

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA**  
**FACOLTÀ DI INGEGNERIA**  
**CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE**

---

**D.I.S.T.A.R.T.**  
**Dipartimento di Ingegneria delle Strutture, dei Trasporti,**  
**delle Acque, del Rilevamento e del Territorio**

**CALCOLO AUTOMATICO DELLE STRUTTURE**

**ANALISI MULTILIVELLO**  
**DI STRUTTURE IN MURATURA**

**TESI DI LAUREA DI:**  
**Daniele Nanetti**

**RELATORE:**  
**Chiar.mo Prof. Ing. Francesco Ubertini**

**CORRELATORI:**  
**Prof. Ing. Stefano de Miranda**  
**Ing. Luisa Molari**

---

**Anno Accademico 2008 - 2009**

# Indice

<b>Introduzione</b>	1
<b>Capitolo 1</b>	
<b>La muratura: caratteristiche e tecniche costruttive</b>	5
<b>1.1 Introduzione</b>	5
<b>1.2 La muratura</b>	6
<b>1.3 Gli elementi costituenti la muratura</b>	8
1.3.1 Elementi in laterizio	8
1.3.2 Elementi in calcestruzzo	10
1.3.3 Elementi in pietra	11
<b>1.4 Le malte</b>	12
<b>1.5 Tecniche moderne e tipi strutturali</b>	13
1.5.1 Tecniche moderne	13
1.5.2 Tipi strutturali	16
<b>Capitolo 2</b>	
<b>La muratura: caratteristiche meccaniche e verifiche</b>	23
<b>2.1 Introduzione</b>	23
<b>2.2 Caratteristiche meccaniche della muratura</b>	23
<b>2.3 Stati di tensione monoassiali</b>	26
2.3.1 Compressione (normale ai letti di malta)	26
2.3.2 Trazione (normale ai letti di malta)	35

2.3.3 Stati tensionali complessi	36
2.3.4 Deformazioni differite nel tempo	42
<b>2.4 Stati limite di elementi strutturali</b>	<b>43</b>
2.4.1 Azioni nel piano medio	44
2.4.1.1 Fessurazione per flessione o pressoflessione	45
2.4.1.2 Stato limite ultimo per pressoflessione	47
2.4.1.3 Fessurazione e stato limite ultimo per sollecitazioni taglienti	50
2.4.1.4 Muratura non armata - Il criterio della resistenza a trazione convenzionale	52
2.4.1.5 Muratura non armata - Il criterio “alla Coulomb”	53
2.4.1.6 Muratura armata	54
2.4.2 Azioni ortogonali al piano medio	56
2.4.3 Effetti del secondo ordine	59
<b>2.5 Modelli d’insieme, analisi strutturale e verifiche di sicurezza</b>	<b>63</b>
2.5.1 Analisi e verifica sotto carichi verticali	63
2.5.2 Analisi e verifica sotto carichi orizzontali	68
<b>2.6 Edifici in muratura soggetti all’azione sismica</b>	<b>75</b>
2.6.1 Comportamento ciclico della muratura soggetta ad azioni nel piano	77
2.6.1.1 Muratura non armata	77
2.6.1.2 Muratura armata	80

## **Capitolo 3**

### **Metodi di analisi delle strutture in muratura**

<b>3.1 Introduzione</b>	83
<b>3.2 Modelli basati sull'analisi del singolo piano</b>	84
3.2.1 Metodo POR	86
<b>3.3 Modelli a macroelementi</b>	101
3.3.1 Metodo PEFV	102
3.3.1.1 Confronto tra risposta fornita dalla modellazione PEFV e quella fornita dal metodo POR	111
3.3.2 Metodo a telaio equivalente (metodo SAM)	113
3.3.2.1 L'elemento maschio murario	114
3.3.2.2 L'elemento fascia muraria	119
3.3.3 Metodo 3MURI	122
3.3.3.1 Elemento trave non lineare in muratura	131
3.3.3.2 Modellazione della parete	132

## **Capitolo 4**

### **Analisi multilivello di strutture in muratura**

<b>4.1 Introduzione</b>	135
<b>4.2 Schema generale della strategia multilivello</b>	136
<b>4.3 Livello locale</b>	142
4.3.1 Comportamento non lineare dei giunti di malta	143
4.3.1.1 Ipotesi meccaniche iniziali	143
4.3.1.2 Relazioni costitutive	145
4.3.1.3 Leggi di evoluzione del danno	148
4.3.2 Strategia numerica	151

4.3.2.1	Approccio path-following	151
4.3.2.2	Aspetti generali della formulazione	155
4.3.2.3	Scelte di formulazione	157
4.3.2.4	Aggiornamento iterativo delle variabili di danno	160
4.3.2.5	Sommario dell'algoritmo di soluzione	161
4.3.2.6	Versioni compatibili dell'algoritmo di soluzione	165
<b>4.4</b>	<b>Livello globale</b>	<b>167</b>
4.4.1	Identificazione costitutiva	168
4.4.1.1	Procedura di identificazione	168
4.4.1.2	Continuo di Cauchy vs continuo di Cosserat	169
4.4.2	Identificazione semplice (numerica)	174
4.4.3	Operatori di trasferimento	179
<b>4.5</b>	<b>Strategia di analisi</b>	<b>182</b>
4.5.1	Processo di soluzione path-following	183
4.5.2	Sistema di iterazione globale	186
4.5.3	Sistemi di iterazione locali	188
4.5.3.1	Iterazione mattone per mattone	188
4.5.3.2	Iterazione elemento per elemento	189
4.5.3.3	Aggiornamento del danno	191
4.5.4	Vincolo path-following	193
4.5.5	Ulteriori dettagli computazionali	195
4.5.6	Unicità della soluzione e argomenti correlati	199

## **Capitolo 5**

### **Test di validazione**

<b>5.1 Introduzione</b>	201
<b>5.2 Esempio n°1</b>	202
5.2.1 Caratteristiche geometriche e meccaniche	202
5.2.2 Risultati ottenuti	205
<b>5.3 Esempio n°2</b>	208
5.3.1 Caratteristiche geometriche e meccaniche	208
5.3.2 Risultati ottenuti	210
5.3.3 Confronto dei risultati sperimentali con i risultati ottenuti con l'analisi multilivello	213
<b>5.4 Esempio n°3</b>	219
5.4.1 Caratteristiche geometriche e meccaniche e risultati dell'analisi	219

<b>Conclusioni</b>	225
--------------------	-----

<b>Bibliografia</b>	229
---------------------	-----



# Introduzione

La muratura è la tecnica costruttiva più antica e diffusa. Negli ultimi decenni si sono avuti numerosi sviluppi nei materiali e nelle applicazioni, ma il metodo di posa in opera del materiale è rimasto uguale nei secoli, ossia attraverso la sovrapposizione degli elementi intervallati da giunti di malta.

Le costruzioni in muratura hanno avuto un elevato sviluppo in passato grazie alla relativa semplicità di posa in opera del materiale ed alla semplicità di ricavare gli elementi principali.

Oggi invece è un sistema costruttivo che è stato messo da parte a favore di quelli basati su cemento armato e acciaio, questo a causa di una mancanza di conoscenza del comportamento strutturale sotto le azioni orizzontali quali quelle del sisma.

Questo particolare comportamento delle strutture murarie rende molto difficile raggiungere affidabili risultati numerici per mezzo di codici di calcolo standard.

Diversi studiosi ed esperti hanno cercato di modellare questo problema attraverso diversi tipi di approccio.

I metodi che sono stati studiati e sviluppati si differenziano in tre grandi gruppi:

- metodi basati sull'analisi del singolo piano, come ad esempio il metodo POR, capostipite dei metodi di modellazione del comportamento della muratura



- metodi che utilizzano una modellazione a macroelementi
- strategie ed analisi multilivello.

Queste ultime, appunto, verranno approfondite ed ampliate in questo testo, e si cercherà di renderle applicative confrontando i risultati relativi a prove sperimentali con i risultati ottenuti mediante una modellazione multilivello, basata cioè su due diversi livelli di descrizione, uno locale e uno globale. Questa dissertazione vuole essere un ulteriore contributo all'approfondimento delle tematiche relative all'individuazione di una strategia consona all'analisi di pannelli in muratura soggetti a forze di compressione e di taglio nel proprio piano.

Essa si compone di cinque capitoli, come di seguito riportato.

Nel primo capitolo si descriveranno le diverse tipologie di muratura, le tecniche di costruzione e le caratteristiche fisiche e meccaniche dei suoi componenti.

Nel secondo capitolo si effettuerà una panoramica sull'evoluzione della normativa che ha interessato le metodologie di progettazione degli edifici in muratura.

Nel terzo capitolo si descriveranno i metodi di discretizzazione delle strutture murarie presenti in letteratura, sviluppati e consolidati nel corso degli anni. Si porrà l'accento anche sulle differenze tra i diversi metodi, soprattutto per quanto riguarda il metodo utilizzato nella definizione dei parametri relativi al pannello murario.

Nel quarto capitolo si entrerà all'interno dell'analisi multilivello di strutture in muratura, confrontando questa con i metodi visti in precedenza, descrivendone i principali aspetti e le principali applicazioni nell'ambito delle strutture in muratura.

Nel quinto capitolo si renderà applicativo ciò che è stato visto nel precedente capitolo, cercando nella letteratura nazionale ed internazionale documenti e pubblicazioni relativi a dati sperimentali ottenuti su pannelli murari di diversa grandezza e di diversa geometria, per poi modellarli e analizzarli attraverso la strategia multilivello.



# Capitolo 1

## La muratura: caratteristiche e tecniche costruttive

### **1.1 Introduzione**

Questo capitolo vuole gettare le basi per i successivi capitoli che descriveranno i metodi per la modellazione delle strutture in muratura. Viene di seguito presentata e descritta la muratura di mattoni e le caratteristiche principali dei suoi componenti (mattoni e giunti di malta). Si porrà anche l'attenzione sulle recenti tecniche costruttive e sull'utilizzo della muratura in ambito civile ed edile.

### **1.2 La muratura**

La muratura è un insieme di elementi posati secondo una specifica tessitura e collegati fra loro con malta. I giunti di posa sono di regola orizzontali, e a tale disposizione si riferiscono le modellazioni moderne correnti. Tuttavia, negli archi la disposizione più frequente dei giunti è normale all'asse longitudinale, e nelle volte e cupole si sono adottate disposizioni speciali tendenti a contrastare la formazione di lunghe fessure lungo i giunti.

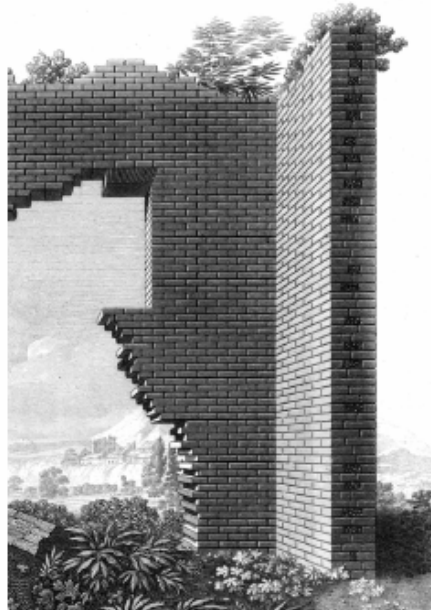


Fig. 1.1 – Muratura di mattoni

Gli elementi resistenti (blocchi, mattoni, conci) costituenti la muratura sono generalmente di forma parallelepipedica. Alcune tecniche moderne prevedono anche l'uso di forme particolari (blocchi a incastro, a T), allo scopo di ridurre la trasmittanza termica, o di facilitare la realizzazione di spessori diversi, o per facilitare la costruzione, o per altri impieghi speciali.

È il caso di sottolineare come le caratteristiche dei materiali moderni, in particolare degli elementi, siano il frutto di una continua evoluzione tecnologica che tende al raggiungimento di adeguate caratteristiche sia per quel che riguarda le prestazioni meccaniche, sia per quel che riguarda le proprietà di isolamento termo-acustico, di resistenza al fuoco, di durabilità. Nel seguito si presentano brevemente gli elementi costituenti la muratura e alcune delle proprietà significative dal punto di vista meccanico.

## **1.3 Gli elementi costituenti la muratura**

Gli elementi per la costruzione della muratura possono essere in laterizio, in calcestruzzo, oppure in pietra. In alcuni paesi esteri sono anche diffusi elementi in silicato di calcio (mattoni silico-calcarei), che tuttavia sono sostanzialmente assenti nella tradizione costruttiva italiana.

### **1.3.1 Elementi in laterizio**

Gli elementi in laterizio possono essere di laterizio normale o alleggerito in pasta, per migliorare le caratteristiche di isolamento termico; si ottengono mediante l'indurimento per cottura ad alta temperatura di paste di argilla modellate.

Gli elementi possono essere dotati di fori in direzione normale al piano di posa (a foratura verticale) oppure in direzione parallela. Spesso sono presenti uno o due fori di dimensioni maggiori, per la presa, utilizzati in alcuni casi anche per l'alloggiamento di armature (muratura armata).

Alcuni esempi di elementi murari in laterizio sono riportati in figura 1.2.

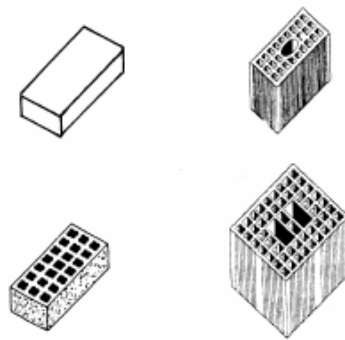


Fig. 1.2 – Alcuni esempi di elementi murari in laterizio

Le normative distinguono gli elementi in categorie in base alla loro foratura. A titolo di esempio, la normativa italiana definisce tre classi di elementi per uso strutturale:

elementi pieni:  $F/A \leq 15\%$  e  $f \leq 9 \text{ cm}^2$

elementi semipieni:  $15\% \leq F/A \leq 45\%$  e  $f \leq 12 \text{ cm}^2$

elementi forati:  $45\% \leq F/A \leq 55\%$  e  $f \leq 15 \text{ cm}^2$

con  $F$  area complessiva dei fori passanti e profondi non passanti,  $A$  area lorda della faccia delimitata dal suo perimetro,  $f$  area media della sezione normale di un foro.

Il laterizio come materiale può avere una resistenza a compressione anche molto elevata (fino a  $130 \text{ N/mm}^2$ ), tuttavia i mattoni e i blocchi, specie in presenza di forature, presentano resistenze minori. La resistenza  $f_b$  è comunemente riferita all'area lorda dell'elemento (cioè l'area racchiusa dal perimetro), e misurata normalmente al piano di posa. Tuttavia, specialmente nel caso di blocchi portanti con forature, è di interesse anche la resistenza misurata parallelamente al piano di posa ( $f_b$ ) ovvero perpendicolarmente ai fori. Valori tipici delle resistenze caratteristiche per elementi portanti in laterizio possono variare da  $2 - 3 \text{ N/mm}^2$  per blocchi in laterizio alleggerito con percentuale di foratura prossima al  $50 - 55\%$  fino a  $30 - 50 \text{ N/mm}^2$  per blocchi semipieni.

### **1.3.2 Elementi in calcestruzzo**

Esistono diverse tipologie di elementi in calcestruzzo, in base alla natura dei materiali. Le tipologie più diffuse sono:

- elementi in calcestruzzo di aggregato denso, prodotti miscelando aggregati selezionati, cemento ed altri materiali in una forma rigida sotto pressione o vibrazione;
- elementi in calcestruzzo di aggregato leggero, prodotti miscelando cemento con un aggregato principale a bassa densità, quale scisto argilloso espanso, argilla espansa o altro, formati sotto pressione o vibrazione.

In aggiunta a queste, esiste un'altra tipologia, quella degli elementi in calcestruzzo aerati autoclavati, prodotti miscelando aggregato fine siliceo, cemento, calce e un appropriato agente aerante e trattati con processo in autoclave, che hanno comunque al momento minima diffusione come materiale strutturale.

Alcune possibili forme per gli elementi in calcestruzzo sono riportate in figura 1.3. I blocchi in calcestruzzo sono utilizzati sia per la muratura non armata che armata. Alcune forme di blocchi con fori molto ampi permettono l'inserimento di rinforzi o cordolature in c.a., oppure sono utilizzate come casseri a perdere con successivo riempimento mediante getto di calcestruzzo. Anche per i blocchi in calcestruzzo esiste una classificazione in base alla percentuale di foratura, analogamente a quanto specificato per i laterizi. Le resistenze a compressione dei blocchi in calcestruzzo possono variare da  $2 - 3 \text{ N/mm}^2$  nel caso di calcestruzzo leggero, fino a circa  $20 - 30 \text{ N/mm}^2$ .

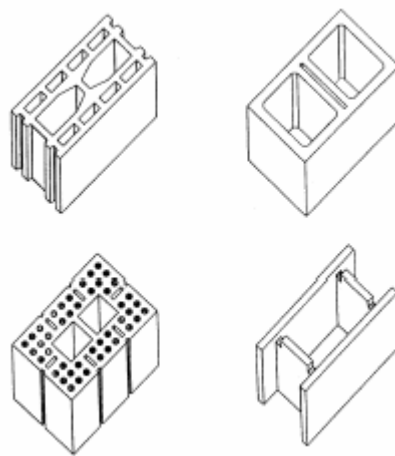


Fig. 1.3 – Alcuni esempi di elementi murari in calcestruzzo

### 1.3.3 Elementi in pietra

Le caratteristiche fisico-meccaniche delle pietre variano entro limiti abbastanza ampi, anche per uno stesso tipo di pietra. Valori indicativi della resistenza variano da  $0,3$  a  $10 - 15 \text{ N/mm}^2$  per rocce tenere (tufi), da  $4$  a  $200 \text{ N/mm}^2$  per rocce semidure (arenarie, calcari, travertini), da  $40$  a  $500 \text{ N/mm}^2$  per rocce dure (dolomie, porfidi, serpentini, graniti, marmi). Il rapporto fra resistenza a compressione e resistenza a trazione è normalmente compreso fra 15 e 40, con addensamento dei valori attorno a 30.

È bene ricordare che nella muratura in pietra, ancor più che nelle murature con elementi artificiali, regolari dal punto di vista geometrico, la resistenza della muratura è fortemente condizionata, oltre che dalla resistenza delle pietre, dalla forma e dalle dimensioni degli elementi, dalla lavorazione



(pietra squadrata o sbozzata), dalla loro disposizione (ovvero dalla “tessitura” della muratura), e dalla resistenza della malta. Con pietre di elevata resistenza, la resistenza della muratura è sostanzialmente limitata dalle proprietà della malta.

## 1.4 Le malte

Le malte per muratura sono classificate secondo la composizione (cioè le proporzioni di leganti, sabbia e ogni altro componente) e le loro proprietà meccaniche.

I leganti utilizzati nelle malte per muratura sono comunemente il cemento, la calce idraulica, la calce idrata, la pozzolana. Sono inoltre utilizzati additivi chimici per rendere le malte adatte a scopi diversi:

- additivi plastificanti per migliorare la lavorabilità;
- additivi plastificanti e trattenenti l'acqua, per minimizzare l'adsorbimento dell'acqua di impasto da parte degli elementi (fenomeno che può fortemente condizionare le qualità meccaniche del giunto di malta);
- additivi per ritardare la presa di malta premiscelata in stabilimento;
- additivi impermeabilizzanti;
- additivi con proprietà adesive.

La normativa italiana definisce quattro classi di malta (M1, M2, M3, M4) di qualità meccaniche decrescenti da M1 a M4, definendo le proporzioni in volume di leganti e di sabbia. Le malte sono classificate secondo la loro resistenza media a compressione, che deve rispettivamente essere maggiore di  $12 \text{ N/mm}^2$ ,  $8 \text{ N/mm}^2$ ,  $5 \text{ N/mm}^2$ ,  $2,5 \text{ N/mm}^2$ .

## **1.5 Tecniche costruttive moderne e tipi strutturali**

### **1.5.1 Tecniche costruttive moderne**

Le moderne tecniche costruttive per la muratura strutturale si distinguono in tre tipologie:

- la muratura semplice o non armata;
- la muratura armata;
- la muratura intelaiata.

La muratura non armata, costituita dal semplice assemblaggio degli elementi murari con malta o a secco, presenta una bassa resistenza a trazione, soprattutto in direzione normale ai giunti orizzontali, e meccanismi di collasso tendenzialmente di tipo fragile (taglio, instabilità). L'introduzione di armature (muratura armata) o cordolature in c.a. (muratura intelaiata) consente di assorbire le trazioni e di ridurre la fragilità dei meccanismi di collasso.

La muratura armata prevede l'introduzione di armature verticali e orizzontali all'interno della muratura. L'armatura verticale può trovare alloggiamento in appositi fori verticali presenti nei blocchi (Fig. 1.4 a) oppure in tasche create con una disposizione opportuna degli elementi (Fig. 1.4 b). I fori e le tasche sono successivamente riempiti con malta o calcestruzzo. L'armatura orizzontale, sotto forma di barre semplici o tralicci, può trovare alloggiamento nei letti di malta (Fig. 1.4 c) oppure entro tasche a sviluppo orizzontale create da una opportuna conformazione dei blocchi (Fig. 1.4 d). Un particolare tipo di muratura armata è inoltre la muratura a cavità con parete di cemento armato inclusa tra due pareti in muratura (Fig. 1.4 e).

Le funzioni dell'armatura possono essere così sintetizzate:

- conseguire un aumento della resistenza a flessione sia per azioni ortogonali che parallele al piano della muratura, con conseguente aumento della stabilità dell'edificio nei confronti delle azioni orizzontali (vento, sisma);
- evitare collassi successivi alla fessurazione e mantenere l'integrità della parete oltre il campo elastico, con un sensibile aumento della duttilità ed una diminuzione della suscettibilità al danneggiamento: tale funzione si esplica anche in un aumento della resistenza a taglio per azioni nel piano.

In basse percentuali, un'armatura diffusa può essere efficace nel contenere fessurazioni indesiderate in condizioni di esercizio, dovute a concentrazioni di tensione o a stati di coazione causati da deformazioni differenziali (deformazioni viscoso o da ritiro, deformazioni termiche).

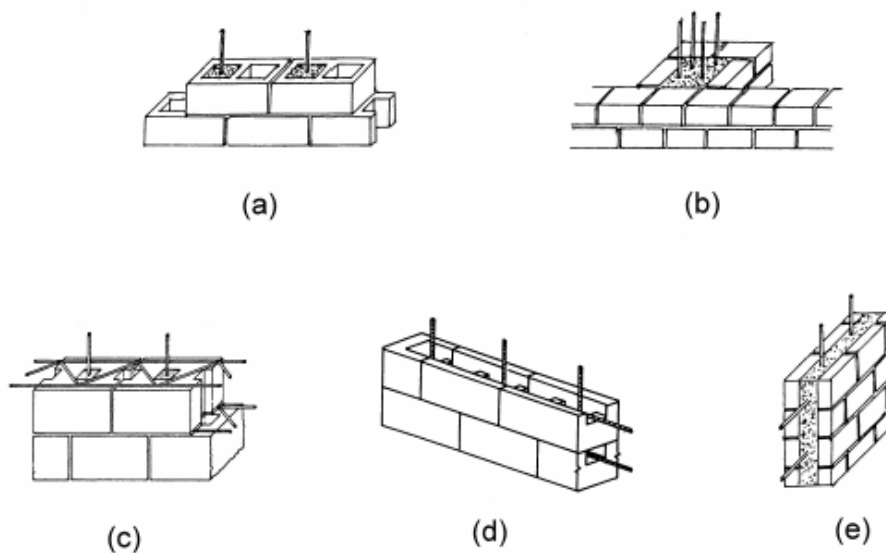


Fig. 1.4 – Tipologie di muratura armata

La muratura intelaiata viene realizzata mediante cordoli in cemento armato orizzontali e verticali adeguatamente collegati tra loro ed aderenti agli elementi murari assieme ai quali formano l'organismo resistente (Fig. 1.5). L'effetto di intelaiamento prodotto dall'introduzione di cordoli

verticali collegati con quelli orizzontali fornisce alla struttura un maggior livello di duttilità, un minor degrado di resistenza e una minore suscettibilità al danneggiamento.

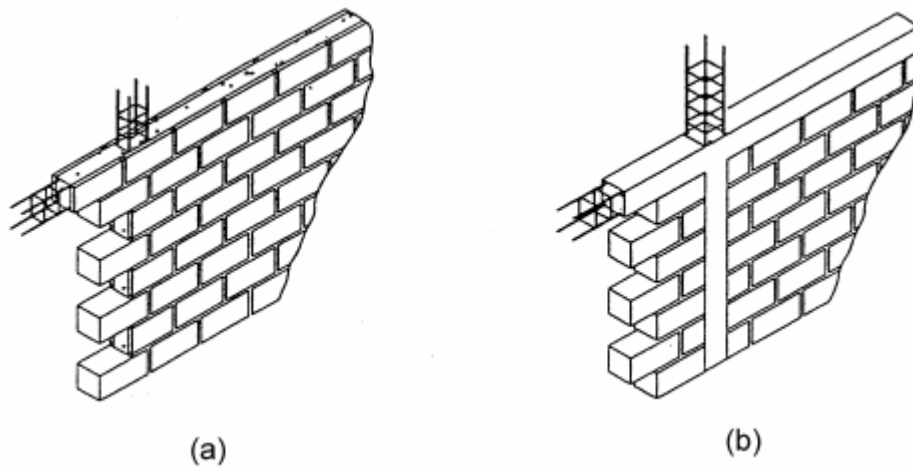


Fig. 1.5 – Tipologie di muratura intelaiata

Per qualunque tipo di muratura, dal punto di vista della solidità e robustezza della costruzione, è fondamentale che gli elementi murari siano disposti in modo da garantire un buon ammorsamento reciproco, sia nel piano che trasversalmente, prevedendo una sufficiente sovrapposizione fra gli elementi stessi. In figura 1.6 si riportano alcuni esempi di murature adeguate da questo punto di vista.

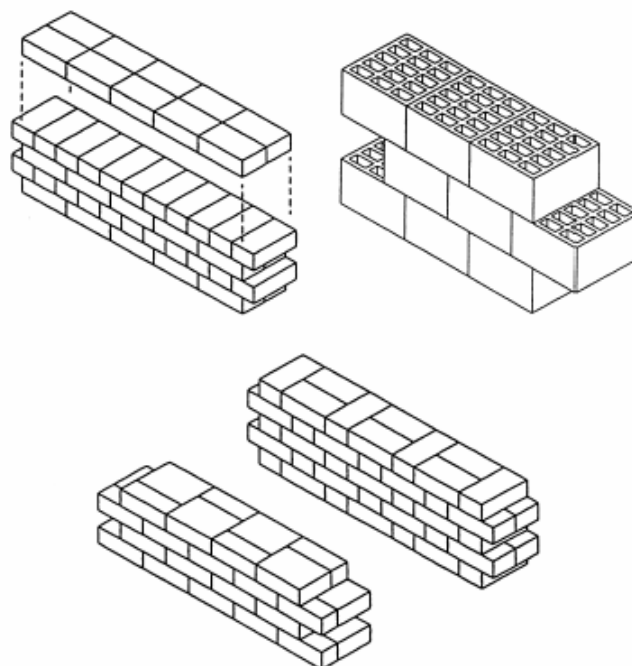


Fig. 1.6 – Esempi di disposizioni dei blocchi (apparecchiature) corrette ai fini di un buon ammassamento

## 1.5.2 Tipi strutturali

Gli edifici in muratura sono generalmente strutture tridimensionali complesse, ove tutti gli elementi cooperano nel resistere ai carichi applicati. Data la complessità del comportamento reale di tali strutture, il progetto e l'analisi strutturale richiedono spesso l'introduzione di notevoli semplificazioni. Per motivi di brevità ci si limiterà in questo capitolo a descrivere le forme strutturali più semplici e frequenti per gli edifici di moderna costruzione, che sono solitamente costituiti da muri e solai piani. Strutture ad arco o a volta, particolarmente importanti nelle costruzioni storiche, o altre strutture particolari richiedono un maggiore approfondimento che qui non verrà affrontato.

In generale, la struttura di un edificio può essere concepita e progettata considerandola come un insieme tridimensionale di muri e solai, oppure come una serie di strutture “a telaio”, o come una serie di elementi indipendenti opportunamente assemblati.

Quest'ultima ipotesi è quella più comunemente usata, ed il progetto è fondato sul calcolo indipendente dalla resistenza e dalle condizioni di esercizio di:

- muri che sopportano principalmente i carichi verticali (detti convenzionalmente portanti);
- muri che sopportano principalmente i carichi orizzontali (detti di controventamento), disposti parallelamente alla direzione dei carichi;
- muri che svolgono sia una funzione portante che di controventamento;
- solai sufficientemente rigidi e resistenti per ripartire le azioni tra i muri di controventamento (azione di diaframma).

Lo schema generale della struttura e la connessione dei vari elementi devono essere tali da conferire l'opportuna stabilità e robustezza. È possibile trovare in letteratura alcune classificazioni in merito alla disposizione dei muri portanti e all'orditura dei solai, distinguendo sostanzialmente uno schema

a muri portanti longitudinali (ovvero paralleli alla dimensione maggiore dell'edificio, che sostengono solai ad orditura ortogonale ad essa, Fig. 1.7 a), uno a muri portanti trasversali (ortogonali alla dimensione maggiore dell'edificio, Fig. 1.7 b), uno a nuclei o cellule (muri portanti in entrambe le direzioni con solai a piastra o con orditura alternata Fig. 1.7 c).

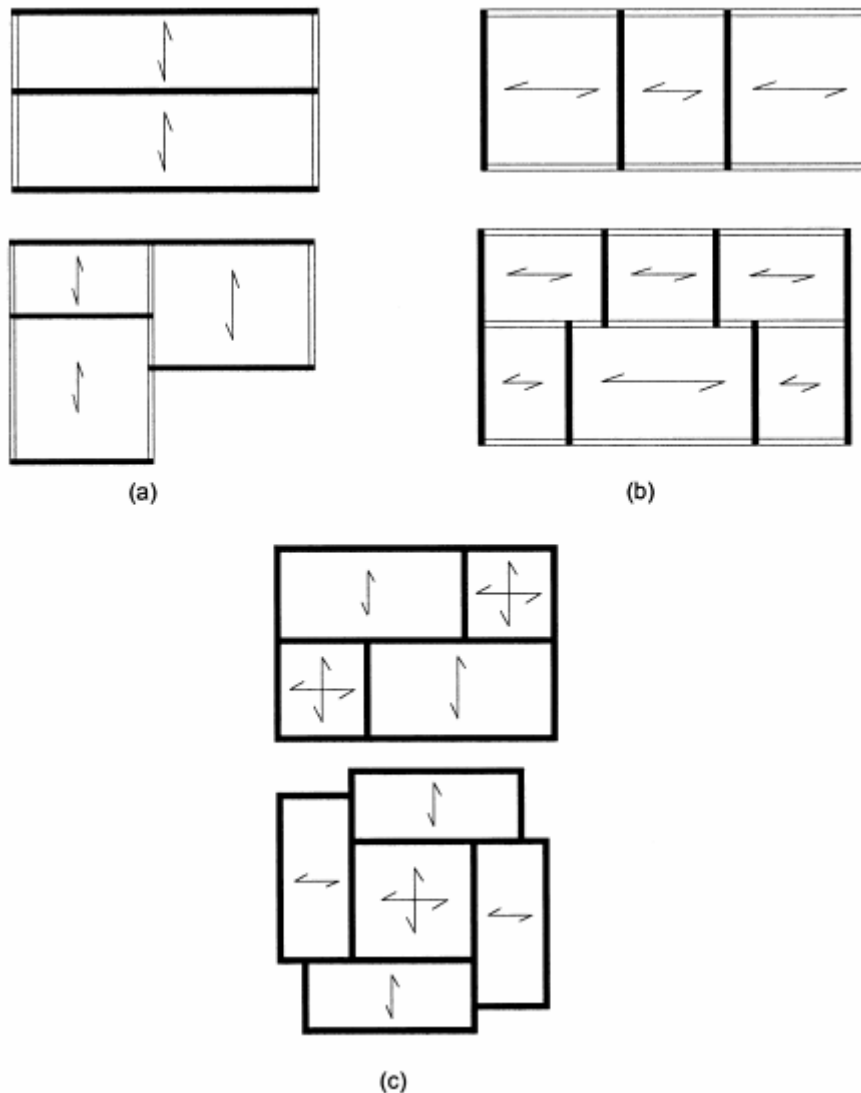


Fig. 1.7 – Schemi a muri portanti longitudinali (a), a muri portanti trasversali (b), cellulare (c)

I muri portanti fungono anche da muri di controvento in direzione parallela al loro piano medio e la stabilità dell'edificio alle azioni orizzontali richiede necessariamente anche la presenza di muri di controvento ortogonali a quelli portanti. D'altra parte la capacità dei muri di resistere alle azioni orizzontali, sia complanari che trasversali, è favorevolmente influenzata dalla presenza di azioni

verticali stabilizzanti, soprattutto nel caso di muri non armati. Si può quindi riconoscere come il terzo schema, in cui tutti i muri strutturali hanno funzione portante e di controvento, sia quello più idoneo dal punto di vista dell'efficienza statica e che realizza in modo migliore un effettivo comportamento di tipo "scatolare". La normativa specifica appunto che per quanto possibile tutti i muri devono avere sia funzione portante che di controventamento.

In tal senso, per favorire il comportamento scatolare è indispensabile che muri portanti, muri di controventamento e solai siano efficacemente collegati tra loro.

Tale collegamento può essere effettuato mediante la realizzazione di cordoli orizzontali continui di cemento armato (Fig. 8) lungo tutti i muri, all'altezza dei solai di piano e di copertura.

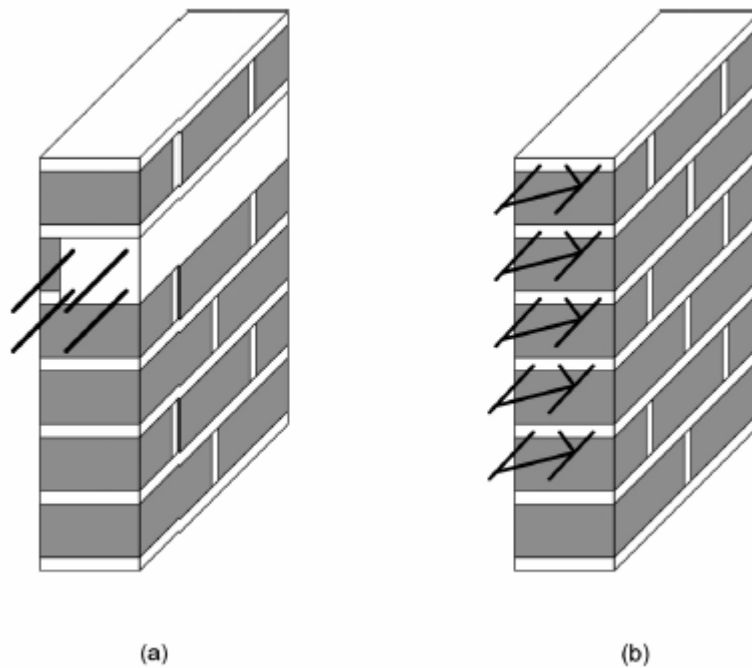


Fig. 1.8 – I cordoli in c.a. (a) o armature orizzontali continue (b) all'altezza degli orizzontamenti hanno la funzione di "legare" pareti e solai, favorendo il comportamento scatolare.

Le funzioni del cordolo continuo sono molteplici.

Da un lato, esso svolge una funzione di vincolo alle pareti sollecitate ortogonalmente al proprio piano, ostacolandone il meccanismo di ribaltamento (Fig. 1.9).

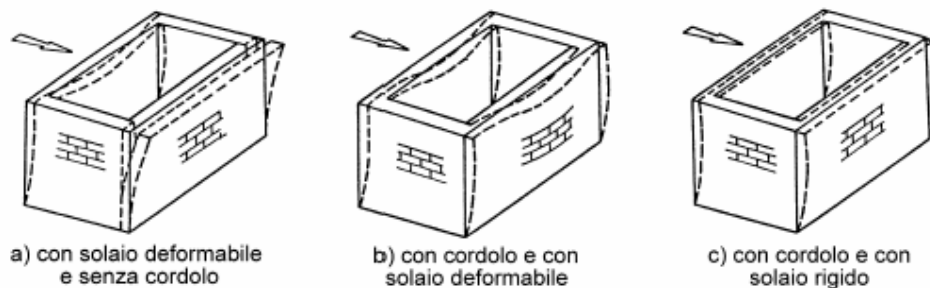


Fig. 1.9 – Schematizzazione della risposta di un edificio elementare alle azioni orizzontali, in funzione della presenza di cordoli e solai

Inoltre, esso consente di ridistribuire le azioni orizzontali fra muri di controventamento complanari, e conferisce una maggiore stabilità ed iperstaticità al sistema resistente. Parte di queste funzioni erano e sono tuttora svolte nelle costruzioni storiche dalle catene con capochiave. Le catene tuttavia sono collegate alle pareti solamente in alcuni punti (al capochiave) e non sono dotate di rigidità flessionale.

L'armatura longitudinale minima e la staffatura minima dei cordoli variano a seconda dell'altezza globale dell'edificio e della posizione del cordolo relativamente allo sviluppo in altezza dell'edificio.

Vale la pena ricordare che buona parte delle funzioni di un cordolo in cemento armato può essere svolta, in alcuni casi, anche da armature orizzontali continue disposte nei letti di malta. È ovviamente fondamentale garantire anche in questo caso la continuità delle armature lungo il perimetro (particolarmente delicati i dettagli delle giunzioni per sovrapposizione).

Ai fini della robustezza e della stabilità d'insieme, i muri paralleli della scatola muraria devono essere inoltre collegati fra di loro ai livelli dei solai da incatenamenti metallici efficacemente ancorati ai cordoli ed ortogonali ai muri stessi.



La funzione degli incatenamenti ortogonali all'orditura dei solai è principalmente quella di costituire un ulteriore vincolo all'inflessione fuori dal piano dei muri quando questi non siano già caricati e quindi vincolati da un solaio di adeguata rigidezza.

È inoltre opportuno che i muri siano efficacemente ammorsati tra di loro lungo le intersezioni verticali, mediante un'adeguata disposizione degli elementi (Fig. 1.10). Il buon ammorsamento dei muri, tra l'altro, tende a realizzare una redistribuzione dei carichi verticali tra muri ortogonali anche nel caso di solai ad orditura prevalente in una sola direzione.

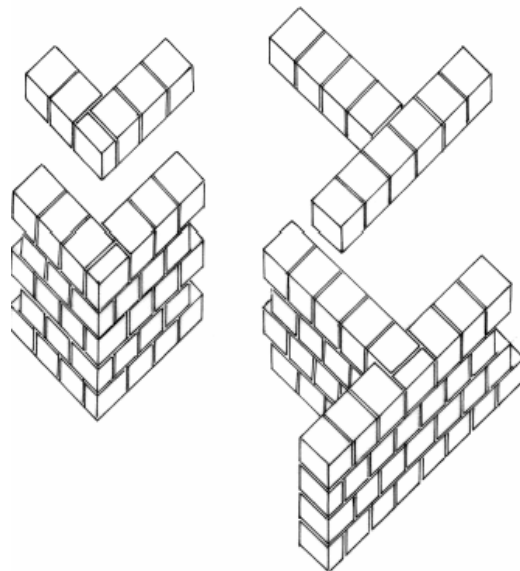


Fig. 1.10 – Ammorsamento dei muri ortogonali realizzato mediante opportuna disposizione dei blocchi

In generale, una buona concezione strutturale ed una corretta realizzazione dei dettagli strutturali (la cosiddetta “regola d’arte”) garantisce un comportamento strutturale soddisfacente nella maggior parte dei casi. Questo principio giustifica la sostanziale stabilità di strutture costruite nel passato, ben prima che esistessero i moderni modelli analitici dell’ingegneria strutturale.

## Capitolo 2

# La muratura: caratteristiche meccaniche e verifiche

### **2.1 Introduzione**

Nel seguente capitolo verranno analizzate le principali caratteristiche meccaniche della muratura, sia per quanto riguarda gli elementi che fanno parte di essa (mattoni) sia per quanto riguarda l'interazione mattone – giunto di malta.

Successivamente verranno elencate le principali verifiche da attuare secondo la Normativa italiana nei riguardi di pannelli e strutture in muratura.

### **2.2 Caratteristiche meccaniche della muratura**

Le più importanti caratteristiche della muratura dal punto di vista del comportamento meccanico sono:

- la disomogeneità
- l'anisotropia

- l'asimmetria di comportamento rispetto al segno delle sollecitazioni (compressione – trazione)
- la non – linearità del legame sforzi – deformazioni.

La disomogeneità è dovuta al fatto che gli elementi e la malta di cui è costituita la muratura possono avere caratteristiche meccaniche fortemente diverse. Inoltre, spesso non è sufficiente conoscere le caratteristiche dei materiali componenti presi singolarmente per prevedere il comportamento meccanico dell'insieme, in quanto un ruolo fondamentale è giocato dall'interfaccia ovvero dall'unione fra i componenti, che per particolari fenomeni chimico – fisici tende a sviluppare un comportamento meccanico non necessariamente riconducibile a quello dei singoli componenti. Il comportamento meccanico macroscopico della muratura può quindi essere considerato come il risultato dell'interazione meccanica fra gli elementi e la malta, attraverso la loro interfaccia.

L'anisotropia è dovuta alla direzionalità intrinseca della muratura, legata alla forma ed alle proporzioni degli elementi ed al modo con cui essi vengono disposti, nonché all'eventuale presenza di fori e alla loro direzione. La quasi totalità delle murature moderne presentano elementi regolari disposti per corsi orizzontali, con giunti orizzontali di malta continui, laddove i giunti verticali sono invece sfalsati per legare meglio la muratura.

L'asimmetria di comportamento meccanico è la diretta conseguenza del fatto che sia gli elementi, sia la malta, sia l'interfaccia malta – elemento presentano un comportamento asimmetrico nei riguardi della trazione e della compressione. Un particolare ruolo in questo fenomeno è giocato dall'interfaccia, che in molti casi presenta una resistenza a trazione più bassa di quella dei singoli componenti. La muratura viene quindi considerata nelle modellazioni come materiale non reagente a trazione.

Infine, la non linearità, che può essere vista in parte come un risultato di alcune delle caratteristiche sopra elencate, caratterizza in modo marcato il comportamento della muratura sia in compressione, sia in trazione, sia in stati di sollecitazione composti.

Nella modellazione di strutture in muratura si dovrà quindi tenere in conto dell'effettivo comportamento non lineare della muratura.

Nella prassi progettuale si utilizzano modelli in cui il materiale viene idealizzato come un continuo omogeneo equivalente al materiale non omogeneo di riferimento, e l'anisotropia viene tenuta in conto in modo estremamente semplificato, se non addirittura trascurata. In diversi casi, in funzione del tipo di applicazione e del livello di sollecitazione, può anche essere lecito trascurare la non linearità del materiale utilizzando i modelli dell'elasticità lineare.

Nel seguito si presenteranno alcune caratteristiche meccaniche salienti del materiale muratura.

## **2.3 Stati di tensione monoassiali**

### **2.3.1 Compressione (normale ai letti di malta)**

La statica delle costruzioni in muratura si fonda sul buon comportamento a compressione del materiale. Le prove a compressione consistono nel sottoporre un prisma di muratura ad una prova di compressione semplice, normalmente ai letti di malta; viene definita una tensione media  $\sigma = P/A$  riferita all'area lorda del provino, ed una deformazione media  $\varepsilon = \Delta h/h_0$  riferita all'accorciamento del provino  $\Delta h$  in direzione parallela al carico, su una lunghezza di riferimento  $h_0$ . Al termine della

prova si ottiene una curva simile a quella in figura (2.1), intermedia rispetto alle curve ottenibili da prove di compressione sulla singola malta e sul singolo blocco.

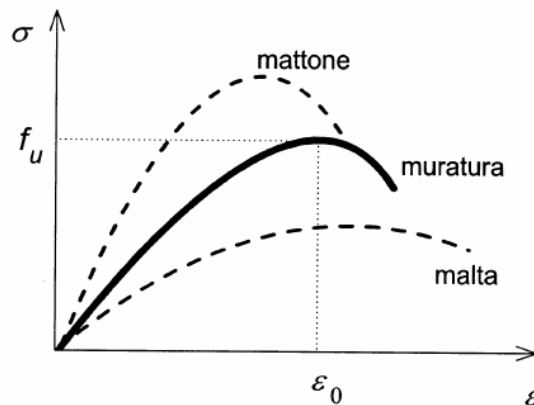


Fig. 2.1 – Il comportamento in compressione monoassiale di un prisma in muratura è intermedio tra quello del singolo mattone e quello della malta, a causa della coazione che si instaura tra malta e mattoni.

È stato osservato che in generale il comportamento in compressione è determinato, in diversa misura, dai seguenti fattori:

- resistenza, caratteristiche deformative e geometria degli elementi
- resistenza e caratteristiche deformative della malta
- spessore dei giunti
- capacità di assorbimento dell'acqua da parte dei mattoni e capacità di ritenzione dell'acqua da parte della malta
- geometria secondo cui vengono disposti gli elementi (sistema costruttivo o apparecchiatura).

Dal punto di vista fenomenologico, la crisi per compressione si presenta con lo sviluppo progressivo di fessurazioni verticali (parallele cioè all'asse di carico) negli elementi, conseguenti allo sviluppo di trazioni ortogonali a quelle di compressione. La causa di tale stato di trazione indiretta è uno stato di coazione che si instaura all'interno del materiale in conseguenza del diverso comportamento deformativo della malta e degli elementi. In particolare al crescere del carico assiale, la malta viene a trovarsi in uno stato di compressione triassiale per effetto del contenimento esercitato dagli elementi, i quali a loro volta si trovano soggetti a trazioni ortogonali all'asse di

carico. Il confinamento triassiale della malta giustifica quindi il fatto che la muratura possa resistere a sforzi di compressione maggiori della resistenza a compressione monoassiale della malta stessa. Sulla base di queste considerazioni si sono sviluppati i primi modelli razionali per la muratura soggetta a compressione. Una formulazione elastica del problema (Francis et al., 1971, Tassios, 1988) può essere formulata come segue. Si consideri un prisma di mattoni e malta come in figura (2.2), soggetto a compressione in direzione  $z$ .

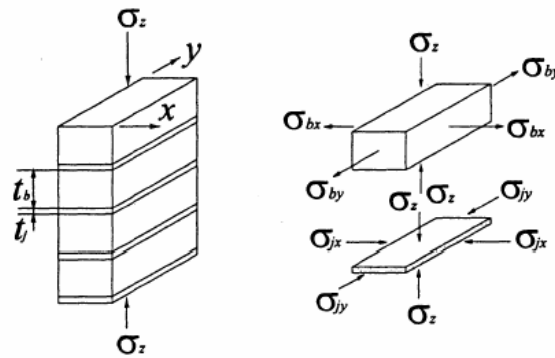


Fig. 2.2 – Sollecitazioni presenti in un prisma semplice di muratura soggetto a compressione.

Supponendo i mattoni e la malta materiali elastici lineari e isotropi, l'applicazione della legge di Hooke generalizzata permette di esprimere le deformazioni trasversali del mattone in direzione  $x$  e  $y$  come:

$$\varepsilon_{bx} = \frac{1}{E_b} [\sigma_{bx} + \nu_b(\sigma_z - \sigma_{by})]$$

$$\varepsilon_{by} = \frac{1}{E_b} [\sigma_{by} + \nu_b(\sigma_z - \sigma_{bx})]$$

(2.2)

e quelle nel giunto di malta come:

$$\varepsilon_{jx} = \frac{1}{E_j} [-\sigma_{jx} + \nu_j(\sigma_z + \sigma_{jy})]$$

$$\varepsilon_{jy} = \frac{1}{E_j} [-\sigma_{jy} + \nu_j(\sigma_z + \sigma_{jx})] \quad (2.3)$$

dove  $E_b$  e  $E_j$  sono i moduli di elasticità, rispettivamente, del mattone e della malta, e  $\nu_b$  e  $\nu_j$  sono i rispettivi coefficienti di Poisson. Per la congruenza tra giunto di malta e mattone, le deformazioni trasversali del mattone e della malta devono essere uguali fra loro nelle rispettive direzioni  $x$  e  $y$  ( $\varepsilon_{bx} = \varepsilon_{jx}$  ;  $\varepsilon_{by} = \varepsilon_{jy}$  ). Inoltre, per l'equilibrio, la risultante degli sforzi di compressione laterali nella malta deve essere uguale alla risultante degli sforzi di trazione laterali nel mattone, da cui è possibile ricavare per le due direzioni  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{bx} &= \alpha \cdot \sigma_{jx} \\ \sigma_{by} &= \alpha \cdot \sigma_{jy} \end{aligned} \quad (2.4)$$

dove  $\alpha = t_j/t_b$ . Combinando le equazioni precedenti e definendo  $\beta = E_j/E_b$ , con alcune sostituzioni si ottiene:

$$\sigma_{bx} = \sigma_{by} = \frac{\alpha(\nu_j - \beta\nu_b)}{1 + \alpha\beta - \nu_j - \alpha\beta\nu_b} \cdot \sigma_z \quad (2.5)$$

che esprime gli sforzi trasversali di trazione nel mattone in funzione degli sforzi lungo  $z$ . Se a questo punto si introduce un criterio di rottura del mattone in condizioni di sforzo triassiali, e si assume che la crisi del mattone coincida con la crisi della muratura è possibile pervenire ad una formulazione della resistenza della muratura. In particolare, assumendo per il dominio di resistenza del mattone una relazione lineare tra le tensioni di trazione  $\sigma_{bx} = \sigma_{by} = \sigma_t$  e la tensione di compressione  $\sigma_z$ :

$$\frac{\sigma_z}{f_{bc}} + \frac{\sigma_t}{\lambda f_{bc}} = 1 \quad (2.6)$$

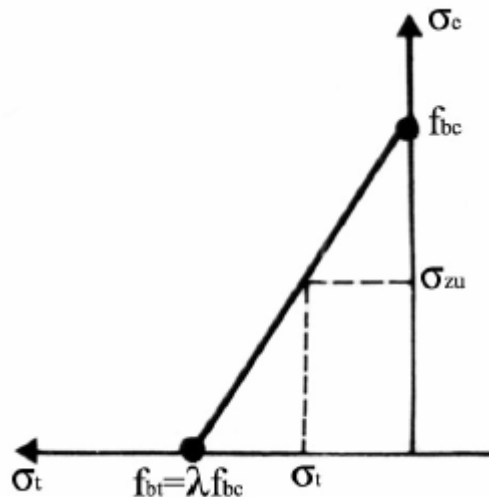


Fig. 2.3 – Dominio di resistenza del mattone

con  $\lambda = \frac{f_{bt}}{f_{bc}}$ , è possibile pervenire alla seguente espressione per la resistenza a compressione della muratura:

$$f_u = \frac{1}{1 + \frac{\alpha(v_j - \beta v_b)}{\lambda(1 + \alpha\beta - v_j - \alpha\beta v_b)}} \cdot f_{bc} \quad (2.7)$$

Questa formulazione tuttavia presenta una serie di limitazioni che non ne permettono l'uso diretto nelle applicazioni. Innanzitutto essa si basa sull'ipotesi di comportamento lineare elastico dei materiali fino a rottura. Tale ipotesi risulta poco accettabile specialmente quando la malta è molto debole. In secondo luogo essa presuppone una conoscenza quantitativa delle costanti elastiche dei materiali. Le metodologie per una misura sperimentale diretta di tali grandezze presentano notevoli difficoltà e sono a tutt'oggi oggetto di verifiche e calibrazioni.

L'alternativa alla misura diretta è l'uso di formule empiriche, i cui risultati solitamente sono soggetti a forte incertezza. È stato comunque verificato mediante confronti sperimentali che l'espressione (2.7) sembra descrivere in maniera abbastanza soddisfacente l'influenza dello spessore del giunto sulla resistenza a compressione della muratura. Si nota cioè che, mantenendo costanti gli altri parametri meccanici e geometrici, la resistenza a compressione di un prisma di



muratura diminuisce rapidamente all'aumentare dello spessore del giunto, come visto nell'espressione (2.7).

Hilsdorf propose una formulazione per alcuni versi analoga a quella appena vista, ma basata sull'ipotesi che la rottura dei mattoni avvenga quando alla crisi dei mattoni soggetti a compressione – trazione si accompagni la crisi della malta soggetta a compressione triassiale. Secondo tale criterio, la crisi del mattone è ancora espressa tramite la (2.6), e la crisi della malta in compressione triassiale (con  $\sigma_{jx} = \sigma_{jy}$ ) è espressa mediante la seguente espressione:

$$\sigma_{z,u} = f_j + 4,1 \cdot \sigma_{jx} \quad (2.8)$$

dove  $f_j$  è la resistenza a compressione monoassiale della malta. Imponendo l'equilibrio delle risultanti degli sforzi orizzontali, Hilsdorf è pervenuto alla seguente formula:

$$f_u = \frac{f_{bc}}{U_u} \cdot \frac{(f_{bt} + \alpha' f_j)}{(f_{bt} + \alpha' f_{bc})} \quad (2.9)$$

dove  $\alpha' = t_j / (4,1 \cdot t_b)$  e  $U_u$  è un coefficiente di non uniformità che tiene conto del fatto che all'interno del mattone e del giunto gli sforzi non sono distribuiti uniformemente. L'irregolarità nella distribuzione degli sforzi può essere tra l'altro conseguenza di fattori come l'irregolarità delle superfici del mattone, un incompleto riempimento dei giunti, l'eventuale presenza di fori nei mattoni e la geometria dei fori stessi. Hilsdorf determinò il coefficiente  $U_u$  per diverse combinazioni mattone – malta, riportando valori compresi tra 1,1 e 2,5 (decrementi al crescere della resistenza della malta).

Riassumendo ciò che si è visto in precedenza si nota che

- la resistenza della muratura aumenta al crescere della resistenza dei componenti, ma in modo non direttamente proporzionale
- la resistenza della muratura non aumenta in modo direttamente proporzionale all'aumentare della resistenza della malta, bensì più lentamente

- un aumento della resistenza degli elementi porta ad un rapido incremento della resistenza della muratura quando la malta è di qualità molto buona; viceversa, se la qualità della malta è scarsa, la resistenza della muratura cresce più lentamente al crescere della resistenza dei blocchi
- un aumento dello spessore dei giunti fa diminuire la resistenza della muratura, in misura tanto maggiore quanto più la malta è di scarsa qualità.

Esiste inoltre una serie di altri fattori che possono influenzare la resistenza della muratura in compressione quali:

- la presenza di giunti verticali e del tipo di connessione o orditura degli elementi
- fattori di esecuzione quali la composizione e miscelazione della malta, o l'esecuzione difettosa dei giunti di malta.

Formulazioni empiriche sono state proposte per compendiare l'influenza dei fattori principali che concorrono a determinare la resistenza a compressione della muratura.

La formulazione adottata in Europa per la resistenza a compressione della muratura si basa su una espressione nella forma:

$$f_k = K \cdot f_b^\alpha \cdot f_m^\beta \quad (2.10)$$

in cui la resistenza caratteristica  $f_k$  della muratura è espressa in funzione della resistenza media a compressione degli elementi  $f_b$  e della malta  $f_m$ .  $K$  è un coefficiente dipendente dal tipo di elementi. Per malte di uso generale  $K$  è compreso tra 0,4 e 0,6,  $f_k$  cresce con la radice quarta della resistenza della malta ( $\beta = 0,25$ ), e approssimativamente con la radice terza del quadrato della resistenza degli elementi ( $\alpha = 0,65$ ).

Il comportamento deformativo in compressione semplice di un prisma di muratura ha un andamento non lineare che nel tratto ascendente può essere approssimato in modo abbastanza soddisfacente con una relazione  $\sigma - \varepsilon$  di tipo parabolico:

$$\sigma = f_u \left[ 2 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) - \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (2.11)$$

Prove sperimentali eseguite su murature di mattoni mostrano come la (2.11) possa valere anche per una porzione del ramo decrescente della curva.

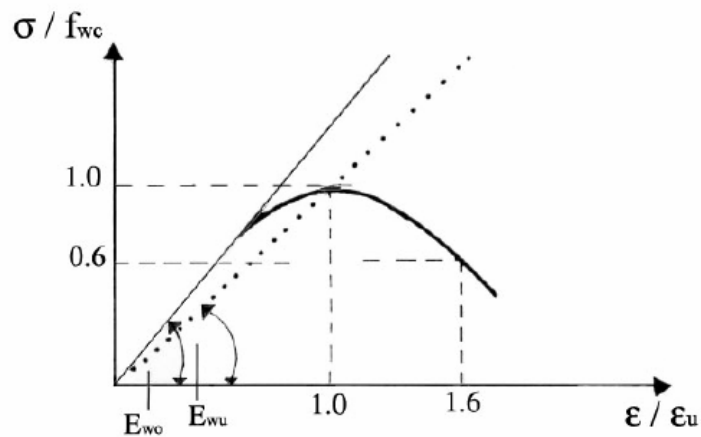


Fig. 2.4 – Comportamento deformativo in compressione semplice.

Tuttavia, fermo restando il fatto che il ramo decrescente dipende sensibilmente dalle dimensioni del provino e dal metodo di prova, il comportamento post – picco può differire in modo significativo per diversi tipi di murature, mostrando in alcuni casi comportamenti marcatamente fragili (è il caso ad esempio di alcune murature in laterizio forato).

In molte applicazioni può rendersi necessaria la definizione di un modulo elastico della muratura, il cui significato è quello di modulo tangente – secante alla curva  $\sigma - \varepsilon$  per valori di compressione non superiori a  $\sim 0,35 - 0,4 f_u$ . Le relazioni empiriche più frequentemente utilizzate per la definizione del modulo elastico riconducono  $E_m$  alla resistenza a compressione della muratura:

$$E_m = 500 \div 1000 f_u \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Trazione (normale ai letti di malta)

Il comportamento a trazione della muratura è solitamente caratterizzato dalla rottura del giunto, che può avvenire per due motivi:

- per decoesione all'interfaccia elemento – malta
- per frattura all'interno del giunto di malta, normalmente alla direzione di trazione, qualora l'adesione della malta all'elemento sia molto buona.

In generale la resistenza a trazione del giunto  $f_{jt}$  può quindi variare da un massimo, prossimo alla resistenza a trazione della malta  $f_{mt}$ , a un minimo che può arrivare a qualche percento di  $f_{mt}$  nel caso di decoesione dell'interfaccia. Più raramente, quando la qualità del legante è molto elevata oppure la resistenza degli elementi è molto scarsa, può aversi la frattura nell'elemento.

La resistenza a trazione è caratterizzata da un'estrema aleatorietà. Per questo motivo viene spesso trascurata nelle applicazioni e nelle modellazioni.

### 2.3.3 Stati tensionali complessi

A causa dell'anisotropia, nell'analisi del comportamento della muratura soggetta a stati tensionali complessi è necessario fare riferimento, oltre alle componenti del tensore degli sforzi macroscopici, anche al loro orientamento rispetto agli assi di ortotropia del materiale. Nel caso di stati tensionali le cui risultanti sono contenute nel piano medio della parete, è possibile fare ricorso al modello di stato di sforzo piano. In tal caso sono necessari tre parametri per descrivere compiutamente lo stato tensionale macroscopico. Una possibilità è di utilizzare le tensioni principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  e l'angolo  $\vartheta$  formato da una delle tensioni principali con la direzione dei letti di malta.

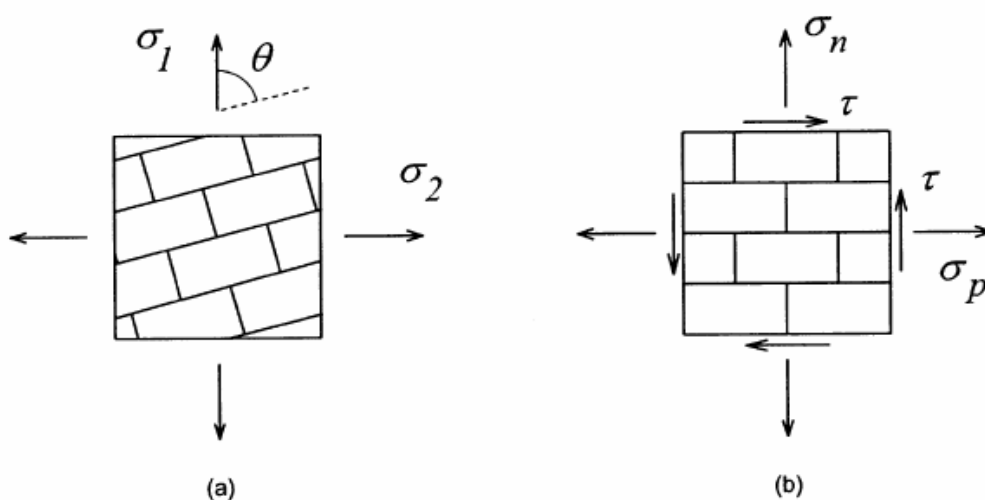


Fig. 2.5 – Sistemi di riferimento per gli stati tensionali piani

Angolo $\theta$	Trazione monoassiale	Trazione/compressione	Compressione monoassiale	Compressione biassiale
0°				
22.5°				
45°				
67.5°				
90°				

Fig. 2.6 – Modalità di rottura di pannelli in muratura di mattoni al variare dello stato tensionale biassiale

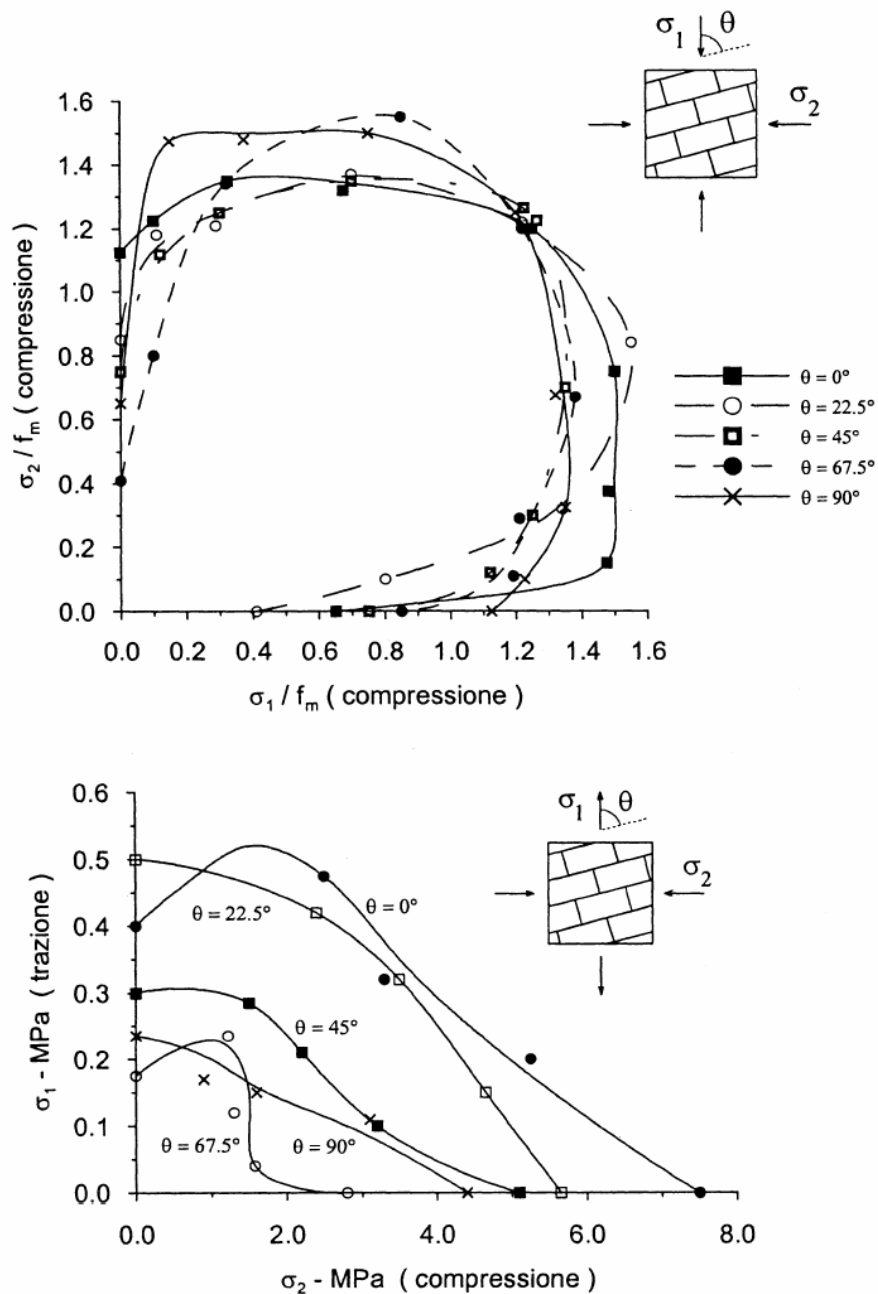


Fig. 2.7 – Domini di rottura biassiali ottenuti sperimentalmente su muratura di mattoni

Alternativamente è possibile utilizzare le tre componenti del tensore degli sforzi nel sistema di riferimento del materiale, ovvero con gli assi coincidenti con le normali alla giacitura dei letti di malta e dei giunti di testa, comunemente indicati con  $\sigma_n$  (normale ai letti di malta),  $\sigma_p$  (parallela ai letti di malta, e quindi normale ai giunti di testa),  $\tau$ .

Il comportamento ortotropo della muratura risulta particolarmente evidente quando la malta ha caratteristiche di resistenza nettamente inferiori a quelle degli elementi. Viceversa una muratura di

blocchi di calcestruzzo iniettata, con malta di elevata resistenza tende a presentare un comportamento poco dipendente dall'orientamento dei letti di malta, e analogo a quello di una lastra di calcestruzzo.

Di particolare interesse per le applicazioni sono gli stati tensionali di compressione e taglio, quali quelli in cui vengono a trovarsi le pareti di controventamento di edifici soggetti ad azioni orizzontali (vento e sisma). Studi sperimentali su pannelli di muratura soggetti ad uno stato macroscopicamente omogeneo di compressione e taglio sono stati condotti da Mann e Muller (1982). In tali esperimenti si sono evidenziati tre meccanismi fondamentali di rottura:

- rottura nei giunti di malta: avviene tipicamente per bassi valori di  $\sigma_n$
- rottura per taglio – trazione negli elementi: avviene per valori di  $\sigma_n$  intermedi
- rottura per schiacciamento della muratura: avviene quando  $\sigma_n$  approssima la resistenza a compressione monoassiale della muratura.

L'interpretazione proposta da Mann e Muller per i tre meccanismi è la seguente. Nel primo caso la rottura avviene per cedimento per taglio dei giunti, con la formazione di fessure con andamento a scaletta che seguono i giunti verticali ed orizzontali. Se si suppone che i giunti di malta siano caratterizzati da un criterio di resistenza alla Coulomb, la rottura avviene quando nei letti di malta viene raggiunta la condizione:

$$\tau_j = c + \mu\sigma_j \quad (2.12)$$

in cui compaiono i parametri di resistenza del giunto ( $c$  coesione,  $\mu$  coefficiente d'attrito) e in cui  $\tau_j$  e  $\sigma_j$  sono gli sforzi locali nel giunto. Nel secondo caso la rottura avviene quando la tensione principale di trazione nel mattone raggiunge la resistenza a trazione del laterizio. Nel terzo caso la rottura avviene quando la massima tensione di compressione verticale raggiunge la resistenza a compressione della muratura  $f_u$ . Per ricondurre lo stato tensionale macroscopico allo stato tensionale locale Mann e Muller si sono basati su una interpretazione del meccanismo deformativo della muratura, quando si supponga che la deformabilità della malta sia considerevolmente



maggiore di quella dei mattoni. Tale meccanismo deformativo suggerisce una opportuna scrittura dell'equazione di equilibrio alla rotazione del mattone, pervenendo ai diversi valori di compressione normale massima e minima nei letti di malta. Con tali presupposti e facendo coincidere l'asse  $y$  con la direzione normale ai letti di malta, ai tre meccanismi sopracitati è possibile associare le tre seguenti condizioni di rottura.

Caso a):

$$\tau_j = \bar{c} + \bar{\mu}\sigma_j \quad (2.13)$$

con

$$\bar{c} = c \frac{1}{1 + \mu \frac{2\Delta_y}{\Delta_x}}$$

$$\bar{\mu} = \mu \frac{1}{1 + \mu \frac{2\Delta_y}{\Delta_x}} \quad (2.14)$$

dove  $\Delta_x$  e  $\Delta_y$  sono rispettivamente le dimensioni dei mattoni in direzione orizzontale e in direzione verticale.

Caso b):

$$\tau = \frac{f_{bt}}{2,3} \sqrt{1 + \frac{\sigma_y}{f_{bt}}} \quad (2.15)$$

dove  $f_{bt}$  è la resistenza a trazione del laterizio.

Caso c):

$$\tau = (f_u - \sigma_y) \frac{\Delta_x}{2\Delta_y}$$

(2.16)

I tre criteri sono stati ottenuti supponendo che i giunti di testa siano inefficaci, in quanto spesso nelle muratura reali il riempimento dei giunti di testa non è completo e il grado di compattazione della malta è inferiore a quello dei letti orizzontali. Il dominio di rottura viene quindi ad assumere la forma di figura 2.8.

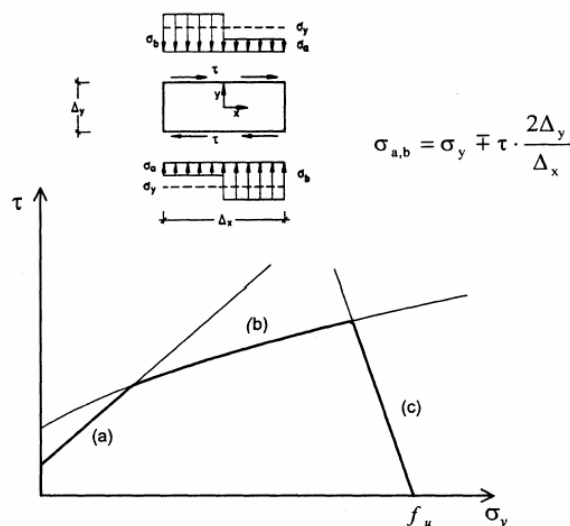


Fig. 2.8 – Stato tensionale ipotizzato da Mann e Müller nei letti di malta adiacenti ad un mattone in un pannello soggetto a compressione e taglio, e relativo dominio di rottura per la muratura secondo le equazioni 3.13 - 3.16.

### 2.3.4 Deformazioni differite nel tempo

La muratura presenta apprezzabili deformazioni differite nel tempo. Sia le deformazioni differite indipendenti dallo stato tensionale (ritiro) che quelle dipendenti dallo stato tensionale (creep) hanno una grande variabilità in funzione del materiale di cui sono costituiti i mattoni o i blocchi. Se si considerano le deformazioni da ritiro, anche all'interno della stessa classe generica di materiale è possibile avere valori di ritiro o espansione a seconda del materiale specifico. Analoghe considerazioni possono farsi per le deformazioni da creep. In tabella 2.1 si riportano a titolo indicativo gli intervalli di valori possibili per alcuni tipi di muratura.

Tipologia dell'elemento murario	Coefficiente di deformazione viscosa finale (1)	Deformazione finale da ritiro [ $\times 10^{-3}$ ] (2)	Coefficiente di dilatazione termica [ $10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ]
Laterizio	0,5÷1,5	-0,2÷1,0	4÷8
Calcestruzzo normale e pietra squadrata	1,0÷2,0	-0,6÷-0,1	6÷12
Calcestruzzo alleggerito	1,0÷3,0	-1,0÷-0,2	8÷12
Pietra naturale	trascurabile	-0,4÷+0,7	3÷12

(1) A tempo infinito

(2) A tempo infinito; un valore negativo indica un accorciamento

Tab. 2.1 – Proprietà deformative della muratura realizzata con malta ordinaria

## 2.4 Stati limite di elementi strutturali

Si prende ora in considerazione il comportamento di elementi strutturali ovvero di pareti che costituiscono parte di organismi strutturali (edifici), e che quindi sono soggette a stati di sollecitazione complessi. In questa sezione e nel seguito del capitolo si farà riferimento ai casi di muratura non armata e di muratura armata, per i quali esistono modelli di calcolo consolidati, tralasciando la muratura intelaiata, per la quale non esistono modelli specifici affidabili di validità generale.

La progettazione e la verifica delle strutture vengono effettuate all'interno di regole di calcolo codificate, che mettono in conto, oltre alla modellazione strutturale, le aleatorietà delle azioni e delle resistenze con criteri orientati ad ottenere un'accettabile sicurezza. Tali criteri mirano a garantire che non vengano superate, durante la vita della costruzione, accettate probabilità di

raggiungimento di condizioni indesiderate, chiamate “stati limite”. Con minime probabilità si accettano stati limite ultimi, corrispondenti al collasso della struttura o di parti di essa, e quindi con gravi conseguenze. Maggiori probabilità si accettano invece per gli stati limite di esercizio (quali fessurazione o deformazioni eccessive) che comportano solo conseguenze economiche. Si adottano quindi elevati coefficienti di sicurezza nel primo caso, molto minori negli stati limite di esercizio. Tali considerazioni sono particolarmente importanti per le costruzioni in muratura, poiché l’elevata dispersione dei valori di resistenza delle murature implica elevati valori dei coefficienti parziali di sicurezza. In generale, comunque, una definizione meccanica degli stati limite (prima fessurazione, collasso) non comporta necessariamente l’introduzione di concetti probabilistici.

### 2.4.1 Azioni nel piano medio

Si consideri un pannello semplice in muratura e si supponga di volerne studiare il comportamento quando sia soggetto a sollecitazioni applicate alle sezioni estreme superiore ed inferiore, le cui risultanti sono contenute nel piano medio della parete stessa (Fig. 2.9). Per ogni sezione della parete è possibile definire un momento, un taglio ed una azione assiale risultante. Il momento è definibile come il prodotto dell’azione assiale  $N$  per la relativa eccentricità  $e$  rispetto al baricentro geometrico della sezione.

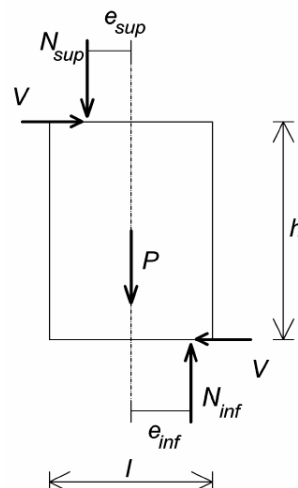


Fig. 2.9 – Pannello murario soggetto ad azioni nel piano medio

Considerando la generica condizione illustrata in figura 2.9, sussistono le seguenti relazioni di equilibrio:

$$\begin{aligned} N_{inf} &= N_{sup} + P \\ V \cdot h &= M_{sup} + M_{inf} = N_{sup} e_{sup} + N_{inf} e_{inf} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Si possono individuare diversi stati limite di interesse.

#### 2.4.1.1 Fessurazione per flessione o pressoflessione

La fessurazione di una sezione avviene quando la massima tensione normale di trazione raggiunge la resistenza a trazione  $f_{jt}$  dei giunti orizzontali. Il momento di fessurazione in una generica sezione orizzontale sarà quindi dato dalla relazione:

$$M_{fess} = \left( \frac{N}{lt} + f_{jt} \right) \cdot \frac{l^2 t}{6} \tag{2.18}$$

in cui si è assunta una distribuzione lineare delle tensioni normali sulla sezione.

La resistenza a trazione  $f_{jt}$  è spesso trascurabile ed assunta di conseguenza pari a zero, da cui l'equazione si riduce alla nota condizione di parzializzazione di una sezione pressoinflessa non reagente a trazione. La fessurazione per flessione non costituisce evidentemente uno stato limite ultimo, tuttavia è un fenomeno significativo nella risposta della parete alle azioni orizzontali, perché dà origine a non linearità nel comportamento come conseguenza della progressiva parzializzazione. Può essere eventualmente presa in considerazione come stato limite di esercizio o di danneggiamento.

Nel caso di muratura armata, la 2.18 va modificata per tenere conto della presenza delle armature. Nell'analisi a pressoflessione si utilizzano comunemente le stesse tecniche utilizzate per il cemento armato. È quindi necessario fare delle ipotesi sulla diversa deformabilità della muratura e dell'acciaio. In condizioni di esercizio, se si suppone che il comportamento dei materiali sia lineare, definendo una sezione omogeneizzata equivalente, il momento di fessurazione può essere facilmente espresso come:

$$M_{fess} = \left( \frac{N}{A_0} + f_{jt} \right) \cdot \frac{J_0}{y} \quad (2.19)$$

in cui compaiono l'area e il momento d'inerzia della sezione omogeneizzata equivalente di muratura (per un muro semplice a sezione rettangolare con armatura simmetrica  $y = h/2$ ).

### 2.4.1.2 Stato limite ultimo per pressoflessione

In una parete in muratura semplice la condizione di rottura per pressoflessione nel piano è associata allo schiacciamento della muratura al lembo compresso delle sezioni estreme. Per bassi valori di azione assiale  $N$  l'estensione della zona compressa è modesta, si rileva una ampia apertura delle fessure flessionali e il muro tende a sviluppare un cinematismo di ribaltamento simile a quello di un blocco rigido. L'analisi del comportamento a rottura per pressoflessione può essere agevolato dall'utilizzo di un opportuno "stress-block" della muratura in compressione.

Il calcolo può essere particolarmente semplificato laddove si possa definire uno stress-block rettangolare equivalente come mostrato in figura 2.10.

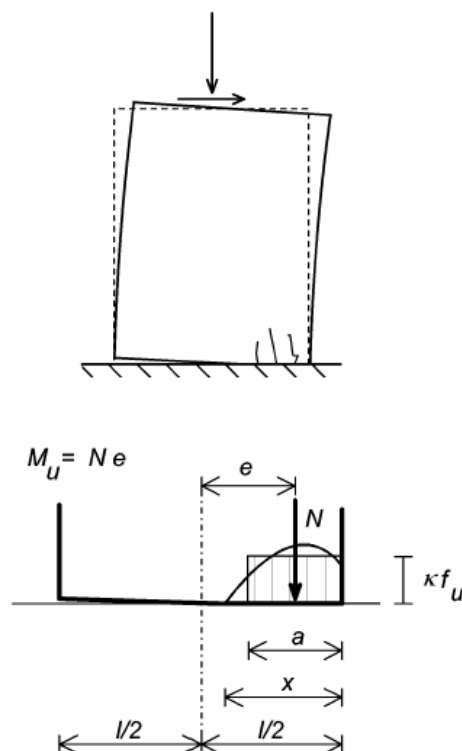


Fig. 2.10 – Rottura per presso-flessione

In questo caso dall'equilibrio a traslazione verticale è possibile scrivere:

$$a = \frac{N}{\kappa f_u t} \quad (2.20)$$

da cui per l'equilibrio a rotazione si trova il valore del momento ultimo:

$$M_u = N \left( \frac{l-a}{2} \right) = \frac{Nl}{2} \left( 1 - \frac{N}{\kappa f_u l t} \right) = \frac{\sigma_m l^2 t}{2} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{\kappa f_u} \right) \quad (2.21)$$

Nella maggior parte dei casi è possibile assumere  $\kappa = 0,85 \div 1$ .

Nel caso di muratura armata, è possibile utilizzare i metodi utilizzati per il cemento armato.

In realtà, la muratura in compressione può avere comportamenti deformativi che si discostano anche notevolmente da quelli del calcestruzzo. Tuttavia, nel caso di percentuali di armatura contenute e di rottura duttile (con elevate deformazioni plastiche dell'acciaio) il calcolo del momento ultimo non è particolarmente sensibile alla forma dello stress-block utilizzato. Particolare attenzione va prestata invece nei casi in cui vi sia la presenza di una azione assiale elevata o di forti percentuali di armatura. In tali casi è opportuno utilizzare uno *stress block* il più aderente possibile al reale comportamento della muratura compressa.

Il momento ultimo sarà quindi calcolato con relazioni analoghe a quelle utilizzate per il cemento armato. A titolo di esempio, per un muro semplice a sezione rettangolare di lunghezza  $l$  si avrà:

$$M_u = \sum_i A_{si} \sigma_i \left( \frac{l}{2} - y_{si} \right) + C_m \left( \frac{l-a}{2} \right) \quad (2.22)$$

con:  $C_m$  risultante di compressione nella muratura,  $\sigma_i$  sforzo nella generica armatura di area  $A_{si}$  posta alla distanza  $y_{si}$  dal lembo compresso. La posizione dell'asse neutro e i valori delle  $\sigma_i$  e di  $C_m$



verranno determinati imponendo l'equilibrio alla traslazione e la condizione di congruenza (conservazione delle sezioni piane, cioè distribuzione lineare delle deformazioni).

#### **2.4.1.3 Fessurazione e stato limite ultimo per sollecitazioni taglianti**

La rottura per taglio consiste nella formazione di meccanismi fessurativi di diversa natura, ascrivibili all'effetto delle tensioni tangenziali originate dalle azioni orizzontali, in combinazione con le componenti di tensione normale.

Questi tipi di rottura sono fra i più frequenti nelle costruzioni in muratura semplice.

La fenomenologia della rottura per taglio in pannelli di muratura semplice vede solitamente la formazione di una o più fessure inclinate diagonalmente (Fig. 2.11 a). Le fessure diagonali possono essere a loro volta configurate in modo tale da interessare prevalentemente i giunti di malta (fessure “a scaletta”) oppure prevalentemente i mattoni o i blocchi. Solitamente la comparsa di fessure diagonali visibili avviene per valori di taglio totale agente prossimi al massimo taglio resistente ( $V_{fess} = 0,82 - 1,00 V_u$ ). La rottura per taglio con fessurazione diagonale è di tipo fragile, in particolare quando l’azione tagliante è di tipo ciclico, con la formazione di due sistemi di fessure diagonali incrociate.

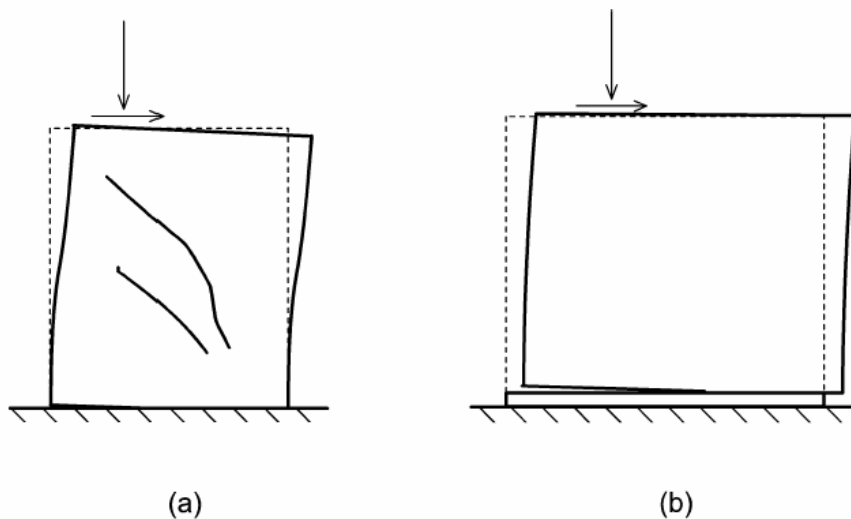


Fig. 2.11 – Modalità di rottura per taglio di pannelli in muratura non armata

Un’altra modalità di rottura associata alle tensioni tangenziali vede lo scorrimento di una parte del muro sull’altra lungo una o più superfici di frattura orizzontali, tipicamente contenute nei letti orizzontali (Fig. 2.11 b).

Sono stati proposti diversi criteri per la formulazione della resistenza a taglio di un pannello in muratura. Tale formulazione presenta alcuni problemi di non facile soluzione. Innanzitutto i dati sperimentali tendono a presentare una dispersione piuttosto elevata. Ciò è tipico dei fenomeni di rottura fragile, ma nelle murature questa dispersione è accentuata anche dall’influenza di fattori non sempre controllabili legati all’esecuzione (costruzione) della muratura stessa. Inoltre un elemento

strutturale è caratterizzato da una distribuzione non uniforme di sforzi macroscopici. L'applicazione di un criterio di resistenza "puntuale" presuppone quindi la capacità di calcolare la distribuzione degli sforzi macroscopici in ogni punto dell'elemento, o perlomeno nei punti che si ritengono critici. In generale ciò è complicato da fenomeni quali la parzializzazione della sezione legata alla scarsa resistenza a trazione normalmente ai letti di malta ed il comportamento non lineare del materiale. Tra l'altro la rottura per taglio è tipica di elementi tozzi, i cui l'analisi dello stato tensionale risulta essere più difficoltosa. I criteri utilizzati nelle applicazioni tendono quindi inevitabilmente ad introdurre delle semplificazioni, a scapito dell'accuratezza. Nel seguito si discutono brevemente gli approcci semplificati più diffusi.

#### **2.4.1.4 Muratura non armata - Il criterio della resistenza a trazione convenzionale**

Nei primi anni Settanta Turnšek e Cacovic (1971), studiando il comportamento sperimentale di pannelli sottoposti a compressione e taglio, rilevarono che la rottura avveniva come conseguenza della formazione di fessure diagonali al centro del pannello. Ipotizzarono quindi che la rottura per taglio abbia luogo quando lo sforzo principale (macroscopico) di trazione raggiunge un valore limite  $f_{tu}$ , assunto come resistenza a trazione convenzionale della muratura. In tal modo si assume che, relativamente allo stato limite di rottura per taglio con fessurazione diagonale, l'anisotropia della muratura possa essere trascurata, con il notevole vantaggio di utilizzare un singolo parametro di resistenza ( $f_{tu}$  per l'appunto).

Supponendo in prima istanza che il pannello sia sufficientemente snello da poter essere assimilato ad un solido di De Saint Venant, il criterio si traduce nella seguente espressione del taglio ultimo resistente  $V_u$ :

$$V_u = \frac{f_{tu} l t}{b} \sqrt{1 + \frac{\sigma_m}{f_{tu}}} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{N}{l t} \quad (2.23)$$

con  $b = 1,5$ . Successivamente, per applicare la 2.23 anche a pannelli tozzi fu proposto di utilizzare valori di  $b$  variabili con il rapporto di forma  $h/l$  del pannello (Turnšek e Sheppard, 1981). Un criterio approssimato è stato proposto da Benedetti e Tomažević (1984) con  $b = 1,5$  per  $h/l \geq 1,5$ ,  $b = 1$  per  $h/l \leq 1,5$ , e  $b = h/l$  per  $1 < b < 1,5$ .

Questa formulazione riproduce in maniera sufficientemente accurata la dipendenza della resistenza a taglio dal carico assiale su pannelli soggetti a prove in cui viene mantenuto il parallelismo delle basi superiore e inferiore del pannello, cioè con condizioni di vincolo di doppio incastro rotazionale, a cui corrisponde idealmente la condizione  $M_{sup} = M_{inf}$ . Esistono tuttavia alcuni dubbi sulla sua validità al variare del rapporto di forma dei muri e delle condizioni di vincolo, soprattutto quando la muratura abbia un carattere chiaramente anisotropo, come ad esempio nel caso di murature di mattoni pieni con malta relativamente debole (Magenes, 1992). Questo modello inoltre rende conto unicamente della rottura per fessurazione diagonale, ma non per scorrimento.

#### 2.4.1.5 Muratura non armata - Il criterio “alla Coulomb”

In questo approccio la resistenza a taglio della muratura viene espressa nella forma:

$$\tau = c + \mu \sigma \quad (2.24)$$

in cui  $\tau$  è la tensione tangenziale e  $\sigma$  è la tensione normale.

La resistenza caratteristica a taglio della muratura semplice è espressa come resistenza a taglio unitaria moltiplicata per l'area reagente del muro (in compressione):

$$V_{Rk} = f_{vk} \cdot t \cdot l_c \quad (2.25)$$

con  $l_c$  lunghezza della zona compressa. A sua volta la resistenza a taglio unitaria  $f_{vk}$  è definita come:

$$f_{vk} = f_{vk0} + 0,4 \sigma_d \quad \text{con } f_{vk} \leq f_{vk,lim} \quad (2.26)$$

in cui  $\sigma_d$  è lo sforzo medio di compressione sull'area reagente, e il valore limite superiore  $f_{vk,lim}$  dipende dal tipo di elementi e dal tipo di malta.

Dal punto di vista sperimentale, la rottura al centro del pannello è associata solitamente alla comparsa di fessure diagonali, mentre la rottura alle sezioni estreme è associata allo scorrimento. L'applicazione delle equazioni 2.25-26 in sezione parzializzata consiste fundamentalmente in un calcolo della resistenza a scorrimento del muro, ma non è riconducibile alla rottura con fessurazione diagonale.

#### **2.4.1.6 Muratura armata**

Nella muratura armata la rottura per taglio presenta meccanismi analoghi a quelli del cemento armato. Tuttavia è necessario evidenziare alcune differenze di base, dovute principalmente alle diverse condizioni in cui si trova a lavorare l'armatura a taglio, costituita da ferri disposti parallelamente ai letti di malta.

Nei sistemi costruttivi in muratura armata, l'armatura a taglio è presente in basse percentuali ( $\rho = 0,05 - 0,2\%$ , con  $\rho$  percentuale geometrica d'armatura) e il suo scopo è di incrementare la duttilità della eventuale rottura per taglio, oltre che di incrementare moderatamente la resistenza stessa e controllare la fessurazione in esercizio. La percentuale minima richiesta di armatura a taglio corrisponde alla quantità necessaria per mantenere un comportamento relativamente duttile dopo la fessurazione diagonale per taglio. Tale valore si aggira attorno a **0,05%**.

La resistenza a taglio di un elemento in muratura armata può essere espressa come somma di due contributi:

$$V_u = V_m + V_s$$

(2.27)

Il primo contributo  $V_m$  raccoglie i meccanismi di resistenza interna della muratura, in aggiunta al meccanismo a traliccio  $V_s$  associato all'armatura a taglio.

L'Eurocodice 6 propone per la resistenza a taglio di calcolo la seguente espressione:

$$\begin{aligned}V_{Rd} &= V_{Rd1} + V_{Rd2} \\V_{Rd1} &= \frac{f_{vk} b d}{\gamma_m} \\V_{Rd2} &= 0,9 d \frac{A_{sw} f_{yk}}{s \gamma_s} (1 + \cot \alpha) \operatorname{sen} \alpha\end{aligned}\tag{2.28}$$

in cui  $d$  è l'altezza utile dell'elemento,  $b$  lo spessore minimo dell'elemento,  $f_{vk}$  è la resistenza a taglio caratteristica unitaria della muratura espressa nella 2.26 (dipendente dalla compressione media),  $\alpha$  è l'angolo di inclinazione dell'armatura a taglio rispetto all'asse dell'elemento (nella gran parte dei sistemi in muratura armata tale angolo può essere unicamente di  $90^\circ$ ),  $s$  è la spaziatura dell'armatura a taglio di area  $A_{sw}$ , e  $\gamma_m$  e  $\gamma_s$  sono i coefficienti parziali di sicurezza dei materiali. È possibile riconoscere in  $V_{Rd2}$  il termine relativo al meccanismo a traliccio con bielle compresse inclinate a  $45^\circ$  utilizzato per le membrature in cemento armato. Per evitare la rottura delle bielle compresse il taglio resistente non può superare il seguente limite:

$$V_{Rd} \leq \frac{0,30 f_k b d}{\gamma_m}\tag{2.29}$$

con  $f_k$  resistenza a compressione della muratura.

È bene sottolineare come il tipo di formulazione adottata dagli Eurocodici, al confronto con risultati sperimentali non dia risultati sempre soddisfacenti (Bernardini et al., 1997, Magenes, 1998), e come sembrerebbe opportuno introdurre un coefficiente correttivo dell'efficienza dell'armatura (Tomaževic, 1999).

## 2.4.2 Azioni ortogonali al piano medio

La presenza di azioni ortogonali al piano medio della muratura induce uno stato di flessione o pressoflessione (compressione eccentrica con eccentricità  $e_t$  parallela allo spessore  $t$  del muro).

Uno stato di pressoflessione è chiaramente generato anche dalla presenza di carichi verticali (ad esempio quelli trasmessi dai solai) applicati eccentricamente. È possibile individuare alcuni stati limite significativi.

Si consideri un pannello isolato di muratura non armata in condizioni di esercizio e si supponga che lo stato deformativo e di sollecitazione non subisca variazioni parallelamente alla lunghezza  $l$ ; in condizione non fessurata la tensione massima e minima possono essere espresse come (Fig. 3.12 a):

$$\sigma_{max,min} = \frac{N}{lt} \pm \frac{6N \cdot e_t}{lt^2} \quad (2.30)$$

in cui si è assunta una distribuzione lineare delle tensioni sulla sezione. La condizione di fessurazione, supponendo di trascurare la resistenza a trazione dei letti di malta è quindi ricavabile ponendo  $\sigma_{min} = 0$ , da cui:

$$M_{fess} = N \cdot e_t = \frac{Nt}{6} \quad (2.31)$$

In condizione fessurata (Fig. 2.12 b), supponendo reagente solo la parte in compressione, e ipotizzando sempre una distribuzione lineare degli sforzi, l'equilibrio alla rotazione fornisce l'estensione della zona reagente:

$$x = 3\left(\frac{t}{2} - e_t\right) \quad (2.32)$$

in cui si è imposto che la risultante della distribuzione triangolare degli sforzi interni sia allineata con l'azione assiale eccentrica  $N$ . Dall'equilibrio alla traslazione verticale si ottiene quindi:

$$N = \frac{\sigma_{max} \cdot x \cdot l}{2} \quad ; \quad \sigma_{max} = \frac{2}{3} \frac{N}{l(\frac{t}{2} - e_t)} \quad (2.33)$$

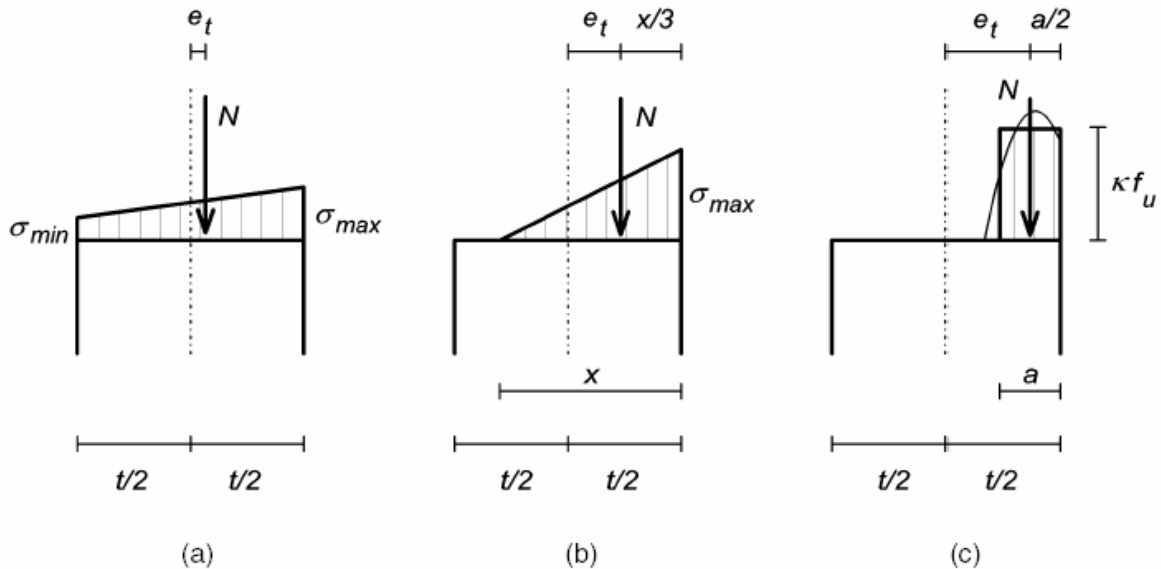


Fig. 2.12 – Sezione di una parete soggetta a pressoflessione con inflessione ortogonale al piano medio:

a) sezione interamente reagente, b) sezione parzializzata con bassi valori di  $\sigma_{max}$ , c) a rottura

L'ipotesi di distribuzione lineare delle compressioni, ovvero di comportamento lineare elastico del materiale, è accettabile finché la  $\sigma_{max}$  non supera  $0,35 - 0,40 f_u$ .

Considerando ora le condizioni ultime, in prossimità della rottura la zona compressa sarà caratterizzata da una distribuzione di sforzi non lineari. A collasso, si avrà schiacciamento della zona compressa, per la quale si può ipotizzare un diagramma stress-block rettangolare equivalente, ottenendo:

$$M_u = N \left( \frac{t-a}{2} \right) = \frac{Nt}{2} \left( 1 - \frac{N}{\kappa f_u l t} \right) \quad (2.34)$$



In conclusione, qualora si trascuri la resistenza a trazione, la resistenza laterale di una parete semplice, non vincolata lateralmente a muri trasversali, e soggetta ad azioni ortogonali al piano medio (quali ad esempio la pressione del vento) è subordinata alla presenza di una azione verticale di compressione. Per edifici bassi (uno o due piani) o per i piani alti di un edificio multipiano, in cui la compressione verticale è modesta, il contributo della resistenza a trazione assume un notevole rilievo per la stabilità delle pareti.

In presenza di compressioni modeste, la resistenza di un muro caricato trasversalmente dipende in modo significativo dalle condizioni di vincolo, ovvero dalla eventuale presenza di solai rigidi collegati superiormente ed inferiormente al muro e di muri trasversali ammortati lateralmente. Studi sperimentali su pareti diversamente vincolate hanno posto in evidenza l'analogia fra la propagazione delle linee di frattura in un muro e le linee di snervamento delle piastre in cemento armato. Tale analogia è tuttavia solamente geometrica, dato il carattere fragile della frattura dei pannelli (Hendry, 1990). In tali situazioni è necessario tener conto della natura anisotropa della muratura: un parametro significativo è dato dal rapporto fra la resistenza a flessione con linea di rottura parallela ai letti di malta e la resistenza a flessione con linea di rottura perpendicolare ai letti di malta (Fig. 2.13)  $\mu_f = f_{x1}/f_{x2}$ .

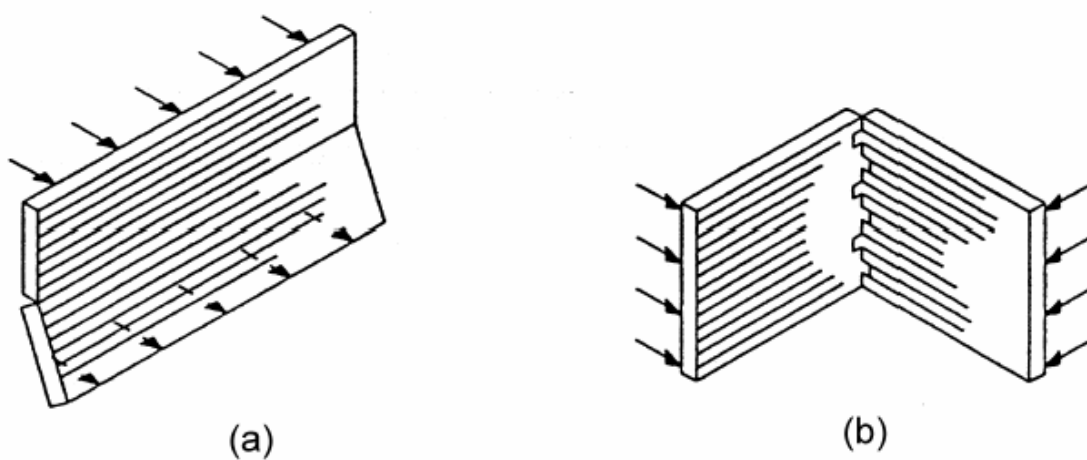


Fig. 2.13 – Rottura per flessione di una parete con linea di rottura a) parallela ai letti ( $f_{x1}$ )  
e b) perpendicolare ai letti di malta ( $f_{x2}$ )

Nel caso di muratura armata la presenza dell'armatura incrementa sensibilmente la resistenza a flessione in un eventuale funzionamento a piastra della parete. Il calcolo della resistenza in tal caso può essere svolto con tecniche analoghe a quelle utilizzate nel cemento armato, prestando attenzione alla definizione di uno stress block adeguato per la muratura. In tal senso risulta fondamentale la distinzione fra la resistenza a compressione in direzione perpendicolare alla giacitura dei blocchi e quella ortogonale ad essa, in funzione della direzione del momento flettente.

### **2.4.3 Effetti del secondo ordine**

Le pareti in muratura possono essere molto sensibili agli effetti del secondo ordine, a causa della relativa snellezza nei confronti delle azioni fuori del piano unita alla trascurabile resistenza a trazione e alle deformazioni differite nel tempo.

Per tali motivi lo studio della capacità portante di pareti in muratura e i conseguenti criteri progettuali devono di regola considerare questi fenomeni.

Fra i primi esempi di modelli teorici per lo studio degli effetti del secondo ordine nella muratura si riportano i lavori di Angervo (1954) e Chapman e Slatford, (1957), che si basano sulla scrittura e soluzione dell'equazione differenziale della deformata di una striscia di muro assimilabile ad una colonna in materiale non resistente a trazione (Fig. 2.14). Queste formulazioni forniscono la soluzione per il carico di instabilità della colonna doppiamente incernierata, supponendo un comportamento lineare elastico ed indefinitamente resistente del materiale in compressione.

Con tale approccio è possibile ricavare il carico di collasso per instabilità come il valore massimo del carico ottenibile da curve analitiche carico spostamento opportunamente adimensionalizzate. Se si impone un valore del modulo elastico tale per cui, in presenza di eccentricità nulla del carico assiale, si abbia l'insorgere del collasso per instabilità per una snellezza  $h/t$  pari a 25 (valore critico medio osservato in numerose prove sperimentali) si ottengono le curve di figura 2.15. In tali curve viene riportato sull'asse delle ordinate il rapporto fra il carico critico  $N_{crit}$  di una colonna soggetta a

carico eccentrico  $N$  (applicato con eccentricità  $e$  uguale ad entrambe le estremità) ed il carico di collasso di una colonna tozza di resistenza finita soggetta a compressione centrata  $N_u = f_u \cdot lt$ . Queste prime formulazioni hanno avuto il merito di evidenziare in modo chiaro l'importante effetto della parzializzazione e quindi della diminuzione di sezione e di rigidezza.

Negli studi citati sono inoltre state prese in considerazione diverse possibili condizioni di vincolo del muro. Tali condizioni sono infatti un altro fattore di estrema importanza sul comportamento dei muri pressoinflessi, come rilevato anche sperimentalmente.

Se si considerano i vincoli superiore ed inferiore, in un edificio reale essi non sono necessariamente riconducibili ad una cerniera, a causa dell'interazione con i solai e con le pareti sopra e sottostanti. Laddove siano presenti solai in calcestruzzo armato continui o ammorsati per almeno due terzi dello spessore della parete, e la compressione media sul nodo muro-solaio sia superiore a circa  $0,3 \text{ N/mm}^2$ , le condizioni di vincolo della parete possono essere assimilate a quelle di un incastro: in tale situazione infatti grazie all'elevata compressione si può verificare la congruenza delle rotazioni fra gli elementi convergenti nel nodo, e la rigidezza degli elementi di solaio in c.a. limita sensibilmente le rotazioni. Viceversa, nel caso di solai flessibili (ad es. in legno) o in presenza di bassi valori di compressione media, le condizioni sono maggiormente assimilabili a quelle di cerniera o di incastro cedevole. In generale, la rigidezza di un nodo muro-solaio decresce nei piani più alti, a causa della diminuzione dell'azione di compressione verticale.

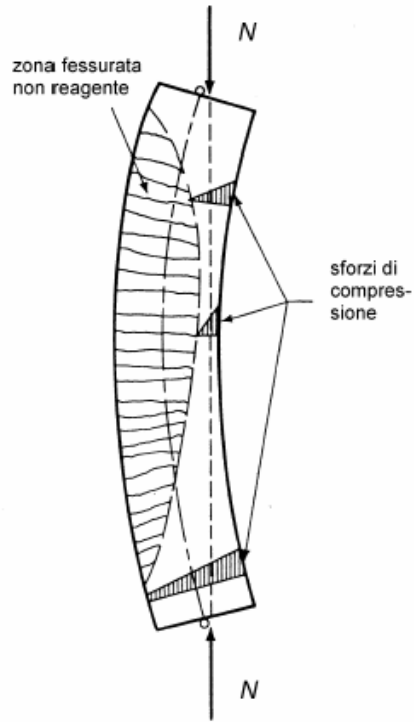


Fig. 2.14 – Colonna di materiale elastico non reagente a trazione soggetta a compressione eccentrica

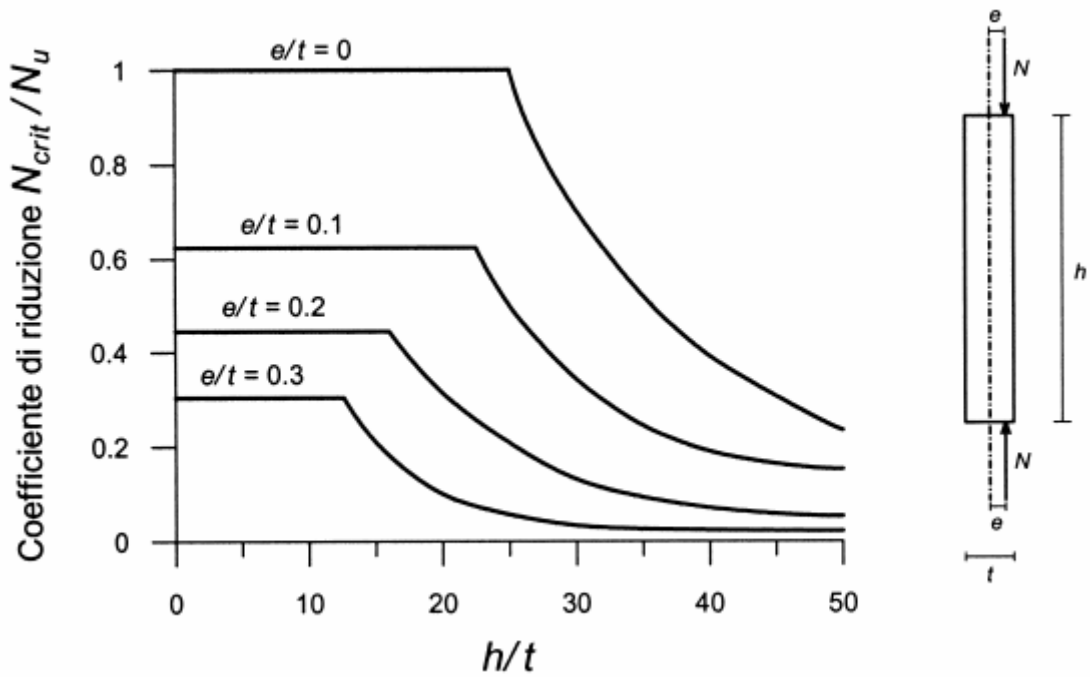


Fig. 2.15 – Coefficiente di riduzione della resistenza a compressione  $N_{crit}/N_u$

Una notevole influenza sulla sensibilità agli effetti del secondo ordine è infine esercitata dalla presenza di eventuali muri di irrigidimento ortogonali, di dimensioni adeguate, efficacemente ammortati, che costituiscono un efficace vincolo allo sbandamento laterale.

## **2.5 Modelli d'insieme, analisi strutturale e verifiche di sicurezza**

Si è sottolineato in precedenza come gli edifici in muratura siano strutture complesse tridimensionali costituite da solai e da muri, ove tutti gli elementi sono importanti nel resistere ai carichi applicati. Il procedimento più rigoroso per il calcolo di un edificio in muratura è quindi in linea teorica quello di considerare un sistema scatolare caratterizzato da non linearità costitutiva e geometrica. Un simile approccio risulta però estremamente oneroso a livello computazionale.

Un approccio solitamente adatto alle applicazioni è quello di operare su schemi strutturali semplificati appositamente scelti in funzione del tipo di azioni convenzionali da considerare nelle verifiche e del tipo di elementi strutturali primari che esse andranno ad interessare. In particolare, tali schemi si differenziano principalmente in base alla direzione dei carichi.

### **2.5.1 Analisi e verifica sotto carichi verticali**

Per quel che riguarda i carichi verticali, il problema di principale interesse è quello della verifica dei muri portanti soggetti a carichi verticali eccentrici, in cui un ruolo fondamentale è giocato dall'eccentricità in direzione ortogonale al piano medio dei muri (parallelamente allo spessore). Si opera dunque solitamente su uno schema strutturale semplificato, costituito da una striscia della

costruzione scatolare di larghezza prefissata, compresa fra due sezioni normali alle murature portanti. Tale striscia (Fig. 2.17), trascurando le interazioni con le sezioni adiacenti, può essere idealizzata come un telaio piano, assimilando i muri portanti ai ritti e i solai alle travi. Si considerano i nodi fissi: lo spostamento orizzontale dei traversi è infatti impedito dai muri di controvento ortogonali ai muri portanti e quindi paralleli al piano del telaio.

La situazione reale si avvicina a condizioni di incastro cedevole (telaio a nodi semirigidi); tuttavia nelle applicazioni si preferisce ricorrere ai due schemi limite di nodi con incastro perfetto, figura 2.17 a, e di nodi cerniera, figura 2.17 b.

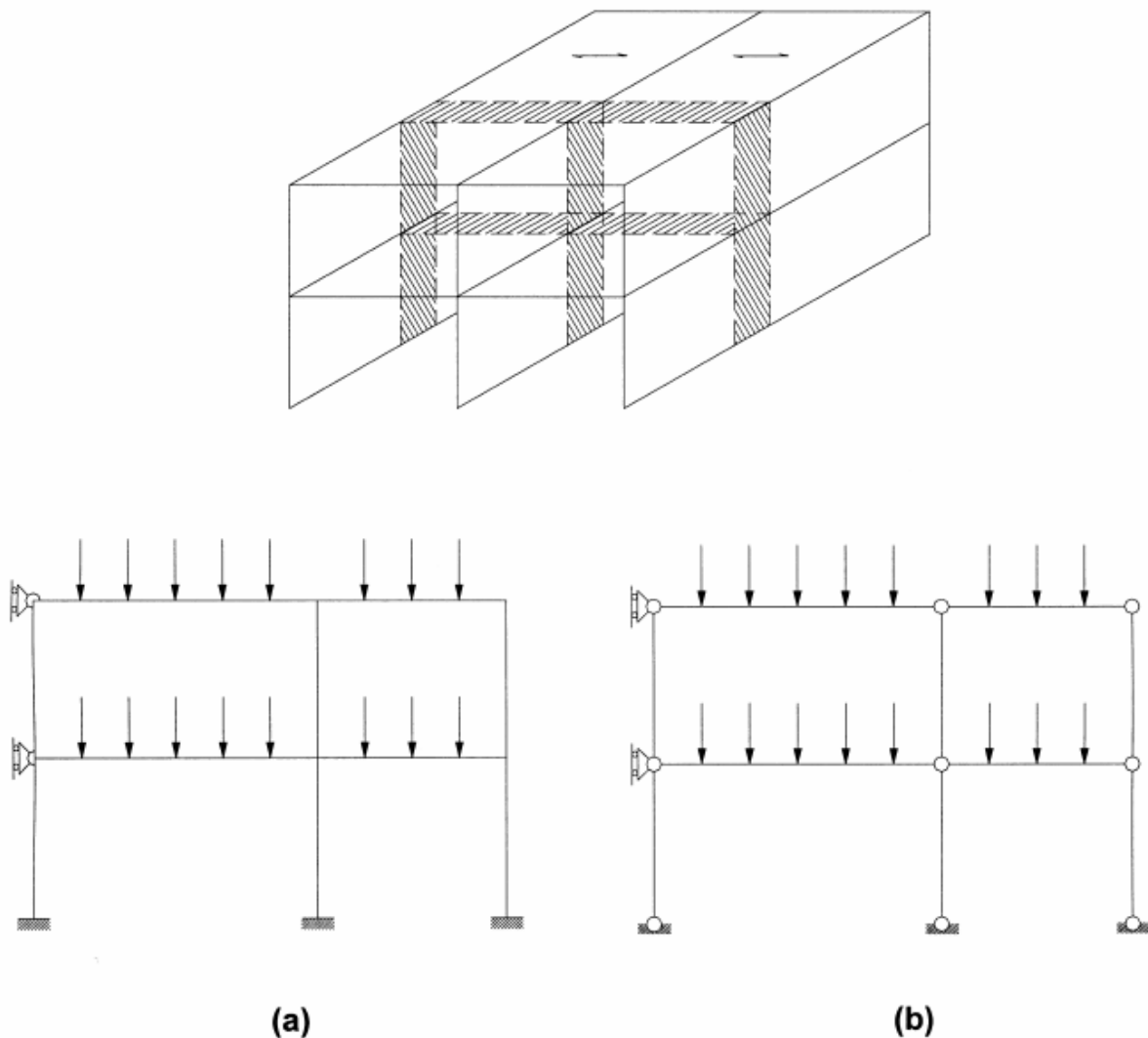


Fig. 2.17 – Schematizzazioni per l'analisi sotto carichi verticali:

a) schema della continuità, b) schema dell'articolazione

I due schemi possono essere usati anche per uno stesso edificio, utilizzando il primo per i piani bassi ove le ipotesi di continuità sono meglio verificate, ed il secondo per i piani alti. In generale non si ammette l'ipotesi della continuità per l'ultimo piano di edifici in muratura semplice.

Ai fini della verifica di sicurezza di edifici in muratura semplice, particolare importanza nel calcolo delle sollecitazioni va attribuita alla presenza di eccentricità addizionali di varia natura.

Le eccentricità da considerare sono di tre tipi.

Si definisce innanzitutto una eccentricità *strutturale*,  $e_s$ , data dalla somma di due termini:

$e_s = e_{s1} + e_{s2}$  dove  $e_{s1}$  è dovuta all'eventuale posizione eccentrica del muro del piano superiore rispetto al piano medio del muro da verificare (Fig. 2.18):

$$e_{s1} = \frac{N_1 d_1}{N_1 + \sum_i N_2^i} \quad (2.35)$$

ed  $e_{s2}$  è l'eccentricità delle reazioni di appoggio dei solai soprastanti la sezione di verifica:

$$e_{s2} = \frac{\sum_i N_2^i d_2^i}{N_1 + \sum_i N_2^i} \quad (2.36)$$

con  $N_1$  carico trasmesso dal muro sovrastante supposto centrato rispetto al muro stesso;  $N_2$  reazione di appoggio dei solai soprastanti il muro da verificare;  $d_1$  eccentricità di  $N_1$  rispetto al piano medio del muro da verificare;  $d_2$  eccentricità di  $N_2$  rispetto al piano medio del muro da verificare.

L'eccentricità  $d_2$  delle reazioni d'appoggio dei solai può essere valutata considerando opportunamente le diverse situazioni possibili.

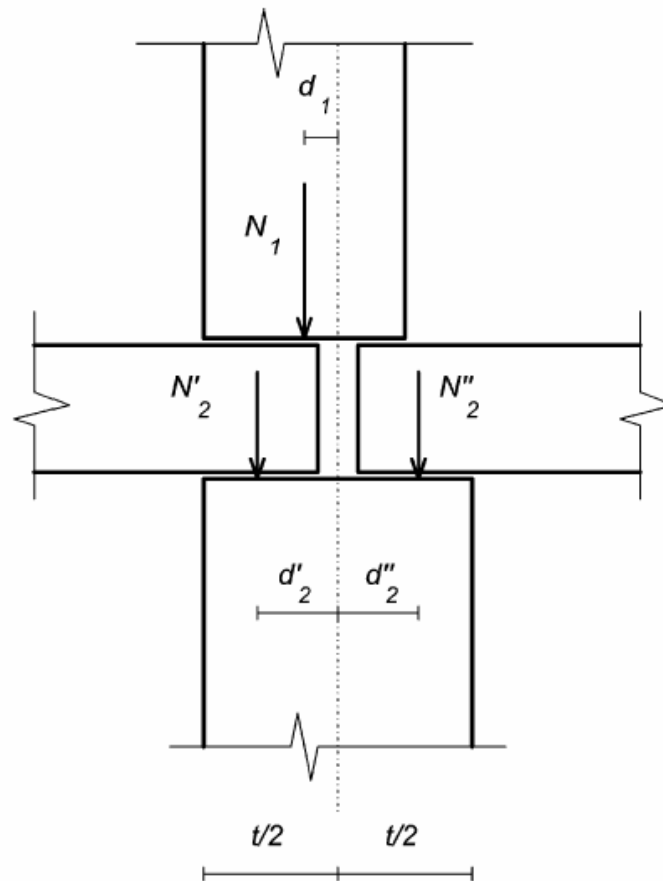


Fig. 2.18 – Schema per il calcolo dell'eccentricità strutturale dovuta ai carichi sovrastanti a un muro

Nel caso di solai in appoggio di estremità (es. prefabbricati), si può ipotizzare una distribuzione triangolare della reazione d'appoggio (Fig. 2.19 a), oppure, ammettendo una plasticizzazione locale nella zona di contatto, una distribuzione uniforme (Fig. 2.19 b).

Si definisce inoltre una eccentricità “accidentale”  $e_a$  dovuta a tolleranze di esecuzione (posizionamento di solai e muri, difetti di verticalità e planarità della parete, difettosa confezione dei letti di malta), convenzionalmente pari ad una frazione dell'altezza interna di piano  $h$  ( $e_a = h/200$ ).

Infine si deve considerare l'eccentricità associata al momento flettente  $M_v$  generato dall'eventuale spinta del vento, considerato agente in direzione normale al piano della muratura:  $e_v = M_v/N$  dove  $N$  è lo sforzo normale nella relativa sezione di verifica.



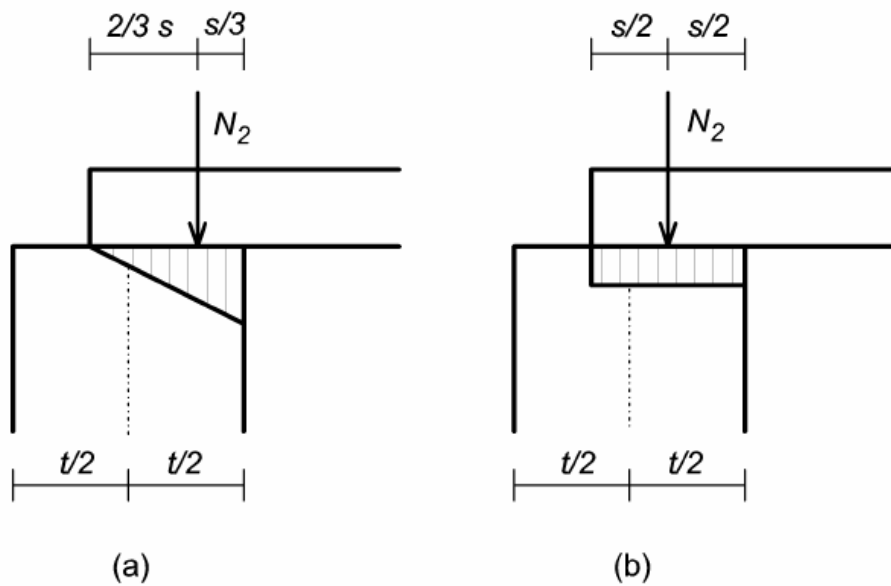


Fig. 2.19 – Ipotesi per la determinazione dell'eccentricità delle reazioni d'appoggio dei solai

Le eccentricità  $e_s, e_a, e_v$  vengono combinate convenzionalmente secondo due espressioni:

- $e_1 = |e_s| + |e_a|$  relativa alle sezioni di estremità del muro;
- $e_2 = e_1/2 + |e_v|$  relativa alla sezione a metà altezza, in cui il momento  $M_v$  è massimo.

Nel caso in cui si adotti un calcolo a telaio, l'eccentricità strutturale è automaticamente introdotta dal modello strutturale, una volta nota la distribuzione dei momenti flettenti. Analogamente l'eccentricità dovuta al vento viene ricavata coerentemente con il modello strutturale adottato. Risulta quindi necessario definire l'eccentricità accidentale, che sommata alle altre eccentricità concorre a definire il coefficiente di riduzione della resistenza  $\Phi$ .

Nell'Eurocodice viene introdotta anche una eccentricità dovuta agli effetti del secondo ordine associati alla deformazione viscosa. Tale effetto della viscosità non è esplicitamente citato nella normativa italiana, in quanto le curve proposte per il coefficiente  $\Phi$  includono implicitamente una stima degli effetti della deformazione viscosa.

## 2.5.2 Analisi e verifica sotto carichi orizzontali

La resistenza di un edificio alle azioni orizzontali è generalmente fornita dal sistema formato dai solai e dai muri di controventamento, disposti parallelamente all'azione. Su tale sistema resistente si scaricano infatti le reazioni delle pareti perimetrali direttamente investite dalle pressioni e depressioni dovute al vento. Tuttavia, se le pareti sono ben ammorsate, le pareti ortogonali alla spinta del vento possono collaborare come flange dei muri di controventamento, purché si verifichi che la connessione tra ala ed anima sia in grado di resistere alle corrispondenti azioni taglianti, che non possono eccedere la resistenza a taglio della muratura stessa. Nella definizione del modello strutturale si deve inoltre valutare se i solai possono essere considerati come diaframmi infinitamente rigidi nel loro piano, prestando particolare attenzione alla presenza di vani scala-ascensore che possono indebolire l'impalcato.

Solitamente si utilizzano modelli in cui i montanti murari sono assimilati a travi deformabili a taglio, accoppiate dai solai e da eventuali travi alte in muratura, se strutturalmente collaboranti. In molti casi è possibile idealizzare la struttura come un insieme di telai piani orientati secondo le direzioni di maggior rigidezza dei muri.

L'ipotesi del caso a) di figura 2.20 trascura completamente l'accoppiamento flessionale offerto dai solai, sovrastimando il momento alla base delle mensole, e può portare a risultati critici per pareti in muratura non armata (risultante delle compressioni esterna alla sezione), nel caso in cui il rapporto fra le forze orizzontali e i carichi verticali assorbiti dalle mensole sia elevato (questo problema è sentito soprattutto per l'azione sismica, più raramente per il vento). In questi casi è quindi preferibile modellare l'accoppiamento flessionale offerto dai solai o dalle travi alte, anche per valutarne le sollecitazioni (Fig. 2.20 b e 2.20 c). In tal caso, è opportuno introdurre dei bracci rigidi (telaio a colonne larghe) per ridurre la deformabilità degli elementi orizzontali nella parte compresa all'interno della larghezza dei montanti murari.

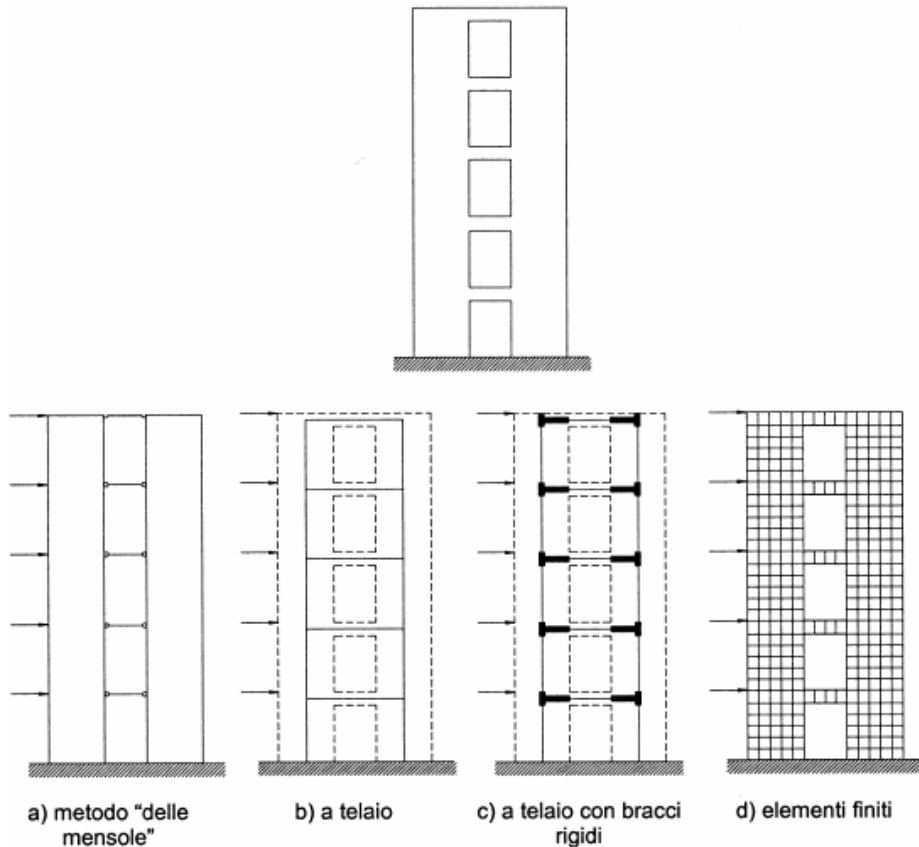


Fig. 2.20 – Modelli strutturali per la valutazione della risposta sotto azioni orizzontali

Più frequentemente, nella pratica progettuale, soprattutto quando la disposizione spaziale dei muri portanti è tale da non consentire di individuare agevolmente dei sistemi di telai piani, le azioni taglianti nei piani vengono ripartite ai diversi piani secondo un metodo semplificato dovuto a Benjamin.

Il metodo presuppone che gli orizzontamenti siano infinitamente rigidi nel loro piano e definisce un criterio per calcolare rapidamente la ripartizione del taglio interpiano supposto applicato in un punto  $C$  (si faccia riferimento alla Fig. 2.21). Per ogni muro  $i$ , caratterizzato da coordinate baricentriche  $x_i$  e  $y_i$ , si definisce una rigidezza elastica traslazionale in ciascuna delle due direzioni orizzontali  $x$  e  $y$ ,  $K_{ix}$  e  $K_{iy}$ , ed una rigidezza torsionale  $K_{i\theta}$ . Si suppone per semplicità che siano nulle le rigidezze reciproche  $K_{xyi}$ ,  $K_{\theta xi}$ ,  $K_{\theta yi}$  (ovvero che sia nulla la reazione elastica del muro in direzione  $y$

all'applicazione di uno spostamento  $u_{ix}$  in direzione  $x$ , mantenendo  $u_{iy} = 0$  e  $\vartheta_i = 0$ , e così via).

Si definisce la posizione del baricentro delle rigidezze interpiano:

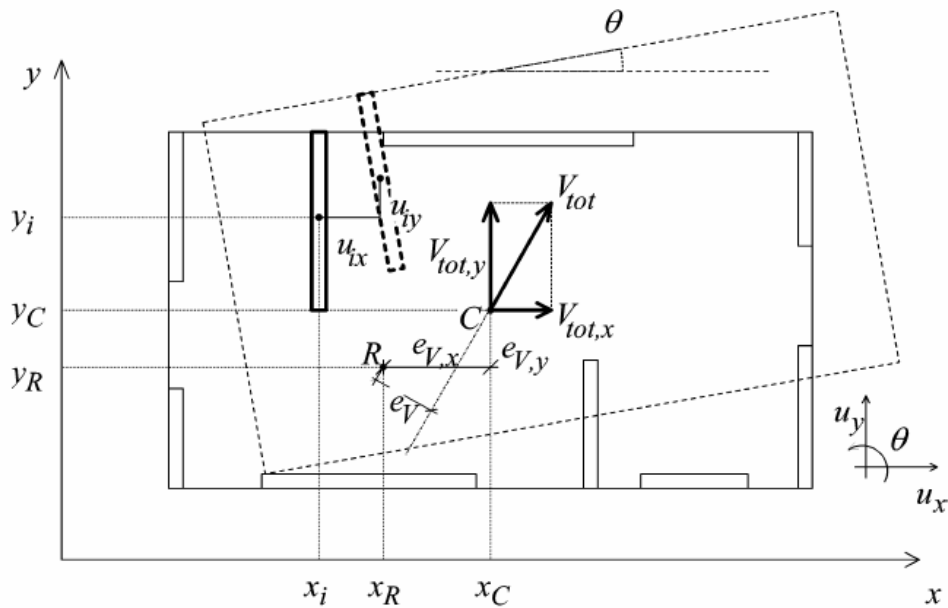


Fig. 2.21 – Grandezze utilizzate nell'applicazione del metodo semplificato per il calcolo delle sollecitazioni nell'ipotesi di solai infinitamente rigidi nel piano

$$x_R = \frac{\sum_i K_{yi} \cdot x_i}{\sum_i K_{yi}}$$

$$y_R = \frac{\sum_i K_{xi} \cdot y_i}{\sum_i K_{xi}}$$
(2.37)

Imponendo l'equilibrio alla traslazione in direzione  $x$  e  $y$  e alla rotazione attorno all'origine, e sfruttando le relazioni cinematiche che conseguono all'ipotesi di orizzontamenti infinitamente rigidi, si può dimostrare facilmente che le azioni taglianti  $V_{ix}$  e  $V_{iy}$ , nelle rispettive direzioni  $x$  e  $y$  ed il momento torcente  $T_i$  in ogni muro sono ottenibili come:

$$V_{ix} = \frac{K_{xi}}{K_{x,tot}} V_{tot,x} - \frac{K_{xi}(y_i - y_R)}{J_{p,tot}} M_{tot}$$

$$V_{iy} = \frac{K_{yi}}{K_{y,tot}} V_{tot,y} + \frac{K_{yi}(x_i - x_R)}{J_{p,tot}} M_{tot}$$

$$T_i = \frac{K_{\theta i}}{J_{p,tot}} M_{tot} \quad (2.38)$$

dove:

$$K_{x,tot} = \sum_i K_{xi}$$

$$K_{y,tot} = \sum_i K_{yi}$$

$$J_{p,tot} = \sum_i K_{xi} (y_i - y_R)^2 + \sum_i K_{yi} (x_i - x_R)^2 + \sum_i K_{\theta i} \quad (2.39)$$

sono rispettivamente le rigidezze traslazionali totali e la rigidezza rotazionale totale di piano e:

$$M_{tot} = V_{tot,y} (x_C - x_R) - V_{tot,x} (y_C - y_R) = V_{tot,y} e_{V,x} - V_{tot,x} e_{V,y} \quad (2.40)$$

è il momento torcente di piano dovuto all'eccentricità  $e_V$  della risultante  $V_{tot}$ , applicata in  $C$ , rispetto al baricentro delle rigidezze di piano  $R$ .

Per la valutazione della rigidezza delle pareti, tenendo conto delle deformazioni flessionali e a taglio si pone:

$$K_{x,y} = \left( \frac{h^3}{\beta E J_{x,y}} + 1,2 \frac{h}{GA} \right)^{-1} \quad (2.41)$$

in cui  $h$  è l'altezza libera interpiano del muro,  $A$  è l'area resistente al taglio trascurando eventuali flange, e il coefficiente  $\beta$  viene solitamente assunto pari a 3.

Una volta note le aliquote taglianti assorbite da ogni parete ad ogni piano, è possibile calcolare i momenti flettenti lungo l'altezza solo se si introducono delle ipotesi relativamente all'accoppiamento flessionale offerto dagli elementi strutturali orizzontali (cordoli, solai e travi

alte). L'ipotesi più semplice e sbrigativa è quella di figura 2.20 a, per cui, in una generica sezione del muro, il momento è ottenuto semplicemente moltiplicando le forze taglianti applicate ai piani superiori per la loro distanza dalla sezione di muro considerata.

Una volta note le sollecitazioni nei muri di controvento sotto forma di azioni taglianti, momenti, e azioni assiali, è necessario procedere alle verifiche di sicurezza a pressoflessione e a taglio.

Per quel che riguarda la pressoflessione, è necessario considerare l'effetto concomitante delle azioni orizzontali e verticali. In particolare, oltre all'eccentricità longitudinale dell'azione assiale dovuta alla pressoflessione nel piano del muro, possono essere presenti delle eccentricità trasversali. Secondo la normativa italiana la verifica a pressoflessione nel caso di murature non armate consiste nel verificare che l'azione verticale di calcolo  $N_d$  sia inferiore all'azione limite resistente secondo l'espressione:  $N_d \leq \Phi_t \Phi_l f_d A$ , in cui  $\Phi_t$  è il coefficiente di riduzione della resistenza funzione delle eccentricità trasversali e  $\Phi_l$  è il coefficiente di riduzione della resistenza valutato per l'eccentricità longitudinale  $e_l$ , nell'ipotesi di snellezza di progetto nulla.

Secondo gli Eurocodici la verifica alle tensioni normali viene condotta con riferimento al carico verticale per unità di lunghezza  $N_{Sd} \leq N_{Rd} = \Phi f_d t$  in cui compare solo il coefficiente di riduzione  $\Phi$  dovuto alle eccentricità trasversali e lo spessore  $t$  del muro. L'effetto della pressoflessione nel piano, ovvero della eccentricità longitudinale del carico verticale, dovrà quindi essere considerato nel calcolo del carico verticale per unità di lunghezza  $N_{Sd}$ , considerando la muratura non reagente a trazione.

La verifica a taglio consiste nel verificare che l'azione tagliente di calcolo  $V_{Sd}$  sia minore della resistenza di calcolo del muro. Secondo un approccio comune, nel caso di murature non armate la resistenza è pari alla resistenza media della zona compressa, la cui estensione è calcolata supponendo la muratura non reagente a trazione e assumendo una variazione lineare delle compressioni lungo la sezione.

Si può verificare facilmente che in questo caso per un muro rettangolare, detta  $e_l$  l'eccentricità longitudinale dell'azione assiale, l'area reagente è data da:

$$A_{eff} = t \cdot l \cdot \left( \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{e_l}{l} \right) = A \cdot \beta \quad (\text{con } \beta = 1 \text{ per } e_l \leq l/6)$$
(2.42)

La verifica a taglio allo stato limite ultimo diventa quindi:

$$V_{Sd} \leq A \cdot \beta \cdot f_{vd}$$
(2.43)

## **2.6 Edifici in muratura soggetti all'azione sismica**

La risposta al sisma degli edifici in muratura è fortemente legata alla regolarità strutturale e al grado di interconnessione fra i muri e fra i muri ed i solai. Le prescrizioni in merito alla necessità di collegare in modo opportuno solai e pareti mediante cordonature ed incatenamenti hanno in ambito sismico ancor maggiore rilevanza e hanno lo scopo di evitare alcuni comportamenti fortemente deficitari che sono stati riscontrati in edifici di vecchia costruzione.

Nel caso di edifici con solai in legno senza ancoraggi efficaci alla muratura e senza legature od incatenamenti dei muri, le pareti tendono a separarsi lungo le linee verticali di intersezione, con la formazione di vistose fessure. In queste condizioni i muri tendono a crollare per effetto delle accelerazioni ortogonali al piano della parete. Il collasso o ribaltamento fuori dal piano è evidentemente favorito dalla presenza di eventuali strutture spingenti (volte, archi, tetto).

Tali meccanismi sono inibiti quando sono presenti tiranti o catene oppure cordoli in cemento armato che leghino efficacemente tra di loro le pareti al livello dei solai, e che assorbano le componenti orizzontali delle strutture spingenti. Inoltre, la presenza di solai con comportamento a diaframma rigido riduce sensibilmente le inflessioni fuori dal piano dei muri, favorendo il comportamento "scatolare" e aumentando il grado di iperstaticità della struttura.

Negli edifici moderni ben progettati, in cui il grado di connessione fra pareti e solai rigidi è adeguato, il meccanismo prevalente di resistenza globale al sisma è associato alla risposta nel piano dei muri, e la risposta d'insieme è analoga a quella rappresentata in Figura 2.22.



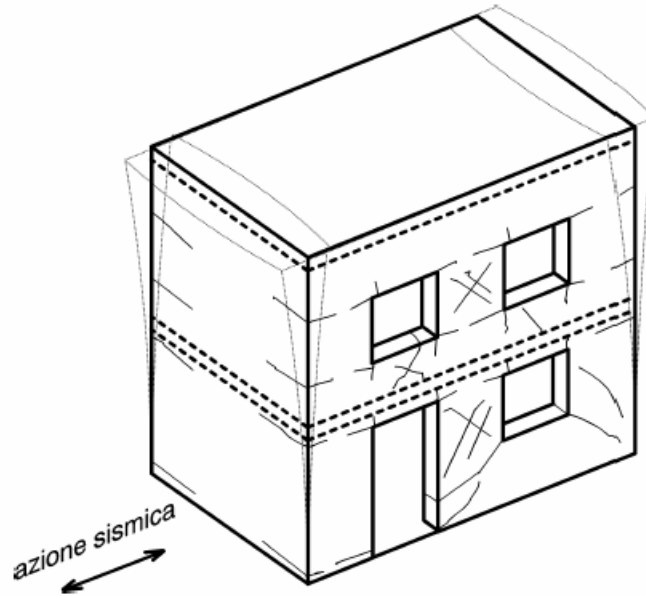


Fig. 2.22 – Risposta all'azione sismica di un edificio in muratura in cui cordolature, incatenamenti e solai rigidi inibiscono le rotture per flessione fuori del piano

## **2.6.1 Comportamento ciclico della muratura soggetta ad azioni nel piano**

### **2.6.1.1 Muratura non armata**

Il comportamento ciclico di pareti in muratura non armata è strettamente collegato ai meccanismi di rottura descritti precedentemente.

In figura 2.23 è raffigurato il comportamento ciclico sperimentale di un muro di mattoni pieni soggetto ad un carico verticale costante, a cui è stata imposta una storia ciclica di spostamenti orizzontali, mantenendo il parallelismo delle basi superiore ed inferiore. Tale muro è caratterizzato da una rottura per taglio con fessurazione diagonale. Elementi di particolare interesse sono:

- l'evoluzione della resistenza in fase post-picco;
- l'energia dissipata, rappresentata dall'area racchiusa nei cicli di isteresi della curva forza-spostamento.

Si nota come il comportamento post-picco sia caratterizzato da un degrado di resistenza abbastanza marcato al crescere degli spostamenti orizzontali impressi, con cicli di moderata ma apprezzabile dissipazione. Il carattere fragile della rottura per taglio è quindi legato principalmente al veloce degrado di resistenza che si verifica dopo la formazione di due sistemi di fessure diagonali incrociate (Fig. 2.24).

Viceversa, un muro caratterizzato da rottura per pressoflessione con bassi valori di compressione verticale media (Fig. 2.25) presenta un comportamento quasi elastico-non lineare, dovuto in massima parte al comportamento monolatero (non reagente a trazione) dei letti di malta, con isteresi inferiore rispetto alla rottura per taglio, ma con capacità di sostenere spostamenti elevati senza danni sostanziali.

In virtù della bassa compressione media, il muro tende a sviluppare un meccanismo di ribaltamento che in condizioni dinamiche consente ulteriore dissipazione di energia per impatto delle basi del muro con la fondazione o con elementi adiacenti.

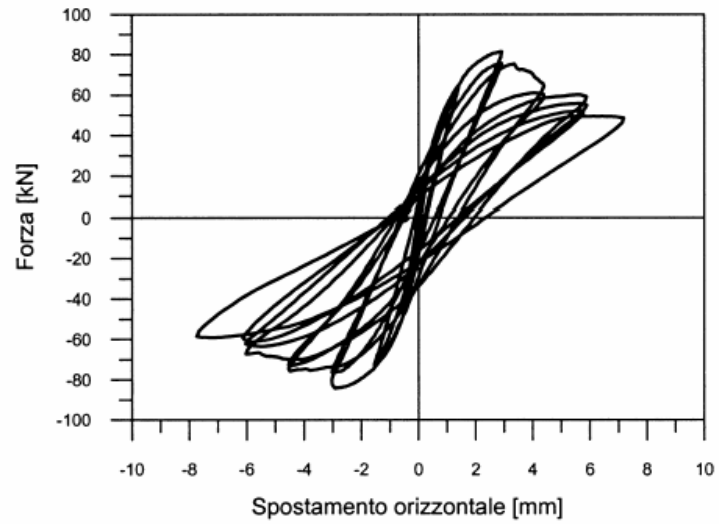


Fig. 2.23 – Comportamento sperimentale di un muro di mattoni pieni soggetto ad una forza orizzontale ciclica con meccanismo di rottura per taglio

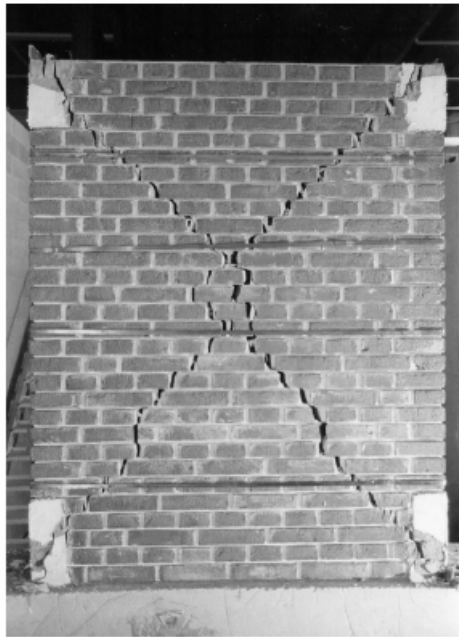


Fig. 2.24 – Doppia fessurazione diagonale per taglio ciclico in un muro di mattoni

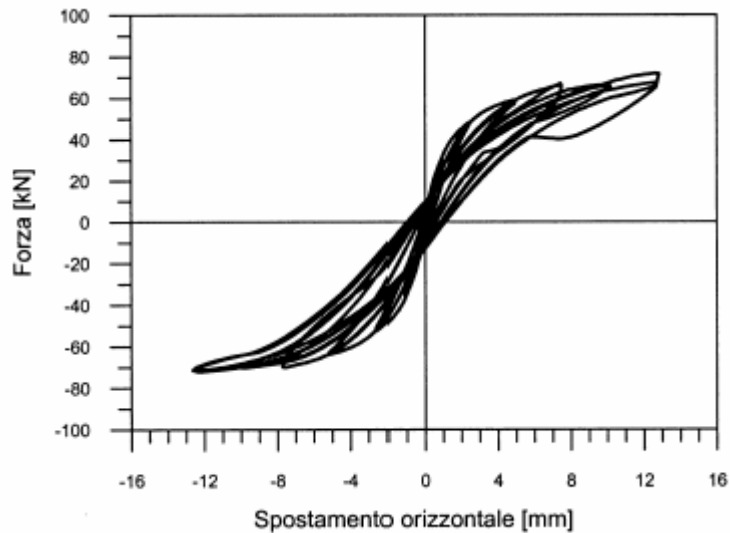


Fig. 2.25 – Comportamento sperimentale di un muro di mattoni pieni soggetto ad una forza orizzontale ciclica con meccanismo di rottura per flessione

La rottura per taglio-scorrimento lungo un letto orizzontale di malta, possibile per muri tozzi con basso valore di compressione media, presenta in linea di principio grandi capacità di dissipazione di energia, anche se sono rari i casi sperimentali in cui tale meccanismo si presenta in modo esclusivo: molto più frequentemente esso è accompagnato da meccanismi flessionali o di fessurazione per taglio.

La conformazione degli edifici in muratura in cui la maggior parte delle azioni orizzontali è assorbita dai muri più lunghi e quindi più tozzi, tende a rendere la rottura per taglio il meccanismo di rottura più probabile per i muri di controvento.

Per tale motivo, data la natura fragile della rottura per taglio, si tende a considerare la muratura non armata inadatta alle costruzioni in zona sismica.

Tuttavia, la rottura per taglio non è il meccanismo esclusivo, e la compresenza di altri meccanismi quale quello flessionale o di scorrimento, possono rendere la risposta sismica globale di un edificio meno sfavorevole. Inoltre, quando sono stati seguiti opportuni accorgimenti, quali ad esempio l'introduzione di cordolature e incatenamenti che inibiscano le rotture fuori dal piano dei muri, e

aumentano l'iperstaticità del sistema, è possibile raggiungere un livello minimo di “duttilità” e di capacità dissipative che possono consentire all'edificio di resistere a terremoti molto intensi.

### 2.6.1.2 Muratura armata

La muratura armata presenta un comportamento ciclico abbastanza vario, in funzione della tecnica costruttiva adottata e della percentuale di armatura (verticale ed orizzontale). In generale si riscontrano diverse analogie con le pareti in calcestruzzo armato. Anche per la muratura armata il comportamento ciclico si differenzia in base al meccanismo di collasso, come evidenziato nelle figure 2.26 e 2.27, relative a muratura armata in blocchi di laterizio alleggerito, a bassa percentuale di armatura. Numerose prove sperimentali hanno evidenziato come nella rottura a taglio la presenza di quantità relativamente modeste di armatura diffusa possa ridurre la fragilità di comportamento rispetto al caso di muratura non armata e consenta di fare affidamento su un buon comportamento anelastico nella risposta al sisma. L'incremento di duttilità conferito dall'armatura rende quindi la muratura armata un sistema costruttivo preferibile, in zona sismica, alla muratura non armata, e competitivo, per edifici di media altezza, con altre tecniche costruttive quali ad esempio le strutture intelaiate in c.a. con tamponamenti.

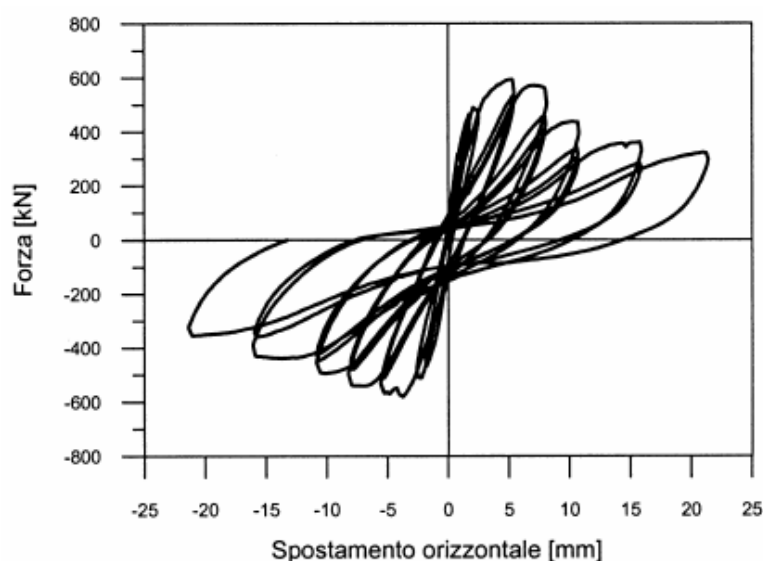


Fig. 2.26 – Comportamento sperimentale di un muro in muratura armata in laterizio alleggerito, con meccanismo di rottura per taglio

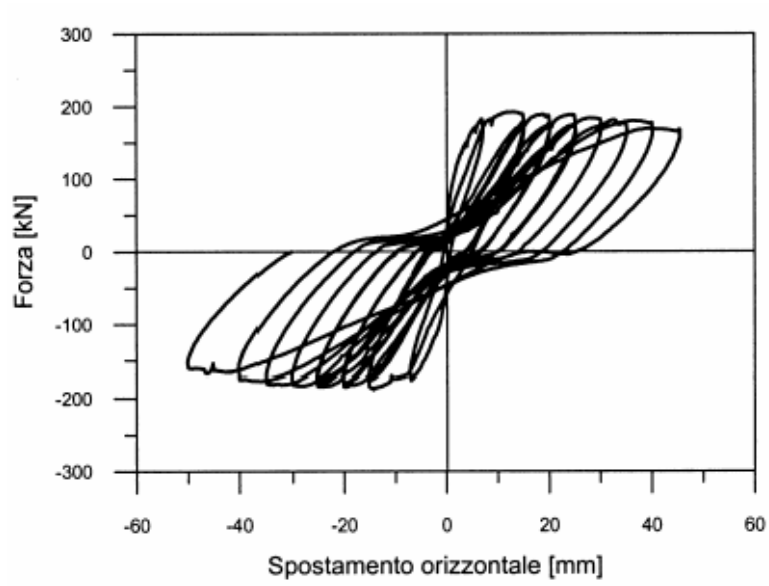


Fig. 2.27 – Comportamento sperimentale di un muro in muratura armata in laterizio alleggerito, con meccanismo di rottura per flessione

## Capitolo 3

# Metodi di analisi delle strutture in muratura

### **3.1 Introduzione**

Nel seguente capitolo, verranno analizzati gli aspetti e le caratteristiche principali dei metodi di analisi delle strutture in muratura.

Inizialmente, ci si concentrerà su quella che è la base di riferimento di tutti i metodi di analisi che successivamente si sono sviluppati, cioè il metodo POR, che, con i suoi pregi e benché le numerose critiche ricevute, rimane il primo modello di riferimento.

Successivamente si andranno ad analizzare nel dettaglio i cosiddetti modelli a macroelementi, partendo dal metodo PEFV (Parete ad Elementi Finiti a geometria Variabile), incentrato su un approccio agli elementi finiti all'interno dei macroelementi stessi, continuando con i metodi SAM (Simplified Analysis Method) e 3MURI, che si avvalgono di una modellazione a telaio equivalente.

### **3.2 Modelli basati sull'analisi del singolo piano**

In una parete in muratura, nell'ipotesi che le fasce di piano siano più rigide e resistenti dei maschi sottostanti, i maschi murari tendono ad assumere un comportamento shear-type piano per piano; nel caso opposto di fasce più deboli, invece, i maschi tendono a comportarsi come una serie di mensole estese sull'intera altezza della parete, con modesto vincolo flessionale da parte delle fasce.

È evidente quindi che la resistenza delle pareti alle forze orizzontali, a parità di dimensioni, carichi verticali e caratteristiche dei maschi, è assai più elevata nel primo tipo di comportamento che nel secondo. Di conseguenza, in numerosi metodi di calcolo, primo fra cui il POR, l'edificio è modellato come un insieme di pareti collegate fra loro da un solaio infinitamente rigido e con fasce di piano infinitamente rigide e resistenti che delimitano i maschi murari. Questi metodi di calcolo sono quelli basati sul concetto di meccanismo di piano, che partono dal presupposto che per una parete in muratura il meccanismo di collasso più probabile sia quello di rottura per taglio dei maschi di un certo piano, detto piano critico (un esempio in Figura 3.1). Pertanto, si esegue un'analisi non lineare taglio-spostamento separatamente per ogni piano individuando quello più debole. Questa ipotesi, pur escludendo a priori altri meccanismi di rottura globali, può essere giudicata attendibile per una certa classe di edifici e ha comunque il grande pregio di rendere minimo l'onere computazionale del metodo.

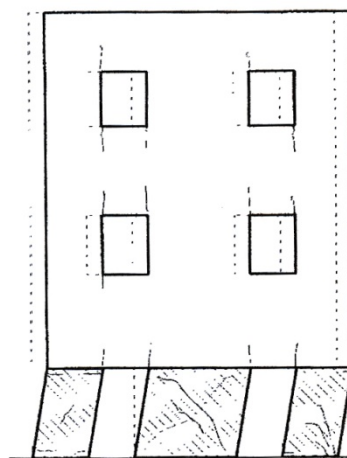


Fig. 3.1 – Esempio di meccanismo di piano debole: maschi del primo piano che collassano per taglio



L'ipotesi di solaio infinitamente rigido e fasce di piano infinitamente rigide e resistenti permette il disaccoppiamento dei piani, per cui è possibile fare l'analisi piano per piano assegnando le forze sismiche (intese come statiche) alle pareti in base alla loro rigidezza e alla posizione del centro di massa.

A questa classe di metodi di calcolo appartiene il POR, che costituisce il modello di riferimento per l'analisi delle murature nel nostro paese.

Si propone quindi la trattazione di tale metodo come rappresentativo di tutti i modelli semplificati con analisi piano per piano.

### **3.2.1 Metodo POR**

Il metodo POR, già dalla fine degli anni Settanta, è stato considerato dalle normative italiane come possibile approccio allo studio delle costruzioni in muratura. Ideato ed elaborato dal ricercatore sloveno Tomazevic nel 1978, la sua implementazione risulta di facile applicabilità anche in campo pratico, il che gli ha conferito la popolarità di cui tuttora gode tra i progettisti del settore.

Questo metodo, tuttavia, dalla data della sua ideazione è stato oggetto di continue migliorie, sia da parte dell'autore stesso che di altri ricercatori. Le modifiche effettuate riguardano principalmente il meccanismo di collasso considerato per i maschi murari: il limite di considerare solo la rottura per taglio con fessurazione diagonale è stato superato introducendo ulteriori ed opportuni criteri di rottura.

Uno dei modi per esempio per poter tenere in conto della possibilità di rottura per pressoflessione è, ad esempio, quello di ridurre la tensione tangenziale di riferimento.

Tuttavia, non è stato possibile superare il limite di considerare i maschi murari come unica sede possibile per deformazioni e rotture, in quanto è causato proprio dal concetto di meccanismo di piano che sta alla base del metodo: eseguendo un'analisi taglio-spostamento piano per piano, non viene considerato il ruolo delle fasce, trascurando le sollecitazioni che vi si creano e questo è causa di notevoli difetti. Detto ciò, si passerà alla descrizione vera e propria del metodo.

Nel POR, una parete sottoposta ad un'azione orizzontale è vista composta da maschi reagenti in parallelo (vedi Figura 3.2); questi sono ipotizzati come travi con vincolo incastro-incastro scorrevole, con rigidità di tipo trave deformabile a flessione e a taglio.

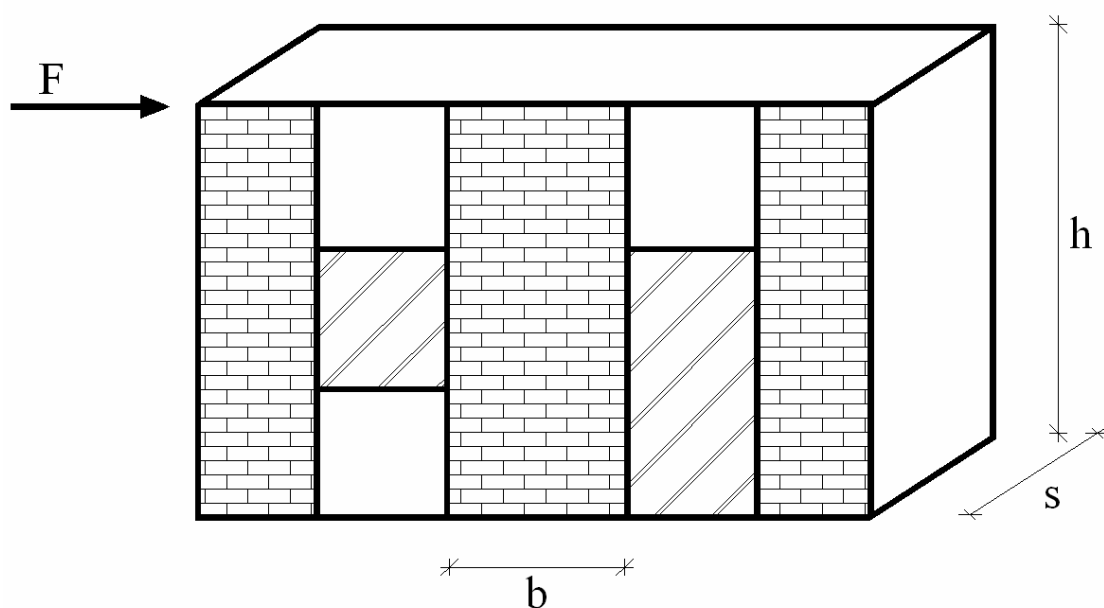


Fig. 3.2 – Parete sottoposta ad azione orizzontale

Si determina lo spostamento in sommità componendo la deformazione flessionale e tagliante; esso è dato da:

$$\delta = \delta_M + \delta_T = \frac{Vh^3}{nEJ} + \frac{\chi Vh}{GA} \quad \chi = 1,2 \quad 3 \leq n \leq 12 \quad (3.1)$$

dove:

$\delta_M$ : spostamento dovuto alla flessione,

$\delta_T$ : spostamento dovuto al taglio,

$\chi$ : fattore di taglio.

Ponendo  $\delta = 1$  si ottiene il valore della rigidezza alla traslazione:

$$k = \frac{1}{\frac{h^3}{nEJ} + \frac{1,2 h}{GA}} \quad (3.2)$$

La rigidezza elastica alla traslazione è uno dei parametri necessari per la definizione del comportamento strutturale del maschio murario. Si assume infatti una legge costitutiva elastica perfettamente plastica, che è rappresentata dal diagramma Forza-Spostamento rappresentato in Figura 3.3, per la definizione del quale occorrono i seguenti tre parametri:

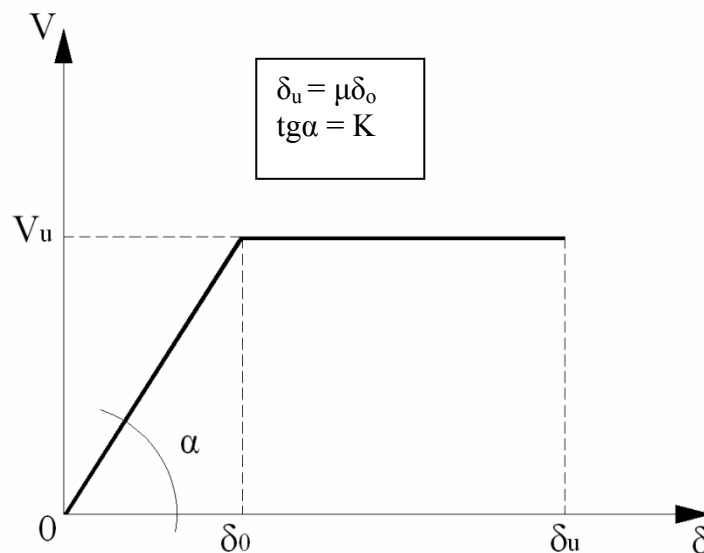


Fig. 3.3 – Diagramma Forza-Spostamento

- la rigidezza elastica  $k$ , espressa dalla (3.2), che fornisce la pendenza del tratto inclinato del diagramma (campo elastico);
- la forza ultima  $V_u$ , che rappresenta la resistenza a taglio del maschio espressa in funzione della tensione tangenziale caratteristica della muratura e della tensione normale (cioè del carico verticale applicato);
- la duttilità  $\mu$ , pari al rapporto tra lo spostamento ultimo e lo spostamento al limite elastico.

Il valore della tensione tangenziale caratteristica varia da 0.02 MPa fino a 0.24 MPa, mentre la duttilità assegnata è compresa tra 1.5 e 2.

La forza ultima  $V_u$  dei maschi è fornita dal criterio di resistenza di Turnseck e Cacovic, ed è ricavata partendo dall'analisi di un pannello murario sottoposto agli effetti combinati di tensione normale e tangenziale e caratterizzato, al raggiungimento della tensione principale di trazione limite, da rottura per fessurazione diagonale:

$$V_u = A \tau_{0d} \sqrt{[1 + \sigma_0 / (b \tau_{0d})]} \quad (3.3)$$

Lo sforzo principale di trazione, considerando uno stato di tensione piano, può essere valutato come:

$$\sigma_t = -\frac{\sigma_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (3.4)$$

Posto  $\tau = b\tau_0$  (la distribuzione degli sforzi di taglio, per una sezione rettangolare, è di tipo parabolico con valore massimo pari a  $b\tau_0$ ), posto  $\sigma_{tr} = \sigma_t =$  resistenza caratteristica a trazione e facendo opportuni passaggi, si ottiene la formula finale

$$V_u = A \tau_k \sqrt{[1 + \sigma_0 / (1,5\tau_k)]} \quad (3.5)$$

in cui  $b$  è stato posto uguale a 1.5 ipotizzando  $h/b \geq 1,5$ .

Noti quindi la geometria del maschio murario ( $b, s, h$ ), la tipologia della muratura ( $\tau_k, G, \mu$ ) e il carico verticale ( $\sigma_0$ ), il diagramma Forza-Spostamento risulta completamente definito.

Il comportamento strutturale di una parete, costituita da più maschi in parallelo, viene definito a partire da quello dei singoli maschi.

Sotto l'azione di una forza orizzontale agente globalmente, la parete presenta uno spostamento comune a tutti i maschi; ognuno reagisce con una forza dipendente dalla propria rigidezza alla traslazione. Pertanto il diagramma Forza-Spostamento della parete si ottiene sommando i contributi resistenti di ciascun maschio (Figura 3.4).

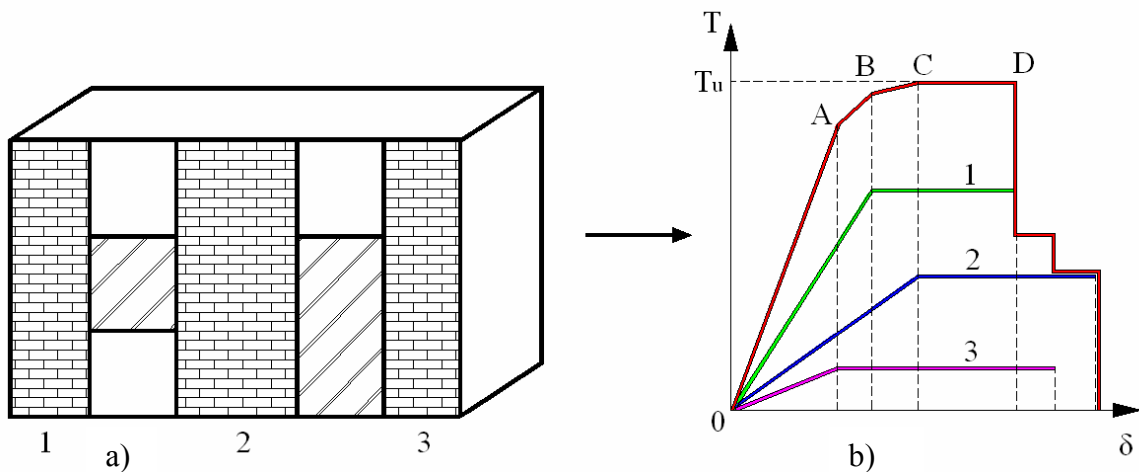


Fig. 3.4 – a) Suddivisione della parete in maschi murari; b) Diagramma Forza-Spostamento globale

Per il primo tratto, corrispondente alla retta  $\overline{OA}$ , la rigidezza del sistema è la somma delle rigidezze di ciascun maschio (1, 2, 3). Successivamente il maschio 3 presenta rigidezza nulla e quindi per il tratto  $\overline{AB}$  la rigidezza del sistema è pari alla somma delle rigidezze dei maschi 1 e 2. Nel tratto  $\overline{BC}$  si annulla anche la rigidezza del maschio 1 e in  $\overline{CD}$  il diagramma assume un andamento costante, fino al punto in cui la resistenza complessiva registra un brusco crollo. Quest'ultimo, causato dalla definitiva rottura del primo maschio, sarà seguito da altri due crolli (corrispondenti alla rottura degli altri due maschi) e in seguito dalla totale caduta di resistenza.

Grazie al diagramma globale Forza-Spostamento è possibile, noto il valore della forza orizzontale, ricavare il corrispondente spostamento della parete, mentre i vari contributi resistenti dei maschi murari vengono letti sui rispettivi diagrammi.

Il diagramma *OABCD* di Figura 3.4b descrive completamente il comportamento non lineare della parete muraria e risulta evidente come soltanto considerando per ogni maschio murario la fase plastica è possibile stimare correttamente forze e spostamenti sotto azioni orizzontali.

La curva del tipo di Figura 3.4b potrebbe essere agevolmente costruita considerando non solo una parete, ma tutte le pareti che costituiscono l'organismo murario resistente del piano considerato.

Semplicemente sommando i contributi di tutti i maschi murari di tutte le pareti, si giunge immediatamente alla curva di capacità complessiva.

Questa procedura però è lecita solo se il centro delle rigidità coincide con il baricentro (centro delle masse): infatti, viene considerata una traslazione orizzontale di tutti i maschi murari senza effetti torsionali.

D'altra parte la sollecitazione, per sua natura, è applicata nel centro delle masse e produce non solo una traslazione ma anche una rotazione intorno al centro delle rigidità. Pertanto, per estendere al caso spaziale la curva di capacità, è necessario riferirsi al procedimento qui di seguito descritto.

Con riferimento alla Figura 3.5, la struttura muraria si considera costituita da pareti di sezione rettangolare disposte secondo le direzioni ortogonali nel riferimento *X* e *Y*.

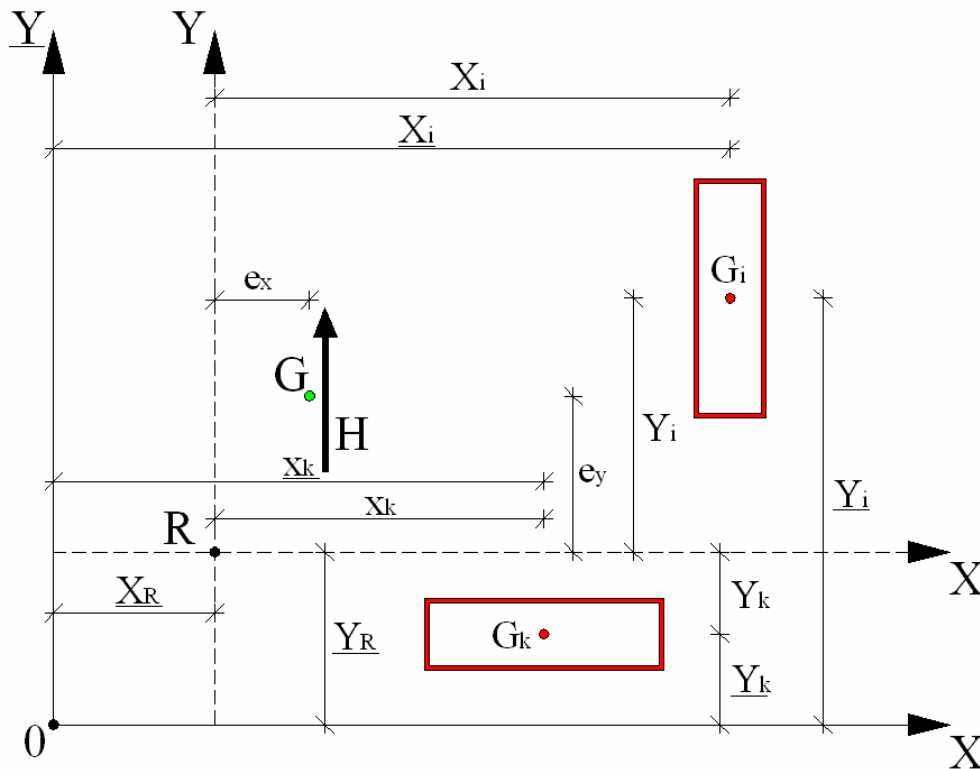


Fig. 3.5 – Schema di calcolo per il metodo POR

Si indichi con  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) il setto generico disposto secondo  $Y$  e con  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ) il setto generico disposto secondo  $X$ .

Le coordinate del centro delle rigidezze nel riferimento  $XY$  sono:

$$\begin{aligned} \underline{x}_R &= \frac{\sum K_{yi} \underline{x}_i}{\sum K_{yi}} = \frac{\sum K_{yi} \underline{x}_i}{K_y} \\ \underline{y}_R &= \frac{\sum K_{xk} \underline{y}_k}{\sum K_{xk}} = \frac{\sum K_{xk} \underline{y}_k}{K_x} \end{aligned}$$

(3.6)

dove  $K_x$  e  $K_y$  sono le rigidezze totali di piano alla traslazione in direzione  $X$  e  $Y$ .

Determinata la posizione del centro delle rigidezze  $R$ , si può assumere il sistema di riferimento  $XY$  con origine in  $R$ .

Una forza  $H$ , applicata nel punto  $R$ , produce una traslazione relativa secondo  $X$  pari a:

$$\delta_{xR} = \frac{H}{K_x}$$

(3.7)

ed impegna i setti  $k$  con forze proporzionali alle rigidezze:

$$H_{xk} = \frac{K_{xk}}{K_x} H$$

(3.8)

La stessa forza agente in direzione  $Y$  produce una traslazione relativa:

$$\delta_{yR} = \frac{H}{K_y}$$

(3.9)

ed impegna i setti  $i$  con forze:

$$H_{yi} = \frac{K_{yi}}{K_y} H$$

(3.10)

Un momento torcente di piano produce rotazione relativa attorno ad  $R$  pari a:

$$\vartheta = \frac{M_t}{J_R}$$

(3.11)

dove

$$J_R = \sum K_{xk} (\underline{y}_i - \underline{y}_R)^2 - \sum K_{yi} (\underline{x}_k - \underline{x}_R)^2$$

(3.12)

è il momento d'inerzia polare delle rigidezze rispetto al centro  $R$ .

I setti  $i$  e  $k$  risultano impegnati rispettivamente dalle forze:

$$H_{yi} = K_{yi} x_i \frac{M_t}{J_R}$$

$$H_{xk} = K_{xk} y_k \frac{M_t}{J_R}$$

(3.13)



Nella verifica sismica si suppone che la sollecitazione agisca in direzione  $X$  o in direzione  $Y$ , per cui lo spostamento del piano che si considera è individuato da due parametri: la traslazione nella direzione del sisma ( $X$  o  $Y$ ) e la rotazione attorno al centro delle rigidezze  $R$ .

Quest'ultima dipende dal fatto che l'azione sismica produce una rotazione attorno a  $R$  se il baricentro non coincide con il centro delle rigidezze.

Supposto che la forza relativa al piano che si considera di intensità  $H$  abbia direzione  $Y$  ed agisca con eccentricità  $e_x$  dal centro delle rigidezze, le forze di taglio che impegnano i setti sono espresse da:

$$H_{yi}(y) = H \left[ \frac{K_{yi}}{\sum K_y} + \frac{K_{yi}x_i}{J_R} e_x \right]$$

$$H_{xk}(y) = -H \left[ \frac{K_{xk}y_k}{J_R} e_x \right]$$
(3.14)

dove l'indice  $(y)$  indica appunto che si sta considerando la sollecitazione in direzione  $Y$ .

Definendo i coefficienti di ripartizione:

$$\rho_{yi}(y) = 1 + \frac{K_y}{J_R} e_x x_i$$

$$\rho_{xk}(y) = -\frac{K_y}{J_R} e_x y_k$$
(3.15)

le (3.14) assumono la forma:

$$H_{yi}(y) = \rho_{yi}(y) \frac{K_{yi}}{K_y} H$$

$$H_{xk}(y) = \rho_{xk}(y) \frac{K_{xk}}{K_y} H$$
(3.16)

Le componenti di spostamento in direzione  $Y$  e  $X$  del baricentro delle pareti  $i$  e  $k$  sono pari rispettivamente a:

$$\delta_{yi}(y) = \rho_{yi}(y) \frac{H}{K_y} = \rho_{yi} \delta_{yR}$$

$$\delta_{xk}(y) = \rho_{xk}(y) \frac{H}{K_y} = \rho_{xk} \delta_{xR}$$
(3.17)

Utilizzando le (3.16) ed imponendo che lo spostamento della parete sia quello al limite elastico, si ha:

$$\delta_{0yi} = \rho_{yi}(y) \delta_{Ri}$$

da cui:

$$\delta_{Ri} = \frac{\delta_{0yi}}{\rho_{yi}(y)}$$
(3.18)

valida per le pareti disposte secondo la direzione  $Y$  e per la verifica nella stessa direzione, e:

$$\delta_{Ri} = \frac{\delta_{0xi}}{\rho_{xi}(y)}$$
(3.19)

per le pareti disposte secondo la direzione  $X$  e per la verifica in direzione  $Y$ .

Il valore di  $\delta_R$  che determina la fine del comportamento elastico dell'intero organismo murario resistente è dato dal minimo tra quelli di tutte le pareti, ognuno così calcolato.

Ciò significa che la parete  $r$ -esima è al limite elastico, mentre ogni altra parete è ancora in fase elastica.

La forza reattiva allo Stato Limite Elastico in direzione  $Y$  è data da:

$$H_{SLE} = \delta_{R,SLE} K_y$$
(3.20)

A partire dallo Stato Limite Elastico, si innesca un procedimento passo-passo che consente di determinare le capacità reattive del complesso murario al limite di fessurazione e a quello di rottura.

Infatti, partendo dal valore di  $\delta_R$  relativo al limite elastico, si opera per incrementi prefissati di  $\delta_R$  seguendo il comportamento della struttura, fino a raggiungere i successivi stati limite.

In tale procedimento è necessario mettere in conto il comportamento plastico dei pannelli che superano il proprio limite elastico sostituendo alla rigidezza  $K_0$  la rigidezza secante  $K(\delta)$ . Oltre il limite elastico, infatti, la rigidezza di una parete è funzione dello spostamento, mentre la capacità reattiva corrispondente resta costantemente pari ad  $H_u$ .

Ad ogni passo del procedimento è necessario aggiornare la posizione del centro delle rigidezze  $R$  in relazione ai valori “attuali” delle rigidezze delle pareti che sono impegnate oltre il limite elastico.

Al termine del procedimento passo-passo si ottiene il valore della forza reattiva del complesso murario allo Stato Limite Ultimo, valore che deve essere confrontato con la forza sollecitante di progetto.

Nell'esposizione del procedimento si è supposto la sollecitazione agente in direzione  $Y$ ; il procedimento è analogo se la sollecitazione agisce in direzione  $X$ .

Per descrivere il comportamento del piano  $i$ -esimo dell'edificio sottoposto all'azione sollecitante, si utilizza il diagramma forza-spostamento  $H - \delta$  ( $H$  = taglio,  $\delta$  = spostamento del punto di controllo, coincidente con il centro di massa del piano).

Nei passi che si susseguono durante il procedimento, finché gli spostamenti di ognuna delle pareti resistenti si trovano in campo elastico, il diagramma complessivo è costituito da una retta che parte dall'origine ed ha pendenza pari alla rigidezza complessiva. Successivamente, via via che alcune pareti escono dalla fase elastica ed entrano in quella plastica, il diagramma complessivo si appiattisce, fino a mostrare cadute in corrispondenza della crisi finale di alcune pareti.

Non sempre la crisi di alcune pareti segna la fine del procedimento; in altri termini non è detto che lo Stato Limite Ultimo si verifichi in corrispondenza del primo collasso. Infatti può darsi che, incrementando ancora gli spostamenti di piano, pur essendo venuto a mancare il contributo di resistenza da parte dei maschi collassati, globalmente la forza reattiva continui a crescere.

Ad un certo passo, tuttavia, si giungerà sicuramente al termine del procedimento: la forza reattiva cade bruscamente in corrispondenza del collasso dei principali maschi, magari dopo un tratto di stazionarietà (corrispondente ad esempio a tutti i maschi in fase plastica).

Si comprende come il diagramma  $H - \delta$  così determinato caratterizzi il comportamento del piano dell'edificio nella direzione di verifica esaminata. Esso può essere visto come la somma dei contributi dei diagrammi  $H - \delta$  delle singole pareti.

Nella Figura 3.6 vengono riportate le caratteristiche descritte nel diagramma  $H - \delta$ .

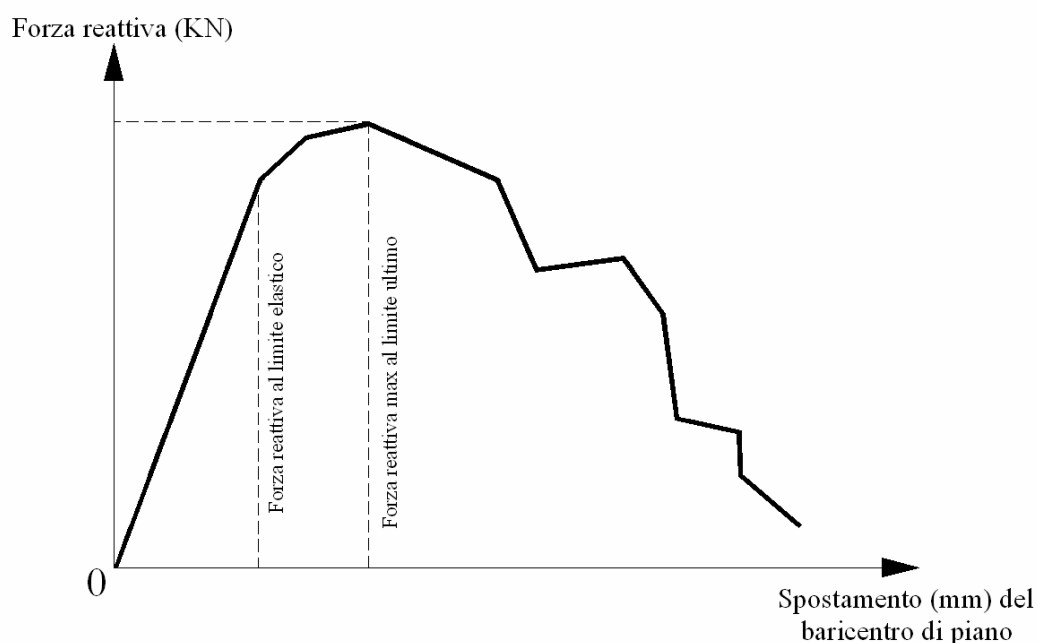


Fig. 3.6 – Diagramma  $H - \delta$ : curva Taglio-Spostamento secondo il metodo POR

In conclusione, il POR è basato sulla definizione di un legame costitutivo taglio-spostamento del singolo maschio murario, con un ramo elastico definito da una rigidezza in cui si tiene conto sia della componente flessionale che tagliante. Si considera, inoltre, un ramo plastico limitato, con una duttilità che varia da 1,5 a 2 a seconda della tipologia strutturale. La resistenza invece è misurata sulla base del meccanismo di rottura a taglio diagonale.

Questo metodo consente inizialmente (campo elastico) una ripartizione dell'azione tagliante tra elementi di diversa rigidezza; il comportamento plastico consente successivamente di definire rigidezze apparenti (secanti), dipendenti dallo spostamento inelastico raggiunto. La ripartizione è

quindi possibile anche in campo plastico e la verifica viene eseguita per mezzo di un metodo al passo che si arresta quando si raggiunge la deformazione ultima dell'elemento meno deformabile. Tutto ciò è valido sia nel piano che nello spazio.

Tuttavia il metodo POR ha un campo di applicazione limitato, al di fuori del quale risulta poco sicuro; infatti si ottiene, specialmente per edifici con tre o più piani, una sovrastima della resistenza, essenzialmente per il fatto che non si tiene conto della snellezza che determina meccanismi di collasso differenti dalla rottura per taglio diagonale.

Questo metodo, d'altronde, è stato, e tutt'ora è, sottoposto a notevoli critiche per le assunzioni troppo semplicistiche sia rispetto al modello sia rispetto al criterio di resistenza.

In parte queste critiche sono già state riferite quando si è parlato del criterio di resistenza di Turnseck e Cacovic, il quale non tiene infatti sufficientemente conto dei fenomeni complessi che avvengono in un pannello murario inserito in un edificio. Altre critiche riguardano l'ipotesi di infinita resistenza delle fasce di piano che potrebbe condurre ad una sovrastima della resistenza ultima dell'intera struttura.

Anche l'ipotesi di infinita rigidità del solaio va considerata con attenzione; non è infrequente trovare, negli edifici antichi, murature di notevole spessore che possano sviluppare una rigidità superiore a quella del solaio, rendendo quindi poco plausibili una delle assunzioni fondamentali della procedura.

Una ulteriore critica che si deve fare riguarda l'ipotesi che la rottura nei maschi murari avvenga solo per taglio trascurando il fatto che questa possa avvenire anche per pressoflessione. Si aggiunge a questo che fondamentale per l'uso del criterio è la conoscenza della  $\tau_k$  (tensione caratteristica di taglio); nel caso delle murature antiche è praticamente impossibile determinarlo.

La procedura di calcolo del metodo POR, tuttavia, nonostante le critiche, possiede una sua validità storica (essendo il primo metodo di calcolo semplice che tiene conto della fase post-elastica) e pratica. Alcune sue assunzioni, come la plasticità delle murature e il metodo per tenerne conto sono

sicuramente interessanti e valide e possono dare informazioni riguardo ai meccanismi locali o zone deboli della struttura.

Perché ciò avvenga, il metodo deve essere usato con estrema correttezza, verificando che ci si avvicini il più possibile alle ipotesi di calcolo (soffitto infinitamente rigido, fasce di piano infinitamente rigide e resistenti).

### **3.3 Modelli a macroelementi**

Quando l'ipotesi che le fasce di piano siano molto più rigide e resistenti dei maschi non risulta giustificata, un'alternativa all'analisi separata piano per piano è rappresentata dai modelli a macroelementi, nei quali le pareti vengono modellate mediante Elementi Finiti bidimensionali o assimilate a telai equivalenti in cui elementi deformabili (maschi murari e fasce di piano) collegano tra loro i nodi (porzioni di muratura in cui non si riscontra generalmente danneggiamento), generalmente considerati rigidi. Questi macroelementi sintetizzano danneggiamenti, rottura, scorrimenti e rotazioni in zone precostituite sulla base di assunzioni meccaniche ed implementazione di legami non lineari più o meno sofisticati.

Nei riguardi delle azioni orizzontali, la modellazione a telaio equivalente trascura il contributo resistente delle pareti in direzione ortogonale al proprio piano, ipotesi largamente accettata data la notevole flessibilità dei maschi murari in questo piano e la natura locale del meccanismo di collasso. Generalmente questi modelli consentono analisi non lineari incrementali a collasso di singole pareti ed ultimamente, anche di interi edifici tridimensionali con orizzontamenti rigidi.

In questo paragrafo verranno trattati in dettaglio i modelli ideati da: D'Asdia e Viskovic (1994); Gambarotta e Lagomarsino (1996); Magenes e Della Fontana (1998).

### **3.3.1 Metodo PEFV**

Il modello di tipo bidimensionale qui di seguito proposto (D'Asdia e Viskovic, 1994) utilizza tecniche che modificano la geometria degli elementi, al fine di eliminare le zone in trazione.

Il seguente approccio, basato sull'uso di elementi finiti di forma variabile (all'interno dei macroelementi stessi), essendo finalizzato specificamente all'analisi delle pareti multipiano,

consente notevoli riduzioni di sforzo di calcolo e di tempo necessario alla preparazione dei dati e all'interpretazione dei risultati, mentre conserva il vantaggio, tipico dei metodi di calcolo agli elementi finiti, di non introdurre alcuna ipotesi circa le rigidezze relative e le resistenze degli elementi costituenti la parete: pannelli verticali (maschi) e pannelli orizzontali (di fascia).

Sulla base di tale modello è stato realizzato un programma di calcolo automatico denominato PEFV (Parete ad Elementi Finiti a geometria Variabile). La procedura di quest'ultimo è non lineare e segue, all'incrementarsi del carico, l'evoluzione della forma della parete resistente della muratura.

La discretizzazione dei pannelli murari avviene attraverso un numero limitato (8-18) di semplici elementi finiti triangolari a deformazione costante come mostrato in Figura 3.7 per un pannello, in Figura 3.8 per un elemento di nodo fra i pannelli verticali e di fascia e in Figura 3.9 per una intera parete.

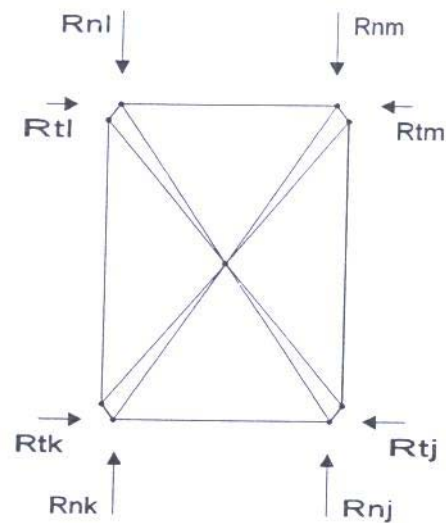


Fig. 3.7 – Discretizzazione di un pannello murario (maschio o fascia)



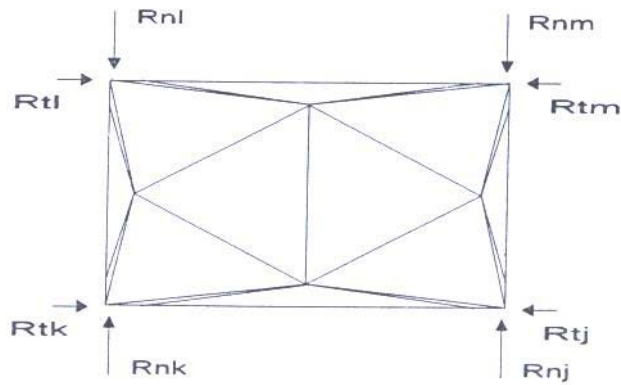


Fig. 3.8 – Discretizzazione di un elemento di nodo fra i pannelli verticali e di fascia

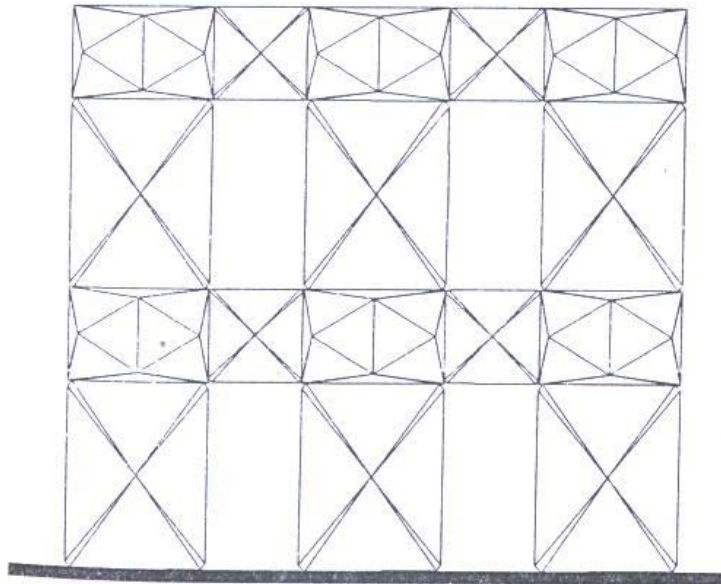


Fig. 3.9 – Discretizzazione di una parete

Tali elementi finiti sono disposti in modo tale da poter modificare ad ogni passo la forma della parte reagente dei pannelli, escludendo le zone ove la trazione, nella direzione dell'asse del pannello, ha superato il valore limite prefissato.

Infatti, al termine di ogni passo di carico, vengono determinate le reazioni nodali in corrispondenza delle sezioni di estremità di ciascun pannello, con le quali si calcola l'equivalente stato di sollecitazione in termini di sforzo normale, taglio e momento flettente delle stesse sezioni, nonché la risultante dei carichi agenti sul pannello. Quindi sulla base della posizione di quest'ultima

nell'attraversare le sezioni trasversali viene aggiornata la geometria della parte resistente del pannello spostando opportunamente alcuni dei nodi del suo contorno: in particolare, mentre vengono lasciati al loro posto i quattro nodi prossimi alla diagonale compressa, gli altri quattro vengono traslati ciascuno lungo il proprio lato fino al limite della zona ancora assialmente compressa (ovvero sull'asse neutro delle sezioni di estremità) se la resistenza a trazione è supposta nulla (Figura 3.10), oppure al limite di una zona assialmente tesa ma con valori rientranti nella resistenza ipotizzata ammissibile a trazione (figura 3.11). Si ottiene in tal modo la mesh di elementi finiti da utilizzare nel passo successivo, Figura 3.12

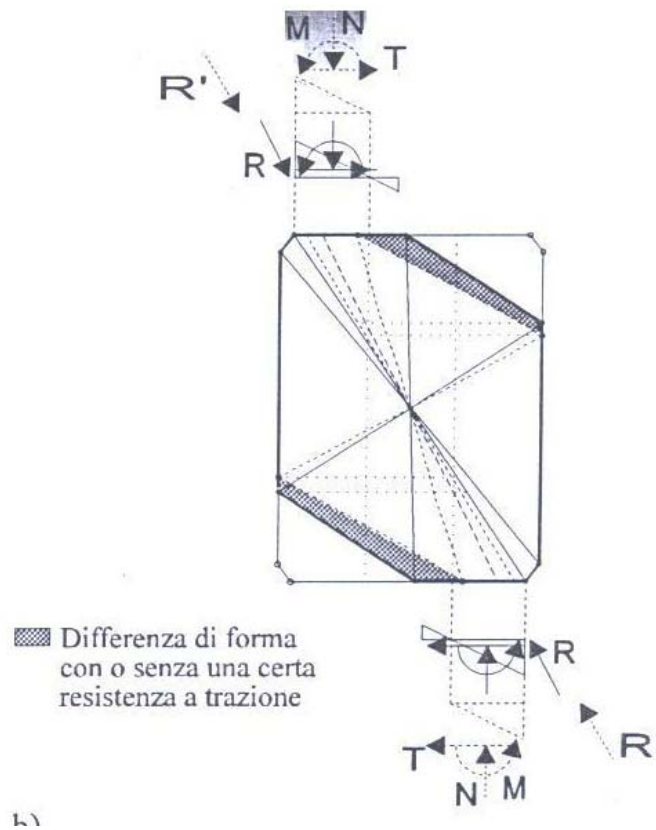


Fig. 3.10 – Evoluzione della forma del pannello

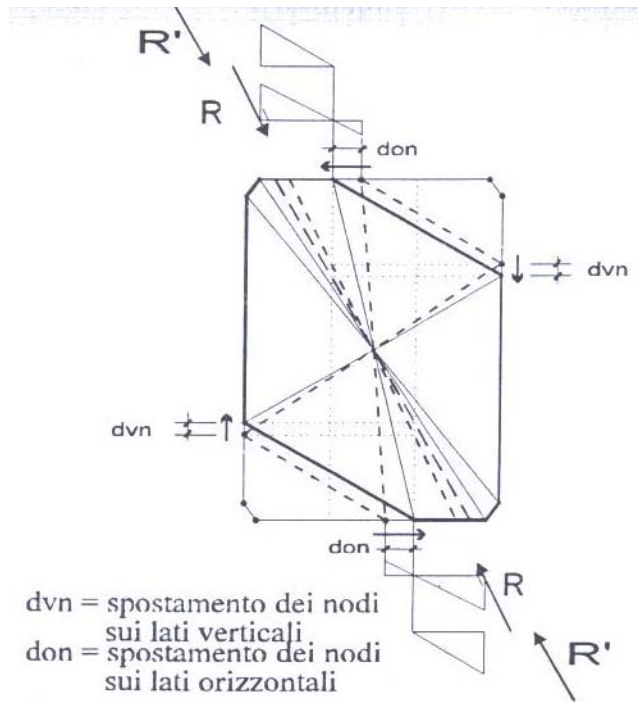


Fig. 3.11 – Evoluzione della forma del pannello

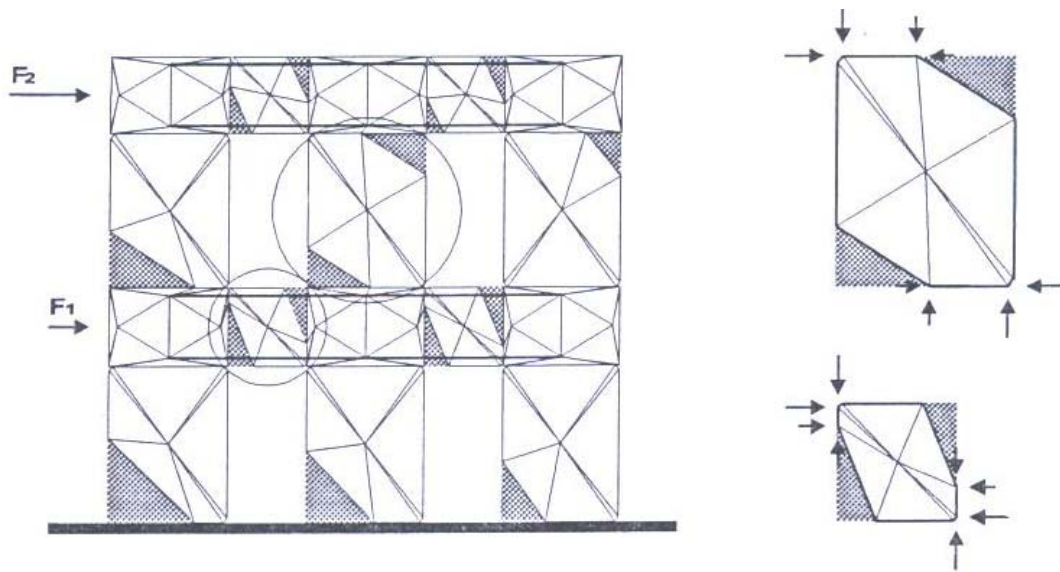


Fig. 3.12 – Configurazione tipica della parete sotto carico

Si noti in particolare che l'operazione descritta, pur comportando variazioni dello stato tensionale e delle forze nodali, non modifica la risultante all'interfaccia tra pannelli verticali o orizzontali e gli elementi di nodo; pertanto non ne modifica le condizioni di equilibrio.

I calcoli richiesti dalle valutazioni sopra descritte sono resi banali dall'uso di elementi finiti triangolari a deformazione costante che forniscono spostamenti e reazioni dei soli nodi di vertice,

mentre, malgrado l'apparente crudezza della modellazione, i risultati in termini di risultante degli sforzi si sono rivelati comparabili con quelli ottenibili con elementi finiti più complessi.

Si può notare che la struttura così modellata, all'incrementarsi delle forze orizzontali, vede ridursi la propria rigidezza flessionale e di taglio mentre oppone ai carichi una crescente rigidezza assiale, all'interno dei singoli pannelli, manifestando meccanismi resistenti prevalentemente a compressione. Questo è in accordo con il reale comportamento delle strutture murarie, concepite in modo da creare nel loro ambito situazioni di equilibrio con il solo, o prevalente, apporto delle tensioni di compressione.

L'uso invece dello stesso tipo di modellazione sia per i maschi murari che per i pannelli delle fasce di piano, consente di tener conto anche della deformabilità e del comportamento non lineare di queste ultime, con valutazione automatica di tutti i tipi di comportamento della parete, dal quasi shear-type a quello di mensole indipendenti.

In Figura 3.12 è visibile la schematizzazione della parete di due piani e tre maschi murari per piano con la mesh nella configurazione assunta in prossimità del carico ultimo.

In Figura 3.13 sono rappresentate la geometria in prossimità del collasso e i diagrammi di carico di una parete, ed è possibile notare la formazione di bielle orizzontali nelle fasce di piano che determinano un comportamento a mensole indipendenti degli allineamenti verticali.

Nelle Figure 3.14 e 3.15 sono riportati due casi di pareti rinforzate attraverso, rispettivamente, l'inserimento di barre orizzontali pretese solo al centro delle fasce di piano o all'intradosso e all'estradosso delle stesse (la quantità totale di acciaio e di pretensione è identica nei due casi).

Nella Figura 3.16, infine, è presentato il caso di fasce assunte infinitamente rigide e resistenti.

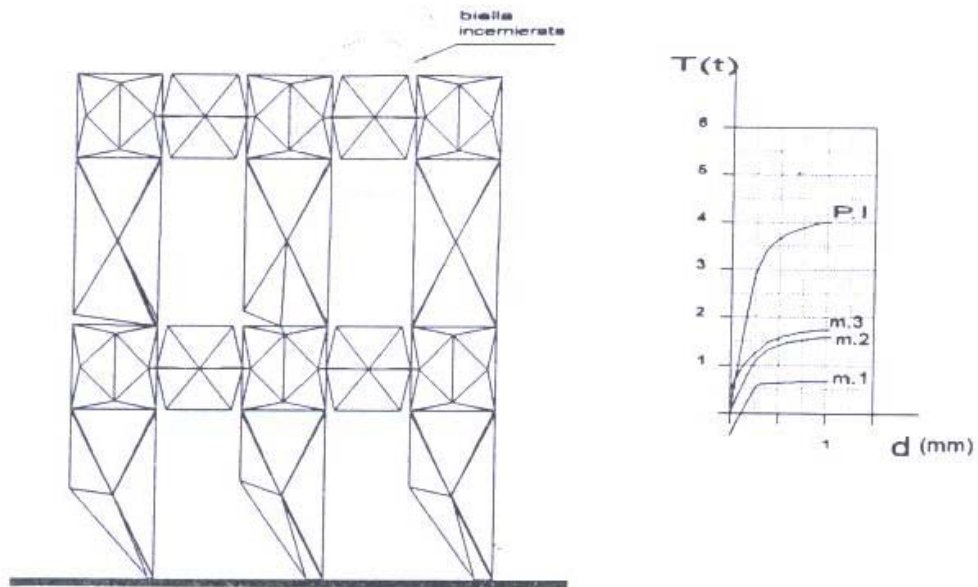


Fig. 3.13 – Geometria al collasso e diagrammi di carico di una parete

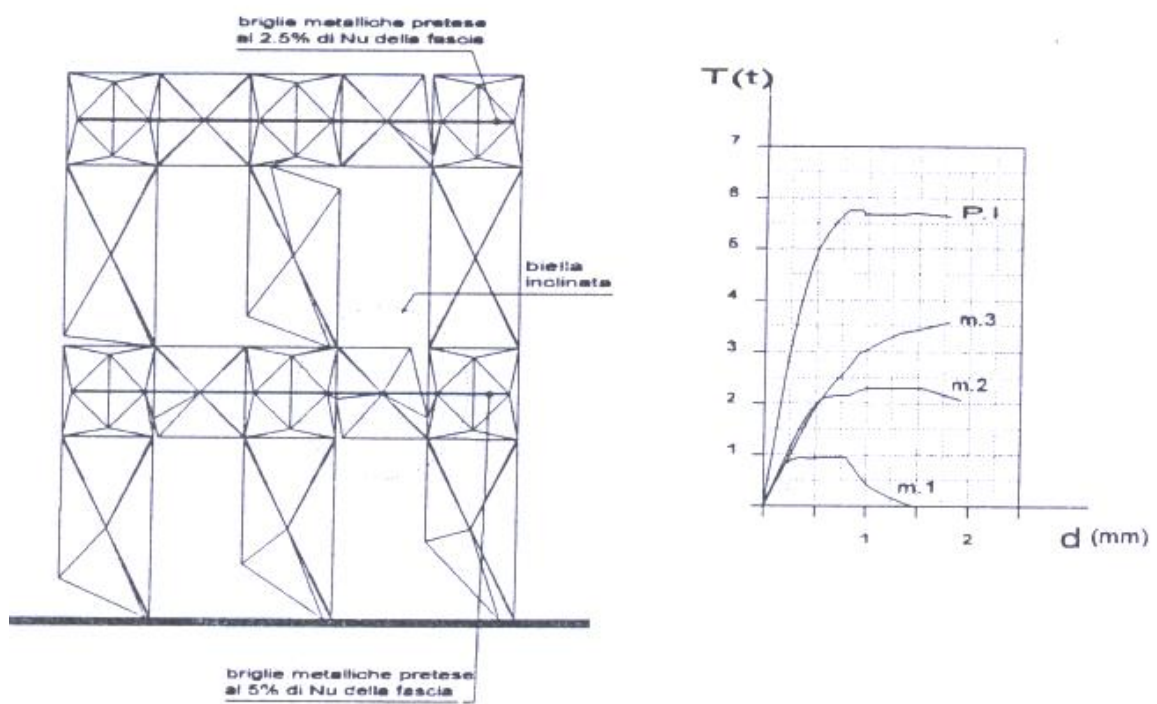


Fig. 3.14 – Geometria al collasso e diagrammi di carico della parete armata con briglie a centro fascia

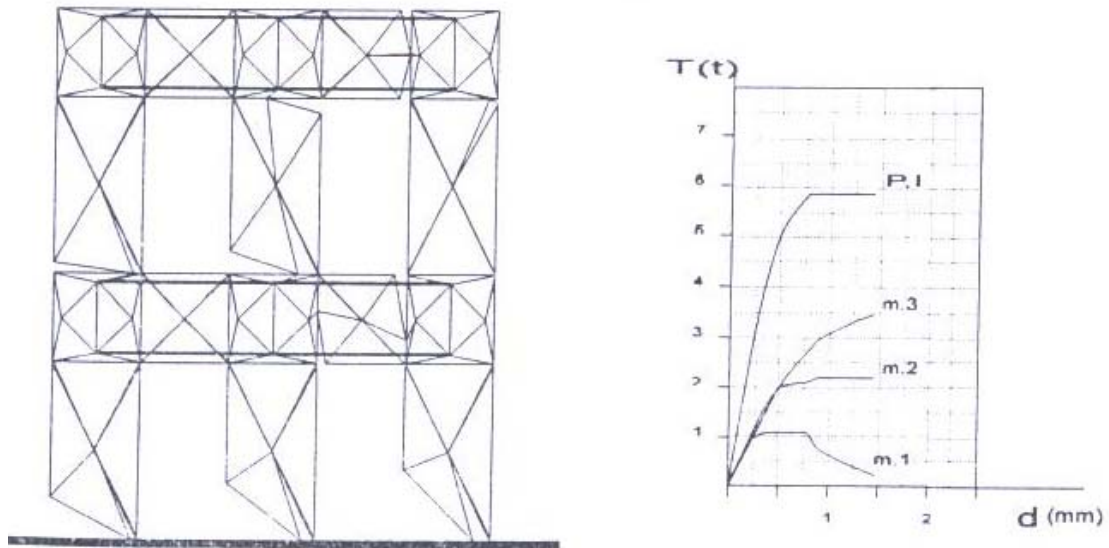


Fig. 3.15 – Geometria al collasso e diagrammi di carico della parete con armatura di fascia superiore ed inferiore

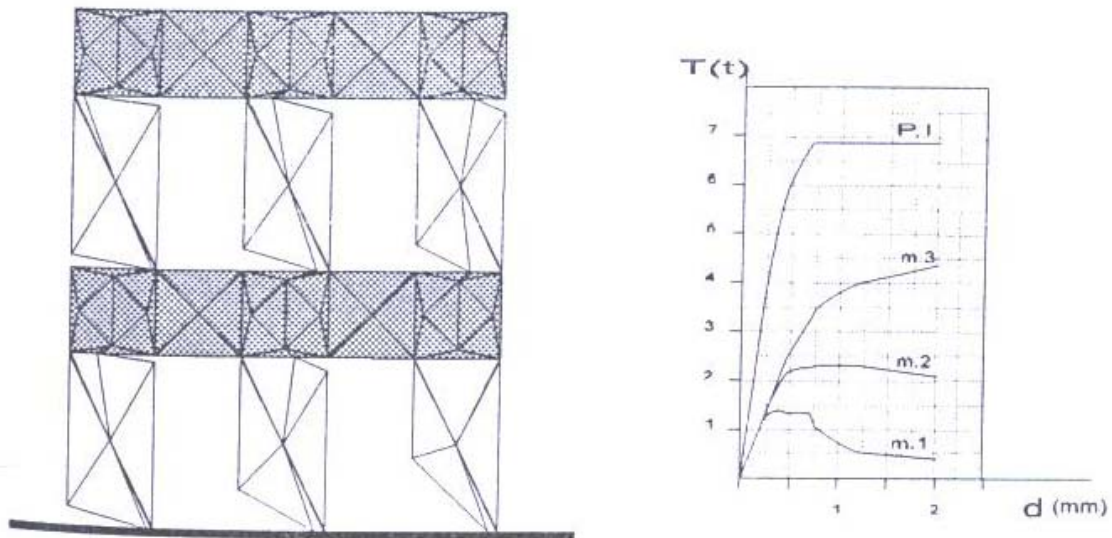


Fig. 3.16 – Geometria al collasso e diagrammi di carico della parete con fasce infinitamente rigide e resistenti

Dalle figure precedentemente citate trova conferma un notevole incremento delle forze orizzontali ultime al crescere della resistenza delle fasce e quindi al passaggio dei maschi dal comportamento a mensole indipendenti a quello più vicino ad un telaio shear-type.

### 3.3.1.1 Confronto tra risposta fornita dalla modellazione PEFV e quella fornita dal metodo POR

Confrontando i diagrammi T-d ottenuti per il piano terra di una parete tipo analizzata sia con il metodo POR che con il metodo PEFV (Figure 3.13 – 3.16 e Figura 3.17), si nota una sensibile variabilità dei risultati.

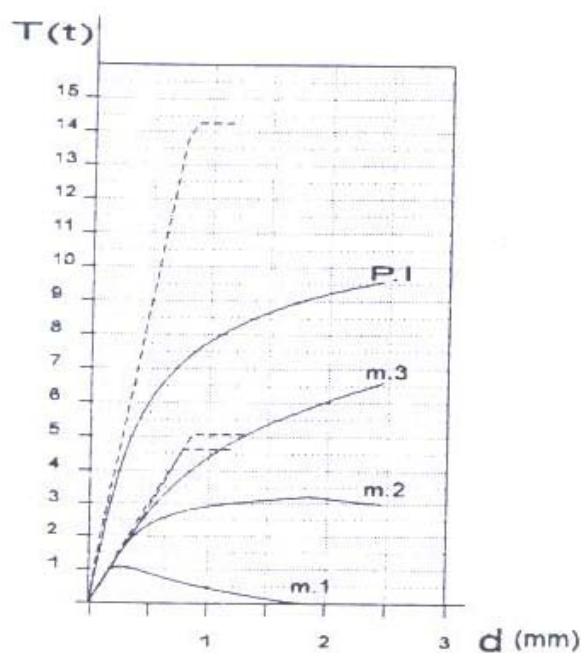


Fig. 3.17 – Diagrammi  $F - \delta$  dell'intero piano terra e dei singoli maschi

In primo luogo è evidente l'ottimismo del metodo POR così come è proposto nell'attuale normativa. Si può notare infatti come tale metodo, verificando ciascun maschio murario nella sua configurazione integra e con il suo carico verticale iniziale, da una parte non tiene conto del comportamento non lineare degli stessi singoli maschi murari dovuto alla loro parzializzazione,

dall'altra non tiene conto dell'effetto del momento ribaltante di piano che, tendendo a scaricare i maschi sopravento, riduce notevolmente la partecipazione di questi alla portanza del piano nel suo insieme rispetto ai carichi orizzontali.

Appare evidente dalla configurazione assunta in prossimità del collasso nella Figura 3.13 come in tale caso le fasce di piano non abbiano avuto un comportamento sufficientemente rigido ma abbiano permesso la parziale rotazione dei pannelli di nodo, provocando una forte parzializzazione asimmetrica dei maschi murari.

Col metodo PEFV quindi si rileva come le fasce di piano siano lontane dal comportamento a corpo infinitamente rigido ipotizzato nel metodo POR, ed è questa la principale causa delle differenze riscontrate nei risultati forniti dai due metodi.



### **3.3.2 Metodo a telaio equivalente (metodo SAM)**

Il metodo è stato sviluppato dapprima per pareti multipiano caricate nel proprio piano, e successivamente è stato esteso a problemi tridimensionali. Il metodo utilizza diverse ipotesi formulate in un metodo proposto da Magenes e Calvi nel 1996 (di cui si è mantenuto l'acronimo SAM). Tale metodo era stato pensato per l'analisi di pareti piane e proponeva un algoritmo implementabile anche in un foglio elettronico. Tuttavia, i limiti riscontrati nei tentativi di applicazione di tale approccio all'analisi di strutture di una certa dimensione e complessità hanno portato alla ricerca di una implementazione diversa, più efficiente dal punto di vista computazionale. Le idee che stavano alla base del modello sono state quindi riformulate ed implementate come subroutine di un programma di calcolo strutturale non lineare (Magenes e Della Fontana, 1998).

Per l'illustrazione del modello si faccia riferimento in prima istanza al problema di una parete multipiano in muratura con aperture, caricata nel piano, soggetta a carichi verticali costanti e a forze orizzontali crescenti applicate al livello dei solai, secondo una distribuzione assegnata. Se la geometria della parete e delle aperture è sufficientemente regolare, è possibile idealizzare una parete muraria mediante un telaio equivalente costituito da elementi maschio (ad asse verticale), elementi fascia (ad asse orizzontale), elementi nodo (Fig. 3.18). Gli elementi maschio e gli elementi fascia vengono modellati come elementi di telaio ("beam-column") deformabili assialmente e a taglio. Se si suppone che gli elementi nodo siano infinitamente rigidi e resistenti, è possibile modellarli numericamente introducendo opportuni bracci rigidi (offsets) alle estremità degli elementi maschio e fascia.

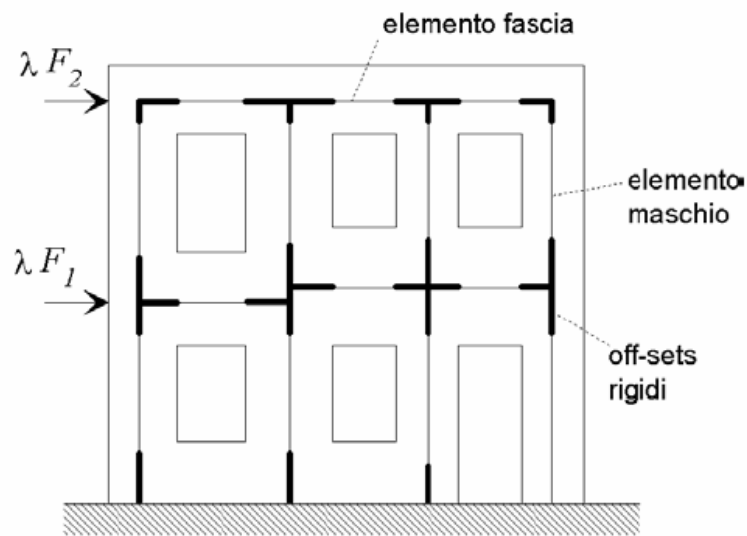


Fig. 3.18 – Schematizzazione a telaio equivalente di una parete caricata nel piano.

### 3.3.2.1 L'elemento maschio murario

Si suppone che un elemento maschio sia costituito da una parte deformabile con resistenza finita, e di due parti infinitamente rigide e resistenti alle estremità dell'elemento (Fig. 3.19).

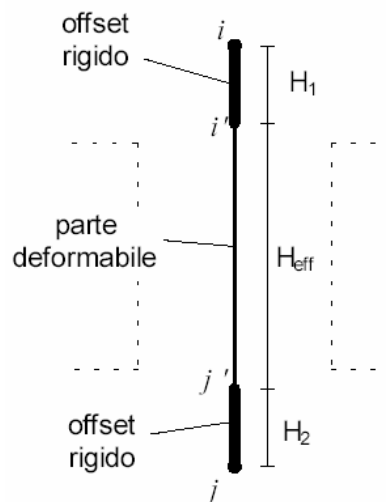


Fig. 3.19 - L'elemento maschio murario.

L'altezza della parte deformabile o «altezza efficace» del maschio viene definita secondo quanto proposto da Dolce (1989), per tenere conto in modo approssimato della deformabilità della muratura nelle zone di nodo. L'altezza efficace è esprimibile, con riferimento alla Figura 3.20, dalla seguente formula:

$$H_{eff} = h' + \frac{1}{3}D \frac{\bar{H} - h'}{h'} \quad (3.21)$$

dove  $\bar{H}$  è l'altezza di interpiano e  $D$  la larghezza del maschio murario.

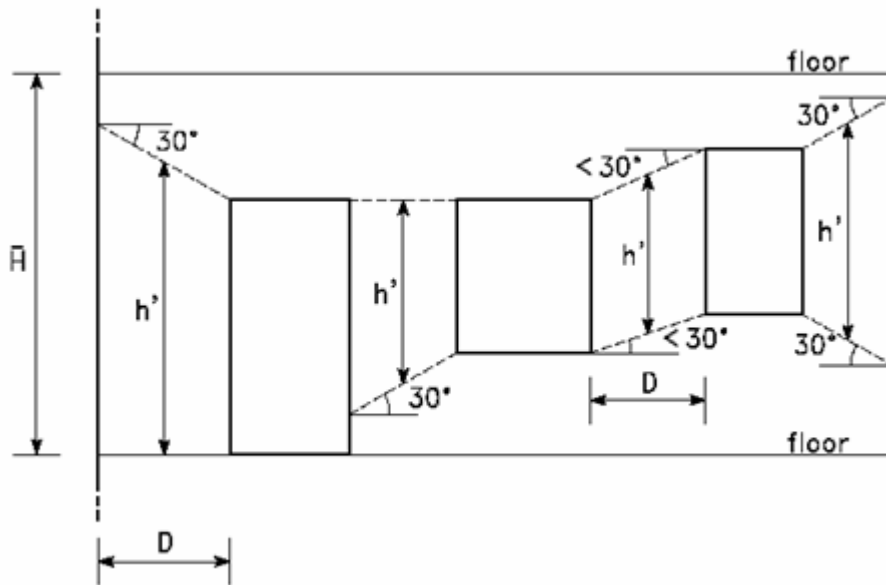


Fig. 3.20 - Definizione dell'altezza efficace dei maschi murari (Dolce, 1989).

Fuori dal piano, ove l'elemento in genere presenta una deformabilità maggiore, si è ritenuto opportuno porre:

$$H_{eff} = \bar{H}$$

Il comportamento dell'elemento maschio viene supposto elasto-plastico con limite in deformazione. Si suppone cioè che il maschio abbia comportamento lineare elastico finché non viene verificato uno dei possibili criteri di rottura. La matrice di rigidezza in fase elastica assume la forma consueta per elementi di telaio con deformazione taglio, e risulta determinata una volta definiti il modulo di Young  $E$ , il modulo  $G$ , e la geometria della sezione.

I meccanismi di rottura previsti sono i seguenti:

**Rottura per pressoflessione o ribaltamento.** Avviene quando il momento flettente  $M$  in una delle sezioni estreme della parte deformabile del maschio  $i' - j'$  raggiunge il valore ultimo, corrispondente allo schiacciamento della zona compressa della sezione in cui si è posto. Nella

sezione in cui viene raggiunto il momento ultimo viene introdotta una cerniera plastica (con ipotesi di comportamento perfettamente plastico).

**Rottura per taglio con fessurazione diagonale.** Avviene quando il taglio  $V$  nel maschio raggiunge il valore ultimo  $V_u$ . Nella seguente implementazione del metodo si utilizzano i criteri di rottura proposti da Magenes e Calvi (1997) per la muratura di mattoni. Il taglio ultimo è inteso quindi come il minore fra due valori associati rispettivamente alla fessurazione diagonale per cedimento dei giunti di malta, e alla fessurazione diagonale per rottura dei conci. Si è posto  $V_u = 0.9 V_{max}$ . Nel caso di muratura di altra natura  $V_u$  può essere valutato con altri criteri di resistenza opportuni (ad esempio il criterio di Turnšek e Sheppard, 1980).

Nel caso di rottura per taglio, si suppone che nell'elemento abbiano luogo deformazioni taglianti plastiche come illustrato in Figura 3.21, in cui viene posto un limite alla deformazione angolare  $\theta = \varphi + \gamma$  (chord rotation), oltre il quale la resistenza si annulla. La deformazione angolare  $\theta$  è espressa come somma della deformazione flessionale  $\varphi$  e di quella a taglio  $\gamma$  (Figura 3.22).

Come si può notare, il modello di comportamento elasto-plastico con limite in deformazione praticamente coincide con le ipotesi adottate nei metodi di tipo POR.

In questi metodi il modello bilineare adottato tende a riprodurre in modo approssimato l'involuppo che si ottiene da prove sperimentali cicliche (Figura 3.23), e lo spostamento ultimo viene associato al raggiungimento di un opportuno degrado della resistenza. Tale limite è comunemente espresso in termini di duttilità ultima.

L'introduzione di un limite di deformazione angolare  $\theta_u$  in sostituzione di un limite in duttilità trae le sue origini dal lavoro già citato di Magenes e Calvi in cui si è notato che pannelli murari con diversi rapporti di forma portati a rottura per taglio tendono a presentare una dispersione molto contenuta della deformazione angolare ultima, ed una dispersione molto maggiore della duttilità ultima in spostamento. Per tali muri, provati mantenendo il parallelismo fra la base superiore ed inferiore, la deformazione angolare sopra riportata coincide con il "drift" ovvero con il rapporto fra

lo spostamento orizzontale  $\delta$  e l'altezza del muro  $H$  (si confrontino la Fig. 3.22 e la Fig. 3.24). Si assume inoltre che il limite  $\theta_u$  sia pari allo 0.5% .

**Rottura per taglio-scorrimento.** Si assume che la rottura del maschio per scorrimento avvenga lungo un letto di malta in corrispondenza di una delle sezioni estreme  $i'$  o  $j'$  della parte deformabile.

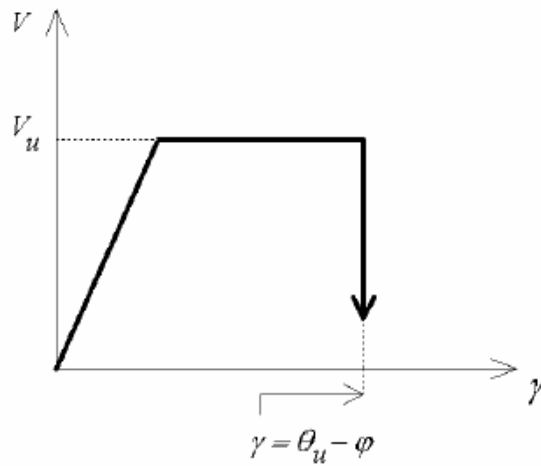


Fig. 3.21 - Comportamento anelastico dell'elemento maschio nel caso di rottura per taglio.

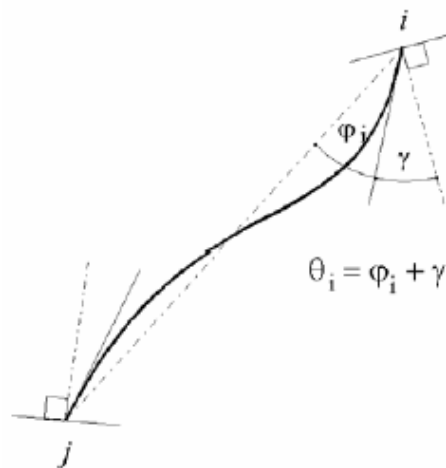


Fig. 3.22 - Deformazioni angolari pertinenti all'estremo i di un elemento «beam-column».

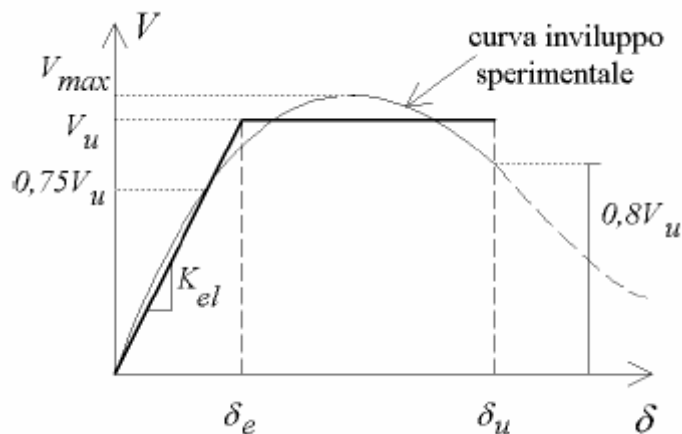


Fig. 3.23 - Interpolazione dell'involuppo sperimentale taglio-spostamento di un pannello murario mediante una bilatera.

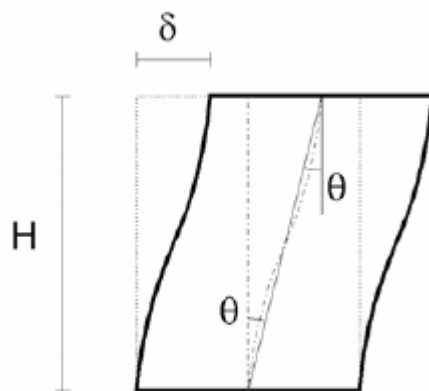


Fig. 3.24 - In una prova a taglio su pannello murario in cui si mantiene il parallelismo delle basi si ha che:  $\theta_i = \theta_j = \theta = \delta / H$ .

La deformazione anelastica associata alla rottura per scorrimento viene modellata in maniera analoga alla rottura per fessurazione diagonale, con una deformazione a taglio plastica che si sviluppa come riportato in Fig. 3.21.

I criteri di rottura sono formulati in modo tale per cui all'annullarsi della compressione verticale si annulla sia la resistenza a flessione che la resistenza allo scorrimento. In aggiunta a ciò, si suppone anche che la rigidità assiale del maschio si annulli in caso di deformazione di trazione, per cui l'azione assiale può assumere solo valori positivi (se di compressione) o nulli. Il maschio con azione assiale nulla risulterà quindi completamente scarico da ogni tipo di sollecitazione.

### 3.3.2.2 L'elemento fascia muraria

L'elemento fascia è formulato in maniera analoga all'elemento maschio, ma con alcune differenze. Vengono mantenuti gli offset rigidi, individuando quindi una lunghezza efficace dell'elemento. Nel caso di aperture allineate verticalmente (Fig. 3.25a) le analisi comparative finora svolte indicano che si ottengono buoni risultati assegnando una lunghezza efficace pari alla luce libera delle aperture. Non si sono ancora svolte al momento analisi con aperture non allineate verticalmente, per le quali si può pensare, in fase preliminare, di assumere una lunghezza efficace come indicato in Fig. 3.25b. Per l'elemento fascia si distinguono due possibili meccanismi di rottura: per pressoflessione e per taglio.

**Rottura per pressoflessione.** Il momento limite è espresso come nell'elemento maschio. Nella sezione in cui viene raggiunto il momento ultimo viene introdotta una cerniera plastica (con ipotesi di comportamento perfettamente plastico).

**Rottura per taglio.** La resistenza a taglio della fascia viene espressa con criteri simili a quelli utilizzati per l'elemento maschio, tenendo conto però della diversa giacitura dei letti di malta rispetto alla linea d'asse dell'elemento e considerando che la compressione normale ai letti di malta al di sotto delle aperture è praticamente nulla. Nell'implementazione corrente la resistenza a taglio è definita da  $V_u = Dt \cdot c$  ovvero dal prodotto della coesione per l'area della sezione della fascia, in cui si è indicata con  $D$  l'altezza della fascia e  $t$  lo spessore. Al fine di tener conto della possibilità di un comportamento maggiormente fragile delle fasce, la deformazione anelastica associata alla rottura per taglio prevede una deformazione plastica a taglio costante a cui segue un degrado di resistenza ad un valore  $\alpha V_u$ , una volta superato un valore limite di deformazione angolare  $\gamma_1$  (Fig.

3.26). A tale degrado segue poi l'annullamento del taglio resistente per deformazioni angolari superiori al limite  $\gamma_2$ .

La possibilità di assegnare in ingresso i valori dei parametri  $\alpha$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , consente di riprodurre comportamenti marcatamente fragili, ottenibili ad esempio facendo coincidere  $\gamma_1$  con il limite elastico (Fig. 3.27), oppure più duttili e simili quindi al comportamento dei maschi, ponendo  $\alpha = 1$ .

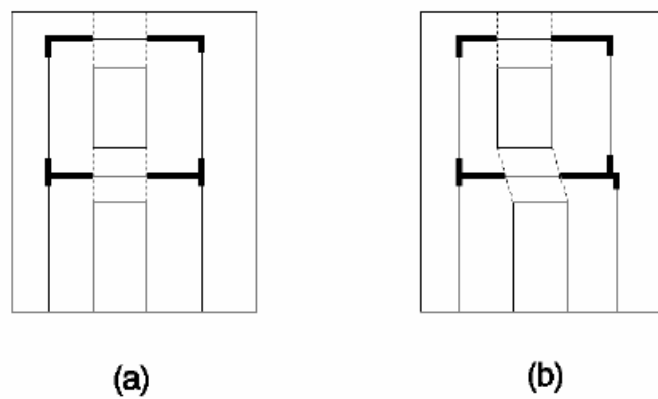


Fig. 3.25 - Definizione della lunghezza efficace delle fasce.

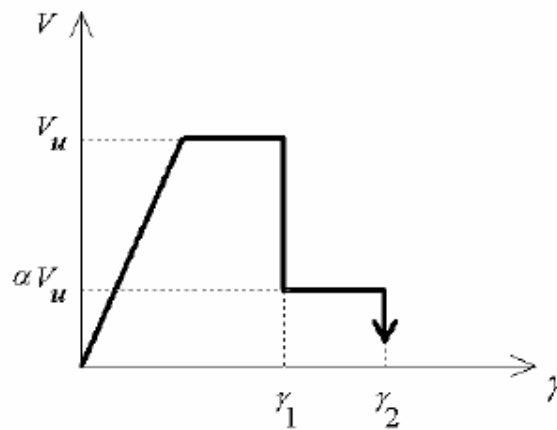


Fig. 3.26 - Comportamento elasto-plasticofragile di un elemento fascia.



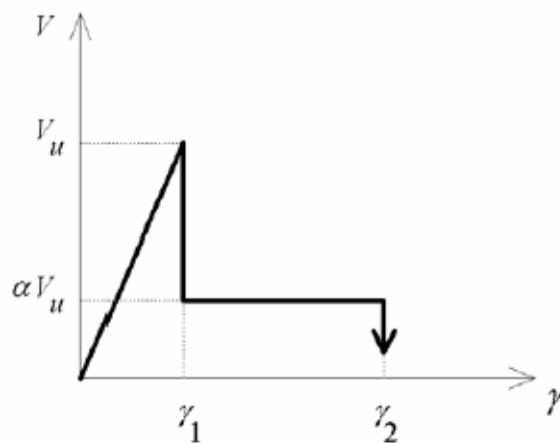


Fig. 3.27 - Comportamento elasto-fragile di un elemento fascia.

### 3.3.3 Metodo 3MURI

Tra i modelli a macroelementi più recentemente ideati per affrontare un'analisi globale dell'edificio in muratura, è da annoverare la proposta di Gambarotta e Lagomarsino, che rappresenta la modellazione costitutiva alla base del codice di calcolo 3MURI (Galasco et al., 2002). Questa modellazione utilizza spostamenti e rotazioni nodali come grandezze cinematiche ed azioni risultanti (sforzo assiale, taglio e momento flettente) come grandezze statiche. Questo sembrerebbe associare il modello alla classe dei modelli monodimensionali; tuttavia, vengono introdotti gradi di libertà all'interno dell'elemento e vengono fatte particolari considerazioni su possibili cinematismi di ribaltamento e di scorrimento come nella modellazione bidimensionale. Il grande vantaggio di questo metodo consiste nella possibilità di riprodurre efficacemente le caratteristiche più importanti della non linearità del comportamento dei pannelli murari.

Per quanto riguarda l'onere computazionale, non si presenta eccessivo, in quanto si tratta comunque di una macromodellazione; tuttavia, il metodo presenta una complessità maggiore rispetto alle modellazioni già viste.

La costruzione di un macroelemento, rappresentativo di un intero pannello murario, deve permettere la formulazione di equazioni d'equilibrio che coinvolgano un numero limitato d'incognite e deve poter rappresentare un modello cinematico capace di cogliere i meccanismi elementari di deformazione, danneggiamento e dissipazione delle strutture murarie.

Con riferimento ad un pannello di larghezza  $d$  e spessore  $t$ , il macroelemento è costituito di tre parti (Figura 3.28): la deformabilità assiale è concentrata nei due elementi di estremità 1 e 3 di spessore infinitesimo  $\Delta$ , infinitamente rigidi ad azioni taglianti, e la deformabilità tangenziale è invece situata nel corpo centrale 2 di altezza  $h$  che, viceversa, è indeformabile assialmente e flessionalmente.

Il modello cinematico completo per il macroelemento deve, quindi, contemplare i tre gradi di libertà dei nodi  $i$  e  $j$  e quelli dei nodi di interfaccia 1 e 2.

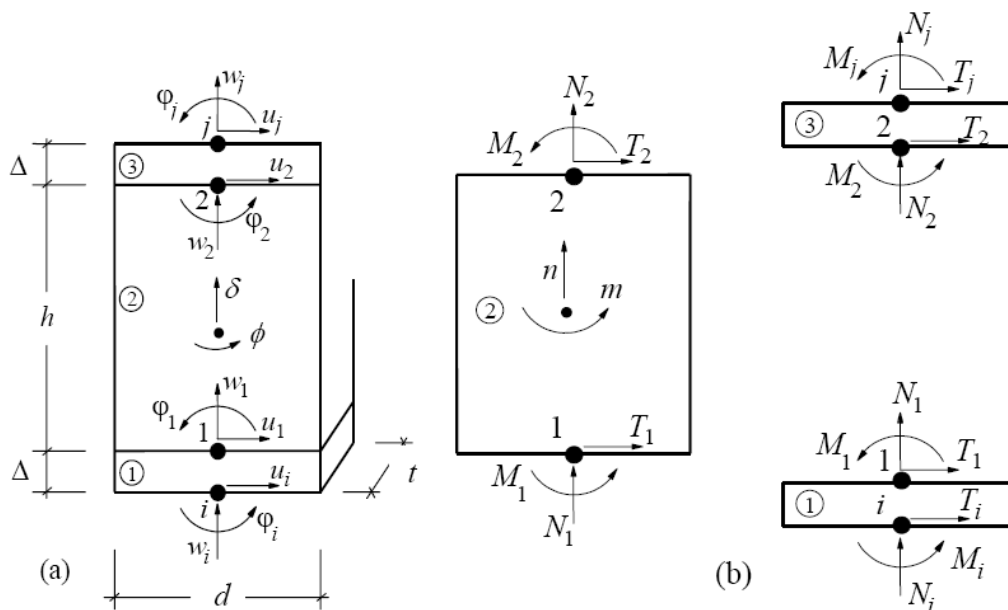


Fig. 3.28 – Modello cinematico del macroelemento

Le ipotesi di rigidità introdotte consentono di semplificare la cinematica del macroelemento imponendo opportune condizioni di congruenza all'interno delle singole sottostrutture 1, 2 e 3.

Avendo indicato con  $w$  gli spostamenti assiali, con  $u$  quelli trasversali e con  $\phi$  le rotazioni, si può affermare che:

- $u_1 = u_i ; u_2 = u_j$  poiché i corpi 1 e 3 hanno rigidità tagliente infinita, in quanto lo spessore  $\Delta$  è tendente a zero;
- $w_1 = w_2 = \delta$  poiché il corpo centrale 2 possiede infinita rigidità assiale e quindi in direzione verticale può solamente traslare rigidamente;
- $\phi_1 = \phi_2 = \phi$  poiché il corpo centrale è assialmente e flessionalmente rigido,

dove  $\delta, \varphi$  rappresentano rispettivamente lo spostamento assiale e la rotazione.

Dal punto di vista cinematico il modello è quindi descritto da otto gradi di libertà: le sei componenti di spostamento dei nodi di estremità ( $u_i, w_i, \varphi_i, u_j, w_j, \varphi_j$ ) e le due componenti del macroelemento ( $\delta$  e  $\varphi$ ).

Il meccanismo di ribaltamento del pannello, favorito dall'assenza di una significativa resistenza a trazione del materiale, viene rappresentato ipotizzando un contatto elastico monolatero nelle interfacce 1 e 3, mentre il meccanismo di rottura a taglio è schematizzato, considerando uno stato di tensione uniforme nel modulo centrale 2 (si assume  $T_i = T_j$ ), attraverso un legame tra le componenti cinematiche  $u_i, u_j, \varphi$ , lo stato tensionale e le variabili descrittive del comportamento plastico (il grado di danneggiamento  $\alpha$  e lo scorrimento plastico  $\gamma_p$ ).

Il danneggiamento per fessurazione diagonale è rappresentato mediante la componente anelastica di spostamento  $\gamma_p$  che si attiva quando viene superata una condizione limite per attrito alla Coulomb.

Il legame Gambarotta-Lagomarsino consente di descrivere, attraverso le due variabili  $\alpha$  e  $\gamma_p$ , l'evoluzione ciclica del degrado di rigidezza e del deterioramento della resistenza associato al progressivo danneggiamento a taglio (Gambarotta et al., 1996; Galasco, 2001).

La grandezza  $\alpha$ , infatti, sarà nulla se il pannello non ha subito danneggiamento, crescerà al crescere di quest'ultimo fino a raggiungere  $\alpha = 1$  in corrispondenza della massima resistenza offerta e crescerà ulteriormente oltre il valore unitario nel ramo di softening.

Nelle due estremità dell'elemento è concentrato il comportamento a flessione: le relazioni che legano la normale di compressione  $N$  ed il momento  $M$  alle componenti di spostamento  $w$  e  $\varphi$  derivano direttamente dalle equazioni elastiche di legame.

Fintanto che il centro di pressione risulta interno al nocciolo centrale d'inerzia non si verifica la parzializzazione della sezione di estremità del pannello.

Sforzo normale e momento risultano lineari e disaccoppiati nelle variabili  $w$  e  $\varphi$ . Indicando con  $k = 2E/h$  la rigidezza assiale per unità di superficie, si ha che:

$$N = kbsw \tag{3.22}$$

$$M = \frac{k}{12}sb^3\varphi \tag{3.23}$$

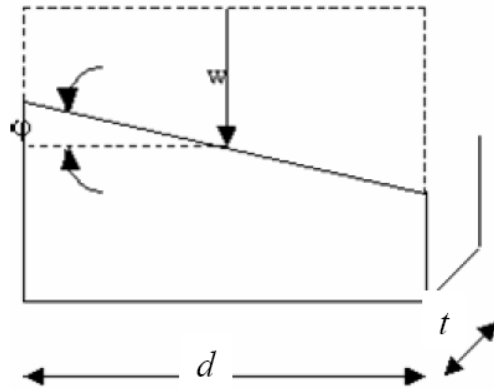


Fig. 3.29 – Cinematica del problema assiali elastico

La sezione si parzializza quando la risultante delle azioni esce dal nocciolo centrale d'inerzia e, assumendo sezione rettangolare, ciò avviene se:

$$\frac{|M|}{|N|} = \frac{\frac{k}{12}sb^3\varphi}{kbsw} = \frac{b^2|\varphi|}{12|w|} \leq \frac{b}{6} \tag{3.24}$$

ossia, in termini cinematici, (essendo  $w < 0$  poiché si assume che il pannello non reagisca a trazione):

$$\varphi \leq -\frac{2w}{b} \tag{3.25}$$

Questa relazione indica che se si applica un momento alla sezione dopo aver esercitato una compressione, la rotazione  $\varphi$  aumenterà linearmente, a spostamento verticale  $w$  costante, finché sarà verificata la condizione sopraccitata.

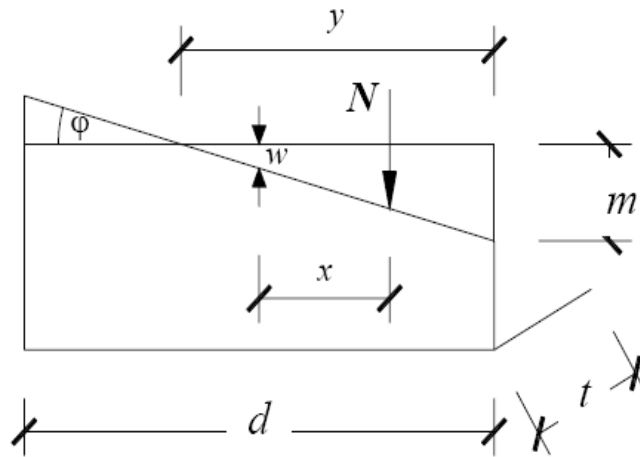


Fig. 3.30 - sezione parzializzata del modello a macroelemento

Da considerazioni geometriche, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, si possono calcolare i contributi anelastici dovuti alla pressoflessione. Separando i contributi elastici da questi ultimi, si può riscrivere (Cattari S., 2007):

$$N = kbsw - \frac{ks}{8|\varphi|} (|\varphi|b + 2w)^2 \quad (3.26)$$

$$M = \frac{k}{12}sb^3\varphi + \frac{ks(-|\varphi|b + w)}{24\varphi|\varphi|} (|\varphi|b + 2w)^2 \quad (3.27)$$

Nel caso di sezione parzializzata, normale e momento non sono più sollecitazioni disaccoppiate; si può dunque esplicitare la relazione che lega le grandezze cinematiche del problema. Esplicitando  $w$  si ha:

$$w = \frac{|\varphi|b}{2} - \sqrt{\frac{-2|\varphi|N}{ks}} \quad (3.28)$$

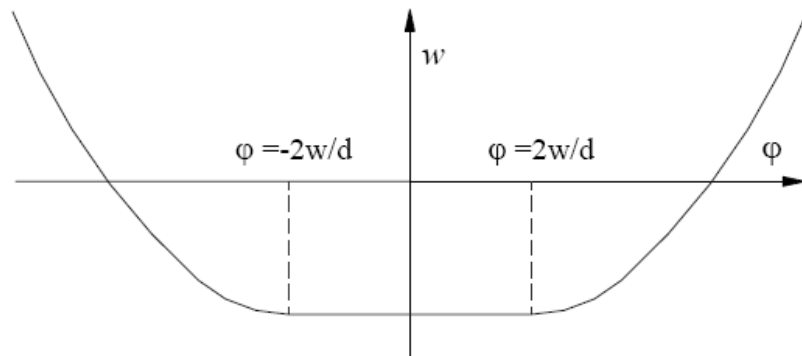


Fig. 3.31 - Interazione  $w - \varphi$

Se si incrementa il momento (in un sistema precedentemente compresso) prima si ha un incremento lineare di  $\varphi$ , poi si raggiunge la condizione limite

$$|\varphi| = -\frac{2w}{b}$$

oltre cui valgono le relazioni (3.26, 3.27, 3.28) fino al limite di parzializzazione

$$\frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0$$

oltre, aumentando il momento, aumenta la rotazione ma diminuisce la compressione verticale (Figura 3.32).

Oltre alla non linearità dovuta alla pressoflessione, il modello di macroelemento contempla il danneggiamento per compressione (Penna, 2002): si può notare come, al momento dell'entrata in campo non lineare, in un generico passo di carico, caratterizzato dal superamento del valore di spostamento

$$w_R = \sigma_R/k$$

in una porzione della sezione di base, tale stato sia identificabile attraverso due soli parametri:

$$\zeta (= p/d)$$

misura dell'estensione della porzione di sezione interessata dalla non linearità, e

$$\mu (= w_{max}/w_R)$$

misura della duttilità richiesta alla fibra più esterna e, di conseguenza, del successivo degrado di rigidità (Figura 3.32).

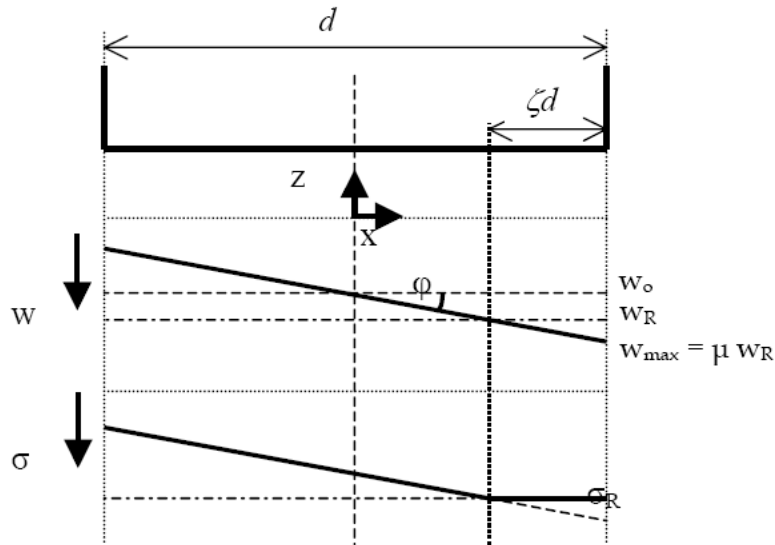


Fig. 3.32 – Stato di tensione e spostamento in condizioni di non linearità a compressione

In un successivo passo di carico, in cui il valore  $w_{max}$  sia minore del valore limite di  $w_R$ , si ha uno stato tensionale che dipende così, attraverso i parametri  $\mu$  e  $\zeta$ , dalla storia di carico precedente.

E' possibile definire una semplice procedura di correzione non lineare dei valori delle caratteristiche di sollecitazione ottenuti con il legame elastico non reagente a trazione.

Il valore dello sforzo normale di compressione si può ottenere ponendo:

$$N = N^{el} - N^* \quad (3.29)$$

dove  $N^{el}$  è lo sforzo normale calcolato con il legame elastico, mentre  $N^*$  risulta:

$$N^* = k \frac{\mu - 1}{\mu} \zeta b s w_{max} \quad (3.30)$$

Analogamente, la correzione non lineare del momento flettente si ottiene dalla:

$$M = M^{el} - M^* \quad (3.31)$$

in cui  $M^{el}$  è il momento calcolato con il legame elastico, mentre  $M^*$  risulta:

$$M^* = \left( \frac{\zeta}{3} - \frac{1}{2} \right) b N^*$$

(3.32)

Tali correzioni sono valide sia nel caso in cui vi sia una riduzione delle tensioni per effetto del degrado, sia per una nuova condizione di superamento della soglia di resistenza.

La risposta a taglio è espressa considerando una deformazione tagliante uniforme

$$\gamma = \frac{u_i - u_j}{h} + \varphi$$

nel pannello centrale 2 ed imponendo una relazione fra le grandezze cinematiche  $u_i$ ,  $u_j$  e  $\varphi$ , e la sollecitazione  $T_i = -T_j$ .

Il danneggiamento è generalmente riscontrato lungo la diagonale dove si evidenzia uno spostamento fra i giunti (con una componente di deformazione anelastica) attivato per il superamento della condizione limite attritiva di Coulomb. Conoscendo l'effettiva deformazione tagliante del corpo 2 (indicando con  $G$  il modulo elastico di taglio) si può infine formulare la seguente equazione costitutiva:

$$T_i = \frac{GA}{h} (u_i - u_j + \varphi h + \frac{h}{GA} f)$$

$$T_i^* = -\frac{GA}{h} \frac{c\alpha}{1 + c\alpha} (u_i - u_j + \varphi h + \frac{h}{GA} f)$$
(3.33)

dove la componente non elastica  $T_i^*$  comprende l'azione attritiva  $f$  che si oppone al meccanismo di scorrimento e coinvolge un parametro di danno  $\alpha$  ed un coefficiente dimensionale  $c$ , che controlla la deformazione non elastica.

Coerentemente con l'Ordinanza 3431 gli autori hanno stabilito di definire deformazioni massime (drift) accettabili per il pannello, dovuti ai meccanismi di taglio e di presso flessione (Figura 3.33). Se questi valori vengono superati, il pannello non è più considerato in grado di sopportare azioni orizzontali.



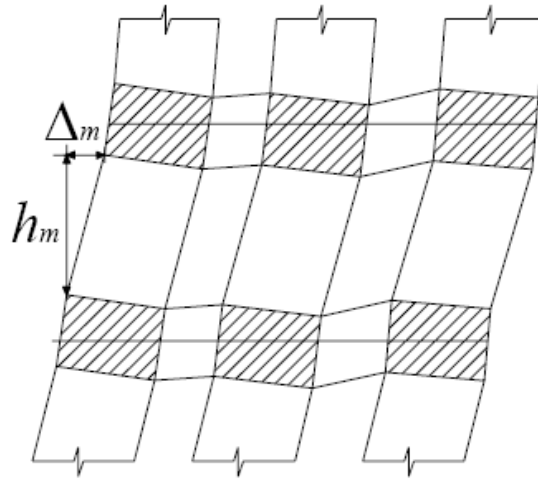


Fig. 3.33 – Calcolo del drift

Nel caso di analisi su edifici esistenti in muratura, questi parametri assumono i valori qui di seguito riportati:

$$\delta_m^{DL} = \frac{\Delta_m}{h_m} = \delta_u \begin{cases} 0.004 & \text{Taglio} \\ 0.006 & \text{Pressoflessione} \end{cases}$$

### 3.3.3.1 Elemento trave non lineare in muratura

Il codice di calcolo strutturale 3MURI consente anche di utilizzare un elemento trave non lineare a sei gradi di libertà con resistenza limitata e degrado della rigidezza in fase non lineare.

La trave è un elemento alternativo al macroelemento per simulare il comportamento dei pannelli murari (maschi e fasce) nell'ambito dell'approccio della modellazione delle pareti a telaio equivalente (Figura 3.34).

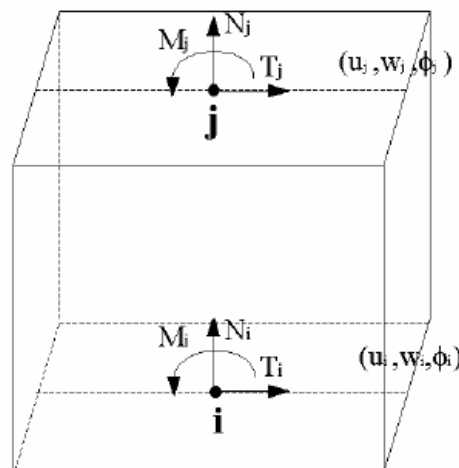


Fig. 3.34 – Variabili cinematiche e convenzione dei segni per le caratteristiche

I limiti elastici in termini di resistenza, relativi ai meccanismi di rottura considerati, coincidono con il valore ultimo, poiché vige l'ipotesi di assenza di incrudimento. I meccanismi di rottura sono quello di presso flessione, taglio con fessurazione diagonale e taglio-scorrimento e corrispondono rispettivamente a quanto previsto dall'Ordinanza 3431.

Si sottolinea che, a differenza del macroelemento descritto nei paragrafi precedenti, l'elemento trave non lineare non dispone di alcun grado di libertà interno che consenta di separare il contributo al drift associato ai meccanismi di taglio e presso flessione. Pertanto il drift è fornito da:

$$\delta = \frac{(u_i - u_j)}{h} + \frac{(\varphi_i + \varphi_j)}{2} \quad (3.34)$$

La semplicità della formulazione di tale elemento garantisce un processo di convergenza snello ed efficace in termini di oneri computazionali ai fini di analisi statiche non lineari monotone (pushover). Tuttavia l'elemento trave non consente di cogliere in dettaglio alcuni aspetti del reale comportamento dei pannelli murari.

### 3.3.3.2 Modellazione della parete

Divisa la parete in tratti verticali corrispondenti ai vari piani e nota l'ubicazione delle aperture, vengono determinate le porzioni di muratura, maschi murari e fasce di piano, in cui si concentrano deformabilità e danneggiamento (come è verificabile dalle osservazioni dei danni di sismi reali, da simulazioni sperimentali e numeriche) e che vengono modellate con i macroelementi finiti bidimensionali, rappresentativi di pannelli murari, a due nodi con tre gradi di libertà per nodo ( $u_x$ ,  $u_y$ ,  $rot_y$ ) e due gradi di libertà aggiuntivi interni.

Le restanti porzioni di parete vengono dunque considerate come nodi rigidi bidimensionali di dimensioni finite, a cui sono connessi i macroelementi; questi ultimi trasmettono, ad ognuno dei nodi incidenti, le azioni lungo i tre gradi di libertà del piano.

Nella descrizione di una singola parete i nodi sono individuati da una coppia di coordinate  $(x, z)$  nel piano della parete e dalla quota  $z$  corrispondente a quelle degli orizzontamenti; i gradi di libertà di cui disporranno saranno unicamente  $u_x, u_z, rot_y$  (nodi bidimensionali).

Grazie a questa suddivisione in nodi ed elementi, il modello della parete diviene quindi del tutto assimilabile a quello di un telaio piano (Figura 3.35).

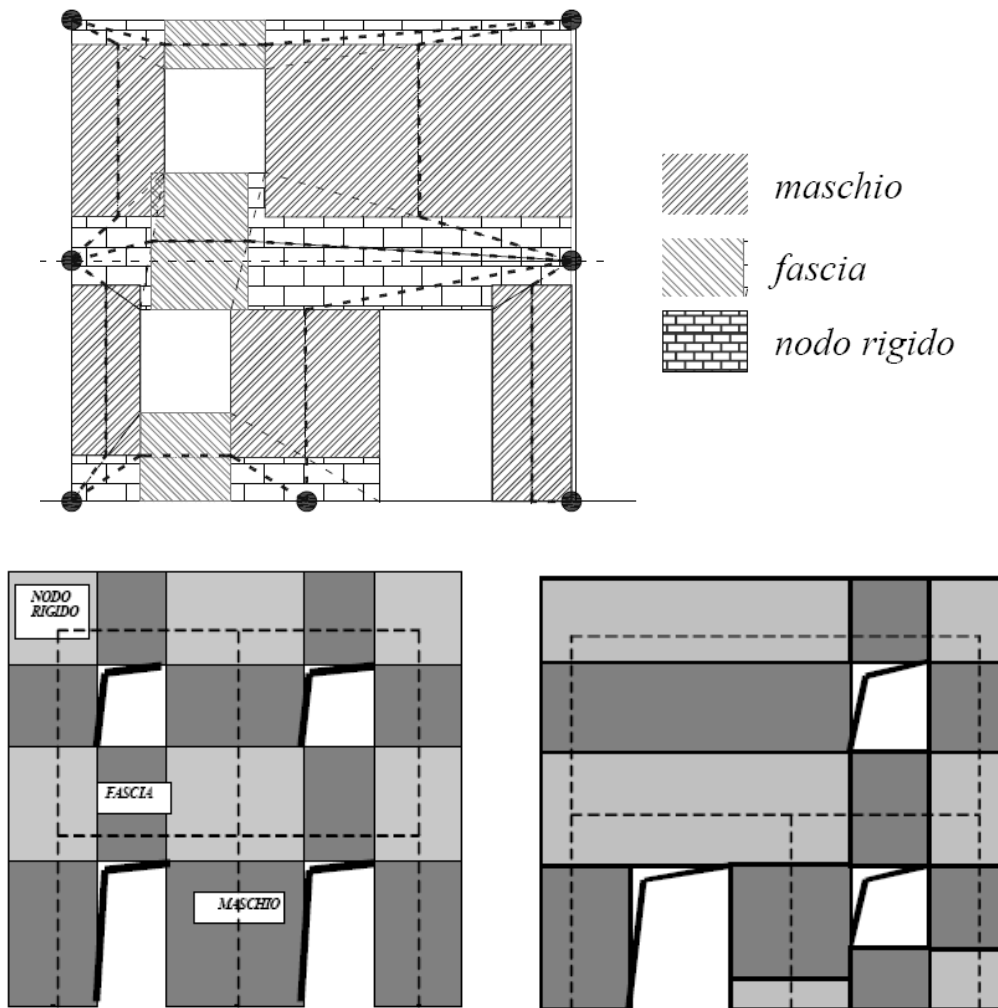


Fig. 3.35 – Schematizzazioni a telaio equivalente

Durante l'assemblaggio della parete si considereranno le eventuali eccentricità fra i nodi del modello e gli estremi dei macroelementi: considerati gli assi baricentrici degli elementi, questi potrebbero non coincidere con il nodo; nei blocchi rigidi si potrà quindi verificare un'eccentricità tra nodo del modello e quello dell'elemento deformabile.

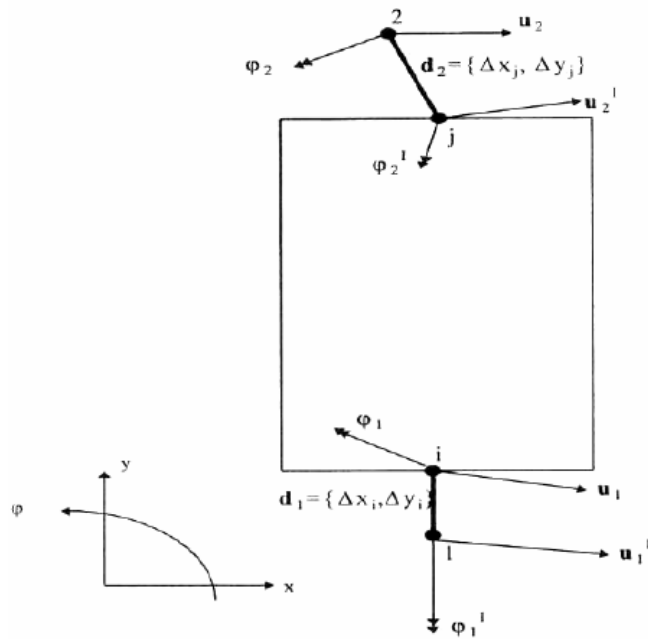


Fig. 3.36 – Estremi rigidi del macroelemento ed eventuale loro eccentricità

La modellazione strutturale richiede inoltre la possibilità di inserire travi a sezione costante, individuate nel piano dalla posizione di due nodi di estremità.

Noti la lunghezza, l'area, il momento d'inerzia e il modulo elastico è possibile ricostruire la matrice di rigidezza e si applicano le consuete formulazioni di legame elastico.

Oltre alla presenza di vere e proprie travi, il modello prevede la presenza di dispositivi a catena: queste strutture metalliche sono provviste di rigidezza flessionale e perdono ogni efficacia nel caso divengano compresse. Questa loro peculiarità comporta un ulteriore elemento di non linearità nel modello: la rigidezza complessiva del sistema deve diminuire qualora una catena divenisse compressa e deve aumentare nel caso contrario.

## Capitolo 4

# Analisi multilivello di strutture in muratura

### **4.1 Introduzione**

In questo capitolo si entrerà nel dettaglio del metodo di analisi multilivello per l'analisi delle strutture in muratura, sviluppato presso l'Università degli Studi della Calabria ([2], [3], [7]).

Si presenteranno inizialmente il modello discreto ed il modello al continuo con i quali è possibile discretizzare il pannello in muratura. Infine si presenterà la strategia multilivello nella sua completezza, descrivendo le ipotesi alla base del metodo, gli schemi di soluzione lineare e non lineare e l'algoritmo di soluzione definitivo.

### **4.2 Schema generale della strategia multilivello**

Sono disponibili in letteratura diverse implementazioni della tecnica multigrid all'interno delle analisi agli elementi finiti. L'utilizzo di tale tecnica consente una riduzione del costo computazionale in quanto si risolvono problemi differenziali sia lineari che non lineari per mezzo di processi iterativi che alternano diversi schemi di soluzione e differenti gradi di raffinamento della mesh. Ogni discretizzazione utilizza la descrizione approssimata come una pre-condizione iterativa e fornisce una soluzione approssimata che viene migliorata da quella più fine. L'approccio proposto si avvale di due livelli di descrizione, locale e globale, corrispondenti rispettivamente alla modellazione locale e alla modellazione globale.

Il modello locale descrive la parete in muratura come un aggregato di mattoni e di giunti di malta, fornendo la geometria del muro, la tessitura, i parametri elastici e la legge di evoluzione del danno per i suoi componenti. Essa rappresenta il modello di riferimento per il problema meccanico, dove sarà raggiunta la soluzione. Quindi, indicando con il vettore  $u_1$  che raccoglie i parametri di spostamento definiti a livello locale, l'obiettivo è azzerare l'errore di equilibrio:

$$r_1 [u_1] = f_1 - s_1 [u_1] \tag{4.1}$$

dove  $f_1$  è il vettore che raccoglie i carichi locali applicati e  $s_1 [u_1]$  è la risposta strutturale locale associata a  $u_1$ .

Il modello globale descrive il muro come una mesh agli elementi finiti, essendo ogni elemento un sostituto approssimato per il comportamento interno dei mattoni e del modello dei giunti. Con gli stessi simboli utilizzati per il modello locale, l'equazione di equilibrio (4.1) a livello globale è scritta come

$$r_g [u_g] = f_g - s_g [u_g] \tag{4.2}$$

I due livelli sono definiti separatamente, in termini delle due quantità  $u_1$  e  $u_g$ , e quindi collegati tra loro definendo un operatore A in grado di trasformare gli spostamenti a livello globale  $u_g$  in termini di quelli locali  $u_1$ , vale a dire

$$u_1 = Au_g \tag{4.3}$$

Abbiamo bisogno di tale trasformazione per avere l'equivalenza energetica tra le due descrizioni

$$r_1^T u_1 = r_g^T u_g \tag{4.4}$$

che afferma che le due rappresentazioni sono equivalenti in termini di lavoro.

In questo modo, l'operatore aggiunto  $A^T$  permette che l'errore locale di equilibrio  $r_1$  sia trasformato in quello globale  $r_g$ :

$$r_g = A^T r_1 \tag{4.5}$$

Da ora in poi, l'operazione (4.3) verrà chiamata trasferimento da globale a locale e l'operazione (4.5) trasferimento da locale a globale.

L'obiettivo dello schema di soluzione può essere riassunto come segue: a partire da una nota distribuzione locale dei carichi  $f_1$  e da una soluzione iniziale (anche nulla)  $u_1^{(0)}$ , si ricerca la corretta soluzione  $u_1^{(h)}$  che, dopo un congruo numero di iterazioni  $\bar{h}$ , azzeri l'errore di equilibrio  $\bar{r}_1 = r_1[u_1^{(h)}]$ , vale a dire:

$$\|\bar{r}_1\|_1^2 \leq C \|f_1\|_1^2 \tag{4.6}$$

essendo  $\|\cdot\|_1$  una norma adatta della distribuzione locale di forza e  $C \ll 1$  è una costante molto inferiore a 1.

Tale obiettivo può essere raggiunto sfruttando la presenza dei due livelli di descrizione e l'uso di diversi schemi di correzione iterativi specializzati per ciascun livello. L'algoritmo di soluzione esegue la procedura descritta di seguito, fino a quando si è raggiunta la condizione (4.6):

(1) Valutazione dell'errore locale:

$$r_1^{(h)} = f_1 - s_1 [u_1^{(h)}] \quad (4.7 \text{ a})$$

(2) Trasferimento dell' errore locale a quello globale:

$$r_g^{(h)} = A^T r_1^{(h)} \quad (4.7 \text{ b})$$

(3) Correzione globale: in questo step l'errore di equilibrio globale è stato corretto dal calcolo della correzione globale

$$d_g^{(h)} = u_g^{(h+1)} - u_g^{(h)} \quad (4.7 \text{ c})$$

che azzerava l'errore  $r_g$  a livello globale risolvendo il sistema:

$$\tilde{K}_g d_g^{(h)} = r_g^{(h)} \quad (4.7 \text{ d})$$

dove  $\tilde{K}_g$  è un adatto sostituto della matrice di rigidezza globale  $K_g^{(h)}$ , implicitamente definita dalla condizione

$$K_g^{(h)} (u_g^{(h+1)} - u_g^{(h)}) = r_g^{(h+1)} - r_g^{(h)} \approx r_g^{(h)} \quad (4.7 \text{ e})$$

(4) Trasferimento della correzione globale a quella locale:

$$u_1^{(h+1,0)} = u_1^{(h)} + A d_g \quad (4.7 \text{ f})$$

che è affetta da un errore caratterizzato solo dai componenti ad alta frequenza, non visibile a livello globale, che può poi essere ridotto dalla successiva correzione locale.



(5) Correzione locale: in questa fase si migliora la soluzione locale corrente  $u_1^{(h+1, 0)}$  utilizzando uno schema iterativo come

$$r_1^{(h+1, i)} = f_1 - s_1 [u_1^{(h+1, i)}] \quad (4.7 g)$$

$$\tilde{K}_1 d_1^{(h+1, i)} = r_1^{(h+1, i)} \quad (4.7 h)$$

$$u_1^{(h+1, i+1)} = u_1^{(h+1, i)} + d_1^{(h+1, i)} \quad (4.7 i)$$

dove  $\tilde{K}_1$  è una matrice di iterazione adatta per la riduzione degli errori ad alta frequenza nel modo più efficiente possibile: uno schema Gauss-Seidel è in genere appropriato per tale scopo. L'iterazione è effettuata fino a quando

$$\|\tilde{r}_1^{(h+1, i)}\|_1^2 < C \|\tilde{r}_g^{(h+1)}\|_g^2 \quad (4.7 j)$$

essendo  $\|\cdot\|_g$  una norma per la distribuzione di forza a livello globale. In linea di massima, possiamo dire che la soluzione locale è corretta in due modi diversi. Una correzione globale  $d_g$  è trasferita a livello locale attraverso l'equazione (4.7 f) e utilizzata per ridurre i componenti a bassa frequenza dell'errore di equilibrio (che sono visibili a livello globale), come si nota dall'equazione (4.7 d), e una correzione locale  $d_l$  è utilizzata per ridurre i componenti ad alta frequenza (che sono visibili solo a livello locale), come si nota dall'equazione (4.7 h). Il primo modo consiste nel risolvere un sistema lineare che è relativamente piccolo, quindi è conveniente fare questo direttamente attraverso una procedura di fattorizzazione di Cholesky. Il secondo modo comporta un gran numero di variabili. Comunque, a causa della distribuzione ad alta frequenza dell'errore locale, il sistema è stato risolto in modo efficiente da un veloce schema iterativo di Gauss-Seidel, che in genere ha bisogno di alcuni cicli iterativi per ottenere una riduzione soddisfacente.

L'efficienza e l'affidabilità di tutto l'algoritmo sono legate alla scelta adeguata degli operatori  $\bar{K}_g$  e  $\bar{K}_1$  che regolano le correzioni locale e globale, e alla scelta adeguata dell'operatore A che riguarda i due livelli di descrizione attraverso l'equazione (4.7 f). Il ruolo svolto dalle scelte di cui sopra e i loro dettagli computazionali saranno discussi nei capitoli seguenti.

Si noti che si può pensare che  $\bar{K}_g$  sia una matrice di rigidezza standard di una discretizzazione agli elementi finiti, con una piccola larghezza di banda. Invece,  $\bar{K}_1$  deve essere convenientemente non tutta assemblata per l'intera parete, ma deve contenere solo le informazioni a livello locale per risolvere i problemi direttamente in termini di quantità locali. Pertanto, per quanto riguarda in particolare la matrice  $\bar{K}_g$ , potrebbe essere definita come la matrice Jacobiana all'interno dello schema di Newton-Raphson

$$\bar{K}_g^{(n)} = \left[ \frac{dr_g}{du_g} \right]_{u_g^{(n)}} = A^T \left[ \frac{dr_1}{du_1} \right]_{u_1^{(n)}} A \quad (4.8)$$

Tuttavia, un continuo aggiornamento della matrice  $\bar{K}_g$ , che implica la sua costruzione e la sua fattorizzazione ad ogni iterazione, è troppo complicato e non efficiente da un punto di vista computazionale. Una scelta più conveniente potrebbe essere quella di una strategia di Newton-Raphson Modificato, dove la matrice viene valutata una sola volta e utilizzata per varie iterazioni.

La scelta più semplice di definire  $\bar{K}_g$  come la rigidezza tangente nella matrice iniziale (non danneggiata) è stata effettivamente assunta nel codice utilizzato, offrendo un comodo compromesso tra onere computazionale e velocità di convergenza per l'azzeramento dell'errore di equilibrio.

Vale la pena ricordare che, al di là di questa costruzione algebrica della matrice, possono essere effettuate altre possibili, forse più semplici, scelte, come quelle che si basano su una discretizzazione agli elementi finiti di un continuo equivalente definito da un modello in muratura attraverso procedure di identificazione.

## 4.3 Livello locale

Questo capitolo esamina il modello discreto con l'obiettivo di rilevare le principali caratteristiche algoritmiche per il trattamento del comportamento softening (instabile) di pareti in muratura sottoposte a fenomeni di danneggiamento.

Come già accennato in precedenza, con modello discreto si intende la discretizzazione delle pareti in muratura di mattoni in termini di corpi rigidi (mattoni) ed elementi di interfaccia (giunti di malta), che collegano due mattoni. Il comportamento softening può svilupparsi solo nei giunti di malta, che poi determinano l'effettivo comportamento non lineare di tutta la parete in muratura. La loro relazione costitutiva descrive elasticità, danneggiamento e attrito.

Il comportamento instabile deriva dall'apertura istantanea di fessure in corrispondenza dei giunti: piccole modifiche nella deformazione possono causare forti cambiamenti nella risposta alla tensione e lo schema iterativo potrebbe rientrare in convergenza. L'analisi può quindi essere convenientemente guidata da un approccio path-following riscritto in forma mista. È possibile mostrare come, in questo modo, può essere ottenuta una descrizione relativamente buona e scelte adatte sulla sequenza iterativa delle varie equazioni possono migliorare la convergenza. In particolare, tutte le variabili rilevanti (spostamenti, sollecitazioni, deformazioni, carico e parametri di danneggiamento) sono state trattate come “variabili principali di descrizione”, così tutta la non linearità del problema si riduce solo a quella nelle equazioni costitutive.

Si mostra quindi come la strategia proposta consente le rotture in convergenza che sono tipiche di formulazioni standard compatibili basate solo su variabili di spostamento. Vale la pena ricordare che il codice implementato è solo per scopi investigativi e sarà utile per la creazione della strategia multilivello.

### 4.3.1 Comportamento non lineare dei giunti di malta

#### 4.3.1.1 Ipotesi meccaniche iniziali

Consideriamo un pannello piano di muratura in mattoni, la cui geometria è definita dalla profondità del pannello  $s$ , dall'altezza  $h$  e dalla lunghezza  $b$  dei mattoni, e da uno spessore  $a$  e da una lunghezza  $l$  dei giunti di malta.

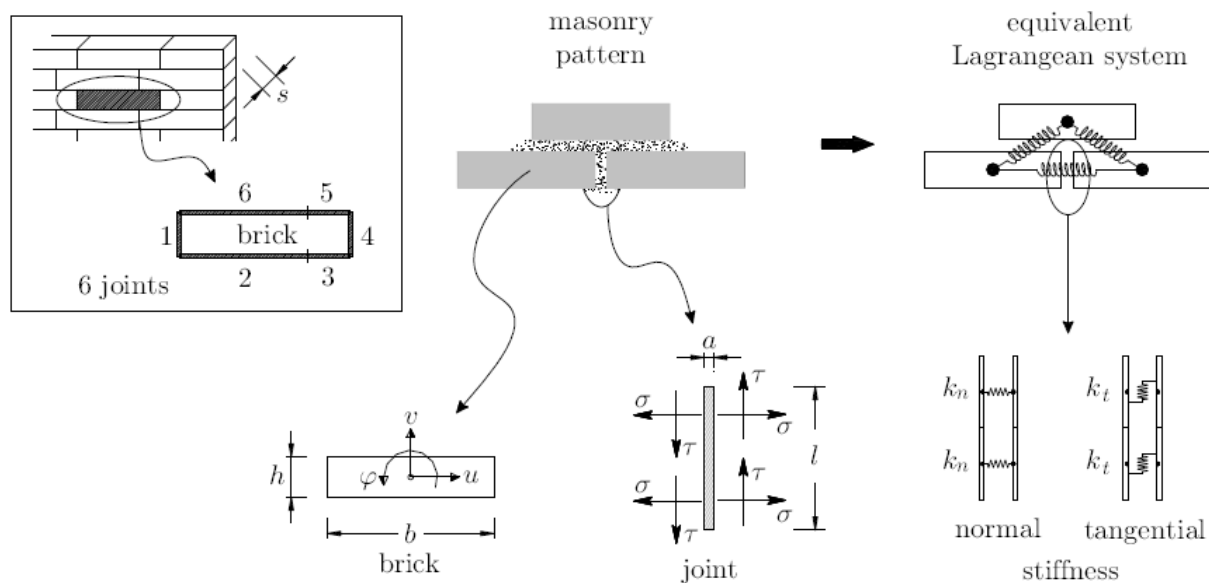


Figura 4.1 - Ipotesi meccaniche iniziali

La parete in muratura è raffigurata come un assemblaggio di blocchi rigidi (mattoni) legati l'uno con l'altro da sei elementi di interfaccia (giunti di malta). In questo modo, si rappresenta la parete come un sistema discreto Lagrangiano in cui le fratture e tutti gli aspetti costitutivi si localizzano solo nelle interfacce. Il blocco degli elementi prende in considerazione tre parametri di spostamento nel piano (due traslazioni,  $u$  e  $v$ , e una rotazione,  $\varphi$  nel piano della parete) e tre parametri di forze

duali (due forze,  $f_x$  e  $f_y$ , e una coppia  $m$ ). I giunti sono caratterizzati da quattro parametri di stress e tensione corrispondenti alla tensione normale e tangenziale ( $\sigma, \tau$ ) e le relative tensioni normali e tangenziali ( $\varepsilon, \gamma$ ) in due punti di Gauss, che si trovano su l'interfaccia a una distanza pari a  $\pm\sqrt{3}/6$  della lunghezza  $l$  del giunto a partire dal punto centrale.

Tensioni e deformazioni nei giunti di malta sono connessi alle forze e agli spostamenti dei mattoni mediante rispettivamente la compatibilità e le equazioni di equilibrio.

Quindi, se

$$u^m = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix}_i \quad \text{e} \quad f^m = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ m \end{Bmatrix}_i \quad (4.9)$$

sono i vettori locali associati al b-esimo mattone, raccolti nel vettore globale  $u$  e  $f$ , l'equazione di compatibilità per il g-esimo punto di Gauss può essere scritta come

$$\varepsilon_g - D_g u + e_g = 0 \quad (4.10)$$

dove il vettore  $e_g$  è la distorsione assegnata al punto di Gauss e  $D_g$  è l'operatore discreto di compatibilità. L'equazione di equilibrio è invece espressa da

$$\sum_g Q_g \sigma_g - f = 0 \quad (4.11)$$

dove  $Q_g$  è l'operatore discreto di equilibrio associato al g-esimo punto di Gauss. Ovviamente, a causa della condizione duale scritta per tutti i possibili spostamenti compatibili  $\delta u$  e deformazione

$$\delta \varepsilon_g = D_g \delta u$$

$$f^T \delta u = \sum_g \sigma_g^T \delta \varepsilon_g$$

(4.12)

Abbiamo

$$Q_g = D_g^T$$

(4.13)

Si noti che, in questa formulazione, si possono anche avere condizioni di vincolo, vale a dire che le componenti di spostamento o di tensione possono essere assegnate. In questo caso le equazioni (4.10) e (4.11) definiscono le reazioni duali vincolate (distorsione o componente di forza).

### 4.3.1.2 Relazioni costitutive

Le relazioni costitutive utilizzate presentano danni e meccanismi di rottura al continuo, applicate al caso di meccanismi in muratura come fatto, in particolare, da Gambarotta e Lagomarsino.

I meccanismi di rottura di pareti in muratura sono caratterizzati da decoesione e da scorrimento per attrito, principalmente localizzate sulla superficie di contatto tra malta e mattoni. Siccome i giunti di malta sono descritti qui come interfaccia, si può rappresentare la fessura per mezzo di un parametro scalare di danno che fornisce la risposta del giunto parziale. Pertanto, siamo in grado di descrivere la risposta alla tensione di ogni punto di Gauss del giunto attraverso l'espressione

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \tau \end{Bmatrix} = (1 - \beta)\sigma_u + \beta\sigma_d$$

(4.14)

dove  $\beta$  è il livello di danno (percentuale di area danneggiata,  $0 \leq \beta \leq 1$ ), associato al punto di Gauss. L'equazione (5.6) definisce una combinazione lineare di due materiali virtuali, la prima non danneggiata (" $u$ ") e la seconda danneggiata (" $d$ "). La parte non danneggiata si comporta come un materiale elastico lineare. La parte danneggiata è descritta come un materiale non in tensione per attrito, cioè un materiale che presenta solo una risposta al taglio di attrito in compressione.

Il segno positivo della sollecitazione identifica il caso di giunto in tensione ("giunto aperto"); altrimenti, abbiamo il caso di "giunto chiuso".

L'equazione (5.6) è in accordo con il principio di Lemaitre dell'equivalenza delle tensioni, per cui l'effettivo stress del giunto è calcolato per un danno e un livello di tensione assegnati.

La risposta allo stress può essere espressa come:

$$\sigma = \begin{cases} (1 - \beta) \begin{Bmatrix} k_n \varepsilon \\ k_t \gamma \end{Bmatrix} & (\text{if } \varepsilon > 0) \\ \begin{Bmatrix} k_n \varepsilon \\ k_t \gamma - \beta \gamma_f \end{Bmatrix} & (\text{if } \varepsilon \leq 0) \end{cases} \quad (4.15)$$

dove  $k_n$  e  $k_t$  sono i fattori elastici normali e tangenziali (si veda la figura 4.1) e  $\gamma_f$  è lo scorrimento per attrito. In altri termini, se introduciamo la forza specifica di frizione

$$t_\beta = \beta k_t \gamma_f \quad (4.16 a)$$

l'effettiva risposta al taglio in compressione è

$$\tau - t_\beta = k_t \gamma \quad (4.16 b)$$

In forma più compatta, l'espressione (4.15) può essere scritta come

$$\sigma_s[\varepsilon, \alpha] = E \left\{ \varepsilon - \frac{\alpha}{1 - \alpha} \varepsilon_r[\varepsilon] \right\} \quad (4.17)$$

Vale la pena ricordare che i fattori elastici possono essere espresso in termini di coefficienti elastici normale  $E$  e tangenziale  $G$  equivalenti dei giunti di malta

$$k_n = E \frac{ls}{2a} \quad , \quad k_t = G \frac{ls}{2a} \quad (4.18)$$

Dato che lo spessore è di solito piccolo in confronto alle dimensioni della superficie del giunto, la deformazione laterale sono impedita e quindi si ha generalmente  $E \gg G$ .

Una formula esplicita per lo scorrimento per attrito  $\dot{\gamma}_f$ , adatto per fini computazionali, può essere ottenuta attraverso il criterio di Coulomb. Scrivendo

$$\tau_d = k_t(\gamma - \gamma_f) \quad , \quad f[\sigma_d] = |\tau_d| + c\sigma_d \leq 0 \quad (4.19)$$

dove  $c := \tan(\varphi)$ ,  $\varphi$  è l'angolo di attrito, si ottiene l'incremento  $\dot{\gamma}_f$  da:

$$\dot{\gamma}_f = \begin{cases} 0 & (\text{if } \tilde{f} \leq 0) \\ \text{sign}(\tau_d) \frac{\tilde{f}}{k_t} & (\text{if } \tilde{f} > 0) \end{cases} \quad , \quad \tilde{f} = f[\sigma_d + E\dot{\varepsilon}] \quad (4.20)$$

Si noti che la relazione costitutiva inversa può essere espressa come

$$\varepsilon = \begin{cases} (1 + \alpha) \left\{ \begin{array}{l} \sigma/k_n \\ \tau/k_t \end{array} \right\} & (\text{if } \sigma > 0) \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma/k_n \\ (1 + \alpha)(\tau - t_\alpha)/k_t \end{array} \right\} & (\text{if } \sigma \leq 0) \end{cases} \quad (4.21)$$

dove è stato introdotto il parametro di danno alternativo

$$\alpha = \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (4.22)$$

e quindi la definizione (4.16 a) di  $t_\beta$  si modifica in  $t_\alpha := \frac{\alpha}{1 - \alpha} k_t \gamma_f$ .

### 4.3.1.3 Leggi di evoluzione del danno

La modellazione dell'evoluzione del danno è fornita dall'approccio di Griffith che deriva l'incremento monotono dei danni mediante la condizione energetica

$$\mathcal{G} - \mathcal{R} \leq 0 \quad (4.23)$$



$\mathcal{G}$  è la percentuale di energia rilasciata e rappresenta la percentuale di energia disponibile per aumentare l'apertura della fessura, vale a dire

$$\mathcal{G} = \frac{\partial \Phi_c[\sigma, \alpha]}{\partial \alpha} \equiv - \frac{\partial \Phi_c[\varepsilon, \alpha]}{\partial \alpha} \quad (4.24)$$

$\Phi_c[\sigma, \alpha]$  e  $\Phi[\varepsilon, \alpha]$  sono, rispettivamente, l'energia complementare e l'energia elastica di tensione per un dato  $\alpha$ .  $\mathcal{R}$  è la funzione di tenacità e rappresenta la resistenza opposta dal materiale allo sviluppo delle fessure. Secondo Gambarotta e Lagomarsino e le formule (4.15), (4.16) e (4.22), si considera

$$\Phi_c[\sigma, \alpha] = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + \alpha) \left( \frac{\sigma^2}{k_n} + \frac{\tau^2}{k_t} \right) & (\text{if } \sigma > 0) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2}{k_n} + \frac{(1 + \alpha)(\tau - t_\alpha)^2}{k_t} \right) & (\text{if } \sigma \leq 0) \end{cases} \quad (4.25)$$

che, utilizzando l'equazione (4.21), corrisponde a

$$\Phi[\varepsilon, \alpha] = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{k_n \varepsilon^2 + k_t \gamma^2}{(1 + \alpha)} & (\text{if } \varepsilon > 0) \\ \frac{1}{2} \frac{k_t \gamma^2}{(1 + \alpha)} & (\text{if } \varepsilon \leq 0) \end{cases} \quad (4.26)$$

così si ottiene

$$\mathcal{G} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{k_n \varepsilon^2 + k_t \gamma^2}{(1 + \alpha)^2} & (\text{if } \varepsilon > 0) \\ \frac{1}{2} \frac{k_t \gamma^2}{(1 + \alpha)^2} & (\text{if } \varepsilon \leq 0) \end{cases} \quad (4.27)$$

Si considera

$$\mathcal{R}[\alpha] = \mathcal{R}_{cr} \alpha^\rho \quad \text{con} \quad \rho = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha \leq 1 \\ -\rho_m & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \quad (4.28)$$

dove  $\rho_m$  è un esponente adatto ( $\rho_m = 0,8 - 0,9$  che può essere adottato per i giunti in malta) e  $\mathcal{R}_{cr}$  rappresenta un parametro di resistenza critica, che può essere espresso nella forma

$$\mathcal{R}_{cr} = \frac{\sigma_t^2}{2k_n} \quad (4.29)$$

$\sigma_t^2$  è la resistenza alla trazione dei giunti di malta, vale a dire il limite di resistenza al quale la risposta del materiale diventa softening.

Utilizzando le precedenti espressioni, la condizione di apertura della fessura (4.23) può essere riscritta come

$$\Psi[\varepsilon] - \mathcal{C}[\alpha] \leq 0, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Psi[\varepsilon] = \frac{1}{2} \varepsilon^T \bar{E} \varepsilon, \quad \bar{E} = P[\varepsilon]^T E P[\varepsilon] \\ \mathcal{C}[\alpha] = (1 + \alpha)^2 \mathcal{R}[\alpha] \end{cases} \quad (4.30)$$

dove  $P[\varepsilon]$  è la matrice di proiezione selezionando le componenti di tensione/stress responsabili dello sviluppo del danno:

$$P[\varepsilon] = \begin{bmatrix} h[\varepsilon] & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad h[\varepsilon] = \begin{cases} 1 & (\text{if } \varepsilon > 0) \\ 0 & (\text{if } \varepsilon \leq 0) \end{cases} \quad (4.31)$$

La figura 4.2 mostra sia le funzioni  $\mathcal{R}[\alpha]$  e  $\mathcal{C}[\alpha]$ , quest'ultima espressa da

$$\mathcal{C}[\alpha] = \begin{cases} C_1[\alpha] = (1 + \alpha)^2 \mathcal{R}_{cr} \alpha & \text{se } \alpha \leq 1 \\ C_2[\alpha] = (1 + \alpha)^2 \mathcal{R}_{cr} \alpha^{-\rho_m} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases} \quad (4.32)$$

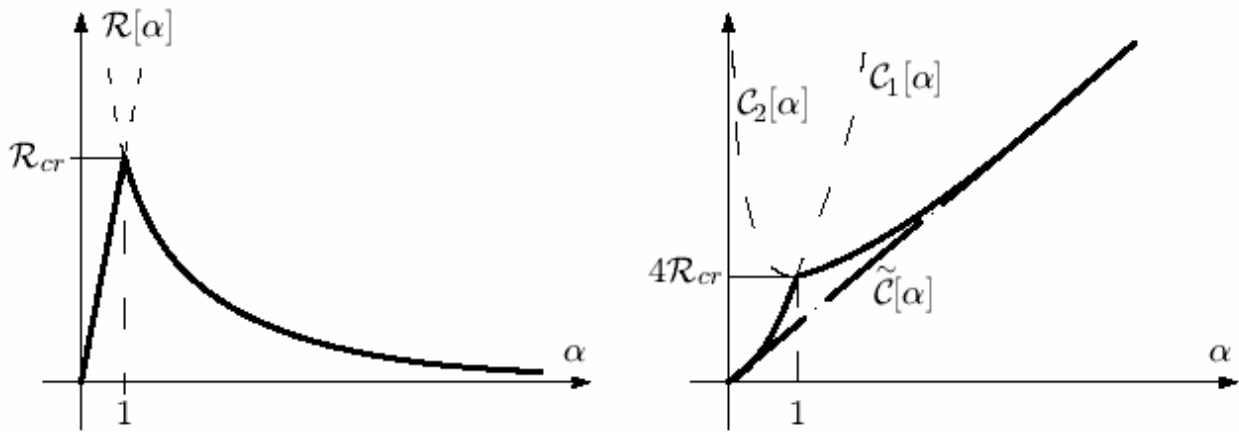


Figura 4.2 - Funzioni  $\mathcal{R}[\alpha]$  e  $\mathcal{C}[\alpha]$

Si noti che la linea retta

$$\tilde{\mathcal{C}}[\alpha] = 2\mathcal{R}_{cr}\alpha \tag{4.33}$$

è indicata anche in figura. Quando è necessaria una stima approssimativa di  $\frac{d\mathcal{C}[\alpha]}{d\alpha}$ , si può fare riferimento alla derivata di  $\tilde{\mathcal{C}}[\alpha]$ :

$$\frac{d\mathcal{C}[\alpha]}{d\alpha} \approx \frac{d\tilde{\mathcal{C}}[\alpha]}{d\alpha} = 2\mathcal{R}_{cr} \tag{4.34}$$

## 4.3.2 Strategia numerica

### 4.3.2.1 Approccio path-following

L'analisi è effettuata per mezzo di diverse fasi successive di carico. Ogni fase è controllata da un fattore di carico  $\lambda$ , amplificando un'ulteriore azione esterna (forze o spostamenti assegnati ai mattoni, tensioni o distorsioni assegnate ai giunti).

Riportando le equazioni (4.10), (4.11), (4.15) e (4.30) in un unico sistema, le equazioni non lineari comandanti il problema meccanico generico possono essere scritte come

$$r[x, \lambda] = -s[x] + \lambda\hat{p} = 0$$

(4.35 a)

Il vettore  $\mathbf{x}$  raccoglie tutte le variabili del problema (spostamenti, sollecitazioni, tensioni e parametri di danno) e  $\mathbf{s}[\mathbf{x}]$  e  $\mathbf{p}$  corrispondono rispettivamente alla risposta strutturale e all'azione nominale esterna. L'equazione (4.35 a) implicitamente descrive una curva in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , che è chiamata percorso di equilibrio, con  $n$  dimensione dei vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{r}$ .

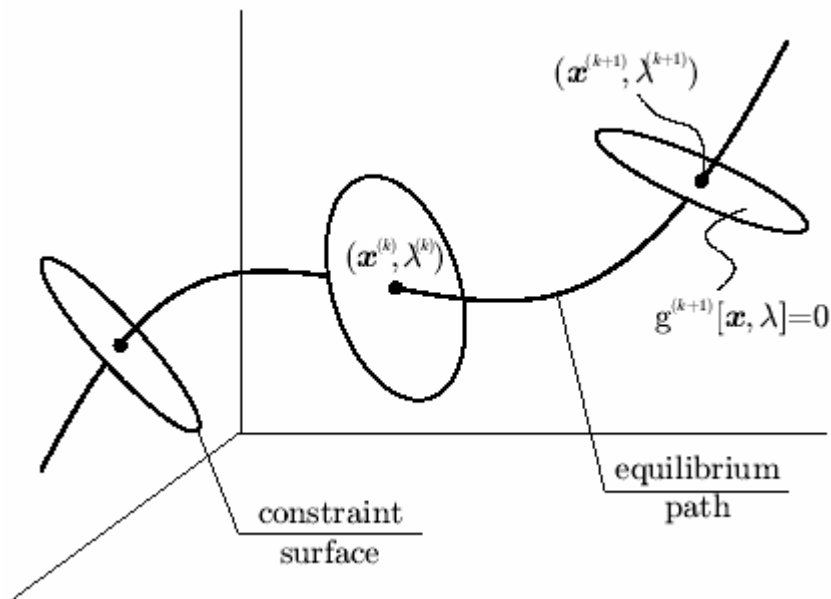


Figura 4.3 – Approccio path - following

L'obiettivo è quello di descrivere questa curva determinando una sequenza di punti chiusi sufficienti  $\{\mathbf{x}^k, \lambda^k\}$  attraverso un approccio path-following alla Riks: gli incrementi del parametro di carico  $\lambda$  non sono indipendenti dagli incrementi delle variabili  $\mathbf{x}$ , ma sono costretti dal controllo della dimensione del passo di analisi. In altri termini, se le prime  $k$  soluzioni sono già state ottenute, la nuova  $(k + 1)$ -esima soluzione è ottenuta utilizzando le equazioni di equilibrio (4.35 a) e un'ulteriore condizione di vincolo fissando l'ampiezza del passo nello spazio  $\{\mathbf{x}, \lambda\}$  (vedi figura 4.3):

$$g^{k+1}[\mathbf{x}, \lambda] = 0$$

(4.35 b)

Il sistema non lineare (4.35) può essere risolto iterativamente utilizzando uno schema alla Newton – Raphson, composto da due procedure di base, predittore e correttore, come illustrato nella figura 4.4.

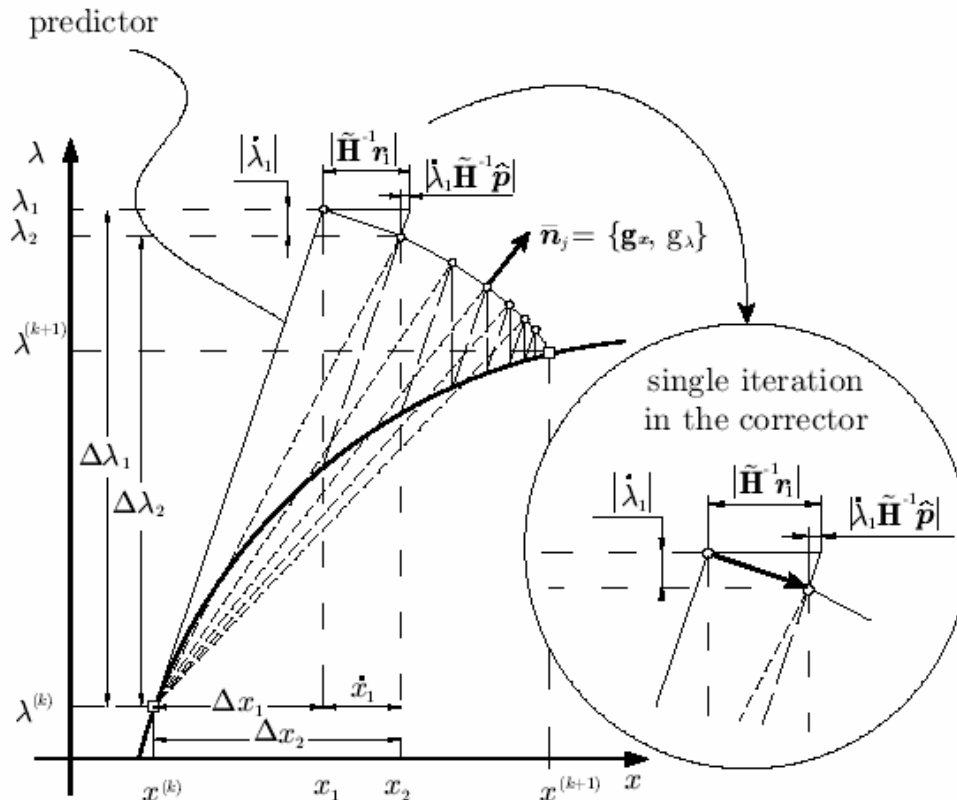


Figura 4.4 – Schema alla Newton – Raphson: predittore e correttore

Nel primo, una prima stima  $\{x_1, \lambda_1\}$  si ottiene estrapolando il precedente punto k-esimo di soluzione dell'analisi

$$\begin{aligned} x_1 &= x^{(k)} + \omega^{(k+1)}(x^{(k)} - x^{(k-1)}) \\ \lambda_1 &= \lambda^{(k)} + \omega^{(k+1)}(\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}) \end{aligned}$$

(4.36)

$\omega^{(k+1)}$  è un fattore di amplificazione delle dimensioni del passo che può essere utilizzato per la riduzione o l'estensione della dimensione del passo durante l'analisi. Questo stima predittiva è iterativamente aggiornata in quest'ultimo procedimento, vale a dire

$$\begin{aligned}
x_{j+1} &= x_j + \dot{x}_j \\
\lambda_{j+1} &= \lambda_j + \dot{\lambda}_j
\end{aligned}
\tag{4.37}$$

sulla base della correzione  $\{\dot{x}_j, \dot{\lambda}_j\}$  ottenuta risolvendo il sistema lineare

$$\begin{aligned}
J_j \dot{x}_j - \hat{p} \dot{\lambda}_j &= r_j \\
g_x^T \dot{x}_j - g_\lambda \dot{\lambda}_j &= 0
\end{aligned}
\tag{4.38}$$

dove

$$J_j = \left. \frac{ds[x]}{dx} \right|_{x=x_j}
\tag{4.39}$$

e, in accordo con Riks, per  $g^{(k+1)}\{x, \lambda\}$  è stata utilizzata la forma semplice

$$g^{(k+1)}[x, \lambda] = g_x^T(x - x_j) + g_\lambda(\lambda - \lambda_j) = 0
\tag{4.40}$$

Noto questo,  $J_j$  rappresenta la matrice Jacobiana associata all'equazione (4.35 a), valutato in  $x = x_j$ . L'espressione (4.40) definisce un iperpiano che passa per una stima corrente  $\{x_j, \lambda_j\}$  della soluzione  $\{x^{(k+1)}, \lambda^{(k+1)}\}$  e normale alla tangente locale del percorso di equilibrio, sulla base di un metro di riferimento adeguato. Infine, il sistema lineare (4.38) può essere risolto mediante la separazione

$$\begin{aligned}
\dot{x}_j &= J_j^{-1}(r_j + \dot{\lambda}_j \hat{p}) \\
\dot{\lambda}_j &= -\frac{g_x^T J_j^{-1} r_j}{g_x^T J_j^{-1} \hat{p} + g_\lambda}
\end{aligned}$$

(4.41)

la cui esecuzione richiede la decomposizione triangolare della matrice  $I_j$ , che è la più costosa operazione da un punto di vista numerico.

#### 4.3.2.2 Aspetti generali della formulazione

Il sistema non lineare (4.35 a) raccoglie tutte le equazioni e le variabili del problema, così ha dimensioni relativamente grandi. Pertanto, la decomposizione di  $I_j$  implica costi computazionali relativamente elevati. Tuttavia, molte delle sue equazioni, vale a dire l'evoluzione del danno, le equazioni di compatibilità e le equazioni costitutive, hanno un carattere locale essendo legate ad un unico punto di Gauss. Questo fatto può essere sfruttato assumendo queste equazioni come soddisfatte a priori ed usando esse per eliminare, attraverso la sostituzione, le variabili associate. Ad esempio, l'evoluzione del danno può essere sostituita nelle equazioni costitutive, eliminando il riferimento esplicito ai parametri  $\alpha$ ; le equazioni costitutive possono essere sostituite nelle equazioni di compatibilità, eliminando le variabili  $\epsilon$ ; infine, le equazioni di compatibilità possono essere sostituite nelle equazioni di equilibrio, eliminando le variabili  $\sigma$ . In questo modo, si ottiene una più compatta formulazione del problema, di solito chiamata formulazione compatibile, in cui solo le equazioni di equilibrio e le variabili di spostamento sono mantenute:

$$s_c[u] - \lambda \hat{p}_c = 0 \quad (4.42)$$

$s_c$  e  $\hat{p}_c$  sono la risposta strutturale e il carico nominale esterno in una formulazione compatibile.

Ora, la matrice Jacobiana

$$K_j = \left. \frac{ds_c[u]}{du} \right|_{u=u_j} \quad (4.43)$$

dimostra di avere dimensioni molto più piccole rispetto a  $\frac{1}{j}$  ed è quindi più adatta ad una soluzione numerica del sistema. Per questo motivo, la formulazione compatibile è ampiamente utilizzata e può essere considerata come standard.

L'uso della formulazione (4.42), piuttosto che quella estesa (4.35 a) è completamente equivalente per quanto riguarda la definizione della soluzione. Tuttavia, le due formulazioni possono comportarsi in modo molto differente quando sono utilizzate in un schema di iterazione Newton - Raphson.

Infatti, il comportamento convergente del processo iterativo è molto sensibile alla formulazione del problema e dipende principalmente dalle variabili utilizzate per la sua descrizione. Questa è una considerazione importante nel presente contesto, perché lo sviluppo del danno introduce un comportamento instabile che tende a rallentare il processo iterativo e, utilizzando scelte inadeguate, può provocare un problema in termini di convergenza.

Vale la pena ricordare che può essere molto difficile superare le difficoltà di convergenza quando si utilizzano formulazioni compatibili. In questo caso, a causa della perdita di convergenza, è in genere suggerito una sorta di congelamento dell'apertura della fessura durante l'iterazione. Questo semplice trucco corrisponde all'uso di un'extrapolazione di Eulero della legge del danno e potrebbe essere giustificato dalle piccole dimensioni del passo. Infatti, l'errore di extrapolazione può essere ridotto accorciando la lunghezza del passo ed essa è parzialmente recuperata nei passi successivi.

Tuttavia, questa approssimazione implica fenomeni di scorrimento nel recupero del percorso di equilibrio e, in presenza di rami instabili, può produrre risultati imprevedibili. Pertanto, non può essere utilizzata se l'obiettivo è quello di implementare procedure di soluzione robuste in grado di fornire risultati attendibili.

Un semplice ed effettivo modo per migliorare la convergenza del processo iterativo è l'uso di formulazioni alternative in grado di ridurre la non linearità del problema, attraverso una scelta appropriata delle variabili di descrizione. Si vedrà nelle seguenti sezioni come questo non introduce,



nel processo di soluzione, significativi costi computazionali aggiuntivi rispetto a una formulazione standard compatibile.

#### 4.3.2.3 Scelte di formulazione

Per evitare difficoltà di convergenza, è opportuno adottare una formulazione basata su tre gruppi di variabili  $\{\varepsilon, \sigma, u\}$  tutte considerate e trattate come variabili principali.

Di conseguenza, il sistema (4.35 a) è composto da tre gruppi di equazioni:

$$\begin{cases} r_\sigma = -\sigma_\varepsilon[\varepsilon, \alpha] + \sigma = 0 & \text{equazioni costitutive} \\ r_\varepsilon = \varepsilon - Du + \lambda \hat{e} = 0 & \text{equazioni di compatibilità} \\ r_f = -D^T \sigma + \lambda \hat{f} = 0 & \text{equazioni di equilibrio} \end{cases} \quad (4.44)$$

dove:

$$\sigma_\varepsilon[\varepsilon, \alpha] = E \left\{ \varepsilon - \frac{\alpha}{1 + \alpha} \varepsilon_r[\varepsilon] \right\} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \Psi[\varepsilon] - C[\alpha] \leq 0 \\ \dot{\alpha} \geq 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

esprime le leggi costitutive e leggi di evoluzione del danno (4.17), (4.30) per ogni punto di Gauss.

$D$  è l'operatore discreto di compatibilità raccolto negli operatori locali  $D_\alpha$ , il suo trasposto  $D^T$  è l'operatore discreto di equilibrio,  $E$  è la matrice di rigidità raccolta nelle matrici locali  $E_\alpha$ , e  $\hat{f}$  ed  $\hat{e}$  sono rispettivamente i carichi nominali esterni, corrispondenti alle forze dei blocchi e alle distorsioni dei giunti. Gli spostamenti  $\lambda \hat{u}$  e le tensioni  $\lambda \hat{\sigma}$  assegnati sono contenuti in  $u$  e  $\sigma$ , in modo che forniscano contributi,  $\lambda D \hat{u}$  e  $\lambda D^T \hat{\sigma}$ , i quali sono trattati come carichi esterni nelle equazioni di compatibilità e di equilibrio associate.

Vale la pena di notare che tutte le non linearità del problema risiedono nelle equazioni costitutive.

Le equazioni di equilibrio e di compatibilità sono lineari, così nello schema iterativo (4.37, 4.38) sono sempre identicamente soddisfatte.

Considerando:

$$x = \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \sigma \\ u \end{Bmatrix}, \quad \hat{p} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \hat{\varepsilon} - D\hat{u} \\ \hat{f} - D^T\hat{\sigma} \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

i vettori che raccolgono rispettivamente i tre gruppi di variabili e i vettori duali delle azioni esterne, la matrice Jacobiana (4.39) utilizzata nello schema iterativo (4.37, 4.38) è

$$J_j = \begin{bmatrix} E_j & -I & \cdot \\ -I & \cdot & D \\ \cdot & D^T & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

dove I è la matrice identità e

$$E_j = \left[ \frac{\partial \sigma_s[\varepsilon, \alpha]}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \sigma_s[\varepsilon, \alpha]}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha[\varepsilon]}{\partial \varepsilon} \right]_{\alpha=\alpha_j, s=s_j} \quad (4.48)$$

è l'unico minore di  $J_j$  variabile durante l'analisi e la cui valutazione potrebbe essere non banale. Questa procedura di soluzione è in realtà molto più semplice di quello che appare. Prima di tutto, lo schema iterativo è sufficientemente robusto per accettare una stima approssimativa  $\tilde{E}$  della sottomatrice  $E_j$ . In particolare, la scelta

$$\tilde{E} = E \quad (4.49)$$

essendo  $E$  la matrice elastica per la struttura non danneggiata, assicura la convergenza dello schema in ogni caso. Inoltre, siamo in grado di risparmiare notevolmente nel costo computazionale e ottenere una semplificazione formale attraverso lo sfruttamento che l'uso di  $\tilde{E}$  fa della matrice  $J_j$  costante durante l'intera analisi. Quindi la soluzione del sistema (4.38) richiede solo l'assemblaggio e la fattorizzazione della matrice elastica iniziale  $E$  e queste operazioni relativamente costose non devono essere ripetute durante l'analisi.

Inoltre, a causa del carattere locale delle equazioni costitutive, le variabili  $\varepsilon$  e  $\sigma$  possono essere convenientemente risolte a livello di punto di Gauss, per mezzo di una condensazione statica.

In questo modo, la dimensione effettiva del problema si riduce a quella delle sole variabili di spostamento e la soluzione del sistema (4.38) richiede solo l'assemblaggio e la decomposizione della matrice elastica di rigidità:

$$K = D^T E D \quad (4.50)$$

senza costi computazionali aggiuntivi rispetto ad una formulazione standard compatibile, che utilizza la stessa matrice come approssimazione della matrice Jacobiana (4.43). La distinzione tra le due formulazioni si trova solo nella sequenza computazionale per la valutazione del vettore residuo  $r_j$ . Infatti, al fine di risolvere il sistema lineare (4.38), l'operazione  $I^{-1}r_j$  nella (4.41) può essere effettuata attraverso la seguente sequenza

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= K^{-1} \{ r_{fj} + D^T (E r_{\sigma j} + r_{\sigma j}) \} \\ \dot{\varepsilon}_j &= D \dot{u}_j - r_{\varepsilon j} \\ \dot{\sigma}_j &= E \dot{\varepsilon}_j - r_{\sigma j} \end{aligned} \quad (4.51)$$

il che dimostra come l'effettivo equilibrio residuo  $r_{fj} + D^T (E r_{\sigma j} + r_{\sigma j})$  si ottiene dalla condensazione statica di tutti i residui. Si noti che, pur utilizzando la stessa matrice  $K$  dello schema compatibile, lo schema proposto produce una correzione differente che soddisfa sempre l'equilibrio e la compatibilità ed è così caratterizzato da un comportamento a convergenza migliore.

#### 4.3.2.4 Aggiornamento iterativo delle variabili di danno

Le equazioni che definiscono il processo di evoluzione del danno sono altamente non lineari. Le valutazioni di  $\alpha_j$  per un dato  $\varepsilon_j$ , necessaria per il calcolo, per ogni punto di Gauss, di  $\sigma_\varepsilon[\varepsilon_j, \alpha_j]$  e del

vettore residuo  $r_{\sigma_j}$ , non possono essere ottenute in forma chiusa, ma devono essere determinate iterativamente. Si potrebbe usare, per esempio, un'iterazione Newton-Raphson

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{,\alpha^i} \dot{\alpha}^i &= \Psi[\varepsilon_j] - \mathcal{C}[\alpha^i] \\ &\text{con } \mathcal{C}_{,\alpha^i} = \mathcal{C}_{,\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha^i} \\ \alpha^{i+1} &= \max\{\alpha^i + \dot{\alpha}^i, \alpha^{(k)}\} \end{aligned} \tag{4.52}$$

dove  $\alpha^{(k)}$  è il livello di danno del punto di Gauss raggiunto nel precedente k-esimo passo. Lo schema è inizializzato assumendo  $\alpha^0 := \alpha_{j-1}$ .

Si noti che, si può utilizzare al posto di  $\mathcal{C}_{,\alpha_j}$  la sua approssimazione  $\tilde{\mathcal{C}}_{,\alpha_j} = 2\mathcal{R}_{cr}$ , costante durante tutta l'analisi. Inoltre, a causa del fatto che  $\alpha_j$  viene utilizzato durante il ciclo iterativo esterno (4.37, 4.38), dove è disponibile una valutazione approssimata  $\tilde{\alpha}_j \approx \alpha_j$  dal passo  $(j-1)$ , è possibile interrompere il processo alla prima iterazione, ottenendo così la semplice espressione

$$\alpha_j = \max\left\{\tilde{\alpha}_j + \frac{1}{2\mathcal{R}_{cr}}(\Psi[\varepsilon_j] - \mathcal{C}[\tilde{\alpha}_j]), \alpha^{(k)}\right\} \tag{4.53}$$

#### 4.3.2.5 Sommario dell'algoritmo di soluzione

Il sistema (4.38) produce la soluzione (4.41):

$$\begin{cases} \dot{x}_j = \hat{x}_j + \lambda_j \hat{r}_j \\ \lambda_j = -\frac{g_x^T \hat{x}_j}{g_x^T \hat{r}_j + g_\lambda} \end{cases} \tag{4.54 a}$$

con

$$\hat{x}_j = J_j^{-1} r_j, \quad \hat{r}_j = J_j^{-1} \hat{p}$$

così l'implementazione di una procedura path - following, dove per la realizzazione delle  $(k+1)$ -esime soluzioni incrementali adottiamo lo schema, inizializzato dall'equazione (4.36):

$$\begin{aligned}
r_j &= r[x_j, \lambda_j] \\
\dot{\hat{x}}_j &= J_j^{-1} r_j \\
\hat{x}_j &= J_j^{-1} \hat{p} \\
\dot{\lambda}_j &= -\frac{g_x^T \dot{\hat{x}}_j}{g_x^T \hat{x}_j + g_\lambda} \quad \dot{x}_j = \dot{\hat{x}}_j + \dot{\lambda}_j \hat{x}_j \\
\lambda_{j+1} &= \lambda_j + \dot{\lambda}_j \quad x_{j+1} = x_j + \dot{x}_j
\end{aligned}
\tag{4.55}$$

per  $j = 1, 2, \dots$  fino a convergere. È conveniente definire la funzione di vincolo (4.40), tenendo conto di tutte le quantità del problema, compreso  $\alpha$ , ponderata in modo omogeneo per mezzo della metrica dell'energia:

$$g[x, \lambda] = \Delta u^T K \dot{u}_j + \Delta \varepsilon^T E \dot{\varepsilon}_j + \Delta \sigma^T F \dot{\sigma}_j + \Delta \alpha^T F \dot{\alpha}_j + \mu \Delta \lambda \dot{\lambda}_j
\tag{4.56}$$

dove l'insieme  $\{\Delta u, \Delta \varepsilon, \Delta \sigma, \Delta \alpha, \Delta \lambda\}$  definiscono la tangente alla curva di soluzione,  $F_i = E^{-1}$ ,  $C$  è la matrice diagonale che contiene, per tutti i punti di Gauss, i coefficienti  $\tilde{C}_{,\alpha_j} = 2\mathcal{R}_{cr}$  e  $\mu = \hat{u}^T K \hat{u}$ . Così,  $\dot{\lambda}_j$  assume la forma

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\Delta u^T K \dot{\hat{u}}_j + \Delta \varepsilon^T E \dot{\hat{\varepsilon}}_j + \Delta \sigma^T F \dot{\hat{\sigma}}_j + \Delta \alpha^T F \dot{\hat{\alpha}}_j}{\Delta u^T K \hat{u}_j + \Delta \varepsilon^T E \hat{\varepsilon}_j + \Delta \sigma^T F \hat{\sigma}_j + \Delta \alpha^T F \hat{\alpha}_j + \mu \Delta \lambda}
\tag{4.57}$$

dove  $\dot{\hat{u}}_j, \dot{\hat{\varepsilon}}_j, \dot{\hat{\sigma}}_j$  e  $\hat{u}, \hat{\varepsilon}, \hat{\sigma}$  sono le componenti dei vettori  $\dot{\hat{x}}_j$  e  $\hat{x}_j$  e i vettori  $\dot{\hat{\alpha}}_j$  e  $\hat{\alpha}_j$ , che tengono conto dell'evoluzione dei danni, raccolti in ogni punto di Gauss i termini:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{\alpha}}_j &= \begin{cases} \frac{1}{2\mathcal{R}_{cr}} \Psi_{,\varepsilon_j} \dot{\hat{\varepsilon}}_j & \text{se } \alpha_j > \alpha^{(k)} \\ 0 & \text{se } \alpha_j = \alpha^{(k)} \end{cases} \\
\hat{\alpha}_j &= \begin{cases} \frac{1}{2\mathcal{R}_{cr}} \Psi_{,\varepsilon_j} \hat{\varepsilon} & \text{se } \alpha_j > \alpha^{(k)} \\ 0 & \text{se } \alpha_j = \alpha^{(k)} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.58}$$

Si noti che l'equazione (4.57) richiede una valutazione della tangente alla curva della soluzione: una scelta conveniente è data dal incremento del passo corrente:

$$\Delta u = \Delta u_j = u_j - u^{(k)}, \dots, \Delta \lambda = \Delta \lambda_j = \lambda_j - \lambda^{(k)} \quad (4.59)$$

Da notare anche che, alla fine del j-esimo ciclo, i vettori  $\hat{\alpha}_j$  e  $\hat{\lambda}_j$  definiti dall'equazione (4.58) forniscono una stima del vettore  $\alpha_{j+1}$

$$\tilde{\alpha}_{j+1} = \max\{\alpha_j + \hat{\alpha}_j + \hat{\lambda}_j \hat{\alpha}_j, \alpha^{(k)}\} \approx \alpha_{j+1} \quad (4.60)$$

che può essere utilizzata, nel prossimo ciclo (j + 1), come un valore di partenza nello schema (4.53).

In conclusione, l'algoritmo iterativo della soluzione per il calcolo del nuovo (k + 1)-esimo punto di equilibrio rispetto al precedente (k)-esimo punto può essere sintetizzato nella sequenza riportata nella figura 4.5, in cui è  $\|x\|$  è definita secondo l'equazione (4.56) e  $tol$  è la tolleranza relativa assunta dell'errore di equilibrio.

Una volta che il (k + 1)-esimo punto viene calcolato, il contatore del passo è aggiornato ( $k \leftarrow k + 1$ ) e il passo successivo è inizializzato:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon^{(k)} + \varepsilon^{(k+1)}(\varepsilon^{(k)} - \varepsilon^{(k+1)}) \\ \sigma_1 &= \sigma^{(k)} + \sigma^{(k+1)}(\sigma^{(k)} - \sigma^{(k+1)}) \\ u_1 &= u^{(k)} + \omega^{(k+1)}(u^{(k)} - u^{(k+1)}) \\ \alpha_1 &= \alpha^{(k)} + \omega^{(k+1)}(\alpha^{(k)} - \alpha^{(k+1)}) \end{aligned} \quad (4.61)$$

repeat:

$$\alpha_j = \max\left\{\tilde{\alpha}_j + \frac{1}{2\mathcal{R}_{cr}}(\Psi[\varepsilon_j] - \mathcal{C}[\tilde{\alpha}_j]), \alpha^{(k)}\right\}$$

then  $\Delta\alpha_j := \alpha_j - \alpha^{(k)}$

$$\begin{cases} r_{\sigma j} = -\sigma_\varepsilon[\varepsilon_j, \alpha_j] + \sigma_j \\ r_{\varepsilon j} = \varepsilon_j - \mathbf{D}\mathbf{u}_j + \lambda_j \hat{\mathbf{e}} \\ r_{fj} = -\mathbf{D}^T \sigma_j + \lambda_j \hat{\mathbf{f}} \end{cases}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{r}_j \quad (\text{performed by partitioning, Eq. (2.43)})$$

$$\dot{\lambda}_j = -\frac{\Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}_j + \Delta \varepsilon_j^T \mathbf{E} \dot{\varepsilon}_j + \Delta \sigma_j^T \mathbf{F} \dot{\sigma}_j + \Delta \alpha_j^T \mathbf{C} \dot{\alpha}_j}{\Delta \mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} + \Delta \varepsilon_j^T \mathbf{E} \hat{\varepsilon} + \Delta \sigma_j^T \mathbf{F} \hat{\sigma} + \Delta \alpha_j^T \mathbf{C} \hat{\alpha}_j + \mu \Delta \lambda_j}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_j = \bar{\mathbf{x}}_j + \dot{\lambda}_j \hat{\mathbf{x}}_j$$

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \dot{\mathbf{x}}_j \quad \text{then} \quad \Delta \mathbf{x}_{j+1} := \mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}^{(k)}$$

$$\tilde{\alpha}_{j+1} := \max\{\alpha_j + \dot{\alpha}_j, \alpha^{(k)}\} \quad \text{where} \quad \dot{\alpha}_j := \dot{\tilde{\alpha}}_j + \dot{\lambda}_j \hat{\alpha}_j$$

until:

$$\|\dot{\mathbf{x}}_j\| + \dot{\alpha}_j^T \mathbf{C} \dot{\alpha}_j \leq \|\hat{\mathbf{x}}_j\| \cdot tol$$

then compute the new point:

$$\varepsilon^{(k+1)} = \varepsilon_j, \quad \sigma^{(k+1)} = \sigma_j, \quad \mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}_j, \quad \alpha^{(k+1)} = \alpha_j$$

Figura 4.5 – Sistema MIX

Si noti che il processo path – following ottiene il nuovo punto di equilibrio a partire da una estrapolazione del passo precedente, quindi iterare fino al controllo dell'equilibrio è soddisfacente. Così è sempre iterabile almeno una volta. I cicli di iterazione necessari per svolgere ogni passo incrementale sono legati alla tolleranza assunta  $tol$ , alla dimensione del passo e alla non linearità del percorso. La semplice formula

$$\omega^{(k+1)} = 1 - \frac{1}{2} \frac{n_k - \bar{n}}{n_k + \bar{n}} \quad (4.62)$$

essendo  $n_k$  il numero di cicli di iterazione fatti nel passo precedente e  $\bar{n}$  un numero assegnato di riferimento, può essere convenientemente utilizzata per ottenere una scelta adatta al fattore della dimensione del passo  $\omega^{(k+1)}$ . Piccoli valori per il numero di cicli di riferimento,  $\bar{n} = 2 - 5$ , di

solito riduce il numero totale di iterazioni necessarie al processo di soluzione e quindi la velocità dell'analisi.

#### 4.3.2.6 Versioni compatibili dell'algoritmo di soluzione

Vale la pena di confrontare il sistema misto (MIX) di soluzione proposto (Figura 4.5) con le sue versioni standard compatibili (CMP), che possono essere riassunte come riportato nella Figura 4.6, dove  $\alpha[\varepsilon_j]$  rappresenta una procedura in grado di risolvere per ogni punto di Gauss il problema

$$C[\alpha_j] - \Psi[\varepsilon_j] \leq 0, \quad \alpha_j \geq \alpha^{(k)} \quad (4.63)$$

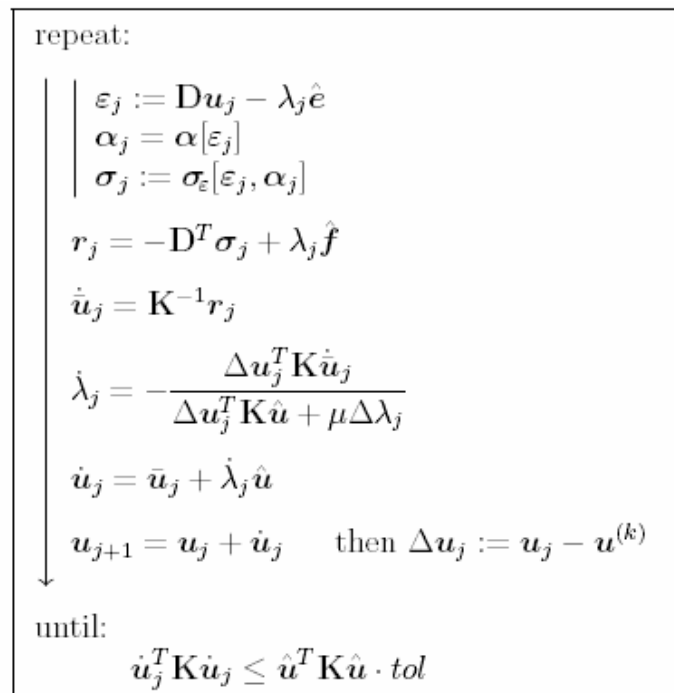


Figura 4.6 – Sistema CMP

Una possibile alternativa a questo sistema, che mira a ridurre i problemi di convergenza, è ottenuta mediante congelamento del parametro di danno durante i cicli di iterazione (estrapolazione di Eulero, EUL), cioè, modificando il primo passo della sequenza in

$$\begin{cases} \varepsilon_j = Du_j - \lambda_j \hat{e} \\ \sigma_j = \sigma_\varepsilon[\varepsilon_j, \tilde{\alpha}^{(k+1)}] \end{cases} \quad (4.64)$$



dove  $\tilde{\alpha}^{(k+1)} \approx \alpha^{(k+1)}$  è il danno congelato al ciclo  $j = 1$ , vale a dire  $\tilde{\alpha}^{(k+1)} = \alpha[\varepsilon_{j=1}]$ .

Noto questo le differenze tra schemi misti e schemi compatibili si trovano essenzialmente nel modo in cui è effettuato l'aggiornamento dello stress: mediante iterazione attraverso il residuo (MIX), o usando direttamente la legge costitutiva (CMP, EUL). Il lavoro computazionale è essenzialmente lo stesso per tutti gli schemi.

## 4.4 Livello globale

Il modello al continuo deve essere in grado di riprodurre il comportamento del modello discreto, che può essere considerato come un modello di riferimento per il comportamento della muratura. Questo può essere realizzato da differenti schemi di identificazione. Differenti schemi di identificazione portano a stime differenti di tutte le proprietà che di solito nascondono difetti di equilibrio o compatibilità cinematica.

Da un punto di vista metodologico, saranno analizzati in questo capitolo sia il continuo di Cauchy e che il continuo di Cosserat per omogeneizzare il modello discreto di mattoni rigidi e giunti elastici lineari.

Procedure di identificazione adatte ci permettono di raggiungere gli stessi risultati corretti per i due possibili continui, ma solo nel caso di un modello di deformazione omogenea.

Su questa base, si propone un modello di continuità che rappresenta le proprietà elastiche del modello discreto all'interno di una procedura di identificazione. Ciò porta a formulare implicitamente un modello al continuo micropolare di un materiale elastico lineare ortotropo.

La procedura è direttamente inserita nella fase di assemblaggio di tutta la matrice di rigidezza della parete in muratura. Per fare questo, abbiamo descritto come la procedura di identificazione proposta può essere seguita da un punto di vista computazionale.

Infine, l'attenzione sarà rivolta a possibili miglioramenti, che pensiamo esplichino meglio le ragioni della scelta precedente e che ci proponiamo di utilizzare come suggerimento per formulare ulteriori discretizzazioni approssimative (per un terzo livello nella strategia multilivello).

## **4.4.1 Identificazione costitutiva**

### **4.4.1.1 Procedura di identificazione**

Siamo di fronte ad un problema in due scale, una che fa riferimento ad un modello discreto e l'altra che fa riferimento ad un modello al continuo. Il modello discreto è quello descritto sopra, che include blocchi rigidi e giunti deformabili all'interno di una struttura periodica.

Partendo da una scelta adatta di un modello al continuo, usiamo la procedura di identificazione per imporre l'uguaglianza delle potenze interne relative ai due modelli. Ci sono differenti approcci a questo, come gli approcci compatibili ed equilibrati. Il primo è caratterizzato da ipotesi a priori sulla descrittore cinematici dei due modelli, il secondo su descrittore dinamici.

L'uguaglianza delle potenze interne è imposta a livello del cosiddetto Reference Elementary Volume (REV). Questo si trova in una cella elementare che è stata selezionata da simmetrie geometriche e meccaniche, al fine di riprodurre periodicamente le proprietà della scala discreta nella scala continua. Per due murature in laterizio di due dimensioni periodiche, il più piccolo REV che possiamo considerare è la singola cella in evidenza nella figura 4.7. Si può riprodurre l'interazione di ogni mattone con altri sei mattoni.

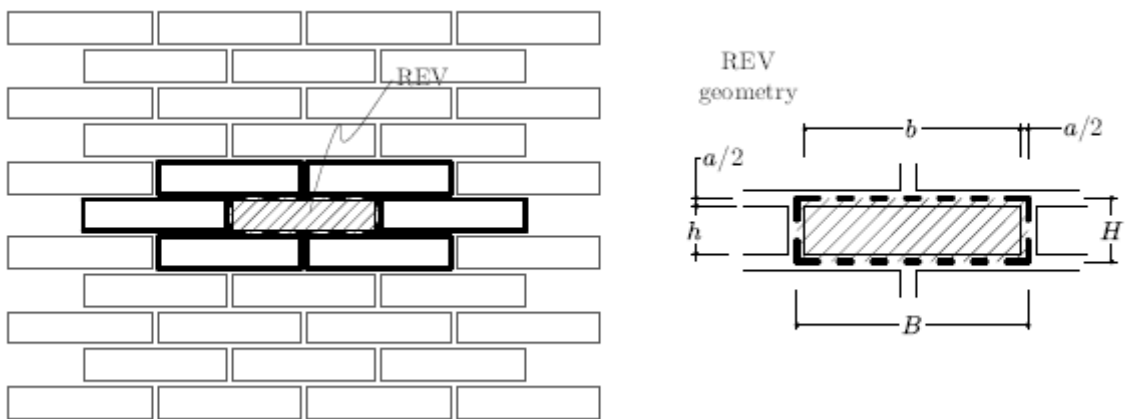


Figura 4.7 – Interazione del mattone con i mattoni circostanti

Risolvendo la condizione di uguaglianza, si possono determinare i coefficienti costitutivi del modello continuo in termini di quelli del modello discreto. L'accuratezza di questi coefficienti nel riprodurre le proprietà costitutive del modello discreto dipende dall'approccio seguito per l'identificazione e dai descrittori utilizzati per definire il modello continuo.

#### 4.4.1.2 Continuo di Cauchy vs continuo di Cosserat

È stato ampiamente discusso in letteratura come entrambi i modelli di Cauchy e di Cosserat possono rappresentare bene il comportamento lineare della muratura regolare in mattoni. Si mostra che:

“a parità di lunghezza caratteristica di caricamento, i due modelli di continuità”, con sistemi di identificazione costitutiva adeguati ed in presenza di modelli di deformazione omogenea, “sono asintoticamente equivalenti, come il rapporto tra i mattoni e le dimensioni del muro che tende a

zero" e tendono alla soluzione esatta fornita da un modello discreto di mattoni rigidi con il giunto elastico lineare".

Vale la pena notare che la prima parte può essere completamente falsa, quando si hanno fenomeni non lineari: i modelli di deformazione, in generale, non sono omogenei e, comunque, sono necessari procedure di identificazione più sofisticate.

Tuttavia, al fine di recuperare una risposta globale approssimata della parete in muratura, si può anche accettare una risposta elastica lineare. Partiamo dal considerare i possibili modi omogenei di sollecitazione, riportati nella figura 4.8.

Come indicato, per modi omogenei di sollecitazione si intende modelli di deformazione discreti dove ci sono differenze di spostamento dei mattoni adiacenti che corrispondono l'uno con l'altro per quanto riguarda gli assi centrali del REV. Questi modi si ritrovano in due modi di allungamento e di deformazione per taglio e uno di micro-rotazione, vale a dire la rotazione di ogni mattone attorno al suo baricentro. È noto che solo la modalità di allungamento stabiliti dal parametro  $E_{11}$  può essere rappresentata direttamente da modelli standard di Cauchy: in questo, per esempio, non sono presenti né un parametro di rotazione attorno ad un punto né differenti parametri di taglio (in generale, per laterizi abbiamo  $\Gamma_{12} \neq \Gamma_{21}$ ).

Il modello di Cosserat sembra quindi essere più adatto per descrivere il comportamento al continuo della muratura regolare in laterizio.

Tuttavia, facciamo riferimento ad un modello al continuo di Cauchy per l'identificazione costitutiva. Notare come la rotazione omogenea locale  $\varphi$  di ogni mattone non può essere calcolata in un'identificazione del modello al continuo di Cauchy. Analogamente, se è seguito un approccio equilibrato, uno stato di stress omogeneo di Cauchy non può riprodurre una condizione di equilibrio dei momenti rispetto alla micro-rotazione.

In un contesto di elasticità linearizzata che può condurre rispettivamente ad un più completi o più rigido comportamento al continuo.

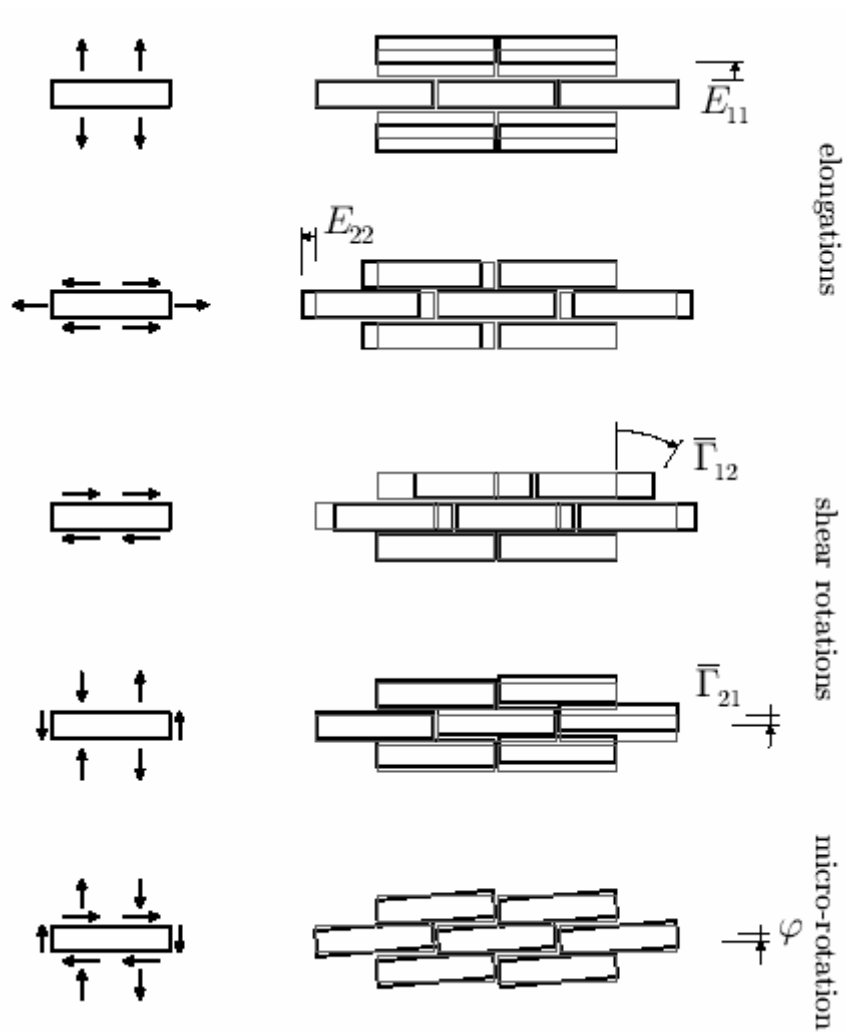


Figura 4.8 – Modi omogenei di sollecitazione

Tuttavia, è stato mostrato come questo errore può essere corretto con l'aggiunta di uno stato di stress auto equilibrato a quello precedente (vedi figura 4.10).

In particolare, siamo in grado di ottenere una nuova procedura di identificazione equilibrata, basata sui seguenti passi:

- 1) La tensione di Cauchy è stato assunto costante ed è accompagnata da forze corrispondenti che agiscono nella malta (Figura 4.9)
- 2) uno stato di tensione autoequilibrato nel REV è aggiunto a quello precedente, da imporre il bilancio dei momenti rispetto alla micro-rotazione (Figura 4.10);

3) un'equivalenza del lavoro è imposta al livello REV tra i lavori esercitati dalle azioni calcolate separatamente nel modello al continuo e nel modello discreto.

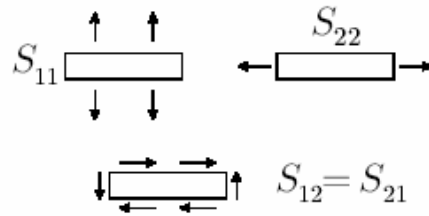


Figura 4.9 – Forze agenti nella malta

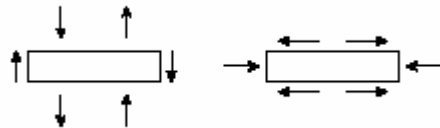


Figura 4.10 – Stato di tensione autoequilibrato

Il primo passo ci permette di soddisfare, a priori, alcune condizioni di equilibrio al livello del REV derivanti da una distribuzione omogenea standard di tensione di Cauchy. Il secondo passo è utilizzato per il recupero della distribuzione della tensione rappresentato esattamente in figura 4.8. Poi, la terza fase fornisce direttamente l'equazione (4.65).

In questo modo, siamo in grado di esprimere la relazione dal punto di vista costitutivo come:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{2222} & 0 \\ C_{2222} & C_{1111} & 0 \\ 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \Gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

$$S = CE$$

(4.65)

e  $S$ ,  $C$  ed  $E$  sono le quantità di stress, rigidità e sollecitazione di un continuo standard di Cauchy, espresso nella notazione di Voight. I coefficienti di  $C$  dipendono dal modulo elastico (normale e tangenziale) dei giunti di malta e sono stati eseguiti come segue:

$$C_{1111} = \frac{EB}{a} + \frac{GB^2}{4aH}$$

$$C_{2222} = \frac{EH}{a}$$

$$C_{1212} = \frac{2GB(EB + 4GH)}{EB^2 + 4GH^2 + 4GBH}$$

dove le quantità che compaiono qui sono quelle che definiscono la geometria del REV (vedi figura 4.7).

Infine, vale la pena notare che se si adotta un approccio compatibile dell'identificazione costitutiva per un continuo di Cosserat, otteniamo gli stessi coefficienti elastici presenti in (4.65) per stati di deformazione omogenea, una volta preso

$$C_{1212} = \frac{\bar{C}_{1212}\bar{C}_{2121}}{\bar{C}_{1212} + \bar{C}_{2121}}$$

dove  $\bar{C}_{1212}$  e  $\bar{C}_{2121}$  sono i coefficienti elastici del continuo di Cosserat legati ai componenti della tensione per taglio.

#### 4.4.2 Identificazione semplice (numerica)

Si propone un modo alternativo per recuperare le proprietà costitutive elastiche della parete in muratura, analiticamente ottenute dall'identificazione del continuo di Cauchy (o Cosserat) nel capitolo precedente. Siamo in grado di identificare direttamente nel codice implementando la strategia proposta.

Nel contesto di formulazione agli elementi finiti, l'intera matrice di rigidità del problema, per esempio in elasticità linearizzata, viene memorizzata prima che l'algoritmo di soluzione è partito.

Questa è costituita assemblando i contributi di rigidezza di ogni elemento della mesh come

$$K = \sum_e T_e^T K_e T_e \quad (4.66)$$

dove  $T$  è la matrice di trasformazione dello spostamento e  $K_e$  è la matrice di rigidezza dell' $e$ -esimo elemento. Quest'ultima è calcolata integrando la legge costitutiva point-wise, sulla base delle funzioni di forma.

Nel nostro caso, la legge costitutiva point-wise è quella relativa al livello REV: dal momento in cui i parametri cinematici (discreti) corrispondono agli spostamenti del baricentro del mattone, la legge costitutiva del REV è determinato dai contributi di rigidezza derivanti da tutte le possibili interazioni tra il mattoni e i sei mattoni circostanti.

Discretizziamo ora la parete in muratura assumendo funzioni di forma adatte regolate dai parametri di spostamento nodale ottenendo così una descrizione approssimata (globale). Per l' $e$ -esimo elemento calcoliamo il campo di spostamento, come spostamento di ogni mattone

$$u^m = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_1[\xi, \eta] & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & N_2[\xi, \eta] & 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & N_3[\xi, \eta] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_{n_d} \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

dove  $N_i[\xi, \eta]$  sono i vettori a  $n$ -dimensioni delle funzioni di forma (corrispondenti ai campi  $u$ ,  $v$  e  $\varphi$  per  $i = 1, 2, 3$ , rispettivamente), essendo  $(\xi, \eta)$  le coordinate isoparametriche e  $n$  il numero di nodi dell'elemento finito;  $\{d_1, d_2, \dots, d_{n_d}\}$  sono i parametri cinematici nodali,  $n_d = 24$  è il numero di parametri di spostamento di ogni elemento finito. Si noti che, per semplicità, abbiamo considerato le stesse funzioni di forma per ogni campo cinematico.

Quindi, per ogni elemento finito siamo in grado di:

- 1) calcolare il contributo di rigidezza di ogni mattone i cui possibili spostamenti sono regolati dalle funzioni di forma



2) assemblare di questi contributi per tutti i mattoni appartenenti all'elemento.

Operando in questo modo, abbiamo ottenuto i contributi della matrice di rigidezza di ciascun elemento della mesh, direttamente in termini di parametri di spostamento globale.

In altri termini, ogni contributo della somma in (4.66) è ottenuto come segue:

$$T_e^T K_e T_e = \sum_{m=1}^{m_e} \sum_{i=1}^{n_g} \left( \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 k_{pq}^{mi} N_p[\xi_m, \eta_m] N_q[\xi_i, \eta_i]^T \right) \quad (4.68)$$

$m_e$  è il numero dei mattoni appartenenti all'e-esimo elemento finito e  $n_g$  il numero di mattoni legati all'm-esimo mattone, le cui coordinate isoparametriche sono  $(\xi_i, \eta_i)$  per  $i = 1, 2, \dots, n_g$ . Il termine  $k_{pq}^{ij}$  è il contributo di rigidezza recuperato dalla risposta elastica del giunto che collega l'i-esimo e il j-esimo mattone e relativo allo spostamento  $u_p^i$  dell'i-esimo mattone e lo spostamento  $u_q^j$  del j-esimo. Pertanto, siamo in grado di fare un'identificazione costitutiva direttamente quando dobbiamo calcolare i contributi di rigidezza di ciascun elemento. Chiamiamo questa procedura di identificazione della tensione, e quella descritta nella sezione precedente procedura analitica. Ovviamente, quest'ultima richiede le operazioni di assemblaggio della matrice di rigidezza delle tecniche standard agli elementi finiti.

Da un punto di vista computazionale, non ci sono grandi differenze in termini di costi. La più costosa operazione è comune alle due procedure e si trova nella decomposizione dell'intera matrice di rigidezza, che ovviamente è fatta alla fine dell'identificazione.

Inoltre, il modo di assemblare i contributi di rigidezza degli elementi (vedi secondo membro nell'espressione (4.68)) è in realtà non così diverso come appare da quella di una tecnica standard agli elementi finiti (vedi primo membro dell'espressione (4.68)).

La differenza più importante è, invece, nel raccogliere i contributi dei mattoni al contorno dell'elemento, che può essere collegato con mattoni appartenenti ad altri elementi. Questo significa

che, in generale, non siamo in grado di calcolare il contributo di rigidità di un unico elemento, senza sapere alcune informazioni circa gli elementi circostanti.

È ben noto come questo porta ad un formato della matrice sparso. Tuttavia, al fine di riprodurre solo una descrizione approssimata della parete in muratura dalla discretizzazione al continuo, possiamo trascurare questi elementi per elementi “link” e memorizzare una matrice di rigidità approssimata.

Inoltre, la tecnica proposta di raccolta diretta dei contributi di rigidità di ogni mattone ha qualche vantaggio. Con i medesimi costi, essa consente l’assemblaggio della matrice di rigidità del muro in qualsiasi punto di equilibrio del processo di analisi e questo può contribuire a migliorare la convergenza dello schema di soluzione.

Infatti, quando si recuperano i termini  $k_{pq}^{ij}$ , è facile calcolare, per esempio, il grado di danno relativo al giunto di malta che collega l’i-esimo e il j-esimo mattone.

In questo modo, abbiamo implicitamente formulato un modello continuo micropolare le cui caratteristiche del materiale sono quelle di un materiale elastico lineare ortotropo.

Infine, vale la pena di notare che abbiamo scelto di descrivere il comportamento al continuo con funzioni di forma quadratiche, discretizzando così il muro con 8 nodi per elemento. In questo caso, i vettori  $N[\xi, \eta]$  hanno i seguenti componenti

$$N[\xi, \eta] = \begin{Bmatrix} 1/4(1-\eta)(1-\varepsilon)(-1-\eta-\varepsilon) \\ 1/4(1-\eta)(1+\varepsilon)(-1-\eta+\varepsilon) \\ 1/4(1+\eta)(1+\varepsilon)(-1+\eta+\varepsilon) \\ 1/4(1+\eta)(1-\varepsilon)(-1+\eta-\varepsilon) \\ 1/2(1-\eta^2)(1-\varepsilon) \\ 1/2(1-\eta)(1-\varepsilon^2) \\ 1/2(1-\eta^2)(1+\varepsilon) \\ 1/2(1+\eta)(1-\varepsilon^2) \end{Bmatrix}$$

(4.69)

riferiti, rispettivamente, a ciascun tipo di parametro cinematico nodale  $u_i$ ,  $v_i$  e  $\vartheta_i$  (per  $i = 1, \dots, 8$  nodi), come illustrato nella figura 4.11. Questo, nell'equazione (4.67), il vettore  $\{d_1, d_2, \dots, d_{n_d}\}$  diventa  $\{u_1, u_2, \dots, u_8, v_1, v_2, \dots, v_8, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_8\}$ .

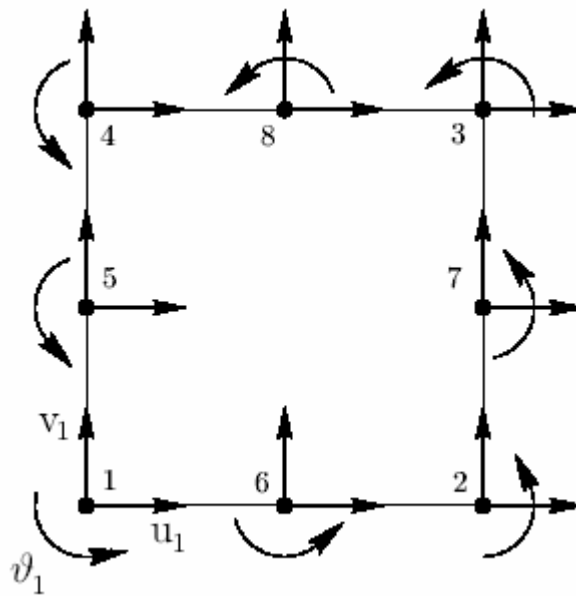


Figura 4.11 – Parametri cinematici nodali

### 4.4.3 Operatori di trasferimento

L'operatore  $A$  ci permette di trasformare le quantità locali in quantità globali (e viceversa). Dobbiamo quindi considerare la trasformazione da globale a locale: questa può essere fatto elemento per elemento, svolta nell'equazione (4.3), come

$$u_b = A_e u_g \quad (4.70)$$

in cui si introduce lo spostamento locale  $u_b$  del b-esimo mattone appartenente all'e-esimo elemento, (vale a dire una parte del vettore  $u_1$ ), e lo spostamento globale dell'elemento nodale  $u_g$ , (vale a dire una parte del vettore  $u_g$ ).

Un semplice modo di scegliere l'operatore di trasformazione si trova in un'identificazione basata sulle funzioni di forma (4.69) valutate nel baricentro dei mattoni, in modo che  $A_e$  è direttamente definita come la corrispondente matrice che raccoglie queste funzioni di forma. Questa scelta, che può essere chiamata puramente compatibile, tuttavia, non è conveniente perché costringe il sistema dei mattoni ad esibire solo i modi di deformazione consentiti dalle funzioni di forma. Questo introduce blocchi cinematici che portano ad una sovrastima implicita della rigidità dell'elemento che di fatto non appartiene al suo comportamento globale.

Una scelta migliore è quella di imporre un'identificazione di spostamento solo al contorno dell'elemento e di recuperare lo spostamento interno mediante l'equilibrio interno del sistema del mattone.

Più precisamente, prima distinguiamo  $u_j$  da  $u_b$ , i vettori che raccolgono gli spostamenti della superficie media del giunto all'interfaccia del contorno dell'elemento e quelli dei mattoni interni (vedi fig. 4.12).

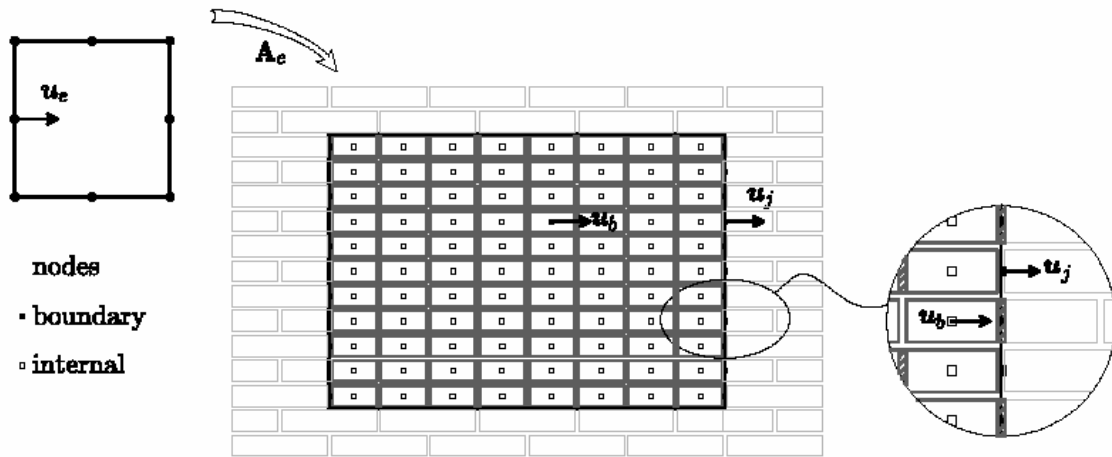


Figura 4.12 - Vettori che raccolgono gli spostamenti della superficie

media del giunto all'interfaccia del contorno dell'elemento e vettori dei mattoni interni

Esprimiamo quindi le relazioni tra le variabili interne e al contorno mediante l'equazione di equilibrio partizionata

$$\begin{bmatrix} K_{bb} & K_{bj} \\ K_{bj}^T & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ t_j \end{Bmatrix} \quad (4.71)$$

dove  $t_j$  è il vettore delle trazioni al contorno e  $K_{bb}$ ,  $K_{bj}$  e  $K_{jj}$  sono le corrispondenti sotto-matrici di partizionamento della matrice di rigidezza elastica non danneggiata dei mattoni assemblati in termini di parametri di spostamento interni e al contorno  $u_b$  e  $u_j$ . Dalla condensazione standard, si ottengono le relazioni

$$\left[ K_{jj} - K_{bj}^T K_{bb}^{-1} K_{bj} \right] u_j = t_j \quad (4.72 a)$$

$$u_b = -K_{bb}^{-1} K_{bj} u_j \quad (4.72 b)$$

Quindi, assumendo l'identificazione point-wise:

$$u_j = N_{ej} u_e$$

(4.73)

dove  $N_{ej}$  raccoglie le funzioni di forma (4.69) valutate al contorno dell'elemento. In questo modo, abbiamo finalmente le espressioni sia per la matrice di rigidezza  $K_e$  attraverso l'equazione (4.72 a)

$$K_e = N_{ej}^T [K_{jj} - K_{bj}^T K_{bb}^{-1} K_{bj}] N_{ej} \quad (4.74)$$

sia per la matrice di trasformazione da globale a locale  $A_e$  attraverso l'equazione (4.72 b)

$$A_e = -K_{bb}^{-1} K_{bj} N_{ej} \quad (4.75)$$

Infine,  $K_e$  e  $A_e$  possono essere utilizzate, attraverso una procedura di assemblaggio standard agli elementi finiti, per ottenere le matrici globali  $K_g$  e  $A$ . Si noti che entrambe le matrici dipendono solo dal modello del mattone incluso nell'elemento. Così possono essere convenientemente raccolte e memorizzate una sola volta per tutte, quando si utilizza una mesh di elementi regolari.

## 4.5 Strategia di analisi

Qui si descrivono le analisi multilivello proposte, assumendo come punto di partenza il fatto che deve essere considerata una sequenza di fasi di carico, definita da una polilinea nello spazio di carico. Il processo di carico  $p[\lambda]$  è quindi caratterizzato da una sequenza di N distribuzioni di carico (tutte, ovviamente, definite a livello locale come  $f_1$ )

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_N,$$

(4.76)

dove ogni fase di carico varia linearmente dal valore iniziale  $p_{k-1}$  al valore finale  $p_k$ :

$$p[\lambda] = p_{i-1} + \lambda(p_i - p_{i-1}) \quad \text{per } i = 1, \dots, N$$

(4.77)

Indicando con  $x$  il vettore che raccoglie tutte le variabili di stato definite a livello locale, che possono essere, in generale, gli spostamenti dei mattoni  $u_b$  e le deformazioni nei giunti  $\varepsilon_m$ , le tensioni  $\sigma_m$  e i parametri di danno  $\alpha_m$ , il percorso di equilibrio  $x[\lambda]$  all'interno di ogni fase di carico, si ottiene in modo incrementale da una sequenza di punti di equilibrio  $\{x_k, \lambda_k\}$  sufficientemente fine da fornire la legge di evoluzione  $x[\lambda]$  attraverso interpolazione interna.

Una procedura di soluzione incrementale/iterativa path-following, che è descritta in dettaglio nel seguito, è utilizzata per tale scopo.

Essa sfrutta la strategia di soluzione multilivello già delineata nel capitolo 2. Quest'ultima si basa su un processo iterativo che utilizza sia sistemi di iterazione globali che sistemi di iterazione locali, riferendosi ad una diversa (globale e locale) modellazione della muratura.

#### 4.5.1 Processo di soluzione path-following

I metodi path-following, proposti da Riks, sono molto potenti in contesti computazionali fortemente non lineari. Questi metodi ci permettono di recuperare il percorso di equilibrio da una sequenza di punti di equilibrio sufficientemente vicini, risolvendo iterativamente (per ciascuno di questi) le equazioni del problema, a partire da un punto precedentemente trovato  $\{x_k, \lambda_k\}$  e poi calcolando l'incremento per il raggiungimento del successivo punto  $\{x_{k+1}, \lambda_{k+1}\}$ . Questo si ottiene attraverso un processo predittore - correttore che può essere riassunto come segue:

- 1) A partire da  $\{x_k, \lambda_k\}$  la prima stima (predittore) per  $\{x_{k+1}, \lambda_{k+1}\}$  è ottenuta da una estrapolazione diretta del passo precedente:

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(0)} = \beta_k (x_k - x_{k-1}) \\ \lambda_{k+1}^{(0)} = \beta_k (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \end{cases} \quad (4.78)$$

essendo  $\beta_k$  un fattore di dimensione adatto che ci permette di ingrandire ( $\beta > 1$ ) o ridurre ( $\beta < 1$ ) le dimensioni del passo che deve essere eseguito (si mostra in seguito come scegliere questo fattore).

2) La soluzione è aggiornata iterativamente, fino a convergenza, dallo schema

$$\begin{cases} x_{k+1}^{(j+1)} = x_{k+1}^{(j)} + \dot{x} \\ \lambda_{k+1}^{(j+1)} = \lambda_{k+1}^{(j)} + \dot{\lambda} \end{cases} \quad (4.79)$$

in cui le correzioni  $\dot{x}$  e  $\dot{\lambda}$  sono calcolate risolvendo il sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \bar{J} & \Delta p \\ (M\Delta x)^T & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{k+1}^j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.80)$$

dove

$$\begin{aligned} \Delta p &= p_{k+1} - p_k \\ \Delta x &= x_{k+1}^{(j)} - x_k \end{aligned} \quad (4.81)$$

$r_{k+1}^j$  è l'errore attuale nelle equazioni di stato,  $\bar{J}$  è un'approssimazione adatta della matrice Jacobiana  $J = dr(x)/dx$  e la matrice M raccoglie i fattori metrici che creano il cosiddetto vincolo path-following (seconda equazione nelle equazioni (4.80)) un'adeguata condizione che impone la dimensione del passo ad essere (approssimativamente) costante attraverso la correzione (4.79)



$$(\Delta x + \dot{x})^T M (\Delta x + \dot{x}) \approx \Delta x^T M \Delta x \quad (4.82)$$

Con condensazione statica le equazioni (4.80) prevedono:

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= x_r + \lambda x_p \\ \lambda_j &= -\frac{\Delta x^T M x_r}{\Delta x^T M x_p} \end{aligned} \quad (4.83)$$

dove i vettori  $x_r$  e  $x_p$  sono ottenuti come soluzioni di problemi lineari

$$\begin{aligned} \bar{I} x_r &= -r_{k+1}^j \\ \bar{I} x_p &= \Delta p \end{aligned} \quad (4.84)$$

L'efficienza e la solidità globale dello schema path-following dipende dalle particolari scelte della matrice di iterazione  $\bar{I}$  e dal vincolo path-following, ma soprattutto dalla rappresentazione del problema, che è la seguente: quali variabili di stato sono effettivamente assunte come variabili indipendenti e quali sono implicitamente individuate dalla loro dipendenza dalle precedenti. Questo influenza la sequenza di aggiornamento e riguarda fortemente le proprietà di convergenza del processo di iterazione.

Ad esempio, in presenza di non-linearità geometriche, un grande miglioramento si ottiene utilizzando una formulazione mista, in termini di spostamenti e sollecitazioni, entrambi assunti come variabili principali.

Nel contesto attuale, il comportamento fortemente instabile prodotto dalla crescita del danno determina una formulazione puramente compatibile impraticabile, in termini di sole variabili di spostamento. Una buona scelta, che è seguita qui, è quella di utilizzare una formulazione mista, assumendo sia i parametri di spostamento che i parametri di danno come variabili principali, i primi aggiornati attraverso le equazioni di equilibrio e i secondi attraverso le equazioni di incremento del danno. Una formulazione a 4 campi in termini di spostamento, stress, tensioni e parametri di danno,

potrebbe essere anche fattibile, mentre non sarebbe necessaria per assicurare la convergenza della strategia multilivello presentata.

Infine, si assume che  $\bar{l}$  è implicitamente definita dalla procedura multilivello descritta nel capitolo 2 e che entrambi i vettori  $\bar{x}_r$  e  $\bar{x}_p$  che figurano nell'equazione (4.84) sono ottenuti da una soluzione multilivello. Più precisamente, il vettore  $\bar{x}_r$  è fornito da un solo ciclo multilivello (un'iterazione globale seguita da un'iterazione locale, tenendo conto dell'aggiornamento dei danni); il vettore  $\bar{x}_p$ , che è preso come costante all'interno di ogni fase di carico, è ottenuto da una soluzione elastica completa. Dobbiamo inoltre definire il vincolo path-following (4.82), includendo i parametri di spostamento ed i parametri del danno nella misura delle dimensioni del passo.

#### 4.5.2 Sistema di iterazione globale

Nella nostra proposta, la correzione globale è effettuata da una soluzione diretta (attraverso decomposizione di Cholesky) dell'equazione (4.7 d), utilizzando la matrice elastica non danneggiata  $\bar{K}_g$  definita dall'equazione (4.74) e quindi non richiede particolari commenti.

È tuttavia opportuno ricordare che  $\bar{K}_g$  è recuperata e decomposta, una volta per tutte, all'inizio dell'analisi, così ogni iterazione ha bisogno di una fase di sostituzione all'indietro del processo di soluzione (di solito una piccola frazione di tempo totale di calcolo per la soluzione di un sistema lineare).

Inoltre, le dimensioni del problema globale non sono così grandi, essendo legate a mesh agli elementi finiti relativamente approssimate e non al modello dettagliato del mattone. Questo rende l'iterazione globale una fase relativamente poco costosa in confronto con la ricchezza della descrizione locale.

La correzione  $d_g$  è trasferita a livello locale attraverso l'equazione (4.7 f) utilizzando la matrice da globale a locale A definita dall'equazione (4.73), aggiornando così la stima attuale della soluzione locale  $u_1$ .

Questo aggiornamento è effettuato mediante un processo elemento per elemento che, sfruttando l'equazione (18b), utilizza direttamente le matrici dell'elemento  $K_{bb}$  e  $K_{bj}N_{ej}$ , essendo queste recuperate e memorizzate una volta per tutte all'inizio delle analisi

$$u_b^{(h+1,0)} = u_b^{(h)} - K_{bb}^{-1} K_{bj} N_{ej} d_g^{(h)} \quad (4.85)$$

Può essere fatto un semplice, ad un extra-costo trascurabile, miglioramento dell'efficienza globale del processo di soluzione. Sicuramente, possiamo inserire nell'equazione (4.85) l'effetto dell'errore locale interno  $r_b$ , ottenendo così

$$u_b^{(h+1,0)} = u_b^{(h)} - K_{bb}^{-1} \left( K_{bj} N_{ej} d_g^{(h)} + r_b^{(h)} \right) \quad (4.86)$$

Pertanto, abbiamo scelto di utilizzare l'equazione (4.86).

### 4.5.3 Sistemi di iterazione locali

La correzione utilizza due diversi schemi di iterazione Gauss-Seidel, che chiameremo mattone per mattone e elemento per elemento, che vengono eseguiti in sequenza.

#### 4.5.3.1 Iterazione mattone per mattone

Come indicato in precedenza, nel livello locale dobbiamo solo correggere le distribuzioni ad alta frequenza dell'errore.

L'approccio iterativo di Gauss-Seidel è particolarmente efficace a tale scopo (di solito è adottato come uno schema locale in soluzioni multigrid). Lo schema può essere implementato esaminando ogni mattone in successione.

Prima calcoliamo lo stress attuale  $\sigma_m$  nei giunti di malta legati corrispondenti agli attuali valori degli spostamenti del mattone e del danno del giunto. Dobbiamo quindi calcolare l'errore di equilibrio  $r_b$  nel mattone corrispondente a tali tensioni e al valore corrente del parametro di carico  $\lambda$ .

Abbiamo finalmente corretto gli spostamenti correnti del mattone attraverso  $d_b$  assumendo tutti gli altri mattoni come vincolati

$$\begin{aligned}u_b^{(h+1,j+1)} &= u_b^{(h+1,i)} + d_b \\d_b &= K_b[\alpha_m]^{-1} r_b[\sigma_m]\end{aligned}\tag{4.87}$$

essendo  $K_b[\alpha_m]$  l'attuale matrice di rigidità del mattone, che si ottiene dalle matrici dei giunti danneggiati, definite come segue

$$E_{md} = \begin{cases} \frac{1}{1 + \alpha_m} E_m & \text{per giunti aperti} \\ E_m & \text{per giunti chiusi} \end{cases}\tag{4.88}$$

Si noti che, in questo modo, la correzione dei successivi mattoni può beneficiare delle correzioni di quelli precedenti, al fine di accelerare il processo di convergenza, anche se è introdotta una correzione non simmetrica dovuto al mettere in ordine i mattoni nella sequenza.

#### 4.5.3.2 Iterazione elemento per elemento

Lo schema mattone per mattone di Gauss-Seidel (4.87) è molto veloce da un punto di vista computazionale e altamente efficiente per ridurre i componenti ad elevata frequenza dell'errore, quelle con lunghezze d'onda dell'ordine della dimensione dei mattoni. Tuttavia, la sua efficienza tende a peggiorare in presenza di componenti con lunghezze d'onda più ampia, di larghezza comparabile con la dimensione degli elementi, che sono presenti anche dopo la correzione globale. Di conseguenza, la convergenza di tutta la strategia potrebbe rallentare verso il basso, soprattutto quando il processo di danno va avanti. È pertanto conveniente introdurre, tra l'iterazione globale e l'iterazione mattone per mattone, alcune iterazioni intermedie adatte per diminuire l'errore interno agli elementi.

Ciò può essere ottenuto dal processo elemento per elemento di Gauss-Seidel. Per ogni elemento, si fa riferimento al modello di mattoni legati all'elemento, compresi tutti i mattoni interni all'elemento o legati al suo contorno, come mostrato in Fig. 4.13. La correzione degli spostamenti correnti dell'elemento  $\bar{u}_e$  viene poi effettuata con la seguente equazione:

$$\bar{d}_e = \bar{K}_e^{-1} \bar{r}_e \quad (4.89)$$

dove  $\bar{d}_e$  e  $\bar{r}_e$  sono i vettori correnti che raccolgono le correzioni di spostamento e l'errore di equilibrio dei mattoni inclusi nel modello, e  $\bar{K}_e$  è la sua corrispondente matrice di rigidità elastica non danneggiata. Si noti che la matrice  $\bar{K}_e$  può essere ottenuta allargando la matrice  $K_{bb}$  definita nell'equazione (4.71) aggiungendo righe e colonne relative ai mattoni esterni, senza l'introduzione di quantità alle interfaccia al contorno dell'elemento. In questo modo, entrambe le matrici  $\bar{K}_e$  e  $K_e$

sono ottenute all'interno dello stesso assemblaggio e dello stesso processo di decomposizione, una volta per tutte, se si utilizza una mesh uniforme. Ciò taglia l'onere computazionale del processo di iterazione.

L'uso di questo schema di iterazione elemento per elemento entro l'iterazione multilivello, oltre naturalmente ad accelerare il processo di soluzione, è conveniente per le seguenti ragioni:

- è veloce e particolarmente efficace nel ridurre l'errore di equilibrio all'interno dell'elemento
- usa solo quantità definite direttamente a livello locale, senza necessitare spostamenti al contorno  $U_j$  (vedi fig. 4.12)
- comprende anche un gruppo esterno di mattoni, in modo che i mattoni attorno le interfacce tra gli elementi sono corretti due volte all'interno di un ciclo di iterazione, e questo è opportuno, perché l'iterazione globale, a causa dell'interpolazione dello spostamento (4.73), tende a concentrare l'errore vicino al confine dell'elemento
- l'uso della matrice di rigidezza non danneggiata dell'elemento è sufficiente per il nostro scopo di diminuire l'errore di equilibrio all'interno degli elementi; l'utilizzo delle matrici danneggiate è inutilmente costoso e non conduce necessariamente ad un miglioramento nella convergenza: infatti, esso potrebbe produrre una perdita di convergenza quando la matrice utilizzata nell'iterazione sottostima notevolmente la rigidezza corrente dell'elemento (come nel caso di giunti aperti danneggiati, che diventano chiusi dopo la correzione).

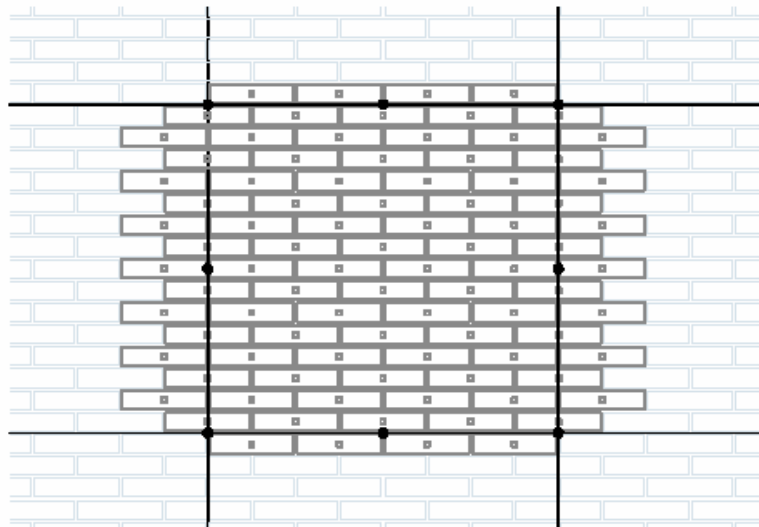


Figura 4.13 – Rappresentazione del pannello di mattoni utilizzato  
nell'assemblaggio per la correzione intermedia

### 4.5.3.3 Aggiornamento del danno

Durante il processo di iterazione una fase di aggiornamento del danno deve essere inserita per tenere conto dell'evoluzione del danno nella muratura.

Ovviamente, questa deve essere effettuata a livello locale, che è l'unico che legge la distribuzione del danno.

L'iterazione mattone per mattone, tuttavia, ha un'asimmetria intrinseca che rende la soluzione corrente fortemente dipendente dal mattone nella sequenza di iterazione.

L'aggiornamento del danno introduce un comportamento fortemente instabile, molto sensibile alle imperfezioni nella valutazione corrente della soluzione. Quindi, l'interazione tra i due processi tende a produrre un forte deterioramento nella velocità di iterazione e, nella peggiore delle ipotesi, potrebbe portare a convergere su soluzioni indesiderate, strettamente collegate all'ordine del mattone.

Un robusto aggiornamento del danno richiede effettivamente una certa morbidezza nella soluzione corrente, così sembra essere una scelta conveniente quella di introdurlo solo all'interno della fase di iterazione elemento per elemento.

L'aggiornamento è effettuato come segue: per prima cosa dobbiamo calcolare e applicare la correzione di spostamento locale  $\bar{u}_b$  del b-esimo mattone appartenente all'e-esimo elemento attraverso le equazioni (4.89) e (4.70); poi, per ogni m punto di Gauss di ogni giunto interno del modello di mattoni dell'elemento, si calcola l'errore locale corrente  $\rho_m$  del giunto danneggiato nell'equazione (4.30)

$$\rho_m = \Psi[D_m(u_b + \bar{u}_b)] - \mathcal{C}[\alpha_m]$$

(4.90)

e si aggiorna il valore corrente  $\alpha_m$  dei parametri di danno con la correzione

$$\dot{\alpha} = (\sigma_m^T \dot{\varepsilon}_m) / (4\mathcal{R}_{cr}) \quad (4.91)$$

#### 4.5.4 Vincolo path-following

Il vincolo path-following (4.82), relativo alla correzione del carico  $\lambda$  sulla correzione delle variabili di stato  $\dot{x}$  attraverso la seconda equazione di (4.83), svolge un ruolo importante nello schema di iterazione path-following. La condizione precisa la dimensione

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^T M \Delta x}$$

del passo incrementale da  $x_k$  a  $x_{k+1}$ , che è la sua arclength nello spazio  $\{x, \lambda\}$ . Sotto la nostra ipotesi, la dimensione deve misurare sia gli spostamenti locali che gli incrementi del parametro di danno, assunti come variabili di controllo dello stato. Una semplice, ma efficace, scelta è data dal disaccoppiamento dei due contributi

$$\Delta x^T M \dot{x} = \Delta u^T M_u \dot{u} + \Delta \alpha^T M_\alpha \dot{\alpha} \quad (4.92)$$

e dall'assumere una metrica basata sull'energia:

$$\delta u^T M_u \dot{u} = \sum_m \delta \varepsilon_m^T \left[ \frac{d^2 \mathcal{E}_m}{d \varepsilon_m^2} \right] \dot{\varepsilon}_m$$

$$\delta \alpha^T M_\alpha \dot{\alpha} = \sum_m \delta \alpha_m^T \left[ \frac{d^2 \mathcal{E}_m}{d \alpha_m^2} \right] \dot{\alpha}_m$$



(4.93)

dove  $\mathcal{E}_m$  è l'energia di deformazione elastica danneggiata associata ad ogni giunto di malta

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{E}_{md} \boldsymbol{\varepsilon}_m = \frac{1}{2} \sigma_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_m$$

essendo  $\mathbf{E}_{md}$  definita dall'equazione (4.88), e la sommatoria estesa a tutti i giunti della muratura.

Otteniamo

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{M}_u \dot{\mathbf{u}} = \sum_m \Delta \sigma_m^T \boldsymbol{\varepsilon}_m = \sum_m \Delta p_b^T \dot{\mathbf{u}}_b$$

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}_\alpha \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 2 \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}_m \frac{\Delta \alpha_m \dot{\alpha}_m}{(1 + \alpha_m)^2}$$

dove le sommatorie sono estese a tutti i mattoni e a tutti i giunti aperti. Ricordando che la correzione  $\mathbf{x}_p$  è stata assunta come una soluzione elastica non danneggiata per l'incremento del carico totale  $\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k$  nella fase di carico, si ottengono le seguenti espressioni per il numeratore e denominatore di  $\dot{\lambda}$  nell'equazione (4.83):

$$\dot{\lambda}_j = - \frac{\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_r}{\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_p} = - \frac{\sum_b \Delta p_b^T \dot{\mathbf{u}}_{br} + 2 \sum_m \boldsymbol{\varepsilon}_m \frac{\Delta \alpha_m \dot{\alpha}_{mr}}{(1 + \alpha_m)^2}}{\sum_m \Delta p_b^T \dot{\mathbf{u}}_{bp}}$$

(4.94)

dove  $\mathbf{u}_{br}$ ,  $\mathbf{u}_{bp}$  sono gli spostamenti del mattone e  $\alpha_{mr}$ ,  $\alpha_{mp}$  sono i parametri di danno del giunto associati alle correzioni  $\mathbf{x}_r$  e  $\mathbf{x}_p$ . Si noti che, essendo sia  $\Delta p_b$  che  $\mathbf{u}_{bp}$  costanti in ogni fase di caricamento, il denominatore può essere calcolato una volta per tutte all'interno della fase.

### 4.5.5 Ulteriori dettagli computazionali

In questo sottocapitolo verranno descritti alcuni secondari, tuttavia pertinenti, dettagli che sono stati considerati nella descrizione precedente.

Prima di tutto consideriamo che lo schema di estrapolazione standard (4.78) non può essere utilizzato per la prima fase incrementale  $x_1 - x_0$ . Abbiamo quindi bisogno di uno schema alternativo, per ottenere il predittore. La scelta più semplice è quella di utilizzare per ogni fase di carico l'extrapolazione lineare

$$\begin{aligned}x_1^{(0)} &= \bar{\lambda} x_p \\ \lambda_1^{(0)} &= \bar{\lambda}\end{aligned}$$

dove  $\bar{\lambda} \ll 1$  comporta che l'incremento di dimensioni sia inizializzato ad una piccola frazione dell'incremento del carico totale eseguito nella fase di carico. Un valore  $\bar{\lambda} = 1/100$  potrebbe essere preso come appropriato, almeno come opzione predefinita.

Non è conveniente prendere una dimensione costante durante l'intero processo incrementale. In effetti, potrebbe essere più efficientemente incrementata in una parte abbastanza lineare della fase di carico, in cui i piccoli passi diventano inutili, ed è diminuita in presenza di forti non linearità, per ottenere una soluzione più accurata e, di solito, una rapida convergenza nel processo di iterazione.

Una semplice, pur efficace, scelta di ottenere un'automatica regolazione della dimensione del passo è quella di estrapolare dal ciclo necessario nel passo precedente inserendo nell'equazione (4.78)

$$\beta_k = 1 + \bar{\beta} \frac{\bar{n} - n_k}{\bar{n} + n_k}$$

dove  $\bar{n}$  è il numero di cicli richiesto di default (diciamo  $\bar{n} = 4 \dots 6$ ),  $n_k$  è il numero di cicli effettivamente eseguito nel k-esimo passo e  $\bar{\beta} < 1$  una costante (si usa  $\bar{\beta} = 0,5$  come impostazione predefinita).

Le condizioni di cessazione costituiscono un importante punto nell'algoritmo di iterazione.

All'interno della nostra soluzione multilivello proposta dobbiamo impostare le seguenti opzioni:

- il termine dell'iterazione globale
- il termine dell'iterazione locale.

Entrambi potrebbero essere convenientemente controllati da una condizione alla norma dell'errore, si veda ad esempio l'equazione (4.6). Possiamo utilizzare differenti norme in ogni differente fase del processo di iterazione, tutte fornite come non-costo prodotto dal processo di soluzione:

- nell'iterazione globale

$$\|r\|_g^2 = r_g^T K_g^{-1} r_g$$

- nell'iterazione locale elemento per elemento

$$\|r\|_e^2 = \sum_e \bar{r}_e^T \bar{K}_e^{-1} \bar{r}_e$$

- nell'iterazione locale mattone per mattone

$$\|r\|_b^2 = \sum_b r_b^T \bar{K}_b^{-1} r_b$$

Una buona scelta di utilizzare queste norme è quella di confrontare attraverso adeguate tolleranze l'errore ad una certa fase di iterazione con l'errore di quella precedente

$$\|r\|_b^2 < C_b \|r\|_e^2$$

$$\|r\|_e^2 < C_e \|r\|_g^2$$

e poi prendere per la cessazione dell'iterazione nel passo incrementale generale la condizione

$$\|r\|_g^2 + \|r\|_e^2 + \|r\|_b^2 < C_g \|p\|_g^2$$

dove  $C_b$ ,  $C_e$  e  $C_g$  sono valori piccoli (abbiamo preso  $C_b = 0,1$ ,  $C_e = 0,2$  e  $C_g = 10^{-8}$  come valori di default nel nostro codice).

L'ultimo dettaglio da discutere è il modo di porre fine alla fase di caricamento. A causa del controllo della dimensione del passo auto adattante utilizzato, non si raggiunge esattamente il valore

finale  $\lambda = 1$  del parametro di carico. Di solito si superano con un valore  $\lambda_{k+1} > 1$ . Quindi abbiamo bisogno di valutare la soluzione a fine carico  $x_{end}$  mediante interpolazione

$$x_{end} = x_k + \frac{1}{\lambda_{k+1}}(x_{k+1} - x_k)$$

In alcuni casi, a causa del comportamento instabile prodotto dalla crescita del danno, il carico non può raggiungere il carico assegnato nella fase finale  $P_k$ . Pertanto, ulteriori controlli devono essere inseriti per far fronte a questo evento. La scelta più semplice e più efficace è quella di prendere in considerazione un criterio basato sugli spostamenti che arresta la fase di carico quando un assegnato spostamento massimo è sorpassato. Anche in questo caso, la soluzione di carico finale è ottenuta da una interpolazione interna dell'ultimo passo incrementale.

Il processo di soluzione è quindi organizzato secondo il diagramma di flusso in fig. 4.14.

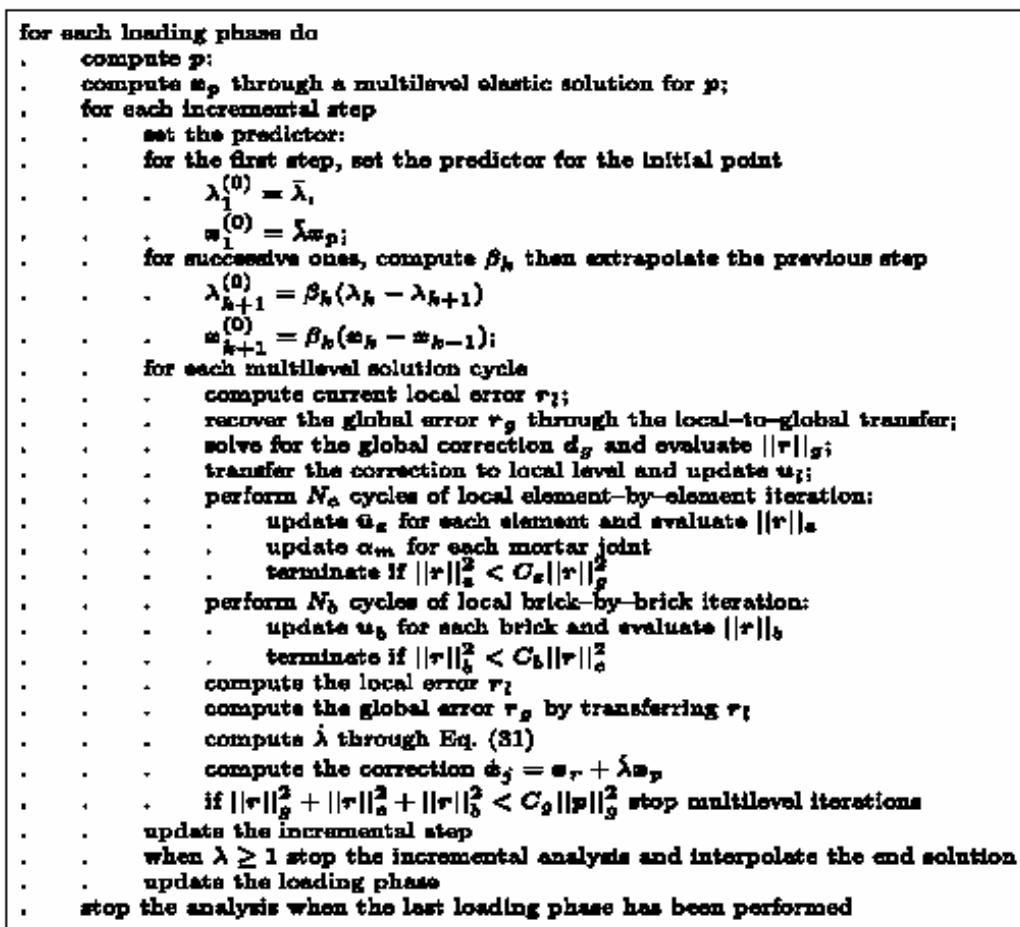


Figura 4.14 – Diagramma di flusso del processo di soluzione proposto

#### 4.5.6 Unicità della soluzione e argomenti correlati

Il processo path-following descritto ci permette di recuperare una soluzione per il seguente problema:

Determinare un percorso di equilibrio  $x [k]$ , corrispondente ad un'assegnata evoluzione del carico  $p [k]$ .

Si noti comunque che, a causa del processo di crescita del danno che rende la risposta strutturale altamente instabile, questo problema non è ben definito per quanto riguarda sia l'esistenza che l'unicità della soluzione. La perdita di unicità è particolarmente evidente nella parte discendente del percorso di equilibrio in cui, almeno due soluzioni incrementali possono essere associate alla diminuzione del carico stesso, una corrispondente ad uno scarico elastico lineare e un'altra ad un aumento del danno (Fig. 4.15).

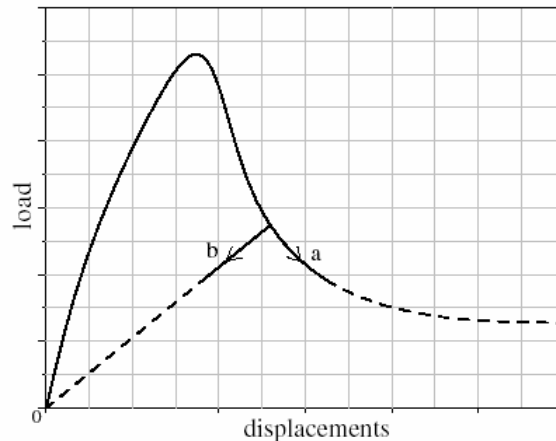


Figura 4.15 – Rappresentazione di due possibili rami, chiamati a e b

In presenza di soluzioni multilivello abbiamo bisogno di alcuni criteri in grado di caratterizzare i livelli desiderati, per esempio quelli che hanno qualche significato meccanico, come proprietà interessanti in presenza di piccole perturbazioni come pure nel ben diverso ma simile contesto del buckling elastico accoppiato. In realtà, noi non disponiamo ancora di un criterio preciso, tuttavia si può dire che siamo interessati a tali branche associate a un possibile buon andamento del processo di deformazione (ad esempio, fare riferimento alla fig. 4.15, ramo a contrario al ramo b). Più precisamente, siamo interessati a rami caratterizzati da un valore positivo del lavoro esterno incrementale

$$\Delta W = p_i^T (x_{k+1} - x_k) > 0 \quad (4.95)$$

dove  $p_i$  è carico attuale analizzato. Questo è esattamente ciò che il path-following è costretto a fornire, una volta che il passo è indirizzato attraverso l'equazione (4.70) per il predittore iniziale.

Vale la pena ricordare che, in realtà, qui sfruttiamo una restituzione intrinseca del processo di soluzione path-following, che è la sua tendenza a saltare biforcazioni secondarie incontrate entro il passo incrementale.

Si noti inoltre che, in presenza di comportamenti instabili, la soluzione recuperata è in gran parte governata da imperfezioni (vale a dire nel nostro caso, le piccole deviazioni nei parametri costitutivi).

È quindi importante che sono destinate ad essere introdotte imperfezioni algoritmiche non supplementari, come quelle indotte da una implementazione asimmetrica dell'aggiornamento del danno. La scelta che facciamo è quella di eseguire l'aggiornamento del danno all'interno dell'iterazione locale elemento per elemento, che ha dimostrato di essere adeguata a tale scopo.

# Capitolo 5

# Test di validazione

## **5.1 Introduzione**

Nel seguente capitolo verranno presentati tre esempi applicativi dell'analisi multilivello presentata nel capitolo precedente.

Il primo esempio è relativo alla modellazione di una parete semplice con apertura proposta da Brasile, Casciaro e Formica in [2].

Il secondo esempio riguarda invece una prova sperimentale condotta da Raijmakers e Vermeltoort in [18] e ripresa da svariati autori nella letteratura nazionale ed internazionale, come ad esempio Lourenço in [13]. L'esempio consiste in una parete in muratura caricata a compressione e a taglio, nel quale si è cercato di riprodurre i dati sperimentali ottenuti da Raijmakers e Vermeltoort.

Il terzo esempio riprende l'esempio precedente, considerando però una parete più tozza della quale si studiano le differenze nel comportamento a compressione e taglio rispetto al caso precedente.

## **5.2 Esempio n°1**

### **5.2.1 Caratteristiche geometriche e meccaniche**



La parete in muratura oggetto di studio è rappresentata in figura (5.1). È una parete in muratura semplice ad una testa con base di 416 cm (16 mattoni) e altezza di 312 cm (48 mattoni). È presente un'apertura di dimensioni di 104 cm x 104 cm.

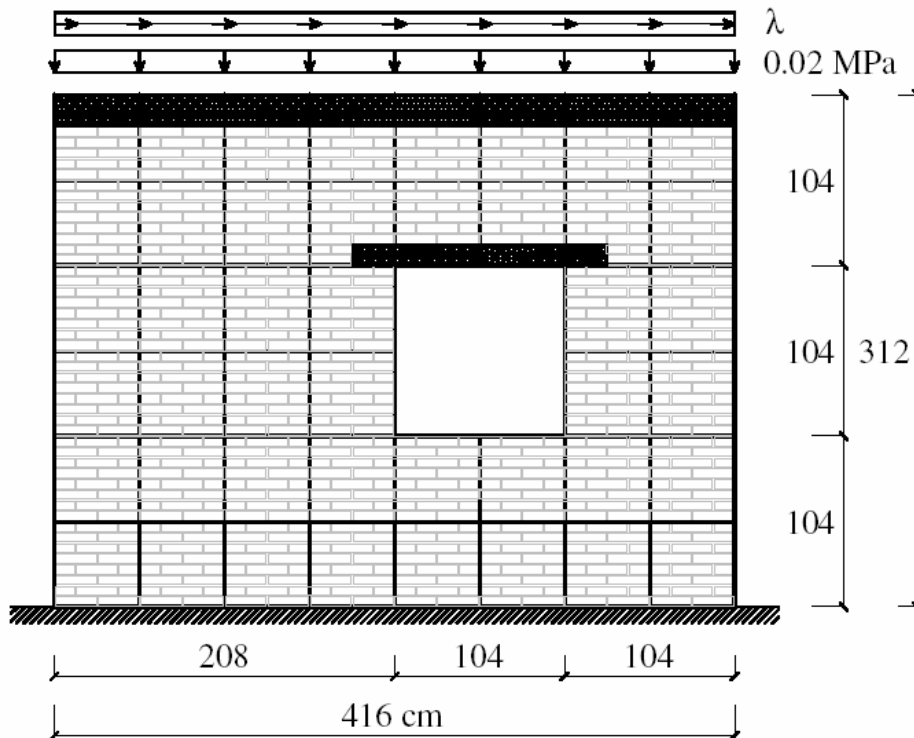


Fig. 5.1 – Geometria della parete in muratura

I mattoni hanno dimensioni 250 mm x 120 mm x 55 mm, mentre lo spessore dei giunti di malta tra i mattoni ha spessore di 10 mm. Le caratteristiche meccaniche dei mattoni, dei giunti di letto e dei giunti di testa sono riportate in Tabella 5.1.

Mortar	$E = 200 \text{ MPa}$ $G = 10 \text{ MPa}$ $\sigma_y = 0.25 \text{ MPa}$ (bed joint) $\sigma_y = 0.05 \text{ MPa}$ (head joint) $\phi = 30^\circ$
Brick	$E = 8000 \text{ MPa}$ $G = 200 \text{ MPa}$ $\sigma_y = 5.00 \text{ MPa}$ $\phi = 30^\circ$

Tabella 5.1 – Caratteristiche meccaniche dei giunti di malta e dei mattoni

La parete è discretizzata con una mesh di 44 macroelementi costituiti da una tessitura interna di 2 mattoni orizzontali e 8 mattoni verticali.

La parete è inoltre completamente incastrata alla base.

Sono stati introdotti inoltre due architravi per simulare la presenza di un architrave al di sopra dell'apertura e la presenza di un cordolo all'altezza del solaio.

Questi due architravi sono stati discretizzati rispettivamente con una fila di 2 mattoni in altezza e 6 mattoni in lunghezza (architrave dell'apertura) e una fila di 3 mattoni in altezza e 16 in lunghezza (architrave di solaio).

I mattoni degli architravi sono stati considerati legati con giunti di malta puramente elastici, aventi modulo elastico normale e modulo elastico tangenziale pari a quelli relativi ai giunti di malta.

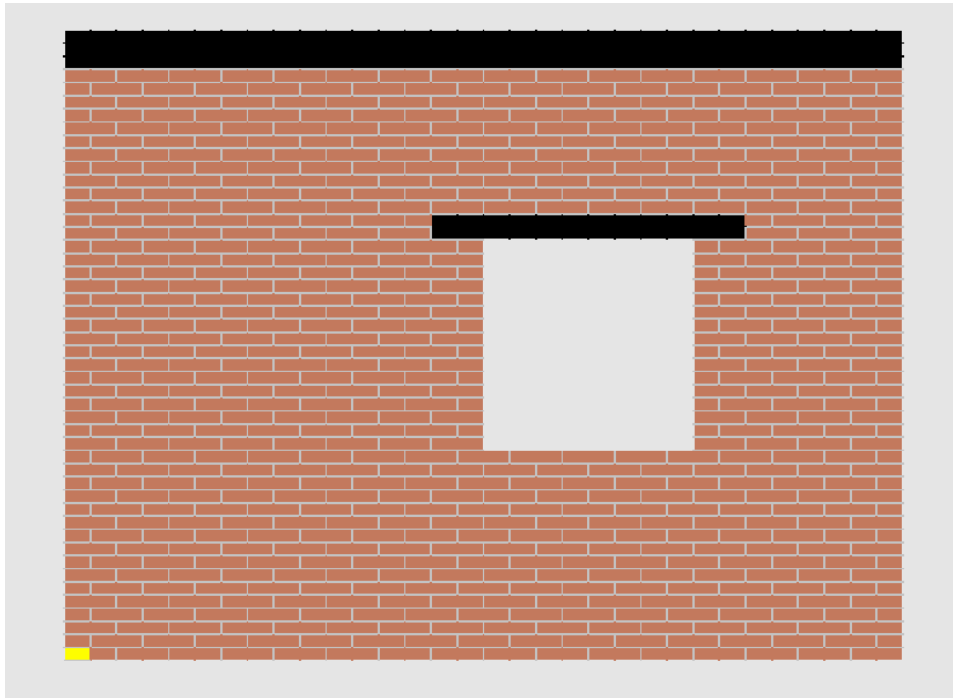


Fig. 5.2 – Visualizzazione della geometria della parete in muratura

La parete è soggetta a due fasi di carico applicate nella parte alta della parete stessa:

- una compressione verticale iniziale arrestata al valore di 0,02 MPa
- un carico di taglio che viene incrementato passo – passo, fino al raggiungimento dello spostamento massimo indicato nel codice di calcolo.

Sia la compressione verticale che il taglio sono applicati a tutti i mattoni appartenenti all'architrave di solaio. Si precisa che il carico è agente su ogni mezzo – mattone, quindi ad esempio il valore di 0,02 MPa dovrà essere riportato in Kg per mezzo – mattone, moltiplicando per lo spessore della parete (12 cm) e per la larghezza della parete (416 cm) e dividendo per il numero di mezzi – mattoni (in questo caso 96 mezzi mattoni dell'architrave superiore). Si ottiene così il valore di 10 Kg ogni mezzo mattone, riportato all'interno del codice di calcolo.

### 5.2.2 Risultati ottenuti

Il software di calcolo riproduce il diagramma forza – spostamento dell'ultimo mattone in alto a destra.

Nel diagramma si può notare una prima fase in cui si ha un comportamento lineare (elastico) fino al raggiungimento di un picco di carico, oltre il quale si ha un comportamento tipo softening fino al raggiungimento del valore di spostamento massimo che è stato impostato nel software.

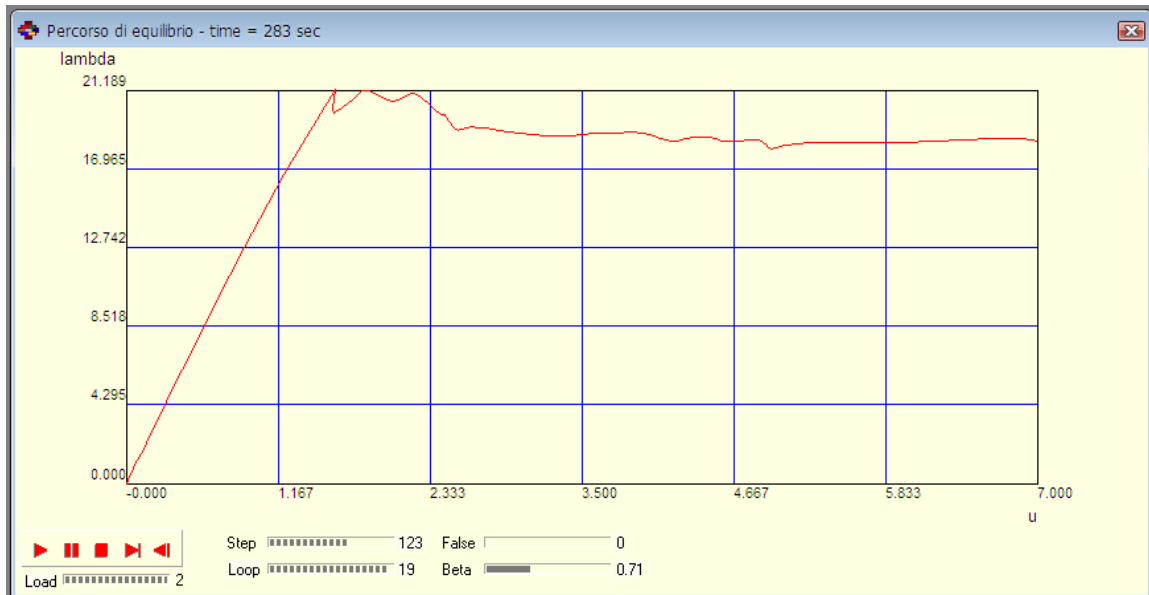


Fig. 5.3 – Percorso di equilibrio

Si noti che il percorso di equilibrio visto in precedenza si riferisce al diagramma carico – spostamento dell'ultimo mattone in alto a destra, a meno di un fattore moltiplicativo di 1,92 utilizzato all'interno del software.

Suddividendo il valore di  $\lambda$  per il carico di taglio assegnato (**10 Kgf**) e per il coefficiente 1,92, e poi moltiplicando il valore ottenuto per 96 mezzi – mattoni (essendo il carico applicato su ogni mezzo mattone dell'architrave di solaio) e riportando tutto in **N/cm**, si ottiene il diagramma carico – spostamento come in [13].

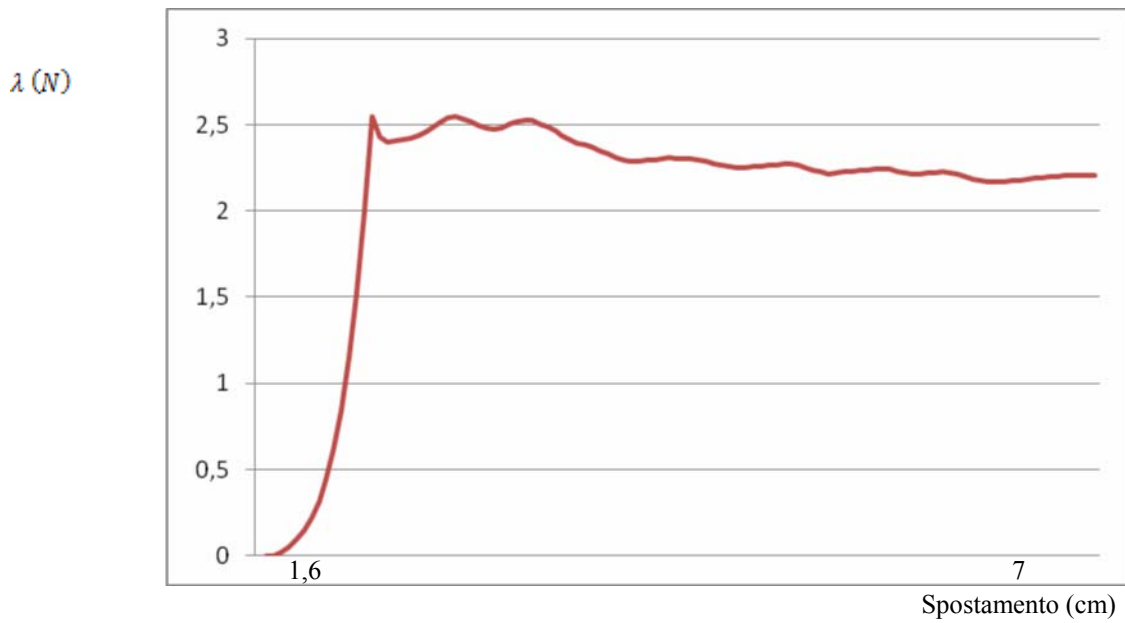


Fig. 5.4 – Percorso di equilibrio

Per quanto riguarda la mappa del danno, si può notare come, all'aumentare del carico, si formano importanti fessurazioni nella parte bassa della parete e nei due spigoli opposti dell'apertura (Figg. 5.5 – 5.6); ciò risulta perfettamente compatibile con il tipo di test che si è svolto.

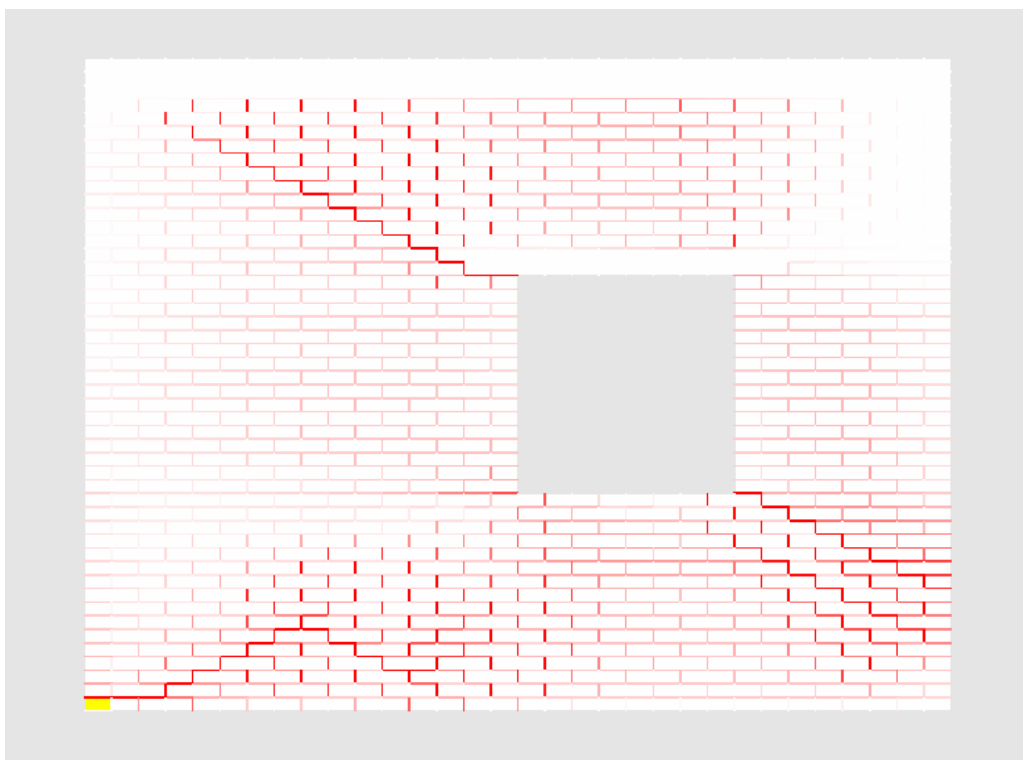


Fig. 5.5 – Mappa del danno

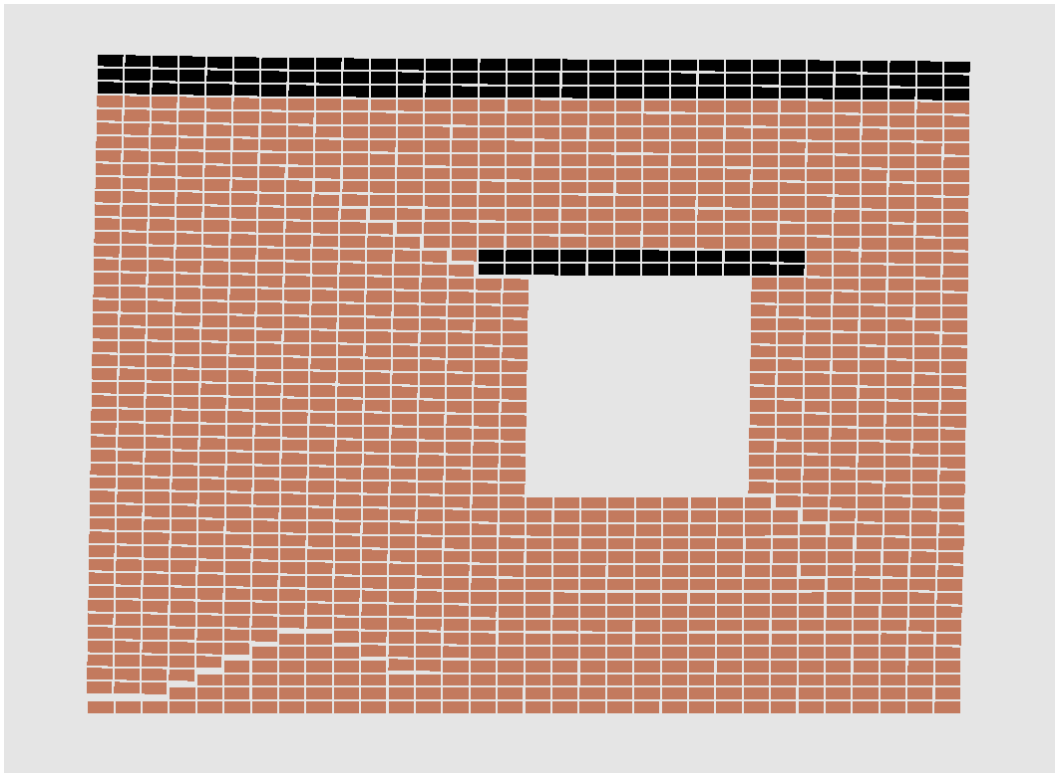


Fig. 5.6 – Deformata della parete

## 5.3 Esempio n°2

### 5.3.1 Caratteristiche geometriche e meccaniche

La parete in muratura oggetto di studio ha dimensioni di 990 mm di lunghezza e 1000 mm di altezza, essendo costituita da 18 corsi di quattro mattoni ogni corso. La parete è costituita da mattoni pieni in argilla di dimensioni 210 mm x 152 mm x 100 mm e giunti di malta di spessore di 10 mm. La parete non presenta aperture, ma presenta un architrave superiore nell'ultimo corso di mattoni.

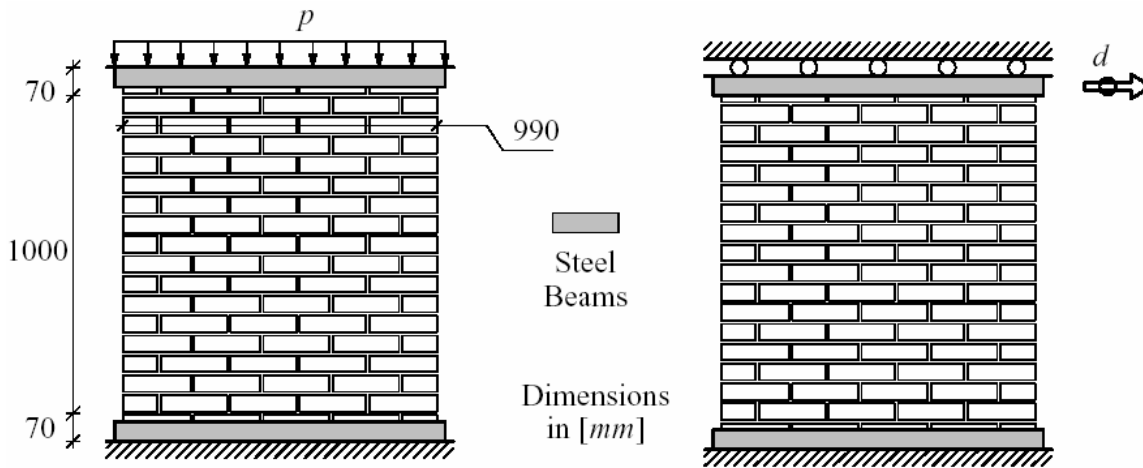


Fig 5.7 – Geometria della parete in muratura

Le caratteristiche meccaniche dei mattoni e dei giunti di malta sono riassunte in tabella 5.2.

<b>Brick</b>	$E = 16700 \text{ N/mm}^2$
	$G = 7261 \text{ N/mm}^2$
	$\sigma_y = 2 \text{ N/mm}^2$
	$\phi = 37^\circ$

<b>Mortar</b>	$E = 7820 \text{ N/mm}^2$
	$G = 3430 \text{ N/mm}^2$
	$\sigma_y = 0,25 \text{ N/mm}^2$
	$\phi = 37^\circ$

Tabella 5.2 – Caratteristiche meccaniche dei mattoni e dei giunti di malta.

Alle pareti sono applicate inizialmente delle forze distribuite uniformi di precompressione verticale, poi è applicato un carico orizzontale che via via aumenta all'aumentare del passo di carico raggiunto, sotto controllo di spostamento  $d$ , il quale insiste sopra ai due architravi superiore ed inferiore e preclude qualsiasi movimento verticale.





Fig 5.8 – Percorso di danno.

Per quanto riguarda il comportamento della parete, si sviluppano inizialmente due fessure orizzontali nella parte alta e nella parte bassa della parete; dopodichè si sviluppa una fessura diagonale attraverso i giunti di testa e i giunti di letto.

Il confronto tra i diagrammi forza-spostamento numerici e sperimentali è mostrata in figura (5.9).

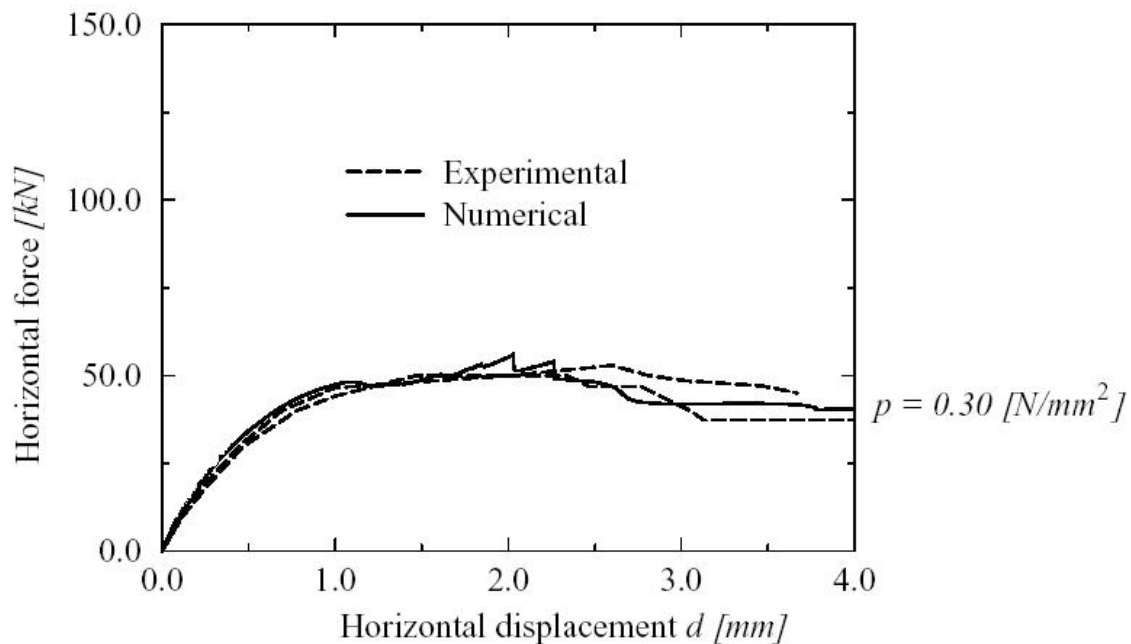


Fig 5.9 – Diagramma carico – spostamento orizzontale:  
confronto tra i risultati numerici e i risultati sperimentali.

Il comportamento sperimentale è riprodotto in maniera soddisfacente e il carico di collasso può essere stimato in un range del 15% dei valori sperimentali.

Il comportamento della parete è mostrato in maniera chiara dal modello come illustrato nelle figure (5.10 a-b, 5.11 a-b).

In queste figure vengono riportati la deformata e la mappa del danno per spostamenti massimi pari rispettivamente a 2 mm e a 4 mm.

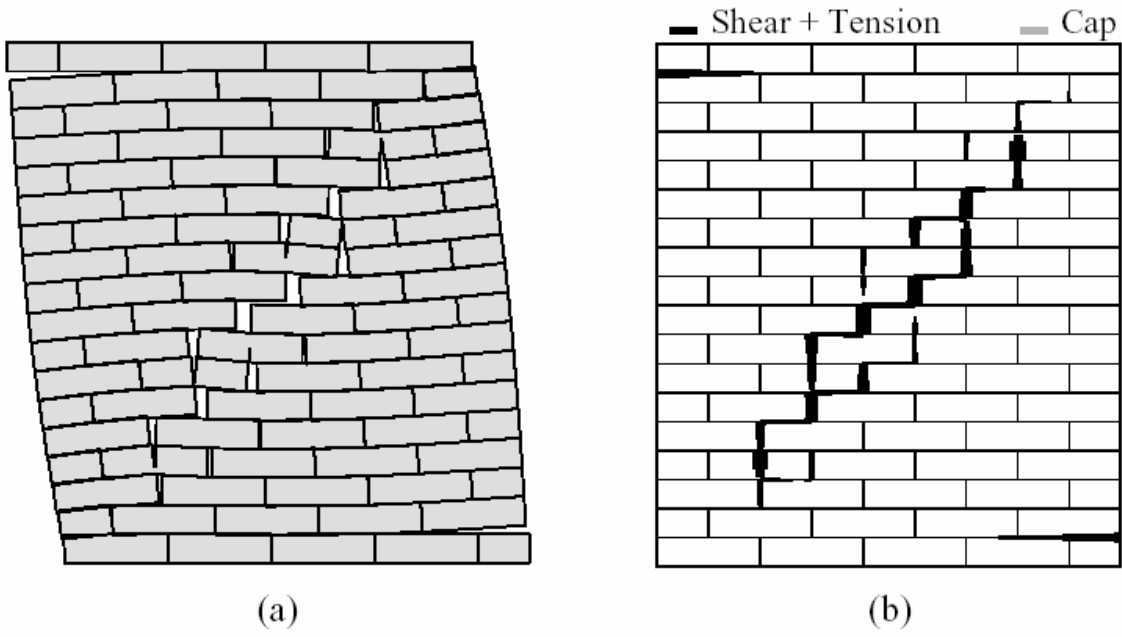


Fig. 5.10 – Comportamento della parete con spostamento massimo pari a 2 mm: (a) deformata, (b) danno.

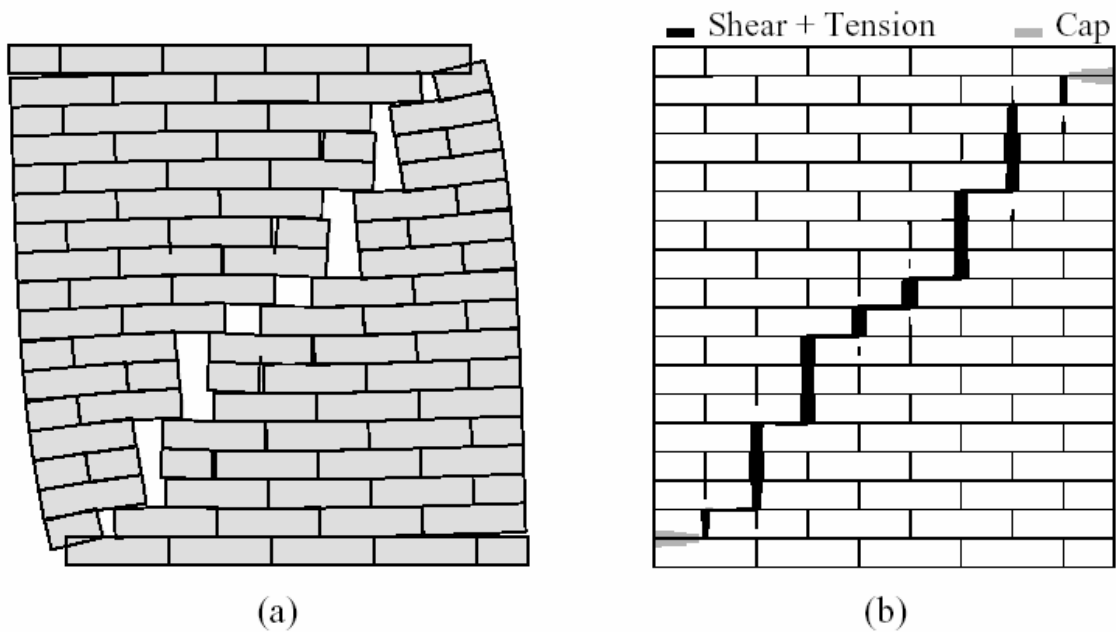


Fig. 5.11 – Comportamento della parete con spostamento massimo pari a 4 mm: (a) deformata, (b) danno.

### **5.3.3 Confronto dei risultati sperimentali con i risultati ottenuti con l'analisi multilivello**

La parete oggetto di studio è stata quindi analizzata attraverso l'approccio multilivello.

Per cercare di riprodurre il più fedelmente possibile il comportamento della parete oggetto di studio, sono state fatte alcune semplificazioni:

- non potendo il software rappresentare geometricamente i mezzi mattoni, si è deciso di rappresentare la parete come costituita da 4 mattoni di base e 18 in altezza, invece che 4 mattoni e mezzo di base
- essendo la parete di default già incastrata alla base, si è deciso di eliminare la trave in acciaio presente nell'esempio di Rajmakers e Vermeltfoort posta nella parte inferiore della parete.
- essendo la forza orizzontale di taglio applicata alla base presa dalla reazione d'incastro, si è deciso di eliminarla e di caricare la parete a taglio solamente dall'alto
- non potendo rappresentare muretti i cui mattoni di testa siano a spostamento differenziale verticale impedito, si è deciso di inserire un architrave costituito da 7 file di mattoni in testa alla parete.

La parete si presenta quindi come riportato in figura (5.12).

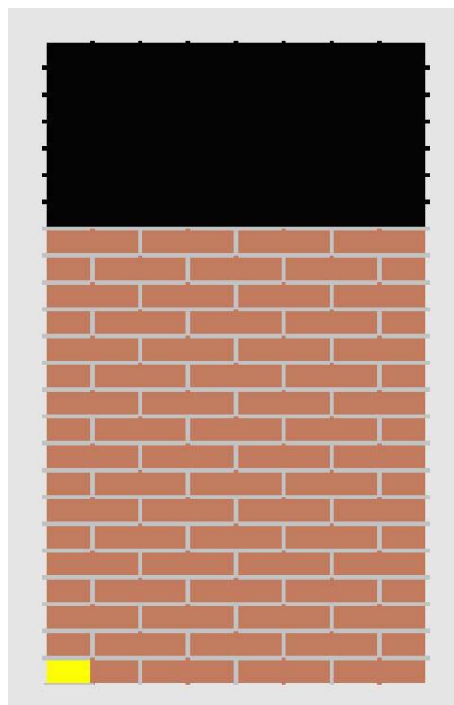
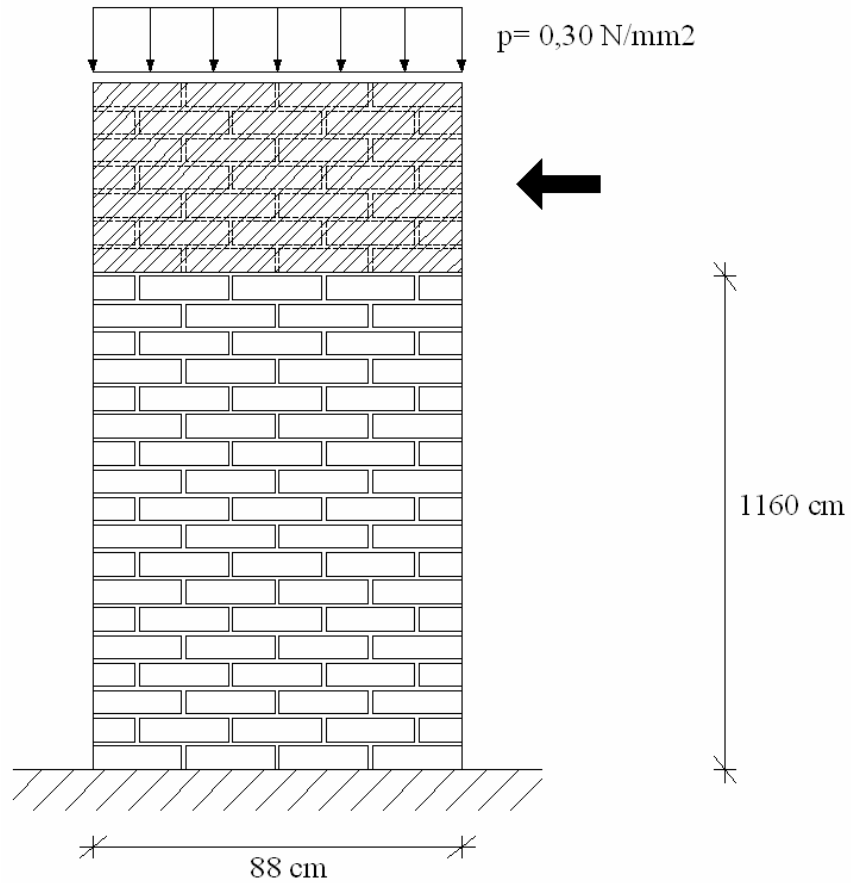


Fig. 5.12 – Geometria della parete.

Le caratteristiche meccaniche dei mattoni e dei giunti di malta sono state mantenute come nell'esempio di Raijmakers e Vermeltoort.

Per quanto riguarda i carichi di compressione verticale e taglio, si è ragionato come nell'esempio precedente e cioè considerando i carichi come Kg ogni mezzo – mattone.

Di seguito viene riportato il diagramma carico – spostamento ottenuto dall'analisi (Fig. 5.13).

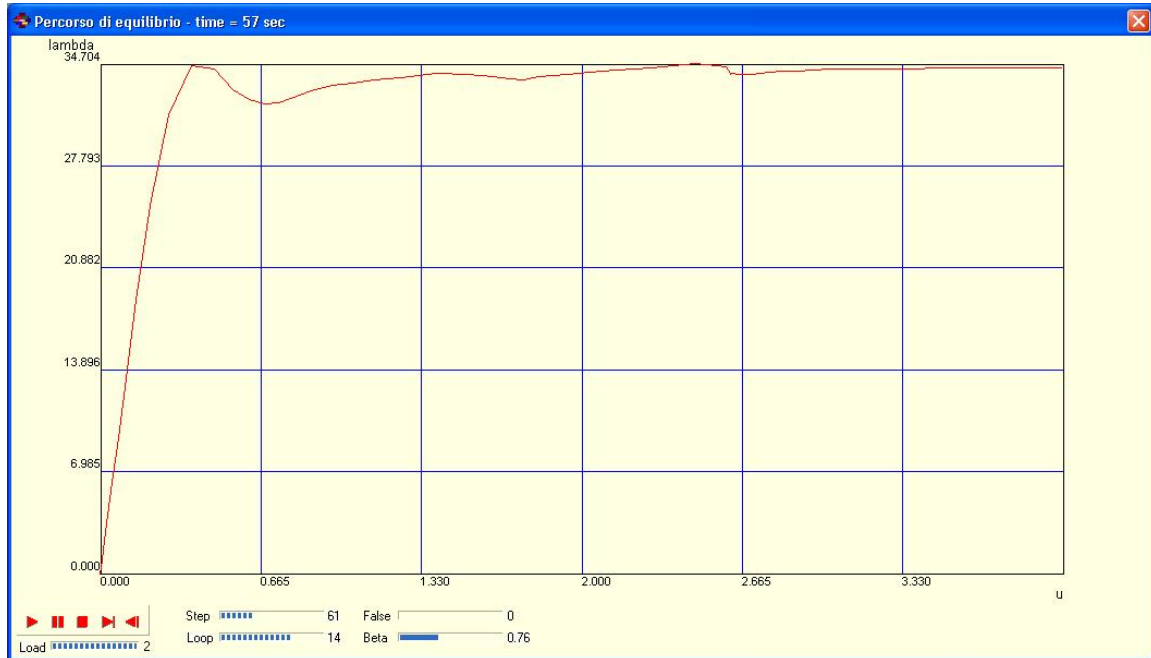


Fig. 5.13 – Percorso di equilibrio carico – spostamento della parete.

Si noti che il percorso di equilibrio visto in precedenza si riferisce al diagramma carico – spostamento dell'ultimo mattone in alto a destra, a meno di un fattore moltiplicativo di 1,92 utilizzato all'interno del software.

Suddividendo il valore di  $\lambda$  per il carico di taglio assegnato (50 Kg) e per il coefficiente 1,92, e poi moltiplicando il valore ottenuto per 56 mezzi – mattoni (essendo il carico applicato su ogni mezzo mattone dell'architrave di solaio) e riportando tutto in  $N$ , si ottiene il diagramma carico – spostamento seguente:

Carico (Kg)

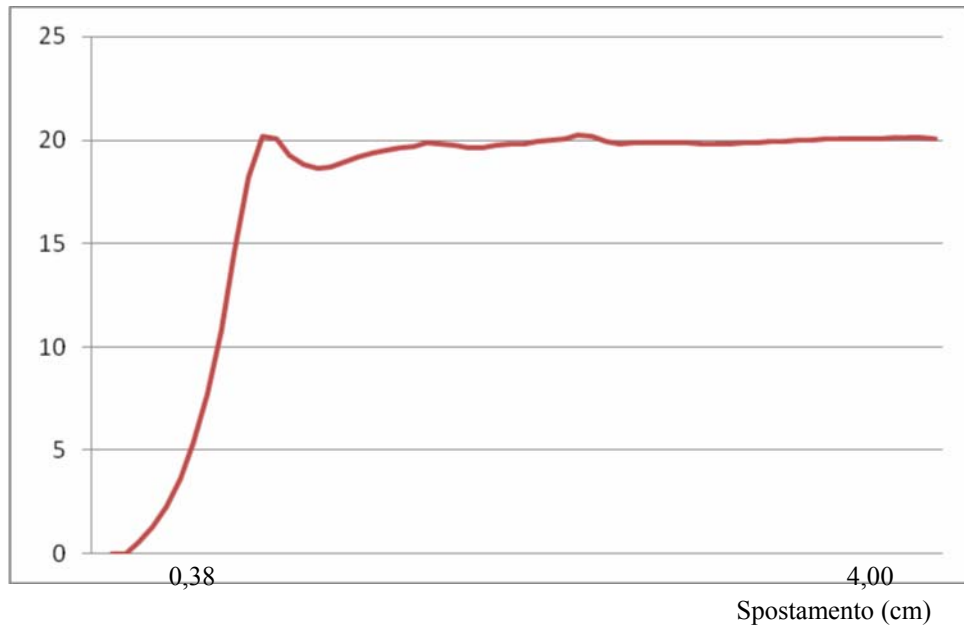


Fig. 5.14 – Percorso di equilibrio carico – spostamento della parete.

Di seguito vengono riportate la mappa del danno e la deformata ottenute dall'analisi (Figg. 5.15 – 5.16).

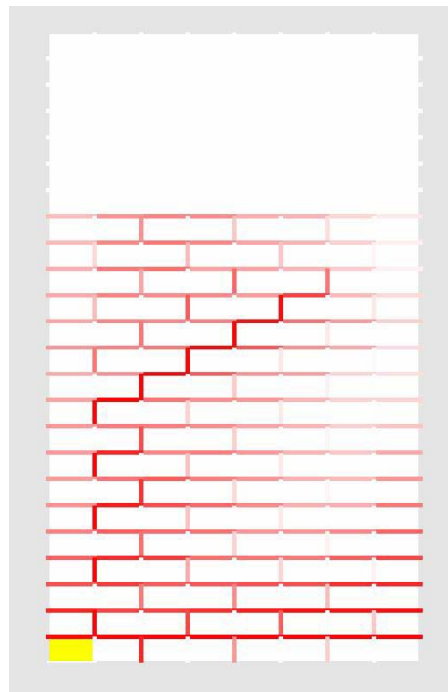


Fig. 5.15 – Mappa del danno nella parete.

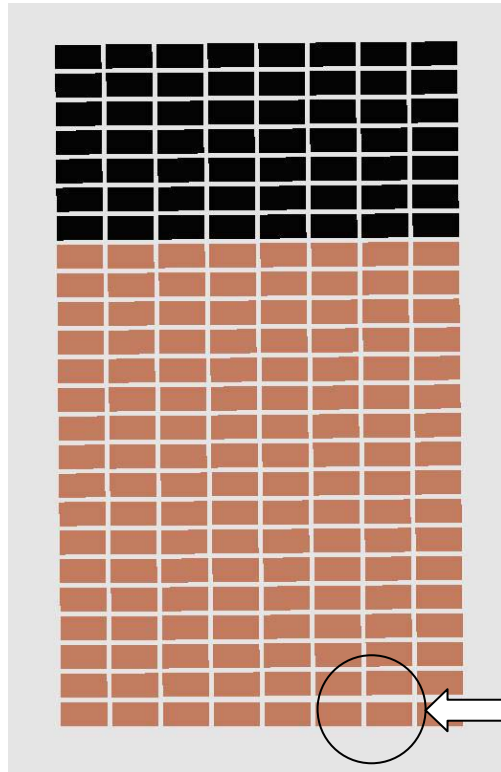


Fig. 5.16 – Deformata della parete.

Come si può notare dalle figure precedenti, la riproduzione del test svolto da Raijmakers e Vermeltoort risulta essere deficitaria, in quanto si sta già partendo da grosse semplificazioni iniziali, che indubbiamente influiscono sui risultati finali del test.

Come riportato in precedenza, il codice di calcolo utilizzato per l'analisi multilivello non prevede analisi su muretti i cui mattoni di testa abbiano uno spostamento differenziale verticale impedito.

La semplificazione adottata, e cioè di inserire un architrave in testa alla parete, porta ad avere una significativa rotazione in testa alla parete, come si può notare dal diagramma della deformata.

Inoltre, nel test di Lourenço i valori di rigidezza e di resistenza dei materiali si riferiscono a test su provini condotti in modo standard.

Questi risultano non corretti per essere utilizzati nel codice multilivello, in quanto i valori richiesti si riferiscono all'interfaccia del giunto.

Quindi il test svolto risulta, da un punto di vista meccanico e geometrico, significativamente diverso dai dati sperimentali e dal test numerico svolto da Lourenço.

## **5.4 Esempio n°3**

### **5.4.1 Caratteristiche geometriche e meccaniche e risultati dell'analisi**

La parete in muratura vista nell'esempio precedente viene modificata nella geometria, come si vede in figura (5.17). Vengono cioè tolte n°9 file di mattoni in altezza.



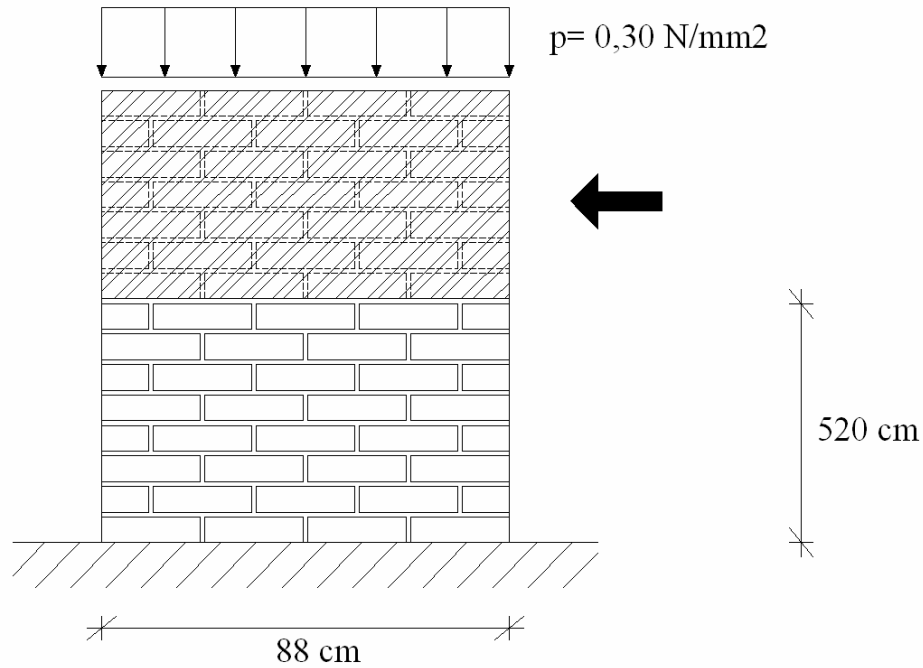


Fig 5.17 – Geometria della parete in muratura

Le caratteristiche geometriche e meccaniche dei mattoni e dei giunti di malta vengono mantenute come nell'esempio precedente e sono riassunte in tabella 5.3.

<b>Brick</b>	$E = 16700 \text{ N/mm}^2$
	$G = 7261 \text{ N/mm}^2$
	$\sigma_y = 2 \text{ N/mm}^2$
	$\phi = 37^\circ$

<b>Mortar</b>	$E = 7820 \text{ N/mm}^2$
	$G = 3430 \text{ N/mm}^2$
	$\sigma_y = 0,25 \text{ N/mm}^2$
	$\phi = 37^\circ$

Tabella 5.3 – Caratteristiche meccaniche dei mattoni e dei giunti di malta.

Le semplificazioni fatte nell'esempio precedente vengono mantenute anche in questo esempio.

La parete, modellata attraverso il codice di calcolo, si presenta quindi come riportato in figura (5.18).

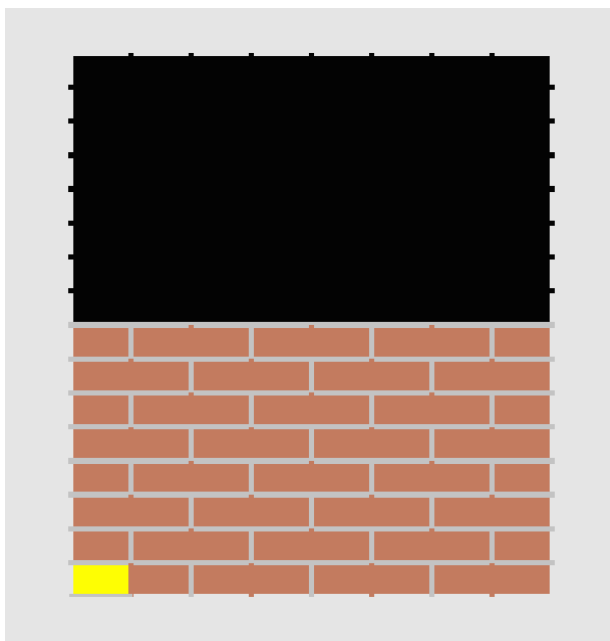


Fig. 5.18 – Geometria della parete.

Per quanto riguarda i carichi di compressione verticale e taglio, si è ragionato come nell'esempio precedente e cioè considerando i carichi come Kg ogni mezzo – mattone.

Di seguito viene riportato il diagramma carico – spostamento ottenuto dall'analisi (Fig. 5.19).

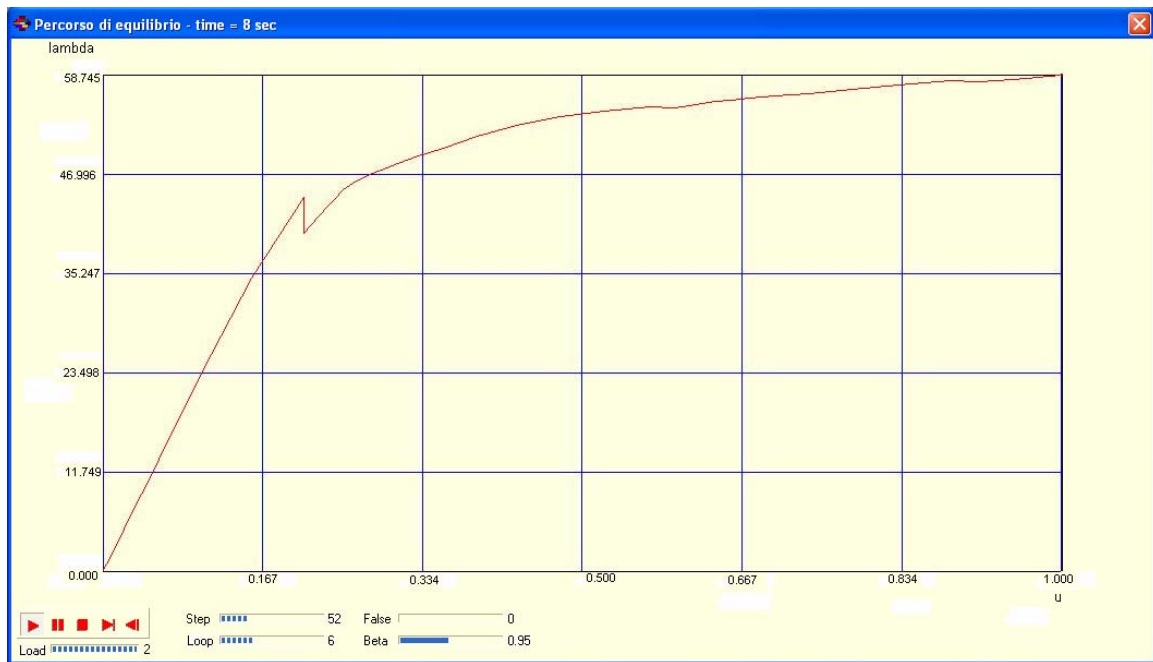


Fig. 5.19 – Percorso di equilibrio carico – spostamento della parete.

Si noti che il percorso di equilibrio visto in precedenza si riferisce al diagramma carico – spostamento dell’ultimo mattone in alto a destra, a meno di un fattore moltiplicativo di 1,92 utilizzato all’interno del software.

Suddividendo il valore di  $\lambda$  per il carico di taglio assegnato (50 Kg) e per il coefficiente 1,92, e poi moltiplicando il valore ottenuto per 56 mezzi – mattoni (essendo il carico applicato su ogni mezzo mattone dell’architrave di solaio) e riportando tutto in  $N$ , si ottiene il diagramma carico – spostamento seguente:

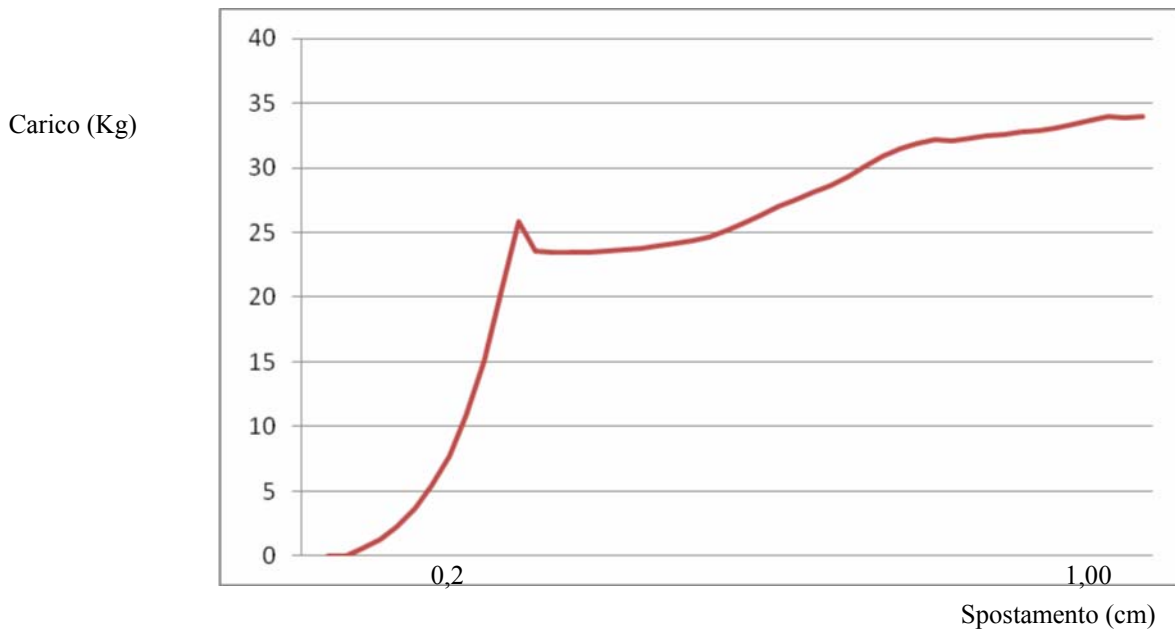


Fig. 5.20 – Percorso di equilibrio carico – spostamento della parete.

Di seguito vengono riportate la mappa del danno e la deformata ottenute dall'analisi (Figg. 5.21 – 5.22).

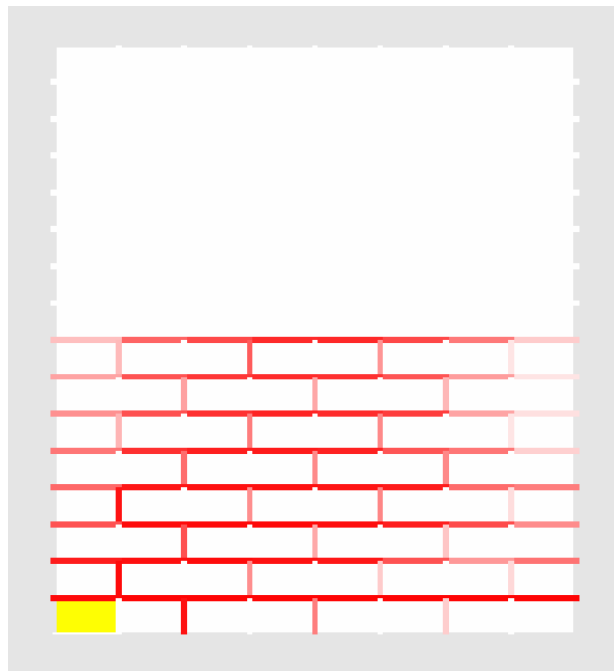


Fig. 5.21 – Mappa del danno nella parete.

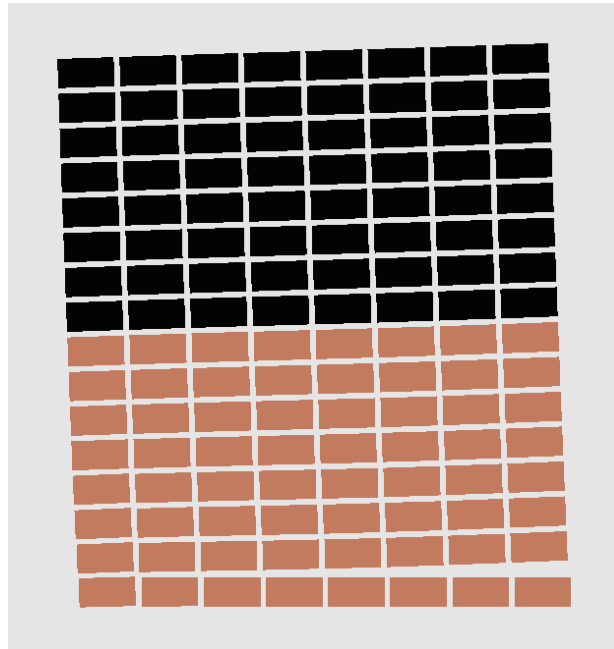


Fig. 5.22 – Deformata della parete.

Rispetto all'esempio precedente, essendo la parete più tozza, si risente maggiormente dell'effetto del taglio sulla parete, come si può notare dall'ampia fessura che si forma alla base del pannello.

Infine, per quanto riguarda la fessura diagonale, non vi è più la formazione di una fessura a gradini come nell'esempio precedente, ma la mappa del danno in direzione diagonale risulta con un danneggiamento molto più distribuito dei giunti di malta.

# Conclusioni

La modellazione di strutture in muratura risulta molto complicata a causa della sua non linearità geometrica e meccanica.

La muratura è un sistema costruttivo che oggi risulta molto diffuso, nonostante, nelle nuove costruzioni, si preferisca fare affidamento a sistemi costruttivi basati su cemento armato e acciaio, aventi un comportamento strutturale più affidabile.

Diversi studiosi ed esperti hanno cercato di modellare il problema della modellazione di strutture in muratura attraverso diversi tipi di approccio.

I metodi che sono stati studiati e sviluppati si differenziano in tre grandi gruppi:

- metodi basati sull'analisi del singolo piano, come ad esempio il metodo POR, capostipite dei metodi di modellazione del comportamento della muratura
- metodi che utilizzano una modellazione a macroelementi
- strategie ed analisi multilivello.

In questo lavoro, dopo aver analizzato i principali metodi di modellazione delle strutture in muratura, è stata discussa nel dettaglio la strategia e l'analisi multilivello di strutture in muratura.

La strategia beneficia dell'uso di due livelli di descrizione (locale e globale) del comportamento del pannello di muratura all'interno di uno schema di soluzione iterativo.

Il livello globale consiste in una discretizzazione agli elementi finiti dei blocchi di mattoni (macroelementi) con elementi rettangolari a 8 nodi, ogni nodo avente tre parametri di spostamento (due di traslazione e uno di rotazione).

La caratterizzazione meccanica degli elementi, vale a dire la sua matrice di rigidezza, si ottiene in modo algebrico direttamente sulle basi del livello locale.

Il livello locale, che definisce il comportamento meccanico della muratura, modella l'interazione tra ogni due mattoni per mezzo della risposta non lineare dei giunti di malta, che vengono modellati come molle a contatto.

La trasformazione tra i due livelli è stata ottenuta garantendo la compatibilità del campo di spostamento all'interfaccia dell'elemento e imponendo una condizione di equilibrio linearizzata per il campo di spostamento interno allo stesso elemento.

Questa scelta consente di definire sia la matrice di trasferimento tra il modello globale e il modello locale che la matrice di rigidezza dell'elemento.

Il processo di soluzione è basato su una strategia path-following, combinata con una procedura iterativa a due livelli: una correzione lineare basata su una soluzione diretta di Cholesky è applicata al livello globale; due diverse correzioni sono applicate a livello locale, una elemento per elemento ed una mattone per mattone, essendo la prima anche usata per ottenere un aggiornamento dei parametri di danno.

La strategia proposta deve essere considerata come una risposta parziale al problema di analisi di edifici in muratura, dal momento che è appositamente sviluppata per analisi nel piano di pannelli in muratura.

I test numerici effettuati fino ad oggi hanno dato una buona corrispondenza tra i risultati sperimentali e i risultati numerici ottenuti.

Tutte le simulazioni numeriche hanno sottolineato come la risposta del muro (in termini di taglio alla base) dipende principalmente dalla forza di attrito del letto del giunto di malta.

Questo lavoro vuole essere un contributo per la creazione di strategie adeguate per l'analisi di strutture su scala reale, estendendo il problema nei riguardi del comportamento fuori dal piano delle strutture in muratura e risolvendo i problemi relativi al reperimento di dati corretti per attuare le analisi e al vincolamento delle pareti in muratura che si sono riscontrati nei test numerici svolti, in modo da riuscire ad implementare una strategia multilivello (anche con un numero maggiore di livelli di descrizione) adatta allo studio di qualsiasi tipologia di struttura in muratura.



# Bibliografia

- [1] AUGELLO L., (2007): “Analisi Pushover adattiva di strutture in muratura mediante il Metodo Sam”, *Tesi di laurea presso D.I.S.T.A.R.T.*, Bologna.
- [2] BRASILE S., CASCIARO R., FORMICA G., (2007): “Multilevel approach for brick masonry walls-Part I: a numerical strategy for the nonlinear analysis”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196, 4934-4951.
- [3] BRASILE S., CASCIARO R., FORMICA G., (2007): “Multilevel approach for brick masonry walls-Part II: on the use of equivalent continua”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 196, 4801-4810.

- [4] CATTARI S., (2007): “Modellazione a telaio equivalente di strutture esistenti in muratura e miste muratura-c.a.: formulazione di modelli sintetici”, *Tesi di dottorato presso D.I.C.A.T.*, Genova.
- [5] D’ASDIA P., VISKOVIC A., (1994): “L’analisi sismica degli edifici in muratura”, *Ingegneria Sismica*, Anno XI, N.1, 32-42.
- [6] FORMICA G., SANSALONE V., CASCIARO R., (2002): “A mixed solution strategy for the nonlinear analysis of brick masonry walls”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (51-52), 5847-5876.
- [7] FORMICA G., (2004): “Multilevel analysis of masonry buildings”, *Tesi di dottorato presso Università degli Studi della Calabria*.
- [8] GALASCO A., LAGOMARSINO S., PENNA A., (2002): *Programma di calcolo TREMURI: Analisi sismica di edifici 3D in muratura*, Università di Genova.
- [9] GAMBAROTTA L., LAGOMARSINO S., (1997a): “Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications.” *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 26, 423-439.
- [10] GAMBAROTTA L., LAGOMARSINO S., (1997b): “Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: the continuum model and its applications.” *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 26, 441-462.
- [11] GAMBAROTTA L., LAGOMARSINO S., (1993): “A microcrack damage model for brittle materials”, *Int. J. Solid Struct.* 30 (2), 177-198.

- [12] LOURENÇO P.B. (1994): “Analysis of masonry structures with interface elements: Theory and applications”, Report 03-21-22-0-21, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- [13] LOURENÇO P.B. (1996): “Computational strategies for masonry structures”, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [14] LUCIANO R., SACCO E., (1997): “Un modello di danno per le murature”, Cassino.
- [15] MACCHI G., MAGENES G, (2002): “Strutture in muratura”, Capitolo 13, Ingegneria delle strutture a cura di E.Giangreco, UTET.
- [16] MAGENES G., CALVI G.M., (1997): “In-plane seismic response of brick masonry walls”, *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, Vol. 26, pp. 1091-1112.
- [17] PELA' L. (2009): “Continuum damage model for nonlinear analysis of masonry structures”, Tesi di dottorato presso Dipartimento di Ingegneria, Università di Ferrara.
- [18] RAIJMAKERS T.M.J., VERMELTFOORT A.Th., (1992): “Deformation controlled tests in masonry shear walls”, Part. 1, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands
- [19] RAIJMAKERS T.M.J., VERMELTFOORT A.Th, (1993): “Deformation controlled tests in masonry shear walls”, Part. 2, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands
- [20] SVETONI M., (2005): “Analisi pushover tridimensionale di strutture in muratura con il metodo Sam”, *Tesi di laurea presso D.I.S.T.A.R.T.*, Bologna.

[21] TALARICO P.L.: “Modelli Sintetici per l’analisi non lineare degli edifici in muratura”, *Tesi di laurea presso Dipartimento di Strutture, Università della Calabria.*

[22] TOMAZEVIC M., (1978): “The computer program POR” Report ZRMK (in Sloveno)

[23] TURNŠEK V., CACOVIC F., (1971): “Some experimental results on the strength of brick masonry walls”, Proc. of the 2nd Intern. Brick Masonry Conference, Stoke-on-Trent, pp. 149-156.

# Ringraziamenti

A conclusione di questa tesi e di questi cinque anni di studio, desidero ringraziare le persone che mi sono state accanto in questo difficile e intenso periodo, culminato con la grande soddisfazione di avere raggiunto un importante obiettivo: essere riuscito a laurearmi in Ingegneria Civile a soli 23 anni ed aver reso reale uno dei sogni della mia gioventù.

In primis, desidero ringraziare i miei genitori, Marina e Walter, che mi hanno dato questa grande possibilità e che mi hanno sostenuto e spronato sempre. Credo che questo risultato possa renderli orgogliosi e li gratifichi per i sacrifici economici ma soprattutto morali che hanno sostenuto in questi anni.

Grazie a Giada, che ha percorso al mio fianco questi lunghi e intensi anni, che mi ha sempre capito e mi ha sempre sostenuto, anche nei momenti più difficili. Ha sempre creduto che potessi realizzare il mio sogno e sono sicuro che sia infinitamente felice e orgogliosa perché gli sforzi che abbiamo fatto insieme sono serviti a qualcosa.

Grazie ai miei nonni, Pier Paolo e Febiana, ai quali sono tanto affezionato, che hanno sempre capito i miei tanti impegni e mi hanno sempre spronato nel continuare a studiare per raggiungere il mio obiettivo.

Grazie ad Enrica ed Agostino, che mi hanno accolto in casa loro come un secondo figlio, e che hanno condiviso gioie e dolori di questi anni.

Grazie ai miei compagni di corso, che qui non cito per evitare di scordare qualche nome, ma che ringrazio per l'aiuto, i confronti, le risate, la spensieratezza con cui abbiamo passato tante giornate insieme. Spero tanto che la nostra amicizia possa continuare nel futuro, anche quando le nostre strade gioco forza si divideranno.

Grazie, infine, ai miei amici, con i quali siamo sempre rimasti in contatto nonostante gli infiniti impegni che ho avuto in questi anni.

È stata dura, ma posso dire: ce l'ho fatta!!!

Daniele Nanetti



