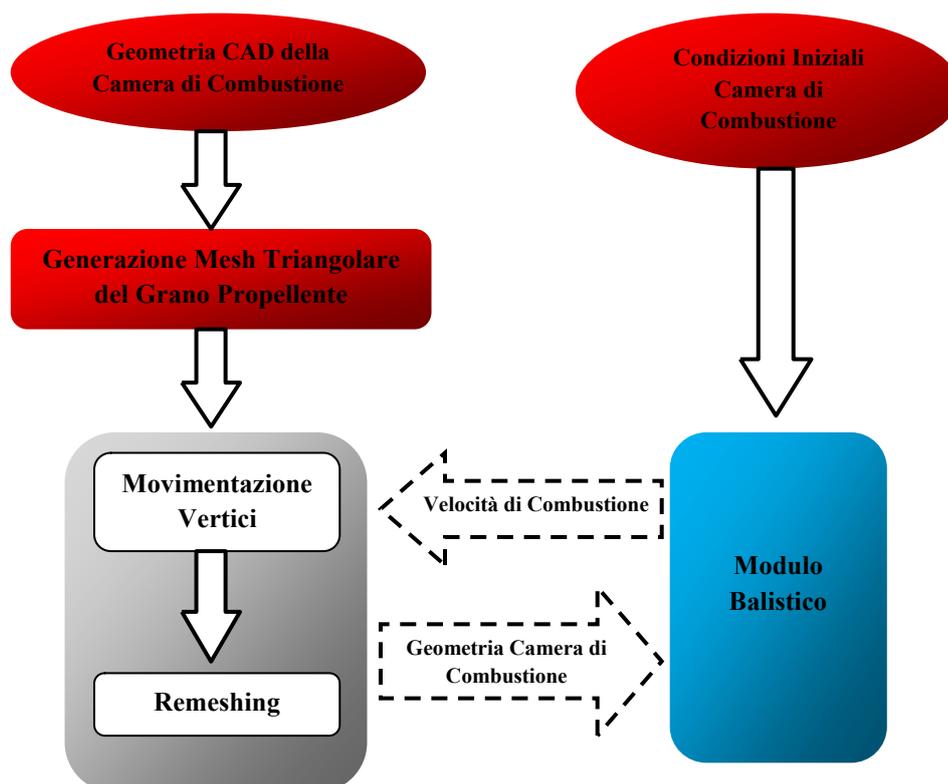
$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{R}{(c_p - R)V} \left[\dot{Q}_{loss} + \dot{m}_a c_{p_a} T_a + \dot{m}_p c_{p_p} T_p + \dot{m}_{pT} c_{p_{pT}} T_{pT} - \dot{m}_n c_{p_n} T_n - \frac{(c_p - R)}{R} p \frac{dV}{dt} \right] \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho R V} \left[V \frac{dp}{dt} + p \frac{dV}{dt} - \frac{p}{\rho} (\dot{m}_a + \dot{m}_p + \dot{m}_{pT} - \dot{m}_n) \right] \end{cases} \quad (3.85)$$

4. Accoppiamento Modulo Balistico e Simulatore di Regressione

Il *Modello per la Balistica Interna*, formulato nel capitolo 3, dovrà essere accoppiato con il *Simulatore di Regressione Superficiale* realizzando un *Simulatore Completo* del processo di combustione di razzi a propellente solido. Nel seguente capitolo andremo ad analizzare l'integrazione dei 2 moduli, quindi i dati in ingresso necessari al corretto funzionamento del simulatore completo.

Inizialmente andremo ad analizzare i dati in uscita dal simulatore di regressione necessari alla valutazione delle caratteristiche geometriche mono-dimensionali della camera di combustione, così da fornire i dati di ingresso necessari al modulo balistico per prevedere le variabili termofluidodinamiche di interesse, nonché valutare la *Velocità di Combustione* che sarà fornita al simulatore di regressione necessaria alla movimentazione dei vertici della mesh, rappresentante la superficie del grano propellente.

In figura 4.1 è possibile osservare uno schema a blocchi rappresentante la struttura del simulatore di regressione, nonché l'interfaccia con il modulo per la balistica interna.



4.1. Rappresentazione della Geometria

Il simulatore di regressione ha lo scopo di riprodurre la regressione del grano propellente, rappresentato mediante mesh superficiale triangolare chiusa, applicando opportuni vettori di spostamento ai vertici caratterizzanti la mesh triangolare [29].

La mesh triangolare è ottenuta attraverso un qualsiasi software agli elementi finiti purché venga esportata utilizzando una *Matrice dei Vertici*, contenente le coordinate di ciascun vertice, ed una *Matrice di Triangolazione*, contenente i vertici che costituiscono ciascun triangolo.

Per comprendere meglio la rappresentazione della mesh triangolare, di seguito viene rappresentato un esempio bidimensionale di 2 triangoli:

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0.5 & 1 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

dove " \mathcal{V} " e " \mathcal{T} " rappresentano la matrice dei vertici e dei triangoli, rispettivamente. Ogni riga della matrice \mathcal{V} rappresenta il numero del nodo, mentre ogni riga della matrice \mathcal{T} rappresenta il numero del triangolo. Il risultato delle matrici (4.1) è riportato in figura 4.2.

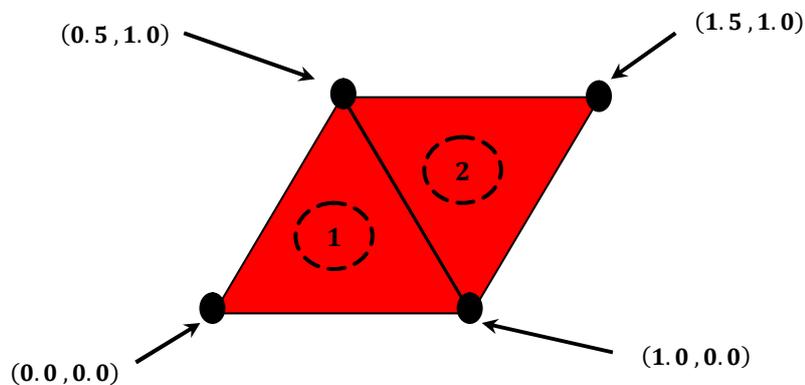


FIGURA 4.2: ESEMPIO MATRICI DI TRIANGOLAZIONE

4.2. Identificazione della Superficie di Combustione

Come esposto precedentemente, la mesh triangolare rappresenta la superficie del grano propellente. Innanzitutto è necessario identificare i triangoli che costituiscono la superficie di combustione ed i triangoli in contatto con il case del motore, detti "*Inibiti*".

Per poter definire i vari triangoli è necessario definire quali triangoli sono esposti alla combustione e quali sono inibiti. Per tal motivo viene definito "*Triangolo Inibito*" quel triangolo avente le coordinate dei vertici uguali a quelli del case, mentre viene definito "*Triangolo Esposto*" quel triangolo avente le coordinate dei vertici sufficientemente distanti dalle coordinate del case. In figura 4.3 è rappresentata la differenza delle 2 superfici della mesh.

E' necessario sottolineare che il simulatore di regressione andrà a movimentare i vertici dei soli triangoli esposti alla combustione.

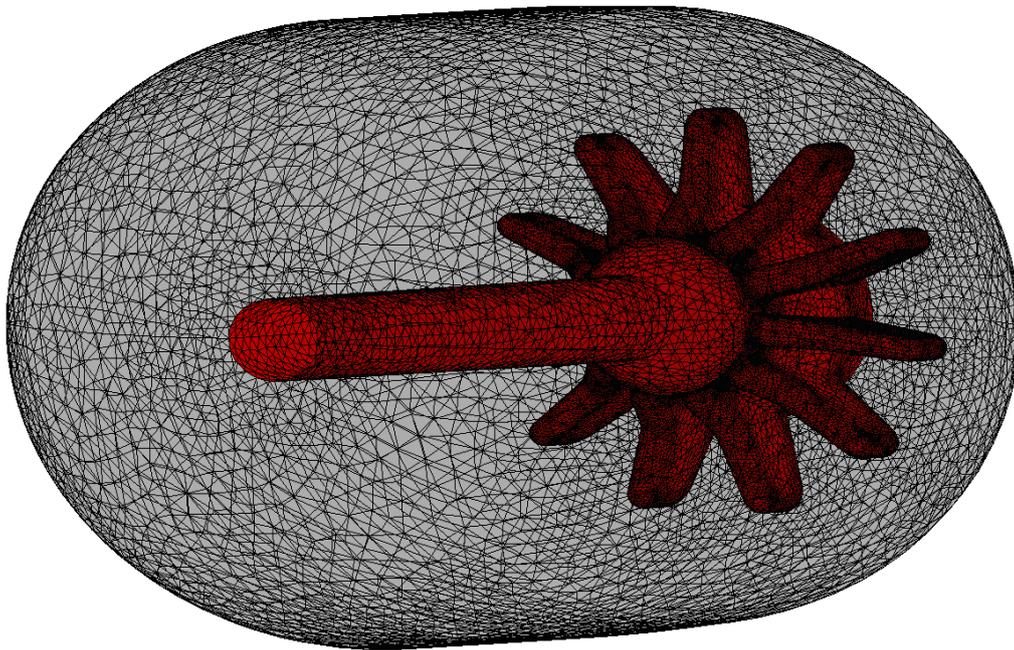


FIGURA 4.3: MESH SUPERFICIALE GRANO PROPELENTE. ROSSO: TRIANGOLI ESPOSTI IN COMBUSTIONE. GRIGIO: TRIANGOLI INIBITI

4.3. Simulatore di Regressione

Il simulatore di regressione necessita in ingresso di una configurazione iniziale del grano propellente all'interno della camera di combustione che, mediante un software agli elementi finiti, genera una mesh triangolare simulando, così, il grano propellente, come mostrato in figura 4.3 [30].

Successivamente per la movimentazione dei vertici della suddetta mesh è necessaria la conoscenza della velocità di combustione lungo l'intera camera di combustione, fornita dal modulo balistico. Essendo il numero di vertici, caratterizzanti la mesh, molto maggiore rispetto alla discretizzazione spaziale assunta dal modulo balistico è necessaria una interpolazione dei dati al fine di evitare la generazione di "*Gradini*"

nel grano propellente. In figura 4.4 è rappresentato un classico andamento della velocità di combustione atta alla movimentazione dei vertici della mesh.

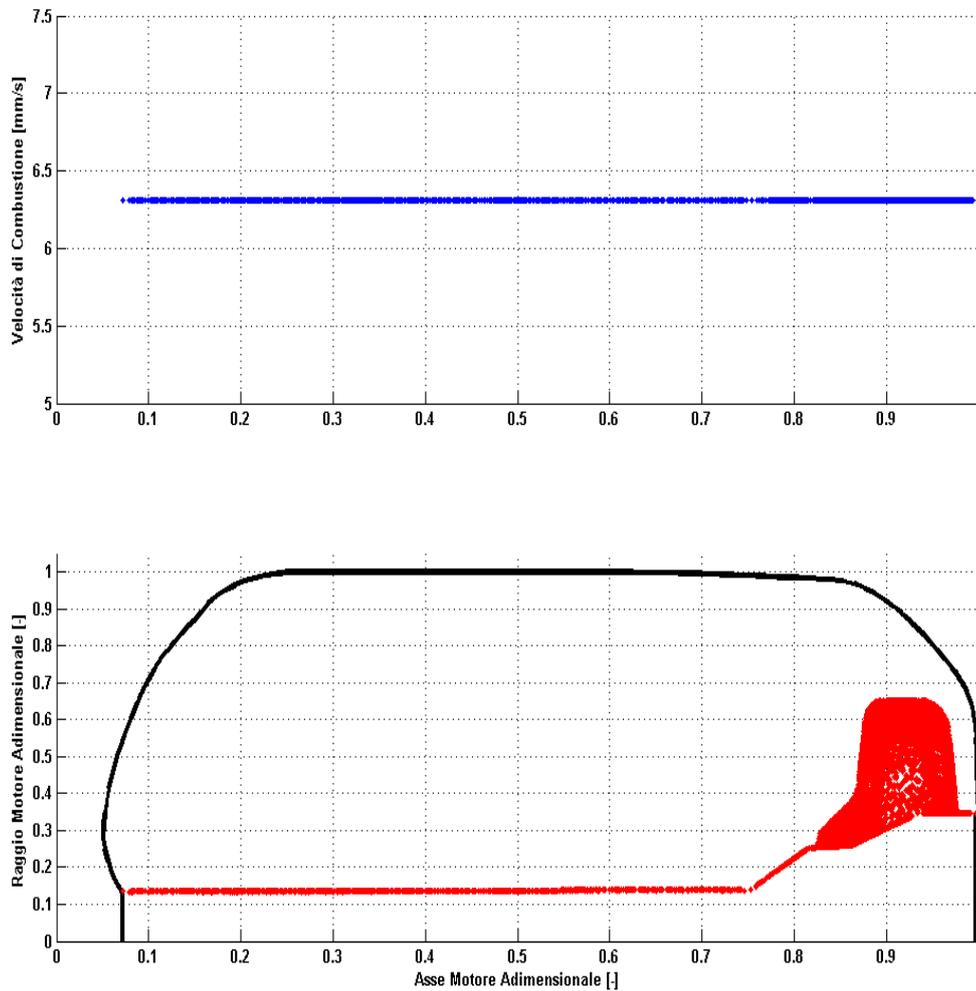


FIGURA 4.4: PROFILO VELOCITÀ DI COMBUSTIONE DEI VERTICI DELLA MESH

Mediante il seguente ciclo di movimentazione, è possibile movimentare, ad ogni istante temporale, i vertici caratterizzanti la mesh triangolare, causando una variazione delle caratteristiche geometriche della camera di combustione, come mostrato in figura 4.5. Per tal motivo ad ogni passo di integrazione è necessaria un'estrapolazione dei dati geometrici necessari al modello mono-dimensionale stazionario per la previsione delle variabili termofluidodinamiche di interesse.

E' necessario osservare che, per endoreattori che presentano rapporti L/D_h elevati, la velocità di combustione varia lungo l'asse motore. Nel seguente lavoro di tesi avendo a disposizione dati riguardanti lo *Zefiro 9*, che presenta bassi valori di *Lunghezza-Diametro Idraulico*, il contributo erosivo dovuto alla velocità della miscela di gas

può essere trascurato, perciò la velocità di combustione può essere assunta costante lungo l'asse motore.

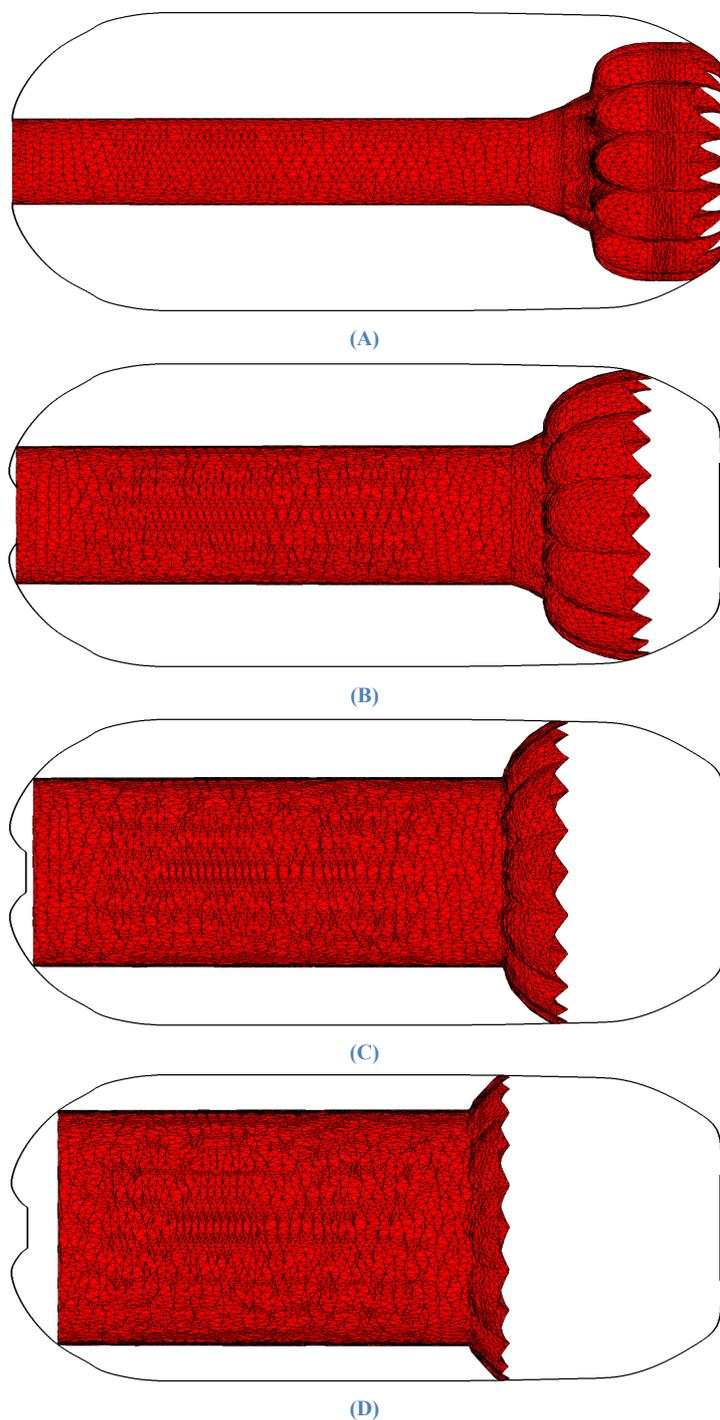


FIGURA 4.5: VARIAZIONE CAMERA DI COMBUSTIONE NEL TEMPO. (A) 10 SECONDI, (B) 40 SECONDI, (C) 70 SECONDI, (D) 100 SECONDI

4.4. Estrapolazione delle Caratteristiche Geometriche della Camera di Combustione

Come accennato precedentemente, mediante i dati in uscita dal simulatore di regressione è possibile valutare le caratteristiche geometriche necessarie al modulo balistico per la previsione delle variabili termofluidodinamiche di interesse, pertanto è necessaria la valutazione di:

- *Area di Porta del Canale;*
- *Volume dei Singoli Nodi;*
- *Superficie di Combustione;*
- *Superficie di Protezione Termica Esposta.*

Per poter valutare le seguenti variabili geometriche è necessaria la discretizzazione della camera di combustione. Nel seguente lavoro di tesi si è scelto di indicare con il termine "Nodo" quei volumi di controllo ottenuti mediante la discretizzazione della camera di combustione. In figura 4.6 sono rappresentati in blu i Nodi, mentre in verde le sezioni di discretizzazione.

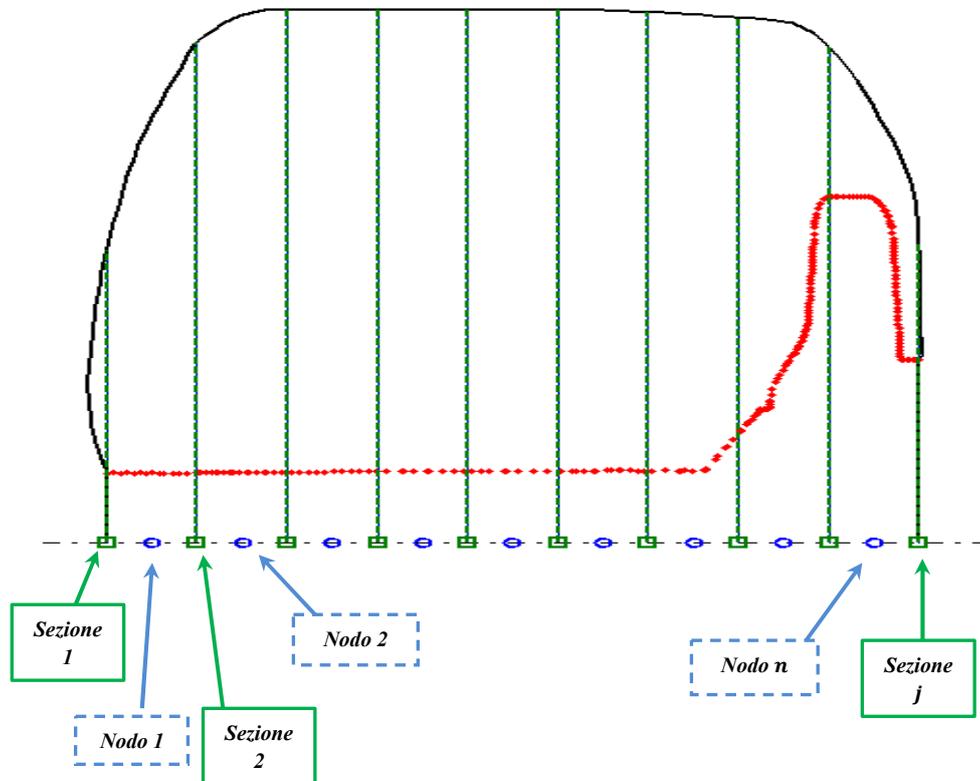


FIGURA 4.6: VOLUMI DI CONTROLLO CAMERA DI COMBUSTIONE

Bisogna osservare come il *nodo 1* si riferisca al *volume di controllo 1*, il *nodo 2* al *volume di controllo 2* e così via.

4.4.1. Area di Porta del Canale

La geometria del canale in cui scorre il flusso, costituita dalla cavità ricavata all'interno del grano propellente, detto "*Bore*", e dalla geometria del case, varia nello spazio e nel tempo. Durante la regressione del propellente è possibile osservare come le pareti del case vengano scoperte determinando la geometria locale del canale in cui scorre la miscela di gas. Per poter valutare l'area di porta del canale è necessaria una function dedicata, adatta alla valutazione dell'intersezione tra la sezione di discretizzazione e la superficie del grano propellente o la superficie del case, come mostrato in figura 4.7.

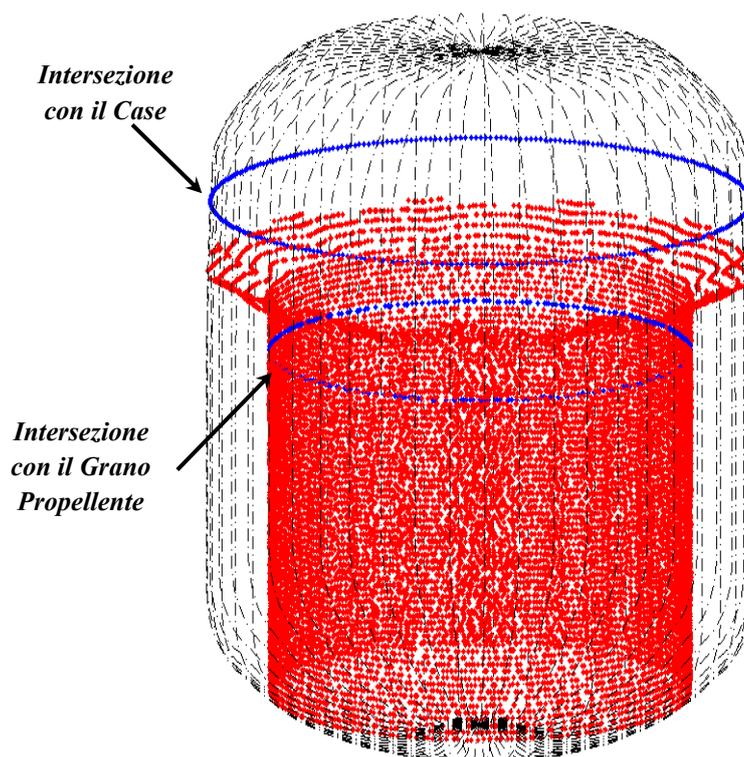


FIGURA 4.7: INTERSEZIONE GRANO PROPELLENTE E CASE

Ottenute le coordinate di intersezione con la mesh rappresentate la superficie del grano propellente, o con la superficie del case, è possibile ricavare un *Raggio Medio*, quindi l'area di porta mediante la semplice area del cerchio:

$$A_{bore_j} = \pi r_{m_j}^2 \quad (4.2)$$

dove il pedice "j" indica le varie sezioni di passaggio. Attraverso il seguente procedimento è possibile ottenere l'andamento dell'area di porta ad ogni istante temporale.

4.4.2. Volume dei Singoli Nodi

Un ulteriore parametro geometrico necessario al modello per la balistica interna è il *Volume* di ogni singolo nodo. Infatti esso è utilizzato durante il ciclo di convergenza sulla pressione totale del motore, come descritto nella sezione 3.3.

Il volume associato all'*n-esimo* nodo è ricavato attraverso il volume del tronco di cono quindi:

$$V_n = \frac{1}{3} \pi \Delta x \left(r_{m_{j+1}}^2 + r_{m_j} r_{m_{j+1}} + r_{m_j}^2 \right) \quad (4.3)$$

dove il pedice *n* indica il numero del nodo e il pedice *j* indica il numero della sezione di discretizzazione. Mentre " Δx " è la lunghezza di ogni singolo nodo, che risulta costante se la discretizzazione spaziale della camera di combustione è equispaziata.

In figura 4.8 è rappresentato l'andamento del volume di controllo di ogni nodo caratterizzante la camera di combustione.

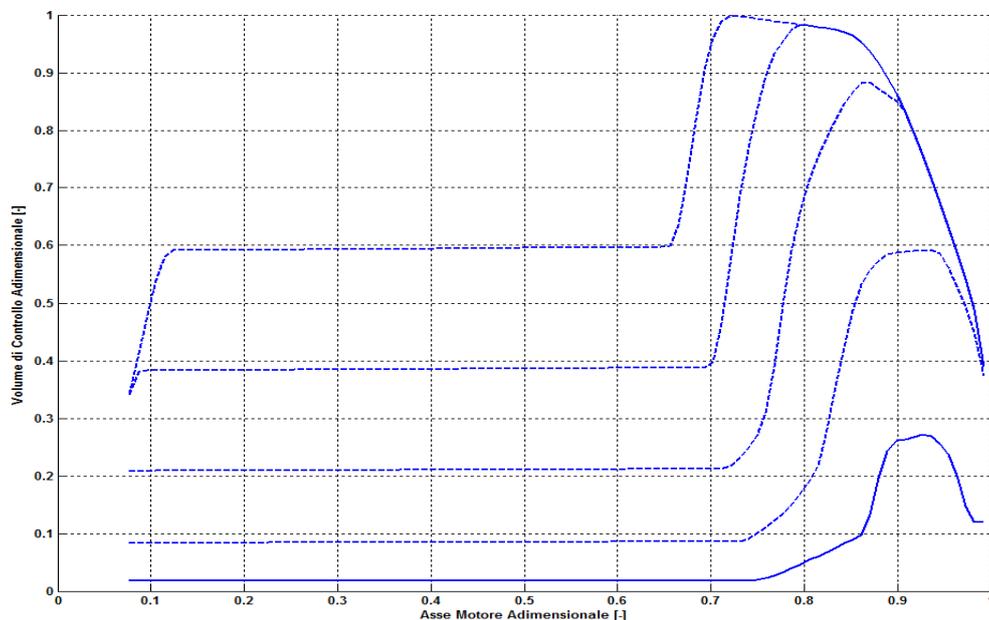


FIGURA 4.8: ANDAMENTO VOLUME DI CONTROLLO LUNGO LA CAMERA DI COMBUSTIONE

Con riferimento alla figura 4.8 è possibile osservare come, all'aumentare del tempo di propulsione, quindi alla regressione del grano propellente, i volumi di controllo aumentino.

4.4.3. Superficie di Combustione

Un parametro indispensabile per il modello di balistica interna è la superficie di combustione del grano propellente. La *Superficie di Combustione Totale* è ottenuta mediante la somma di tutte le aree della mesh triangolare soggette alla combustione. Essendo il modulo balistico composto da un modello mono-dimensionale è necessario a tal proposito ottenere una distribuzione delle superfici di combustione. Considerando l'*n-esimo* nodo, delimitato dalle sezioni di discretizzazione j e $j+1$, è possibile associare al volume di controllo dell'*n-esimo* nodo la superficie di combustione ottenuta mediante la somma dei triangoli in combustione compresi tra le sezioni j e $j+1$, come mostrato in figura 4.9.

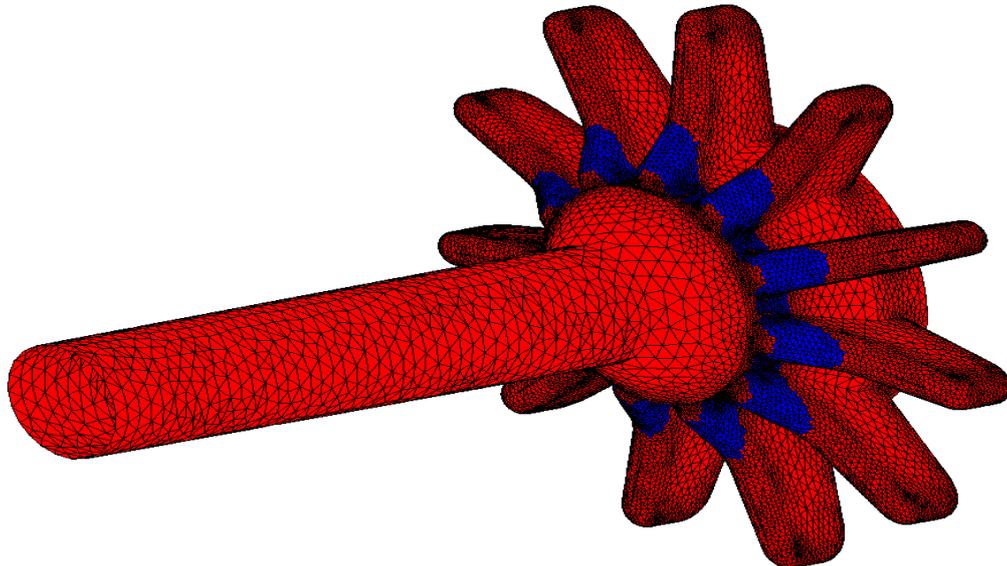


FIGURA 4.9: SUPERFICIE DI COMBUSTIONE COMPRESO TRA 2 SEZIONI

Essendo il triangolo della mesh composto da 3 vertici, come esposto nella sezione 4.1, è possibile che non tutti ricadano tra le sezioni j e $j+1$. Per tal motivo non è possibile associare l'intera area del triangolo al nodo *n-esimo*, per cui si può associare a ciascun vertice del triangolo " $1/3$ " dell'area del triangolo, come mostrato in figura 4.10.

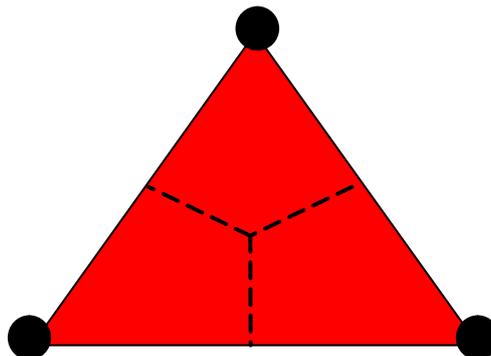


FIGURA 4.10: SUDDIVISIONE AREA DI UN TRIANGOLO

In definitiva attraverso i seguenti accorgimenti è possibile ottenere una distribuzione della superficie di combustione lungo la camera di combustione, rappresentato in figura 4.11.

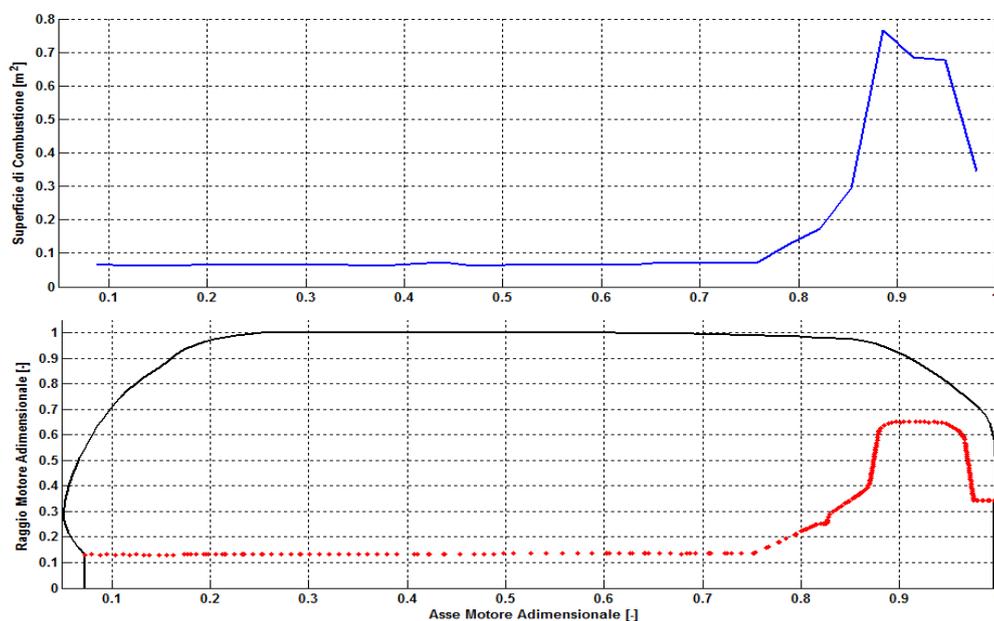


FIGURA 4.11: DISTRIBUZIONE SUPERFICIE DI COMBUSTIONE

Con riferimento alla figura 4.11 è possibile osservare un aumento della superficie di combustione corrispondente al tratto di configurazione a stella del grano propellente. E' necessario sottolineare che l'ipotesi di assegnare a ciascun nodo $\frac{1}{3}$ dell'area del triangolo causa un'oscillazione sulla distribuzione della superficie di combustione lungo l'asse motore.

4.4.4. Superficie di Protezione Termica

L'ultimo parametro necessario al modulo balistico è la valutazione della superficie di protezione termica esposta ai gas caldi. Mediante tale parametro è possibile determinare il calore dissipato e la portata di protezioni termiche ablata, che contribuiscono alla valutazione dei parametri termofluidodinamici. Nel seguente caso si è innanzitutto valutata la superficie totale di protezione termica mediante il "*Primo Teorema di Pappo Guldino*". Tale teorema afferma che l'area di una superficie di rotazione ottenuta mediante una curva piana di un angolo $\alpha \in [0, 2\pi]$, che nel nostro caso sarà il profilo del case, attorno ad un asse ad esso esterno e complanare è pari a:

$$A = \alpha d l \quad (4.4)$$

dove " d " è la distanza del baricentro del profilo del case all'asse ed " l " è la lunghezza del profilo del case.

Come fatto nella sezione 4.2.3., è necessario valutare la distribuzione della superficie di protezione termica esposta ai gas caldi lungo la camera di combustione. Per tal motivo, mediante le sezioni di discretizzazione della camera di combustione, è possibile utilizzare il 1° teorema di Pappo Guldino per ogni segmento caratterizzante il profilo del case, ottenendo così la distribuzione delle superfici nel caso in cui le protezioni termiche siano completamente esposte, come mostrato in figura 4.12.

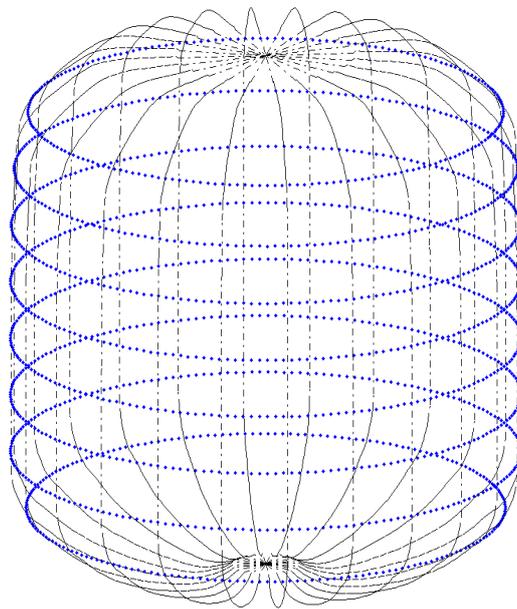


FIGURA 4.12: DISCRETIZZAZIONE SUPERFICI PROTEZIONE TERMICHE TOTALMENTE ESPOSTE

Durante la fase operativa del motore, la regressione del grano propellente provoca un continuo aumento delle superfici di protezione termica esposta, perciò è necessario valutare ad ogni istante temporale la loro distribuzione. Considerando l' n -esimo nodo delimitato dalle sezioni j e $j+1$, essendo nota la distribuzione della superficie di protezione termica, nel caso in cui sia totalmente esposta, è possibile assegnare all' n -esimo nodo la porzione di superficie di protezione termica esposta mediante l'intersezione tra le sezioni di discretizzazione ed il profilo del case. Nel caso in cui l'intersezione avvenga con il grano propellente è possibile valutare l'intersezione del grano propellente con il profilo del case e, mediante la superficie laterale del tronco di cono (4.5), si potrà ricavare la superficie di protezione termica esposta che sarà associata al nodo in esame, come mostrato in figura 4.13.

La superficie laterale del tronco di cono è dato dalla seguente relazione:

$$S_{PT_n} = \pi (r_{int} + r_j) \sqrt{h^2 + (r_j - r_{int})^2} \quad (4.5)$$

dove " r_{int} " è il raggio di intersezione tra grano propellente e case, " r_j " è il raggio di intersezione tra la sezione j e il profilo del case e " h " è la distanza assiale tra le 2 intersezioni.

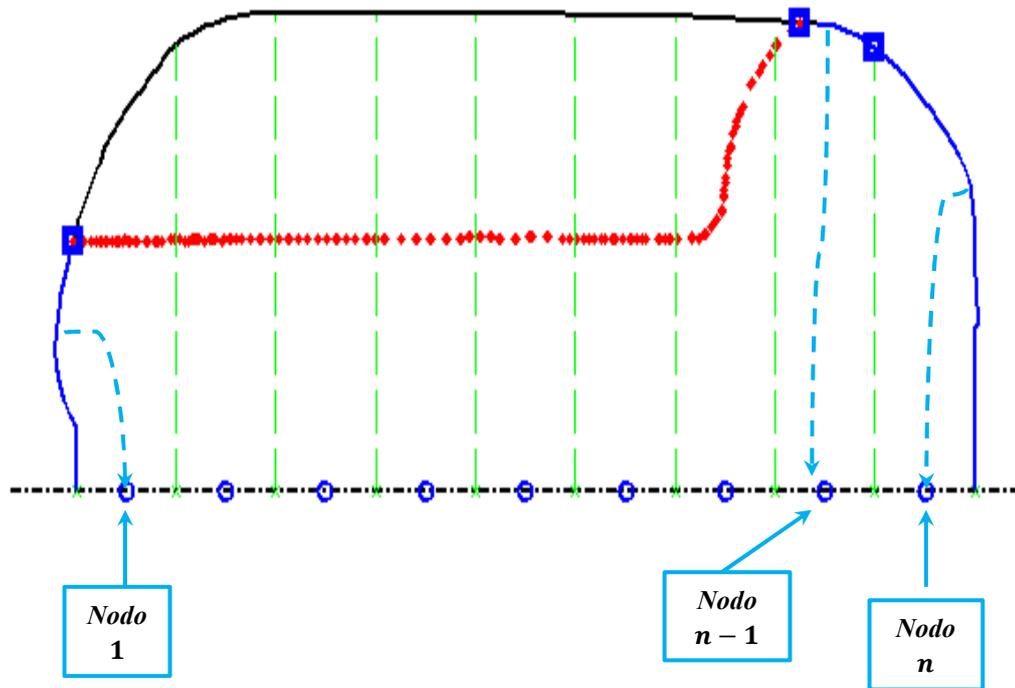


FIGURA 4.13: SUPERFICIE PROTEZIONE TERMICA ASSOCIATA A CIASCUN NODO

Con riferimento alla figura 4.13 è possibile osservare come al *nodo 1* e al *nodo n* venga assegnato la porzione di protezione termica esposta ottenuta mediante il teorema di Pappo Guldino, mentre la superficie di protezione termica che viene assegnata al *nodo n - 1* è ottenuta mediante l'intersezione tra il grano propellente e il profilo del case, perciò ottenuta mediante la relazione (4.5).

5. Validazione del Modello Balistico e Risultati Ottenuti

Nel seguente capitolo andremo ad analizzare i risultati ottenuti mediante l'implementazione del *Modello Zero-Dimensionale non Stazionario* e l'accoppiamento dei *Modelli 0D non Stazionario e 1D Stazionario*.

Mediante i dati sperimentali, forniti da AVIO-BPD, riguardanti il terzo stadio del vettore VEGA, denominato "Zefiro 9", è possibile validare il modello 0D non stazionario in quanto presenta bassi valori di *Lunghezza-Diametro Idraulico*, quindi cadute di pressione tra testa del motore e sezione di ingresso dell'ugello trascurabili. Inoltre, attraverso il confronto di varie tecniche di integrazione numerica, sarà possibile scegliere un metodo di integrazione in funzione alla precisione della soluzione e al tempo di calcolo. In seguito, mediante accoppiamento con il *Simulatore Di Regressione Superficiale*, sarà possibile confrontare i risultati ottenuti con i valori sperimentali.

Successivamente, come fatto per il modello 0D non stazionario, sarà possibile effettuare la validazione dell'accoppiamento fra i modelli 0D non stazionario e 1D stazionario, come esposto nel capitolo 3. Essendo il motore in esame caratterizzato da bassi valori di *Lunghezza-Diametro Idraulico* sarà possibile confermare la bassa caduta di pressione lungo la camera di combustione.

In mancanza di dati relativi a endoreattori con elevati rapporti L/D_h tale da ottenere una variazione significativa lungo la camera di combustione, sarà effettuata una validazione qualitativa della distribuzione delle variabili termofluidodinamiche lungo la camera di combustione considerando un SRM con elevato rapporto L/D_h , caratterizzato da un condotto tronco-conico.

5.1. Validazione Modello 0D non Stazionario

Nel seguente paragrafo andremo ad effettuare la validazione del *Modello 0D non Stazionario* mediante varie tecniche di integrazione numerica, come i *Metodi di Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg*, esposte nella sezione 3.1.3.

Per l'implementazione del suddetto modello è stato utilizzato il software commerciale MATLAB. Esso contiene al suo interno alcune funzioni *odesuite* capaci di integrare numericamente le equazioni del modello (3.3) ad ogni istante temporale. I dati necessari alla validazione del modello in esame, tra cui l'andamento della pressione e del volume in camera di combustione, le proprietà del propellente, la variazione della sezione di gola dell'ugello e le caratteristiche del flusso in uscita dall'accenditore, sono forniti da AVIO-BPD. Mediante i seguenti dati è possibile validare e confrontare i vari metodi di integrazione numerica con l'obiettivo di ridurre il tempo di calcolo con bassi errori percentuali.

I vari metodi che saranno presi in considerazione sono:

- *Metodo di Runge-Kutta del 4° Ordine;*
- *Metodo di Runge-Kutta-Fehlberg del 4° Ordine;*
- *2 funzioni odesuite di MATLAB, "ode45" e "ode113".*

5.1.1. Integrazione Numerica Runge-Kutta del 4° Ordine

Il metodo Runge-Kutta preso in considerazione nel seguente lavoro di tesi è un metodo esplicito del 4° ordine. Come esposto nella sezione 3.1.3., il suddetto metodo approssima la soluzione all'istante di tempo successivo mediante la combinazione lineare di 4 coefficienti valutati mediante la relazione (3.30).

Implementato il modello zero-dimensionale non stazionario mediante l'integrazione del sistema di equazioni differenziali con il metodo di Runge-Kutta del 4° ordine, utilizzando i dati forniti da AVIO-BPD, è stato possibile validare il modello in esame attraverso il confronto tra l'andamento di pressione sperimentale e simulato, in funzione del tempo, come mostrato in figura 5.1.

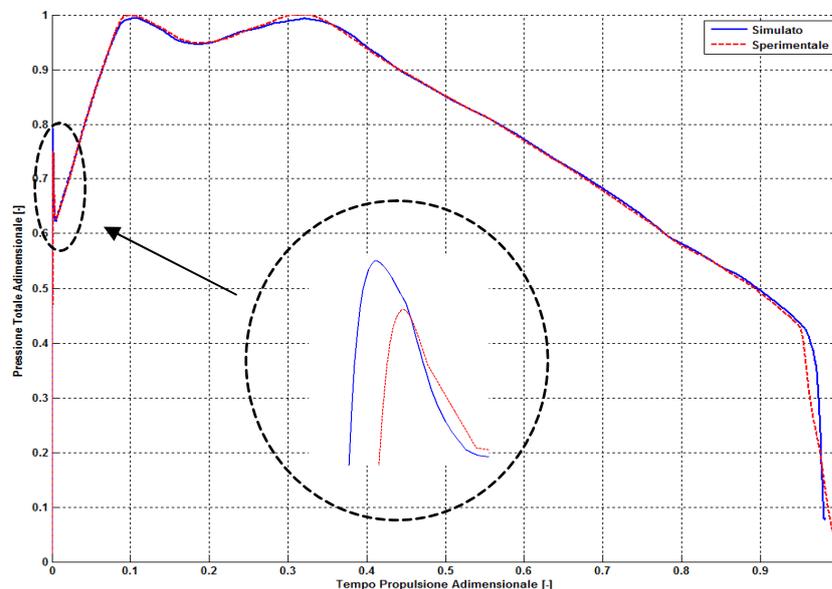


FIGURA 5.1: CONFRONTO PRESSIONE CON METODO RUNGE-KUTTA

Dalla suddetta figura è possibile osservare come il codice implementato per la previsione della pressione in funzione del tempo di propulsione segue, in modo qualitativo, l'andamento di pressione sperimentale, principalmente nella fase di Quasi-Steady State. La differenza nelle fasi di Transient Ignition e Tail Off sono causati principalmente dall'ipotesi che il grano propellente sia completamente in combustione, per il Transient Ignition, e completamente consumato, per il Tail Off. Nella realtà è possibile che, nel Transient Ignition, una parte della superficie di combustione non sia accesa con conseguente riduzione della pressione, mentre, nel Tail Off, è possibile che avvenga, durante la fase operativa del motore, un maggior consumo di propellente in alcune regioni della camera di combustione causando lo spegnimento anticipato.

5.1.2. Integrazione Numerica Runge-Kutta-Fehlberg

Il metodo di Runge-Kutta-Fehlberg preso in considerazione è un metodo esplicito del 4° ordine. Esso utilizza, come esposto nella sezione 3.1.3., due metodi di Runge-Kutta a 6 stadi, di cui uno del 4° e l'altro del 5° ordine. A differenza del metodo di Runge-Kutta del 4° ordine che necessita un passo di integrazione fornito dall'esterno, il suddetto metodo ha la capacità di adattare il passo di integrazione numerica ottimizzando la precisione della soluzione e il tempo di calcolo.

Come fatto per il metodo di Runge-Kutta, esposto precedentemente, una volta implementato il codice nell'ambiente MATLAB è possibile validare il modello con il seguente metodo di integrazione. In figura 5.2 è rappresentato il confronto tra l'andamento della pressione sperimentale e quello simulato.

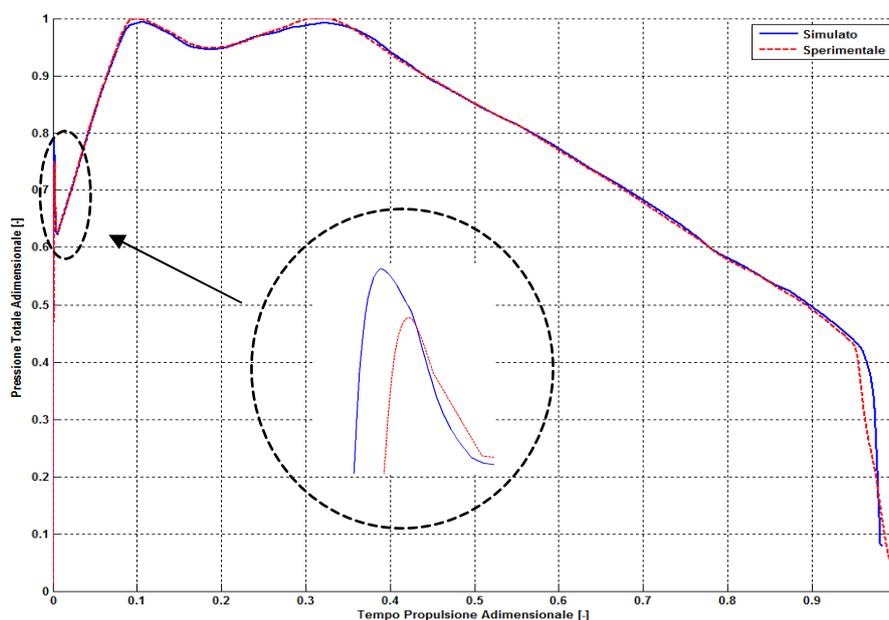


FIGURA 5.2: CONFRONTO PRESSIONE CON METODO RUNGE-KUTTA-FEHLBERG

Per quanto riguarda l'analisi qualitativa dell'andamento della pressione valgono le stesse considerazioni fatte per la figura 5.1.

E' necessario sottolineare che tale metodo fornisce una soluzione simile al metodo di Runge-Kutta ma con la capacità di definire l'errore massimo di pressione che si vuole commettere mediante la "Tolleranza", esposta nella sezione 3.1.3.

5.1.3. Integrazione con Funzioni "odesuite" di MATLAB

Le funzioni *odesuite*, presenti in MATLAB, prese in considerazione per l'integrazione numerica del sistema di equazioni differenziali (3.3) sono:

- *ode45*: è utilizzata come primo tentativo per la risoluzione di un problema. Esso è basato su schemi di Runge-Kutta di ordine 4 e 5;
- *ode113*: è basato su una formula Predictor-Corrector di tipo Adams-Moulton di ordine variabile ed inoltre provvede automaticamente a calcolare i primi passi necessari all'innesco del metodo multistep. Alcune volte, per particolare funzioni, può essere più efficiente di *ode45*.

I suddetti metodi di integrazione generalmente forniscono risultati precisi a discapito del tempo di calcolo. Mediante questi, nella sezione successiva, sarà possibile confrontare il livello di precisione ottenuto con i metodi Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg.

In figura 5.3 è rappresentato il confronto dell'andamento di pressione sperimentale con quello ottenuto attraverso il metodo di integrazione numerica *ode45* e *ode113*.

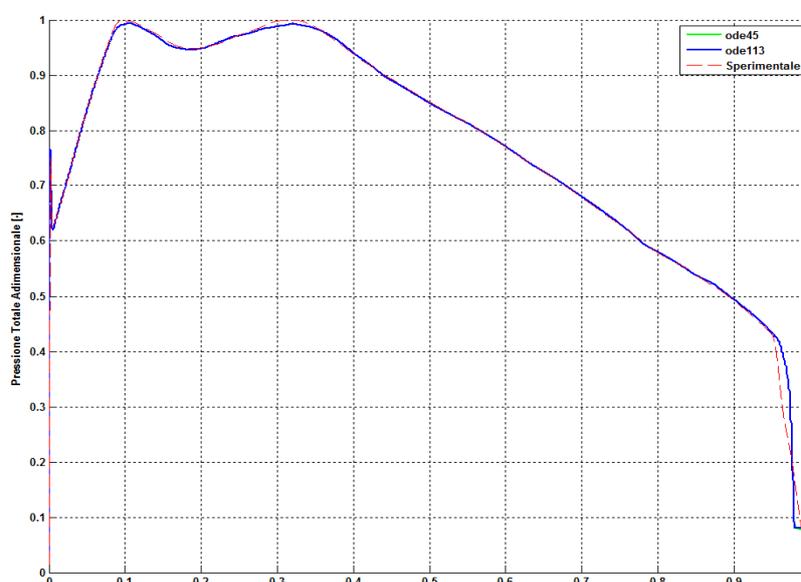


FIGURA 5.3: CONFRONTO PRESSIONE CON ODE45 E ODE113

Dalla suddetta figura è possibile osservare come l'andamento della pressione ottenuto con *ode45* e *ode113* sono qualitativamente identici. La differenza sostanziale, analizzata successivamente, è la riduzione del tempo di calcolo da parte di *ode113*. Inoltre per le discrepanze della pressione nelle fasi di Transient Ignition e Tail Off valgono le stesse considerazioni fatte precedentemente.

5.1.4. Confronto dei Metodi di Integrazione Numerica

Implementati i vari metodi di integrazione numerica delle equazioni di lavoro del modello 0D non stazionario è possibile confrontarli in base al tempo di calcolo ed alla loro precisione. Inizialmente si è deciso di analizzare il tempo di calcolo ed i relativi errori percentuali dei vari metodi mediante l'utilizzo di un passo di integrazione temporale costante nel tempo. Come mostrato in figura 5.4, si evidenzia come il metodo che riduce il tempo di calcolo è il metodo di Runge-Kutta.

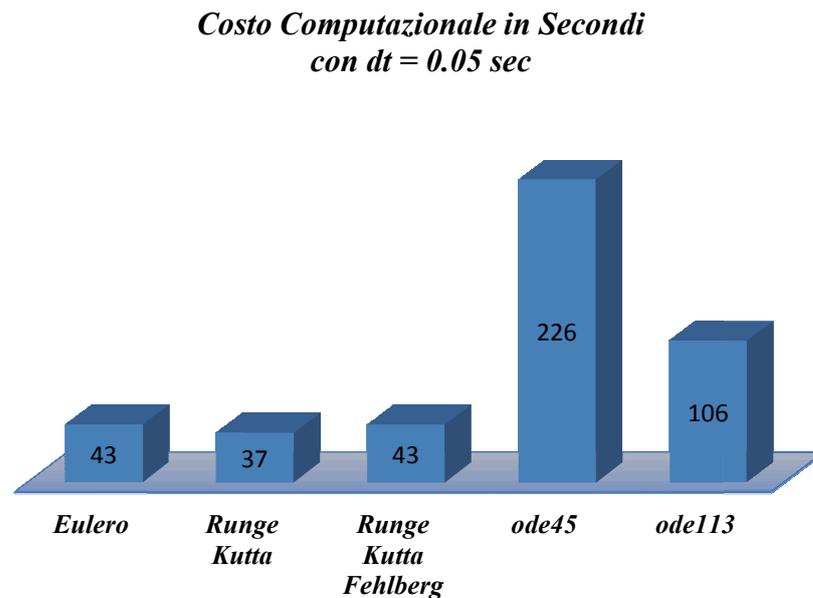


FIGURA 5.4: TEMPO DI CALCOLO CON PASSO DI INTEGRAZIONE COSTANTE

E' necessario inoltre analizzare l'Errore Percentuale Medio ottenuto con i vari metodi esposti finora. Con riferimento alla tabella 5.1 è possibile osservare come i metodi di integrazione che utilizzano le funzioni *odesuite* di MATLAB siano più precisi dello 0,12% rispetto al metodo di Eulero Esplicito, dello 0,07% rispetto al metodo di Runge-Kutta e dello 0,1% rispetto al metodo di Runge-Kutta-Fehlberg.

TABELLA 5.1: ERRORE PERCENTUALE DEI METODI DI INTEGRAZIONE NUMERICA CON PASSO DI INTEGRAZIONE COSTANTE

	Eulero	Runge-Kutta	Runge-Kutta-Fehlberg	Ode45	Ode113
Errore Medio [%]	<i>0,43</i>	<i>0,38</i>	<i>0,41</i>	<i>0,31</i>	<i>0,31</i>

Poiché l'obiettivo finale è quello di creare un simulatore che sia più veloce possibile e nello stesso tempo il più preciso possibile, andremo a considerare i metodi di Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg caratterizzati da un basso tempo di calcolo ed un errore percentuale relativamente basso. Per tal motivo, in figura 5.5, è mostrato l'andamento dell'errore percentuale durante la fase operativa del motore dei suddetti metodi.

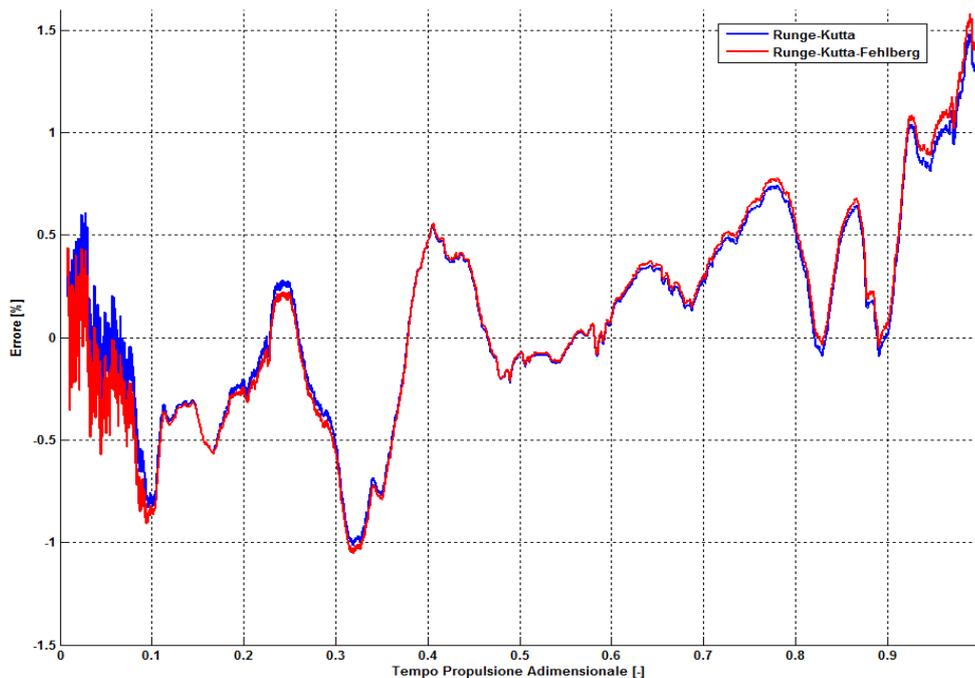


FIGURA 5.5: ANDAMENTO ERRORE PERCENTUALE DEI METODI RK E RKF

Per ridurre ulteriormente il tempo di calcolo è possibile realizzare un passo di integrazione variabile nel tempo. Per una corretta previsione dell'andamento della pressione in funzione del tempo è necessario un passo di integrazione relativamente piccolo per le fasi transitorie, come il Transient Ignition e Tail Off, mentre un passo più grande nella restante parte. Per cui si è scelto di utilizzare il seguente passo di integrazione:

$$\begin{cases} dt = 0,01 & \text{se } t_{adim} < 0,0088 \\ dt = 0,05 & \text{se } 0,0088 \leq t_{adim} < 0,43 \\ dt = 0,10 & \text{se } 0,43 \leq t_{adim} < 0,96 \\ dt = 0,01 & \text{se } t_{adim} \geq 0,96 \end{cases} \quad (5.2)$$

E' necessario sottolineare che tale passo di integrazione variabile, come mostrato in figura 5.6, è applicato al solo metodo di Runge-Kutta, essendo un metodo senza adattabilità del passo di integrazione, a differenza del metodo di Runge-Kutta-Fehlberg in cui il passo di integrazione è compreso tra " $0,01 \leq dt \leq 0,1$ ".

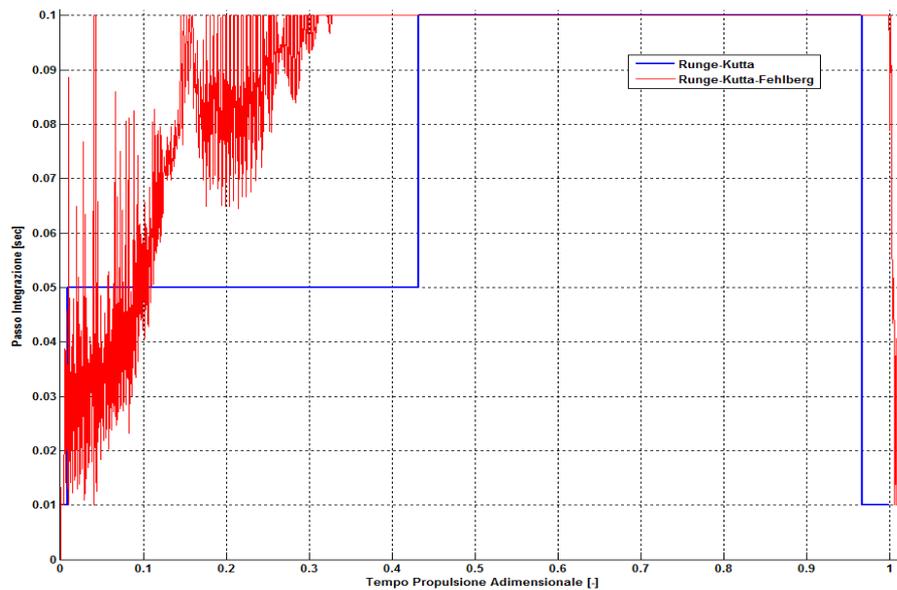


FIGURA 5.6: ANDAMENTO PASSO DI INTEGRAZIONE

Con riferimento alla tabella 5.2, è possibile osservare un miglioramento del tempo di calcolo che causa una sensibile riduzione della precisione.

TABELLA 5.2: TEMPO ED ERRORE PERCENTUALE MEDIO DEI METODI RK E RKF CON PASSO DI INTEGRAZIONE VARIABILE

	Runge-Kutta	Runge-Kutta-Fehlberg
Tempo [sec]	33	25
Errore Medio [%]	0,39	0,42

In conclusione, attraverso le considerazioni fatte precedentemente, i metodi che saranno utilizzati per realizzare il modello per la balistica interna di un razzo a propellente solido, che sarà accoppiato con il simulatore di regressione superficiale,

saranno i *Metodi di Runge-Kutta del 4° Ordine* e *Runge-Kutta-Fehlberg del 4° Ordine*.

5.2. Applicazione del Modello 0D non Stazionario e Simulatore di Regressione alla Motorizzazione "Zefiro 9"

Nel paragrafo precedente è stato validato il modello per la balistica interna zero-dimensionale non stazionario mediante alcune tecniche di integrazione numerica. Attraverso un'analisi sulla precisione della soluzione e sul tempo di calcolo sono stati presi in considerazione i metodi di integrazione numerica di Runge-Kutta del 4° ordine e Runge-Kutta-Fehlberg anch'esso del 4° ordine.

Nel seguente paragrafo, inizialmente, andremo a descrivere la motorizzazione su cui è applicato il simulatore composto dall'accoppiamento del modello per la balistica interna 0D non stazionario e dal simulatore di regressione superficiale; in seguito andremo a descrivere i parametri necessari, al modulo balistico, alla previsione dell'andamento della pressione all'interno della camera di combustione. Infine saranno analizzati i risultati ottenuti mediante l'utilizzo dei metodi di integrazione numerica presi in considerazione per la seguente simulazione.

5.2.1. Impostazione del Problema

Come esposto nella sezione 3.1.2., nella regione di impingement il flusso uscente dall'accenditore ha una componente normale alla superficie di combustione non trascurabile, causando un aumento della velocità di combustione in tale regione. Per poter descrivere tale fenomeno è necessaria la conoscenza della velocità del flusso all'interno della camera di combustione. Il modello 0D non stazionario non è in grado di valutare tale variabile perciò il suddetto contributo sarà trascurato nella seguente analisi. Per le stesse considerazioni anche il contributo della combustione erosiva non sarà considerato poiché non può essere valutata la velocità del flusso all'interno della camera di combustione, inoltre essendo la motorizzazione presa in esame caratterizzata da bassi valori di L/D_h l'errore che ne deriva è trascurabile.

Attraverso tali considerazioni la velocità di combustione valutata ad ogni istante temporale è ottenuta mediante la composizione delle relazioni (2.29) e (2.30):

$$r_b = a_{ref} e^{\sigma_p (T_i - T_{ref})} p_o^n \quad (5.3)$$

Come esposto nella sezione 3.1.4. per ottenere un valore reale della velocità di combustione è necessario moltiplicare il valore ottenuto mediante la relazione (5.3) con i relativi fattori correttivi. I suddetti fattori, forniti da AVIO-BPD, sono il *Fattore di Forma (SF)* e l'*HUMP* perciò:

$$r_b = SF \cdot HUMP \cdot [a_{ref} e^{\sigma_p (T_i - T_{ref})} p_0^n] \quad (5.4)$$

Essendo l'*HUMP* funzione del *web* consumato è necessario effettuare un'interpolazione dei dati per ottenere il valore corretto.

Il valore della velocità di combustione ottenuto mediante la relazione (5.4) fornisce un valore medio lungo tutta la camera di combustione. Tale valore sarà fornito al simulatore di regressione superficiale che movimenterà ogni vertice caratterizzante la mesh triangolare.

Per poter integrare le equazioni di lavoro relative al modello 0D non stazionario, relazione (3.3), è necessario valutare i contributi forniti dal propellente, dalle protezioni termiche, dall'accenditore, dall'ugello e dalla caratteristica geometrica della camera di combustione. Mediante la movimentazione della mesh è possibile valutare la variazione di volume del grano propellente così da poter stimare la portata entrante all'interno della camera di combustione mediante la seguente relazione:

$$\dot{m}_{PROP} = \rho_{PROP} \frac{dV}{dt} \quad (5.5)$$

Il contributo relativo all'accenditore, come la temperatura e il calore specifico dei prodotti di combustione del propellente, sono forniti da AVIO-BPD mediante opportune tabelle.

Infine il contributo dell'ugello è ottenuto mediante le relazioni:

$$C^* = \eta_{ref}^* C_{ref}^* \left(\frac{p_0}{p_{ref}} \right)^\alpha \quad (5.6)$$

$$\dot{m}_n = \frac{p_0 A^*}{C^*} \quad (5.7)$$

La variazione della sezione di gola in funzione del tempo ed i valori necessari alla valutazione della velocità caratteristica sono forniti da AVIO-BPD. Si ipotizza, inoltre, che le caratteristiche della miscela di gas all'interno dell'ugello rimangono costanti e uguali a quelli della camera di combustione.

E' necessario sottolineare che nella seguente analisi il contributo dovuto all'ablazione delle protezioni termiche ed il calore assorbito da esso, non sarà preso in

considerazione in quanto non è possibile valutare la velocità del flusso all'interno della camera di combustione, quindi non sarà possibile utilizzare il *MAR*, esposto nella sezione 3.2.4., in quanto necessita la valutazione del calore incidente alla superficie di protezione termica esposta.

In definitiva l'analisi sarà effettuata mediante l'utilizzo dei metodi di integrazione numerica sopra esposti. Essendo il metodo di Runge-Kutta, a differenza del metodo di Runge-Kutta-Fehlberg, un metodo senza adattabilità del passo di integrazione si è scelto di utilizzare il seguente passo di integrazione variabile:

$$\begin{cases} dt = 0,01 & \text{se } t_{adim} < 8,7 \cdot 10^{-4} \\ dt = 0,025 & \text{se } 1,7 \cdot 10^{-3} \leq t_{adim} < 4,3 \cdot 10^{-3} \\ dt = 0,01 & \text{se altrimenti} \end{cases} \quad (5.8)$$

In figura 5.7 è rappresentato l'andamento dei passi di integrazione dei 2 metodi.

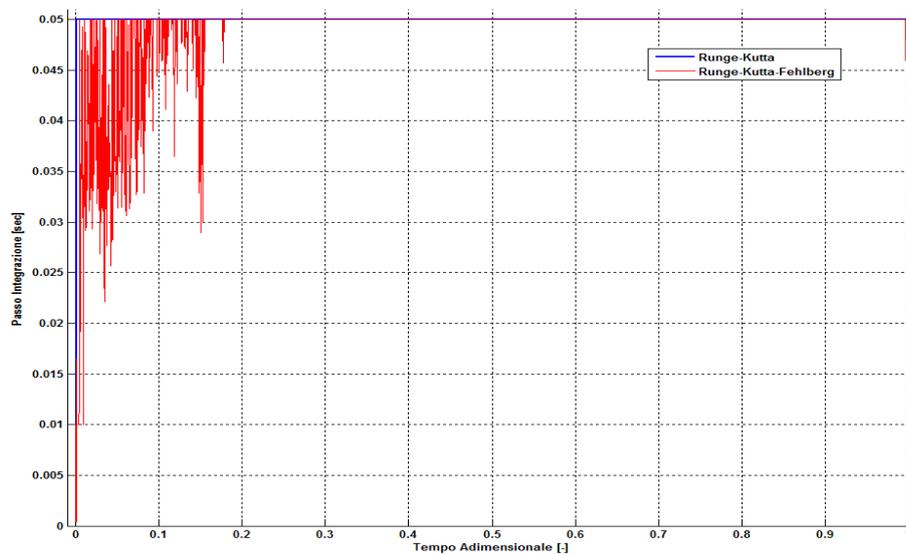


FIGURA 5.7: PASSO DI INTEGRAZIONE ZEFIRO 9

5.2.2. Analisi dei Risultati

Mediante le considerazioni fatte nella sezione precedente, integrando le equazioni di lavoro mediante i metodi presi in considerazione, è possibile eseguire una simulazione accoppiando il simulatore di regressione superficiale con il solo modello 0D non stazionario.

In figura 5.8 è rappresentato l'andamento della pressione in funzione del tempo di propulsione ottenuti Sperimentalmente, attraverso il metodo di integrazione di

Runge-Kutta del 4° ordine ed attraverso il metodo di Runge-Kutta-Fehlberg del 4° ordine.

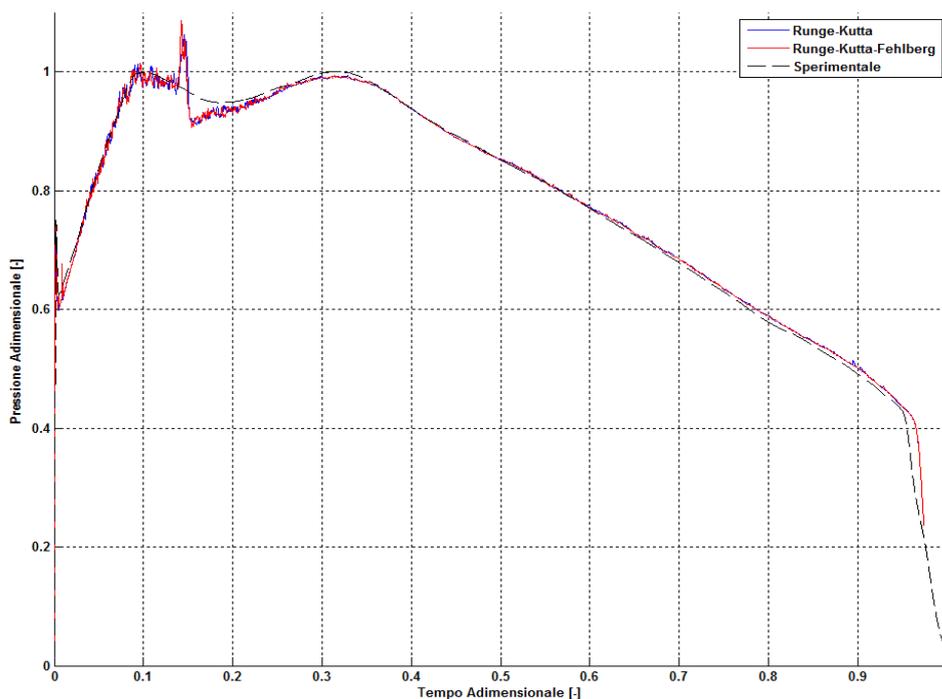


FIGURA 5.8: ANDAMENTO PRESSIONE MOTORIZZAZIONE ZEFIRO 9 CON RK E RKF

Dalla figura è possibile osservare le oscillazioni della pressione, causati dalla variazione di volume dV , ottenuta mediante i metodi di integrazione considerati. Dalle seguenti relazioni:

$$dV = S_b r_b dt \quad (5.9)$$

$$S_b = \frac{1}{r_b} \frac{dV}{dt} \quad (5.10)$$

è possibile confrontare la superficie di combustione, ottenuta mediante la variazione di volume della camera di combustione, con quella sperimentale, mostrata in figura 5.9.

Un'ulteriore considerazione che si osserva nella figura 5.8 è il simile andamento qualitativo che si ottiene utilizzando il metodo di Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg. Con un'attenta analisi è possibile osservare che il metodo RKF produce delle oscillazioni più accentuate rispetto al metodo RK, inoltre genera un tempo di calcolo maggiore relativo all'intero simulatore.

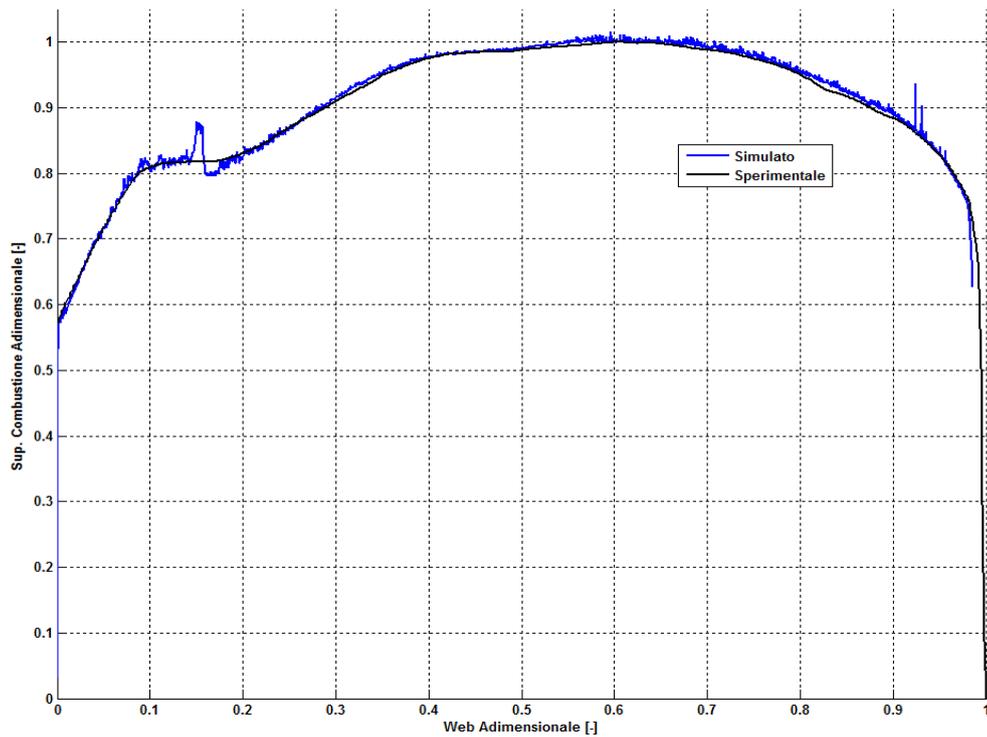


FIGURA 5.9: ANDAMENTO SUPERFICIE DI COMBUSTIONE OTTENUTO ATTRAVERSO dV

Dalla figura 5.8 è possibile osservare una sovrastima della pressione nella parte finale della propulsione, causato dalla sovrastima di superficie di combustione in tale regione, come mostrato in figura 5.10. Un'ulteriore causa di tale sovrastima è l'aver trascurato le perdite di calore che raggiungono il livello massimo nella fase terminale di propulsione.

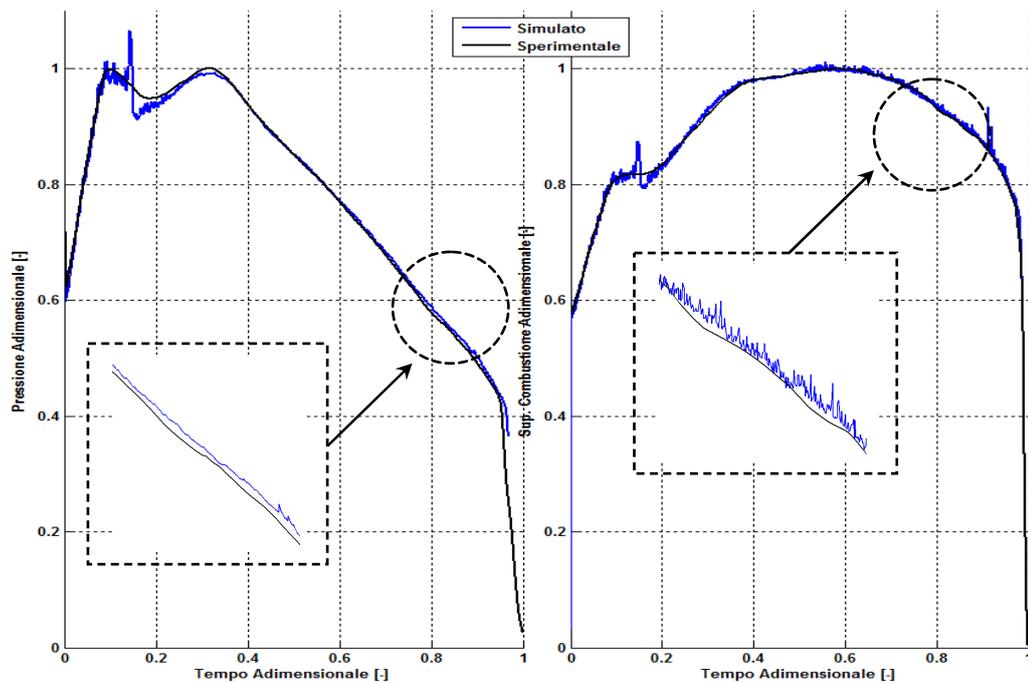


FIGURA 5.10: SOVRASTIMA DELLA PRESSIONE

Mediante le equazioni di lavoro del modello 0D non stazionario è possibile valutare l'andamento della temperatura in funzione del tempo di propulsione. In figura 5.11 è possibile osservare tale andamento, ma non disponendo di dati sperimentali, non è possibile effettuare un confronto. Come è possibile osservare, la temperatura si stabilizza intorno a 3500 K, confermando così le temperature che solitamente si raggiungono da un endoreattore a propellente solido.

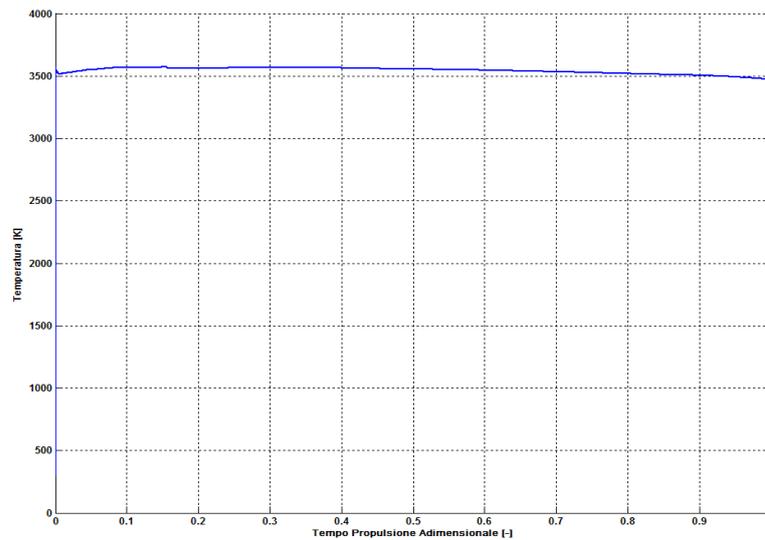


FIGURA 5.11: ANDAMENTO TEMPERATURA TOTALE CON RK

Come esposto precedentemente il simulatore di regressione necessita della velocità di combustione, fornita dal modulo balistico, così da poter movimentare i vertici della mesh, quindi simulare la regressione del grano propellente durante la fase operativa del motore. In figura 5.12 è mostrato l'andamento della velocità di combustione in funzione del tempo.

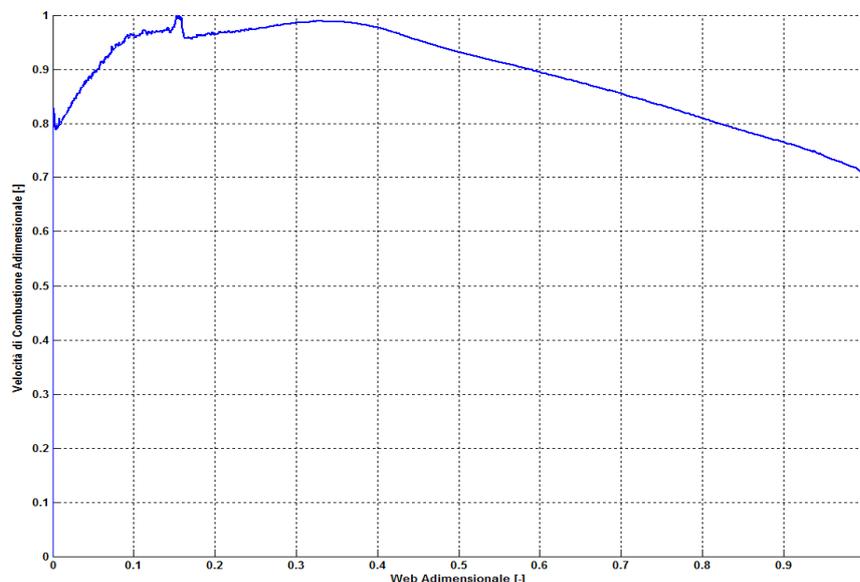
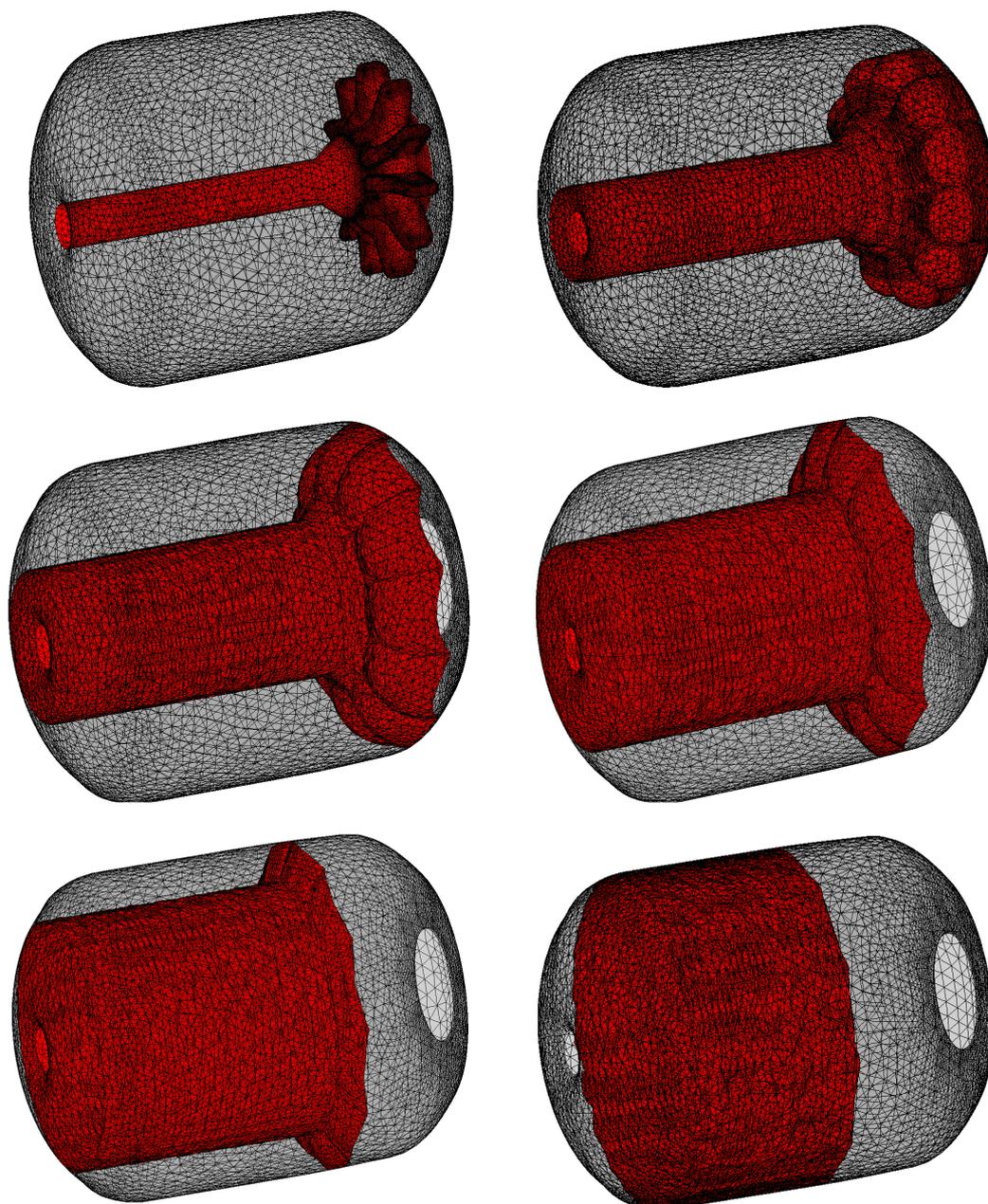


FIGURA 5.12: ANDAMENTO VELOCITÀ DI COMBUSTIONE CON RK

Valutando la velocità di combustione mediante la relazione (5.4) è possibile osservare, dalla figura sopra esposta, che l'andamento della velocità di combustione è oscillante, dovuta all'oscillazione della pressione.

E' necessario sottolineare che le oscillazioni della variazione di volume dV , fornite dal simulatore di regressione, si propagano all'intero modello per la balistica interna senza però generare instabilità.

In definitiva fornendo, ad ogni istante temporale, la velocità di combustione al simulatore di regressione è possibile osservare in figura 5.13, la regressione del grano propellente durante la fase operativa del motore.



5.3. Applicazione Modulo Balistico e Simulatore di Regressione alla Motorizzazione Zefiro 9

Nel seguente paragrafo andremo ad applicare il simulatore caratterizzato dal modulo balistico e dal simulatore di regressione superficiale sulla motorizzazione *Zefiro 9*. Il modulo balistico preso in considerazione è composto dall'accoppiamento del modello 0D non stazionario e dal modello 1D stazionario. In tal modo sarà possibile valutare la distribuzione delle variabili termofluidodinamiche lungo la camera di combustione.

Come esposto precedentemente la motorizzazione *Zefiro 9* presenta bassi valori di L/D_h perciò non presenta variazioni significative tra la testa del motore e sezione d'ingresso dell'ugello. Nel problema in esame, a differenza dell'analisi fatta al paragrafo precedente, sarà possibile valutare, essendo nota la distribuzione della velocità lungo la camera di combustione, i contributi della combustione erosiva e delle perdite di calore. Inoltre, come esposto nella sezione 3.2.4., sarà possibile implementare il *MAR* in modo tale da valutare la portata di ablazione delle protezioni termiche, finora trascurata.

L'obiettivo primario sarà quello di validare il modulo balistico mediante i dati forniti da AVIO-BPD, distribuendo in modo opportuno la superficie di combustione nei vari nodi caratterizzanti la camera di combustione.

5.3.1. Combustione Erosiva dovuto all'Accenditore

Come esposto nelle sezione 3.1.2., durante la fase di accensione del motore la regione di impingement sarà soggetta ad una regressione del grano propellente maggiore, dovuto alla componente normale non trascurabile dei gas uscenti dall'accenditore sulla superficie di combustione, come mostrato in figura 5.14.

Nel seguente lavoro di tesi si è scelto di modellare tale fenomeno mediante la relazione utilizzata per modellare la combustione erosiva. In tal modo si ipotizza che la componente di velocità assiale in tale regione sia più alta causando un aumento sulla velocità di combustione.

In definitiva la velocità di combustione sarà valutata mediante la seguente relazione:

$$r_b = ap_0^n + \alpha \frac{G^{0.8}}{D_h^{0.2}} e^{-\frac{\beta r_b \rho_p}{G}} + \alpha \frac{G_{IRe}^{0.8}}{D_h^{0.2}} e^{-\frac{\beta_{IRe} r_b \rho_p}{G_{IRe}}} \quad (5.11)$$

dove " β_{IRE} " rappresenta una costante empirica che sarà minore del valore β utilizzato per caratterizzare la combustione erosiva. Mentre " G_{IRE} " rappresenta il flusso di massa uscente dall'accenditore. Quest'ultimo viene valutato attraverso i dati forniti da AVIO-BPD:

$$C_{acc}^* = \frac{p_{acc} A_{acc}^*}{\dot{m}_{acc}} \quad (5.12)$$

Mediante la relazione (5.12) è possibile valutare il flusso di massa come:

$$G_{IRE} = \frac{\dot{m}_{acc}}{A_{acc}^*} = \frac{p_{acc}}{C_{acc}^*} \quad (5.13)$$

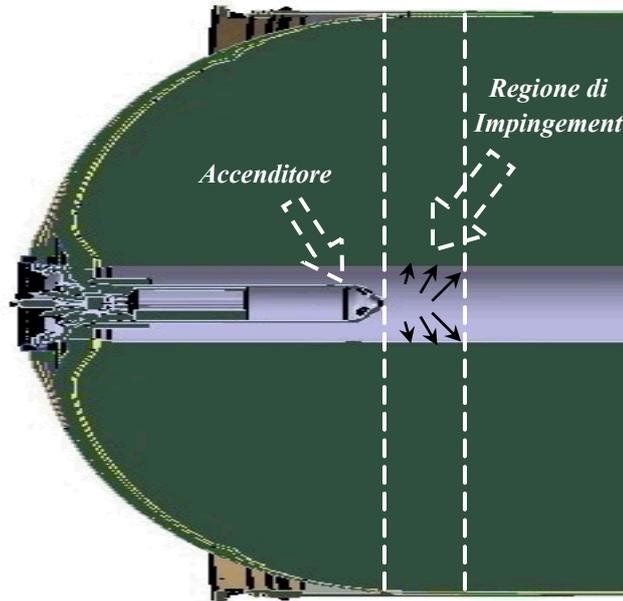


FIGURA 5.14: REGIONE DI IMPINGEMENT

5.3.2. Validazione del Modulo Balistico

Prima di procedere all'applicazione del simulatore completo alla motorizzazione *Zefiro 9* è necessario validare il modello per la balistica interna mediante i dati forniti da AVIO-BPD.

Non disponendo della distribuzione della superficie di combustione lungo la camera di combustione è necessario associare le superfici di combustione ai rispettivi nodi. Ciò viene effettuato moltiplicando la superficie di combustione totale, fornita da AVIO-BPD, mediante un opportuno fattore. Avendo a disposizione la distribuzione della superficie di combustione fornita dal simulatore di regressione è possibile associare, ai rispettivi nodi, il valore di superficie corretta. Infatti mediante la

seguinte relazione è possibile distribuire la superficie di combustione totale lungo la camera di combustione:

$$S_{b_{AVIO_i}} = \frac{S_{b_i}}{\sum_i S_{b_i}} S_{b_{AVIO_{tot}}} \quad (5.14)$$

dove " S_{b_i} " è la superficie di combustione del nodo i -esimo fornito dal simulatore di regressione e " $S_{b_{AVIO_{tot}}}$ " è la superficie di combustione totale. In figura 5.15 è mostrata la differenza tra le distribuzioni delle superfici di combustione.

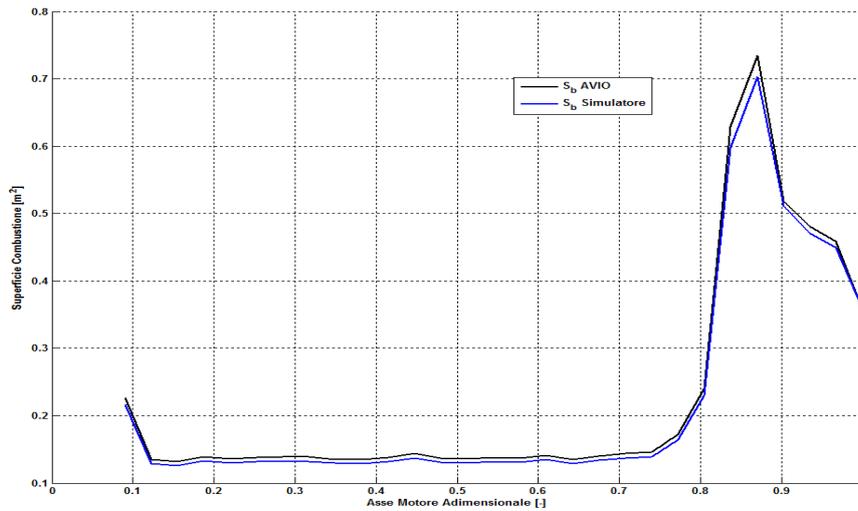


FIGURA 5.15: DIFFERENZA DISTRIBUZIONE SUPERFICIE DI COMBUSTIONE

Eseguendo tale modifica sulla superficie di combustione ad ogni istante di calcolo è possibile fornire al modello balistico il valore della superficie di combustione corretto, potendo in tal modo validare il modulo balistico composto dall'accoppiamento del modello 0D non stazionario e 1D stazionario. In figura 5.16 è rappresentato l'andamento della pressione totale ottenuto mediante l'uso del modello balistico.

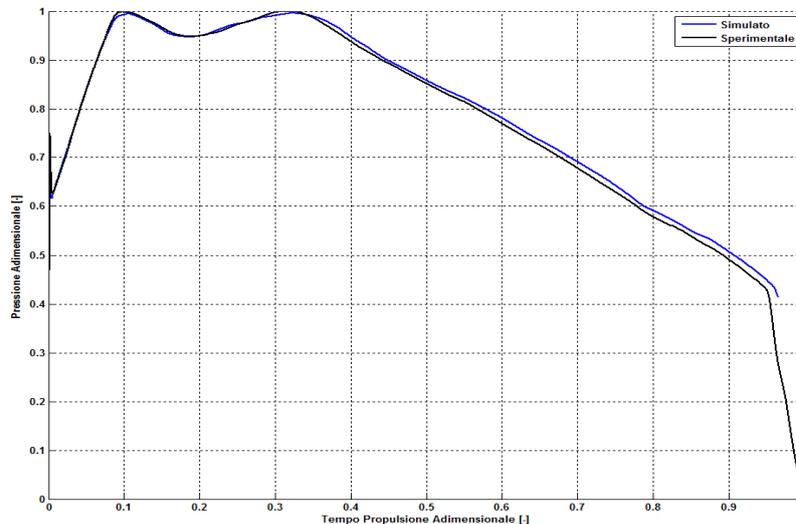


FIGURA 5.16: VALIDAZIONE MODELLO BALISTICO 0D-1D

Dalla suddetta figura è possibile osservare come l'andamento delle curve di pressione sperimentale e simulato siano qualitativamente simili. La discrepanza che si ottiene al tempo adimensionale superiore a 0,5 è dovuto principalmente alla non corretta caratterizzazione della portata di ablazione delle protezioni termiche, che, come già sottolineato, è sovrastimato causando così un aumento di pressione all'interno della camera di combustione.

In definitiva è possibile concludere che il modello balistico implementato, composto dall'accoppiamento del modello 0D non stazionario e 1D stazionario, è validato.

5.3.3. Applicazione Modulo Balistico e Simulatore di Regressione alla Motorizzazione Zefiro 9

Effettuata la validazione del modello balistico è possibile accoppiarlo con il simulatore di regressione superficiale per analizzare l'andamento della pressione totale, in funzione del tempo di propulsione del motore, e le distribuzioni lungo la camera di combustione delle variabili termofluidodinamiche di interesse.

Come già esposto precedentemente il simulatore di regressione superficiale fornisce in uscita tutte le variabili geometriche della camera di combustione necessarie al modello balistico per effettuare la previsione della pressione ad ogni istante di tempo. Nel caso in esame la superficie di combustione è valutata mediante la somma dei vari triangoli esposti alla combustione. In figura 5.17 è rappresentato l'andamento della pressione totale in funzione del tempo di propulsione.

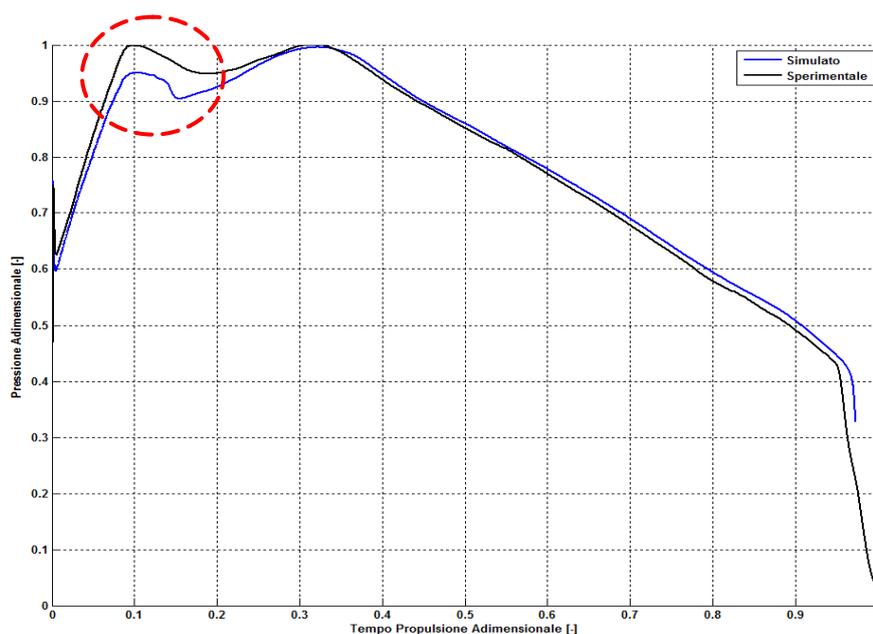


FIGURA 5.17: ANDAMENTO PRESSIONE ZEFIRO 9 CON S_b

Con riferimento alla figura 5.17 si osserva immediatamente la discrepanza tra l'andamento di pressione sperimentale e simulato nella parte iniziale del *Quasi-Steady State*. Tale differenza è dovuta alla sottostima della superficie di combustione in tale regione, come mostrato in figura 5.18.

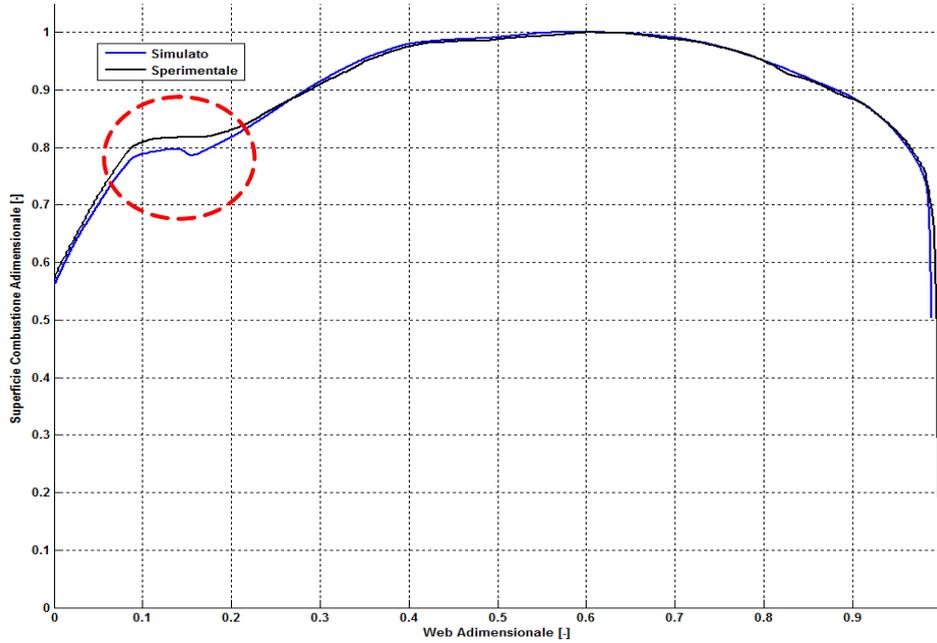


FIGURA 5.18: ANDAMENTO SUPERFICIE DI COMBUSTIONE ZEFIRO 9

Per ovviare a tale sottostima è necessario valutare la superficie di combustione mediante un ulteriore metodo. E' possibile a tal proposito valutare la superficie di combustione totale mediante la variazione di volume del grano propellente. Dalla seguente relazione:

$$dV = S_b r_b dt \quad (5.15)$$

essendo noti la variazione di volume dV , la velocità di combustione r_b e il passo di integrazione temporale dt è possibile valutare la superficie di combustione ad ogni istante temporale.

Ottenuta la superficie di combustione totale sarà necessario distribuirla lungo la camera di combustione. Per far ciò è possibile utilizzare lo stesso ragionamento effettuato durante la validazione del modello, quindi:

$$S_b|_{dV} = \frac{dV}{r_b dt} \quad (5.16)$$

$$S_{b_i}|_{dV} = \frac{S_{b_i}}{\sum_i S_{b_i}} S_b|_{dV} \quad (5.17)$$

dove " S_{b_i} " rappresenta la superficie di combustione dell' i -esimo nodo ottenuto mediante la somma delle aree dei vari triangoli in combustione. In tal modo si ottiene un andamento della superficie di combustione che si avvicina a quella sperimentale, come mostrato in figura 5.19.

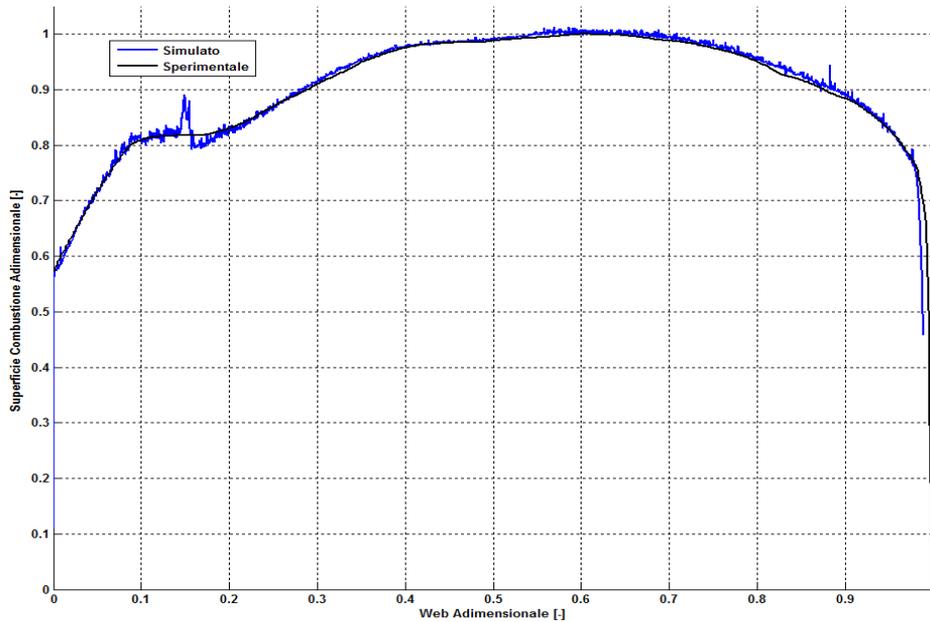


FIGURA 5.19: ANDAMENTO SUPERFICIE DI COMBUSTIONE ZEFIRO 9 OTTENUTO MEDIANTE dV

Utilizzando questo approccio per valutare la superficie di combustione si ottiene un andamento della pressione come mostrato in figura 5.20.

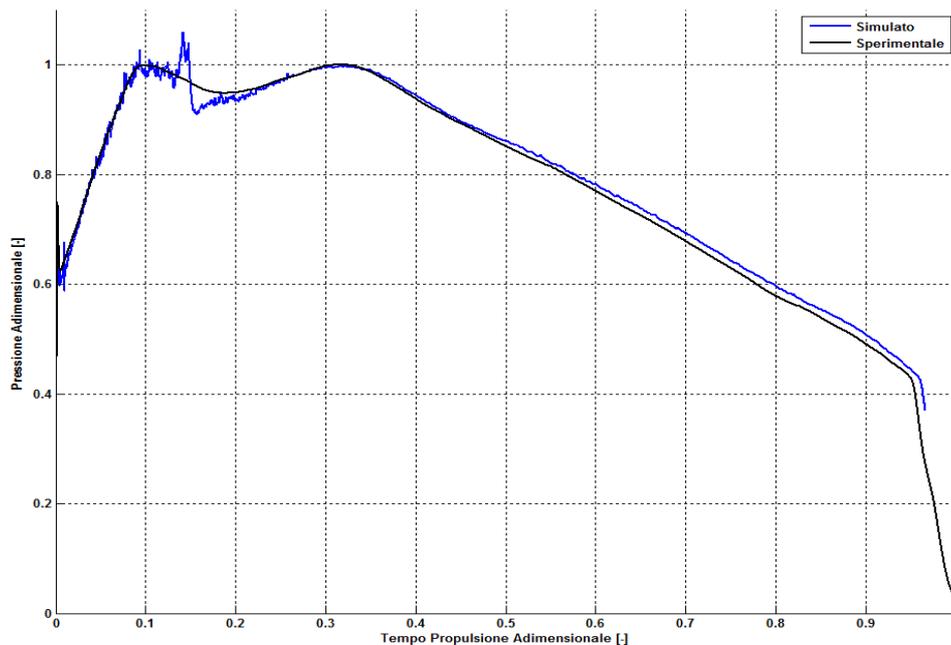


FIGURA 5.20: ANDAMENTO PRESSIONE ZEFIRO 9 CON $S_{b|av}$

Si nota come le oscillazioni sulla superficie di combustione si ripercuotono sull'andamento della pressione. E' necessario osservare come il valore della pressione, nel tratto discendente della curva, è superiore di circa 1 *bar*. Ciò è causato principalmente dalla sovrastima della portata di ablazione delle protezioni termiche, dovuto all'utilizzo del modello *MAR*, e dalla non considerazione delle perdite di calore.

E' necessario quindi effettuare un'analisi considerando le perdite di calore ottenute mediante la relazione (3.23). Avendo a disposizione la discretizzazione della camera di combustione è possibile associare ad ogni volume di controllo la corrispondente perdita di calore moltiplicando, il flusso di calore, per la superficie di protezione termica esposta, descritto nella sezione 4.4.4. In figura 5.21 è rappresentato l'andamento della pressione, in funzione del tempo di propulsione, con perdite di calore e senza perdite di calore.

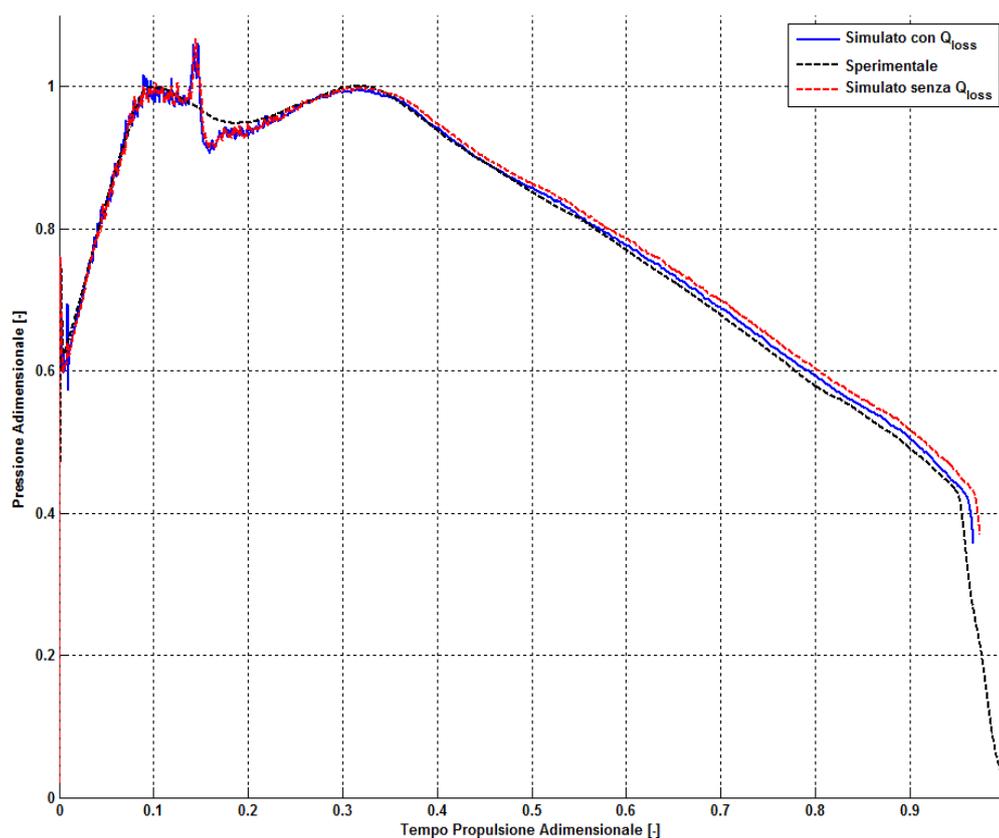


FIGURA 5.21: ANDAMENTO PRESSIONE ZEFIRO 9 CON E SENZA PERDITE DI CALORE

E' possibile osservare come il contributo delle perdite di calore influenzi la seconda parte della fase *Quasi-Steady State* in cui la superficie di protezione termica esposta raggiunge valori considerevoli. In figura 5.22 e 5.23 è mostrato, rispettivamente,

l'andamento della superficie di protezione termica esposta e le perdite di calore in funzione del tempo.

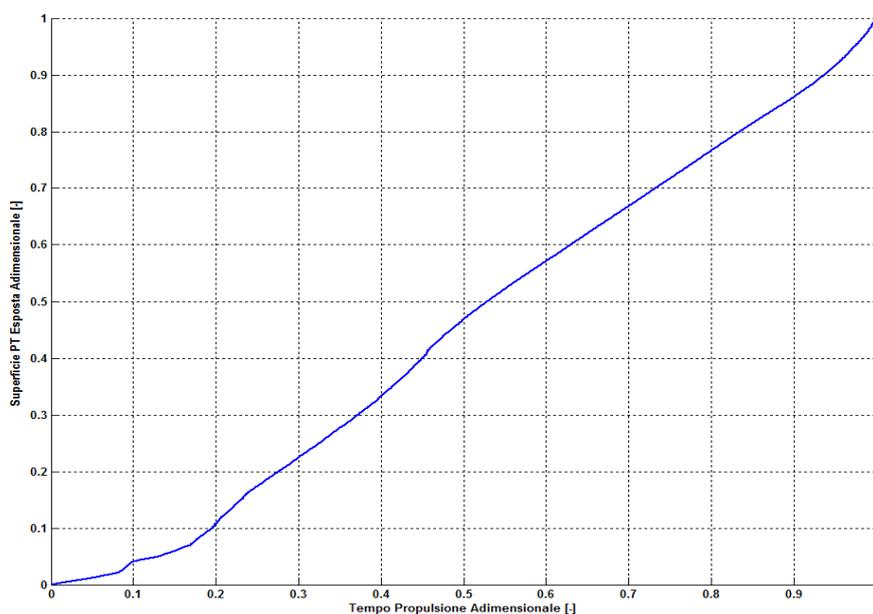


FIGURA 5.22: ANDAMENTO SUPERFICIE DI PROTEZIONE TERMICA ESPOSTA NELLO ZEFIRO 9

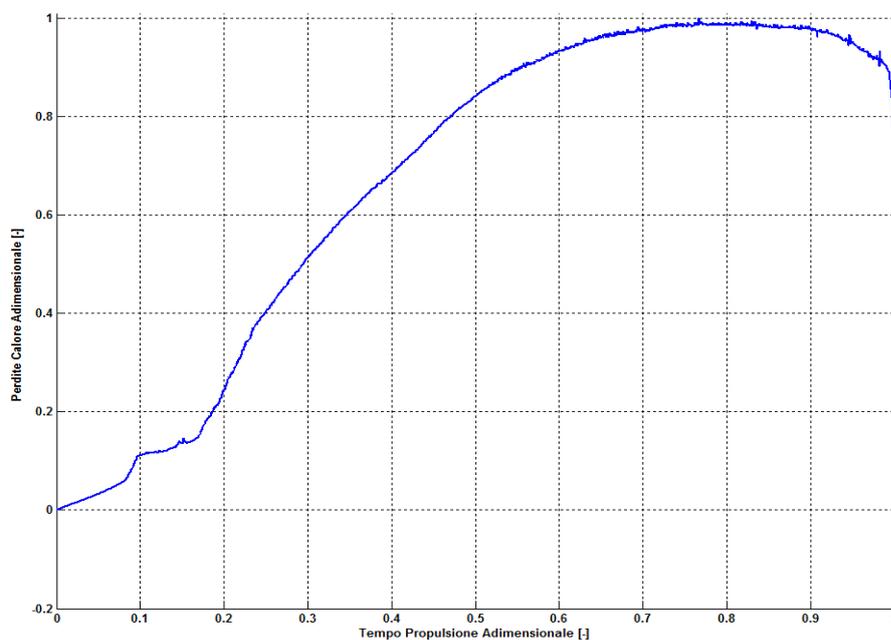


FIGURA 5.23: PERDITE DI CALORE NELLO ZEFIRO 9

Con riferimento alla figura 5.23 è possibile osservare come le perdite di calore diventino significative nella seconda parte del Quasi-Steady State, dell'ordine di qualche MW , causando una riduzione della pressione.

Essendo il modello balistico composto da un modello mono-dimensionale è possibile analizzare le variazioni lungo la camera di combustione delle varie variabili di

interesse. In particolare andremo ad illustrare gli andamenti della pressione e temperatura totale, pressione e temperatura statica, Mach e calore specifico.

In figura 5.24 è possibile osservare come si abbia una caduta sia di pressione che di temperatura totale dovuto all'esposizione delle protezioni termiche nel primo e ultimo nodo. E' necessario sottolineare che durante l'analisi senza considerazione delle perdite di calore l'andamento della pressione e della temperatura totale rimaneva costante, dovuto all'ipotesi di trasformazione isoentropica.

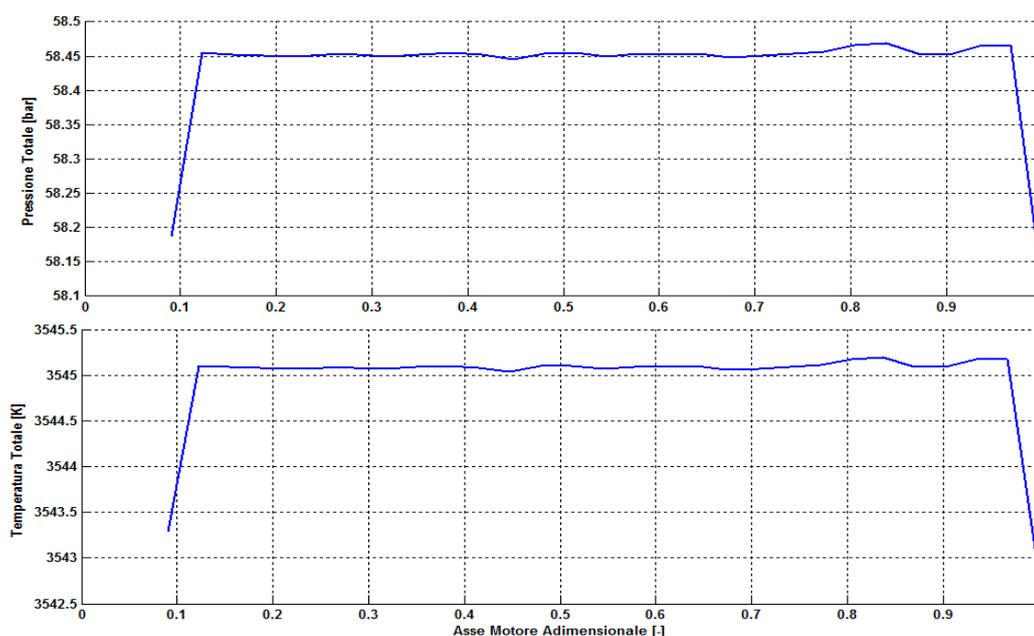


FIGURA 5.24: ANDAMENTO PRESSIONE E TEMPERATURA TOTALE NELLO ZEFIRO 9

La valutazione della temperatura totale è ottenuta mediante un bilancio energetico, come esposto nella sezione 3.2.3. Per la valutazione di tale parametro è necessario valutare, mediante una media pesata sulle rispettive portate massiche, il calore specifico c_p , che presenta una distribuzione lungo la camera di combustione come mostrato in figura 5.25.

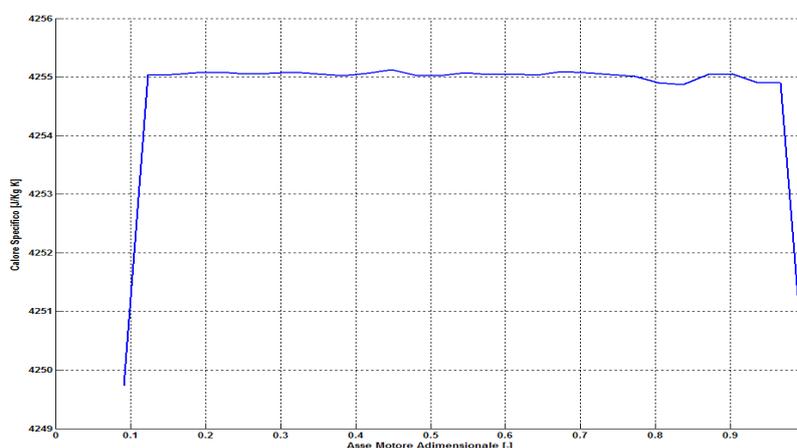


FIGURA 5.25: ANDAMENTO CALORE SPECIFICO NELLO ZEFIRO 9

In figura 5.26 è rappresentato l'andamento della pressione e della temperatura statica lungo la camera di combustione. Si osserva come le variazioni di pressione, di circa $0,05 \text{ bar}$, e temperatura, di circa $0,5 \text{ K}$, siano basse quindi trascurabili. Tali variazioni sono confermate dai dati sperimentali forniti da AVIO-BPD.

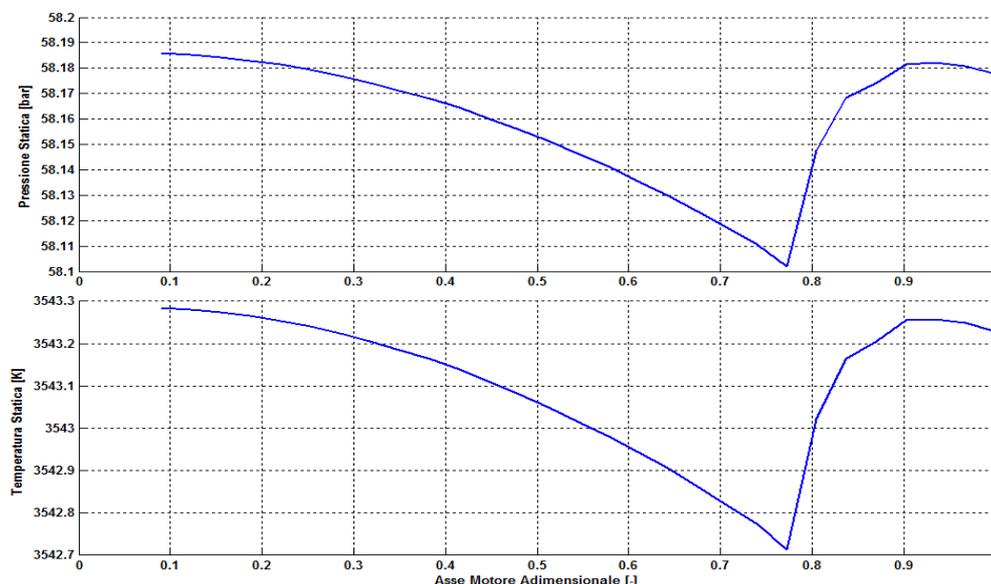


FIGURA 5.26: ANDAMENTO PRESSIONE E TEMPERATURA STATICA NELLO ZEFIRO 9

Gli ultimi parametri che andremo ad analizzare sono la distribuzione del Mach e della velocità di combustione lungo la camera di combustione, mostrata in figura 5.27 e 5.28. La geometria del grano propellente, della motorizzazione *Zefiro 9*, è caratterizzata da una geometria composta formata da una regione tronco-conica ed una regione a stella (figura 2.7). Per tal motivo inizialmente il flusso aumenta la sua velocità, fino ad un valore di Mach pari a $0,05$, per poi rallentare fino alla sezione d'ingresso dell'ugello, causando la bassa variazione di pressione e temperatura statica.

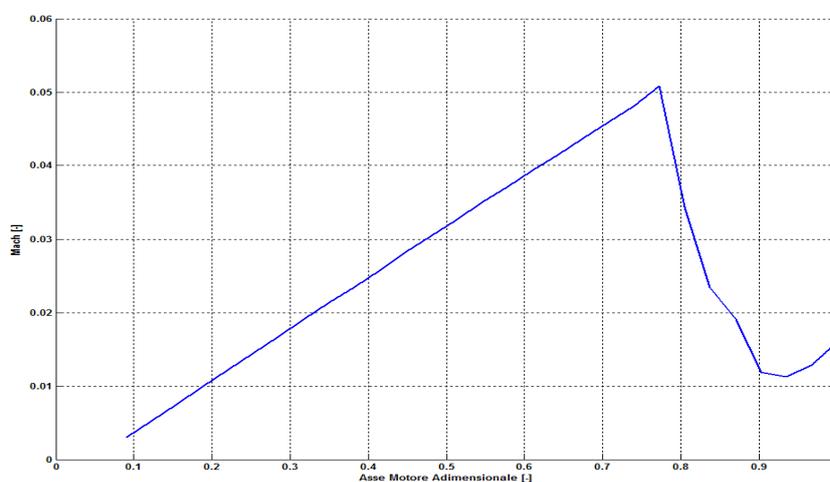


FIGURA 5.27: ANDAMENTO MACH NELLO ZEFIRO 9

Nel seguente modello balistico, come esposto nelle sezioni 2.3.5. e 5.3.1., sono state implementate sia la combustione erosiva che componente dovuta all'accenditore. In figura 5.28 è rappresentato l'andamento della velocità di combustione in 2 istanti di tempo differenti, il primo durante la fase di *Transient Ignition* così da apprezzare la combustione erosiva dovuta all'accenditore, e il secondo durante la fase di *Quasi-Steady State* apprezzando così la combustione erosiva.

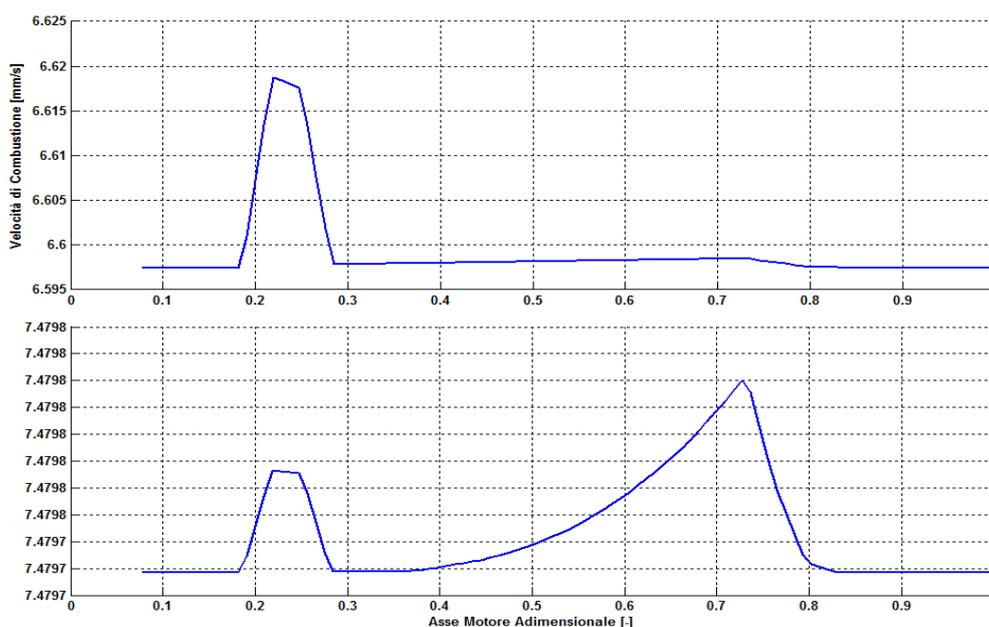


FIGURA 5.28: VELOCITÀ DI COMBUSTIONE NELLO ZEFIRO 9

Si può osservare come nelle fasi iniziali la velocità di combustione, nella regione di impingement sia maggiore di circa $0,02 \text{ mm/s}$, mentre nella fase quasi stazionaria si nota l'andamento della combustione erosiva ma i valori ottenuti sono talmente bassi tali da poter essere trascurati.

I parametri che influenzano fortemente l'andamento della pressione totale, in funzione del tempo di propulsione, sono le portate in ingresso ed in uscita dal volume di controllo, quindi dai prodotti di combustione, di ablazione delle protezioni termiche, dall'accenditore e dell'efflusso dall'ugello. In figura 5.29 è rappresentato l'andamento delle varie portate in ingresso ed in uscita dal suddetto volume. Dalla figura è possibile osservare come le portate siano circa uguali per tutto il tempo della propulsione, caratterizzando una combustione stabile come esposto nella sezione 3.1.2.

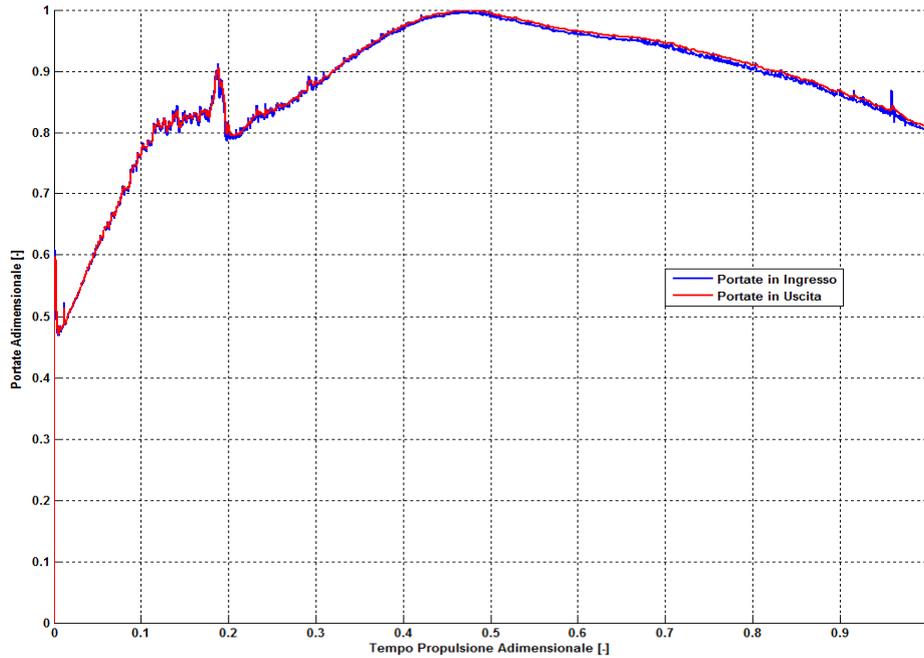


FIGURA 5.29: PORTATE IN INGRESSO ED IN USCITA DAL VOLUME DI CONTROLLO NELLO ZEFIRO 9

Essendo noto il profilo dell'ugello di scarico ed i parametri termofluidodinamici in corrispondenza della sezione d'ingresso dell'ugello è possibile valutare il profilo di spinta fornito dalla suddetta motorizzazione. Mediante le relazioni (2.18) e (2.20) è possibile valutare il valore del Mach e della pressione nella sezione d'uscita dell'ugello. Noti tali valori è possibile valutare il Coefficiente di Spinta mediante la relazione (2.25), ipotizzando che la pressione esterna sia pari alla pressione ambiente. In figura 5.30 è mostrato il Coefficiente di Spinta.

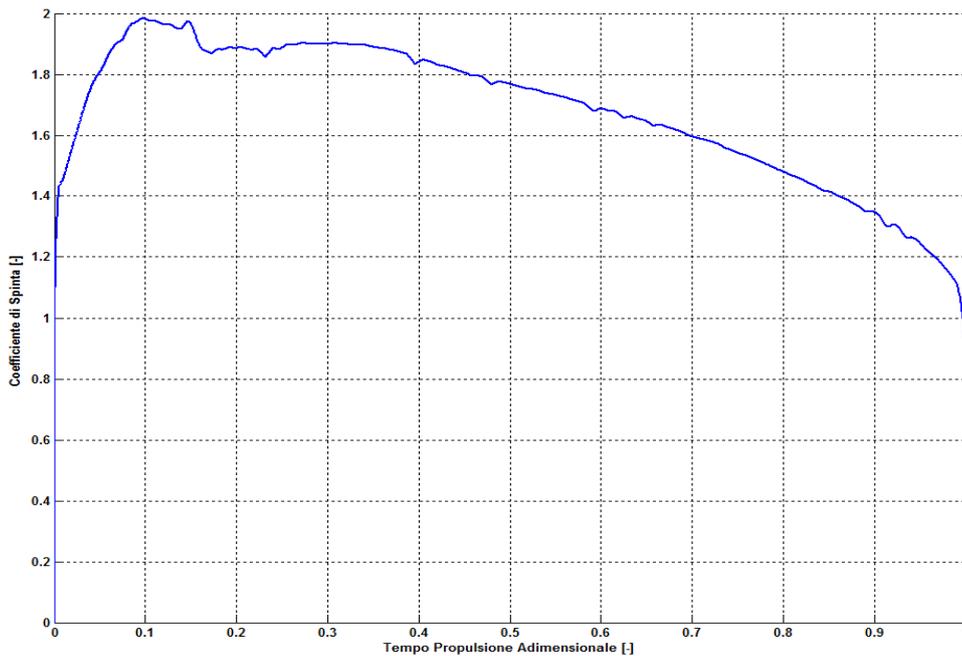


FIGURA 5.30: COEFFICIENTE DI SPINTA DELLO ZEFIRO 9

Infine il profilo di spinta, mostrato in figura 5.31, può essere valutato mediante la relazione (2.26) essendo noti i valori della velocità caratteristica, del coefficiente di spinta e la portata in uscita dall'ugello ad ogni istante temporale.

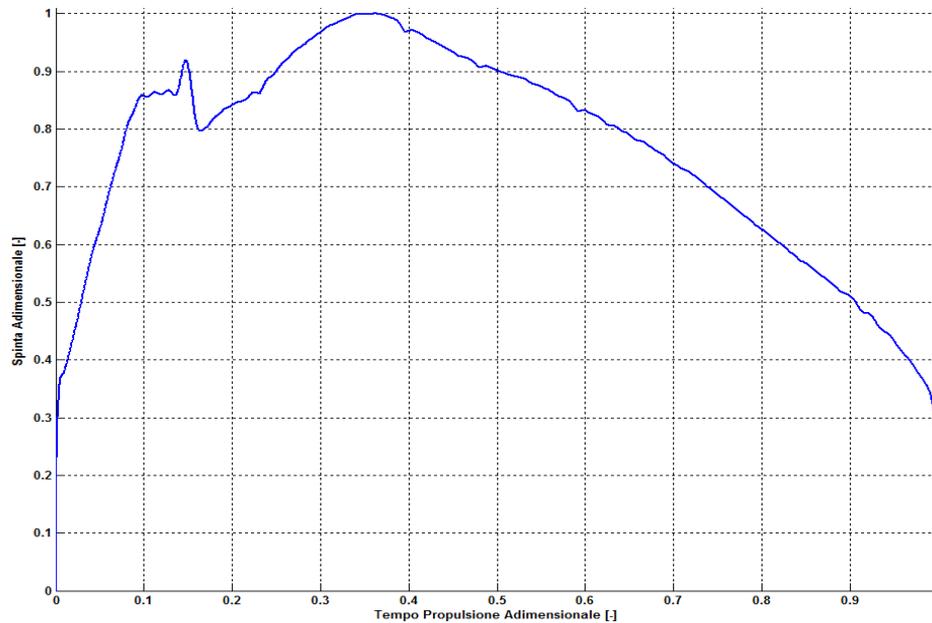


FIGURA 5.31: PROFILO SPINTA DELLO ZEFIRO 9

In definitiva attraverso le analisi fatte sulla distribuzione delle variabili termofluidodinamiche lungo la camera di combustione è possibile concludere che il solo *Modello 0D non Stazionario* è adatto alla valutazione della balistica interna per la motorizzazione *Zefiro 9*. Nel successivo paragrafo sarà illustrata la potenzialità del *Modello 1D Stazionario*, in quanto il Modello Balistico è applicato ad una motorizzazione caratterizzato da un rapporto L/D_h elevato.

5.4. Applicazione Modulo Balistico e Simulatore di Regressione ad un SRM con Elevato L/D_h

Come esposto nel precedente paragrafo le variazioni delle variabili termofluidodinamiche lungo la camera di combustione della motorizzazione *Zefiro 9* sono relativamente piccole tali da poter essere trascurate. Ciò non accade per motorizzazioni caratterizzate da elevati valori L/D_h che causano variazioni apprezzabili lungo la camera di combustione.

Nel presente paragrafo andremo ad effettuare un'analisi su di una motorizzazione caratterizzata da elevati valori L/D_h . Non disponendo di dati sperimentali non è possibile effettuare un'analisi completa della balistica interna, ma saranno evidenziate le variazioni delle variabili di interesse tra la testa del motore e la sezione d'ingresso dell'ugello. Come fatto per la motorizzazione *Zefiro 9* attraverso il modello CAD della motorizzazione in esame è possibile discretizzare, mediante un software agli elementi finiti, il grano propellente, come mostrato in figura 5.32.

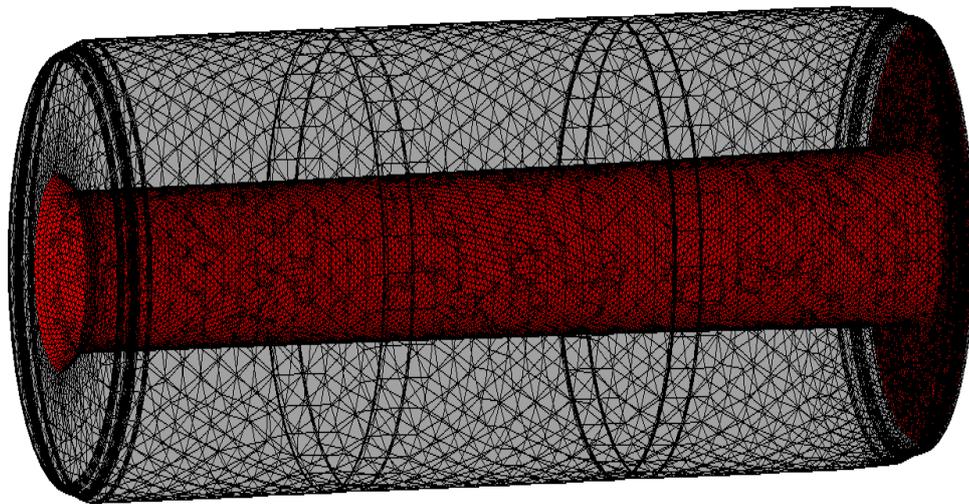


FIGURA 5.32: GRANO PROPELLENTE MOTORIZZAZIONE CON ELEVATO L/D_h

La suddetta motorizzazione è caratterizzata da una geometria della camera di combustione Tronco-Conica. Questa configurazione funge da condotto divergente che cerca di rallentare il flusso riducendo il contributo della combustione erosiva. Con riferimento alla figura 5.33 è possibile osservare la variazione della pressione e temperatura statica tra testa del motore e sezione d'ingresso dell'ugello.

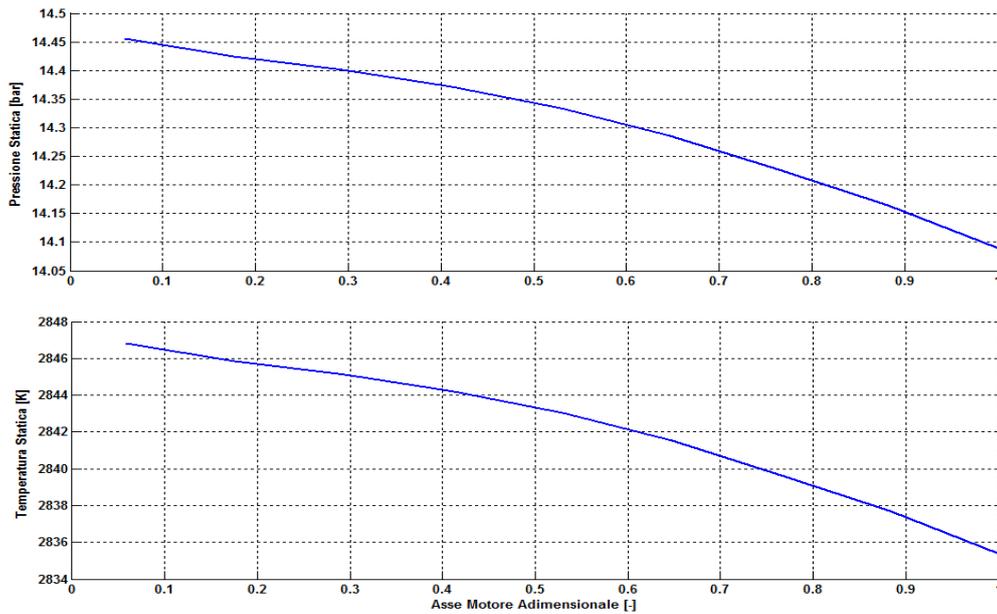


FIGURA 5.33: DISTRIBUZIONE PRESSIONE E TEMPERATURA STATICA MOTORIZZAZIONE CON ELEVATO L/D_h

Dalla figura sopra riportata è possibile osservare come la variazione di pressione e temperatura statica sia, rispettivamente, dell'ordine di 0,3 bar e di 12 K a differenza della motorizzazione *Zefiro 9* che presentava valori di un ordine di grandezza inferiore. Di seguito, in figura 5.34, è rappresentato la distribuzione del Mach dell'ordine di 0,2, anch'esso di un ordine di grandezza superiore rispetto a quello ottenuto nello *Zefiro 9*.

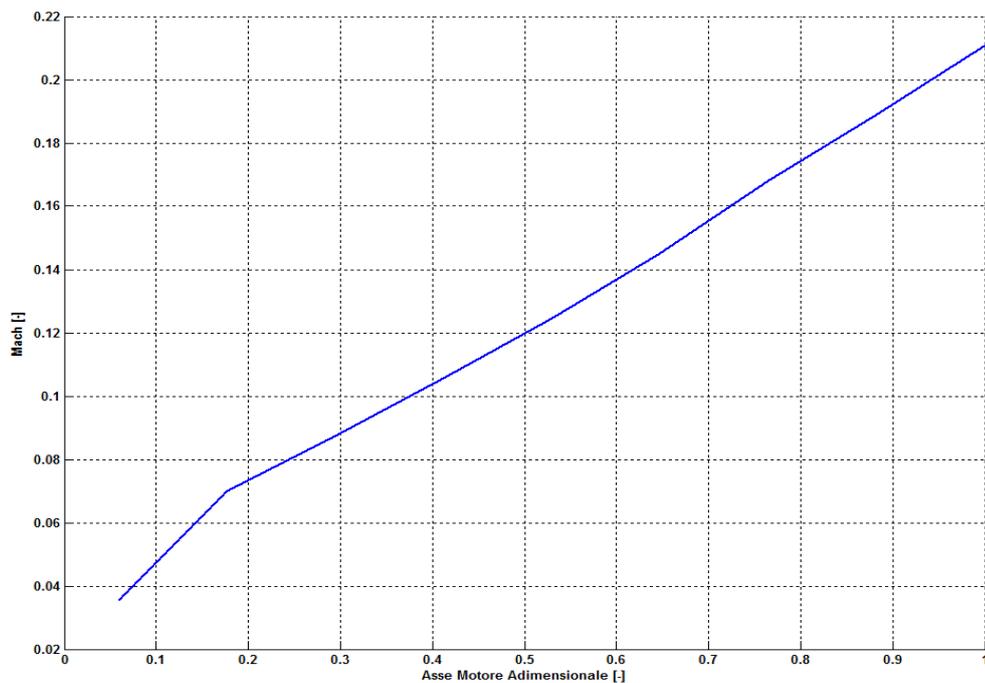


FIGURA 5.34: DISTRIBUZIONE MACH MOTORIZZAZIONE CON ELEVATO L/D_h

Come già accennato molte volte durante la trattazione del seguente elaborato, le motorizzazioni che presentano tali caratteristiche sono soggette ad un contributo della combustione erosiva non trascurabile, come mostrato un figura 5.35. Si nota infatti che la variazione di velocità di combustione è di circa $0,5 \text{ mm/s}$, causando una rapida regressione del grano propellente nella regione terminale della camera di combustione.

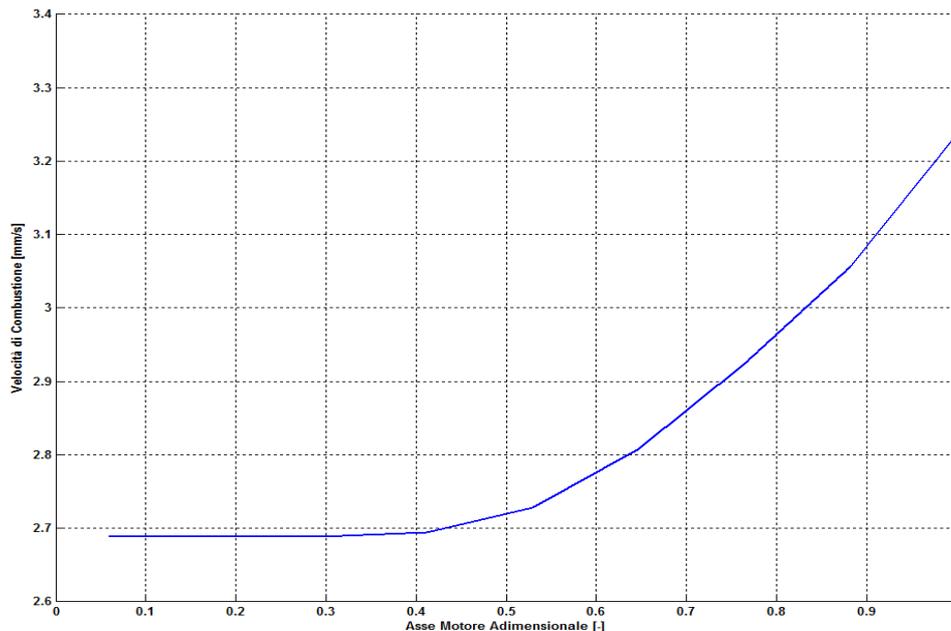


FIGURA 5.35: DISTRIBUZIONE VELOCITÀ DI COMBUSTIONE MOTORIZZAZIONE CON ELEVATO L/D_h

Per le osservazioni fatte finora, sulle variazioni delle variabili termofluidodinamiche non trascurabili all'interno della camera di combustione, è possibile osservare le potenzialità del *Modello Mono-Dimensionale Stazionario*. Con la seguente analisi qualitativa si è evidenziata l'importanza dell'accoppiamento dei modelli 0D non stazionario e 1D stazionario capace di prevedere la Balistica Interna di un endoreattore a propellente solido di piccole e grosse dimensioni.

Non disponendo di dati sperimentali riguardanti un endoreattore a propellente solido con elevati rapporti L/D_h non è possibile confrontare i risultati forniti dal Modello per la Balistica Interna sviluppato ed implementato nel seguente lavoro di tesi.

6. Conclusioni e Sviluppi Futuri

L'obiettivo del lavoro di tesi riguarda lo sviluppo di un Modello per la Balistica Interna per un Endoreattore a Propellente Solido. Tale modello, implementato in ambiente MATLAB, è in grado di interfacciarsi con il Simulatore di Regressione Superficiale sviluppato presso il Laboratorio di Propulsione e Macchine di Forlì. L'accoppiamento dei suddetti moduli costituisce un Simulatore Completo del processo di combustione di un generico razzo a propellente solido.

Il modulo riguardante il modello per la balistica interna è caratterizzato dall'accoppiamento di un modello Zero-Dimensionale non Stazionario e di un modello Mono-Dimensionale Stazionario fornendo in ingresso al simulatore di regressione superficiale la distribuzione della velocità di combustione lungo la camera di combustione, così da poter prevedere la regressione del grano propellente lungo la fase operativa di un generico SRM. Mediante il suddetto accoppiamento è stato possibile prevedere le caratteristiche delle variabili termofluidodinamiche sia in funzione del tempo di propulsione, attraverso il modello 0D non stazionario, e sia in funzione della camera di combustione, attraverso il modello 1D stazionario.

I dati sperimentali forniti attraverso la collaborazione con l'azienda AVIO-BPD ci hanno permesso di implementare e validare il modello per la balistica interna con riferimento al terzo stadio del vettore VEGA, denominato *Zefiro 9*. Essendo una motorizzazione con bassi rapporti di Lunghezza-Diametro Idraulico non è stato possibile illustrare le potenzialità del modello mono-dimensionale che per motorizzazioni diverse potrebbe essere di fondamentale importanza. Sarà perciò necessario analizzare il modello per la balistica interna su motorizzazioni con diverse caratteristiche. Con riferimento alla motorizzazione *Zefiro 9* è stato possibile effettuare una validazione del modello balistico sviluppato e successivamente effettuare un'analisi completa del processo di combustione della suddetta motorizzazione.

A causa della non corretta valutazione delle portate di ablazione delle protezioni termiche si osservano, nella parte terminale della propulsione, piccole differenze sull'andamento della pressione. Nonostante tale discrepanza si è osservato come il modello sia capace di prevedere i parametri termofluidodinamici di interesse.

E' necessario a tal proposito realizzare un modello efficiente atto a migliorare la stima della suddetta portata.

In conclusione è possibile affermare che il modello realizzato durante il lavoro di tesi sia efficiente sia a livello di precisione sia a livello di tempo di calcolo.

Bibliografia

- [1] M. A. Willcox, M. Q. Brewster, K. C. Tang, D. S. Stewart, Igor Kuznetsov, "*Solid Rocket Motor Internal Ballistics Simulation Using Three-Dimensional Grain Burnback*", University of Illinois at Urbana-Champaign, 2007
- [2] X. Jiao, G. Zheng, O. Lawlor, P. Alexander, M. Campbell, M. Heath, R. Fiedler, "*An Integration Framework for Simulations of Solid Rocket Motors*", University of Illinois, 2005
- [3] George P. Sutton, Oscar Biblarz, "*Rocket Propulsion Elements*", John Wiley & Sons, 8th edition, 2010
- [4] E. Cavallini, "*Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics*", PhD Thesis, Università di Roma la Sapienza, 2009
- [5] Philip Hill, Carl Peterson, "*Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*", Addison-Wesley Publishing Company, 2th edition, 1992
- [6] Thomas E. Kallmeyer, Larry H. Sayer, "*Differences Between Actual and Predicted Pressure-Time Histories of Solid Rocket Motors*", Thiokol Corporation/Wasatch Division, 1982
- [7] Filippo Facciani, "*Studio, Sviluppo ed Implementazione di Modelli per la Balistica Interna di Razzi a Propellente Solido*", Tesi di Laurea Specialistica, Università di Bologna, 2012
- [8] J.M. Lenoir, G. Robbilar, "*A Mathematical Method to Predicated the Effects of Erosive Burning in Solid-Propellant Rocket*", 6th symposium (International) on Combustion, Reinhold, New York, 1957
- [9] R. Beddini, "*Effects of Grains Port Flow on Solid Propellant Erosive Burning*", in AIAA Paper 78-977, July 1978
- [10] Shafer J. I., H.S. Seifert, "*Solid Rocket Propulsion*", in Space Technology, Wiley, Ney York, 1969

- [11] S. De Soto, A. Friedman, "*Flame Spreading and Ignition Transient in Solid Grain Propellant*", AIAA Journal, 3(3):405-412, March 1965
- [12] H. Bradley, "*Theory of a Homogeneous Model of Rocket Motor Ignition Transient*", AIAA Paper 64-127, Solid Propellant Rocket Conference, Palo Alto, California, January, 1964
- [13] A. Peretz, K. Kuo, L. Caveney, M. Summerfield, "*Starting Transient of Solid Propellant Rocket Motor with High Internal Gas Velocities*", AIAA Journal, 11(12): 1719-1727, December, 1973
- [14] A. H. Shapiro, "*The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Flow*", Volume 1, The Roland Press Company, 1953
- [15] Sabatta Filippo, "*Gas Dinamica*", Edizione Ingegneria 2000, Roma 1999
- [16] Nasa Glenn Research Center. Chemical Equilibrium with Application. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/CEAWeb/>
- [17] Incropera, Dewitt, Bergman, Lavine, "*Fundamentals of Heat and Mass Transfer*", Wiley & Sons Ltd, 2006
- [18] D. Fedele, "*Modello di Calcolo per la Valutazione delle Prestazioni Propulsive di un Motore Ibrido*", Tesi di Laurea Magistrale, Università di Bologna, 2012
- [19] M. J. Chiavarini, K. K. KUO, A. Peretz, G. C. Herting, "*Regression-Rate and Heat Transfer Correlation for Hybrid Rocket Combustion*", Journal of Propulsion and Power, Vol. 17, No.1: pp. 99-110, May-June, 2001
- [20] M. F. Modest, "*Radiative Heat Transfer*", McGraw-Hill, New York, 1993
- [21] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, "*Matematica Numerica*", Springer, 2th Edizione, 2000
- [22] J. H. Mathew, K. D. Fink, "*Numerical Methods Using MATLAB*", Prentice Hall, 3th Edition, 1999
- [23] G. Monegato, "*Fondamenti di Calcolo Numerico*", Clut, 1998
- [24] AVIO-BPD, "*Overview Modelli Balistici*", Dicembre 1995

- [25] John D. Anderson Jr., *"Modern Compressible Flow with Historical Perspective"*, McGraw-Hill, New York, 1990
- [26] M. F. Baffa, *"Implementazione di un Modello per la Balistica Interna Zero-Dimensionale non Stazionario per un Razzo a Propellente Solido"*, Preparazione alla Tesi, università di Bologna, 2013
- [27] M. Bakarad, B. Zecevic, J. Terzic, *"Influence of the Solid Propellant Grains Processing on Burning Rate of Double Base Rocket Propellant"*, pages 547-558, 6th Seminar New Trends in Research of Energetic Materials, University of Pardubica, April 23, 2003.
- [28] A. Rizzi and I. Eriksson, *"Explicit Multistage Finite Volume Procedure to Solve the Euler Equations for Transonic Flow"*, Von Karman Institute, Rhode-St-Genese, Belgium, 1983
- [29] Bertacin R., Ponti F., Annovazzi A., *"A New Three-Dimensional Ballistic Model for Solid Rocket Motor Non-Homogeneous Combustion"*, 48th AIAA/ASME/SAE/ASEE JPC 2012, Atlanta (Georgia), 30 luglio-1 agosto 2012
- [30] Bertacin R., Ponti F., Fedele D., Annovazzi A., *"Numerical Simulation of the Zefiro 9 Performance using a New SRM Ballistic Simulator"*, 49th AIAA/ASME/SAE/ASEE JPC 2013, San Jose (California), 14-17 luglio 2013