

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

Scuola di Ingegneria e Architettura
Corso di laurea in Ingegneria Informatica

**RICOSTRUZIONE DI IMMAGINI
DA INFORMAZIONI SPETTRALI
INCOMPLETE**

Tesi di Laurea in Ingegneria Informatica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Fabiana Zama

Presentata da:
Alessandro Battistoni

3^a Sessione
Anno Accademico 2012/2013

A chiunque mi abbia fatto sorridere...

Introduzione

Nel presente lavoro si analizzano alcuni aspetti fondamentali del 'Compressed Sensing' (anche noto come Compressive Sampling). Compito della teoria del Compressed Sensing (che ora in avanti chiameremo per convenienza CS) é quello di sfruttare proprietà comuni tra i segnali, primi fra tutti i concetti di 'sparsity' e 'compressibility', per avviare dei processi di acquisizione e ricostruzione utilizzando un piccolo numero di campioni. Questo consente di introdurre approcci alternativi al teorema del campionamento di Nyquist-Shannon al fine di prelevare da un segnale un certo numero di campioni che permettano la ricostruzione pressoché esatta di quest'ultimo.

Nei primi due capitoli si riportano alcuni richiami di base relativi la rappresentazione dei segnali nei domini spazio-tempo e di Fourier ed alla ricostruzione dei segnali mediante la soluzione di problemi di ottimizzazione. Si presentano quindi, nel terzo capitolo, i metodi proposti di Candes-Tao [1, 4, 13] ed alcune piú recenti estensioni[6]. Infine, nel quarto capitolo, si riportano i risultati di alcuni test svolti con funzioni matlab contenute nelle librerie *l1-magic* e *RecPc*.

Indice

Introduzione	i
1 Teoria alla base del Compressive Sensing	1
1.1 Serie di Fourier	1
1.2 Teorema del Campionamento di Nyquist	2
1.3 Cenni di geometria e algebra lineare	3
1.3.1 Vettori e Spazi Vettoriali	4
1.3.2 Norme ed Energia di un Segnale	4
2 Compressed Sensing	7
2.1 Teoria CS : background	7
2.2 Questione di Campionamento : da Shannon ai problemi convessi	8
2.3 Segnali sottocampionati	8
2.3.1 Segnali comprimibili	8
2.3.2 Rappresentazione dei segnali e matrici stabili	10
2.3.3 Ricerca di algoritmi di ricostruzione : le norme	11
2.4 Approfondimenti: matrici stabili e Total Variation	13
3 Matrici Circolanti: un'estensione alla teoria di Candes-Tao	15
3.1 Matrici Circolanti e di Toeplitz	16
3.2 Matrici di Costruzione : le matrici PC	17
3.3 Algoritmi di ricostruzione	17

4 Applicazioni	19
4.1 Matlab: introduzione al programma	19
4.2 Ricostruzioni di immagini : le teorie di Candes-Tao	20
4.3 Ricostruzioni di immagini: le matrici circolanti	22
4.4 Prestazioni	25
Conclusioni	28
A Prima Appendice	29
B Seconda Appendice	31
Bibliografia	33

Elenco delle figure

1.1	Aliasing: Sovrapposizione segnale a frequenze di campionamento basse	3
1.2	Geometrie delle norme L1 e L2	6
3.1	Tipologie di matrici PC	17
4.1	Fantasma S-L con minimizzazione norma L1	21
4.2	Fantasma S-L con minimizzazione TV	21
4.3	Fantasma S-L 256x256 al 10%	22
4.4	Risultati Shepp-Logan con 'equality constraints'	23
4.5	Ricostruzione immagine 850x600 campionata al 20%.	23
4.6	Risultati Wall.jpg metodo 'equality constraints'	23
4.7	Fantasma S-L 128x128 al 5% e 10%	24
4.8	Ricostruzione 'Mondo.jpg' al 20%	24
4.9	Risultati fantasma S-L metodo 'square penalties'	25
4.10	Risultati Mondo.jpg metodo 'square penalties'	25
A.1	ricostruzione segnale con cvx tool	29
A.2	immagine originale	30
A.3	ricostruzione immagine palme.jpg con PC complessa	30
B.1	minimizzazione norma L1-L2 tramite cvx tool	31
B.2	codice per l'utilizzo di matrici RPC	32

Capitolo 1

Teoria alla base del Compressive Sensing

In questa sezione verranno esaminati i concetti matematici essenziali per la comprensione delle teorie CS: il teorema di campionamento di Shannon-Nyquist, la trasformata di Fourier e i concetti alla base dell'algebra lineare.

1.1 Serie di Fourier

Come già detto in precedenza, è conveniente fornire strumenti per l'analisi dei segnali nel dominio spazio-tempo e di Fourier. Un mezzo essenziale per lo studio di un segnale periodico in periodo T è dato dalla Serie di Fourier :

Definizione 1.1. Dato un segnale $x(n)$, periodico di periodo N scritto come somma di esponenziali tale che:

$$\mathbf{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \cdot e^{\frac{j2\pi kn}{N}} \quad (1.1)$$

sviluppando l'esponente e ricordando che

$$\exp j2\pi n = 1 \quad (1.2)$$

possiamo rappresentare $x(n)$ come Serie Tempo-Discreta di Fourier (DTFS)

$$x(n) = \sum_{k \in \langle N \rangle} X(k) \cdot \exp \frac{j2\pi kn}{N} \quad (1.3)$$

Applicando la formula inversa otteniamo i $X(k)$ coefficienti di Fourier obbedienti alla periodicità $a_{k+N} = a_k$. Quindi possiamo dire che tutto il segnale periodico $x(n)$ è descritto dai suoi coefficienti di Fourier dai quali è possibile ottenere una perfetta ricostruzione del segnale.

1.2 Teorema del Campionamento di Nyquist

Per comprendere a fondo gli algoritmi alla base della teoria CS è indispensabile soffermarsi sul teorema fondamentale per l'acquisizione dell'informazione e del segnale: il teorema di Shannon-Nyquist. Esso stabilisce la frequenza minima necessaria per campionare un segnale, preservando le informazioni necessarie per ricostruirlo. Dato un segnale $x(t)$ e la sua trasformata $X(jw)$ tale che :

$$X(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt} dt \quad (1.4)$$

con $x(t)$ integrabile in tutto il suo dominio, studiamo la banda di frequenze caratterizzante $X(jw)$: cerchiamo per quali valori di w la nostra trasformata è nulla. Il seguente teorema stabilisce che:

Teorema 1.2.1. *Data $X(jw)$, trasformata di Fourier di un segnale $x(t)$, nulla per $|w| \geq w_M$ e con $w_S = 2\pi/T$ tale che*

$$w_S > 2w_M \quad (1.5)$$

allora gli n -campioni $x(nT)$ permettono una costruzione del segnale originale priva di errori.

Definendo quindi con B la banda passante del nostro segnale possiamo dire che la frequenza di campionamento da prendere per garantire la ricostruzione è dell'ordine di $2B$. Dalla figura

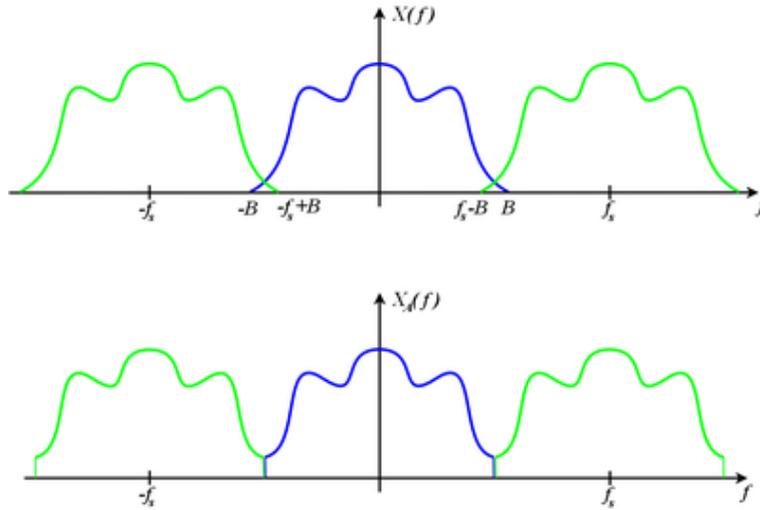


Figura 1.1: Aliasing: Sovrapposizione segnale a frequenze di campionamento basse

è possibile comprendere il fenomeno che viene a crearsi quando la frequenza di campionamento presa per la ricostruzione del segnale non rispetta il teorema di Nyquist-Shannon: l'aliasing. La banda presa B_S non è sufficiente a rappresentare il segnale: ciò comporta una sovrapposizione di dati che perturba il segnale originale non permettendone l'esatta ricostruzione.

1.3 Cenni di geometria e algebra lineare

Le tematiche affrontate in questa tesi si preoccuperanno della ricostruzione di un generico segnale ad una o due dimensioni. Tale segnale verrà visto come generico vettore incluso in un determinato spazio vettoriale, modificato (o più precisamente compresso) e ricostruito tramite algoritmi che prevedono l'utilizzo di elementi alla base dell'algebra lineare (somme di spazi vettoriali, norme etc..). E' quindi utile definire gli elementi base della geometria analitica per comprendere a pieno gli argomenti presenti nei capitoli successivi e le operazioni elementari sfruttate per implementare gli algoritmi di ricostruzione di un generico segnale. In seguito verrà brevemente spiegato

il concetto di vettore e le entità principali che ruotano attorno ad esso, per fornire al lettore una visione globale più completa.

1.3.1 Vettori e Spazi Vettoriali

Definiamo uno spazio vettoriale come una struttura algebrica contenente

- un campo
- un insieme di elementi chiamati vettori
- due operazioni primitive : somma , prodotto scalare

Un campo è un generico insieme non vuoto avente due operazioni primitive e nel quale ogni suo elemento ammette l'inverso. In questo elaborato incontreremo svariate volte il campo dei numeri reali \mathfrak{R} e quello dei numeri complessi \mathfrak{C} ma saranno presenti (soprattutto nelle generalizzazioni dei teoremi) anche campi N -dimensionali come \mathfrak{R}^N . I vettori sono degli elementi specifici dello spazio vettoriale e possono essere sfruttati tramite le operazioni primitive del campo di appartenenza: somma vettoriale e prodotto scalare. La somma vettoriale di due vettori 'v', 't' in un generico spazio K^N produce un vettore risultato 's' tale che

$$s_i = v_i + t_i \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.6)$$

e gode della proprietà commutativa, associativa e dell'elemento neutro. Il prodotto scalare di un vettore 'v' ed un generico valore λ produce un vettore risultato 'p' tale che

$$p_i = \lambda v_i \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.7)$$

e gode della proprietà associativa, distributiva e dell'elemento neutro.

1.3.2 Norme ed Energia di un Segnale

Introduciamo infine due strumenti dell'algebra lineare essenziali per l'implementazione degli algoritmi di ricostruzione segnali: la norma e l'energia di

un segnale. Definiamo col termine norma una funzione in grado di assegnare ad ogni vettore (zero escluso) di un generico spazio vettoriale una lunghezza positiva.

Definizione 1.2. Indichiamo con norma di un vettore 'x' N-dimensionale la seguente funzione

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ con } p = 1, 2, \dots, \infty; \quad (1.8)$$

che verifica le seguenti condizioni considerando uno spazio vettoriale S:

- $\|x\| > 0 \forall x \in S$ e $\|x\| = 0$ se $x=0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ con λ scalare
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Riportiamo per completezza i casi più importanti: le norme L1 de L2.

Norma L1:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.9)$$

Norma L2:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2} \text{ con } i = 1, 2, \dots, N; \quad (1.10)$$

La norma utilizzata più frequentemente è la norma L2: solitamente, quando il pedice della norma non viene indicato, è sottointeso che si stia lavorando in norma L2 (notazione $\|x\|$).Rimanendo in tale caso definiamo brevemente anche il concetto di Energia di un Segnale.

Definizione 1.3. Dato un generico segnale $s(t)$ indichiamo con E_s l'energia di $s(t)$ tale che

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) d(t) \quad (1.11)$$

Vedremo nei capitoli successivi come la scelta della tipologia di norma (ristretta nello specifico ai casi in cui $p = 0,1,2$) giochi un ruolo fondamentale in fase di ricostruzione segnale. Ciò è dovuto a causa della natura geometrica delle norme (in figura vengono mostrati i casi delle norme L1 e L2).

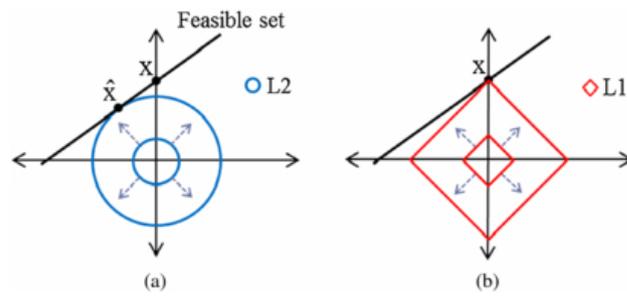


Figura 1.2: Geometrie delle norme L1 e L2

Capitolo 2

Compressed Sensing

Dal teorema di Nyquist-Shannon si può dedurre che il numero di campioni necessario per ricostruire un segnale è dettato dalla larghezza della banda del segnale stesso; specificatamente per le immagini, il numero di campioni necessario corrisponde alla risoluzione desiderata dell'immagine (al numero dei pixel). E' ovvio che, già lavorando con un'immagine dell'ordine dei 700x800, il numero dei campioni risulta assai elevato. L'obiettivo delle teorie CS sta appunto nel trovare algoritmi che rappresentino l'immagine in una forma 'compressa' riducendo drasticamente il numero dei campioni necessari alla sua ricostruzione.

2.1 Teoria CS : background

Le prime teorie sul Compressive Sampling risalgono agli anni ottanta, quando Santosa e Symes fornirono i primi algoritmi per la ricostruzione di treni di segnali 'sparsi' basati sulla minimizzazione della norma l_1 [1]. Dal 2006, grazie agli studi di E.Candes, J.Romberg an T.Tao, queste teorie vennero approfondite e successivamente applicate in ogni branca della scienza concernente l'acquisizione dati ed il campionamento. Tuttora si è alla ricerca di nuovi algoritmi di ottimizzazione allo scopo di fornire strumenti utili alla ricostruzione di segnali.

2.2 Questione di Campionamento : da Shannon ai problemi convessi

Molti formati moderni di compressione immagini, come JPEG2000, rivelano che la maggior parte dei segnali, fissata una certa base, hanno una rappresentazione 'sparsa'[2, 4](sono dipendenti dalla combinazione lineare di un certo numero di vettori strettamente minore al valore imposto da Nyquist). Da ciò si deduce che, anzichè la totalità dei campioni, basterebbe trasmettere questo piccolo insieme di coefficienti per rappresentare con estrema precisione il segnale in questione. Normalmente per acquisire questo insieme si computa la totalità dei coefficienti di trasformazione e si codificano solo quelli di maggior valore scartando i rimanenti. Sorge quindi una domanda : è possibile evitare l'acquisizione di tutto il segnale (che in molti casi può essere onerosa in termini di tempi di elaborazione e risorse da computare) fornendo una rappresentazione già 'compressa' del segnale? Obiettivo della teoria CS è sfruttare appunto i concetti di 'sparsity' e 'compressibility' per lavorare su forme compresse di segnali codificando solo gli elementi (coefficienti) necessari alla sua ricostruzione. Vedremo in seguito il concetto di segnale 'K-sparse' e le metodiche per svincolarci dal limite dei campioni posto dal teorema di Nyquist tramite la risoluzione di semplici problemi di ottimizzazione convessa.

2.3 Segnali sottocampionati

2.3.1 Segnali comprimibili

Il concetto di sparsità di un segnale sta alla base della teoria sulla compressione dei segnali: per comprenderlo a pieno utilizziamo direttamente un esempio chiarificatore:

Definizione 2.1. Sia x un segnale unidimensionale tempo-discreto a valori reali; esso può essere visto come un vettore $N \times 1$ nel dominio \mathcal{R}^N ed ogni suo

elemento è rappresentato da $x[n]$ con $n = 1, 2, \dots, N$ (nel nostro caso possiamo estenderci nel campo bidimensionale delle immagini includendo la seconda dimensione in un'unico vettore unidimensionale).

Quindi ogni segnale può essere rappresentato nello spazio \mathfrak{R}^N come collezione di vettori $N \times 1$ $[\psi_i]_{i=1}^N$. Assumendo per semplicità una base ψ ortonormale di dimensioni $N \times N$ ed avente i vettori ψ_i come colonne, possiamo dare una rappresentazione alternativa al nostro segnale \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N s_i \psi_i \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = \Psi \mathbf{s} \quad (2.1)$$

dove \mathbf{s} è il vettore colonna $N \times 1$ dei coefficienti di rilievo $s_i = \langle x, \psi_i \rangle = \psi_i^T x$. E' evidente che \mathbf{x} ed \mathbf{s} rappresentano egualmente il segnale: la prima nel dominio spazio-tempo, la seconda nel dominio ψ . Definiamo ora il segnale \mathbf{x} 'K-sparse'[1] se è rappresentabile da una combinazione lineare di K vettori di base; ciò significa che solo K coefficienti s_i sono diversi da zero mentre i restanti (N-K) sono uguali a zero. Definiamo anche \mathbf{x} 'compressibile' se dalla 2.1 otteniamo solo pochi coefficienti di gran valore mentre la maggior parte assumono valori piccoli. Il concetto di sparsità di un segnale porta quindi alla nascita di codifiche di trasformazione. Tuttavia quest'ultime comportano dei svantaggi in termini di risorse utilizzate e di tempistiche computazionali: occorre innanzitutto codificare tutti gli N coefficienti per poi selezionare solo i K di interesse (logicamente sbagliato in quanto, oltre al problema dell'elevato numero che N potrebbe assumere, gli N-K coefficienti a zero andrebbero comunque scartati); inoltre occorre inizializzare un'ulteriore ricerca dei K coefficienti all'interno di N. La teoria CS, come già detto nella precedente sezione, si occupa di fornire una rappresentazione già compressa del segnale prima della fase di acquisizione dati, ovviando ai svantaggi della ricerca dei K coefficienti di interesse.

2.3.2 Rappresentazione dei segnali e matrici stabili

Occorre quindi trovare una rappresentazione del segnale di ingresso dipendente da un numero K strettamente minore del numero massimo di campioni utili.

Definizione 2.2. Consideriamo il problema generico della ricostruzione di un vettore $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^N$ tramite M misurazioni lineari tale che:

$$y_m = \langle \mathbf{x}, \varphi_m \rangle \quad \text{con } m = 1, \dots, M \quad \text{o} \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2.2)$$

L'obiettivo è di campionare \mathbf{x} con M vettori φ_m contro gli N possibili; particolarmente interessante è il caso in cui $M \ll N$. A prima vista risolvere il problema sembra impossibile in quanto si è di fronte a un sistema di equazioni indeterminato ma, supponendo che il segnale sia 'comprimibile' (dipendente da un numero di gradi di libertà strettamente minore di N), il discorso cambia. Sfruttando la 2.1 nella 2.2 possiamo dire che:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} = \Phi \Psi \mathbf{s} = \Theta \mathbf{s} \quad (2.3)$$

dove la Θ , matrice $M \times N$ descrivente gli $M < N$ vettori utili per la rappresentazione del segnale, è indipendente da \mathbf{x} . Il problema si suddivide allora in due ambiti: trovare una matrice stabile cioè una matrice che rispetti la Restricted Isometry Property (ne parleremo in questa sezione) per la rappresentazione e trovare un algoritmo di ricostruzione del segnale valido. Dalle condizioni della 2.2 occorre trovare una matrice di ricostruzione Θ che ci permetta di risalire al segnale N -dimensionale \mathbf{x} dalle $M < N$ misurazioni possibili (il vettore \mathbf{y}). Ciò è possibile se \mathbf{x} è 'K-sparse' e, nel caso fossero note le posizioni dei K coefficienti diversi da zero, basterebbe imporre $M \geq K$ per risolvere il problema. Condizione sufficiente per garantire una Θ ottimale, dato un generico vettore 'v' ed una $\epsilon > 0$ è:

$$1 - \epsilon \leq \frac{\|\Theta v\|_2}{\|v\|_2} \leq 1 + \epsilon \quad (2.4)$$

dove v è un qualsiasi vettore che condivide le stesse K -entrate. Ovviamente, in generale, le K -posizioni dei coefficienti diversi da zero non sono note a

priori; tuttavia, il soddisfacimento della 2.4 garantisce comunque una Θ stabile sia per un segnale 'compressibile' che per i K-sparse. Questa condizione è definita col termine RIP (Restricted Isometry Property). Altra condizione strettamente collegata alla RIP è la 'incoherence' per la quale (ricordando che $\Theta = \Phi\Psi$) i vettori colonna ϕ_i di Φ non possono rappresentare la sparsità dei vettori colonna ψ_i di Ψ . Occorre quindi costruire una matrice ψ che rispetti la 2.3 e la 2.4 per ogni N su K combinazioni possibili di vettori di misurazione y. Fortunatamente è stato dimostrato che scegliendo una ψ casuale vengono rispettati sia i requisiti dell'incoherence sia quelli dettati dalla RIP. Nello specifico, selezionando gli elementi della ψ seguendo una distribuzione uniforme Gaussiana (i.i.d) con media uguale a zero e varianza pari a $\frac{1}{N}$ possiamo verificare che la RIP è rispettata se è valida

$$M \geq CK \log\left(\frac{N}{K}\right) \ll N \quad (2.5)$$

con C costante di piccolo valore. Conseguentemente alla RIP verificata possiamo allora dire che dei generici segnali compressibile e K-sparse di lunghezza N possono essere ricostruiti con M misurazioni Gaussiane casuali.

2.3.3 Ricerca di algoritmi di ricostruzione : le norme

Stabilito un metodo per la costruzione di una ψ che soddisfi i requisiti di incoerenza e della RIP, occorre implementare un algoritmo per la ricostruzione del segnale compresso. L'obiettivo è quindi partire dal vettore di misurazioni y, prendere M misurazioni all'interno di esso, recuperare la matrice ψ e Φ e procedere alla ricostruzione del segnale x di lunghezza N (o in alternativa ricostruire il vettore dei coefficienti sparsi s ricordando la 2.1). Tentiamo quindi di trovare uno specifico s' soluzione della nostra ricostruzione tale che $\Theta s' = \mathbf{y}$. Purtroppo, dato che $M < N$, ci troviamo di fronte ad un problema di indeterminazione di s' in quanto, considerando un generico vettore r nello spazio nullo $\mathfrak{N}(\Theta)$ vale la relazione

$$\Theta(s' + \mathbf{r}) = \Theta s' = \mathbf{y} \quad (2.6)$$

Lo studio quindi mira a trovare il vettore dei coefficienti sparsi nello spazio $H = \aleph(\Theta) + s$ di dimensioni N-M; ci troviamo di fronte d un problema di ottimizzazione convessa nel quale avranno vitale importanza le norme. Dalla sfruttiamo il concetto di norma per ricavarci un s' che soddisfi i nostri requisiti. Sfruttando la minimizzazione della norma L2 nello spazio si interesse H, cioè trovare un s_m tale che

$$s_m = \operatorname{argmin}(\|s'\|_2) \text{ con } \Theta s' = \mathbf{y} \quad (2.7)$$

porta a delle ricostruzioni non soddisfacenti in quanto non viene trovato uno specifico vettore K-sparse ma piuttosto un vettore s_m contenente un'elevato numero di elementi diversi da zero. Si opta allora per un approccio che sfrutti la norma L0. Come nel caso precedente si cerca una soluzione s_m nello spazio H nel tentativo di ricostruire un vettore K-sparse. Purtroppo in questo caso, nonostante la norma L0 sia di facile interpretazione in quanto coincidente col valore K del generico segnale K-sparse, risulta onerosa in termini di tempi di elaborazione in quanto necessita della posizione dei K coefficienti di interesse (ciò si traduce in una dispendiosa ricerca tra tutte le N su K combinazioni possibili). Sfruttando invece la norma L1 è invece dimostrato[7] che è possibile recuperare con probabilità elevata il vettore K-sparse di interesse usando solo $M > CK \log(\frac{N}{K})$ misurazioni Gaussiane.

Dalla figura 1.2 possiamo analizzare la natura geometrica delle norme L1 e L2; considerando il vettore \mathbf{x} come vettore di ricerca nello spazio H del punto di contatto s' soluzione della nostra ricostruzione, possiamo notare immediatamente come, nel caso della norma L2 il punto d'intersezione non coincida con il vettore K-sparse ricercato, ma con un generico x' soluzione diversa da quella attesa (come già detto nel precedente paragrafo). Utilizzando invece la minimizzazione della norma L1 vediamo come s' coincida col punto d'intersezione tra il vettore di ricerca \mathbf{x} e la regione di validità della norma. In questo caso s' è soluzione valida alla nostra ricostruzione ed è individuabile con alta probabilità eseguendo M misurazioni Gaussiane casuali.

2.4 Approfondimenti: matrici stabili e Total Variation

Nella sezione 2.3.2 abbiamo affrontato il problema della costruzione di una matrice di ricostruzione stabile Θ che soddisfi la 2.3 e la 2.4 e abbiamo stabilito che prendendo Θ come matrice casuale Gaussiana la probabilità che questa rispetti le condizioni della RIP sono dell'ordine di $1 - O(e^{-\gamma^N})$ per un certo $\gamma > 0$ e per un certo numero di misurazioni M che soddisfino la 2.5. Tuttavia esistono altre tipologie di misurazioni[1, 10] che garantiscono la costruzione di una Θ valida con alta probabilità :

- misurazioni binarie: supponiamo che le entrate della nostra Θ siano campionate seguendo una distribuzione simmetrica Bernoulliana $P(\Theta_{ki} = \pm \frac{1}{\sqrt{K}}) = \frac{1}{2}$. È dimostrato che la matrice di costruzione soddisfa la 2.4 con la stessa probabilità del caso Gaussiano. Ciò è deducibile dal fatto che le proprietà di ricostruzione perfetta di un segnale M -sparse con M che soddisfa la 2.5 valgono anche per misurazioni binarie[4].
- misurazioni di Fourier: supponiamo Θ matrice parziale di Fourier ottenuta selezionando K righe casuali e normalizzando successivamente le colonne. Gli studi di Candes, Tao[4] stabiliscono che la 2.4 è dimostrata con $M \leq C \cdot K / \log N^6$. Recenti studi di Rudelson and Vershynin[5] hanno ulteriormente abbassato il valore di M sull'ordine del $C \cdot K / \log N^4$
- misurazioni incoerenti : supponiamo di ottenere Θ selezionando K righe da una matrice ortogonale $N \times N$ U e normalizzando le colonne. È dimostrato che la 2.3 è soddisfatta con probabilità prossima a quelle del caso Gaussiano per

$$M \leq C \cdot \frac{1}{\mu^2} \cdot \frac{K}{\log N^4} \quad (2.8)$$

dove $U = \Phi \Psi^*$ e $\mu = \sqrt{N} \max_{i,j} \langle \phi_i, \psi_j \rangle$

Introduciamo infine un utile strumento per l'implementazione di algoritmi di ricostruzione : la Variazione Totale[3]. Definiamo TV :

$$TV(f) = \int_{\Omega} |\nabla f(s)|^2 ds \quad (2.9)$$

dove Ω è il dominio di appartenenza e $f(s)$ la specifica funzione di interesse. Trattando nel nostro caso $f(s)$ come discreta (in quanto segnale o matrice) e Ω come dominio in termini di dimensioni massime del suddetto segnale , la 2.9 è riconducibile a

$$TV(x) = \sum_{ij} \sqrt{(D_{h;ij}x)^2 + (D_{y;ij}x)^2} = \sum_{ij} \|D_{ij}x\|_2 \quad (2.10)$$

con x immagine $N \times N$, i e j coefficienti che variano da 1 a N e D_{ij} interpretabile come gradiente discreto di x . Vedremo nei capitoli successivi come la minimizzazione della TV sia ampiamente sfruttata per la risoluzione di problemi lineari inerenti agli algoritmi di ricostruzione.

Capitolo 3

Matrici Circolanti: un'estensione alla teoria di Candes-Tao

Le teorie CS alla base delle ricerche di Candes, Romberg e Tao stabiliscono che per ricostruire un generico segnale N -dimensionale x , K -sparse, occorre implementare una matrice di Ψ ed un algoritmo di ricostruzione del segnale.[1, 2] Tale algoritmo consiste in un problema di minimizzazione della norma l_1 di s che, ricordando la 2.1 , si traduce in

$$\min_x \|\Psi x\|_1 \text{ tale che } \Theta x = y \quad (3.1)$$

Nel precedente capitolo sono state discusse le possibili matrici Θ atte alla ricostruzione del segnale ed è stato infine detto che, assumendo Θ matrice casuale Gaussiana, la probabilità che il segnale ricostruito coincida con l'originale risulta estremamente elevata per M misurazioni secondo la 2.5. Purtroppo l'implementazione di una matrice casuale Gaussiana efficiente risulta, in molti casi, impossibile o estremamente dispendiosa; in questo capitolo verranno esaminate alcune matrici di facile implementazione che risulteranno efficienti quanto le matrici casuali Gaussiane in fase di codifica del segnale e addirittura più veloci in fase di decodifica.

3.1 Matrici Circolanti e di Toeplitz

Gli studi del professor Wotao Yin[6] hanno messo in evidenza due tipologie di matrici di facile implementazione che compensano perfettamente le prestazioni delle i.i.d Gaussiane: le matrici circolanti e di Toeplitz[6]. La loro costruzione è data seguendo queste semplici strutture:

$$T = \begin{bmatrix} t_n & t_{n-1} & \dots & t_1 \\ t_{n+1} & t_n & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{2n-1} & t_{2n-2} & \dots & t_n \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} t_n & t_{n-1} & \dots & t_1 \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n-1} & t_{n-2} & \dots & t_n \end{bmatrix}$$

denotando con T le matrici di Toeplitz e con C le matrici circolanti. Osserviamo subito che, applicando ad una qualunque matrice T la seguente proprietà aggiuntiva: $t_n = t_{i+n} \forall i$, possiamo ricondurci immediatamente ad una matrice circolante. D'ora in avanti, giacchè ogni matrice (parziale) di Toeplitz può essere ricondotta ad una matrice (parziale) circolante[6], tratteremo solamente le matrici C . Quest'ultime, come già detto in precedenza, nascono dall'esigenza di trovare matrici di facile realizzazione e che abbiano delle caratteristiche prestazionali comparabili a quelle delle i.i.d. Gaussiane. Per esempio, gli studi di Tropp et al[10] dimostrano come sia possibile l'acquisizione di una matrice circolante tramite un generico vettore di convoluzione h :

Definizione 3.1. Considerando $T_\Omega x$ elemento da computare, dove con T_Ω indichiamo una sottomatrice di T (Toeplitz o circolante) che utilizza un generico Ω e che

$$Tx = h * x \tag{3.2}$$

allora possiamo affermare che $T_\Omega x$ è un Ω -sottoinsieme della convoluzione $h * x$.

E' quindi possibile, capovolgendo il problema, ricavare una matrice circolante partendo da un vettore (chiamato Random Tap FIR negli studi di Tropp).

3.2 Matrici di Costruzione : le matrici PC

L'obiettivo degli studi sulle matrici circolanti e di Toeplitz[6] è quello di definire una matrice di campionamento A che sia la combinazione di una matrice circolante generica e una matrice di selezione. Definiamo quindi $A = PC$ matrice di campionamento come prodotto di una matrice circolante C (dipendente da N gradi di libertà) e di una matrice di selezione P . Introduciamo una tabella per evidenziare le possibili combinazioni PC che producono A :

C and P types for sensing matrix $A = PC$

C-type			P-type		
R1	Circulant:	1st row i.i.d. Gaussian	real [†]	P1	First m rows
R2	1st row given	1st row i.i.d. Bernoulli		P2	Equally-spaced m rows
D1	Circulant:	d_i random phase, $ d_i = 1$	complex [‡]		P3
D2	$C = F^*DF$	d_i random phase			
D3	$D = \text{diag}(d)$	D1 without conjugate symmetry [†]	real		
I1	i.i.d. random	i.i.d. Gaussian			
I2	Non-circulant	i.i.d. Bernoulli			

†: A real C requires *conjugate symmetric* d in types D1 and D2. An N -dimensional array $x \in \mathbb{C}^{n_1 \times \dots \times n_N}$ is conjugate symmetric (or Hermitian symmetric) if $x(i_1, \dots, i_N) = \text{conj}(x(i'_1, \dots, i'_N))$ where $i'_j := \text{mod}(n_j - i_j + 1, n_j) - 1$.

‡: An $m \times n$ real matrix A is formed by stacking the real and imaginary parts of an $\frac{m}{2} \times n$ matrix PC .

Figura 3.1: Tipologie di matrici PC

3.3 Algoritmi di ricostruzione

Definite le tipologie di matrici stabili PC andiamo ad analizzare i principali algoritmi utilizzati nella libreria 'RecPC'[6]. Per completezza stabiliamo che ogni segnale 2D (ogni immagine) di dimensione $N \times N$ verrà vista come vettore monodimensionale $x \in \mathbb{R}^{N^2}$ in modo da semplificare lo studio riducendo il numero dei gradi di libertà. Gli approcci agli algoritmi inerenti le matrici circolanti possono essere classificati in tre tipologie.

$$BP : \min(\alpha TV_v(x)) + \beta \|\psi x\|_{w,1} \text{ tale che } Ax = b \quad (3.3)$$

$$BPDN : \min(\alpha TV_v(x)) + \beta \|\psi x\|_{w,1} + \frac{\mu}{2} \|Ax - b\|^2 \quad (3.4)$$

$$BPDN/L1 : \min(\alpha TV_v(x)) + \beta \|\psi x\|_{w,1} + \mu \|Ax - b\|_1 \quad (3.5)$$

in cui $\alpha, \beta \geq 0$, $\mu > 0$, $\|Ax - b\|$ sono le norme (norma1 se presente 1 in pedice, default norma2), $\|\psi x\|_{w,1}$ è la norma1 pesata e $TV_v(x)$ è la variazione totale definita come

$$TV_v(x) = \sum_{i=1}^{N^2} v_i \|D_i x\| \quad (3.6)$$

dove, per ogni i , $D_i \in \mathfrak{R}^{2xN^2}$ rappresenta un operatore differenziale finito e v_i un coefficiente pesato. Ai fini della nostra ricostruzione, verranno utilizzati solo i primi due modelli: in entrambi i casi si considereranno i vettori dei coefficienti v, w uniformemente pesati e di valore 1 ($v_i, w_i \equiv 1$) e l'assenza di rumore nel segnale. Ricordando, nella precedente sezione, che $A = PC$ il nostro modello si riduce al calcolo di (caso BPDN):

$$BPDN : \min(\alpha \sum_{i=1}^{N^2} v_i \|D_i x\|) + \beta \sum_{i=1}^{N^2} |\psi_i^T x| + \frac{\mu}{2} \|PCx - b\|^2 \quad (3.7)$$

Capitolo 4

Applicazioni

Oggigiorno esistono numerosi campi tecnologici che necessitano di acquisire grandi quantità di dati per una corretta elaborazione dei segnali. Le teorie CS vengono incontro a numerose scienze quali l'astronomia, la robotica, le reti di telecomunicazioni e lo stesso imaging, per garantire alte prestazioni in fase di codifica e ricostruzione dati. In questo capitolo non verrà fornita una panoramica esaustiva sulle molteplici applicazioni degli algoritmi CS ma verranno implementate le teorie discusse nelle precedenti sezioni attraverso un software estremamente versatile e dalle potenzialità e applicazioni infinite: MATLAB(R).

4.1 Matlab: introduzione al programma

MATLAB (MATrix LABoratory) è un ambiente di sviluppo per il calcolo numerico e statistico. E' un software dotato di un proprio linguaggio di programmazione tramite il quale è possibile implementare i più svariati algoritmi numerici per le più svariate necessità (è di fatto uno dei principali programmi di computazione in campi come l'automazione, la chimica, la robotica etc...). E' un programma dedicato al calcolo vettoriale e matriciale comprendente un ingente numero di librerie apposite per richiamare ed utilizzare la maggior parte delle funzioni matematiche di utilità che da all'utente la possibilità di

caricare tool esterni per ogni esigenza. E' inoltre dotato di un sistema grafico utilizzabile per visualizzare gli andamenti di vettori(segnali) e le immagini. Dalle teorie affrontate precedentemente è immediato stabilire che le entità principali in gioco sono le matrici e che i punti cruciali da dover affrontare con maggiore cautela sono le trasformazioni da/verso il dominio di Fourier e l'implementazione di matrici di ricostruzioni atte alle nostre esigenze. Fortunatamente MATLAB fornisce funzioni immediate come la Fast Fourier Transform (`fft2`) per traslare nel dominio di Fourier e la `rand(x,y)` per generare matrici casuali di dimensioni x,y e distribuzione Gaussiana di media zero e varianza 1 (estremamente utile ricordando le teorie di Candes,Tao) oltre ad innumerevoli librerie per l'elaborazione e la modifica di vettori e matrici. In seguito vedremo le parti del codice Matlab che implementano gli algoritmi di ricostruzione discussi precedentemente, visualizzeremo le immagini ricostruite per mezzo di quest'ultimi e, tramite funzioni interne quali `tic()` `toc()` , evidenzieremo le prestazioni in termini di time elapsed e SNR*(nota Signal-to-Noise Ratio).

4.2 Ricostruzioni di immagini : le teorie di Candes-Tao

In questa sezione verranno proposti due algoritmi di ricostruzione immagine implementati attraverso MATLAB ed elaborati dai professori E.Candes e J. Romberg[?, 13]. Il codice è incluso in una serie di funzioni matlab open-source denominata 'l1-magic' e prevede algoritmi che sfruttano la minimizzazione della norma L1 e della TV[7, 13].

- Minimizzazione della norma L1

L'algoritmo, prevede la ricostruzione di un generico segnale di input $x(n)$ di dimensioni $N \times 1$ attraverso una matrice di misurazioni Gaussiane di dimensioni $K \times N$ (con K equivalente al numero di misurazioni desiderate) e minimizzazione della norma L1 con metodo 'equality constraint'. In output verrà restituito un vettore di dimensioni $N \times 1$ 'xp' ricostruzione del segnale

input. Nel nostro caso verrà presa un'immagine in input , traslata a vettore $N \times 1$, elaborata e ricostruita successivamente tramite la funzione interna 'reshape'. Proponiamo un esempio con il fantasma Shepp-Logan:

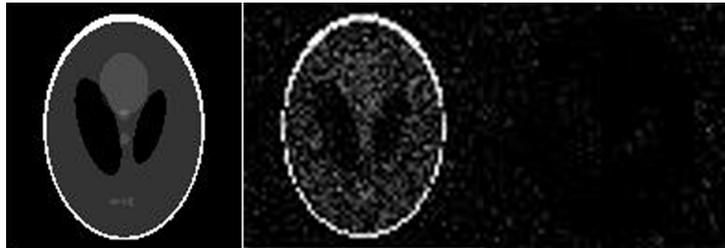


Figura 4.1: Fantasma S-L con minimizzazione norma L1

L'immagine in questione è di dimensioni 64×64 con una percentuale di campionamento dell'8% e un tempo di ricostruzione dell'ordine dei 120 secondi; al centro la sua ricostruzione, a destra l'errore relativo.

- Minimizzazione della TV

L'algoritmo proposto prevede in input un'immagine test ed un parametro L caratterizzante le linee desiderate nel dominio di Fourier sulle quali campionare i nostri coefficienti di interesse. Come nel precedente caso verrà restituito in output un vettore 'xp' soluzione della nostra ricostruzione ottenuto grazie alla minimizzazione della TV ottenuto tramite un algoritmo di ottimizzazione 'log-barrier' incluso nel pacchetto l1-magic. Un ulteriore esempio col fantasma Shepp-Logan:



Figura 4.2: Fantasma S-L con minimizzazione TV

L'immagine in questione è di dimensioni 256x256 con $L=12$ e tempo di ricostruzione dell'ordine dei 700 secondi. Al centro l'immagine ricostruita, a destra l'errore relativo.

4.3 Ricostruzioni di immagini: le matrici circolanti

In questa sezione verranno proposti alcuni esempi di ricostruzioni di immagini tramite l'utilizzo di matrici circolanti. Codice e teorie applicative sono racchiusi in una libreria Matlab denominata 'Rec-PC-v1-pub' contenente alcuni esempi di applicazioni CS e disponibile (previa richiesta) su internet[11]. Nello specifico analizzeremo due esempi di ricostruzione che prevedono l'utilizzo di una matrice PC reale applicata ad un segnale noiseless, con algoritmo di ricostruzione 3.4 e due metodi di supporto: 'square penalties' e 'equality constraints'. I due codici, presenti in seconda appendice, prevedono come input un segnale (un'immagine) e restituiscono le corrispondenti ricostruzioni e i parametri prestazionali in termini di 'time elapsed' e SNR.

Prendendo come riferimento il modello 'equality constraint' e le seguenti immagini:



Figura 4.3: Fantasma S-L 256x256 al 10%

possiamo subito verificare che un campionamento al 10% ricostruisce l'immagine in maniera quasi esatta. L'errore relativo al 10% è stato modificato

enfaticamente la scala di grigio per essere reso più visibile. Qui sotto alcuni dati prestazionali su diversi test per il fantasma Shepp-Logan.

DIMENSIONI	% CAMPIONAMENTO	SNR	ELAPSED TIME (s)
128X128	10	17	17.85
256X256	10	65	22.85
512X512	10	76	75.5

Figura 4.4: Risultati Shepp-Logan con 'equality constraints'

Nel caso di elaborazione di immagini a colori (nel prossimo esempio) gli algoritmi, per mezzo di funzioni standard di MATLAB quali la 'cat()', vengono applicati alle tre componenti RGB dell'immagini stessa per poi essere ricostruiti singolarmente ed unificati nuovamente. Prendiamo come esempio la seguente immagine:



Figura 4.5: Ricostruzione immagine 850x600 campionata al 20%.

notiamo che la ricostruzione è pressochè esatta, con un errore relativo modificato in termini di luminosità e contrasto a scopo illustrativo. Dovendo ovviamente computare tre immagini anzichè una, i tempi di ricostruzione risultano più lunghi. Analizzando infatti i tempi di elaborazione:

DIMENSIONI	% CAMPIONAMENTO	SNR	ELAPSED TIME (s)
800x400	20	21.7	780
800x400	30	24.2	512

Figura 4.6: Risultati Wall.jpg metodo 'equality constraints'

ci accorgiamo di come i valori di 'time elapsed' siano triplicati.

Vediamo brevemente altri due esempi di ricostruzione con metodo 'square penalties'. Nel primo utilizziamo il fantasma di Shepp-Logan con campionamento al 5% e 10% ; nel secondo un'immagine a colori 'Mondo.jpg' con campionamento al 20%.

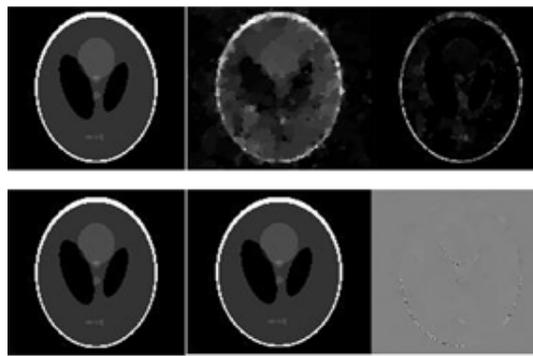


Figura 4.7: Fantasma S-L 128x128 al 5% e 10%



Figura 4.8: Ricostruzione 'Mondo.jpg' al 20%

e relative tabelle prestazionali:

DIMENSIONI	% CAMPIONAMENTO	SNR	ELAPSED TIME (s)
128x128	15	83.4	19.5
128x128	5	5.9	25.7
256x256	15	86	16.8

Figura 4.9: Risultati fantasma S-L metodo 'square penalties'

DIMENSIONI	% CAMPIONAMENTO	SNR	ELAPSED TIME (s)
400x400	20	15.6	175.5
400x400	30	18.2	150.5

Figura 4.10: Risultati Mondo.jpg metodo 'square penalties'

4.4 Prestazioni

Le teorie CS offrono sicuramente delle notevoli agevolazioni in termini di acquisizione del segnale e compressione dei dati svincolandoci dai limiti imposti dal teorema di Nyquist-Shannon. La continua ricerca di nuovi algoritmi che migliorino le prestazioni delle teorie base nasce dalla necessità di incrementare l'efficienza delle ricostruzioni in termini di tempo di elaborazione e precisione. Analizzando i risultati della seconda sezione è evidente che gli algoritmi di ricostruzione proposti presentano dei forti limiti: il primo, basato sulla minimizzazione della norma L1, garantisce ricostruzioni in tempi accettabili ma con risultati assai poco soddisfacenti; il secondo, sfruttando la TV, fornisce ricostruzioni più affidabili (utilizzando un numero di linee pari a 22 si ottiene una ricostruzione perfetta dell'immagine input) ma con dei tempi di elaborazione esageratamente alti. Ciò è in parte dovuto anche alla matrice di misurazioni casuali Gaussiana $M \times N$ che, nonostante riduca considerevolmente il numero di campioni da elaborare, ci vincola ad un valore M che deve rispettare (in generale) la 2.5 e quindi allo studio di un sistema con $M \times N$ gradi di libertà. Grazie alla struttura particolare delle matrici circolanti, possiamo ridurre ulteriormente i gradi di libertà ad N diminuendo il carico computazionale e velocizzando le tempistiche di ricostruzione

immagine in più, nonostante si abbassi il livello di incoerenza (necessario a soddisfare la RIP), si ottengono prestazioni di notevole interesse. Analizzando brevemente i risultati ottenuti utilizzando le matrici circolanti possiamo subito notare come i tempi di ricostruzione si abbassino drasticamente e di come sia possibile ottenere risultati soddisfacenti anche con campionamenti del 10% o 20%. Lievi differenze si ottengono utilizzando metodi di supporto diversi come 'equality constraint' o 'square penalty': nel primo caso otteniamo delle tempistiche più veloci ma con immagini soluzione meno accurate mentre nel secondo i tempi si allungano leggermente ma la precisione di ricostruzione aumenta dandoci la possibilità di ridurre il campionamento anche sotto il 10% (in caso di immagini a colori 20%). Soffermandoci sulla figura 3.1 possiamo estendere le matrici di costruzione PC anche al caso complesso; in appendice A un breve esempio di ricostruzione immagine tramite PC complessa (per completezza si tengono divise le parti dell'immagini test reali da quelle immaginarie).

Conclusioni

Citando E.Candes

Because most signals are compressible, why spend so much effort acquiring all the data when we know that most of it will be discarded? Wouldn't it be possible to acquire the data in already compressed form so that one does not need to throw away anything?

Il Compressive Sensing definisce una nuova teoria di campionamento tramite la quale è possibile evitare di acquisire tutto il segnale desiderato ma solo le parti prettamente di interesse. Sorprendente è il fatto che, lavorando con segnali K -sparse e matrici $A = \Phi\Psi$ che rispettino la RIP, la ricostruzione è certa se il numero delle misurazioni è sufficientemente elevato. L'importanza di queste nuove teorie è facilmente deducibile in quanto offre numerosi vantaggi a tutte le applicazioni informative o a tutte quelle scienze che hanno il compito di acquisire ingenti quantità di dati: compressioni audio e video, robotica, astronomia e telecomunicazioni sono solo alcune delle discipline direttamente coinvolte. Non di meno le teorie CS sono tuttora in fase di sviluppo e seguono pari passo le sempre più numerose esigenze informative che il mercato o la ricerca richiedono. Gli algoritmi concernenti le matrici circolanti ne sono un chiaro esempio: oltre a fornire prestazioni migliori rispetto agli standard di Candes-Tao recentemente, grazie agli studi di Liang[9] hanno trovato un loro utilizzo in campo medico, più precisamente nell' MR imaging. In definitiva, grazie alle teorie CS, il problema del campionamento non viene più affrontato seguendo il parametro 'banda' del segnale ma concentrandosi piuttosto su concetti chiave quali sparsità e incoerenza basati sull'acquisizione dati; ven-

gono quindi utilizzate conoscenze a priori per determinare soluzioni ottime per un sistema di equazioni altrimenti indeterminato.

Appendice A

Prima Appendice

Ulteriori ricostruzioni di interesse ai fini della tesi.

- Ricostruzione di un segnale $x(n)$ 512×1 con tool cvx e 50% dei campioni

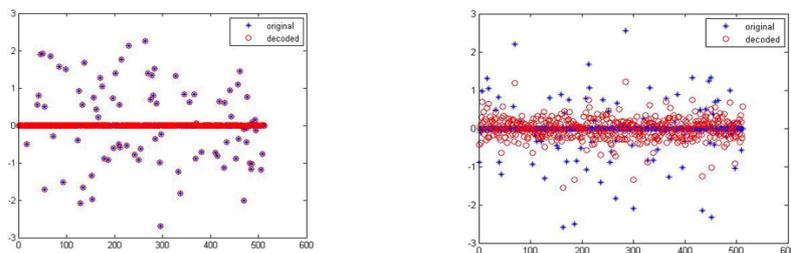


Figura A.1: ricostruzione segnale con cvx tool

Notiamo come i coefficienti di decodifica siano perfettamente compensati tramite la minimizzazione della norma L1.

- Ricostruzione di un'immagine test 'palme.jpg' con matrici circolanti e PC complessa. Per completezza vengono riportate le ricostruzioni della parte reale e della parte complessa dell'immagine con campionamento al 15% e relativo errore.



Figura A.2: immagine originale

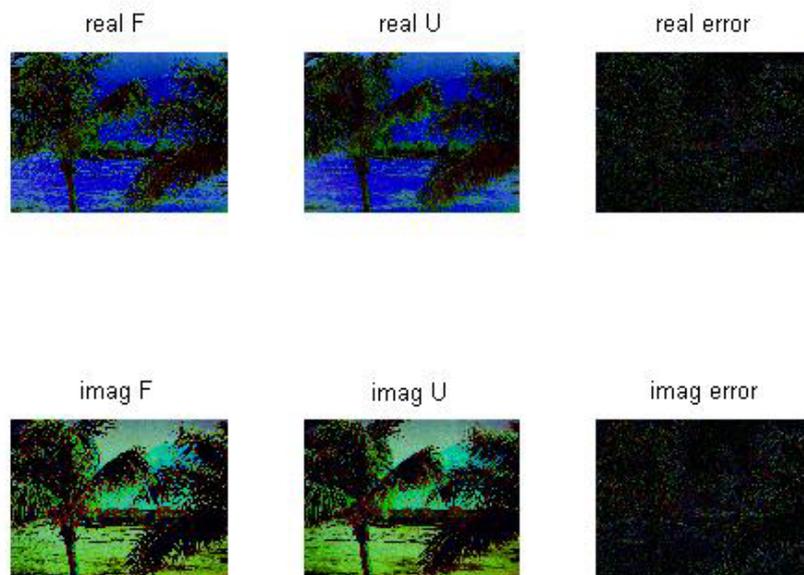


Figura A.3: ricostruzione immagine palme.jpg con PC complessa

Appendice B

Seconda Appendice

Codice utilizzato per implementare gli algoritmi di ricostruzione.

Codice per risolvere la minimizzazione della norma L1 e L2 : utilizzo del tool esterno di MATLAB 'cvx'

```
n = 512;
m = 256; % Numero di campioni n > m
A = randn ( m , n );
S = round ( m /3);
support = randsample ( n , S );
x0 = zeros ( n ,1 ) ; x0 ( support ) = randn ( S ,1);
b = A * x0 ;

% % Solve l1

cvx_begin
variable x( n );
minimize(norm(x ,1));
subject to
A * x == b ;
cvx_end
norm( x - x0 )/norm ( x0 )
figure , plot (1: n , x0 , 'b * ' , 1: n , x , ' ro ' ) , legend ( ' original ' , ' decoded ' )
```

Figura B.1: minimizzazione norma L1-L2 tramite cvx tool

Codice per la ricostruzione immagini per mezzo di matrici circolanti e metodo 'equality constraint' e 'square penalties'

```

tic

% A=phantom(128);
A=imread('mondo2.jpg');

a1=A(:,:,1); a2=A(:,:,2);a3=A(:,:,3);
a1=im2double(a1);a2=im2double(a2);a3=im2double(a3);

*** Si invoca l' algoritmo CS "demo_RecPC_real" con i seguenti parametri
%1) Immagine di test
%2) percentuale di campionamento [valore compreso tra 0.01 e 0.5]

%Per il corretto funzionamento dell'algoritmo occorre eseguire previamente
%lo script "run_me_first"
run_me_first;
%ricostruzione dei tre livelli dell'immagine a colori
%Settaggio percentuale di campionamento
p=0.3;
% Togliere i commenti delle seguenti tre righe per l'elaborazione
% dell'immagine a colori

u1=demo_RecPC_real(a1,p);
u2=demo_RecPC_real(a2,p);
u3=demo_RecPC_real(a3,p);

%U=demo_RecPC_real(A,p);

% L'algoritmo prevede due possibili modalità di recovery dell'immagine.
% In questo script è utilizzato il metodo "equality constraints"
%*** ricostruzione dell'immagine a colori (decommentare all'occorrenza)

u1=im2uint8(u1);u2=im2uint8(u2);u3=im2uint8(u3);
U=cat(3,u1,u2,u3); colormap(gray(65536));

subplot(131); imshow(A,[]);title('original');
subplot(132); imshow(U,[]);title(sprintf('recovery al %d per cento',p*100));
subplot(133); imshow(A-U,[]); colorbar; title('error');

toc

```

Figura B.2: codice per l'utilizzo di matrici RPC

Bibliografia

- [1] E. Candès, Compressive Sampling. ((Int. Congress of Mathematics, 3, pp. 1433-1452, Madrid, Spain, 2006))
- [2] R. Baraniuk, Compressive sensing. (IEEE Signal Processing Magazine, 24(4), pp. 118-121, July 2007)
- [3] Yue Hu, Student Member, IEEE and Mathews J., Higher degree total variation (HDTV) regularization for image recovery
- [4] Candès, E. J., Tao, T., Near-optimal signal recovery from random projections and universal encoding strategies. IEEE Trans. Inform. Theory, 2004.
- [5] Rudelson, M., Vershynin, R., Sparse reconstruction by convex relaxation: Fourier and Gaussian measurements.
- [6] W. Yin, S. Morgan, J. Yang, and Y. Zhang, Practical Compressive Sensing with Toeplitz and Circulant Matrices, In proceedings of Visual Communications and Image Processing (VCIP), 2010.
- [7] E. Candès, J. Romberg, and T.Tao, Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. (IEEE Trans. on Information Theory, 52(2) pp. 489 - 509, February 2006)
- [8] J. Romberg, Imaging via compressive sampling. (IEEE Signal Processing Magazine, 25(2), pp. 14 - 20, March 2008)

- [9] Liang, D., Xu, G., Wang, H., King, K. F., and Ying, L., Toeplitz random encoding mr imaging using compressed sensing, IEEE ISBI 2009 (2009).
- [10] J. Tropp and A.C. Gilbert, Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit, Apr.2005 [Online].
- [11] <http://www.caam.rice.edu/optimization/L1/RecPC/>
- [12] <http://users.ece.gatech.edu/~justin/l1magic/papers>
- [13] E.Candès and J. Romberg, Caltech , 'l1-magic : Recovery of Sparse Signals via Convex Programming, October 2005