Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

CORRISPONDENZA EULERO-LAGRANGE: PROBLEMA CORDE VIBRANTI

Tesi di Laurea Magistrale in Storia della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PAOLO FREGUGLIA

Presentata da:
LUCIA GIAMPAOLI

I Sessione
Anno Accademico 2012/2013

. . . Alla mia famiglia

e a Giacomo . . .

Introduzione

"Le radici del presente affondano nel passato e quasi niente di quel passato è irrilevante per chi cerca di comprendere come il presente sia diventato quello che è."

Morris Kline

La storia della matematica permette di avere una visione d'insieme e una prospettiva generale della disciplina; permette di capire come oggi sono stati raggiunti certi risultati e come le cose si sono evolute nel tempo.
Spesso, chi studia matematica, ha l'impressione di essere sommerso da una successione innarrestabile di teoremi, corollari e definizioni; questo porta a pensare che i matematici passino da un teorema all'altro quasi naturalmente, che siano in grado di padroneggaire ogni difficoltà e che gli argomenti siano completamente definiti una volta per tutte. Ma non è affatto così.
La matematica, così come la scienza in generale, è in continua evoluzione, in continuo cambiamento ed è la storia a testimoniarlo. La storia ci mostra che lo sviluppo di una disciplina, in questo caso la matematica, avviene a piccoli passi e attraverso l'uso di risultati che arrivano da varie direzioni. Non è tutto così immediato e facile come sembra.
È solo attraverso la storia che possiamo renderci conto di come le cose si sono realmente evolute: spesso sono stati impiegati decenni o anche secoli prima di fare significativi passi avanti.

Due fra i princiapli matematici del XVIII secolo furono Eulero e Lagrange, i quali, come d'uso a quel tempo, si tennero in contatto attraverso una corrispondenza epistolare che durò circa ventuno anni (28 Giugno 1754-23 Marzo 1775).
In base agli argomenti trattati, questa corrispondenza può essere suddivisa in tre parti:

1. la *prima parte* (28 Giugno 1754 - 2 Ottobre 1759), in lingua latina, verte principalmente sul calcolo delle variazioni e sul principio della minima azione;

2. la *seconda parte* (23 Ottobre 1759 - 9 Novembre 1762), in lingua francese, riguarda il problema delle corde vibranti e della propagazione del suono.

3. nella *terza parte* (16 Febbraio 1765 - 23 Marzo 1775), sempre in lingua francese, vengono trattati vari problemi di teoria dei numeri ed integrazione di particolari tipi di funzioni.

In questo elaborato è stata trascritta , tradotta (in lingua italiana) e commentata la seconda parte della corrispondenza, ovvero quella relativa al problema delle corde vibranti e della propagazione del suono, che comprende nove lettere.
La tesi è così strutturata:
- Nei primi due capitoli sono presentate le biografie di Eulero e Lagrange; nella biografia di Lagrange, nella sezione "Inizio della corrispondenza epistolare con Eulero", è stato spiegato brevemente come ha avuto inizio tale corrispondenza.
- I Capitoli dal 3 all'11 corrispondono ciascuno ad una delle nove lettere e sono tutti strutturati in tre sezioni principali:

1. Lettera in lingua originale (francese); la fonte utilizzata per la trascrizione delle lettere è la [3].

2. Traduzione in lingua italiana della Lettera; la traduzione è stata fatta cercando di attenersi il più possibile al testo originale, ed è accompagnata da numerose note a piè di pagina in cui si cerca di chiarire il contesto del discorso o qualche riferimento degli autori ad eventi, memorie e lettere passate.

3. Commento della Lettera; viene fornito un riassunto e un commento tecnico della lettera, cercando di ricostruire i passaggi, i calcoli e i ragionamenti che gli autori vi abbozzano. In questa fase di analisi e rielaborazione si è fatto riferimento soprattutto alle memorie originali pubblicate durante il XVIII secolo dai due autori, nelle quali si trova, in modo più formale ed esteso, ciò che viene accennato nelle lettere.

Il Capitolo 3, relativo alla prima lettera (23 Ottobre 1759), contiene in più la sezione "Introduzione al Problema delle corde vibranti", nella quale viene fornita una presentazione generale del Problema e le principali tappe del suo sviluppo durante il XVIII secolo.
Inoltre, sempre nel Capitolo 3, all'interno della sezione "Commento della Lettera" sono state riportate alcune parti significative di tre lettere che precedono quella del 23 Ottobre 1759 e che fanno parte della corrispondenza latina: lettera del 28 Luglio 1759, del 4 Agosto 1759, del 2 Ottobre 1759. In queste tre lettere, Eulero e Lagrange iniziano a parlare del problema delle corde vibranti; sono quindi importanti al fine di comprendere la successiva corrispondenza in lingua francese.
Nella traduzione delle parti relative alle lettere latine si è fatto uso del "tu", mentre per le lettere francesi si è fatto uso del "voi".

Fra le nove lettere della corrispondenza, tre meritano di essere menzionate:

- la lettera del 23 Ottobre 1759, oltre ad essere la prima scritta in lingua francese, è importante perché Eulero comunica di aver finalmente ricevuto il Volume I delle "Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis" che Lagrange gli aveva inviato il 28

Luglio 1759. In questo Volume è contenuta la memoria "Recherches sur la nature et la propagation du son", con la quale Lagrange si inserisce nella disputa sul problema delle corde vibranti difendendo la posizione di Eulero dagli attacchi di D'Alembert e D. Bernoulli. Inoltre, in questa lettera Eulero propone un primo abbozzo della teoria della propagazione del suono nel piano (o teoria delle onde circolari).

- la lettera dell'1 Gennaio 1760 contiene le "Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique" ("Ricerche sulla propagazione del suono in un mezzo elastico") di Eulero che vennero pubblicate, come memoria, nel Volume II delle "Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis". Eulero vi espone la teoria della propagazione del suono nell'aria nell'ipotesi delle tre dimensioni (o teoria delle onde sferiche).

- la lettera del 9 Novembre 1762 dove Eulero, notando l'interesse di Lagrange per la risoluzione di equazioni del tipo $\frac{ddz}{dt^2} = P\frac{ddz}{dx^2}+Q\frac{dz}{dx}+Rz$ e osservando che "bisognerebbe cercare dei metodi più adatti per trattare queste equazioni", espone il metodo classico di sostituzione lineare delle variabili. Applica questo metodo al caso più semplice $\frac{ddz}{dt^2} = a\frac{ddz}{dx^2}$, riuscendo così a riportare questa equazione alla forma $\frac{ddz}{dpdq} = 0$.

Indice

Capitolo 1

Leonhard Euler

1.1 Biografia

Leonhard Euler, noto in Italia come Eulero (Basilea, 15 aprile 1707 - San Pietroburgo, 18 settembre 1783), è stato un matematico e fisico svizzero ed è considerato il più importante matematico dell'Illuminismo.
Quando l'Illuminismo europeo ebbe origine, intorno agli anni '20 del 1700, in matematica si attendevano pochi risultati nuovi. Infatti il secolo precedente, culminato con le invenzioni del Calcolo differenziale da parte di Isaac Newton e Gottfried Leibniz, veniva considerato come un periodo molto produttivo per la Matematica che aveva lasciato ben poco da scoprire. Alcuni studiosi, però, previdero un periodo fecondo in questo settore; le ricerche di Eulero, in particolare, confermarono questa previsione. Insieme ad Archimede, Newton e Carl Friedrich Gauss, Eulero diventò uno dei quattro maggiori matematici della storia.
Eulero ha fornito contributi a tutta la scienza matematica ed è noto per essere tra i più prolifici matematici della storia. Al centro della sua ricerca troviamo: l'Analisi infinitesimale, o Calcolo differenziale, e la Meccanica razionale. Fu il principale creatore dal Calcolo delle variazioni e delle equazioni differenziali, ed un precursore della Geometria differenziale delle superfici. Eulero fondò la meccanica dei continui e promosse la balistica, la cartografia, la diottrica,

la teoria dell'elasticità, l'idraulica, l'idrodinamica, la teoria della musica, la teoria dei numeri, la teoria dei grafi, l'ottica e la teoria delle navi.
Può essere inoltre considerato il più grande fornitore di "denominazioni matematiche", offrendo il suo nome ad una grande quantità di formule, teoremi, metodi, criteri, relazioni, equazioni. Per la geometria abbiamo: il cerchio, la retta e i punti di Eulero relativi ai triangoli; per la teoria dei numeri: il criterio di Eulero, l'indicatore di Eulero, l'identità di Eulero, la congettura di Eulero; per la meccanica: gli angoli di Eulero, il carico critico di Eulero (per instabilità); per l'analisi: la costante di Eulero-Mascheroni; per la logica: il diagramma di Eulero-Venn; per la teoria dei grafi: la relazione di Eulero; per l'algebra: il metodo di Eulero (relativo alla soluzione delle equazioni di quarto grado); e tante altre.
Sempre a Eulero si legano altri oggetti matematici, attraverso l'aggettivo "euleriano", quali: il ciclo euleriano, il grafo euleriano, la funzione euleriana di prima specie o funzione beta, e quella di seconda specie o funzione gamma.
Buona parte della simbologia matematica tuttora in uso, venne introdotta da Eulero, per esempio i per i numeri immaginari, $\sum$ come simbolo per la sommatoria, $f(x)$ per indicare una funzione. Diffuse l'uso della lettera π per indicare pi greco.
Eulero si tenne in contatto con numerosi matematici del suo tempo attraverso lunghe corrispondenze epistolari, nella quali si scambiavano e confrontavano vari risultati. Fra le corrispondenze più importanti ricordiamo quella con C. Goldbach, con A. C. Clairaut, con J. D'Alembert e con J. L. Lagrange.
Complessivamente esistono, fra articoli e libri, 868 pubblicazioni di Eulero. Di queste, 819 riempiono 74 grossi volumi nelle prime tre serie della sua Opera Omnia e comprendono all'incirca un terzo di tutte le ricerche di matematica, fisica teorica ed ingegneria meccanica pubblicate dal 1726 al 1800.
Sembra che Pierre Simon Laplace abbia affermato *"Leggete Eulero; egli è il maestro di tutti noi."*

1.1.1 Famiglia, gioventù e formazione

Eulero nacque a Basilea, Svizzera, il 15 Aprile del 1707. Il padre, Paul Euler, era ministro della chiesa evangelica riformata, mentre la madre Margaretha Bruckner, figlia di un altro ministro protestante, discendeva da una illustre famiglia di artisti e umanisti. Eulero, primogenito, ebbe due sorelle e un fratello: Anna Maria, Maria Magdalena e Johann Heinrich. Poco dopo la nascita di Eulero, la famiglia si trasferì a Riehen, dove Eulero passò la maggior parte dell'infanzia.
I primi insegnanti di Eulero furono i suoi genitori: la madre Margaretha, di tradizione umanistica, lo introdusse ai classici greci e romani mentre l'istruzione elementare del padre Paul comprendeva la Matematica, intesa come materia alla base di ogni conoscenza naturale. Poi ad accompagnare Eulero nei suoi studi, gli Euler assunsero come tutore un giovane teologo, Johann Burckhardt.
Nel 1720, Eulero tredicenne, si iscrisse alla facoltà di Filosofia dell'Università di Basilea, la scuola di base delle arti e delle scienze. La facoltà di Filosofia forniva l'educazione preliminare necessaria alla scelta di una specializzazione di grado superiore. Fra gli insegnanti di Eulero vi era anche Johann Bernoulli[1], uno dei più famosi matematici d'Europa e amico di Paul Euler. Eulero si laureò due anni dopo, nel 1722.
Nell'ottobre del 1723, Paul chiese ad Eulero di iscriversi a teologia, per prepararsi a diventare pastore. Avrebbe dovuto studiare soprattutto greco, ebraico, teologia protestante e lettere classiche. Il curriculo di teologia, però gli permetteva di studiare anche Matematica. Eulero aveva cominciato a farsi seguire da J.Bernoulli e, passando la maggior parte del tempo sulla Matematica, fece pochi progressi nelle altre materie. J.Bernoulli, accortosi del talento di Eulero in Matematica, intorno al 1765 si recò a Riehen per convin-

[1] Johann I Bernoulli o Jean I Bernoulli (Basilea, 27 Luglio 1667 - Basilea, 1 Gennaio 1748), matematico svizzero, è stato uno dei più importanti scienziati della famiglia Bernoulli, fratello minore di Jakob, il capostipite della famiglia. È conosciuto soprattutto per i suoi contributi al calcolo infinitesimale.

cere l'amico Paul a far trasferire il figlio a matematica, e ci riuscì. Così, nel 1726 Eulero completò il dottorato sulla propagazione del suono (in questa occasione produsse un articolo di acustica, di sedici pagine, intitolato "De sono", che è diventato un classico). Nel 1727, partecipò al concorso per il premio annuale dell'Accademia di Parigi; il problema di quell'anno riguardava il miglior modo di disporre gli alberi su di una nave. Eulero non vinse il premio, ma arrivò secondo subito dopo Pierre Bouguer ora riconosciuto come il padre dell'architettura navale. Nonostante questa prima sconfitta, Eulero comunque non si arrese; infatti partecipò più volte nel corso della sua vita a questo concorso e vinse il premio per ben dodici volte.

1.1.2 San Pietroburgo

Nel 1725 Eulero cercava un impiego e, sempre in questo stesso anno, i suoi amici Nicholas e Daniel Bernoulli, figli di Johann Bernoulli, accettarono un posto alla nuova Accademia delle Scienze di San Pietroburgo. Nel 1726, Nicolas morì e Daniel prese la cattedra di matematica e fisica del fratello, lasciando vacante la sua cattedra in medicina. Eulero venne così invitato, dallo stesso Daniel, a ricoprire la cattedra di Medicina e dopo un'iniziale titubanza accettò. Arrivò a Pietroburgo nel maggio del 1727, due mesi dopo la morte di Isaac Newton, per cominciare la propria illustre carriera. Poco tempo dopo, probabilmente grazie all'intervento di Jakob Hermann, di Daniel Bernoulli e di Christian Goldbach, Eulero passò dal dipartimento di medicina a quello di matematica.
L'Accademia più che un luogo d'insegnamento era un luogo di ricerca. Pietro il Grande infatti aveva creato l'Accademia per far scomparire il divario scientifico tra la Russia e l'Occidente.
L'arrivo di Eulero a Pietroburgo coincide quasi con la morte di Caterina I che aveva continuato la politica di Pietro il Grande. A Caterina I successe Pietro II che, sospettoso degli scienziati stranieri, tagliò i fondi a Eulero e ai suoi colleghi. Eulero dovette accettare un posto di medico della marina

russa, che stava diventando la potenza maggiore del Baltico.
Quando Hermann e Georg Bilfinger se ne andarono dall'Accademia di San Pietroburgo, Daniel Bernoulli succedette a Hermann nella prestigiosa posizione di professore di matematica, mentre Eulero, declinando l'offerta di promozione da parte della marina russa, tornò a lavorare all'Accademia, sostituendo Bilfinger come professore di fisica.
Nel 1733, Daniel Bernoulli tornò a Basilea ed Eulero prese il suo posto come professore di Matematica. Nel 1734, avendo raggiunto una buona situazione finanziaria, Eulero sposò Katharina Gsell, figlia Georg Gsell un pittore dell'Accademia. I due sposi si trasferirono in una casa vicino al fiume Neva ed ebbero tredici figli. Solo cinque dei tredici figli riuscirono a sopravvivere a causa dell'elevata mortalità infantile; il promogenito fu Johann Albrecht, così chiamato in onore del presidente dell'Accademia, barone Johann Albrecht de Korff.
A San Pietroburgo Eulero continua le sue ricerche che variano in un ampio spettro scientifico: dalla teoria dei numeri e la teoria musicale, all'astronomia e la balistica.
Eulero, nei suoi Commentarii, pone l'accento sull'analisi infinitesimale e sulla meccanica razionale. Per quanto riguarda la teoria dei numeri, la maggior fonte di stimolo di Eulero era Goldbach che gli proponeva problemi di difficile soluzione.
Negli anni '30, inoltre, inizia a preparare la sua "Introductio in analysin infinitorum" del 1748, nella quale porta a termini calcoli pesanti, elabora metodi computazionali e sviluppa le tre classi di funzioni trascendenti dell'Analisi infinitesimale: esponenziale, logaritmica e trigonometrica. Seguendo Leibniz e Bernoulli, divide le funzioni in due classi: algebriche e trascendenti.
Utilizza per la prima volta il simbolo e per indicare l'esponenziale in un articolo sull'artiglieria scritto nel 1728, o nel tardo 1727, e pubblicato solo più tardi. Scopre la formula fondamentale della trigonometria analitica: $e^{ix} = (cos\, x + i\, sin\, x)$.
Nel 1736, il sindaco di Danzica, chiede ad Eulero di risolvere un problema

ricreativo: il problema dei ponti di Königsberg. La città di Königsberg (ora Kaliningrad), è percorsa dal fiume Pregel e da suoi affluenti e presenta due estese isole che sono connesse tra di loro e con le due aree principali della città da sette ponti. Il problema che venne posto ad Eulero è se sia possibile con una passeggiata seguire un percorso che attraversa ogni ponte una e una sola volta e tornare al punto di partenza. Eulero dimostrò che la passeggiata ipotizzata non era possibile a causa del numero dispari di nodi che congiungevano gli archi (ossia delle strade che congiungevano i ponti). La soluzione di Eulero diede origine alla teoria dei grafi, che si sarebbe poi evoluta dando origine alla topologia.
Ad accrescere ancora di più la reputazione di Eulero, fu la pubblicazione, durante gli anni '30, della sua "Mechanica", 890 pagine in due volumi; questo grande lavoro rompeva con le forme geometriche della meccanica ed introduceva le equazioni differenziali di quelli che vengono oggi chiamati punti materiali.
Eulero portava avanti i suoi studi insieme a tanti altri compiti che gli assegnava l'Accademia. Fu membro della commissione pesi e misure, prestò il suo aiuto per il collaudo di pompe da fuoco, seghe e scale. Stimolato dalle ruote ad acqua di Johannes Andreas Segner cominciò a sviluppare macchine idrauliche.
Per quanto riguarda la salute, Eulero soffriva, ogni tanto di febbri pericolose che indebolivano sempre di più il suo fisico. Nell'estate del 1738, Eulero venne colpito da una febbre quasi mortale e da un'infezione che gli provocò un ascesso all'occhio destro; con il tempo Eulero diventò quasi cieco da quell'occhio.

1.1.3 Berlino

Dopo la morte dell'imperatrice Anna della Russia, avvenuta nel 1740, la vita a San Pietroburgo era diventata pericolosa, soprattutto per gli stranieri. Eulero, amante della tranquillità, si era stancato dei continui tumulti che caratterizzavano ormai da tempo la vita nella capitale. Federico il Grande di

Prussia gli offrì un posto all'Accademia di Berlino e Eulero, cogliendo l'occasione per andarsene dalla Russia, accettò l'incarico e partì per Berlino a Giugno del 1741. Visse a Berlino, con la sua famiglia, per i successivi 25 anni.
Nel gennaio del 1744, Federico, fondò formalmente l'Accademia, consistente di quattro piccole classi, con i loro direttori eletti a vita. Le classi erano: Fisica, Matematica, Filosofia speculativa e Letteratura. A Giugno del 1746 Federico confermò Maupertuis presidente perpetuo con poteri autocratici, e i membri elessero Eulero direttore a vita della classe di matematica.
Come le altre Accademie anche quella di Berlino aveva un premio annuale; per l'anno 1746, l'argomento deciso era la causa dei venti. Venne eletto vincitore, da una commisione presieduta da Eulero, il famoso Jean D'Alembert per un articolo astratto contenente nuove equazioni differenziali.
Nel 1750 Maupertuis, a causa dei suoi problemi di salute, dovette assentarsi sempre più spesso e per periodi sempre più lunghi. Durante la sua assenza, Eulero fungeva da presidente effettivo dell'Accademia.
Nonostante la fama e la reputazione crescessero ogni giorno di più, il plebeo e repubblicano Eulero non era popolare presso la corte reale prussiana. Infatti la società prussiana, del diciottesimo secolo, era aristocratica. Federico ed Eulero avevano rapporti abbastanza complicati; sebbene impressionato dai suoi risultati, il re e anche i nobili, lo consideravonbo privo di maniere gentili. Durante il suo soggiorno a Berlino, fra il 1741 ed il 1766, Eulero scrisse più di 380 fra memorie e libri caratterizzati da una combinazione di profondità, originalità e ampiezza che risulterà inarrivabile nella storia della Matematica. Il primo dei fondamentali libri pubblicati da Eulero negli anni '40 fu il suo "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti". Il "Methodus inveniendi" presenta lo stadio iniziale del calcolo delle variazioni, dedicato a trovare le lunghezze massimali e minimali, se esistono, delle curve piane nel corso del loro movimento e gli estremi fra i valori degli integrali. Eulero aggiunse al suo "Methodus inveniendi", su richiesta di Daniel Bernoulli, due

appendici: la prima era un trattato generale sulla teoria matematica dell'elasticità; la seconda contiene una forma generale del principio di minima azione.
Nonostanete fosse impegnato a completare il "Methodus inveniendi", Eulero rimase attivo in teoria dei numeri, ottenendo nel 1741 la prima di tre dimostrazioni del piccolo teorema di Fermat.
Nel 1742 e 1743 Eulero si impegnò in una seconda fase di intensi calcoli di analisi infinitesimale, in preparazione alla sua "Introductio" che apparirà nel 1748 e che diventerà il testo più influente della matematica moderna. Nel frattempo, Eulero stava facendo importanti progressi anche in Ottica, Meccanica e sul trattamento di tempo e spazio.
Nel 1748 Eulero completò il manoscritto delle "Instutiones calculi differentialis", anche se gli occorsero sette anni per pubblicarlo (1755). Fu il primo testo ad organizzare sistematicamente il Calcolo differenziale e a contenerne un vasto programma di ricerca.
Nei tardi anni '40 la rivalità fra D'Alembert, Daniel Bernoulli, Clairaut ed Eulero si intensificò. La competizione non era necessariamente di uno nei confronti degli altri.
I rapporti fra Eulero e D'Alembert si raffreddarono soprattutto a causa di una competizione nata nel campo della Fluidodinamica. Alla svolta degli anni '50, Clairaut, D'Alembert ed Eulero si contendevano la supremazia nel tentativo di risolvere il problema dei tre corpi o problema delle perturbazioni.
Eulero fu impegnato nel ruolo di presidente dell'Accademia da Maggio 1753 a Luglio 1754. Già in Aprile Maupertuis aveva chiesto a Federico di poter "cedere gli aspetti amministrativi dell'Accademia al professor Eulero", durante la sua assenza e ricevette una risposta positiva da parte del re.
A Giugno del 1754 Eulero ricevette una lettera da un suo importante giovane collega, il diciannovenne Ludovico de la Grange Tournier, di Torino, più noto come Joseph Louis Lagrange. Con questa lettera inziò una lunga corrispondenza fra Eulero e Lagrange e si aprì il periodo di quello che Eulero rinominò *calcolo delle variazioni*. Lagrange propose un metodo al-

ternativo al metodo geometrico esposto da Eulero nel suo "Methodus inveniendi"; un metodo puramente analitico che sta alla base del calcolo delle variazioni. Lagrange perfezionò le proprie idee e le espose nel secondo Volume delle "Miscellanea Taurinensis" per gli anni 1760-1761 che verrà pubblicato nel 1762. Sia nel primo che nel secondo Volume delle "Miscellanea Taurinensis" sono contenuti anche i lavori di Lagrange sul *problema delle corde vibranti e della propagazione del suono*. Sulla risoluzione di questo problema (come si propaga su una corda un'energia dovuta allo spostamento dalla sua posizione di quiete), infatti, vi era già da tempo un grande dibattito fra D'Alembert, Eulero e D.Bernoulli; Lagrange si inserì in questa disputa difendendo la posizione di Eulero.
Dalla morte di Maupertuis, avvenuta nel 1759, Eulero agì da presidente dell'Accademia di Berlino. Sperava di essere nominato presidente, ma i suoi rapporti con Federico si erano deteriorati. Il re aveva in mente un altro candidato: D'Alembert.
Dopo varie vicende D'Alembert divenne, pur senza trasferirsi in permanenza a Berlino, il "presidente segreto" dell'Accademia.
Dalla corrispondenza di Eulero con Müller si vede che già dal 1761 Eulero considerava seriamente di tornare in Russia; la situazione a Berlino cominciava ad essere troppo pesante. Dalla fine della guerra dei Sette Anni, avvenuta nel 1763, fino al 1766 Eulero comunque rimase a Berlino.
La salute di Eulero durante la sua carriera andò peggiorando: la vista dall'occhio destro diminuì così tanto, durante il suo soggiorno in Germania, che Federico lo soprannominò "il mio Ciclope". Questa situazione però non comportò conseguenze negative per il suo rendimento. Eulero continuò a scrivere e a studiare. Di grande importanza nell'attività scientifica di Eulero dopo il 1760 è la raccolta di 234 lettere che invia alla nipote di Federico, la principessa di Anhalt-Dessau, alla quale Eulero faceva da tutore. Queste lettere, inviate dal 1760 al 1762, riguardavano le scienze, la filosofia e la religione e vennero pubblicate in un libro dal titolo: "Lettere a un Principessa tedesca".

1.1.4 Ritorno a San Pietroburgo

In Russia la situazione politica si era stabilizzata e Caterina la Grande, salita al potere nel 1762, invitò Eulero a San Pietroburgo nel 1766. Eulero accettò e con la sua famiglia arrivò a San Pietroburgo il 28 luglio 1766.
Purtroppo nel Maggio del 1771, a San Pietroburgo, scoppiò un grande incendio che distrusse molte case, fra cui quella di Eulero, il quale, praticamente quasi cieco, non se ne accorse fino a quando il suo ufficio non fu completamente avvolto dalle fiamme. Venne portato in salvo insieme a gran parte della sua biblioteca, ma tutti i suoi appunti andarono in fumo. Caterina rimborsò Eulero con 6,000 rubli per comprare una nuova casa.
I problemi per Eulero non finirono quì; venne colpito dalla cataratta all'occhio sinistro. Subì un intervento a Settembre del 1771, ma in seguito ad un'infezione divenne quasi cieco anche da quest'occhio. Eulero però non perse la sua voglia di studiare e ricercare; nemmeno la cecità lo fermò. Riusciva a fare a mente calcoli difficili e faceva affidamento alla sua memoria fotografica. Inoltre disponeva di un piccolo gruppo di ricercatori fra cui vi erano i suoi figli Albrecht e Christoph. Altri membri del gruppo erano: A. J. Lexell, W. L. Krafft, M. E. Golovin e Fuss. Soprattutto Fuss e Golovin prendevano nota di ciò che Eulero dettava. Fuss fece anche i calcoli in più di 160 articoli di Eulero pubblicati dopo il 1766, e Golovin in più di 70. Continuò a scrivere libri fino al 1773 anche se la sua corrispondenza epistolare cominciava a calare.
A Novembre del 1773 morì Katharina, la moglie di Euler e questa perdita rese molto più complicata la vita domestica in quanto Katharina dirigeva tutto in casa. Tre anni dopo, a Luglio del 1776, Eulero si risposò e questa volta con la sorellastra di Katharina, Salome Abigail.
La salute di Eulero non migliorava e la sua corrispondenza diminuì precipitosamente; non più di venti lettere all'anno. La corrispondenza con Lagrange, importante sorgente di ricerca in teoria dei numeri, analisi e meccanica, terminò a Marzo del 1775, su argomenti di integrali ellittici, paradossi dell'integrazione e dimostrazioni dimenticate di Fermat.

Nel Gennaio del 1783, la principessa Caterina Romanova Daskova, una favorita di Caterina II, fu nominata direttore dell'Accademia e chiese che, insieme ad Albrecht ed a Fuss, la persona che chiamava *"il grande Euler"* la accompagnasse sulla sua carrozza alla prima seduta. Eulero si sentì onorato di questa richiesta e naturalmente accettò; accompagnò la principessa nella sua entrata all'Accademia e la presentò. Questa sarebbe stata l'ultima seduta di Eulero.
Il 18 settembre 1783, in una giornata come le altre, in cui discusse del nuovo pianeta Urano appena scoperto, scherzò con il nipote a cui tenne una lezione, e fu colto improvvisamente da un'emorragia cerebrale. Morì poche ore dopo all'età di 76 anni.

Capitolo 2

Joseph Louis Lagrange

2.1 Biografia

Joseph Louis Lagrange è riconosciuto come uno dei maggiori matematici del XVIII secolo. Importanti contributi sono stati forniti da Lagrange nello sviluppo della teoria dei numeri e del calcolo delle variazioni, nella delineazione dei fondamenti della meccanica razionale e nello studio delle equazioni differenziali. È considerato uno dei pionieri della teoria dei gruppi. Per quanto riguarda l'astronomia, Lagrange ha effettuato ricerche sui calcoli della librazione lunare e sul moto dei pianeti.

2.1.1 Famiglia, gioventù e formazione

Joseph Louis Lagrange, (Giuseppe Luigi Lagrange) nacque a Torino il 25 Gennaio 1736 e venne battezzato con il nome di Giuseppe Ludovico Lagrangia. La famiglia era originaria della regione francese di Tours; il bisavolo di Lagrange, dopo aver servito negli eserciti di Luigi XIV come capitano di cavalleria, era passato agli ordini di Carlo Emanuele II, duca di Savoia, e aveva sposato una Conti della famiglia nobile romana. Suo padre Giuseppe Francesco Ludovico Lagrangia era dottore in diritto all'Università di Torino ed era tesoriere dell'Ufficio dei lavori pubblici e delle fortificazioni a Torino, mentre

sua madre, Teresa Grosso era l'unica figlia di un ricco medico di Cambiano. Lagrange era il primogenito di undici figli e inquanto tale venne avviato alla professione paterna; dopo aver studiato privatamente, si iscrisse, all'età di 14 anni, all'Università di Torino, dove si dedicò agli studi di diritto che però abbandonò nel 1752. Cominciò a frequentare la Biblioteca universitaria per attendere ai suoi prediletti studi di matematica, che iniziò con la lettura del primo volume degli "Elementa matheseos universae" di Christian Wolff. Fra i suoi maestri all'Università vi era il padre Giambattista Beccaria, che era sostanzialmente un fisico sperimentale. Fu proprio G. Beccaria a suggerire a Lagrange lo studio degli "Elementa" che ha avuto un peso notevole nella sua formazione scientifica e con il quale si avviò agli studi in campo matematico e fisico matematico essenzialmente da autodidatta.
Nel 1754 Lagrange aveva già letto, oltre al trattato di Wolff, la maggior parte dei trattati di matematica e meccanica tra i più avanzati e famosi dell'epoca, come l'"Introductio analysin infinitorum" di Eulero, le "Lectiones Mathematicae de Methodo Integralium" di Johann Bernoulli", i due Volumi della "Mechanica" di Eulero, gran parte dei "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" di Newton, il "Traité de Dynamique" di D'Alembert.
Sempre nel 1754, esortato da G.C. Fagnano, il più celebre matematico italiano dell'epoca, pubblicò a Torino il suo primo lavoro, "Lettera di Luigi de La Grange Tournier torinese all'illustrissimo signor conte Giulio Carlo da Fagnano", nel quale sviluppava l'analogia tra la formula del binomio e i differenziali di ordine superiore del prodotto di due funzioni.

2.1.2 Inizio della corrispondenza epistolare con Eulero

Nel 1754 Eulero, olimpico nella sua quiete berlinese, riceve una lettera inviatagli il 28 Giugno da Lagrange. Lagrange, diciannovenne, aveva avuto il coraggio di rivolgersi direttamnete ad Eulero, il più grande matematico dell'epoca, per chiedergli il parere su certi risultati ottenuti nel campo dell' analisi matematica, risultati che in realtà erano già noti da più di cinquant'anni.

Eulero non risponde alla lettera di Lagrange ma la conserva. Lagrange, infatti, aveva concluso la lettera affermando che probabilmente avrebbe avuto da inviargli "alcune osservazioni sui *massimi* e *minimi* che si incontrano nei fenomeni della natura". Questa affermazione aveva destato una certa curiosità in Eulero in quanto lo aveva riportato alle sue ricerche, fermatesi anni prima, sul principio della minima azione.
Il 12 agosto 1755 Lagrange spedisce ad Eulero una seconda lettera, la quale però non riguarda, come ci si poteva aspettare, il principio della minima azione, ma l'intero contenuto del "Methodus inveniendi" di Eulero. In questa lettera Lagrange comunica a Eulero, in poche pagine, quel metodo generale e analitico, il *metodo delle variazioni*, che sta a fondamento del *calcolo delle variazioni* e del quale, lo stesso Eulero, ne aveva sottolineato la necessità.
Con queste due lettere ha inizio un'importante corrispondenza fra Eulero e Lagrange che durerà fino a Marzo del 1775 e quindi per circa 21 anni.
La prima parte della corrispondenza verte principalmente sul calcolo delle variazioni ed è scritta in lingua latina. Nella seconda e terza parte la lingua utilizzata è il francese e gli argomenti affrontati sono rispettivamente: il problema delle corde vibranti; vari problemi di teoria dei numeri ed integrazione di particolari tipi di funzioni.

2.1.3 Primi incarichi ed opere di Lagrange

Lagrange, il 26 settembre 1755, venne nominato assistente per il corso di matematica delle Reali Scuole di artiglieria di Torino. Il suo lavoro consisteva nella collaborazione alle attività didattiche e nella redazione di testi a uso degli studenti. In particolare redasse un testo di geometria analitica e di calcolo differenziale, e uno di meccanica.
Il 5 ottobre 1756 Lagrange divenne associato dell'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin, per interessamento del suo presidente P.L. Moreau de Maupertuis.
Nel 1757 Lagrange, G.A. Saluzzo di Monesiglio e G.F. Cigna fondarono la

Società privata di Torino; lo scopo era quello di promuovere le ricerche nel campo delle scienze matematiche e naturali. La Società privata di Torino aquisì il nome di Società Reale nel 1760 e divenne Accademia delle scienze di Torino nel 1783. Le prime memorie e i risultati delle principali attività della Società privata furono pubblicati nel Volume I delle "Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis", (Torino 1759). Questo primo Volume contiene tre importanti memorie di Lagrange, fra cui le "Recherches sur la nature et la propagation du son" che è una vera e propria monografia sulla natura e la propagazione del suono, con la quale Lagrange entrava in una delle questioni più dibattute dell'epoca: la soluzione dell'equazione alle derivate parziali che regola l'emissione dei suoni di una corda che vibra. Questo problema, infatti, fu oggetto di ricerche e controversie tra i maggiori matematici dell'epoca (Jean Le Rond d'Alembert, Eulero e Daniel Bernoulli). L'esposizione è preceduta da un profilo storico dei lavori che avevano fatto maggiormente progredire gli studi sulla corda vibrante, a cominciare da Isaac Newton.

Il secondo Volume delle "Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae Taurinensis" relativo agli anni 1760-61, apparirà nel 1762. I principali contenuti di questo Volume sono le nuove ricerche di Lagrange sul problema delle corde vibranti, le "Nouvelles Recherches sur la nature et la propagation du son", ed un'esposizione molto sintetica del suo metodo per i massimi e minimi nella memoria "Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies". In realtà Lagrange voleva rendere noto il suo metodo delle variazioni in un libro da pubblicare a Berlino con l'appoggio di Eulero. Tuttavia, a casua di qualche malinteso fra Eulero e Lagrange, come si legge nella corrispondenza epistolare, il libro non venne pubblicato e Lagrange ripiegò con la pubblicazione dell'"Essay".

A Novembre del 1763 Lagrange lascia per la prima volta Torino per un viaggio in Europa in cui prevedeva di visitare Parigi e Londra. Non riuscì però ad arrivare a Londra poiché una malattia lo colpì a Parigi costringendolo

ad interrompere il viaggio, soccorso da D'Alembert e dal marchese Domenico Caracciolo. Il soggiorno a Parigi fu comunque ricco di conoscenze e di esperienze: incontrò C. Clairaut, A. Fontaine, Antoine Caritat marchese di Condorcet, J.-A. Nollet e l'abate J.-Fr. Marie. A fine Maggio del 1764, rientrò a Torino, dopo essersi fermato a Ferney per fare la conoscenza di Voltaire. A Torino riprese l'intensa attività scientifica ma cresceva la sua insoddisfazione per il modesto incarico presso le Scuole di artiglieria.
Lagrange si impegnò nella matematizzazione dei problemi astronomici e nella ricerca di nuove regolarità. In questo periodo compose le prime due grandi memorie, sollecitate dai concorsi banditi dall'Académie des sciences per il 1764 e il 1766, nei quali esse furono premiate: la prima memoria, "Recherches sur la libration de la Lune" (1764), spiega il fenomeno per cui il nostro satellite non mostra esattamente sempre la stessa faccia, ma si hanno piccole oscillazioni nella superficie visibile; nella seconda, "Recherches sur les inégalités des satellites de Jupiter causées par leur attraction mutuelle" (1766), viene affrontato il problema degli n corpi. La complessità dei calcoli astronomici spinse Lagrange ad un sistematico tentativo di formalizzazione e di riorganizzazione dei principi della meccanica che trovò il suo coronamento nella "Mécanique analytique".
Nel 1766 si sposò con Vittoria Conti. Nel frattempo a Berlino esplose il dissenso tra Eulero e il re di Prussia, Federico II il Grande. Eulero ritornò a Pietroburgo e D'Alembert colse l'occasione per raccomandare Lagrange a Federico.

2.1.4 Berlino

Lagrange lasciò Torino il 21 Agosto 1767 e giunse a Berlino il 21 ottobre. Il 6 novembre si insediò all'Académie royale des sciences et belles lettres, come direttore della classe di matematica.
L'attività scientifica di Lagrange fu notevole durante il soggiorno berlinese: in vent'anni pubblicò un'ottantina di memorie di algebra, di analisi, di teoria dei numeri, di meccanica e di astronomia negli Atti accademici di Berlino, Pa-

rigi e Torino. A Berlino compose anche la sua opera maggiore, la "Mécanique analytique" che venne pubblicata nel 1788. L'aggettivo "analitica" indica che la meccanica era divenuta per Lagrange una parte dell'analisi, fondata sul principio delle "velocità virtuali". Nella sua trattazione la statica precedeva la dinamica, che veniva ricondotta alla prima mediante il "principio di D'Alembert". Lagrange trattava i problemi liberi e quelli vincolati in maniera uniforme con ampio uso di metodi variazionali. Le leggi di Newton e i principali risultati della meccanica erano ricavati come teoremi. La "Mécanique analytique" è considerato uno fra i capolavori della letteratura matematica.
Il primo periodo berlinese, inoltre, è caratterizzato dall'apertura di due nuovi campi di ricerca per Lagrange ovvero i problemi diofantei e la teoria generale delle equazioni algebriche ai quali diede notevoli ed importanti contributi.
Tra il 1772 e il 1775 Lagrange dette alle stampe, nelle "Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin", quattro altre fondamentali memorie sulla questione dei fondamenti del calcolo differenziale che egli voleva liberati da ogni considerazione di limiti e infinitesimi, nonché trattati con metodi algebrici, generali e uniformi.
Nel 1783 morirono sia sua moglie Vittoria, sia il suo caro amico D'Alembert e questo provocò a Lagrange una forte depressione. Nel 1786 morì anche Federico II e Lagrange vedeva venir meno quelle condizioni di larga autonomia di cui aveva goduto fino ad allora. Il disagio di Lagrange venne colto da G.H. de Riqueti conte di Mirabeau che fu il regista del suo trasferimento a Parigi.
Lagrange entrò a far parte dell'Acadèmie des sciences di Parigi.

2.1.5 Parigi

La prima presenza di Lagrange all'Acadèmie des sciences è datata al 13 giugno 1787. Per lui venne creata una carica apposita, quella di "Pensionnaire vétéran", che gli consentiva di avere uno stipendio decoroso.
Lagrange, a Parigi si sentì attratto da una nuova scienza: la chimica. Cominciò così a frequentare il circolo di A.L. Lavoisier, contribuendo con altri matematici, come Laplace e G. Monge, a mettere su basi solidamente quan-

titative la nuova disciplina.
Lagrange era arrivato a Parigi alla vigilia della grande Rivoluzione; notevole era il desiderio, all'interno dell'Académie des sciences, di un rinnovamento istituzionale. L'Académie nominò una commissione, nella quale Lagrange venne chiamato a far parte il 27 Ottobre 1790, per studiare un sistema uniforme e razionale per i pesi e le misure, il sistema metrico decimale dal quale avrà origine l'odierno Sistema Internazionale.
Il 24 maggio 1792 Lagrange si risposò con Adélaïde Lemonnier, figlia dell'astronomo Pierre Charles e nipote di Guillaume, medico del re. Nel 1793 un decreto della Convenzione ordinava l'arresto degli stranieri nati in paesi in guerra con la Repubblica, tra i quali figurava il Piemonte. La comunità scientifica si schierò in difesa di Lagrange che fu posto in requisizione con l'incarico di studiare problemi di balistica e fu mantenuto libero in Francia.
Il 9 Novembre 1794 Lagrange venne nominato professore all'Ècole normale, dove nel 1795 espose le sue esemplari "Leçons élémentaires sur les mathématiques" che ebbero una grande influenza sui successivi insegnamenti.
Lagrange, inoltre, il 24 Maggio 1795 tenne la sua prima lezione all'École centrale des travaux publics (poi École polytechnique), iniziando una collaborazione duratura, dalla quale trassero origine due importanti trattati: "Théorie des fonctions analytiques" (1797) e le "Leçons sur le calcul des fonctions" (1806).
Gli impegni di Lagrange si moltiplicavano di giorno in giorno: il 27 dicembre 1795, inserito tra i primi membri dell'Institut national, fu eletto presidente della classe di scienze matematiche e fisiche.
La fama di Lagrange continuò a crescere sia durante la Rivoluzione che sotto Napoleone Bonaparte. Il 24-25 Dicembre 1799 fu nominato tra i primi membri del Senato, previsto dalla nuova costituzione imposta con il colpo di Stato del generale Napoleone Bonaparte, divenuto primo console. Come tutti i senatori, nel 1808 Lagrange venne nominato conte dell'Impero; nel 1804 era stato decorato del grado di grande ufficiale della Legion d'onore. Pochi giorni prima di morire, l'8 Aprile 1813, fu insignito anche dell'Ordine

imperiale della Réunion.
Lagrange grazie alle sue buone condizioni di salute, riuscì a svolgere il suo lavoro scientifico fino al termine dei suoi giorni. Dal 1795 al 22 Marzo 1813 fu tra i più assidui alle riunioni dell'Institut. Passarono sotto il suo giudizio i primi lavori di A.M. Ampère, S.D. Poisson, L. Poinsot, F.F.D. Budan, V. Brunacci, P. Ruffini, M. Barbieri, P. Abbati Marescotti. Inoltre una delle principali attività di Lagrange in questo periodo era costituita dal lavoro di rielaborazione dei suoi trattati, tutti riediti a Parigi: "Leçons sur la théorie des fonctions" (1806), "Traité de la résolution des équations numériques" (1808), "Théorie des fonctions analytiques" (1813), "Mécanique analytique" (1811-15).
Purtroppo a Marzo del 1813 le condizioni di salute di Lagrange peggiorarono rapidamente. Si spense il 10 Aprile 1813 nella sua casa parigina. I funerali furono celebrati in forma solenne, il feretro fu collocato al Panthéon, tra le glorie della Francia. La sua ricca biblioteca privata fu venduta all'asta mentre i manoscritti furono acquistati dall'Institut, nella cui Biblioteca sono ancora conservati.

Capitolo 3

Lettera di Eulero a Lagrange, Berlino, 23 Ottobre 1759

3.1 Lettera in lingua originale

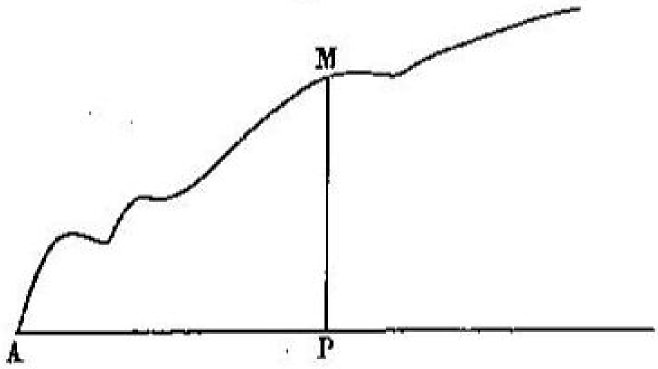
EULER À LAGRANGE

Berlin, ce 23 octobre 1759.

Monsieur,

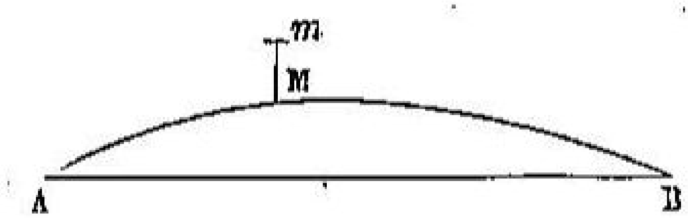
Ayant reçu l'excellent présent que vous avez eu la bonté de m'envoyer, je l'ai d'abord parcouru avec la plus grande avidité, et je n'ai pu assez admirer votre adresse, dont vous maniez les plus difficiles équations, pour déterminer le mouvement des cordes et la propagation du son. Je vous suis infiniment obligé d'avoir mis ma solution à l'abri de toutes chicanes et c'est aprés vos profonds calculs que tout le monde doit à présent reconnaitre l'usage des fonctions irrégulières et disontinues dans la solution de ce genre de problèmes. En effet, la chose me paraît à présent si claire, qu'il n'y saurait rester le moindre doute. Supposons qu'il faille chercher une telle fonction z des deux variables t et x, qu'il soit $\left(\frac{dz}{dt}\right) = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, et il est évident, que toute fonction de $t+x$ tant irrégulière que régulière peut être mise pour z: par exemple,ayant tracé à plaisir une ligne quelconque AM (Fig. 1), si l'on prend l'objectif

Fig. 1.



$AP = t + x$, l'appliquée PM fournira une juste valeur pour z, et il en est de même du problème des cordes. A cette occasion, j'ai observé que ma solution n'est pas assez générale : car qu'on puisse donner à la corde au commencement une figure quelconque AMB (Fig. 2) ma solution exige que dans cet état il n'y ait point de mouvement, mais à présent je puis résoudre le

Fig. 2.



problème lorsqu'on a donné à la corde non seulement une figure quelconque AMB, mais qu'outre cela on ait imprimé à chaque point M une vitesse quelconque Mm. Je vois que vous avez traité ce cas lorsque la corde, au commencement, est tendue en ligne droite AB, mais je ne sais pas bien si votre solution s'étend aussi au cas où l'on suppose à la corde, outre le mouvement donné, une figure quelconque.

Je passe à la propagation du son, dont je n'ai jamais pu venir à bout, quelques efforts que je me sois donnés, car ce que j'en avais donné dans ma jeunesse était fondé sur quelque idée illusoire pour mettre d'accord la théorie avec l'experience sur la vitesse du son. J'ai donc lu votre Mémoire sur cette matière avec la plus vive satisfaction, et je [ne] puis assez admirer votre sagacité en surmontant tous les obstacles. A présent, je vois bien qu'on pourrait tirer la même solution de la formule

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

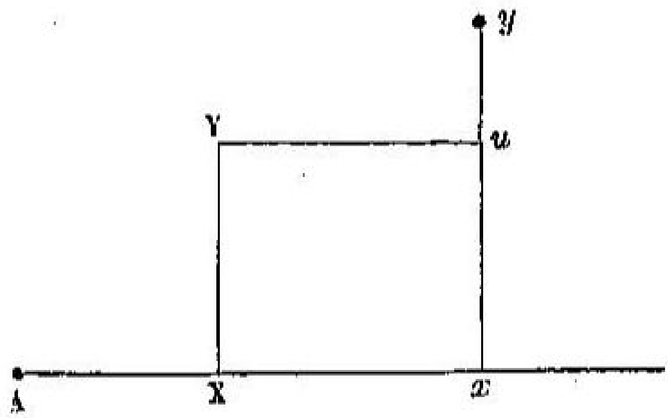
en faisant usage des fonctions discontinues; mais alors M. d'Alelmbert me ferait les mêmes objections que contre le mouvement des cordes : ce n'est que après vos recherches que je pourrai faire valoir cette méthode. J'ai résolu par là le cas où l'on suppose au commencement non seulement un déplacement quelconque à autant de molécules d'air qu'on veut, mais en donnant, outre cela, à chacune un mouvement quelconque, tout comme dans les cordes, mais en ne regardant qu'une ligne physique d'air, ou bien un tuyau mince et droit, rempli d'air, comme vous avez fait. Cette généralisation me parait d'autant plus utile qu'elle nous découvre plus clairement le mouvement dont toutes les particules d'air sont successivement ébranlées : on en peut aussi répondre à un doute bien important, qui m'a longtemps tourmenté, c'est qu'un ébranlement excité en A (Fig.3) se répand également des deux côtés

Fig. 3.

du point A, mais étant parvenu en X, il ne se répand que vers E, on demande donc quelle différence il y a entre un ébranlement primitif en A et un dérivatif en X, pour que celui-là se répande vers D et E et celui-ci uniquement vers E. Ce doute est levé par la susdite solution générale, par laquelle on verra que le déplacement primitif des particules en A, avec le mouvement imprimé à chacune, pourraît être tel, que la propagation ne se fit que dans le sens E, et on s'apercevra ensuite que cette circonstance a toujours lieu dans les ébranlements dérivés. Il est bien remarquable que la propagation du son se fait actuellement plus vite que le calcul marque, et je renonce à présent à la pensée que j'eus autrefois, que les ébranlements suivants pourraient accélérer la propagation des précédents, de sorte que plus un son serait aigu, plus serait grande sa vitesse, comme vous aurez peut-être vu dans nos derniers Mémoires. Il m'est aussi venu dans l'esprit, si la grandeur des ébranlements n'y pourrait causer quelque accélération, puisque dans le calcul on les a supposés infiniment petits, et il est évident que la grandeur changerait le calcul et le rendrait intraitable. Mais autant que j'y puis entrevoir, il me semble que cette circonstance diminuerait, plutôt la vitesse.

C'est dommage que ce même probléme ne peut pas être résolu en donnant à l'air trois dimensions, ou seulement deux, car on a lieu de douter si la propagation serait alors la même. Au moins est-il certain que les ébranlements seraient alors d'autant plus faibles, plus ils s'écarteraient de leur origine. J'ai bien trouvé les formules fondamentales pour le cas où l'étendue de l'air n'a que deux dimensions, ou est contenue entre deux plans. Soit Y (Fïg. 4.) une particule d'air dans l'état d'équilibre, qui après quelque agitation ait été transportée en y.

Fig. 4.



Posons $AX = X, XY = Y$; $Xx = Yu = x$ et $uy = y$. Cela posé, tant x que y seront certaines fonctions de XY et du temps z, et partant de trois variables, et je trouve, pour leurs déterminations les deux équations suivantes:

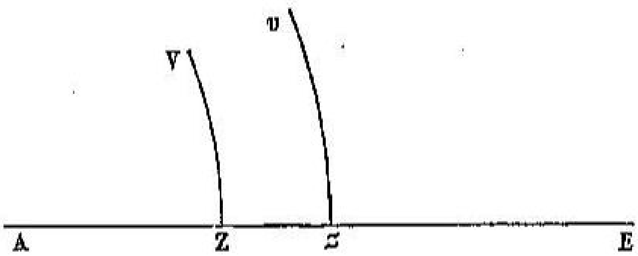
$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dXdY}\right)$$

et

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dXdY}\right).$$

De là, si je suppose que l'ébranlement primitif soit fait en A (Fig. 5) et qu'il se répande de là, en forme des ondes circulaires, de sorte qu'un arc ZV (dans l'état d'équilibre) ait été après l'agitation transporté en zv, posant $AZ = Z$

Fig. 5.



et $Z = z$, la quantité z sera une certaine fonction des deux variables z et Z pour la détermination de laquelle je trouve cette équation

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right) + \frac{\alpha}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \frac{\alpha Z}{Z^2}.$$

En rejetant ces deux derniers termes, il reste la même equation, quiconvient au cas où l'air est étendu uniquement en ligne droite AE. Or de cette équation, il ne paraît pas que la propagation se fasse avec la même vitesse dans les deux cas. ll serait donc fort à souhaiter que l'analyse fût portée au point: de pouvoir résoudre ces sortes d'équaitions, et j'espère que cette gloire vous est réservée. Ce que vous dites des échos est aussi important dans l'Analyse que dans la Physique, et tout le monde doit convenir que ce premier Volume de vos travaux est un vrai chef-d'oeuvre, et renferme bien plus de profondeur que tant d'autres Volumes des Académies établies et jamais société particulière n'a plus mérité d'être soutenue par son souverain.

Pour les sons de Musique, je suis parfaitement de votre avis, Monsieur, que les sons consonnants que M.Rameau prétend entendre d'une même corde viennent des autres corps ébranlés : et je no vois pas pourquoi ce phénomène doit être regardé comme le principe de la Musique plultot que les proportion véritables qui en sont le fondement. Je crois encore avoir bien déterminé le degré d'agrément avec lequel on entend deux sons donnés, et de là deux sons un raison 8 : 9 s'aperçoivent plus aisément que s'ils étaient en raison 7 : 8. Mais je crois qu'ici il faut avoir égard à un préjugé, par lequel on suppose d'avance la proportion des sons, et alors une aberration est insopportable. Comme celui qui accorde un violon, si deux cordes se trouvent dans l'intervalle d'une sixte, il les juge fausses, puisqu'il prétend que leur intervalle soit une quinte. Ainsi, pour l'intervalle 7 : 8, il sera fort difficile de prendre Cet intervalle tel qu'il est; on s'imaginera toujours qu'il devrait être celui de 8 à 9, étant mal accordé. Il ne s'agit que de prévenir ce préjugé pour mettre en usage l'intervalle 7 : 8, mais il faudrait aussi pour cela des règles particulières de composition.

Je viens d'achever le III Volume de ma *Mécanique*, qui roule sur le mouvement des corps solides inflexibles. J'y ai découvert des principes tout à fait nouveaux et de la dernière importance. Pour qu'un tel corps tourne liberement autour d'un axe, il ne suffit pas que cet axe passe par le centre de gravité (ou plutôt par le centre d'inertie du corps); mais il faut outre cela que toutes les forces centrifuges se détruisent. Il est bien évident que, dans tous les corps, toutes les lignes qui passent par son centre d'inertie n'ont pas cette propriété. Or j' j'ai démontré que dans tous les corps, quelque irréguliers qu'ils soient, il y a toujours trois telles lignes perpendiculaires entre elles, que je nomme les trois axes principaux du corps, par rapport auxquels je détermine ensuite les *moments d'inertie*, et cette considération m'a mis en état de résoudre quantité de problèmes, qui m'avaient paru insolubles auparavant; comme, ayant imprimé à un corps quelconque un mouvement quelconque, de déterminer la continuation de ce mouvement, faisant abstraction de toutes forces qui pourraient agir sur le corps. J'espère que vous aurez bien reçu ma dernière lettre; pour celle-ci je la fais passer par la main d'un ami à Genève, M. Bertand,

qui s'est appliqué aux Mathématiques avec un très grand succés.
J'ai l'honneur d'être, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
L. Euler.

A Monsieur de La Grange Tournier, Professeur en Mathématiques et membre de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres, de Prusse à Turin.

3.2 Traduzione in lingua italiana

EULERO A LAGRANGE

Berlino, 23 ottobre 1759.

Signore,
Dopo avere ricevuto l'eccellente presente[1] che avete avuto la gentilezza di inviarmi, io l'ho innanzi tutto letto con la più grande avidità, e non ho che potuto ammirare la vostra abilità, con cui maneggiate le più difficili equazioni, per determinare il movimento delle corde e la propagazione del suono[2]. Vi sono infinitamente grato di avere messo la mia soluzione al riparo da ogni critica[3], ed è dopo i vostri calcoli approfonditi che tutti ora devono riconosce-

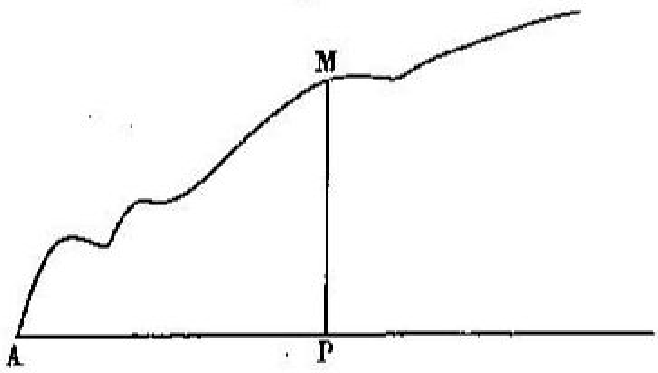
[1]Si tratta del tomo I delle "Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis" che Lagrange aveva già annunciato nelle precedenti lettere del 28 luglio 1759 e 4 agosto 1759. Questo volume contiene tre importanti memorie di Lagrange: "Recherches sur la methode de maximis, et minimis", "Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes" e "Recherches sur la nature et la propagation du son".

[2]Il commento di Eulero riguarda, quì, la terza memoria di Lagrange, "Recherches sur la nature et la propagation du son", già citata alla nota precedente.

[3]Si tratta delle critiche avanzate da M. D'Alembert contro la soluzione del problema delle corde vibranti fornita da Eulero. Lagrange, infatti, nell'introduzione delle sue "Recherches sur la nature et la propagation du son", scrive: "... je tire de mes formules la même construction du probléme *de chordis vibrantibus*, que M.Euler a donné, et qui a été si fort contestée par M.D'Alembert."

re l'uso delle funzioni irregolari e discontinue nella soluzione di questo genere di problemi[4]. In effetti, ora la cosa mi sembra così chiara che non vi potrebbe nascere alcun dubbio. Supponiamo che occorra cercare una tale funzione z delle due variabili t e x, che sia $\left(\dfrac{dz}{dt}\right) = \left(\dfrac{dz}{dx}\right)$, è evidente che ogni funzione di $t + x$, sia irregolare che regolare[5], può essere presa per z: per esempio, avendo tracciato a piacere una linea qualunque AM (Fig.1), se si prende

Fig. 1.

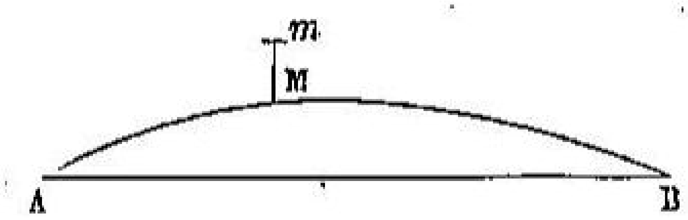


l'ascissa $AP = t + x$, l'ordinata PM fornirà un giusto valore per z, ed è la stessa cosa del problema delle corde. In questa occasione, ho osservato che la mia soluzione non è abbastanza generale: affinchè si possa dare alla corda all'inizio una figura qualunque AMB (Fig 2), la mia soluzione richiede che in questo stato non ci sia alcun movimento, ma ora io posso risolvere

[4]La disputa fra D'Alembert e Eulero è incentrata prevalentemente sull'uso delle funzioni continue e discontinue nella soluzione del problema delle corde vibranti: D'Alembert ammette solo soluzioni continue mentre Eulero discontinue.

[5]Lagrange ritornerà, in maniera più esplicita, su questo argomento nelle sue "Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son" del 1762 (capitolo II, §5: "Des fonctions irrégulières et discontinues", §5: "Sur la nature et l'usage de ces fonctions").

Fig. 2.



il problema nel caso in cui viene data alla corda non solo una figura qualsiasi AMB, ma oltre a questa, venga impressa una qualsiasi velocità Mm ad ogni punto M. Vedo che avete tratatto il caso in cui la corda all'inizio è tesa in linea retta[6] AB, ma non so se la vostra soluzione si estende anche al caso in cui si suppone per la corda, oltre al movimento dato, una figura qualunque. Passo ora alla propagazione del suono, argomento di cui non sono mai riuscito a venirne a capo, per quanti sforzi io abbia fatto, in quanto ciò che avevo trovato nella mia gioventù era fondato su idee illusorie, per mettere d'accordo la teoria con l'esperienza sulla velocità del suono[7]. Ho quindi letto la vostra Memoria su questo argomento con la più grande soddisfazione, e non ho potuto che ammirare la vostra sagacità nel superare tutti gli ostacoli[8]. Ora, vedo che si potrebbe dedurre la stessa soluzione dalla formula

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$$

facendo uso delle funzioni discontinue; ma allora il Signor D'Alembert mi farebbe le stesse obiezioni di quelle rivolte contro il movimento delle corde[9]: è solo dopo le vostre ricerche che potrei fare valere questo metodo. Ho risolto

[6]Lagrange affronta rapidamnete questo argomento nel §41 delle sue "Recherches sur la nature et la propagation du son".

[7]L'idea illusoria alla quale Eulero fà riferimento, è riportata nella sua memoria sulla propagazione del suono "Dissertatio phisica de sono" (E.2), 1727.

[8]Eulero comincia a commentare la seconda parte delle "Recherches sur la nature et la propagation du son" di Lagrange: "De la propagation du son".

[9]La prima memoria di Eulero sul problema delle corde vibranti, dal titolo "Sur la vibration des cordes" (E.140), venne criticata da D'Alembert nella sua "Addition au mémoire

così il caso in cui si suppone inizialmente non solo uno spostamento qualsiasi di quante molecole d'aria si voglia, ma dando, oltre a questo, ad ognuna, un qualsiasi movimento, come avviene nelle corde, ma osservando soltanto una linea fisica d'aria, o meglio un tubo sottile e dritto, pieno d'aria, come voi avete fatto. Questa generalizzazione mi sembra così utile da farci capire più chiaramente il movimento con cui tutte le particelle d'aria sono successivamente scosse: si può così chiarire un dubbio molto importante, che mi ha a lungo tormentato, e cioè che una vibrazione esercitata in A (Fig.3) si diffonde allo stesso modo dalle due parti del punto A, ma una volta giunta in X,

Fig. 3.

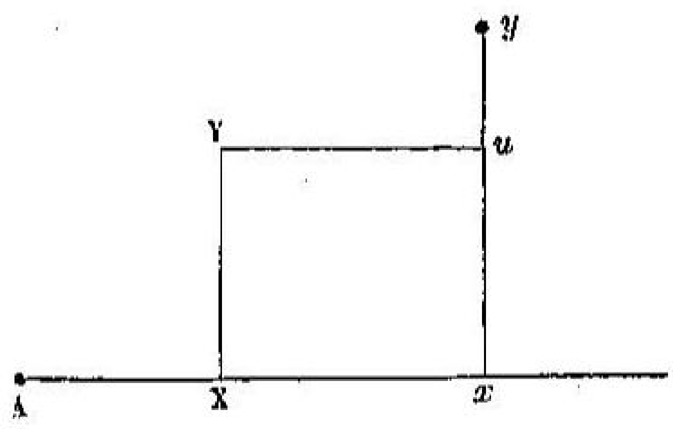
essa si diffonde solo verso E. Ci si chiede allora quale differenza ci sia fra una vibrazione primitiva in A e una derivata in X, perché quella [quella primitiva], si diffonde verso D e E, e questa [quella derivata], solo verso E. Questo dubbio è sollevato dalla suddetta soluzione generale, dalla quale si vedrà che lo spostamento primitivo delle particelle in A, con il movimento impresso ad ognuna, potrebbe essere tale che la propagazione avvenga solo nel verso di E, e ci si accorgerà poi che questa circostanza si realizza sempre nelle vibrazioni derivate. Si nota bene che, la propagazione del suono, avviene attualmente più velocemente di come il calcolo mostra[10], e io ora abbandono il pensiero che ebbi un tempo, cioè che le vibrazioni che seguono potrebbero accelerare la propagazione di quelle che precedono, in modo che, più un suono è acuto più è grande la sua velocità, come voi avrete potuto constatare nelle nostre ultime

sur la courbe que forme une corde tenduë, mise en vibration" (A.21). Anche la seconda memoria di Eulero, sempre sullo stesso argomento, dal titolo "Remarques sur les mémoires précédens de M.Bernoulli" (E.213), viene critica da D'Alembert in uno scritto ancora inedito ma del quale evidentemente Eulero conosceva il contenuto.

[10]Eulero si riferisce al problema della discordanza fra le previsioni teoriche e i risultati delle esperienze fatte per determinare la velocità del suono nell'aria.

Memorie[11]. Ho anche ipotizzato che la grandezza delle vibrazioni potesse causare un'accelerazione, poiché nel calcolo sono state supposte infinitamente piccole, ed è evidente che in questo caso la grandezza cambierebbe il calcolo e lo renderebbe intrattabile. Ma per quanto io possa intuire, mi sembra che questa circostanza diminuirebbe piuttosto la velocità.
È un peccato che questo stesso problema non possa essere risolto dando all'aria tre dimensioni, o soltanto due, poiché si ha ragione di dubitare se la propagazione rimarrebbe sempre la stessa. Almeno è certo che le vibrazioni sarebbero allora tanto più deboli, quanto più si allontanino dalla loro origine. Ho trovato le formule fondamentali nel caso in cui l'estensione dell'aria abbia solo due dimensioni, oppure è contenuta fra due piani[12]. Sia Y (Fig.4) una particella d'aria nello stato di equilibrio, e che dopo qualche agitazione sia stata trasportata in y.

Fig. 4.



Poniamo $AX = X, XY = Y$; $Xx = Yu = x$ et $uy = y$. Posto questo, sia x che y saranno funzioni di X, Y e del tempo t, quindi di tre variabili, e trovo

[11]Eulero si riferisce alla sua memoria "Conjectura physica de propagatione soni ac luminis", 1750, (E.151).

[12]Eulero affronta lo studio della propagazione del suono nel caso di due dimensioni nella sua memoria "Supplement aux recherches sur la propagation du son" (E.306).

per la loro determinazione le due equazioni seguenti:

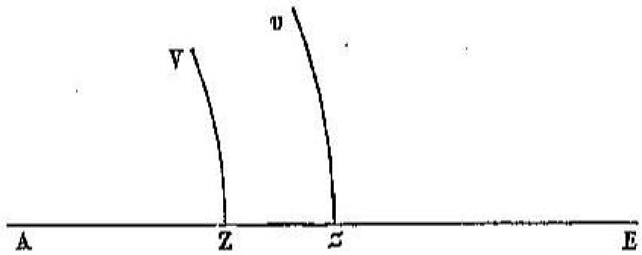
$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddx}{dX^2}\right) + \left(\frac{ddy}{dXdY}\right)$$

e

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddy}{dY^2}\right) + \left(\frac{ddx}{dXdY}\right).$$

A partire da questo, io suppongo che la vibrazione primitiva venga esercitata in A (Fig.5) e che da quì si diffonda sotto forma di onde circolari, in modo che un arco ZV (nello stato di equilibrio) sia stato trasportato in zv dopo

Fig. 5.



l'agitazione, ponendo $AZ = Z$ et $Z = z$, la quantità z sarà una certa funzione delle due variabili t e Z per la determinazione della quale trovo questa equazione

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right) + \frac{\alpha}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \frac{\alpha Z}{Z^2}.$$

Eliminando questi ultimi due termini, rimane la stessa equazione, che si ha nel caso in cui l'aria è estesa unicamente in linea retta AE. Ora, da questa equazione, non sembra che la propagazione avvenga con la stessa velocità nei due casi. Sarebbe quindi da augurarci vivamente che l'analisi sia portata al punto di potere risolvere questo tipo di equazioni e spero che questa gloria sia a voi riservata. Ciò che affermate a proposito degli eco[13] è molto importante sia nell'Analisi che nella Fisica, e tutti devono convenire che questo primo Volume dei vostri lavori è un vero capolavoro e racchiude idee più profonde di quelle contenute in tanti altri Volumi delle Accademie ufficiali e mai

[13]Eulero si riferisce al capitolo II della sezione 2 delle "Recherches sur la nature et la propagation du son": "De la réflexion du son, ou des échos".

nessun pensiero ha meritato una così grande considerazione da parte del suo sovrano.
Per quanto riguarda i suoni della Musica, io sono perfettamente del vostro avviso[14] Signore, e cioè che i suoni consonanti che il Signor Rameau[15] pretende di sentire da una stessa corda, vengono da altri corpi scossi: e non vedo perché questo fenomeno debba essere guardato come il principio della Musica piuttosto che le vere proporzioni che ne sono il fondamento. Credo anche di avere ben determinato il grado di gradimento con il quale si ascoltano i due suoni dati e da questo si deduce che due suoni in ragione 8 : 9 si percepiscono meglio che se fossero in ragione 7 : 8. Ma credo che quì ci si trovi davanti ad un pregiudizio per il quale si suppone dapprima la proporzione dei suoni, e allora questa è un'aberrazione insopportabile. Come colui che accorda un violino, se due corde si trovano nell' intervallo di un sesto, egli le giudica stonate, poiché pretende che il loro intervallo sia un quinto. Così per l' intervallo 7 : 8, sarà molto difficile prendere questo intervallo così come è; ci si immaginerà sempre che esso dovrebbe essere quello da 8 a 9, essendo mal accordato. Si tratta solo di prevenire questo pregiudizio per mettere in uso l'intervallo 7 : 8, ma sarebbero necessarie, anche per questo, delle regole particolari di composizione.
Ho appena completato il III Volume[16] della mia Mécanique che verte sul movimento dei corpi solidi inflessibili. Vi ho scoperto dei principi del tutto nuovi e di ultima importanza. Affinché un tale corpo ruoti liberamente attorno ad un asse, non basta che questo asse passi per il centro di gravità (o piuttosto per il centro di inerzia del corpo); ma occorre, oltre a ciò, che tutte le forze centrifughe si distruggano. È ben evidente che, in tutti i corpi, tutte le linee che passano per il proprio centro di inerzia non hanno questa proprietà. Ora

[14]Eulero si riferisce al capitolo II della sezione 2 delle "Recherches sur la nature et la propagation du son": "Du mélange, et du rapport des sons".

[15]Critica di Lagrange all'opera "Démonstration du principe de l'harmonie, servant de base à tout l'art musical théorique et pratique" di Rameau.

[16]Eulero si riferisce all'opera "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum" (E.289), che presenta come terzo volume della sua "Mechanica".

ho dimostrato che in tutti i corpi, per quanto essi siano irregolari, ci sono sempre tre di queste linee perpendicolari tra loro che io chiamo i tre assi principali del corpo, in rapporto ai quali determino in seguito i *momenti di inerzia*, e questa considerazione mi ha messo in condizione di risolvere una quantità di problemi, che dapprima mi erano sembrati irrisolvibili; come, avendo impresso a un corpo qualunque un movimento qualunque, di determinare la continuazione di questo movimento, facendo astrazione di tutte le forze che potrebbero agire sul corpo. Spero che abbiate ricevuto la mia ultima lettera[17]; questa la consegno a mano a un amico di Ginevra, M.Bertrand[18] che si è applicato alla matematica con grande successo.
Mi onoro di essere, Signore,

il Vostro umilissimo ed obbedientissimo servitore,
L. Euler.

Al Signor La Grange Torinese, Professore in Matematiche e membro dell' Accademia reale delle Scienze e delle Lettere, di Prussia a Torino.

3.3 Introduzione al Problema delle corde vibranti

Con questa lettera del 23 ottobre 1759, comincia la seconda parte della corrispondenza fra Eulero e Lagrange, iniziata il 28 giugno 1754, e che verte principalmente sul problema delle corde vibranti e sulla propagazione del suono.
Prima di passare al commento della lettera in questione, per meglio comprenderne il contenuto, vediamo come nasce e come si sviluppa il problema

[17]Si tratta della precedente lettera di Eulero a Lagrange del 2 ottobre 1759. Lagrange risponderà a queste due lettere consecutive di Eulero (lettera del 2 e del 23 ottobre 1759) nella lettera del 24 novembre 1759.

[18]Louis Bertand, geometra, membro dell'Accademia di Berlino, nato a Ginevra il 3 ottobre 1731 e morto il 15 maggio 1812. In questo periodo si impegna come intermediario nella corrispondenza epistolare fra Eulero e Lagrange.

delle corde vibranti.
Il problema delle corde vibranti, sviluppatosi nel $XVIII$ secolo, fà riferimento ad una grande varietà di campi disciplinari; esso infatti utilizza gli strumenti dell'Analisi, le notazioni della Meccanica, ma è anche legato alla propagazione del suono e quindi alla teoria della Musica.
All'inizio le ricerche sul problema delle corde vibranti riguardavano, principalmente, il calcolo del tempo di vibrazione di una corda tesa fissa alle sue due estremità. Nel 1713, *Brook Taylor*, ha tentato per primo di determinare, attraverso l'uso di funzioni, la curva che forma una tale corda nel corso delle sue oscillazioni[19] facendo ricorso al calcolo differenziale, ma utilizzando solo funzioni di una variabile. Taylor suppone, e pretende di dimostare, che la corda debba sempre assumere figure tali che tutti i suoi punti arrivino nello stesso istante alla situazione rettilinea (corda tesa in linea retta). Deduce così che queste figure non possono che essere quelle di una specie di *cicloide allungata*, che Taylor chiama *compagna della cicloide allungata*.
È con *Jean-Baptiste Le Rond D'Alembert* che le ricerche su questo argomento acquisiscono una nuova forma e nuove ambizioni. D'Alembert, nel Tomo XV della "Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers" (1765), definisce il suono come "una percezione dell'anima comunicata grazie all'orecchio; o meglio è un movimento di vibrazione nell'aria che viene portato fino all'organo dell'udito[20]".
Per generare un suono, quindi, occore un corpo elastico vibrante (come ad esempio una corda) che trasmetta all'aria questa sua vibrazione in forma di compressioni e rarefazioni alternate in strati successivi di molecole. Questa

[19]B.Taylor: "De motu nervi tensi", Philosophical Transactions., vol. 28, 1713. Ritorna su questo argomento anche nel suo "Methodus Incrementorum & directa inversa" pubblicato nel 1715.

[20]Da "Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers" (1765), Tomo XV, p. 343: "SON, s.m.(*Phis.*) est une perception de l'ame qui lui est communiquée par le secours de l'oreille; ou bien c'est un moviment de vibration dans l'air, qui est porté jusqu'à l'organe de l'ouie. VOYEZ OUIE. Pour éclarir la cause du *son*, nous observons, 1. que pour produire le *son*, il faut nécessairement du movément dans le corps sonore [. . .]"

sequenza viene percepita attraverso l'orecchio e reinterpretata dal cervello come suono (se si tratta di un fenomeno regolare e periodico in un intervallo di tempo dato) o rumore (altrimenti).
Nella memoria "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibrations" (A.8), 1747, pubblicata nel terzo Volume delle "Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin", D'Alembert ricava, per primo, l'equazione che descrive la propagazione di una perturbazione generica di una corda, tesa fra due punti e posta in vibrazione, ovvero la soluzione del problema delle corde vibranti. Questa memoria è considearta come fondatrice della prima *Teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali*. Precisiamo, però, che nè il termine *equazioni alle derivate parziali* nè quello di *condizioni iniziali*, vengono utilizzati da D'Alembert anche se noi li utilizzeremo qualche volta per comodità; siamo ancora all'inizio della Teoria delle Equazioni alle Derivate Parziali e si dovrà attendere il 1770 per sentire parlare di *equazioni alle differenze parziali*.

Già Newton aveva derivato da equazioni polinomiali in x e y, ovvero del tipo $f(x, y) = 0$, delle espressioni che oggi si ottengono derivando parzialmente la f rispetto a x e y; queste ricerche però non vennero pubblicate. Utlizzò le derivate parziali anche Jakob Bernoulli nelle sue ricerche sui problemi isoperimetrici, e stessa cosa fece Nikolaus Bernoulli in un lavoro sulle traiettorie ortogonali.
Si ritiene però che a creare la teoria delle derivate parziali siano stati Alexis Fontaine des Bertins, Eulero, Clairaut e D'Alembert. È importante sottolineare che all'inizio non venne colta la differenza fra una derivata ordinaria ed una derivata parziale; venne usato lo stesso simbolo d per entrambe. Il significato fisico imponeva che, nel caso di funzioni di più variabili indipendenti, la derivata desiderata tenesse conto della variazione di una sola variabile.
Morris Kline osserva che: "Come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, i matematici non crearono di proposito la teoria delle equazioni alle derivate parziali. Essi continuarono ad indagare gli stessi problemi fisici che

li avevano condotti alle equazioni differenziali ordinarie e, a mano a mano che coglievano con maggiore sicurezza i principi fisici che stanno alla base dei fenomeni, formularono enunciati matematici che fanno ora parte della teoria delle equazioni alle derivate parziali[21]."

Fino a Taylor lo spostamento di una corda messa in vibrazione veniva studiato separatamente come funzione del tempo e come funzione della distanza di un punto della corda da una delle sue due estremità, quindi come funzione di una sola variabile. Lo studio dello spostamento come funzione di entrambe le variabili e il tentativo di capire tutti i possibili moti condusse ad un'equazione alle derivate parziali. I primi importanti risultati sulle equazioni alle derivate parziali vennero, quindi, dalla controversia che si sviluppò sul problema delle corde vibranti e che coinvolse principalmente: D'Alembert, Eulero, Daniel Bernoulli e Lagrange.

La continuazione naturale di questo studio, ovvero l'analisi dei suoni creati dalla corda che si propagano nell'aria, introdusse altre equazioni alle derivate parziali. L'aria è un fluido compressibile e la teoria della propagazione del suono è una parte della meccanica dei fluidi (e dell'elasticità perché l'aria è anche un mezzo elastico). Vennero studiati i suoni prodotti dalle trombe, dalle canne d'organo, dalle campane, dai tamburi e da tanti altri strumenti.

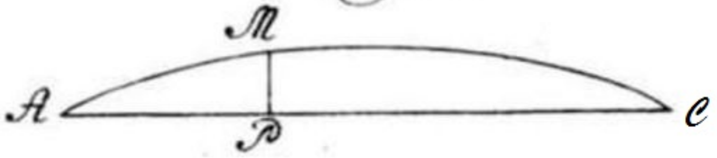
Nella memoria A.8 sulle corde vibranti, D'Alembert vuole mostrare che, contrariamente a quanto aveva sostenuto Taylor, la corda non forma necessariamente una sinusoide in ogni istante, e che esiste una soluzione più generale. D'Alembert, infatti, apre le sue "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibrations" con le seguenti parole: *"Mi propongo di mostrare in questa Memoria, che ci sono un'infinità di altre curve oltre alla* Compagna della Cicloide allungata*, che soddisfano al Problema in questione*[22]." D'Alembert prosegue quindi, considerando una corda fissa alle sue

[21]Da "Storia del pensiero matematico", Volume I, "Dall'antichità al Settecento" di Morris Kline.

[22]Da "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibrations" : *"Je me propose de faire voir dans ce Memoire, qu'il y a un infinité d'autres courbes que la*

due estremità (A e C), e facendo le quattro seguenti supposizioni:

Fig. 1.



1. che le escursioni o vibrazioni della corda siano molto piccole in modo che gli archi AM della curva, che la corda forma, possano essere considerati quasi uguali alle ascisse corrispondenti AP;

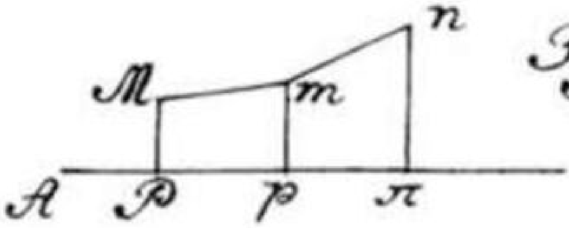
2. che la corda abbia uno spessore uniforme lungo tutta la sua lunghezza;

3. che la forza, che tiene in tensione la corda, sia $F = pml$, essendo p la gravità, m la massa della corda e l la sua lunghezza;

4. ponendo AP (o AM) $= s$, $PM = y$, ds costante[23], la forza acceleratrice del punto M lungo MP è $-\dfrac{Fddy}{ds^2}$, se la curva è concava, o $\dfrac{Fddy}{ds^2}$ se è convessa[24].

D'Alembert considera, ora, la segunete figura:

Fig. 2.



Compagne de la Cycloide allongée, *qui satisfont au Probleme dont il s'agit."*

[23]D'Alembert preferisce utilizzare l'ascissa curvilinea s invece che l'ascissa x; può fare questa scelta in quanto le vibrazioni della corda sono state supposte infinitamente piccole, quindi le due variabili s ed x arrivano quasi a confondersi.

[24]In questa supposizione, relativa all'espressione della forza acceleratrice del punto M lungo MP, D'Alembert sta utilizzando risultati precedentemente ottenuti da Taylor nel suo "Methodus Incrementorum".

dove Mm e mn sono due parti consecutive della curva in un istante qualsiasi, e $Pp = p\pi$. Sia t il tempo trascorso da quando la corda ha cominciato ad entrare in vibrazione; l'ordinata PM non può che essere espressa come funzione del tempo t e dell'ascissa, o dell'arco corrispondente s. Sia quindi $PM = \varphi(t,s)$ (poichè $PM = y$ segue $y = \varphi(t,s)$); il suo differenziale sarà allora $d[\varphi(t,s)] = pdt + qds$, dove p e q sono funzioni non note di t ed s. D'Alembert, a questo punto, utlizza un teorema trovato, anni prima, da Eulero[25], in base al quale si ha che il coefficiente di ds nel differenziale di p deve essere uguale al coefficiente di dt nel differenziale di q; sia quindi $dp = \alpha dt + \nu ds$, allora $dq = \nu dt + \beta ds$, essendo α, ν, β, funzioni di t e s. Da questo segue che, poichè le due parti Mm e mn appartengono alla stessa curva, $pm - PM$ è uguale alla differenza[26] di $\varphi(t,s)$ facendo variare solo s (e cioè tenendo costante t, da cui segue $dt = 0$), quindi si ha $pm - PM = qds = ds \cdot q$. La quantità sopra indicata con ddy, ovvero la differenza seconda di PM, presa facendo variare solo s, sarà $ddy =^{27} ds \cdot \beta ds = \beta ds^2 \Rightarrow \dfrac{ddy}{ds^2} = \beta$,

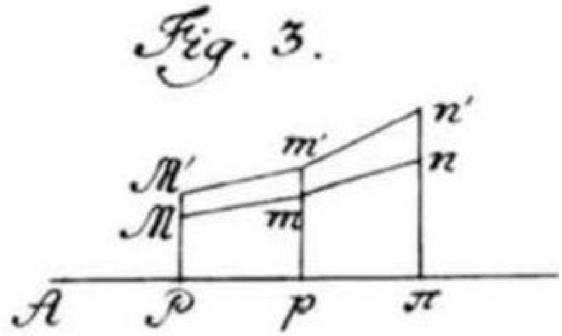
[25]Si tratta del Teorema che si trova nella memoria di Eulero dal titolo "De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdem generis" (E.44), pag. 177, e che riporto di seguito: *Quantitas A ex duabus variabilibus t et u utcunque composita, si differentietur posito t constante, hocque differentiale denuo differentietur posito u constante et t variabili, idem resultat ac si inuerso ordine A primo differentietur posito u constante hocque differentiale denuo differentietur posito t constante et u variabili.*

D'Alembert si sta riferendo, oltre a questo Teorema, anche ad atri risultati contenuti in E.44 (p. 174-183) e in "Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis ejusdem generis" (E.45), p. 184-200. L'idea fondamentale è che la forma differenziale $dy = pdt+qds$, è completa (oggi diciamo esatta), cioè ottenibile da $y = \varphi(t,s)$ formando il differenziale $dy = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)dt + \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)ds$, se e solo se $\frac{dp}{ds} = \frac{dq}{dt}$.

[26]D'Alembert utilizza il termine *differenza* che corrisponde a *derivata*: la differenza di $\varphi(t,s)$ facendo variare solo s corrisponde alla derivata parziale di $\varphi(t,s)$ rispetto ad s ovvero $\dfrac{\partial\varphi(t,s)}{\partial s}$. Quì e per alcuni anni a venire, le derivative parziali saranno espresse in termini di forme differenziali comprendenti varie lettere, perciò D'Alembert impiega un'intera pagina per definire $y = \varphi(t,s)$, $dy = d\varphi(t,s) = pdt + qds$, $dp = \alpha dt + \nu dt$, $dq = \nu dt + \beta ds$ e nello stabilire le espressioni di β e di α.

[27]Poichè $y = \varphi(t,s)$, si ha $ddy = dd\varphi(t,s)$.

e quindi $F\,\dfrac{ddy}{ds^2} = F\,\beta$ che è la forza acceleratrice del punto M lungo MP.
Consideriamo ora, che i punti M,m,n vadano in M',m',n'.



Il segmento MM', che D'Alembert chiama "l'eccesso" di PM' su PM sarà uguale alla differenza di $\varphi(t,s)$ presa facendo variare solo t (e cioè tenedo costante s, da cui segue $ds = 0$), quindi si ha $PM' - PM = pdt = dt \cdot p$. La differenza seconda di PM presa facendo variare solo t, ovvero la differenza di MM' (o ancora, lo spazio percorso dal punto M in virtù della forza acceleratrice da cui è animato), sarà uguale a $dt \cdot \alpha dt = \alpha dt^2$.
D'Alembert inidica con a lo spazio che un corpo pesante, sotto l'azione della gravità p, percorrerebbe in un tempo dato e costante θ. Per il Lemma XI, del Libro I dei "Principia Mathematica" di Newton, si ha la seguente relazione: $\alpha dt^2 : 2a = F\beta dt^2 : p\theta^2$, dalla quale segue $\alpha = \dfrac{2aF\beta}{p\theta^2}$ e sostituendo al posto di F la sua espressione, ovvero $F = pml$, si ha $\alpha = \dfrac{2apml\beta}{p\theta^2} = \beta \cdot \dfrac{2aml}{\theta^2} \Rightarrow$ $\alpha = \beta \cdot \dfrac{2aml}{\theta^2}$.
D'Alembert suppone $\theta^2 = 2aml$; in questo caso si ha $\alpha = \beta$. Quindi poiché $dp = \alpha dt + \nu ds$, si ha che $dq = \nu dt + \beta ds$ diventa $dq = \nu dt + \alpha ds$.
Siamo così giunti all'equazione alle derivate parziali che descrive le vibrazioni di una corda fissa alle sue due estremità e che D'Alembert scrive nella

seguente forma, che differisce da quella di oggi[28]:

$$dp = \alpha dt + \nu ds \tag{3.1}$$

$$dq = \nu dt + \alpha ds \tag{3.2}$$

D'Alembert a questo punto combina[29] le due equazioni (3.1) e (3.2), e mostra che $p+q$ è una funzione di $t+s$ e $p-q$ di $t-s$; giunge così all'espressione generale della soluzione:

$$y = \psi(t+s) + \tau(t-s) \tag{3.3}$$

dove ψ e τ sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti. Quindi ogni soluzione è data dalla somma di una funzione di $(t+s)$ e di una funzione di $(t-s)$.
Poiché la corda è fissa ai due estremi A e C, si ha $y = 0$ per $s = 0$ e $s = l$, qualunque sia il tempo t (condizioni al contorno).
Per $s = 0$, e $\forall t$ (fissità in A), si ha:

$$y(t,0) = \psi(t) + \tau(t) = 0 \;\Rightarrow\; \tau(t) = -\psi(t). \tag{3.4}$$

Quindi la (3.3) diventa:

$$y(t,s) = \psi(t+s) - \psi(t-s) \tag{3.5}$$

Per $s = l$, e $\forall t$ (fissità in C), si ha considerando l'ultima espressione trovata per y:

$$y(t,l) = \psi(t+l) - \psi(t-l) = 0. \tag{3.6}$$

da cui segue $\psi(t+l) = \psi(t-l)$ ovvero, essendo quest'ultima un'identità rispetto a t, si ha che ψ deve essere periodica di periodo $2l$.
Ora D'Alembert, precisando che la corda per $t = 0$ si trova nella situazione rettilinea e che è forzata ad uscire dal suo stato di riposo per l'azione di una

[28]Il sistema scritto corrisponde all'equazione alle derivate parziali nota come equazione dell'onda piana in una dimensione $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial s^2}$ essendo $p = \dfrac{\partial y}{\partial t}$, $q = \dfrac{\partial y}{\partial s}$ e $y(t,s)$ lo spostamento verticale del punto della corda di ascissa curvilinea s, al tempo t.

[29]Da $dp = \alpha dt + \nu ds$ e $dq = \nu dt + \alpha ds$, si ha $dp + dq = (\alpha + \nu)\cdot(dt + ds)$ e $dp - dq = (\alpha - \nu)\cdot(dt - ds)$.

qualsiasi causa, considera il caso in cui la corda viene lasciata con una velocità iniziale nulla. Sotto queste condizioni, la corda può essere rappresentata per $t = 0$ dall'equazione non nulla $y(0, s)$ e dalla velocità iniziale $\frac{dy}{dt}(0, s) = 0$. Da quest'ultima condizione (velocità iniziale nulla) e da $\psi = -\tau$, considerando la (3.3), segue la parità della derivata di ψ ovvero $\psi'(x) = \psi'(-x)$ e quindi la disparità di ψ: $\psi(x) = -\psi(-x)$.
Ora calcolando $y(0, s)$ si ottiene, tenendo conto di quanto ottenuto fino adesso, $y(0, s) = 2\psi(s)$ e poiché la funzione arbitraria ψ è dispari e 2l-periodica, ψ è interamente determinata dalla posizione della corda all'istante $t = 0$.

Entra in scena, ora, *Leonhard Euler* (Eulero), che inspirato probabilmente dalla lettura della Memoria di D'Alembert, un anno dopo le ricerche di quest'ultimo, pubblica la sua soluzione del problema delle corde vibranti, in latino, nella memoria "De vibratione chordarum exercitatio" e in francese, nella memoria "Sur la vibration des cordes"[30].
Eulero inizia formulando il Problema in questione nel seguente modo: *"Se una corda di una lunghezza, e di una massa data, è distesa da una forza, o un peso dato; che al posto della situazione in linea retta, le venga assegnata una figura qualunque, che tuttavia differisca inifinitamnete poco da quella in linea retta, e che poi tutt'a un tratto venga lasciata; determinare il movimento vibratorio totale, dal quale la corda sarà scossa*[31]*."*
Eulero passa, poi, ad elogiare D'Alembert, che ha affrontato per primo e con grande successo questo Problema così difficile sia nella Meccanica che nell'A-

[30] A quel tempo le uniche due memorie pubblicate di Eulero sulle corde vibrabti erano: "De vibratione chordarum exercitatio" (E.119), presentata all'Accademia di Berlino il 16 maggio 1748,"Nova Acta eruditorum", 1749, e la sua traduzione francese "Sur la vibration des cordes" (E.140) nel IV Volume delle "Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin", (1748), 1750.

[31] Da "Sur la vibration des cordes" (E.140), p. 70: *"Si une corde d'une longueur, et d'une masse donnée, est tendue par une force, ou un poids donné; qu'au lieu de la situation droite, on lui donne une figure quelconque, qui ne differe cependant de la droite qu'infiniment peu, et qu'ensuite on la lache tout à coup; determiner le mouvement vibratoire total, dont elle sera agitée."*

nalisi e ha comunicato all'Accademia di Berlino una "così bella soluzione[32]." Consapevole delle similitudini fra le sue ricerche e quelle di D'Alembert, Eulero scrive: *"[...] io non esisto a mostrare quella [ovvero la soluzione] che ho trovato a proposito di questa questione. Anche se non differisce molto da quella del Signor D'Alembert, tuttavia la grande estensione di questo argomento fà sì che io mi sia convinto di avere aggiunto qualche osservazione abbastanza interessante sull'applicazione delle formule generali*[33]."
Eulero considera una corda AB di spessore uniforme, fissa alle sue due estremità A e B; sia a la lunghezza della corda, M la sua massa, e la forza che tiene tesa la corda sia uguale al peso F. La corda viene fatta passare dal suo stato di riposo in linea retta AB, allo stato di curvatura $ALlB$, che differirà infinitamente poco dal precedente stato, in modo che la lunghezza di $ALlB$ possa essere considerata quasi uguale a quella di AB. La figura $ALlB$, che viene data all'inizio alla corda, si considera conosciuta; supponendo che la corda venga lasciata all'improvviso da questa situazione, ci si chiede quale movimento acquisirà e quali saranno le sue vibrazioni.
Si conducono le ordinate PL e pl normali all'asse AB. Sia $AMmB$ la situazione alla quale è giunta la corda dopo un tempo t, essendosi spostata dalla situazione iniziale $ALlB$ in modo che L sia arrivato in M; si denota l'ascissa[34] AP con x e sia $PM = y$. Poichè la curva $AMmB$ dipende dal tempo trascorso t, si ha che y sarà una funzione[35] di x e t, il cui differenziale avrà la seguente forma: $dy = pdx + qdt$ con p e q funzioni di x e t. I differenziali di p e q sono quindi dati da: $dp = rdx + sdt$ e $dq = sdx + udt$ dove l'elemento dt

[32]Da"Sur la vibration des cordes": *"[...] et il en a communiqué à notre Academie une trés belle solution."*

[33]Da 'Sur la vibration des cordes": *"[...] je ne balance point à proposer celle que j'ai trouvée sur cette question. Quoiqu'elle ne differe pas beaucoup de celle de M.D'Alembert, cependant la grande étendue de ce sujet fait que je me persuade d'avoir ajouté quelques observations assez interessantes dans l'application des formules générales."*

[34]Eulero utlizza l'ascissa x e non l'ascissa curvilinea s come D'Alembert.

[35]La funzione y esprime lo spostamento "verticale" del punto della corda di ascissa x dalla sua posizione di riposo, in un istante t.

in dp e l'elemento dx in dq devono avere lo stesso coefficiente[36] che in questo caso è s.
I calcoli effettuati fin'ora da Eulero sono molto simili, anche se più dettagliati e più lunghi[37], a quelli fatti da D'Alembert.
A questo punto, Eulero, passa a calcolare u e dopo una serie di passaggi, non molto chiari, trova la seguente espressione: $u = \dfrac{Far}{2M}$. Sostituendo l'espressione trovata per u nel differenziale di q, abbiamo le suddette formule differenziali:

$$dp = rdx + sdt \tag{3.7}$$

$$dq = sdx + \frac{Fa}{2M}\, rdt \tag{3.8}$$

che descrivono le vibrazioni della corda AB, fissa alle sue due estremità, e che differiscono da quelle trovate da D'Alembert ((3.1) e (3.2)) per il fattore $\dfrac{Fa}{2M}$; per brevità Eulero pone $\dfrac{Fa}{2M} = b$ [38].
Eulero continua ora dicendo che la questione meccanica proposta si riduce al problema analitico di cercare delle funzioni r e s di x e t tali che le formule differenziali (3.7) e (3.8), siano integrabili; una volta trovate tali funzioni per r e s, si potranno assegnare i valori $p = \int(rdx + sdt)$ e $q = \int(sdx + b\, rdt)$, dai quali seguirà il valore di $y = \int(pdx + qdt)$.
Affinché la figura iniziale della corda possa essere data arbitrariamente, Eulero precisa che la soluzione deve essere la più generale possibile e che quindi si devono trovare tutti i possibili valori per r e s, che rendono le formule differenziali date, integrabili insieme; arriva così alla seguente espressione generale della soluzione:

$$y = f(x + t\sqrt{b}) + \varphi(x - t\sqrt{b}) \tag{3.9}$$

[36] Anche Eulero quindi, come D'Alembert, utlizza il proprio Teorema (vedi nota (25)).
[37] La lunghezza dei calcoli e delle osservazioni di Eulero non è visibile in quanto ho riportato poichè ho cercato di riassumere il più possibile; Eulero nella sua memoria impiega due pagine.
[38] In termini di equazioni alle derivate parziali, (3.7) e (3.8) corrispondono a $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = b\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

dove f e φ sono funzioni arbitrarie dei loro argomenti.
I calcoli effettuati dai due saggi non differiscono di molto ma si tratta di una somiglianza solo apparente; ciò che cambia, infatti, è l'interpretazione che i due danno della soluzione. D'Alembert imponeva alla forma iniziale della corda vibrante, e quindi alle soluzioni del problema, delle restrizioni molto severe; richiedeva, in particolare, che la curva iniziale si esprimesse nel dominio considerato attraverso un'equazione o un'espressione analitica unica, ovvero che fosse, utilizzando la terminologia di allora, una curva "continua". Eulero, al contrario, riportando motivazioni sia fisiche che matematiche, ammetteva curve iniziali e soluzioni "discontinue", ovvero determinate da due o più leggi analitiche differenti[39].
La discussione sul concetto di funzione, quindi, diventa centrale intorno alla metà del Settecento in connessione al problema fisico-matematico di studiare le piccole vibrazioni nel piano di una corda fissata agli estremi.
A D'Alembert, che sosteneva di avere trovato la soluzione più generale possibile del problema e rilevava esplicitamente che la configurazione iniziale della corda dovesse essere una funzione soggetta alla legge di continuità e due volte differenziabile, Eulero ribatte di volere ricercare una soluzione così generale che la configurazione iniziale possa essere tracciata arbitrariamente e possa anche non essere rappresentata da una sola funzione. Eulero già dal 1734, quindi prima della controversia sul problema delle corde vibranti, aveva accettato funzioni formate da parte di curve note e perfino funzioni ottenute tracciando a mano libera delle curve. La fisica del problema delle

[39]Il secondo Volume dell'"Introductio in analysin infinitorum" di Eulero, inizia con le definizioni di curva continua e discontinua. I termini "continua" e "discontinua" sono usati in un'accezione diversa da quella attuale: una curva è continua secondo Eulero, se la sua natura è espressa tramite una sola funzione, ovvero espressione analitica, della variabile x; una curva è discontinua secondo Eulero, se è composta da almeno due "porzioni" continue, definite tramite funzioni, ovvero leggi, diverse della variabile x. Dunque le curve discontinue secondo Eulero sono rappresentate da espressioni analitiche diverse in due o più intervalli del loro dominio, mentre la continuità secondo Eulero è un concetto globale che vuol dire validità in generale della stessa espressione analitica.

corde vibranti aveva spinto Eulero ancora di più in questa direzione. Accettava, come curva iniziale, qualsiasi funzione definita da un'espressione $f(x)$ per $a \leq x \leq a$ e definiva, attraverso la condizione $f(x+2a) = f(x)$, la curva fuori dell'intervallo $(-a, a)$.
Questa discussione, sulla diversa natura delle funzioni ammissibili come curve iniziali e quindi come soluzioni, si è più tardi rilevata insignificante ma ha comunque stimolato, a quel tempo, l'evoluzione e la generalizzazione della nozione di funzione. Vi erano altre divergenze di opinioni fra Eulero e D'Alembert, ma questa può essere considerata la principale.

Daniel Bernoulli, qualche anno dopo Eulero, ebbe la geniale idea di applicare alla soluzione dell'equazione dell'onda la *teoria delle serie* che il londinese B.Taylor avevo sviluppato nel suo "Methodus Incrementorum". Fu così che D.Bernoulli nel 1753, nel IX Volume delle "Mémoires de Berlin", espresse il suono come somma infinita di oscillazioni armoniche; argomentando sulla base della sovrapposizione delle componenti armoniche di una corda in vibrazione, descrisse le vibrazioni della corda come una combinazione di vibrazioni semplici sinusoidali, ciascuna delle quali viene rappresentata da una funzione del tipo $\alpha \sin(\frac{n\pi x}{l})$, essendo n un intero e l la lunghezza della corda. D.Bernoulli dice, quindi, che tutte le possibili curve iniziali possono essere rappresentate nella forma:

$$y(x) = \alpha \sin(\frac{\pi x}{l}) + \beta \sin(\frac{2\pi x}{l}) + \gamma \sin(\frac{3\pi x}{l}) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \sin(\frac{n\pi x}{l}) \quad (3.10)$$

poiché ci sono abbastanza costanti a_n da far sì che la serie si adatti ad una qualsiasi curva. Allora tutti i moti successivi saranno del tipo

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \sin(\frac{n\pi x}{l}) \ \cos(\frac{n\pi ct}{l}). \quad (3.11)$$

Si tratta di una serie trigonometrica che secondo D.Bernoulli descrive l'andamento della curva in ogni istante. Ogni moto corrispondente ad una qualsiasi curva iniziale non è niente di più che una somma di modi periodici sinusoidali e la combinazione ha la frequenza del modo fondamentale. D.Bernoulli

è convinto di avere raggiunto la maggiore generalità possibile, tanto da sentirsi sicuro di affermare che le soluzioni trovate da D'Alembert e Eulero sono comprese nella sua soluzione. Ma, in realtà, utilizzando solo termini del tipo *seno*, limitò la generalità della sua soluzione e non fornì una spiegazione matematica al calcolo dei coefficienti a_n.
Dopo avere letto il contributo di D.Bernoulli sul problema delle corde vibranti, Eulero, nella sua memoria "Remarques sur les mémoires précédens de M.Bernoulli" del 1753, vuole mostrare che, contrariamente a quanto afferma quest'ultimo, tutte le curve che rappresentano la corda durante il suo movimento, non sono per forza contenute nella soluzione (3.11). Eulero infatti, pur lodando il fatto che D.Bernoulli abbia riconosciuto che più modi possono coesistere simultaneamente cosicché la corda può emettere molti armonici in un unico moto, contesta, come aveva già fatto D'Alembert[40], la generalità che D.Bernoulli attribuisce alla sua soluzione (3.11). D.Bernoulli avrebbe avuto ragione se ogni funzione potesse essere rappresentata da una serie trigonometrica infinita, ma questo era considertao impossibile da Eulero.
Eulero prosegue, nella sua memoria, riportando qualche osservazione contro le forti restrizioni che D'Alembert impone sulle funzioni ammissibili nella soluzione.
Si propone, infine, di "fissare meglio" la sua soluzione riprendendo il calcolo dell'equazione che descrive le vibrazioni della corda e la sua risoluzione.
Infatti, scrive: *"Per meglio assicurarmi della mia soluzione, tratterò di nuovo questo stesso problema attraverso un metodo un pò differente, ed esaminerò più accuratamente tutti i ragionamenti che mi hanno condotto alla determinazione generale del movimento delle corde, qualsiasi sia la loro figura*

[40]Anche D'Alembert, nell'articolo "Fondamental" contenuto nel Volume VII (1757) dell'"Encyclopédie" critica la generalità della soluzione data da D.Bernoulli e rifiuta la possibilità di sviluppare tutte le funzioni in serie trigonometriche. D'Alembert non credeva che tutte le funzioni periodiche dispari potessero essere reppresentate da una serie come la (3.10).

iniziale[41]*.”*

Eulero comincia, quindi, supponendo che la corda sia perfettamnete flessibile e privata della sua rigidezza, che le vibrazioni della corda siano molto piccole in modo che la corda non cambi la sua lunghezza durante il movimento e che ogni punto della corda rimanga sempre nella stessa linea retta perpendicolare all'asse. Precisa, inoltre, che queste ipotesi vengono fatte per semplificare i calcoli e che non sono i principi della meccanica che vengono “abbandonati” ma è piuttosto l'analisi a non essere giunta al grado di perferzione che questo Problema necessita; sono quindi i limiti dell'analisi che costringono a fare queste ipotesi.

Poi utilizzando le stesse notazioni che aveva usato nella memoria “Sur la vibration des cordes”, pone $AP = x$ e $PM = y$ dove y viene espressa come funzione dell'ascissa x e del tempo t, quindi $y = \phi(x,t)$.

Eulero, a questo punto, inizia a distaccarsi dal procedimento che aveva precedentemente seguito, e prima di procedere con la risoluzione del problema in questione, introduce un modo diverso di indicare i differenziali delle funzioni di più variabili, facendone variare solo una. Considera quindi una funzione y qualsiasi che dipende dalla variabili x, t ed u; il differenziale di y preso facendo variare tutte le sue varibili avrà la seguente forma $dy = Pdx + Qdy + Rdu$, dove il membro Pdx rappresenta il differenziale di y preso facendo variare solo x e considerando t ed u come costanti. Allo stesso modo, il membro Qdt rappresenta il differenziale di y preso facendo variare solo t e tenendo x ed u costanti, e il membro Rdu rappresenta il differenziale di y preso facendo variare solo u e tenendo x e t costanti. Eulero indica le quantità finite P, Q

[41]Da “Remarques sur les mémoires précédens de M.Bernoulli”: *“Pour m'assurer mieux de ma solution, je m'en vais traiter de nouveau ce même problème par un mèthode un peu differente, & examiner plus soigneusement tous les raisonnemens, qui m'ont conduit à la détermination générale du mouvement des cordes, quelle qu'ait été leur figure initiale.”*

e R nel seguente modo[42]:

$$P = \left(\frac{dy}{dx}\right); \quad Q = \left(\frac{dy}{dt}\right); \quad R = \left(\frac{dy}{du}\right).$$

Avendo spiegato il significato di queste espressioni, Eulero le estende a differenziali di grado maggiore: poiché $\left(\frac{dy}{dx}\right) = P$, e P è una funzione finita di x, t ed u, l'espressione $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ sarà rappresentata da $\left(\frac{dP}{dx}\right) \Rightarrow \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{dP}{dx}\right)$. Allo stesso modo poiché $\left(\frac{dy}{dt}\right) = Q$ e $\left(\frac{dy}{du}\right) = R \Rightarrow \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \left(\frac{dQ}{dt}\right)$ e $\left(\frac{ddy}{du^2}\right) = \left(\frac{dR}{du}\right)$.

Eulero ritorna, ora, alla risoluzione del Problema in questione, e dopo una serie di lunghi passaggi, in cui utilizza quanto appena introdotto, arriva alla seguente equazione che descrive le vibrazioni della corda:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \tag{3.12}$$

dove g è l'altezza dalla quale un corpo cade in un secondo di tempo[43]. Ponendo, per abbreviare, $\frac{2Fag}{M} = c^2$, la (3.12) diventa:

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c^2\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \tag{3.13}$$

la cui soluzione è data da:

$$y = \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \tag{3.14}$$

---

[42] L'espressione $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, viene scritta fra parentesi, così come le altre, per indicare che rappresenta il valore della frazione $\frac{dy}{dx}$ considerando x variabile mentre t ed u costanti: abbiamo, quindi, un primo concetto di derivata parziale. Questa notazione che fà uso delle parentesi, per indicare le derivate parziali, venne ampiamente utilizzata nella seconda metà del diciottesimo secolo.

[43] Si noti che le (3.7), (3.8) precedentemente trovate da Eulero per esprimere il movimento della corda posta in vibrazione, corrispondono all'equazione $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, che è stata ora corretta con il fattore $\frac{1}{4g}$ ovvero: $\frac{1}{4g}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{Fa}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{4Fag}{2M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) \Rightarrow \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{2Fag}{M}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$.

dove $c = \sqrt{\dfrac{2Fag}{M}}$, mentre ϕ e ψ sono due funzioni arbitrarie dei loro argomenti.
Eulero ribadisce il discorso, già afforntato nella memoria E.140, sulle funzioni ammissibili come curve iniziali e quindi come soluzioni dell'equazione che descrive le vibrazioni della corda. Aggiunge inoltre che della curva iniziale, soltanto la parte compresa nell'intervallo $0 \leq x \leq a$ ha importanza, mentre la continuazione di questa parte non deve essere presa in considerazione. Quindi le diverse parti della curva non sono congiunte l'una all'altra da nessuna legge di continuità (ovvero da una singola espressione analitica), ma solo attraverso la descrizione del fenomeno. Per questa ragione può essere impossibile comprendere l'intera curva in un'unica equazione, a parte quando la curva risulti casualmente una qualche sinusoide (caso particolare).
Questa ultima memoria di Eulero, naturalmente, non è immune da obiezioni da parte dei suoi "avversari".
D'Alembert continua a criticare le curve discontinue di Eulero. In effetti, la richiesta di D'Alembert che la curva iniziale fosse due volte derivabile era corretta poiché una soluzione ottenuta da una curva iniziale che non possiede la derivata seconda per qualche valore di x, deve soddisfare a condizioni speciali in questi punti singolari.
Anche D.Bernoulli non abbandona la sua posizione; ribadisce che negli a_n ha a disposizione un numero infinito di coefficienti e che scegliendoli in modo opportuno può far sì che la serie (3.10) coincida con una qualsiasi funzione in un numero infinito di punti.
Inizia così una lunga disputa scientifica fra D'Alembert, Eulero e Bernoulli, resa ancora più vivace in seguito all'invio da parte di D'Alembert, all'Accademia di Berlino, del manoscritto delle sue "Observations sur deux mémoires de Mrs Euler et Danil Bernoulli, insérés dans les Mémoires de 1753" che contiene le critiche avanzate da quest'ultimo alle soluzioni del problema delle corde vibranti fornite da Eulero e D.Bernoulli. Segue un tumultuoso scambio epistolare fra D'Alembert e il segretario dell'Accademia, Samuel Formey: il manoscritto, considerato troppo polemico, viene rifiutato e rinviato

a D'Alembert. Tuttavia, anche se il manoscritto rimarrà inedito, più tardi, D'Alembert ne incorporerà numerosi passaggi nelle sue "Recherches sur les vibrations des cordes sonores" che costituirà la prima delle memorie raccolte nei suoi "Opuscoles mathématiques" (Parigi, 1761).

Nel 1759, *Joshep Louis Lagrange*, all'inizio della sua carriera, entrò nella discussione relativa al problema delle corde vibranti, con la pubblicazione delle sue "Recherches sur la nature et la propagation du son" nel Volume I delle "Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis"; in questa memoria Lagrange introduce una nuova analisi del problema, difendendo la soluzione e l'interpretazione data da Eulero, ma ottenendola con un metodo differente. Le derivazioni originali dell'equazione dell'onda da parte di D'Alembert e Eulero, erano state ottenute attraverso l'analisi del moto di una porzione infinitesimale della corda. Lagrange, invece, utilizza il metodo del "modello di n corpi", dove la corda viene considerata come costituita da n masse equivalenti e ugualmente spaziate, unite da corde senza peso; viene determinato il movimento di ogni massa e n viene fatto tendere all'infinito[44]. In questo, Lagrange segue un approccio che era già stato descritto da D'Alembert nell'"Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin" (1747), ma con tutt'altro intento, come testimonia la sua conclusione al Capitolo V: "*Ecco, quindi, la teoria di questo illustre Geometra [Eulero] messa fuori pericolo e fondata su principi diretti e luminosi, che non tengono conto in alcun modo della legge di continuità che richiede M.D'Alembert; ecco anche come può accadere che la stessa formula che è servita per sostenere e dimostrare la teoria di M.Bernoulli sulle vibrazioni isocrone, nel caso di un numero finito di corpi mobili, si è svelata insufficiente nel caso in cui il numero di questi corpi diventa infinito*[45]."

[44]Lagrange effettua quindi il passaggio al limite. Il suo approccio consiste nell'esaminare le vibrazioni di una corda senza massa caricata di n pesi, e a fare tendere n all'infinito per dedurre il movimento di una corda classica.

[45]Da "Recherches sur la nature et la propagation du son": *"Voilà donc la théorie de ce grand Géomètre [Euler] mise hors de toute atteinte et établie sur des principes di-*

Nell'effettuare il passaggio al limite Lagrange commette alcuni errori che vengono presto segnalati da D'Alembert e D.Bernoulli e comunicati tramite lettera. Nel 1760-61, nel tentativo di rispondere a queste critiche, Lagrange fornisce nelle "Nouvelles Recherches sur la nature et la propagation du son" contenute nel Volume II delle "Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis Privatae Taurinensis", una nuova soluzione del problema delle corde vibranti. Questo secondo Volume, contenente molti altri importanti risultati di Lagrange e anche un contributo di Eulero, verrà pubblicato nel 1762.
Il dibattito si protrasse per tutti gli anni '60 e '70. Nel 1779 anche Laplace decise di entrare nella disputa schierandosi dalla parte di D'Alembert. Le discussioni però, si concentrarono principalmente su rettifiche di posizioni e polemiche. Inoltre gran parte dei ragionamenti effettuati erano scorretti e i risultati non portarono, nel XVIII secolo, ad alcuna conclusione. È solo con Fourier (1772-1837), che uno dei principali punti di questa questione, ovvero la rappresentazione in serie trigonometrica di una funzione arbitraria, venne risolto.
Va osservato, però, che se si giudicano i risultati ottenuti sulla base delle conoscenze del tempo, tutti i principali protagonisti di questa vicenda avevano ragione. D'Alembert, seguendo una tradizione stabilita fin dai tempi di Leibniz, insisteva sul fatto che le funzioni devono essere analitiche, in modo che ogni problema non risolvibile mediante esse sia insolubile. Anche il suo ragionamento per provare che $y(t, s)$ deve essere periodica rispetto a s era corretto. Eulero e Lagrange possono essere giustificati, a quel tempo, nel ritenere che non tutte le funzioni discontinue possono essere rappresentate in serie di Fourier e avevano tuttavia ugualmente ragione nel credere (pur non possedendone una dimostrazione) che la curva iniziale può essere molto generale; tale curva, infatti, non è necessariamente né analitica, né periodica.

---

rects et lumineux, qui ne tiennent en aucune façon à la loi de continuité que demande M.D'Alembert; voilà encore comment il peut se faire que la même formule qui a servi pour appuyer et démontrer la théorie de M.Bernoulli sur le mélange des vibrations isochrones, losque le nombre des corps mobiles était fini, nous en dévoile l'insuffisance dans le cas où le nombre de ces corps devient infini."

Infine Bernoulli che assunse una posizione corretta su basi fisiche, ma non fu in grado di sostenerla con ragionamenti matematici.
Concludiamo affermando che l'intero dibattito, sul problema delle corde vibranti, è considerato di importanza storica in quanto contribuì allo sviluppo del concetto di funzione e fù un significativo "caso test" nella formazione e nella soluzione delle equazioni alle derivate parziali per rappresentare un problema fisico.

3.4 Commento della Lettera

La Società scientifica privata di Torino, fondata nel 1757 dal chimico G.A. Saluzzo di Monesiglio con la collaborazione di Lagrange e del medico Gian Francesco Cigna, pubblica nel 1759 il primo volume delle "Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis privatae Taurinensis[46]".
La lettera del 23 ottobre 1759, inizia proprio con la comunicazione, da parte di Eulero, della ricezione del tomo I delle "Misc. Taurin." di cui Lagrange aveva già parlato, con insistenza, nelle precedenti lettere del 28 luglio e 4 agosto 1759, e che contiene tre sue importanti memorie[47]; la terza della quali, dal titolo "Recherches sur la nature et la propagation du son", riguarada il problema delle corde vibranti e la propagazione del suono, e sarà materia di discussione della lettera in questione[48]. Prima di commentare la lettera

[46]In seguito useremo, per comodità, l'abbreviazione "Misc. Taurin.". I successivi quattro volumi verranno pubblicati con il titolo di "Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale de Taurin". Nel 1783, la Società riceve lo statuto di Accademia reale delle scienze di Torino e le "Mélanges" diventeranno le "Memorie" di questa Accademia.

[47]Vedi: Traduzione in lingua italiana, nota (1). Oltre alle memorie redatte dai tre confondatori della Società privata di Torino, G.A.Saluzzo di Monesiglio, J.L.Lagrange e G.F.Cigna, questo tomo contiene anche degli articoli di altri autori: G.Gaber, C.Allioni, A.M.Bertrandi e F.Daviet de Foncenex.

[48]La lettera del 23 ottobre 1759, è la prima lettera della corrispondenza, scritta in lingua francese; nelle precedenti lettere viene utilizzato il latino. Eulero, potrebbe essere stato indotto ad adottare, d'ora in avanti, il francese, come conseguenza del fatto che tutti i

del 23 ottobre 1759, vediamo, più in detteglio, cosa si scrivono i due saggi nelle tre lettere precedenti a questa, e diamo una descrizione generale dei contenuti della memoria "Recherches sur la nature et la propagation du son" di Lagrange.

Lettere precedenti a quella del 23 ottobre 1759

***Lettera del 28 luglio 1759, Lagrange a Eulero**

È nella lettera del 28 luglio 1759 che Lagrange coglie l'occasione di inviare ad Eulero una copia dell'opera (tomo I delle "Misc. Taurin"), e gli riferisce di desiderare con tutto il cuore un suo giudizio sulla terza delle memorie ivi contenute. Lagrange, infatti, scrive ad Eulero: *"Ora, però, dal momento che si dava alle stampe questo libro, che in parte mi riguarda, ho ritenuto che sarei venuto meno ai miei obblighi nei tuoi riguardi, se non avessi preparato l'intera opera e non avessi cercato un modo per offrirtela e dedicartela il più rapidamente possibile. Cogliendo dunque, infine, l'occasione desiderata, ti invio questo esemplare dei* "Commentari fisico-matematici"*, che una società privata*[49] *ha cominciato a pubblicare, con l'intento di far sì che lo studio di queste scienze, che fino ad ora sembra essere rimasto troppo inerte presso di noi, sia sollecitato e promosso. Fra le dissertazioni matematiche le prime due non contengono nulla che sembri degno della tua attenzione; la terza in cui si parla della natura e della propagazione del suono, forse, come spero, potrà apparire di una qualche importanza, per la teoria intorno alle oscillazioni delle corde tese, e intorno alle fibre aeree, la quale si trova rafforzata con un calcolo nuovo e rigoroso;* `e riguardo ad essa desidero di tutto cuore il tuo giudizio`[50]."

contributi che Lagrange gli aveva recentemente inviato erano scritti in questa lingua.

[49] Si tratta della Società scientifica privata di Torino.

[50] Dalla lettera del 28 luglio 1759 : *"Nunc vero cum praesens liber typis manderetur qui aliqua ex parte ad me pertinet, officio meo erga te me defuturum putavi, nisi omnem operam adhibuissem et modum quaererem, quo illum tibi quantocius offerre ac dieare possem. Exoptatam itaque tandem nactus occasionem, tibi mitto hoc exemplar* "Commentariorum physico-mathematicorum"*, quae societas quaedam privata in Iucem emit-*

***Lettera del 4 agosto 1759, Lagrange a Eulero**

In trepidante attesa di un ***giudizio*** da parte di Eulero, Lagrange, qualche giorno dopo (4 agosto 1759), gli scrive di nuovo, insistendo su quanto già detto nella precedente lettera e comunicando che a partire da una formula, da lui trovata, è riuscito a dedurre, per la prima volta, la teoria della composizione delle vibrazioni isocrone e ha dimostrato che la teoria di D.Bernoulli, fondata su principi indiretti[51], è valida solo nel caso in cui la corda venga considerata di massa nulla e caricata di un numero finito di pesi[52]. Aggiunge, inoltre, che la formula trovata gli fornisce la stessa costruzione del problema delle corde vibranti che Eulero aveva dato nella sua memoria[53] e che D'Alambert aveva contestato. Riporto, quindi, di seguito, le parole che Lagrange rivolge ad Eulero: *"Pochi giorni fà ti ho inviato un esemplare dell'Opera che una società privata di Torino ha pubblicato sotto il titolo di "Miscellanea filosofico-matematica". Vi si trova la mia dissertazione sulla natura e la propagazione del suono,* ***riguardo alla quale desidero sommamente il tuo giudizio****. Vi ho infatti trattato, oltre ad altri argomenti, delle oscillazioni delle corde tese, e dalla formula generale che ho trovato ho dedotto dapprima la teoria della composizione delle vibrazioni isocrone che Daniel Bernoulli stabilì sulla base di principi indiretti, e ho dimostrato che essa ha luogo solo quando una corda tesa venga considerata come di massa nulla,*

tere coepit, eo animo ut hujuscemodi scientiarum studium, quod hactenus nimis jacuisse videtur apud nos aliquomodo excitetur, et promoveatur. Inter dissertationes mathematicas primae duo nihil continent quod tua videatur attentione dignum; tertia in qua de soni natura et propagatione agitur, fortassis, ut spero, alicujus ponderis videri poterit, ob theoriam de oscillationibus chordarum tensarum, et fibrarum aerearum, quae novo et rigoroso calculo superstructainvenitur; *atque de hac praecipue judicium tuum quam vehementissime exopto."*

[51]Si tratta dei seguenti articoli di D.Bernoulli: "Réfléxions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans la mémoires de l'académie de 1747 et 1748" e "Sur le mêlange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones, qui peuvent coexister dans un même système de corps."

[52]Vedi: Introduzione al problema delle corde vibranti.

[53]L.Eulero: "Sur la vibration des cordes" inserita nelle "Mémoires de l'Académie de Berlin", 1748.

ma carica di un numero finito di pesi; infatti, qualora venisse accresciuto fino all'infinito il numero di questi pesi, ed essi fossero diminuiti nella stessa proporzione, fino a che la corda non risulti di spessore uniforme, tutta la teoria Bernoulliana di per sé si dissolve, e la formula mi fornisce quella stessa costruzione che tu, o uomo illustrissimo, hai dato nella tua dissertazione su questo argomento inserita nelle Memorie dell'Accademia di Berlino e che D'Alembert ha cercato di confutare. Ti comunico ora gli elementi che ti riguardano, poiché sono certo che riceverai questa lettera prima del libro in questione[54]."

***Lettera del 2 ottobre 1759, Lagrange a Eulero**

Il 2 ottobre 1759 Eulero risponde a Lagrange, ringraziandolo per la gentilezza che ha avuto nell'inviargli il Volume che, però, non gli è ancora arrivato. Eulero, infatti scrive: "*E sebbene la* Miscellanea filosofico-matematica*, di cui mi hai generosamente inviato una copia, non mi sia ancora giunta, e sebbene io forse non possa attenderne l'invio in tempi brevi, tuttavia non posso che ringraziarti di tutto cuore per questo segno di amicizia, e nel contempo dichiarare la mia gioia e la mia ammirazione per il fatto che hai compiuto tanto sublimi e profonde investigazioni con tanto felice successo*[55]."

[54]Dalla lettera del 4 agosto 1759 : *"Paucis abhinc diebus ad te misi exemplar Operis quod societas quaedam privata Taurinensis in lucem emisit sub nomine, Miscellaneorum philosophico-mathematicorum. Extat ibi dissertio mea de soni natura et propagatione* `de qua judicium tuum praecipue exopto`*. Egi enim prae caeteris de oscillationibus chordarum tensarum, et ex formula generali quam inveni deduxi primum theoriam compositionis oscillationum isochronarum quam Daniel Bernullis indirectis principiis stabilivit, et demonstravi ipsam tantum locum habere ubi chorda tensa tanquam nullius massae sed ponderibus numero finitis onusta consideraretur, aucto enim horum pouderum numero ad infinitum, iisque in eadem ratione diminutis, quo chorda uniformiter crassa evadat, tota Bernulliona theoria per se labitur, et formula mihi suppeditat eam ipsam constructionem quam tu, vir clarissime, dedisti in dissertatione tua de hac re Berolinensibus Commentariis inserta; quamque D'Alembert oppugnare agressus est. Haec quae at te pertinent tibi hic significo quia non dubito quin literas istas antea sis accepturus quam librum ipsum."*

[55]Dalla lettera del 2 ottobre 1759 : "*Quanquam autem* Miscellanea philosaphico-mathematica *quorum exemplar mihi benevole destinasti, nondum accepi, nec fortasse tam*

In chiusura della lettera, inoltre, Eulero informa Lagrange che sta scrivendo un trattato[56] sul Calcolo integrale e che ha suddiviso tale opera in due libri; il secondo dei quali tratta delle questioni relative alle corde vibranti, dove per un dato tempo t e per uno dato punto della corda, la cui posizione è denotata con la variabile s, si cerca una funzione[57] z, delle due variabili t ed s, a partire da una data relazione delle formule $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ e $\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$. Riporto, quindi le parole di Eulero: *"Poiché in questi gravissimi tempi sono stato libero da altre occupazioni, ho iniziato a scrivere un libro sul Calcolo integrale, opera che già da tempo avevo meditato, e anche annunciato a Pietroburgo, e che ora ho già compiuto per larga parte. Così ho definito il calcolo integrale, ossia come il metodo per trovare le funzioni di una o più variabili a partire da una data relazione dei differenziali o di primo o di più alti gradi, donde, nella misura in cui vi sono funzioni o di uno o di due o di più variabili, ho suddiviso l'intera opera in due libri; per il secondo dei quali, invero, a malapena qualcosa è stato concepito. Ad esso appartengono, ad esempio, le questioni circa le corde vibranti, ove per un dato tempo t, e per un dato punto della corda, la cui posizione sia notata con la variabile s, deve essere determinata, di esso, la velocità e ...[58]; si ricerca infatti una funzione (z) di due variabili t ed s, a partire da una data relazione delle formule* $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ *e* $\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$*, e l'intera idrodinamica si fonda su formule siffatte[59]."*

---

cito expectare possum, tamen non potui quin tibi pro hoc testimonio amicitiae gratias agam maximas, simulque meam laetitiam et admirationem declarem quod tam felici successu, tam sublimes ac profundissimas investigationes perfeceris."

[56]L. Eulero: "Institutiones Calculi integralis".

[57]La funzione z che dipende da s e t, rappresenta l'escursione di un punto della corda di ascissa s dalla sua posizione di riposo all'istante t (vedi Introduzione al problema delle corde vibrabti; quì Eulero utlizza z al posto di y).

[58]Cancellatura nel testo.

[59]Dalla lettera del 2 ottobre del 1759 : *"Quoniam his gravissimis temporibus ab aliis negotiis vacavi, librum de Calculo integrali conscribere coepi, quod opus jampridem eram meditatus, atque adeo Petropolitanae pollicitus, nunc igitur jam notabilem partem absolvi. Calculum integralem ita definivi, ut esset methodus functiones unius pluriumve variabilium inveniendi ex data differentialim vel primi vel altiorum graduum relatione, unde prout functiones sint vel unius vel duarum pluriumve variabilium, totum opus in duos libros*

Contenuti della memoria "Recherches sur la nature et la propagation du son" di Lagrange

Come già detto in precedenza, nella lettera del 23 ottobre 1759, vi sono frequenti riferimenti ed osservazioni relativi alla memoria "Recherches sur la nature et la propagation du son[60]" di Lagrange; vediamo quindi una breve presentazione dei suoi contenuti.
Lagrange apre le sue "Recherches" con queste parole: *"Anche se ultimamente la scienza del Calcolo*[61] *è stata portata al più elevato grado di perfezione, non sembra tuttavia che ci siano stati grandi sviluppi nell'applicazione di questa scienza ai fenomeni della Natura. La teoria dei fluidi, che è sicuramente una delle più importanti per la fisica, è ancora molto imperfetta nei suoi elementi, nonostante gli sforzi degli uomini più illustri che hanno cercato di approfondirla. Vale la stessa cosa per la materia*[62] *che io comincio ad esaminare quì e che può essere considerata come uno dei principali punti di questa teoria. Infatti, poiché il suono consiste di vibrazioni impresse ai corpi sonori e comunicate al mezzo elastico che li circonda, è solo attraverso la conoscenza dei movimenti di questo fluido*[63] *che si può cercare di scoprire la sua vera natura e determinare le leggi che segue nella sua propagazione.*
Newton, che ha cercato per primo di sottomettere i fluidi al calcolo, ha anche fatto le prime ricerche sul suono, ed è arrivato a determinarne la velocità attraverso una formula che si allontana un pò dall'esperienza. Ma se questa teoria è riuscita ad accontentare i Fisici, dei quali la maggior parte l'hanno adottata, non vale la stessa cosa per i Geometri, che studiando le dimostra-

---

divisi; ubi quidem pro posteriori vix quicquam est cultum. Eo pertinent scilicet quaestiones de chordis vibrantibus, ubi pro dato tempore t, et chordae puncto, cujus situs variabilis s denotetur, ejus celeritas et ... determinari debet; quaeritur enim functio quaedam (z) *binarum variabilium t et s, ex data relatione formularum* $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$ *et* $\left(\frac{ddz}{ds^2}\right)$*, et hujusmodi formulis universa hydrodynamica innitur.*"

[60] D'ora in poi, ci riferiremo a questa memoria utilizzando l'abbreviazione "Recherches".

[61] Si riferisce al Calcolo differenziale e integrale.

[62] Si tratta della propagazione del suono e del problema delle corde vibranti.

[63] Il fluido di cui parla Lagrange, è l'aria.

zioni sulle quali si basa, non vi hanno trovato quel grado di concretezza e di evidenza che caratterizza le altre sue Opere. Tuttavia, nessuno, che io sappia, ha cercato di scoprire e di fare conoscere i principi che la rendono insufficiente; ancora meno, qualcuno ha cercato di sostituirli con altri più sicuri e rigorosi."

Lagrange, quindi, alla luce di quanto detto, avverte la necessità di riprendere tutta la questione a partire dai suoi fondamenti trattandola come se fosse una materia interamente nuova, cioè senza prendere niente in prestito da coloro che vi hanno precedentemente lavorato; questo è l'intento dichiarato da Lagrange, ma poi in realtà, anche se indirettamente, utilizza qualche risultato e prende qualche spunto da suoi predecessori.

Per meglio comprendere la materia in questione, Lagrange comincia analizzando e studiando approfonditamente le proposizioni di Newton sulla propagazione del suono e trova che sono fondate su supposizioni incompatibili fra loro e che quindi portano necessariamente al falso; è questo che Lagrange ha cercato di mostrare attraverso due strade differenti nel Primo Capitolo delle sue "Recherches". Passa poi, alla ricerca di metodi diretti e generali per risolvere il problema proposto, usando solo principi legati alle leggi della Dinamica conosciute.

Per dare alle sue ricerche la maggiore generalità possibile e per renderle applicabili a ciò che accade nella natura, affronta la questione sotto lo stesso punto di vista adottato da tutti i Geometri e i Fisici fino a quel momento e sostiene che non si possa ridurre, il problema sulle vibrazioni dell'aria che producono il suono, ad un enunciato più semplice del seguente: *"Essendo dato un numero indefinito di particelle elastiche distribuite in linea retta, che si mantengono in equilibrio in virtù delle loro forze reciproche di repulsione, determinare i movimenti che queste particelle devono seguire nel caso in cui vengano disturbate, senza uscire dalla stessa linea retta."*

Per facilitarne la risoluzione, Lagrange suppone che le particelle siano tutte della stessa grandezza, dotate di una stessa forza elastica e che i loro movimenti siano sempre infinitamente piccoli.

Esaminando le equazini trovate sotto queste ipotesi, Lagrange si accorge che esse non differiscono in alcun modo da quelle relative al problema *de chordis vibrantibus*, purché si supponga che le stesse particelle siano disposte nello stesso modo sia in un caso che nell'altro. Da ciò segue che, aumentando il numero delle particelle all'infinito e diminuendo le masse nella stessa proporzione, il movimento di una fibra sonora, in cui le particelle elastiche si toccano le une con le altre, può essere comparato a quello di una corda vibrante corrispondente.
La scoperta del rapporto fra questi due problemi (propagazione del suono e corde vibranti), si deve, in realtà, a D'Alembert che però, come scrive anche Lagrange in una nota a piè di pagina, non ne fece mai uso.
Lagrange, a questo punto, passa a parlare delle teorie sulle corde vibranti formulate da Taylor, D'Alembert ed Eulero, espone, in poche parole, le loro controversie e le obiezioni che Daniel Bernoulli ha rivolto nei confronti di D'Alembert ed Eulero. Dopo queste considerazioni, Lagrange espone la sua teoria che si basa su un analisi nuova ed interessante in quanto gli permette di risolvere un numero indefinito di equazioni tutte in una volta e si estende fino alle funzioni discontinue; trova così delle formule che, a suo parere, non sono troppo complicate a confornto del grande numero di operazioni e calcoli che è stato obbligato a fare. Considera, prima, queste formule nel caso in cui il numero dei corpi mobili sia finito, e da quì deduce facilmente tutta la teoria delle vibrazioni semplici e regolari che D.Bernoulli ha trovato solo attraverso strade particolari e indirette, passa poi, al caso in cui il numero dei corpi mobili sia infinito (passaggio al limite[64]), e dopo avere provato l'insufficienza della teoria precedente in questo caso, arriva alle stesse formule date da Eulero e fortemente contestate da D'Alembert. Questo passaggio al limite però, non è privo di errori, come evidenzierà presto D'Alembert. Nonostante gli errori commessi da Lagrange, il tentativo di passare, attraverso il limite,

[64]Si può intravedere una prima immatura idea di passaggio al limite, in D'Alembert nella sua "Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration", dove scrive: *"Perciò non c'è altro da fare se non cercare il moto della corda guardandola come composta da un elevato numero di punti, uniti insieme da fili inestensibili."*

dalla soluzione discreta a quella continua è una conquista degna di nota.
Inoltre, Lagrange, dice di fornire alla sua costruzione tutta la generalità possibile e attraverso l'applicazione che ne fà alle corde della musica, ottiene una dimostrazione generale e rigorosa del seguente fatto: *"qualsiasi figura venga data all'inizio alla corda, la durata delle sue oscillazioni rimane sempre la stessa*[65]*."*
Lagrange prosegue la sua memoria con lo sviluppo della teoria generale dei suoni armonici che provengono da una stessa corda e quella degli strumenti a vento. Passa poi a trattare le leggi della propagazione del suono , gli echi semplici e composti, e descrive il modo in cui un insieme di suoni si possono diffondere nello stesso spazio senza però confondersi.
In conclusione, Lagrange, comunica che il suo scopo è di distruggere tutti i pregiudizi di coloro che ancora dubitano se la Matematica possa portare nuove luci sulla Fisica.
Il Volume I delle "Misc. Taurin.", in cui è contenuta la memoria appena descritta, è molto importante in quanto è il primo attraverso il quale Lagrange si fa conoscere ai Matematici e Fisici dell'epoca.

Lettera del 23 ottobre 1759, Eulero a Lagrange

Nella lettera del 23 ottobre 1759, la prima della corrispondenza, scritta in lingua francese[66], Eulero risponde a Lagrange dopo avere finalmente ricevuto e letto il Volume I delle "Misc. Taurin.". Si profonde in elogi per l'abilità con cui Lagrange ha saputo maneggiare le *equazioni* per determinare il *movimento delle corde e la propagazione del suono.* Lo ringrazia, inoltre, per avere messo la sua soluzione al riparo dalle critiche avanzate da D'Alembert

[65]Lagrange, per rendere l'idea della difficoltà del problema che è riuscito a risolvere, riporta, in una nota a piè di pagina, ciò che D'Alembert aveva scritto nelle sue "Addition au mémoire sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration", ovvero: *"È verosimile che in generale, qualsiasi figura la corda prenda, il tempo di una vibrazione sarà sempre lo stesso, ed è quello che l'esperienza sembra confermare, ma che sarà difficile e forse impossibile dimostrare in modo rigoroso attraverso il calcolo."*

[66]Vedi: nota (48).

e quindi di avere dimostrato la necessità di introdurre le funzioni irregolari e discontinue nella soluzione di questo genere di problemi[67]. Lagrange, infatti, nelle sue "Recherches", dopo avere esposto brevemente i risultati di D'Alembert e di Eulero relativi al problema delle corde vibranti, sostiene che la costruzione fornita da Eulero è molto più generale rispetto a quella di D'Alembert, in quanto quest'ultimo suppone che la curva iniziale debba essere regolare ed espressa attraverso un'equazione continua. Eulero nella sua memoria "Remarques sur les mémoires précédens de M.Bernoulli", in cui riprende l'intera analisi del problema, risponde alle obiezioni avanzate da D'Alembert continuando a ribadire e confermare la sua posizione. Ma, come scrive Lagrange, *"poiché D'Alembert non fornisce nessuna motivazione particolare per sostenere le sue obiezioni, nemmeno Eulero ne adduce alcuna, e così la questione rimane incerta."* Lagrange, continua poi: *"Nessuno potrebbe dubitare che nelle funzioni algebriche tutti i loro diversi valori siano uniti insieme dalla legge di continuità; perciò sembra indubitabile che le conseguenze, che si traggono dalle regole del Calcolo differenziale ed integrale, siano sempre illegittime in tutti i casi in cui non si suppone valida questa legge. Da ciò segue che, poichè la costruzione di Eulero è derivata direttamente dall'integrazione dell'equazione differenziale data, questa costruzione, per sua stessa natura, è applicabile solo a curve continue, e che possono essere espresse con una funzione qualsiasi delle variabili t e x. Io concludo, quindi, che tutte le prove che si possono apportare per decidere su questa questione [...] sono assolutamente insufficienti, ed è solo attraverso un calcolo, come quello che ho in serbo [...] che si può sperare di giungere ad una conclusione."*

Il calcolo di cui parla Lagrange è il passaggio al limite tramite il quale arriva alle stesse formule trovate da Eulero[68] e le giustifica; Lagrange sostiene, cioè,

[67]Vedi: Introduzione al Problema delle corde vibranti, pagina 45, per la controversia fra D'Alembert e Eulero sulle funzioni ammissibili nella soluzione e nota (39) per le definizioni di funzione continua e di funzione discontinua.

[68]Vedi: Contenuti della memoria "Recherches sur la nature et la propagation du son" di Lagrange, pagina 60.

di avere stabilito la soluzione che Eulero fornisce sotto forma di funzioni "assolutamente arbitrarie", senza utilizzare il Calcolo differenziale o integrale, ma semplicemente passando al limite nella soluzione della corda carica.
Infatti, grazie a questo metodo, Lagrange evita una derivazione in x e tutti i problemi ad essa collegati, ma commette numerose distrazioni ed errori di calcolo, come presto segnalerà D'Alembert e poi D.Bernoulli. Lagrange ritornerà, quindi, su questa questione nella memoria "Nouvelles Recherches sur la nature et la propagation du son", contenuta nel Volume II delle "Misc. Taurin." relativo agli anni 1760-1761 e che verrà pubblicato nel 1762.
Nel Capitolo II delle sue "Nouvelles Recherches sur la nature et la propagation du son", Lagrange scrive: *"Si avverte la necessità di ammettere nel calcolo altre curve rispetto a quelle che i Geometri hanno considerato fino ad ora, e di utilizzare un nuovo genere di funzioni indipendenti dalla legge di continuità che possiamo chiamare* funzioni irregolari e discontinue *[...] Credo che Eulero sia stato il primo ad avere introdotto nell'Analisi questo genere di funzioni, nella sua soluzione del problema* de chordis vibrantibus *[...]; ma abbiamo già osservato (Rech. préc., XV) le difficoltà alla quale questa soluzione è soggetta, e la necessità di stabilirla e confermala attraverso un metodo diretto e rigoroso come quello esposto nel Capitolo V delle* Recherches précédentes[69]*; Eulero mi ha onorato di averlo riconosciuto in una lettera*[70] *che mi ha scritto relativa alle mia teoria del suono. Questo metodo tuttavia, che consiste nel considerare prima un numero finito di corpi mobili, è estremamente difficile e imbarazzante, e lo diventa ancora di più quando si tratta di rendere il loro numero infinito. Questo passaggio dal finito all'infinito nelle mie formule, non è sembrato così evidente e dimostrativo, ai due grandi Geometri, Beronoulli e D'Alembert, e poiché me l'hanno fatto notare in alcune lettere, io ho creduto di dovere cercare, di nuovo, un altro metodo più semplice [...] in grado di togliere ogni dubbio che potrebbe ancora presentarsi sull'esattezza dei miei risultati."* Quindi, dopo questa breve

[69]Lagrange si riferisce alle sue "Recherches sur la nature at la propagation du son".
[70]Lagrange si riferisce alla lettera che stiamo analizzando; lettera del 23 ottobre 1759.

introduzione, all'inizio del Capitolo II, in cui spiega i suoi intenti, Lagrange passa ad esporre il suo nuovo metodo.
Ritorniamo alla lettera, dove Eulero, dopo qualche osservazione, dice di essersi accorto che la sua soluzione non è così generale come pensava: infatti, per potere dare all'inizio alla corda una figura qualsiasi, la soluzione fornita da Eulero richiede che in questo stato, ovvero per $t = 0$, la velocità della corda sia nulla ($v_i = 0$); la corda viene in seguito rilasciata e si vuole trovare la sua configurazione dopo un certo tempo t, $t \neq 0$.
Ora però, grazie anche al contributo di Lagrange, Eulero comunica di avere generalizzato la sua soluzione, riuscendo quindi a risolvere il problema dando alla corda, non solo una figura qualunque, ma imprimendo anche ad ogni suo punto una velocità qualunque.
Senza esporre i suoi risultati, Eulero, continua avanzando una "critica" a Lagrange: *"Vedo che avete tratatto il caso in cui la corda all'inizio è tesa in linea retta AB, ma non so se la vostra soluzione si estende anche al caso in cui si suppone per la corda, oltre al movimento dato, una figura qualunque."*
Eulero si riferisce, quì, al paragrafo 41 delle "Recherches", dove Lagrange, dopo avere esposto la propria soluzione del problema delle corde vibranti attraverso il passaggio al limite, affronta molto rapidamente questo caso dicendo: *"Se si vuole che la corda, all'inizio del suo movimento, sia distesa in linea retta, e che tutti i suoi punti ricevano in questo stato delle velocità qualsiasi, si supporrà che le ordinate della curva non rappresentino più lo spostamento dei punti della corda dall'asse, ma le velocità dei punti al primo istante."* Lagrange risponderà a questa osservazione di Eulero nella lettera del 24 novembre 1759[71].
Eulero passa, ora, a commentare la seconda sezione[72] delle "Recherches", relativa alla propagazione del suono. Su questo argomento, Eulero, si è imbattutto più e più volte senza mai riuscire a venirne a capo in quanto ciò che

[71]Vedi: Traduzione in lingia italiana della lettera del 24 novembre del 1759, pagina 81 e nota (9).
[72]La seconda sezione delle "Recherches" di Lagrange compare sotto il titolo: "De la propagation du son".

aveva trovato nella sua gioventù, era basato su un'idea illusoria, per mettere d'accordo la Teoria con l'esperienza sulla velocità del suono. Infatti, il problema della discordanza constata fra le previsioni teoriche, dedotte dalla teoria della propagazione del suono esposta da Newton[73] nei suoi "Principia", e i risultati delle esperienze fatte per determinare la velocità del suono nell'aria, ha occupato gran parte dei fisici, durante il diciottesimo secolo, nel tentativo di spiegare questa differenza[74] o meglio ancora di ridurla. Così Eulero, nel 1727, nella sua memoria "Dissertio physica de sono", aveva proposto di moltiplicare la formula fornita da Newton per il coefficiente $\frac{4}{\pi}$, ma riconobbe subito il carattere illusorio di questa idea.

Eulero, però, dopo avere ricevuto e letto la memoria di Lagrange, riprende su nuove basi le sue ricerche sulla propagazione del suono raggiungendo progressi rapidi e importanti, messi in luce, attraverso le lettere[75] inviate a Lagrange, ma soprattutto attraverso tre importanti memorie[76] presentate all'Accademia di Berlino fra novembre e dicembre del 1759.

Nelle "Recherches", l'analisi di Lagrange si basa sull'idea che i movimenti delle parti d'aria che compongono una fibra elastica continua, non differiscono in nessun modo da quelli delle corde vibranti, se non per il fatto che i movimenti (o vibrazioni) delle corde sono perpendicolari all'asse mentre quelli

[73]Fù Newton, per primo, a ricavare una brillante formula per la velocità del suono nell'aria; brillante, anche se non del tutto corretta. Il ragionamento alla base della sua formula è, infatti, estremamente acuto. Purtroppo, però, nella prima metà del XVII secolo la termodinamica non era ancora stata elaborata, quindi, alla formula di Newton manca un coefficiente moltiplicativo (adimensionale) e di conseguenza fornisce valori numerici errati per difetto di circa il 18%. Dai "Principia", Libro II, Proposizione XLIX, Problema XI: *"Dati medii densitate et vi elastica, invenire velocitatem pulsuum."* Questa è la proposizione, a partire dalla quale Newton ricava la velocità del suono, essendo date la densità e la forza elastica del mezzo.

[74]La velocità del suono nell'aria trovata con l'esperienza è maggiore rispetto a quella ricavata dalla teoria di Newton. Vedi nota precedente.

[75]Lettere del 23 ottobre 1759 e dell'1 gennaio 1760.

[76]Si tratta delle seguenti memorie di Eulero: "De la propagation du son", (E.305); "Supplemet aux recherches sur la propagation du son", (E.306); "Continuation des recherches sur la propagation du son", (E.307).

dell'aria sono longitudianali; quindi se si considera una qualsiasi fibra d'aria o un insieme di più fibre contenute in un tubo che le limita e le distingue dalla massa continua dell'aria esterna, queste fibre riceveranno movimenti simili a quelli ricevuti dai punti di una corda musicale di uguale lunghezza e di uguale peso, e in cui la forza di tensione sia equivalente a quella dell'elasticità dell'aria.
Lagrange considera, quindi, una fibra elastica costituita da un numero infinito di particelle d'aria, una delle quali, attraverso la vibrazione del corpo sonoro, riceve un impulso esterno c; sia C tale particella.

Dopo una serie di calcoli, Lagrange conclude che il suono partendo da C si propaga da entrambe le parti, cioè sia verso A, sia verso B e la comunicazione del movimento, da una particella all'altra, avviene secondo una velocità che non dipende da quella iniziale c, impressa dall'esterno. In generale, quindi, una qualsiasi particella d'aria che viene scossa dal movimento di oscillazione di un corpo sonoro, metterà in movimento le particelle circostanti, e queste metteranno in movimento le altre che seguono nella fibra rettilinea, che partono tutte da uno stesso punto come da un centro comune; questi movimenti, saranno, in ogni particella, istantanei e verranno sempre comunicati con una velocità costante, qualsiasi sia l'impulso ricevuto dalla prima particella.
Ecco quindi spiegato il dubbio di Eulero, il quale si chiedeva come mai una vibrazione primitiva esercitata in A si diffondesse da entrambe le sue parti, ovvero verso D e X, ma una volta giunta in X si propaga solo verso E.

Fig. 3.

Lagrange, nelle sue "Nouvelles Recherches", fà riferimento proprio a questa lettera e al dubbio di Eulero. Infatti scrive: *"Eulero, in una lettera del* 23 *ottobre* 1759*, mi ha fatto l'onore di scrivere che la lettura delle mie* Recherches

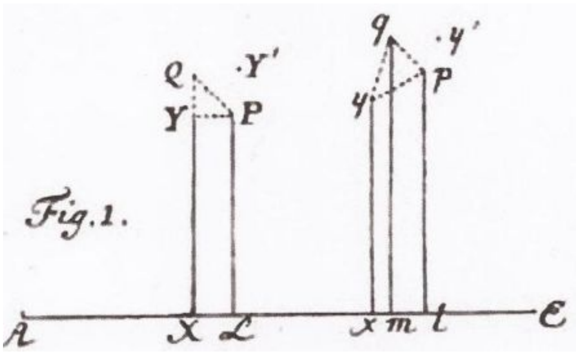
sur le Son *gli ha suggerito la risoluzione di una difficoltà che gli si presentava da tempo. Questa difficoltà consisteva nel sapere perché, le vibrazioni primitive si diffondono all'inizio in modo natuarale da entrambe le parti opposte, mentre le vibrazioni derivate si propagano solo da una parte e sempre nella stessa direzione. Il motivo di questa differenza dipende dalla particolare natura delle vibrazioni derivate, tali che la loro propagazione possa avere luogo solo da una parte.*"
Fino adesso abbiamo visto il problema della propagazione del suono nell'aria nel caso di una dimensione; Eulero affronta questo problema nella sua memoria, "De la propagation du son" (E.305), che appare dopo[77] la lettera in questione e dove scrive: *"Considero una sola estensione dell'aria secondo la linea retta AE, come se l'aria fosse racchiusa in un tubo infinitamente piccolo AE, che inoltre suppongo chiuso alle sue due estremità A ed E [...] Suppongo all'inizio l'aria in equilibrio, o con la stessa densità per tutta la lunghezza del tubo, in modo che anche la sua elasticità sia ovunque la stessa; sia l'altezza h, la misura dell'elasticità in questo stato di equilibrio.*"
Eulero, dopo vari calcoli, in cui introduce l'altezza g dalla quale un corpo pesante cade in un secondo di tempo (g è la gravità), arriva alla seguente equazione

$$\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = 2gh\left(\frac{ddy}{dx^2}\right),$$

che descrive la propagazione del suono nell'aria nel caso di una dimensione (equazione unidimensionale delle onde), e che paragona a quella della corda posta in vibrazione quando le vibrazioni sono supposte infinitamente piccole. La y rappresenta l'ampiezza dell'onda nel punto x al tempo t. Questa stessa equazione viene riportata da Eulero, nella lettera, sotto la forma: $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, dove si ha z al posto di y e $\alpha = 2gh$.
Sempre nella lettera, Eulero, continua dicendo che è un peccato che questo stesso problema non possa essere risolto dando all'aria tre dimensioni o solamente due, poiché si ha ragione di dubitare se la propagazione sarebbe allora la stessa. Infatti, nella memoria "Supplement aux recherches sur la

[77]Vedi: pagina 65 e nota (76).

propagation du son" (E.306), dove affornta il problema nel caso di due e tre dimensioni, Eulero scrive: *"Nella Memoria precedente*[78]*, ho supposto all'aria, attraverso la quale il suono è trasmesso, una sola dimensione secondo una linea retta. Sembra che la velocità di propagazione debba essere la stessa, sia che l'aria abbia un'estensione secondo tutte e tre le dimensioni, o secondo una sola [...] Tuttavia rimane ancora incerto, se la velocità del suono, che si trova nell'ipotesi di una sola dimensione, non venga alterata dall'estensione secondo le altre due dimensioni: poiché la velocità del suono che segue dall'esperienza è molto più grande rispetto a quella fornita dalla teoria che si basa sull'ipotesi di una sola dimensione, si ha ragione di dubitare che l'estensione in tutte le dimensione possa causare questa accelerazione. Sarà quindi molto importante fare dei tentativi per sviluppare le altre ipotesi, in cui si suppone all'aria, o due o tutte e tre le dimensioni; in entrambe le ipotesi, io cercherò di riportare le vibrazioni dell'aria a formule analitiche [...] Comincio con l'ipotesi di due dimensioni*[79] *[...]"*. Eulero, quindi, considera un punto Y che rappresenta una particella d'aria nello stato di equilibrio; questa particella, dopo una certa agitazione impressa all'aria, viene trasportata in y. Si vuole trovare la posizione della particella, dopo l'agitazione. Facendo riferimento alla seguente figura, differente rispetto a quella riportata nella lettera



ma che sostanzialmente rappresenta la stessa situazione, pone $AX = X$, $XY = Y$ (coordinate di Y), e $Ax = x$, $xy = y$ (coordinate di y). Sia x che y

[78]Si tratta della memoria sopra citata: "De la propagation du son"(E.305).

[79]Il caso delle tre dimensioni viene affrontato sempre in questa memoria e sarà presentato dettagliatamente da Eulero nella lettera dell'1 gennaio 1760.

sono funzioni di X, Y e del tempo t.
Eulero, ora, considerando il caso in cui le agitazioni sono inifinitamente piccole, pone $x = X + p$, $y = Y + q$ dove p e q sono quantità estremamente piccole e rappresentano la differenza rispettivamemte fra X e x, e fra Y e y. Dopo una serie di lunghi passaggi e calcoli abbastanza complessi[80], arriva alle seguenti equazioni per la determinazione del movimento:

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big)$$

e

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big).$$

Scrivendo x e y al posto di p e q, per meglio marcare il rapporto con le coordinate principali X e Y, si ottengono le equazioni:

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddx}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddx}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddy}{dXdY}\Big) \tag{3.15}$$

e

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddy}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddy}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddx}{dXdY}\Big). \tag{3.16}$$

che descrivono la propagazione del suono nell'aria nel caso delle due dimensioni (equazione bidimensionale delle onde): una particella d'aria che nello stato di equlibrio si trova in un punto determinato dalle coordinate X, Y, si troverà dopo un'agitazione infinitamente piccola e dopo un tempo t, in un altro punto determinato dalle coordinate $X + x$, $Y + y$, dove x, y sono quantità infinitamente piccole, e funzioni delle variabili X, Y e del tempo t, la cui natura è espressa appunto dalle due equazioni scritte. Queste stesse equazioni, sono riportate nella lettera, nella seguente forma:

$$\Big(\frac{ddx}{dt^2}\Big) = \alpha\Big(\frac{ddx}{dX^2}\Big) + \alpha\Big(\frac{ddy}{dXdY}\Big) \tag{3.17}$$

e

$$\Big(\frac{ddy}{dt^2}\Big) = \alpha\Big(\frac{ddy}{dY^2}\Big) + \alpha\Big(\frac{ddx}{dXdY}\Big) \tag{3.18}$$

[80]Vedremo più in dettaglio questi calcoli nel commento alla lettera dell'1 gennaio 1760 dove viene affrontato il caso delle tre dimensioni.

dove $\alpha = 2gh$ è stato distribuito nei due membri di destra.
Si tratta quindi, ora, di risolvere le due equazioni (3.15), (3.16), senza dubbio più difficili rispetto a quella trovata per il caso di una dimensione, e che si deduce facilmente ponendo in (3.15), $Y = 0$ e $y = 0$ (ovvero annullando la seconda dimensione), da cui segue: $\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddx}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddx}{dX^2}\Big)$.
Allo stesso modo, per le equazioni riportate nella lettera, ponendo $Y = 0$ e $y = 0$ in (3.17), si ottiene l'equazione nel caso di una dimensione: $\Big(\frac{ddx}{dt^2}\Big) = \alpha\Big(\frac{ddx}{dX^2}\Big)$.
Ora Eulero, vuole riportare le equazioni (3.15), (3.16) ad un'unica equazione, ma nella lettera, vi arriva senza spiegare i passaggi effettuati; cerchiamo, quindi, di ricostruire questi passaggi mancanti facendo affidamento alla memoria E.306 di Eulero.
Consideriamo il caso in cui l'agitazione iniziale sussista solo in un piccolo spazio attorno ad A; le agitazioni prodotte si diffonderanno in forma di cerchi concentrici. In questa situazione, quindi, gli spostamenti x e y saranno proporzionali alle coordinate X e Y; poniamo $x = vX$ e $y = vY$. Avremo:

$$\Big(\frac{dx}{dt}\Big) = X\Big(\frac{dv}{dt}\Big), \quad \Big(\frac{dx}{dX}\Big) = v + X\Big(\frac{dv}{dX}\Big), \quad \Big(\frac{dx}{dY}\Big) = X\Big(\frac{dv}{dY}\Big);$$

$$\Big(\frac{ddx}{dt^2}\Big) = X\Big(\frac{ddv}{dt^2}\Big), \quad \Big(\frac{ddx}{dX^2}\Big) = 2\Big(\frac{dv}{dX}\Big) + X\Big(\frac{ddv}{dX^2}\Big),$$

$$\Big(\frac{ddx}{dXdY}\Big) = \Big(\frac{dv}{dY}\Big) + X\Big(\frac{ddv}{dXdY}\Big)$$

e allo stesso modo

$$\Big(\frac{dy}{dt}\Big) = X\Big(\frac{dv}{dt}\Big), \quad \Big(\frac{dy}{dY}\Big) = v + Y\Big(\frac{dv}{dY}\Big), \quad \Big(\frac{dy}{dX}\Big) = Y\Big(\frac{dv}{dX}\Big);$$

$$\Big(\frac{ddy}{dt^2}\Big) = Y\Big(\frac{ddv}{dt^2}\Big), \quad \Big(\frac{ddy}{dY^2}\Big) = 2\Big(\frac{dv}{dY}\Big) + Y\Big(\frac{ddv}{dY^2}\Big),$$

$$\Big(\frac{ddy}{dXdY}\Big) = \Big(\frac{dv}{dX}\Big) + Y\Big(\frac{ddv}{dXdY}\Big)$$

Sostituendo, quanto appena trovato in (3.15), (3.16), abbiamo:

$$\frac{X}{2gh}\Big(\frac{ddv}{dt^2}\Big) = 2\Big(\frac{dv}{dX}\Big) + X\Big(\frac{ddv}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{dv}{dX}\Big) + Y\Big(\frac{ddv}{dXdY}\Big) =$$

$$= 3\left(\frac{dv}{dX}\right) + X\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dXdY}\right) \tag{3.19}$$

e

$$\frac{Y}{2gh}\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = 2\left(\frac{dv}{dY}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + \left(\frac{dv}{dY}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right) =$$

$$= 3\left(\frac{dv}{dY}\right) + Y\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) + X\left(\frac{ddv}{dXdY}\right). \tag{3.20}$$

Si ha che v è una funzione delle due variabili t e $\sqrt{X^2+Y^2}$; poniamo $\sqrt{X^2+Y^2} = Z$ e $dv = Mdt + NdZ$.
Poiché $dZ = \dfrac{XdX + YdY}{Z}$, abbiamo:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = M, \quad \left(\frac{dv}{dX}\right) = \frac{NX}{Z}, \quad \left(\frac{dv}{dY}\right) = \frac{NY}{Z},$$

$$\left(\frac{ddv}{dt^2}\right) = \left(\frac{dM}{dt}\right);$$

e

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{N}{Z} - \frac{NX^2}{Z^3} = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{NZ^2 - NX^2}{Z^3} =$$

$$= \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{N(X^2+Y^2) - NX^2}{Z^3} = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dX}\right) + \frac{NY^2}{Z^3}; \tag{3.21}$$

$$\left(\frac{ddv}{dXdY}\right) = \frac{X}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) - \frac{NXY}{Z^3}; \tag{3.22}$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) = \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{N}{Z} - \frac{NY^2}{Z^3} = \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{NZ^2 - NY^2}{Z^3} =$$

$$= \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{N(X^2+Y^2) - NY^2}{Z^3} = \frac{Y}{Z}\left(\frac{dN}{dY}\right) + \frac{NX^2}{Z^3}. \tag{3.23}$$

Poniamo $dN = Pdt + QdZ = Pdt + \dfrac{QXdX + QYdY}{Z}$, e poichè $\left(\dfrac{dN}{dX}\right) = \dfrac{QX}{Z}$, $\left(\dfrac{dN}{dY}\right) = \dfrac{QY}{Z}$, avremo sostituendo in (3.21), (3.22), (3.23):

$$\left(\frac{ddv}{dX^2}\right) = \frac{QX^2}{Z^2} + \frac{NY^2}{Z^3}; \quad \left(\frac{ddv}{dXdY}\right) = \frac{QXY}{Z^2} - \frac{NXY}{Z^3};$$

$$\left(\frac{ddv}{dY^2}\right) = \frac{QY^2}{Z^2} + \frac{NX^2}{Z^3}.$$

Sostituendo i valori trovati nelle nostre equazioni (3.19), (3.20), abbiamo:

$$\frac{X}{2gh}\Big(\frac{ddv}{dt^2}\Big) = \frac{3NX}{Z} + X\Big(\frac{QX^2}{Z^2} + \frac{NY^2}{Z^3}\Big) + Y\Big(\frac{QXY}{Z^2} - \frac{NY^2}{Z^3}\Big) =$$

$$= \frac{3NX}{Z} + QX + \Big(\frac{X^2}{Z^2} + \frac{Y^2}{Z^2}\Big) = \frac{3NX}{Z} + QX\Big(\frac{X^2+Y^2}{Z^2}\Big) = \frac{3NX}{Z} + QX$$

e

$$\frac{Y}{2gh}\Big(\frac{ddv}{dt^2}\Big) = \frac{3NY}{Z} + Y\Big(\frac{QY^2}{Z^2} + \frac{NX^2}{Z^3}\Big) + X\Big(\frac{QXY}{Z^2} - \frac{NX^2}{Z^3}\Big) =$$

$$= \frac{3NY}{Z} + QY\Big(\frac{Y^2}{Z^2} + \frac{X^2}{Z^2}\Big) = \frac{3NY}{Z} + QY\Big(\frac{X^2+Y^2}{Z^2}\Big) = \frac{3NY}{Z} + QY$$

che si riducono ad un'unica equazione:

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddv}{dt^2}\Big) = \frac{3N}{Z} + Q.$$

Ora poiché, $N = \Big(\frac{dv}{dZ}\Big)$ e $Q = \Big(\frac{dN}{dZ}\Big) = \Big(\frac{ddv}{dZ^2}\Big)$, si tratta di trovare per v una funzione di due variabili t e Z che soddisfa questa equazione:

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddv}{dt^2}\Big) = \frac{3}{Z}\Big(\frac{dv}{dZ}\Big) + \Big(\frac{ddv}{dZ^2}\Big).$$

Allora, un qualsiasi punto Z, che nella situazione di equilibrio si trova alla distanza $AZ = Z$ dal punto fisso A, sarà trasportato, dopo un tempo t, per uno spazio $Zz = \sqrt{x^2+y^2} = vZ$.

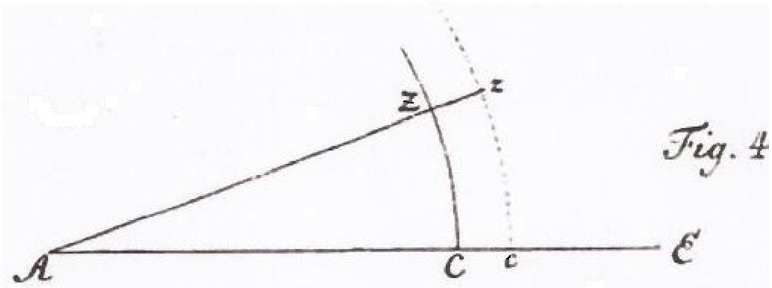


Fig. 4

Se poniamo questo spostamento Zz uguale a z, ovvero $Zz = vZ = z$, in modo che $v = \frac{z}{Z}$, avremo l'equazione :

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = -\frac{z}{Z^2} + \frac{1}{Z}\Big(\frac{dz}{dZ}\Big) + \Big(\frac{ddz}{dZ^2}\Big) \tag{3.24}$$

che descrive la propagazione del suono nell'aria nel caso di due dimensioni e che Eulero riporta nella lettera in questa forma:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right) + \frac{\alpha}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \frac{\alpha z}{Z^2}. \tag{3.25}$$

dove, come sempre $\alpha = 2gh$, viene distribuito nei membri di destra che sono scritti con ordine invertito.
Eulero osserva che, dall'equazione trovata (3.24) (o equivalentemente (3.25)), non sembra che la propagazione del suono avvenga con la stessa velocità nelle due ipotesi, ovvero nel caso di una e di due dimensioni dell'aria. Tuttavia, non si può concludere niente, prima di essere in grado di risolvere generalmente l'equazione ottenuta; Eulero si augura, quindi, che l'Analisi venga portata al punto di potere risolvere questo tipo di equazioni ed auspica a Lagrange questa gloria[81].
Dopo avere dato questo abbozzo della *teoria della propagazione del suono nel piano* (o teoria delle onde circolari), Eulero, continua a commentare le "Recherches" di Lagrange, apportando osservazioni sulla natura degli echi e sui suoni della Musica. Infine, riferisce di avere appena ultimato il terzo Volume della "Mechanica" che tratta del movimento dei corpi solidi inflessibili.

[81] A questa lettera di Eulero seguono due risposte di Lagrange: lettera del 24 novembre 1759 e lettera del 26 dicembre 1759. Nella prima di queste lettere, Lagrange, non avendo avuto tempo di rifletterci, non tratterà questo problema che invece affronterà nella seconda lettera e che svilupperà nel Capitolo IV delle sue "Nouvelles Recherches".

Capitolo 4

Lettera di Eulero a Lagrange, Torino, 24 Novembre 1759

4.1 Lettera in lingua originale

LAGRANGE À EULER

De Turin, 24 novembre 1759.

Monsieur,

Rien ne pouvait m'arriver de plus agréable que l'honneur de vos lettres, qui m'assurent de la continuation da votre précieuse amitié; j'ai été charmé surtout d'apprendre que vous ayez enfin reçu le Livre que j'avais pris la liberté de vous envoyer comme un témoignage du respecteux attachement que je conserve sans cesse pour votre illustre personne. Notre Société vous est infiniment redevable de la bonté que vous avez eu d'examiner ses travaux, et du jugement honorable que vous en portez; vos suffrages, monsieur, sont pour nous les plus flatteurs, et ce n'est que sur eux que nous croyons pouvoir justement apprécier notre Ouvrage. Le succès de cette première entreprise nous encourage à ne pas l'abandonner, et nous espérons de donner au public un semblable Volume au milieu de l'année prochaine. Nous avons d'ailleurs tout lieu de croire que le Gouvernement ne manquera pas de soutenir une

Société naissante, qui, sans un établissement convenable, ne saurait pas subsister longtemps; mais ce qui pourrait l'engager le plus ce serait de voir que ceux mêmes qui tiennent les premiers rangs dans les Sciences daignassent y concourir, et l'appuyer par leurs noms et leur crédit. M. Haller vient de nous faire cet honneur en nous promettant deux Dissertation pour le Tome suivant. Oserais-je vous supplier aussi, monsieur, d'une faveur semblable, au nom de toute la Société? Les Lettrés de notre Pays seront sans doute fidèles à conserver une vive reconnaisance de ceux qui les auront les premiers honrés et protégés. En cas que vous vouliez vous daigner nous envoyer quelque pièce, vous pouvez, s'il n'y a pas d'autre voie plus commode et plus s$\hat{u}$re, nous la faire tenir directement par la poste en l'adressant à Genève, sans craindre nullement la grosseur du paquet.

Je me crois extrêmement heureux d'avoir pu contribuer à mettre votre solution de *chordis vibrantibus* à l'abri de toutes les objections de MM. Bernoulli et d'Alembert. Il est vrai que les calculs en sont assez longs et compliqués; mais je ne sais pas si, en envisageant les choses comme j'ai cru devoir faire, on pourrait les abréger ou simplifier. J'ai cependant imaginé depuis peu une autre solution analytique, par laquelle je parviens directement de la formule differentielle $\left(\dfrac{ddy}{dt^2}\right) = c\left(\dfrac{ddy}{dx^2}\right)$ à la même construction générale que j'ai donnée dans l'article 45, sans que la nature du calcul puisse porter la moindre atteinte à sa généralité; car cette nouvelle méthode est fondée sur les mêmes principes que celle que j'ai expliquée pour le cas d'un nombre indéterminé de corps mobiles, avec cette différence que les opérations, ici roulant toujours sur des termes infiniment petits, ne sont composées que des intégrations et différentiations convenables. Cette solution étant d'una genre tout à fait nouveau, ne sera peut-être pas aussi indigne de votre attention, et elle servira encore plus à établir l'usage des fonctions irréguglières et discontinues dans une infinité d'autres problèmes. Je la réserve pour le second Tome de nos Mémoires. A propos de la solution générale, lorsque la corde a au commencement une figure quelconque avec des vitesses données à tous ses points, vous verrez que je l'ai donnée dans l'article cité, et je ne doute pas qu'elle ne soit pas entièrement conforme à celle que vous avez inventée; mais il faut avoir égard à l'errata qui se trouve à la fin de tout le Livre. Si l'on suppose que, dans le premier état de la corde, on ait

$$y = \varphi(x) \quad et \quad u = \Delta x,$$

on aura généralment

$$y = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct) + \int \Delta(x+ct)\,dt + \int \Delta(x-ct)\,dt}{2}$$

d'où l'on tire par la différentiation la valeur de u.

J'ai reconnu avec una grande satisfaction ce que vous dites de la différence entre les ébranlements primitifs et dérivatifs; c'est assurément une remarque bien importante tant pour le calcul que pour la Physique, et digne de votre profond génie. Après avoir presque achevé ma théorie sur la propagation du son, je me suis bien aperçu que j'aurais pu également la tirer de la construction des cordes; cependant, comme il s'agissait de fonctions tout à fait discontinues, j'ai aimé mieux la déduire directement de mes formules générales. Une chose qui, en y pensant de nouveau, m'a paru peu exacte, c'est la supposition que je fais qu'une seule particule d'air soit ébranlée à chaque vibration du corps sonore, d'où il n'en résulte dans les particules suivantes qu'un mouvement tout à fait instantané. Je crois donc que, pour se conformer de plus à la nature, il sera mieux d'imaginer que plusieurs particules d'air soient remuées à la fois par le corps sonore, et, on trovera dans ce cas que chacune des particules suivantes recevera un mouvement qui ne sera plus instantané, mais qui s'éteindra tout à fait après un certain temps; et ce temps sera le même que celui que le son mettrait à parcourir la longueur de l'espace par lequel on suppose que les particules soient agitées dans le premier ébranlement. Or, le son parcourant à peu prés 1200 pieds par seconde, et le son le plus aigu ne faisant qu'environ 1800 vibrations dans le même temps, il s'ensuite qu'à moins que l'étendue de la première onde d'air, pour ainsi dire, ne surpasse la longueur de deux tiers d'un pied, ce qui n'est nullement probable, chaque particule sera réduit au repos avant qu'elle puisse recevoir une seconde secousse. Ainsi, tout se passera de même comme dans l'hypothèse des ébranlements instantanés, et les lois de la propagation et de la réflexion du son demeureront aussi les mêmes. Je suis parfaitement d'accord avec vous, monsieur, que les vraies lois de la propagation du son dépendent de la considération d'une triple dimension dans l'air, et c'est da là qu'on doit aussi tirer la théorie de la diminution du son; car, en regardant qu'une ligne physique, il est tout naturel, et le calcul le montre aussi, que la force du son ne doit souffrir d'elle-même aucune diminution. Je doute que la proportion connue de la diminution en raison inverse des carrés des distances soit assez exacte, mais ce n'est que par un calcul tout à fait rigoureux qu'on pourra s'en assurer.

J'aurai l'honneur de vous parler une autre fois de ce que j'ai trouvé de nouveau touchant les isopérimètres, et l'application du principe de la moindre quantité d'action. Je suis ravi que vous continuiez à enrichir la république des Lettres par de nouveaux Ouvrages très importants, tels que le *Calcul différentiel et intégral*, et le troisième Tome de la Mécanique. Je tâcherai de les acquérir par la voie de Genève ou de Paris, s'il m'est possible. J'ai aussi composé moi-même des éléments de Mécanique et de Calcul différentiel et intégral à l'usage de mes écoliers, et je crois avoir développé la vraie métaphysique de leurs principes, autant qu'il est possible. Je vous supplie de, faire agréer mes compliments et mes services à votre savant fils Albert que je vois marcher sur vos illustres traces, et je suis avec la plus parfaite considération

Votre très humble et très obéissant serviteur,
Louis de la Grange.

A monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

4.2 Traduzione in lingua italiana

LAGRANGE A EULERO

Torino, 24 novembre 1759.

Signore,

nulla mi poteva pervenire di più gradevole che l'onore delle vostre lettere, che mi assicurano la continuazione della vostra preziosa amicizia; sono stato lieto soprattutto di sapere che avete finalmente ricevuto il Libro[1] che mi ero preso la libertà di spedirvi come testimonianza del rispettoso attaccamento che io conservo incessantemente per la vostra illustre persona. La Nostra Società vi è infinitamente debitrice per la bontà che avete avuto nell' esaminare i suoi lavori, e per l'onorevole giudizio che ne date[2]; i vostri pareri Signore sono per noi i più lusinghieri ed è solo su questi che noi crediamo di potere giustamente apprezzare la nostra Opera. Il successo di questa prima impresa ci incoraggia a non abbandonarla, e noi speriamo di pubblicare un simile Volume a metà dell'anno prossimo[3]. Abbiamo d'altronde motivo di credere che il Governo non mancherà di sostenere una Società nascente che, senza una sede conveniente, non saprebbe sussistere a lungo[4]; ma ciò che potrebbe

[1] Il Libro di cui parla Lagrange è il primo Volume delle "Misc. Taurin.".

[2] Lagrange allude, quì, al giudizio particolarmente caloroso che Eulero ha espresso, nella precedente lettera, riguardo all'intero Volume delle "Misc. Taurin.": "[...] tutti devono convenire che questo primo Volume dei vostri lavori è un vero capolavoro e racchiude idee più profonde di quelle contenute in tanti altri Volumi delle Accademie ufficiali [...]". Vedi Traduzione in lingua italiana, lettera del 23 ottobre 1759, pagina 32.

[3] Questa speranza si realizzerà ma con qualche anno di ritardo. Infatti, il secondo Volume delle "Misc. Taurin." verrà pubblicato all'inizio di giugno del 1762, e con un nuovo titolo: "Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale de Taurin".

[4] Questo sostegno ufficiale, tanto atteso, tarderà ad arrivare. Infatti, il progetto di creazione di una "Accademia Reale di Scienze a Torino" venne proposto al Re nel giugno del 1760, ma è solo nel 1762, poco prima dell'uscita del secondo Volume delle "Misc. Taurin", che la "Società privata Torinese" riuscirà ad ottenere il titolo di "Società Reale di Torino". Nonostante questo ritardo, la nomina di nuovi membri della Società, quattro nel 1759 e cinque nel 1760 (fra cui Haller e Eulero), corrisponde già, probabilmente, ad una riconoscenza ufficiale.

impegnarlo di più sarebbe di vedere che gli stessi che occupano i primi posti nelle Scienze gradirebbero concorrere a questo progetto e appoggiarlo con i loro nomi e il loro credito[5]. Il Signor Haller ci ha appena fatto questo onore promettendoci due Dissertazioni per il successivo Volume[6]. Potrei osare di supplicarvi, Signore, di un favore simile, a nome di tutta la Società? Le Lettere del nostro Paese saranno indubbiamente fedeli nel conservare una viva riconoscenza di coloro che le avranno per prime onorate e protette. Nel caso in cui vogliate accettare di inviarci qualche testo, potete, se non vi sono altri modi più comodi e più sicuri, farcelo pervenire direttamente per posta indirizzandolo a Ginevra, senza curarvi minimamente delle dimensioni del pacchetto[7].

Io mi ritengo estremamente lieto di avere potuto contribuire a mettere la vostra soluzione *de chordis vibrantibus* al riparo da tutte le obiezioni dei Signori Bernoulli e d'Alembert. È vero che i calcoli sono lunghi e complicati; ma non so se, considerando le cose come ho ritenuto di dover fare, si potrebbero abbreviare o semplificare. Ho tuttavia immaginato da poco un'altra soluzione analitica, con la quale io pervengo direttamente dalla formula differenziale $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = c\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ alla stessa costruzione generale che ho fornito nell'articolo 45, senza che la natura del calcolo possa portare la minima intaccatura alla sua generalità; perché questo nuovo metodo è fondato sugli stessi principi di quello che ho spiegato per il caso di un numero indeterminato di corpi mobi-

[5]Lagrange, per dare maggiore credito alla Società e per ottenere il riconoscimento ufficiale da parte del Re, chiede agli uomini più illustri del tempo di contribuire, con qualche memoria, alla scrittura delle "Misc. Taurin". Il 15 Novembre 1759, Lagrange aveva già invitato D.Bernoulli ad offrire la sua collaborazione, senza però ricevere risposta.

[6]Albert de Haller, anatomista, botanico e poeta nato a Berna nel 1708, morto nel 1777, mantiene la parola data a Lagrange, e la sua memoria, dal titolo "Emendationes et auctaria ad stirpium helveticorum historiam", viene pubblicata nel Volume II delle "Misc. Taurin".

[7]Eulero risponderà in maniera favorevole, alla richiesta di Lagrange, nella lettera dell'1 gennaio 1760 in cui espone la sua teoria della propagazione del suono nell'aria nell'ipotesi delle tre dimensioni e che propone come memoria da pubblicare nel Volume II delle "Misc. Taurin". Vedi: Traduzione in lingua italiana, lettera dell'1 gennaio 1760, pagina 125.

li, con questa differenza che le operazioni, quì svolgendosi sempre su termini infinitamente piccoli, sono composte solo dalle integrazioni e differenziazioni richieste. Questa soluzione, essendo di un genere del tutto nuovo non sarà forse così indegna della vostra attenzione, ed essa servirà ancora di più a stabilire l'uso delle funzioni irregolari e discontinue in un'infinità di altri problemi. Io la riservo per il secondo Tomo delle nostre Memorie[8]. A proposito della soluzione generale quando la corda ha all'inizio una figura qualunque con delle velocità date a tutti i suoi punti[9], voi vedrete che io l'ho data nell'articolo citato, e non dubito affatto che essa sia del tutto conforme a quella che voi avete fornito; ma bisogna fare attenzione all'errata che si trova alla fine di tutto il Libro. Se si suppone che, nel primo stato della corda, si ha[10]

$$y = \varphi(x) \quad e \quad u = \Delta x,$$

si avrà generalmente

$$y = \frac{\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct) + \int \Delta(x+ct)\, dt + \int \Delta(x-ct)\, dt}{2}$$

da cui si ricava per differenziazione il valore di u.

Ho riconosciuto con grande soddisfazione ciò che voi dite della differenza tra

[8]Il primo metodo proposto da Lagrange, nelle sue "Recherches", per giustificare la soluzione di Eulero (ovvero l'uso delle funzioni discontinue nella soluzione) attraverso il passaggio al limite, contiene calcoli lunghi e complessi e anche qualche errore. Lagrange decide, quindi, di rivedere il suo metodo, cercando di semplificarlo e correggerlo, nelle sue "Nouvelles Recherches" che saranno pubblicate nel secondo Volume delle "Misc. Taurin.", come appunto preannuncia in questa lettera. Per maggiori dettagli, vedi Commento della Lettera, Lettera del 23 ottobre 1759 Eulero a Lagrange, pagine 61-64; a pagina 63 sono state riportate alcune parti delle "Nouvelles Recherches" in cui Lagrange parla del suo nuovo metodo.

[9]Lagrange risponde all'osservazione fatta da Eulero nella precedente lettera del 23 ottobre 1759; vedi Commento della Lettera, Lettera del 23 ottobre 1759, pagine 64 e 64. Infatti inizialmente Lagrange affronta i due seguenti casi particolari: 1. velocità iniziali dei punti nulle; 2. ordinate iniziali dei punti nulle (ovvero corda all'inzio è tesa in linea retta). Passa poi a considerare il caso generale in cui suppone sia le velocità iniziali dei punti non nulle, sia una qualsiasi figura iniziale per la corda.

[10]Lagrange considera lo stato iniziale della corda, ovvero $t = 0$, e indica la y con $\varphi(x)$ e la velocità u con Δx dove il simbolo Δ indica la differenza prima di φ, $\Delta x = \varphi'(x)$.

le vibrazioni primitive e derivative; è di certo una nota ben importante tanto per il calcolo che per la Fisica, e degna del vostro profondo genio[11]. Dopo aver quasi completato la mia teoria sulla propagazione del suono, io mi sono accorto che avrei potuto ugualmente ricavarla dalla costruzione delle corde; tuttavia, siccome si trattava di funzioni del tutto discontinue, ho preferito dedurla direttamente dalle mie formule generali. Una cosa che, ripensandoci di nuovo, mi è sembrata poco esatta, è la supposizione che io faccio che una sola particella d'aria sia scossa ad ogni vibrazione del corpo sonoro, da cui ne deriva, nelle particelle seguenti, solo un movimento del tutto istantaneo. Credo dunque che, per conformarsi di più alla natura sarebbe meglio immaginare che diverse particelle d'aria siano messe in movimento nello stesso tempo dal corpo sonoro, e si troverà in questo caso che ognuna delle particelle seguenti riceverà un movimento che non sarà più istantaneo, ma che si estenderà del tutto dopo un certo tempo[12]; e questo tempo sarà lo stesso di quello che il suono impiegherebbe a percorrere la lunghezza di uno spazio per il quale si suppone che le particelle siano agitate nella prima vibrazione. Ora, il suono percorrendo all'incirca 1200 piedi al secondo, e il suono più acuto compiendo

[11] La distinzione fra vibrazioni primitive e derivate, formulata da Eulero nella precedente lettera, viene ripresa da Lagrange nelle "Nouvelles Recherches"; vedi Commento della Lettera, Lettera del 23 ottobre 1759, pagina 66.

[12] Lagrange, nelle sue "Recherches", introduce la supposizione "che una sola particella d'aria sia scossa ad ogni vibrazione del corpo sonoro" (vedi Commento della Lettera, Lettera del 23 ottobre 1759, pagine 65, 66). Attraverso studi più approfonditi si accorge però che "per conformarsi di più alla natura sarebbe meglio immaginare che diverse particelle d'aria siano messe in movimento nello stesso tempo dal corpo sonoro", quindi riprende e corregge la supposizione iniziale nelle "Nouvelles Recherches", in cui scrive: *"Supponiamo ora che quante particelle si voglia vengano scosse nel primo istante di tempo t; si troverà [...] che ognuna delle vibrazioni primitive eserciterà nel fluido circostante gli stessi raggi sonori che eserciterebbe nel caso in cui fosse sola, in modo che le particelle d'aria che si trovano nel punto di incontro di più raggi avranno un movimento composto da tutti i movimenti che dipenderanno da ogni particolare vibrazione [...] Poiché ogni particella d'aria scossa diventa, essa stessa, un centro di raggi sonori, è evidente che il suono deve diffondersi allo stesso modo in tutte le direzioni; questo è anche uno dei principali fenomeni della sua propagazione."*

all'incirca 1800 vibrazioni nello stesso tempo, ne consegue che a meno che l'estensione della prima onda d'aria, per così dire, non sorpassi la lunghezza di due terzi di un piede, ciò che non è per niente probabile, ogni particella sarà ridotta a riposo prima che essa possa ricevere una seconda scossa. Così, tutto si svolgerà come nelle ipotesi delle vibrazioni istantanee e le leggi della propagazione e della riflessione del suono resteranno così le stesse. Sono perfettamente d'accordo con voi, Signore, che le vere leggi della propagazione del suono dipendono dalla considerazione di una tripla dimensione nell'aria[13], ed è da questo che si deve anche ricavare la teoria della diminuzione del suono; perché, considerando solo una linea fisica d'aria, è del tutto naturale, e anche il calcolo lo mostra, che la forza del suono non deve soffrire di per sé alcuna diminuzione. Io dubito che la proporzione conosciuta della diminuzione in ragione inversa dei quadrati delle distanze sia così esatta, ma è solo attraverso un calcolo del tutto rigoroso che potremo assicurarcene.
Avrò l'onore di parlarvi un'altra volta di ciò che ho trovato di nuovo trattando gli isoperimetri, e l'applicazione del principio della minima quantità d'azione[14]. Sono molto contento che voi continuiate ad arricchire la repubblica

[13]Lagrange svilupperà questa concezione nelle "Nouvelles Recherches" (Capitolo III: "De la propagation du son", §10-26), perseguendo l'analisi intrapresa da Eulero nella sua memoria E.268 che corrisponde alla lettera dell'1 gennaio 1760.

[14]Già nella memoria "Recherches sur la méthode de maximis et minimis" contenuta nel primo Volume delle "Misc. Taurin.", Lagrange aveva richiamato l'applicazione del suo metodo del calcolo delle variazioni alla risoluzione dei problemi di massimo e minimo e alla deduzione, attraverso il principio della minima quantità d'azione, di tutta la Meccanica dei corpi solidi e fluidi. Infatti, Lagrange in questa memoria, dopo avere esposto il suo metodo di ricerca di massimi e minimi, scrive: *"Questo metodo, essendo generale per qualsiasi numero di variabili si abbia, non sarà limitato alle sole funzioni algebriche, ma si potrà estendere con successo ai* massimi *e ai* minimi *che sono di un genere più elevato e che appartengono a formule integrali indefinite. Mi riservo di trattare questo argomento, che io reputo del tutto nuovo, in un'opera particolare che preparo su questa materia, e nella quale, dopo avere esposto il metodo generale e analitico per risolvere tutti i problemi relativi ai massimi o ai minimi, io ne dedurrò attraverso il principio della minima quantità d'azione, tutta la meccanica dei corpi, sia solidi, sia fluidi."*
La corrispondenza latina, precedente a quella esaminata in questo elaborato, permette di

delle Lettere con nuove opere molto importanti come il *Calcolo differenziale e integrale*, e il terzo Tomo della *Meccanica*[15]. Cercherò di acquistarli a Ginevra o a Parigi, se mi è possibile. Ho anche composto da solo degli elementi di Meccanica e di Calcolo differenziale e integrale ad uso dei miei scolari, e credo di aver sviluppato la vera metafisica dei loro principi, per quanto è possibile. Io vi supplico di far pervenire i miei complimenti e i miei servizi al vostro sapiente figlio Albert[16] che io vedo camminare sulle vostre illustri tracce, e seguo con la più grande considerazione.

Vostro umilissimo e obbedientissimo servitore,
Louis de la Grange.

Al Signor Eulero, Direttore dell'Accademia reale delle Scienze e delle Belle-Lettere di Berlino.

4.3 Commento della Lettera

Alla lettera di Eulero del 23 ottobre 1759 seguono due lettere di risposta di Lagrange: la lettera in questione del 24 novembre 1759 e la lettera del 26 dicembre 1759. Nella prima delle due lettere di risposta, Lagrange riprende gli argomenti trattati da Eulero aggiungendovi qualche osservazione e considerazione.

Diamo quindi un breve riassunto della lettera del 24 novembre 1759 già ampiamente commentata, con le note a piè di pagina, nella precedente sezione[17].
Lagrange, in apertura di lettera, si rallegra del giudizio positivo espresso da

osservare i progressi realizzati da Lagrange in questo campo.

[15]Lagrange si riferisce al trattato di Eulero,"Institutiones calculi integralis" (E.212), e al terzo Volume della Meccanica, "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum" (E.289).

[16]Johann Albrecht Euler, nasce il 27 novembre 1734 a Pietroburgo dove muore il 6 settembre 1800. A quel tempo, aveva già partecipato con successo a qualche concorso accademico e aveva pubblicato quattro memorie.

[17]Vedi: Traduzione in lingua italiana, lettera del 24 novembre 1759.

Eulero per quanto riguarda, sia la sua memoria sulla teoria delle corde vibranti e la propagazione del suono che la qualità d'insieme del primo Volume delle “Misc. Taurin.”. Invita poi Eulero a contribuire, con qualche lavoro, al secondo Volume delle “Misc. Taurin.” per dare maggiore prestigio alla giovane “Società privata Torinese” che sta cercando di ottenere un riconoscimento ufficiale da parte del Re.
Lagrange inoltre dice che, continuando e approfondendo le sue ricerche, ha trovato un altro metodo di costruzione della soluzione dell'equazione delle corde vibranti; questo metodo, molto più semplice rispetto a quello esposto nelle sue “Recherches”, verrà pubblicato nelle “Nouvelles Recherches” [18] contenute nel secondo Volume delle “Misc. Taurin”.
Commenta poi le osservazioni riportate da Eulero relative alle sue “Recherches”: ritorna sulla distinzione fra vibrazioni primitive e derivate e riconosce alcune imperfezioni e limitazioni nella sua teoria della propagazione del suono come la supposizione che una sola particella d'aria viene scossa ad ogni vibrazione del corpo sonoro. Lagrange osserva ora, che per conformarsi di più alla natura sarebbe meglio immaginare che diverse particelle d'aria siano messe in movimento nello stesso tempo dal corpo sonoro, e svilupperà questo argomento nelle “Nouvelles Recherches”.
Infine, Lagrange riferisce di avere composto degli elementi di Meccanica e di Calcolo differenziale e integrale ad uso dei suoi scolari; infatti dalla sua nomina (26 settembre 1755) come professore nella “Scuola matematica d'artiglieria” di Torino, Lagrange tiene un corso di meccanica preceduto da un'introduzione sulla teoria algebrica delle curve e sul calcolo differenziale e integrale.

[18] Vedi: Commento della Lettera, Lettera del 23 ottobre 1759 Eulero a Lagrange, pagina 63.

Capitolo 5

Lettera di Lagrange a Eulero, Torino, 26 Dicembre 1759

5.1 Lettera in lingua originale

LAGRANGE À EULER

Turin, 26 décembre 1759.

Monsieur,
Dans la dernière Lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire vous m'avez proposé à résoudre l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + c\,\frac{dz}{ZdZ} - c\,\frac{z}{Z^2}$$

ou bien

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + c\,\frac{d\,\frac{z}{Z}}{dZ}$$

qui renferme les lois de la propagation du son dans le cas que les ébranlements se répandent en forme d'ondes circulaires. Comme je n'avais pas alors tout le loisir nécessaire pour entreprendre une telle recherche, j'ai été obligé de la remettre à un autre temps; c'est pourquoi je n'en ai point du tout parlé dans la réponse que vous fis alors, et que je me flatte que vous aurez bien reçue.

Maintenant, voici les principaux résultats de mes réflexions sur ce sujet.
Ayant trouvé, quelque temps avant, le moyen de simplifier ma méthode *De chordis vibrantibus*, dans le cas de la corde uniformément épaisse, et de parvenir directement de l'équation différentielle à la construction géométrique par deux intégrations diverses; l'une en x, et l'autre en t, je crus devoir essayer si les mêmes procédés auraient aussi été applicables à l'équation proposée; mais, comme le calcul devenait assez compliqué et incertain, à cause de quelque équation qui tombait dans le cas de Riccati, j'ai aimé mieux de considérer d'abord la question dans l'état qui peut avoir lieu dans la nature, savoir en supposant que les ébranlements se répandent en forme d'ondes sphériques.
Pour cela, après avoir trouvé l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + 2c\,\frac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ},$$

et l'avoir maniée par un grand nombre d'opérations que ma méthode exigeait, je suis enfin parvenu à une construction géométrique assez simple par laquelle, étant donnés les ébranlements primitifs de l'air dans un tuyau conique infiniment prolongé, il était aisé d'en déterminer tous les suivants.
J'ai trouvé que l'air n'étant ébranlé d'abord que par un très petit espace au sommet du cône, cet ébranlement, qui peut être regardé comme une onde sonore, se communique d'une partie de l'air à l'autre et avance toujours avec une vitesse constante, et la même que celle qui convient au cas d'une simple ligne physique; mais, en même temps, la force de l'ébranlement ira en décroissant dans la raison inverse des carrés des distances, ce qui semble s'accorder avec les expériences ordinaires sur la diminution du son. En examinant ensuite plus intimement la même construction, je me suis aperçu que je pouvais aussi assigner l'intégrale de l'équation proposée en terms algébriques.
La voici:

$$z + \frac{d\,Zz}{dZ} = \varphi(Z \pm t\sqrt{c}),$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{\int Z\,\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\,dZ}{Z^2},$$

où la fonction φ peut être continue ou discontinue, comme l'on voudra.
Cette équation, si on la traite d'une manière convenable, suffira pour nous découvrir tous les mouvements de l'air dans un tuyau conique d'une longueur quelconque, pour quelque agitation primitive qu'on veuille imaginer; mais aussi, il ne sera pas fort difficile de voir que le système dans ce cas ne pourra jamais plus reprendre sa première position si ce n'est par hasard ou par le moyen de certaines conditions dans les ébranlements primitifs, puisque les branches de la courbe *génératrice*, qui doivent être tracées de part et d'autre à l'infini, ne se trouvent pas semblables entre elles comme celles des cordes vibrantes.
Vous pouvez, monsieur, avec peu d'attention, découvrir toutes les conséquences qui résultent de cette formule, et qui pourraient se dérober à mes efforts. Après avoir ainsi rempli mon objet, je suis revenu au cas des ondes circulaires, mais j'ai été tout étonné de trouver que le problème dans cette hypothèse, en apparence plus simple que l'autre, se refusait néanmoins à une exacte solution. Je pris donc à considérer la question dans le sens le plus général, en supposant la figure conoïdale du tuyau rempli d'air telle que chaque section perpendiculaire à l'axe soit proportionelle à Z^m, Z étant la distance du sommet du conoïde donné.
En ce cas, j'ai trouvé l'equation différentielle

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + mc\,\frac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ}$$

et, de là, par ma méthode, j'ai tiré la formule

$$z + \frac{d\,Zz}{dZ} + \frac{m-2}{2(m-1)}\,\frac{d^2Z^2z}{dZ^2} + \frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}\,\frac{d^3Z^3z}{dZ^3} + \ldots = \varphi(Z \pm t\sqrt{c}).$$

J'ai aussi trouvé, en meme temps, une autre formule pour la valeur de z, savoir:

$$zZ^m = \psi(Z \pm t\sqrt{c}) - Z\,\frac{d\psi(Z \pm t\sqrt{c})}{dZ} + \frac{m-2}{2(m-1)}\,Z^2\,\frac{d^2\psi(Z \pm t\sqrt{c})}{dZ^2} -$$

$$-\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}\,Z^3\,\frac{d^3\psi(Z \pm t\sqrt{c})}{dZ^3} + \ldots$$

où la fonction ψ dṕend de φ par un nombre d'intégrations relatif au nombre m. On voit par ces formules que z n'aura une valeur exacte que dans les cas de m pair et positif; dans tous les autres, la série ira à l'infini, et, si m est impair positif, il y aura toujours quelques termes qui s'évanouiront au commencement d'elle. Les cas de m négatif admettent néanmoins une solution exacte lorsque m [...].

On trouvera la formule, pour ce cas, en posant dans la sup [...] $\frac{z}{Z^{m+1}}$ au lieu de z, et puis $-m-2$ au lieu de m; car on peut voir que par ces transformations l'équation différentielle demeurera la même.

Au reste, j'ai reconnu que, dans toutes les équations d'une semblable nature, on peut souvent abréger le calcul en supposant d'abord

$$z = A\psi(Z+kt) + B\,\frac{d\psi(Z+kt)}{dZ} + C\,\frac{d^2\psi(Z+kt)}{dZ^2} + \ldots$$

où $A, B, C\ldots$ étant des fonctions de Z qu'on déterminera après la substitution par la simple comparaison des termes; mais, si l'équation renfermait quelque terme qui ne contint point le z, ou quelqu'une de ses différences, il serait peut-être alors indispensable d'avoir recours à une méthode directe; la mienne serait encore utile, quelle que fût la nature de ce terme. Je compte d'expliquer cette matière dans une dissertation particulière que je prépare pour le Volume de nos Mélanges de l'année prochaine. En attendant, je commence par soumettre ce petit essai à votre jugement que je regarde comme le premier dans le petit nombre de ceux qui peuvent véritablement me flatter ou me donner de la peine.

Daignez, monsieur, d'accepter les voeux que j'ose joindre avec ceux de toute la République des Lettres pour la conservation de votre précieuse vie.

Je suis avec le plus respectueux attachement, monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
Louis de la Grange.

A monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

5.2 Traduzione in lingua italiana

LAGRANGE A EULERO

Torino, 26 dicembre 1759.

Signore,
nell'ultima lettera che mi avete fatto l'onore di scrivere[1], mi avete proposto di risolvere l'equazione

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + c\,\frac{dz}{ZdZ} - c\,\frac{z}{Z^2}$$

o anche

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + c\,\frac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ}$$

che contiene le leggi della propagazione del suono nel caso in cui le vibrazioni si diffondano in forma di onde circolari. Siccome non avevo allora il tempo libero necessario per intraprendere una tale ricerca, sono stato obbligato a rinviarla; ecco perché non ne ho parlato affatto nella risposta che vi ho fatto allora e che spero bene voi abbiate ricevuto[2]. Ora ecco i principali risultati delle mie riflessioni su questo argomento.
Avendo trovato qualche tempo fa il modo di semplificare il mio metodo *de chordis vibrantibus*, nel caso della corda uniformemente spessa, e di pervenire direttamente dall'equazione differenziale alla costruzione geometrica attraverso due integrazioni diverse, l'una in x e l'altra in t, credetti di dover provare se gli stessi procedimenti fossero applicabili anche all'equazione proposta; ma siccome il calcolo diventava abbastanza complicato e incerto, a causa di qualche equazione che rientrava nel caso di Riccati, ho preferito considerare, in un primo momento, la questione nello stato che può verificarsi in natura, ovvero supponendo che le vibrazioni si diffondono in forma di onde sferiche.

[1]Lagrange si riferisce alla lettera di Eulero del 23 ottobre 1759.
[2]Lettera del 24 novembre 1759.

Per questo, dopo aver trovato l'equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\,\frac{d^2 z}{dZ^2} + 2c\,\frac{d\,\frac{z}{Z}}{dZ},$$

ed averla sviluppata con un grande numero di operazioni che il mio metodo esigeva, sono infine arrivato a una costruzione geometrica molto semplice attraverso la quale, essendo date le vibrazioni primitive dell'aria in un tubo conico infinitamente prolungato, è facile determinarne tutte le successive.
Ho trovato che l'aria essendo scossa dapprima solo attraverso un piccolo spazio alla sommità del cono, questa vibrazione, che può essere considerata come un'onda sonora, si comunica da una parte dell'aria all'altra e avanza sempre con una velocità costante, e la stessa di quella che si ha nel caso di una semplice linea fisica d'aria; ma, allo stesso tempo, la forza della scossa andrà decrescendo secondo la ragione inversa dei quadrati delle distanze, e questo sembra accordarsi con le ordinarie esperienze sulla diminuzione del suono. Esaminando in seguito più dettagliatamente la stessa costruzione, mi sono accorto che potevo anche dare l'integrale dell'equazione proposta in termini algebrici. Eccola:

$$z + \frac{d\,Zz}{dZ} = \varphi(Z \pm t\sqrt{c}),$$

da cui si ricava

$$z = \frac{\int Z\,\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\,dZ}{Z^2},$$

in cui la funzione φ può essere continua o discontinua, come si vorrà. Questa equazione, se la si tratta nel giusto modo, sarà sufficiente per mostrarci tutti i movimenti dell'aria in un tubo conico di una lunghezza qualunque, per qualunque agitazione primitiva che si voglia immaginare; inoltre, non sarà molto difficile vedere che il sistema in questo caso non potrà mai più riprendere la sua posizione iniziale, se non per caso o per mezzo di certe condizioni nelle vibrazioni primitive, poiché i rami della curva *generatrice*, che devono essere tracciati da una parte all'altra all'infinito, non sono simili tra loro come quelli delle corde vibranti.

Voi potete, Signore, con un pò di attenzione, scoprire tutte le conseguenze che risultano da questa formula e che potrebbero sfuggire ai miei sforzi. Dopo aver adempito il mio compito, sono ritornato al caso delle onde circolari, ma sono rimasto molto stupito di trovare che il problema in questa ipotesi, in apparenza più semplice dell'altra, non permetteva di arrivare ad una soluzione esatta. Ho iniziato dunque a considerare la questione nel modo più generale, supponendo la figura conoidale del tubo riempito d'aria tale che ogni sezione perpendicolare all'asse sia proporzionale a Z^m, essendo Z la distanza dalla sommità del conoide dato.
In questo caso, ho trovato l'equazione differenziale

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + mc\,\frac{d\,\frac{z}{Z}}{dZ}$$

e da ciò, attraverso il mio metodo, ho ricavato la formula

$$z+\frac{d\,Zz}{dZ}+\frac{m-2}{2(m-1)}\,\frac{d^2\,Z^2z}{dZ^2}+\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}\,\frac{d^3\,Z^3z}{dZ^3}+\ldots=\varphi(Z\pm t\sqrt{c}).$$

Ho anche trovato, nello stesso tempo, un'altra formula per il valore di z, ovvero:

$$zZ^m=\psi(Z\pm t\sqrt{c})-Z\,\frac{d\psi(Z\pm t\sqrt{c})}{dZ}+\frac{m-2}{2(m-1)}\,Z^2\,\frac{d^2\psi(Z\pm t\sqrt{c})}{dZ^2}-$$

$$-\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}\,Z^3\,\frac{d^3\psi(Z\pm t\sqrt{c})}{dZ^3}+\ldots$$

in cui la funzione ψ dipende da φ con un numero di integrazioni relativo al numero m. Si vede da queste formule che z non avrà mai un valore esatto a parte i casi in cui m è pari e positivo; in tutti gli altri casi, la serie andrà all'infinito e, se m è dispari positivo, ci saranno sempre alcuni termini che spariranno all'inizio di essa. I casi di m pari negativo ammettono una soluzione esatta quando m [...][3].
Si troverà la formula, per questo caso, ponendo nella sup [...][4] $\frac{z}{Z^{m+1}}$ invece

[3]Cancellatura nel testo.
[4]Cancellatura nel testo.

di z, e $-m-2$ al posto di m; infatti, si può vedere che attraverso queste sostituzioni, l'equazione differenziale rimarrà la stessa.
Del resto, ho capito che, in tutte le equazioni di una simile natura, si può spesso abbreviare il calcolo, supponendo dapprima

$$z = A\psi(Z+kt) + B\,\frac{d\psi(Z+kt)}{dZ} + C\,\frac{d^2\psi(Z+kt)}{dZ^2} + \dots$$

in cui $A, B, C, \dots$ essendo funzioni di Z, si determineranno dopo la sostituzione attraverso la semplice comparazione dei termini; ma, nel caso in cui l'equazione presenti qualche termine che non contiene la z, o qualcuna delle sue differenze, sarebbe forse allora indispensabile fare ricorso ad un metodo diretto; il mio risulterebbe ancora utile, qualsiasi sia la natura di questo termine. Prevedo di spiegare questo argomento in una particolare dissertazione che preparerò per il Volume delle "Mélanges" dell'anno prossimo. Nell'attesa, comincio sottoponendo questa piccola prova al vostro giudizio che io considero come il primo nel ristretto numero di persone che potrebbero davvero lusingarmi o addolorarmi.
Vogliate, Signore, accettare gli auguri che mi permetto di aggiungere a quelli di tutta la Repubblica delle Lettere per la tutela della vostra preziosa vita.
Con la più rispettosa devozione, Signore,

Vostro umilissimo e obbedientissimo servitore,
Louis de la Grange.

Al Signor Eulero, Direttore dell'Accademia reale delle Scienze e delle Belle-Lettere di Berlino.

5.3 Commento della Lettera

Nella lettera del 26 dicembre 1759, Lagrange risponde al problema posto da Eulero nella lettera del 23 ottobre 1759 dove quest'ultimo, non essendo stato in grado di risolvere l'equazione che descrive la propagazione del suono nell'aria nell'ipotesi di due dimensioni, chiede a Lagrange il suo intervento.

Lagrange si scusa per non avere assolto prima[5] il suo dovere dicendo di non avere avuto il tempo necessario per riflettere su una questione così delicata. Passa poi ad esporre brevemente le sue ricerche e i suoi risultati che sono solo un primo abbozzo di ciò che svilupperà, in maniera più dettagliata, nelle "Nouvelles Recherches" (1760-1761).
L'equazione, trovata da Eulero, che descrive la propagazione del suono nel caso in cui le vibrazioni si diffondono in forma di onde circolari (ipotesi delle due dimensioni), è [6]

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dZ^2}\right) + \frac{\alpha}{Z}\left(\frac{dz}{dZ}\right) - \frac{\alpha Z}{Z^2}$$

che Lagrange riscrive in questa forma

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + c\,\frac{dz}{ZdZ} - c\,\frac{z}{Z^2}$$

o equivalentemente, (poichè $\dfrac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ} = \dfrac{dz}{ZdZ} - \dfrac{z}{Z^2}$),

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + c\,\frac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ} \tag{5.1}$$

dove, rispetto all'equazione di Eulero, si ha c al posto di α e dove si osserva un diverso utilizzo di notazione: Lagrange scrive d^2z al posto di ddz e non usa le parentesi. Infatti, nelle sue "Recherches", Lagrange precisa che i Geometri del tempo hanno l'usanza di scrivere fra parentesi le espressioni contenenti i differenziali: ad esempio, l'espressione $\dfrac{ddz}{dt^2}$ viene scritta fra parentesi, $\left(\dfrac{ddz}{dt^2}\right)$, per indicare che il differenziale secondo di z deve essere preso considerando solo t come variabile[7].
Lagrange, come primo tentativo, prova ad applicare all'equazione (5.1) il suo nuovo e più semplice metodo *De chordis vibrantibus*[8]. Infatti, nella lettera,

[5]Lagrange, nella precedente lettera del 24 novembre 1759, non era riuscito a rispondere alla richiesta di Eulero.
[6]Vedi: pagina 73, equazione (3.25).
[7]Il significato di questa notazione era già stato spiegato nella nota (42) a pagina 48.
[8]Vedi: Traduzione in lingia italiana, lettera del 24 novembre 1759, nota (8) pagina 81.

Lagrange scrive: "Avendo trovato qualche tempo fa il modo di semplificare il mio metodo *de chordis vibrantibus*, nel caso della corda uniformemente spessa [...] credetti di dover provare se gli stessi procedimenti fossero applicabili anche all'equazione proposta".
Questo metodo *De chordis vibrantibus* che è un metodo d'integrazione consiste, in sostanza, nel moltiplicare l'equazione per Mdx (M è una qualsiasi funzione che dipende da x), nell'integrare rispetto a x e nel riportarsi, dopo qualche integrazione per parti, alle equazioni differenziali ordinarie delle quali si conosce l'integrale.
Poiché questo primo tentativo fallisce, Lagrange passa a considerare la questione nel caso che ha luogo nella natura, ovvero supponendo che le vibrazioni si diffondano in forma di onde sferiche (ipotesi delle tre dimensioni dell'aria). Trova così la seguente equazione:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + 2c\,\frac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ} \tag{5.2}$$

che differisce dalla (5.1) per la presenza del 2 che moltiplica il secondo membro di destra.
Lagrange applica il suo metodo anche a questa equazione e, dopo averla sviluppata con un grande numero di operazioni, dice di essere infine arrivato a una costruzione geometrica molto semplice. Attraverso questa costruzione, essendo date le vibrazioni primitive dell'aria in un tubo conico infinitamente prolungato, si determinano facilmente tutte le vibrazioni successive.
Il problema della formulazione dell'equazione (5.2) viene affrontato da Lagrange nel Capitolo III delle "Nouvelles Recherches" nella sezione "De la propagation du son dans l'hypothèse des ondes sphériques[9]", dove scrive: *"In questa ipotesi[10], manteniamo per la massa dell'aria le sue tre dimensioni; ma supponiamo che, avendo preso un punto fisso come centro, tutte le particelle che si trovano nella direzione di ciascun raggio si muovono senza uscire da*

[9]Da "Nouvelles Recherches": Capitolo III, "De la propagation du son dans l'hypothèse des ondes sphériques", paragrafi 18-24.

[10]Ipotesi delle onde sferiche (o ipotesi delle tre dimensioni per l'aria).

questa direzione, e che i loro movimenti dipendono solo dal tempo t e dalla distanza dal centro. Da ciò è chiaro che si devono formare nell'aria delle onde sferiche e concentriche, la cui determinazione sia contenuta in una sola equazione [...] Questa equazione si può trovare sia attraverso l'applicazione delle formule generali [...] o più semplicemente ancora, anche se con meno rigore, considerando il movimento di un fluido elastico contenuto in un tubo conico, come vedremo più avanti[11]*. Ci acconteremo, per ora [...] di applicare all'equazione il nostro metodo, in modo da poter trovare una costruzione che non sia soggetta alla legge di continuità, come richiede la teoria della propagazione del suono [...]* Problema II. *Mantenendo la stessa notazione e le stesse supposizioni del Problema I*[12]*, con la sola differenza che il movimento delle particelle sia contenuto nell'equazione* $\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dx^2} + 2c\,\frac{d\,\frac{z}{x}}{dx}$*, costruire questa stessa equazione*[13]*."*

Ritorniamo ora alla lettera dove Lagrange, considerando un tubo conico infinitamente prolungato in cui vengono esercitate le vibazioni primitive dell'aria, dice di avere trovato che queste vibrazioni vengono comunicate da una parte all'altra dell'aria e avanzano sempre con velocità costante. Allo stesso tempo, però, la forza della scossa impressa diminuirà, e questa diminuzione avviene in ragione inversa dei quadrati delle distanze (come suggeriscono anche le esperienze sulla diminuzione del suono). A questo punto, Lagrange,

[11]Lagrange rimanda questa costruzione meno rigorosa dell'equazione al Capitolo IV, "Des oscillations d'un fluide élastique renfermé dans un tuyau de figure conoïdale quelconque", paragrafi 30-31.

[12]Da "Nouvelles Recherches", Capitolo II, "Des fonctions irrégughlières et discontinues", paragrafo 6: "Problema I. *Essendo dato un sistema composto da un numero infinito di punti mobili, in cui ciascuno, nello stato di equilibrio, sia determinato dalla variabile x, e in cui la prima e l'ultima, corrispondenti a $x = 0$ e ad $x = a$, siano supposte fisse, trovare i movimenti di tutti i punti intermedi [compresi fra $x = 0$ e ad $x = a$], la cui legge è contenuta nella formula* $\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dx^2}$*, essendo z lo spazio descritto da ognuno di essi durante un tempo t qualunque."*

[13]Nelle "Nouvelles Recherches", a differenza della notazione che troviamo nella lettera, Lagrange utilizza x al posto di Z.

fornisce la soluzione dell'equazione (5.2) in termini algebrici:

$$z + \frac{d\,Zz}{dZ} = \varphi(Z \pm t\sqrt{c}) \tag{5.3}$$

dove φ può essere una funzione continua o discontinua.
Da questa equazione Lagrange ricava:

$$z = \frac{\int Z\,\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\,dZ}{Z^2}. \tag{5.4}$$

Infatti, da $z + \dfrac{d\,Zz}{dZ}$ (che Lagrange è solito indicare, per semplicità con z', $z' = z + \dfrac{d\,Zz}{dZ}$), abbiamo:

$$z + \frac{d\,Zz}{dZ} = z + z + Z\,\frac{d\,z}{dZ} = 2z + Z\,\frac{d\,z}{dZ}$$

che Lagrange pone uguale a $\varphi(Z \pm t\sqrt{c})$, quindi abbiamo:

$$2z + Z\,\frac{d\,z}{dZ} = \varphi(Z \pm t\sqrt{c}).$$

Ora moltiplichiamo entrambi i membri per ZdZ

$$2zZdZ + Z^2\,\frac{d\,z}{dZ}dZ = Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})dZ$$

e integriamo

$$\int 2zZ\,dZ + \int Z^2\,\frac{d\,z}{dZ}\,dZ = \int Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\,dZ. \tag{5.5}$$

Consideriamo i membri a sinistra dell'uguale e sviluppiamo gli integrali:

$$\int 2zZ\,dZ + \int Z^2\,\frac{d\,z}{dZ}\,dZ = 2zZ^2 + zZ^2 - \int 2zZ\,dZ \tag{5.6}$$

dove l'integrale $\int Z^2\,\dfrac{d\,z}{dZ}\,dZ$ è stato risolto per parti.
Da (5.6) risolvendo l'integrale $\int 2zZ\,dZ$, si ha:

$$2zZ^2 + zZ^2 - \int 2zZ\,dZ = 2zZ^2 + zZ^2 - 2zZ^2 = zZ^2.$$

Quindi tornando alla (5.5) e sostituendo a sinistra dell'uguale quanto trovato, abbiamo:

$$zZ^2 = \int Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\, dZ,$$

da cui

$$z = \frac{\int Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\, dZ}{Z^2}.$$

Dopo avere trovato questa equazione e dopo avere invitato Eulero a scoprire tutte le conseguenze che potrebbero risultarne, Lagrange ritorna al caso delle onde circolari. Si stupisce però di trovare che il problema in questa ipotesi, in apparenza più semplice rispetto a quella della onde sferiche, non permette di arrivare ad una soluzione esatta.

Lagrange quindi, essendosi bloccato di nuovo nello studio del caso delle onde circolari, decide di affrontare la questione nel modo più generale: suppone che l'aria, contenuta nel tubo conoidale, sia suddivisa in un'infinità di sezioni perpendicolari all'asse e che ogni sezione sia proporzionale a Z^m, essendo Z la distanza dalla sommità del conoide dato. Supponendo inoltre, che le sezioni mantengano sempre il loro parallelismo e che z sia lo spazio infinitamente piccolo percorso da una qualsiasi di esse, Lagrange trova la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + mc\,\frac{d\,\frac{z}{Z}}{dZ} \tag{5.7}$$

che è la forma più generale dell'equazione che descrive la propagazione del suono nell'aria, e che è integrabile ogni volta che m è un numero pari positivo o negativo mentre in tutti gli altri casi (m dispari, positivo o negativo) il valore di z è espresso da una serie infinita.

Osserviamo che per $m = 2$ abbiamo l'equazione nell'ipotesi delle onde sferiche mentre per $m = 1$ abbiamo quella delle onde circolari.

Lagrange nelle "Nouvelles Recherches", Capitolo IV, "Des oscillations d'un fluide élastique renfermé dans un tuyau de figure conoïdale quelconque", dopo avere ricavato l'equazione (5.7) scrive: *"Se il tubo avesse una figura piana [...] caso di* $m = 1$ *[...] l'equazione* $\dfrac{d^2z}{dt^2} = c\,\dfrac{d^2z}{dx^2} + mc\,\dfrac{d\,\frac{z}{x}}{dx}$ *potrebbe* *servire a trovare la legge della propagazione del suono in un piano [ipotesi delle onde circolari], ed è in questa prospettiva che Eulero ha fatto l'onore di propormela nella stessa lettera*[14] *che ho già menzionato [nel paragrafo]* (16). *Facendo uso del mio nuovo metodo*[15], *ho subito compreso che questa equazione non era integrabile esattamente, ma che si poteva rendere tale dando al termine* $\dfrac{d\frac{z}{x}}{dx}$ *il coefficiente* 2. *Ecco ciò che mi ha condotto all'ipotesi delle onde sferiche [...] ipotesi molto più conforme alla natura, rispetto a quella delle onde circolari. Ho reso noti a Eulero i cambiamenti che avevo fatto alla sua ipotesi e i risultati che avevo ottenuto, in una lettera di fine dicembre*[16] *del* 1759*; ma ho visto poi con grande piacere, che questo saggio Autore aveva già fatto lo stesso, e che era giunto alle mie stesse conclusioni sulle leggi della propagazione delle vibrazioni dell'aria in una sfera*[17]*."*

Ritorniamo alla lettera, dove Lagrange applicando il suo metodo all'equazione (5.7) ricava la seguente formula:

$$z+\frac{d\,Zz}{dZ}+\frac{m-2}{2(m-1)}\,\frac{d^{\,2}\,Z^2z}{dZ^2}+\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}\,\frac{d^{\,3}\,Z^3z}{dZ^3}+\ldots=\varphi(Z\pm t\sqrt{c}).$$

Dice inoltre di avere trovato, nello stesso tempo, un'altra formula per il valore di z, ovvero:

$$zZ^m=\psi(Z\pm t\sqrt{c})-Z\,\frac{d\psi(Z\pm t\sqrt{c})}{dZ}+\frac{m-2}{2(m-1)}\,Z^2\,\frac{d^{\,2}\psi(Z\pm t\sqrt{c})}{dZ^2}-$$
$$-\frac{(m-2)(m-4)}{2\cdot 3(m-1)(m-2)}\,Z^3\,\frac{d^{\,3}\psi(Z\pm t\sqrt{c})}{dZ^3}+\ldots \qquad (5.8)$$

in cui la funzione ψ dipende da φ attraverso un numero di integrazioni relativo al numero m.

Inoltre Lagrange osserva che, in tutte le equazioni del tipo (5.7), invece di

[14]Lagrange si riferisce alla lettera del 23 ottobre 1759.

[15]Metodo d'integrazione *De chordis vibrantibus*.

[16]Lagrange si riferisce proprio alla lettera del 26 dicembre 1759 che stiamo analizzando.

[17]Lagrange si riferisce alla prossima lettera della corrispondenza, ovvero la lettera dell'1 gennaio 1760 dove Eulero arriva agli stessi risultati sulla propagazione del suono nell'aria nell'ipotesi di tre dimensioni. Vedi: Commento della Lettera, lettera dell'1 gennaio 1760.

utilizzare il suo metodo si può abbreviare il calcolo supponendo:

$$z = A\psi(Z+kt) + B\,\frac{d\psi(Z+kt)}{dZ} + C\,\frac{d^{2}\psi(Z+kt)}{dZ^2} + \dots$$

in cui k è una costante e $A, B, C, \dots$ sono delle funzioni di Z che si determinano attraverso la sostituzione e la comparazione dei termini. Lagrange precisa poi che, nel caso in cui l'equazione considerata presenta qualche termine che non contiene la z o qualcuna delle sue differenze, sarebbe allora indispensabile fare ricorso ad un metodo diretto come ad esempio il suo.
Considerando la (5.8), si vede che in questo caso $k = \sqrt{c}$, $A = \dfrac{1}{Z^m} = Z^{-m}$, $B = \dfrac{Z}{Z^m} = Z^{1-m}$, $C = \dfrac{m-2}{2(m-1)}\,\dfrac{Z^2}{Z^m} = \dfrac{m-2}{2(m-1)}\,Z^{2-m}$, e così via.
Lagrange conclude dicendo che esporrà questi risultati in una memoria destinata al secondo Volume delle "Misc. Taurin"; si tratta della memoria "Nouvelles Recherches" alla quale abbiamo fatto riferimento nel commento di questa lettera[18].

[18]Precisiamo che le "Nouvelles Recherches" verranno pubblicate solo nel 1762 e questo ritardo permetterà a Lagrange di dare maggiore ampiezza al suo lavoro, grazie anche allo studio della memoria che Eulero gli invierà nella lettera dell'1 gennaio 1760 e che verte sempre sulla propagazione del suono nell'aria nell'ipotesi di tre dimensioni. Lagrange infatti, perseguendo le sue ricerche, modificherà in alcuni casi le sue attuali posizioni e correggerà anche qualche errore.

Capitolo 6

Lettera di Eulero a Lagrange, Berlino, 1 Gennaio 1760

6.1 Lettera in lingua originale

EULER À LAGRANGE

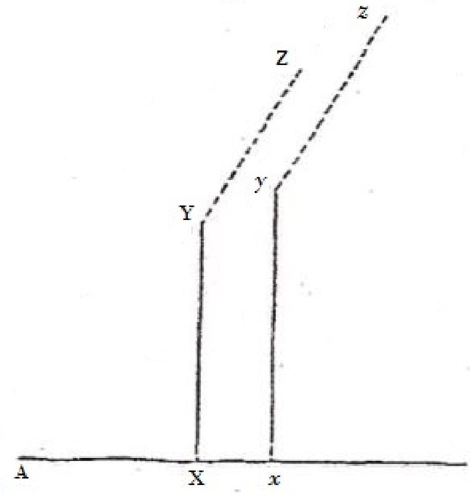
Berlin, 1^{er} janvier 1760.

Monsieur,
Depuis ma dernière lettre, j'ai réussi à ramener au calcul la propagation du son, en supposant à l'air toutes les trois dimensions, et, quoique je ne doute pas que vous n'y soyez parvenu plus heureusement, je ne crois pouvoir mieux témoigner mon attachement envers votre illustre Société qu'en lui présentant mes recherches sur ce même sujet :

Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique.

En considérant le milieu dans l'état d'équilibre, soit sa densité égale à 1, et son élasticité balancée par le poids d'une colonne du même fluide dont la hauteur est égale à h, je commence par considérer un élément quelconque du fluide, qui, dans l'état d'équilibre, se trouve au point Z (Fig.1) déterminé

Fig. 1.



par les trois coordonnées perpendiculaires entre elles, $AX = X$, $XY = Y$ et $YZ = Z$; et que, par l'agitation, ce même élément ait été transportè en z dont les coordonnées soient $Ax = x$, $xy = y$ et $yz = z$ qui seront certaines fonctions des premières X, Y, Z pour un instant donné. Soient donc

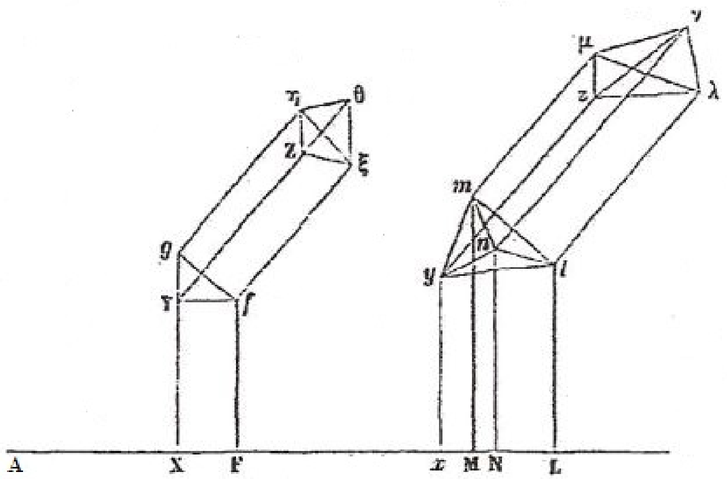
$$dx = LdX + MdY + NdZ,$$

$$dy = PdX + QdY + RdZ,$$

$$dz = SdX + TdY + VdZ;$$

Ensuite, je considère un volume infiniment petit de fluide, qui, dans l'état d'équilibre, ait la figure pyramidale $Z\xi\eta\theta$ (Fig.2) rectangulaire,

Fig. 2.



qui par l'agitation, soit transporté en $z\lambda\mu\nu$, dont la figure sera aussi pyramidale, et posant, pour l'état d'équilibre,

des points	les coordonnées		
Z	X	Y	Z
ξ	$X+\alpha$	Y	Z
η	X	$Y+\beta$	Z
θ	X	Y	$Z+\gamma$

on aura, pour l'état d'agitation,

des points	les trois coordonnées		
z	$Ax = x$	$xy = y$	$yz = z$
λ	$AL = x + L\alpha$	$Ll = y + P\alpha$	$l\lambda = z + S\alpha$
μ	$AM = x + M\beta$	$Mm = y + Q\beta$	$m\mu = z + T\beta$
ν	$AN = x + N\gamma$	$Nn = y + R\gamma$	$n\nu = z + V\gamma$

Le volume de la pyramide $Z\xi\eta\theta$ égale $\frac{1}{6}\,\alpha\beta\gamma$.
ll s'agit de trouver le volume de la pyramide $z\lambda\mu\nu$, qu'on voit être composée de ces prismes

$$ymnz\mu\nu + ylnz\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylmz\lambda\mu$$

et, prenant la solidité da chaque part, on trouvera cette solidité

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(yz+l\lambda+n\nu)\Delta yln \\ +\frac{1}{3}(yz+m\mu+n\nu)\Delta ymn \\ +\frac{1}{3}(l\lambda+m\mu+n\nu)\Delta lmn \\ -\frac{1}{3}(yz+l\lambda+m\mu)\Delta ylm \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3z+S\alpha+V\gamma)\Delta yln \\ +\frac{1}{3}(3z+T\beta+V\gamma)\Delta ymn \\ +\frac{1}{3}(3z+S\alpha+T\beta+V\gamma)\Delta lmn \\ -\frac{1}{3}(3z+S\alpha+T\beta)\Delta ylm \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn, \\ -\frac{1}{3}T\beta\Delta yln, \\ +\frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm. \end{array}\right.$$

Ensuite, on trouve les aires de ces triangles, à cause de $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, comme il suit:

$$\Delta ymn = \frac{1}{2}xM(2y+Q\beta) + \frac{1}{2}MN(2y+Q\beta+R\gamma) - \frac{1}{2}xN(2y+R\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}Q\beta \times xN - \frac{1}{2}R\gamma \times xM = \frac{1}{2}\beta\gamma(NQ-MR),$$

$$\Delta yln = \frac{1}{2}xN(2y+R\gamma) + \frac{1}{2}LN(2y+P\alpha+R\gamma) - \frac{1}{2}xL(2y+P\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}R\gamma \times xL - \frac{1}{2}P\alpha \times xN = \frac{1}{2}\alpha\gamma(LR-NP),$$

$$\Delta ylm = \frac{1}{2}xM(2y+Q\beta) + \frac{1}{2}LM(2y+P\alpha+Q\beta) - \frac{1}{2}xL(2y+P\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}Q\beta \times xL - \frac{1}{2}P\alpha \times xM = \frac{1}{2}\alpha\beta(LQ-MP).$$

De là, nous tirons la solidité de notre pyramide $z\lambda\mu\nu$ dans l'état d'agitation

$$-\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ-MR) - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma T(LR-NP) - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma V(LQ-MP),$$

et, partant, la densité du milieu agité en z sera

$$1 : (LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT),$$

et, posant Π pour la hauteur de la colonne qui y balance l'élasticité, nous aurons

$$\Pi = h : (LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT),$$

laquelle étant une fonction des trois variables X, Y, Z, posons

$$d\Pi = EdX + FdY + GdZ,$$

de sorte que

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right), \quad F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right), \quad G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right).$$

Soit, pour abréger,

$$LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT = K,$$

de sorte que $\Pi = \frac{h}{K}$. Si nous concevons, dans l'état d'équilibre, un point Z' infiniment proche de Z déterminé par ces coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, ce point se trouvera après l'agitation en z' dont les coordonnées seront

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$

$$y + PdX + QdY + RdZ,$$

$$z + SdX + TdY + VdZ;$$

donc, réciproquement, la position du point z' infiniment proche de z dans l'état troublé, étant donnée par les coordonnées $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ son lieu dans l'état d'équilibre sera déterminé par les coordonnées $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, de sorte que

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K},$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K},$$

et

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

De là, l'élasticité en z étant

$$\Pi = \frac{h}{K},$$

elle sera en z'

$$\Pi + EdX + FdY + GdZ$$

ou bien, si nous posons, pour abréger,

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A,$$

$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B,$$

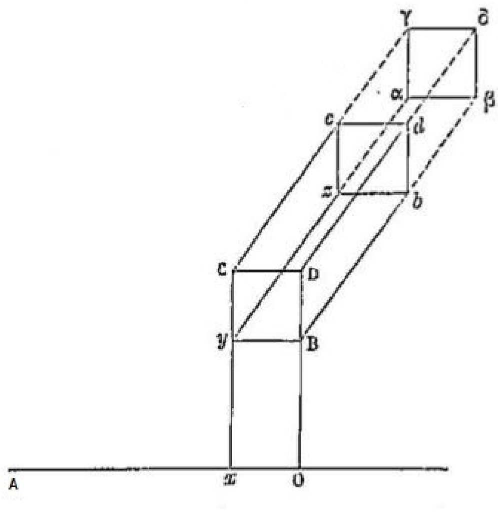
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C,$$

l'élasticité en z' sera exprimée par

$$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K},$$

la densitè y étant $\dfrac{1}{K}$.
Considérons maintenant un parallélépipède rectangle infiniment petit $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig.3) dont les côtés parallèles à nos coordonnées soient $zb = \alpha$, $zc = \beta$ et $z\alpha = \gamma$; son volume sera $\alpha\beta\gamma$ et sa masse $\dfrac{\alpha\beta\gamma}{K}$.

Fig. 3.



Pour connaitre les forces dont ce parallélépipède est sollecité, cherchons d'abord l'élasticité du milieu à chacun des ses angles:

Point.	Coordonnées.			Élasticité.
z	x	y	z	Π
b	$x+\alpha$	y	z	$\Pi+\frac{A\alpha}{K}$
c	x	$y+\beta$	z	$\Pi+\frac{B\beta}{K}$
d	$x+\alpha$	$y+\beta$	z	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta}{K}$
α	x	y	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{C\gamma}{K}$
β	$x+\alpha$	y	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+C\gamma}{K}$
γ	x	$y+\beta$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{B\beta+C\gamma}{K}$
δ	$x+\alpha$	$y+\beta$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{K}$

De là, il est, clair que, considérant les faces opposées $zc\alpha\gamma$ et $bd\beta\delta$, les pressions sur celle-ci surpassent les pressions sur celle-là de la quantité $\frac{A\alpha}{K}$; donc l'aire de ces faces étant égale à $\beta\gamma$, il en résulte une force suivant la direction $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$.
De la même manière, le parallélépipède sera poussé suivant la direction xy par la force $-\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, et suivant la direction yz par la force $-\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$.
Donc la masse de ce parallélépipède étant $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$, si nous introduisons la hauteur g par laquelle un corps grave tombe dans une seconde, en exprimant le temps écoulé t en secondes, nous aurons, pour la connaisance du mouvement, les trois accélérations suivantes:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA, \qquad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB \qquad et \qquad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC.$$

Ces formules étant générales pour toutes les agitations possibles, je ne considère ici que le cas où ces agitations sont quasi infiniment petites: pour cet effet, je pose $x = X + p$, $y = Y + q$ et $z = Z + r$, de sorte que p, q, r sont des quantités infiniment petites. De là, nous aurons

$$dp = (L-1)dX + MdY + NdZ,$$

$$dq = PdX + (Q-1)dY + RdZ,$$

$$dr = SdX + TdY + (V-1)dZ,$$

et partant, à pu près,

$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

$$P = 0, \quad Q = 1, \quad R = 0,$$

$$S = 0, \quad T = 0, \quad V = 1,$$

et

$$K = 1;$$

mais, pour la différentielle de Π, nous aurons

$$E = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dX}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dX}\Big) + \Big(\frac{dV}{dX}\Big)\Big),$$

$$F = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dY}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dY}\Big) + \Big(\frac{dV}{dY}\Big)\Big),$$

$$G = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dZ}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dZ}\Big) + \Big(\frac{dV}{dZ}\Big)\Big).$$

Ensuite, nous trouvons

$$A = E; \qquad B = F \qquad et \qquad C = G,$$

et enfin, pour nous débrasser des autres lettres, remarquons que

$$L = 1 + \Big(\frac{dp}{dX}\Big), \quad Q = 1 + \Big(\frac{dq}{dY}\Big), \quad V = 1 + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big),$$

de sorte que, outre les coordonnées X, Y, Z avec le temps t, il ne reste dans le calcul que les lettres p, q, r qui marquent le déplacement du chaque point; car, substituant ces valeurs que nous venons de trouver, le mouvement causé par une agitation quelconque, mais fort petit sera déterminé par les trois équations suivantes

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dXdZ}\Big),$$

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dYdZ}\Big)$$

et

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddr}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dXdZ}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dYdZ}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dZ^2}\Big),$$

ou bien, posant

$$\Big(\frac{dp}{dX}\Big) + \Big(\frac{dq}{dY}\Big) + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big) = u,$$

nous aurons

$$\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = 2gh\Big(\frac{du}{dX}\Big), \quad \Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = 2gh\Big(\frac{du}{dY}\Big) \quad et \quad \Big(\frac{ddr}{dt^2}\Big) = 2gh\Big(\frac{du}{dZ}\Big);$$

d'où il est aisé de conclure

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddu}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddu}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddu}{dY^2}) + \Big(\frac{ddu}{dZ^2}\Big);$$

d'où il faut déterminer la nature de la fonction u détérminée par les coordonnées X, Y, Z et le temps t.

De là, il n'est pas difficile de trouver une infinité de solutions particulières, comme

$$p = \beta\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$q = \gamma\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$r = \delta\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

pourvu que $\alpha = \sqrt{2gh(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}$ où β, γ, δ sont des quantités quelconques, et, Φ la marque d'une fonction quelconque. Donc quelques valeurs qu'on prenne, on aura toujours le cas d'un certain ébranlement dont on pourra déterminer la continuation. Mais, pour notre dessein, il s'agit de trouver un tel cas, où l'ébranlement, initial aura été renfermé dans un petit espace, d'où il est répandu ensuite en tout sens. Soit donc A le centre da l'agitation primitive, et posons

$$p = Xs, \quad q = Ys, \quad r = Zs,$$

et s sera une fonction du témps t et de la quantité $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = V$, qui marque la distance du point A. Donc, puisque

$$ds = \Big(\frac{ds}{dt}\Big)dt + \Big(\frac{ds}{dV}\Big)dV,$$

nous aurons

$$ds = \left(\frac{ds}{dt}\right)dt + \frac{XdX + YdY + ZdZ}{dV}\left(\frac{ds}{dV}\right)$$

et puis

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) = s + \frac{X^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right), \quad \left(\frac{dq}{dY}\right) = s + \frac{Y^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right), \quad \left(\frac{dr}{dZ} = s + \frac{Z^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right).\right.$$

Donc

$$u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right).$$

Maintenant, ayant

$$\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right), \quad \left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V},$$

notre première équation deviendra

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

ou

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

à laquelle se réduisent aussi les deux autres, et l'éloignement du point z depuis le centre A sera

$$Vs = s\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

qui en marque le déplacement par rapport à l'état d'équilibre; de sorte que le rayon d'une couche sphérique, qui dans l'état d'équilibre était égal à V, sera à présent égal à $V + Vs$. Donc, si nous posons $Vs = u$, ou $s = \frac{u}{V}$, afin que u exprime le changement de cette couche, la particule u sera détérminée par cette équation

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{V^2} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Après plusieurs recherches, j'ai enfin trouvé que cette équation admet une résolution générale semblable au cas où l'on ne suppose à l'air qu'une seule dimension; que $\Phi(z)$ marque une fonction quelconque de z, et qu'on indique son différentiel en [cette] sorte,

$$d\Phi(z) = \Phi'(z)dz.$$

Cela posé, on veraa qu'on satisfait à notre équation en supposant

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}).$$

Donc, pour le commencement del'agitation, nous aurons cette èquation

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V),$$

d'où l'on voit que, pour appliquer cette formule à la propagation du son, la fonction $\Phi(z)$ doit toujours être égale à zéro, excepté les cas où la quantité z est extrèmement petite. Or il faut que la fonction $\Phi'(z)$ ait la même propriété et encore celle-ci $\Phi''(z)$, en supposant $d\Phi(z) = \Phi''(z)dz$, afin que non seulement la quantité u, mais aussi la vitesse $\left(\frac{du}{dt}\right)$, s'évanouissent au commencement, partout excepté dans le petit, espace atour de A, où s'est fait l'ébranlement primitif. Que le caractère Ψ marque des fonctions discontinues de la même nature, et nous aurons la solution génerale qui suit

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) +$$
$$+ \frac{B}{V^2}\,\Psi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\,\Psi'(V - t\sqrt{2gh})$$

et, pour la vitesse,

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{V^2}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\,\Phi''(V + t\sqrt{2gh}) -$$
$$- \frac{B\sqrt{2gh}}{V^2}\,\Psi'(V - t\sqrt{2gh}) + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\,\Psi''(V - t\sqrt{2gh}).$$

De là il est clair qu'une couche sphérique, dont le rayon est égal à V, demeure en repos tant que la formule $V - t\sqrt{2gh}$ ne devienne assez petite ou moindre que le rayon de la petite sphère ébranlée au commencement; et partant l'agitation primitive sera répandue à la distance V après le temps

$t = \dfrac{V}{\sqrt{2gh}}$ secondes. D'où il suit la même vitesse du soin que Newton a trouvée, c'est-à-dire plus petite que selon les expèriences. D'où je conclus que, ayant supposé dans ce calcul les ébranlements infiniment petits, leur grandeur cause une propagation plus prompte. Ensuite ces formules nous apprennent que, lorsque les distances V sont fort grandes, les termes divisés par V^2 s'évanouissant à l'égard des autres divisés par V, tant les petits espaces u que les vitesses $\left(\dfrac{du}{dt}\right)$ diminuent en raison des distances; d'où l'on peut justement juger de l'affaiblissement du son par des grandes distances.

Volià mes recherches, que vous pourrez insérer, Monsieur, à votre second Volume, si vous le jugez à propos. Je les ai abrégées autant qu'il m'a été possible, et si vous y vouliez ajouter vos remarques, ou quelques éclaircissements, je vous en serais infiniment obligé. Il y a longtemps que j'ai examiné les sons des cordes qui ne sont pas également épaisses, et je viens de lire à notre Académie quelques Mémoires sur les sons des cloches et des tambours ou timblables, fondés sur la même théorie des fonctions discontinues. Faites bienne mes compliments les plus empressés à toute votre illustre Société, et soyez assuré que je suis avec le plus parfait attachement, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
L. Euler.

6.2 Traduzione in lingua italiana

EULERO A LAGRANGE

Berlino, 1 gennaio 1760.

Signore,

dopo la mia ultima lettera[1] sono riuscito a ricondurre al calcolo la propagazione del suono, supponendo all'aria tutte le tre dimensioni, e sebbene io non dubiti che voi vi siate pervenuto più felicemente, io non credo di poter

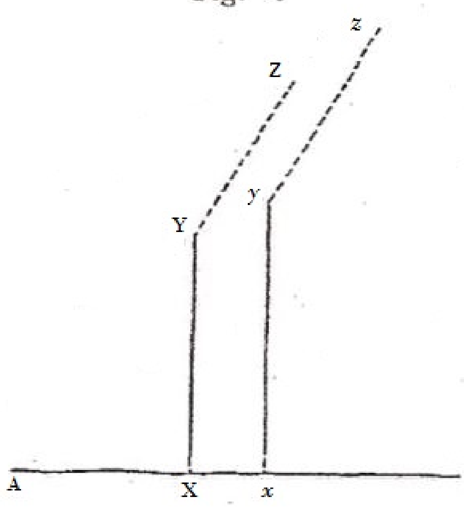
[1]Eulero si riferisce alla lettera del 23 ottobre 1759.

meglio testimoniare il mio attaccamento verso la vostra illustre Società che presentandole le mie ricerche su questo medesimo soggetto:

Ricerche sulla propagazione delle vibrazioni in un mezzo elastico.

Considerando il mezzo nello stato di equilibrio, sia la sua densità uguale a 1, e la sua elasticità bilanciata dal peso di una colonna dello stesso fluido la cui altezza è uguale a h; comincio a considerare un elemento qualunque del fluido, che, nello stato di equilibrio si trova nel punto Z (Fig. 1) determinato

Fig. 1.



dalle tre coordinate perpendicolari tra loro $AX = X$, $XY = Y$ e $YZ = Z$; e che per l'agitazione, questo stesso elemento sia stato trasportato in z, del quale le coordinate siano $Ax = x$, $xy = y$ e $yz = z$ che saranno certe funzioni delle prime X, Y, Z per un istante dato. Siano dunque

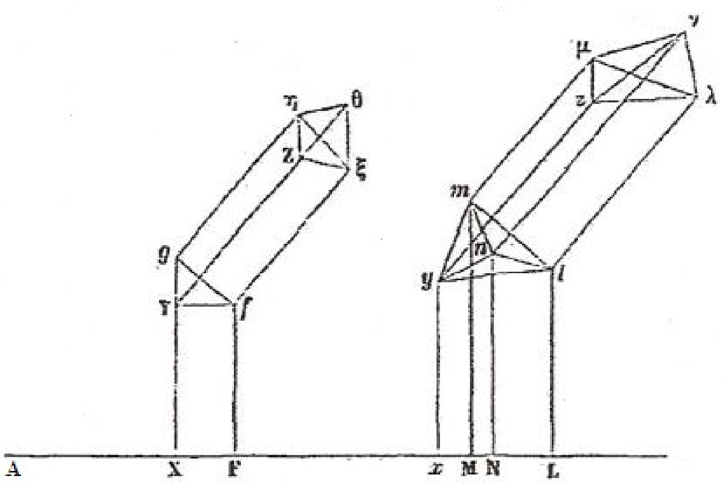
$$dx = LdX + MdY + NdZ,$$

$$dy = PdX + QdY + RdZ,$$

$$dz = SdX + TdY + VdZ.$$

In seguito io considero un volume infinitamente piccolo di fluido, che, nello stato di equilibrio, abbia la figura piramidale $Z\xi\eta\theta$ (Fig.2) rettangolare,

Fig. 2.



che per l'agitazione, sia trasportata in $z\lambda\mu\nu$, la cui figura sarà ugualmente piramidale, e ponendo, per lo stato di equilibrio,

i punti	le coordinate		
Z	X	Y	Z
ξ	$X+\alpha$	Y	Z
η	X	$Y+\beta$	Z
θ	X	Y	$Z+\gamma$

si avrà, per lo stato di agitazione

i punti	le tre coordinate		
z	$\mathrm{A}x = x$	$xy = y$	$yz = z$
λ	$\mathrm{AL} = x + \mathrm{L}\alpha$	$\mathrm{L}l = y + \mathrm{P}\alpha$	$l\lambda = z + \mathrm{S}\alpha$
μ	$\mathrm{AM} = x + \mathrm{M}\beta$	$\mathrm{M}m = y + \mathrm{Q}\beta$	$m\mu = z + \mathrm{T}\beta$
ν	$\mathrm{AN} = x + \mathrm{N}\gamma$	$\mathrm{N}n = y + \mathrm{R}\gamma$	$n\nu = z + \mathrm{V}\gamma$

Il volume della piramide $Z\xi\eta\theta$ è uguale a $\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$.
Si tratta di trovare il volume della piramide $z\lambda\mu\nu$, che si vede essere composta da questi prismi

$$ymnz\mu\nu + ylnz\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylmz\lambda\mu$$

e, prendendo il volume di ogni parte, si troverà, questo volume

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(yz+l\lambda+n\nu)\Delta yln \\ +\frac{1}{3}(yz+m\mu+n\nu)\Delta ymn \\ +\frac{1}{3}(l\lambda+m\mu+n\nu)\Delta lmn \\ -\frac{1}{3}(yz+l\lambda+m\mu)\Delta ylm \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3z+S\alpha+V\gamma)\Delta yln \\ +\frac{1}{3}(3z+T\beta+V\gamma)\Delta ymn \\ +\frac{1}{3}(3z+S\alpha+T\beta+V\gamma)\Delta lmn \\ -\frac{1}{3}(3z+S\alpha+T\beta)\Delta ylm \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn, \\ -\frac{1}{3}T\beta\Delta yln, \\ +\frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm. \end{array}\right.$$

In seguito, si trovano le aree di questi triangoli , essendo $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$, come segue:

$$\Delta ymn = \frac{1}{2}xM(2y+Q\beta) + \frac{1}{2}MN(2y+Q\beta+R\gamma) - \frac{1}{2}xN(2y+R\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2}Q\beta \times xN - \frac{1}{2}R\gamma \times xM = \frac{1}{2}\beta\gamma(NQ-MR),$$

$$\Delta yln = \frac{1}{2}xN(2y+R\gamma) + \frac{1}{2}LN(2y+P\alpha+R\gamma) - \frac{1}{2}xL(2y+P\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}R\gamma \times xL - \frac{1}{2}P\alpha \times xN = \frac{1}{2}\alpha\gamma(LR-NP),$$

$$\Delta ylm = \frac{1}{2}xM(2y+Q\beta) + \frac{1}{2}LM(2y+P\alpha+Q\beta) - \frac{1}{2}xL(2y+P\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}Q\beta \times xL - \frac{1}{2}P\alpha \times xM = \frac{1}{2}\alpha\beta(LQ-MP).$$

Da ciò, ricaviamo il volume della nostra piramide $z\lambda\mu\nu$ nello stato di agitazione

$$-\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ-MR) - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma T(LR-NP) - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma V(LQ-MP),$$

e, pertanto, la densità del mezzo agitato in z sarà

$$1 : (LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT),$$

e, ponendo Π per l'altezza della colonna che bilancia l'elasticità, avremo

$$\Pi = h : (LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT),$$

la quale essendo una funzione de tre variabili X, Y, Z, poniamo

$$d\Pi = EdX + FdY + GdZ,$$

in modo che

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right), \quad F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right), \quad G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right).$$

Sia, per abbreviare,

$$LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT = K,$$

in modo che $\Pi = \dfrac{h}{K}$. Se consideriamo, nello stato di equilibrio, un punto Z' infinitamente vicino a Z determinato da queste coordinate $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, questo punto si troverà dopo l'agitazione in z' del quale le coordinate saranno

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$

$$y + PdX + QdY + RdZ,$$

$$z + SdX + TdY + VdZ;$$

dunque, reciprocamente, la posizione del punto z' infinitamente vicino a z nello stato di agitazione, essendo data dalle coordinate $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$, la sua posizione nello stato di equilibrio, sarà determinata dalle coordinate $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, in modo che

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K},$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K},$$

e

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

Da ciò, essendo l'elasticità in z

$$\Pi = \frac{h}{K},$$

in z' sarà

$$\Pi + EdX + FdY + GdZ$$

o anche, se per abbreviare poniamo

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A,$$

$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B,$$

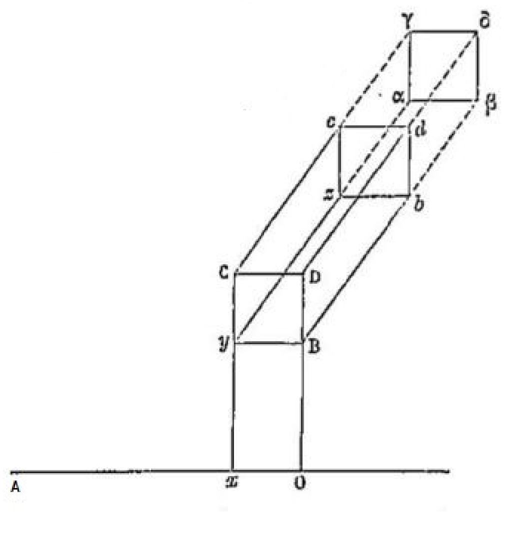
$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C,$$

l'elasticità in z' sarà espressa da

$$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K},$$

essendo la densità $\frac{1}{K}$. Consideriamo ora, un parallelepipedo rettangolo infinitamente piccolo $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig.3) del quale i lati paralleli alle nostre coordinate siano $zb = \alpha$, $zc = \beta$ e $z\alpha = \gamma$; il suo volume sarà $\alpha\beta\gamma$ e la

Fig. 3.



sua massa $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Per conoscere le forze da cui questo parallelepipedo è sollecitato cerchiamo prima di tutto l'elasticità del mezzo in ciascuno dei suoi angoli:

Punto	Coordinate			Elasticità
z	x	y	z	Π
b	$x+\alpha$	y	z	$\Pi + \frac{A\alpha}{K}$
c	x	$y+\beta$	z	$\Pi + \frac{B\beta}{K}$
d	$x+\alpha$	$y+\beta$	z	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta}{K}$
α	x	y	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{C\gamma}{K}$
β	$x+\alpha$	y	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + C\gamma}{K}$
γ	x	$y+\beta$	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{B\beta + C\gamma}{K}$
δ	$x+\alpha$	$y+\beta$	$z+\gamma$	$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}$

Da ciò, è chiaro che, considerando le facce opposte $zc\alpha\gamma$ e $bd\beta\delta$, le pressioni su quest'ultima sorpassano le pressioni sull'altra della quantità $\frac{A\alpha}{K}$; dunque l'area di queste facce, essendo uguale a $\beta\gamma$, ne risulta una forza secondo la direzione $Ax = -\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$.
Allo stesso modo, il parallelepipedo sarà spinto lungo la direzione xy dalla forza $-\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$, e lungo la direzione yz dalla forza $-\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$.
Dunque la massa di tale parallelepipedo essendo $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$, se introduciamo l'altezza g, dalla la quale un corpo pesante cade in un secondo, esprimendo il tempo trascorso t in secondi, avremo per la conoscenza del movimento le tre accelerazioni seguenti:

$$\left(\frac{ddx}{dt^2}\right) = -2gA, \qquad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = -2gB \qquad et \qquad \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = -2gC.$$

Queste formule, essendo generali per tutte le possibili agitazioni, considero quì solo il caso in cui queste agitazioni sono quasi infinitamente piccole: per questo scopo pongo $x = X + p$, $y = Y + q$ e $z = Z + r$, in modo che p, q, r sono delle quantità infinitamente piccole. Da ciò, avremo

$$dp = (L-1)dX + MdY + NdZ,$$

$$dq = PdX + (Q-1)dY + RdZ,$$

$$dr = SdX + TdY + (V-1)dZ,$$

e pertanto, all'incirca,

$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

$$P = 0, \quad Q = 1, \quad R = 0,$$

$$S = 0, \quad T = 0, \quad V = 1,$$

e

$$K = 1;$$

ma per il differenziale di Π avremo

$$E = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dX}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dX}\Big) + \Big(\frac{dV}{dX}\Big)\Big),$$

$$F = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dY}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dY}\Big) + \Big(\frac{dV}{dY}\Big)\Big),$$

$$G = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dZ}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dZ}\Big) + \Big(\frac{dV}{dZ}\Big)\Big).$$

In seguito, troviamo

$$A = E; \qquad B = F \qquad e \qquad C = G,$$

ed infine, per sbarazzarci delle altre lettere notiamo che

$$L = 1 + \Big(\frac{dp}{dX}\Big), \quad Q = 1 + \Big(\frac{dq}{dY}\Big), \quad V = 1 + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big),$$

in modo che, oltre alle coordinate X, Y, Z con il tempo t, restano nel calcolo solo le lettere p, q, r che rappresentano lo spostamento di ogni punto; poiché, sostituendo questi valori che abbiamo appena trovato, il movimento causato da una qualunque agitazione, ma molto piccola, sarà determinato dalle tre seguenti equazioni

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dXdZ}\Big),$$

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dYdZ}\Big)$$

e

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddr}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dXdZ}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dYdZ}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dZ^2}\Big),$$

o anche, ponendo

$$\Big(\frac{dp}{dX}\Big) + \Big(\frac{dq}{dY}\Big) + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big) = u,$$

avremo

$$\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = 2gh\Big(\frac{du}{dX}\Big), \quad \Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = 2gh\Big(\frac{du}{dY}\Big) \quad e \quad \Big(\frac{ddr}{dt^2}\Big) = 2gh\Big(\frac{du}{dZ}\Big);$$

da cui è facile concludere

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddu}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddu}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddu}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddu}{dZ^2}\Big);$$

dalla quale bisogna trovare la natura della funzione u determinata dalle coordinate X, Y, Z e dal tempo t.

Da ciò, non è difficile trovare un'infinità di soluzioni particolari, come

$$p = \beta\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$q = \gamma\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$r = \delta\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

purché $\alpha = \sqrt{2gh(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}$, in cui β, γ, δ sono delle quantità qualsiasi, e Φ il simbolo di una funzione qualsiasi. Dunque qualunque valore si prenda, si avrà sempre il caso di una certa vibrazione di cui si potrà determinare la continuazione. Ma, per il nostro scopo, si tratta di trovare un tale caso, in cui la vibrazione iniziale sia racchiusa in un piccolo spazio, da cui si è in seguito diffusa in ogni direzione. Sia dunque A il centro dell'agitazione iniziale, e poniamo

$$p = Xs, \quad q = Ys, \quad r = Zs,$$

e s sarà una funzione del tempo t e della quantità $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = V$, che rappresenta la distanza dal punto A. Dunque poiché

$$ds = \Big(\frac{ds}{dt}\Big)dt + \Big(\frac{ds}{dV}\Big)dV,$$

avremo

$$ds = \left(\frac{ds}{dt}\right)dt + \frac{XdX + YdY + ZdZ}{\partial V}\left(\frac{ds}{dV}\right)$$

inoltre

$$\left(\frac{dp}{dX}\right) = s + \frac{X^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right), \quad \left(\frac{dq}{dY}\right) = s + \frac{Y^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right), \quad \left(\frac{dr}{dZ}\right) = s + \frac{Z^2}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right).$$

Dunque

$$u = \left(\frac{dp}{dX}\right) + \left(\frac{dq}{dY}\right) + \left(\frac{dr}{dZ}\right) = 3s + V\left(\frac{ds}{dV}\right).$$

Ora, avendo

$$\left(\frac{ds}{dX}\right) = \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right), \quad \left(\frac{dV}{dX}\right) = \frac{X}{V},$$

la nostra prima equazione diventerà

$$\frac{X}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{3X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \frac{X}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + X\left(\frac{dds}{dV^2}\right)$$

o

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{dds}{dt^2}\right) = \frac{4}{V}\left(\frac{ds}{dV}\right) + \left(\frac{dds}{dV^2}\right),$$

alla quale si riducono anche le altre due, e l'allontanamento del punto z dal centro A sarà

$$Vs = s\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

che ne indica lo spostamento in rapporto allo stato di equilibrio in modo che il raggio di uno strato sferico, che nello stato di equilibrio era uguale a V, sarà ora uguale a $V + Vs$. Dunque, se poniamo $Vs = u$, o $s = \frac{u}{V}$, in modo che u esprima il cambiamento di questo strato, la particella u sarà determinata da questa equazione

$$\frac{1}{2gh}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = -\frac{2u}{V^2} + \frac{2}{V}\left(\frac{du}{dV}\right) + \left(\frac{ddu}{dV^2}\right).$$

Dopo molte ricerche, ho infine trovato che questa equazione ammette una risoluzione generale simile al caso in cui si supponga all'aria una sola dimensione; che $\Phi(z)$ denoti una funzione qualunque di z, e che si indichi il suo differenziale in [questo] modo

$$d\Phi(z) = \Phi'(z)dz.$$

Ciò posto, si vedrà che la nostra equazione è soddisfatta supponendo

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}).$$

Dunque, all'inizio dell'agitazione, avremo questa equazione

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V),$$

da cui si vede che per applicare questa formula alla propagazione del suono, la funzione Φ deve sempre essere uguale a zero, eccetto il caso in cui la quantità z è estremamente piccola. Ora occorre che la funzione $\Phi'(z)$ abbia la stessa proprietà e anche $\Phi''(z)$, e supponendo $d\Phi(z) = \Phi''(z)dz$, affinché non soltanto la quantità u, ma anche la velocità $\left(\frac{du}{dt}\right)$ svanisca all'inizio ovunque, eccetto il piccolo spazio intorno ad A, ove si è prodotta la vibrazione iniziale. Che il simbolo Ψ denoti delle funzioni discontinue della stessa natura, e avremo la seguente soluzione generale

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) +$$
$$+\frac{B}{V^2}\,\Psi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\,\Psi'(V - t\sqrt{2gh})$$

e, per la velocità,

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{V^2}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\,\Phi''(V + t\sqrt{2gh}) -$$
$$-\frac{B\sqrt{2gh}}{V^2}\,\Psi'(V - t\sqrt{2gh}) + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\,\Psi''(V - t\sqrt{2gh}).$$

Da ciò è chiaro che uno strato sferico, il cui raggio è uguale a V rimane in riposo fintanto che la formula $V - t\sqrt{2gh}$ non divenga assai piccola o inferiore al raggio della piccola sfera scossa all'inizio; e pertanto l'agitazione iniziale sarà diffusa alla distanza V dopo il tempo $t = \frac{V}{\sqrt{2gh}}$ secondi. Da cui segue la stessa velocità del suono che Newton ha trovato, cioè più piccola rispetto alle esperienze. Da cui io concludo che, avendo supposto in questo calcolo le vibrazioni infinitamente piccole, la loro grandezza determina una propagazione più pronta. Inoltre queste formule ci suggeriscono che, quando le

distanze V sono molto grandi, i termini divisi per V^2 spariscono al confronto degli altri divisi per V, tanto i piccoli spazi u che le velocità $\left(\frac{du}{dt}\right)$ diminuiscono in ragione delle distanze; da cui si può appunto giustamente giudicare dell'indebolimento del suono per grandi distanze.
Ecco le mie ricerche, che voi potrete inserire, Signore, nel vostro secondo Volume, se lo riterrete opportuno. Io le ho abbreviate per quanto mi è stato possibile, e se voleste aggiungervi le vostre osservazioni, o qualche chiarimento, ve ne sarei infinitamente grato. È da molto tempo che io ho esaminato il suono delle corde di spessore non uniforme, e ho appena letto alla nostra Accademia alcune Memorie sul suono delle campane, dei tamburi o dei timpani[2] fondati sulla stessa teoria delle funzioni discontinue. Fate i miei complimenti più vivi a tutta la vostra illustre Società, e siate certo che io sono con la più totale devozione, Signore,

Vostro umilissimo e obbedientissimo servitore
L. Euler.

6.3 Commento della Lettera

Nella lettera del 23 ottobre 1759, Eulero aveva esposto in breve la sua teoria della propagazione del suono nel piano (o teoria delle onde circolari), e aveva chiesto a Lagrange il suo aiuto per risolvere l'equazione trovata.
Lagrange, come abbiamo visto nel Capitolo precedente, risponde alla richiesta di Eulero nella lettera del 26 dicembre 1759 dove riporta i risultati ottenuti sulla propagazione del suono nell'ipotesi di due e tre dimensioni (teoria delle onde circolari e teoria delle onde sferiche).
Ma nello stesso momento in cui Lagrange inviava ad Eulero la lettera del 26 dicembre 1759, Eulero aveva appena trovato risultati simili che, decide di rendere noti a Lagrange nella lettera dell'1 gennaio 1760.

[2]Eulero si riferisce alle due memorie pubblicate nel 1766 nel tomo X dei "Novi Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae ": "De motu vibratorio tympanorum" (E.302) e "Tentamen de sono campanarum" (E.303).

Le lettere fin'ora analizzate, ci permettono quindi di affermare che, nei mesi di novembre e dicembre del 1759, Eulero e Lagrange hanno ottenuto, l'uno indipendentemente dall'altro, la teoria delle onde piane e quella delle onde sferiche; questo, è un episodio molto rilevante ed importante nella storia della teoria della propagazione del suono.
La lettera dell'1 gennaio 1760 verrà pubblicata come memoria[3] nel tomo II delle "Misc. Taurin" e sarà seguita dalle "Nouvelles Recherches" di Lagrange.
Per il commento di questa lettera faremo riferimento alle memorie E.306 ed E.307, nelle quali Eulero affonta gli stessi argomenti ma in maniera più dettagliata[4].
Vediamo quindi il contenuto della lettera cercando di spiegare i calcoli e ricostruire i passaggi mancanti.

Ricerche sulla propagazione delle vibrazioni in un mezzo elastico.

Ipotesi delle tre dimensioni

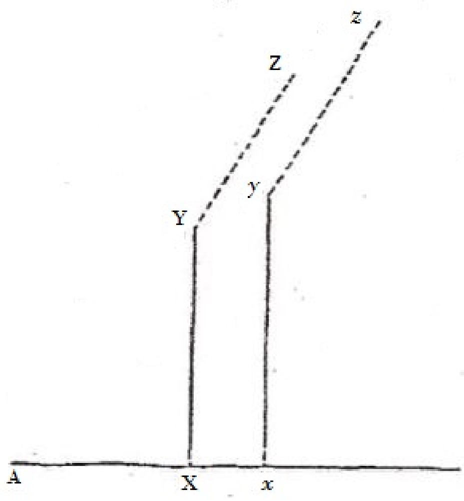
Consideriamo il mezzo (ovvero l'aria) nello stato di equilibrio; sia la sua densità uguale a 1, e la sua elasticità[5] bilanciata dal peso di una colonna d'aria la cui altezza è uguale ad h.
Prendiamo in esame una qualunque particella d'aria che nello stato di equilibrio si trova nel punto Z (Fig. 1), la cui posizione è determinata dalle

[3]Si tratta della memoria: "Lettre de M. Euler à M. de la Grange" (E.268). Vedi: Traduzione in lingua italiana, pagina 80 e nota (7).

[4]Si tratta delle memorie: "Supplemet aux recherches sur la propagation du son" (E.306) e "Continuation des recherches sur la propagation du son" (E.307), che sono già state precedentemente citate (vedi nota (76) pagina 65).

[5]L'elasticità è espressa dall'altezza h, in modo che una colonna d'aria della stessa altezza, mantenga l'elasticità in equlibrio.

Fig. 1.



tre coordinate perpendicolari $AX = X$, $XY = Y$ e $YZ = Z$; dopo un'agitazione esercitata nell'aria per un tempo dato, la particella viene trasportata in z, la cui posizione è data dalle coordinate $Ax = x$, $xy = y$ e $yz = z$, ciascuna delle quali sarà una funzione delle prime X, Y, Z relative alla stato di equilibrio. Poniamo quindi:

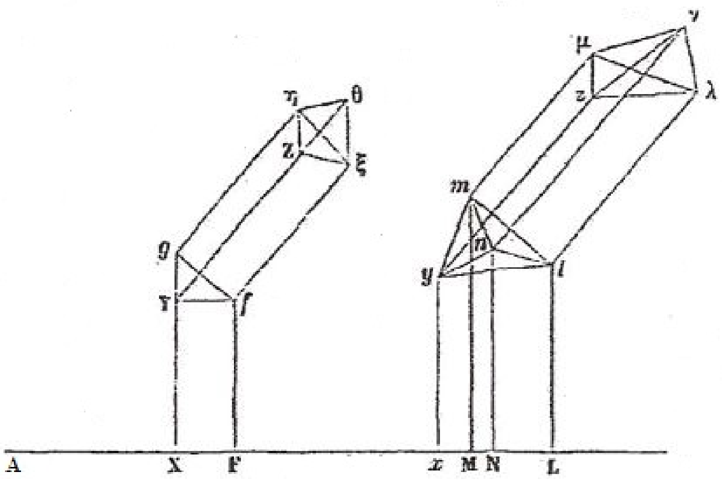
$$dx = LdX + MdY + NdZ, \tag{6.1}$$

$$dy = PdX + QdY + RdZ, \tag{6.2}$$

$$dz = SdX + TdY + VdZ, \tag{6.3}$$

nelle quali non compare il tempo t, poichè Eulero effettua inizialmente le sue ricerche in uno stesso istante, quindi non considera ancora il tempo.
Si vuole trovare la densità e l'elasticità dell'aria in z, ovvero nello stato di agitazione; a tale scopo, consideriamo un volume infinitamente piccolo d'aria, che nello stato di equilibrio, abbia la figura piramidale $Z\xi\eta\theta$ (Fig.2).

Fig. 2.



I punti Z, ξ, η, θ sono determinati dalle seguenti coordinte:

i punti	le coordinate		
Z..................	X	Y	Z
ξ..................	X + α	Y	Z
η..................	X	Y + β	Z
θ..................	X	Y	Z + γ

La piramide considerata è la sesta parte di un parallelepipedo formato dai tre lati α, β, γ supposti infinitamente piccoli. Quindi il volume della piramide $Z\xi\eta\theta$ è uguale a $\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, essendo $\alpha\beta\gamma$ il volume del parallelepipedo.

Dopo l'agitazione la piramide viene trasportata in $z\lambda\mu\nu$, la cui figura è ancora piramidale, e i cui punti z, λ, μ, ν sono determinati dalle seguenti coordinate:

i punti	le tre coordinate		
z..........	$Ax = x$	$xy = y$	$yz = z$
λ..........	$AL = x + L\alpha$	$Ll = y + P\alpha$	$l\lambda = z + S\alpha$
μ..........	$AM = x + M\beta$	$Mm = y + Q\beta$	$m\mu = z + T\beta$
ν..........	$AN = x + N\gamma$	$Nn = y + R\gamma$	$n\nu = z + V\gamma$

Si vuole trovare il volume della piramide $z\lambda\mu\nu$, che è composta da questi prismi:

$$ymnz\mu\nu + ylnz\lambda\nu + lmn\lambda\mu\nu - ylmz\lambda\mu$$

e per farlo Eulero calcola il volume di ciascun prisma.

Indichiamo, per comodità, con P_1 il prisma $ymnz\mu\nu$, con P_2 il prisma $ylnz\lambda\nu$,

con P_3 il prisma $lmn\lambda\mu\nu$ e con P_4 il prisma $ylmz\lambda\mu$.
Eulero denota con Δymn l'area di base di P_1, con Δyln l'area di base di P_2, con Δlmn l'area di base di P_3, con Δylm l'area di base di P_4, ed effettua i seguenti calcoli:

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(yz+m\mu+n\nu)\Delta ymn \\ +\frac{1}{3}(yz+l\lambda+n\nu)\Delta yln \\ +\frac{1}{3}(l\lambda+m\mu+n\nu)\Delta lmn \\ -\frac{1}{3}(yz+l\lambda+m\mu)\Delta ylm \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{3}(3z+T\beta+V\gamma)\Delta ymn \\ +\frac{1}{3}(3z+S\alpha+V\gamma)\Delta yln \\ +\frac{1}{3}(3z+S\alpha+T\beta+V\gamma)\Delta lmn \\ -\frac{1}{3}(3z+S\alpha+T\beta)\Delta ylm \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn, \\ -\frac{1}{3}T\beta\Delta yln, \\ +\frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm. \end{array}\right.$$

Cerchiamo di spiegare questi calcoli:

- Per il primo prisma P_1, e analogamente per gli altri, Eulero moltiplica l'area di base Δymn per $\frac{1}{3}(yz+m\mu+n\nu)$ ovvero per la somma delle tre altezze moltiplicata per $\frac{1}{3}$. Sostituiamo ora al posto di yz, $m\mu$, $n\nu$ le corrispondenti coordinate ($yz=z$, $m\mu=z+T\beta$, $n\nu=z+V\gamma$) che troviamo nello specchietto sopra riportato. Abbiamo quindi:

$$\frac{1}{3}(yz+m\mu+n\nu)\Delta ymn = \frac{1}{3}(z+z+T\beta+z+V\gamma)\Delta ymn =$$

$$= \frac{1}{3}(3z+T\beta+V\gamma)\Delta ymn = -\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn$$

- Analogamente per P_2:

$$\frac{1}{3}(yz+l\lambda+n\nu)\Delta yln = \frac{1}{3}(z+z+S\alpha+z+V\gamma)\Delta yln =$$

$$= \frac{1}{3}(3z+S\alpha+V\gamma)\Delta yln = -\frac{1}{3}T\beta\Delta yln$$

- Per P_3:

$$\frac{1}{3}(l\lambda+m\mu+n\nu)\Delta lmn = \frac{1}{3}(z+S\alpha+z+T\beta+z+V\gamma)\Delta lmn =$$

$$= \frac{1}{3}(3z+S\alpha+T\beta+V\gamma)\Delta lmn = \frac{1}{3}(0)\Delta lmn = 0$$

- Infine per P_4:

$$-\frac{1}{3}(yz + l\lambda + m\mu)\Delta ylm = -\frac{1}{3}(z + z + S\alpha + z + T\beta)\Delta ylm =$$

$$= -\frac{1}{3}(3z + S\alpha + T\beta)\Delta ylm = -\frac{1}{3}(-V\gamma)\Delta ylm = \frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm.$$

Quindi sommando i volumi ottenuti abbiamo la seguente espressione per il volume della piramide $z\lambda\mu\nu$:

$$-\frac{1}{3}S\alpha\Delta ymn - \frac{1}{3}T\beta\Delta yln + \frac{1}{3}V\gamma\Delta ylm \tag{6.4}$$

nella quale però si devono ancora calcolare le aree di base Δymn, Δyln e Δylm.

I prismi considerati sono a base triangoalre, quindi, le aree che dobbiamo calcolare sono aree di triangoli e Eulero le calcola come somma di aree di trapezi. Vediamo come:

- Triangolo ymn:

  L'area del triangolo ymn viene calcolata come somma e sottrazione delle aree dei tre seguenti trapezi: $T_1 = xymM$, $T_2 = NnmM$, $T_3 = xynN$. Indicando con A_{T_1}, A_{T_2}, A_{T_3} rispettivamente le aree dei trapezi T_1, T_2, T_3, si ha:

$$\Delta ymn = A_{T_1} + A_{T_2} - A_{T_3}$$

  dove

$$A_{T_1} = \frac{1}{2}xM(xy{+}Mm), \quad A_{T_2} = \frac{1}{2}MN(Mm{+}Nn), \quad A_{T_3} = \frac{1}{2}xN(xy{+}Nn),$$

  da cui

$$\Delta ymn = \frac{1}{2}xM(xy + Mm) + \frac{1}{2}MN(Mm + Nn) - \frac{1}{2}xN(xy + Nn).$$

  Ora, sostituendo al posto di xy, Mm, Nn, le loro coordinate[6], si ha:

$$\Delta ymn = \frac{1}{2}xM(y{+}y{+}Q\beta){+}\frac{1}{2}MN(y{+}Q\beta{+}y{+}R\gamma){-}\frac{1}{2}xN(y{+}y{+}R\gamma) =$$

[6]Vedi specchietto coordinate nello stato di agitazione a pagina 128.

$$= \frac{1}{2}xM(2y + Q\beta) + MN\frac{1}{2}(2y + Q\beta + R\gamma) - xN\frac{1}{2}(2y + R\gamma) =$$

$$= -\frac{1}{2}xM \times R\gamma + 0 + \frac{1}{2}xN \times Q\beta = -\frac{1}{2}xM \times R\gamma + \frac{1}{2}xN \times Q\beta.$$

Inoltre vale $xM = M\beta$, $xN = N\gamma$; sostituendo tali valori nell'ultima espressione trovata, abbiamo per l'area del triangolo ymn:

$$\Delta ymn = -\frac{1}{2}M\beta \times R\gamma + \frac{1}{2}N\gamma \times Q\beta = \frac{1}{2}\beta\gamma(NQ - MR). \qquad (6.5)$$

- Triangolo yln:

  L'area del triangolo yln viene calcolata come somma e sottrazione delle aree dei tre seguenti trapezi: $T_3 = xynN$, $T_4 = LlnN$, $T_5 = xylL$. Quindi

  $$\Delta yln = A_{T_3} + A_{T_4} - A_{T_5}$$

  dove

  $$A_{T_3} = \frac{1}{2}xN(xy+Nn), \quad A_{T_4} = \frac{1}{2}LN(Ll+Nn), \quad A_{T_5} = \frac{1}{2}xL(xy+Ll),$$

  da cui

  $$\Delta yln = \frac{1}{2}xN(xy + Nn) + \frac{1}{2}LN(Ll + Nn) - \frac{1}{2}xL(xy + Ll).$$

  Ora, sostituendo al posto di xy, Ll, Nn, le loro coordinate, si ha:

  $$\Delta yln = \frac{1}{2}xN(y+y+R\gamma)+\frac{1}{2}LN(y+P\alpha+y+R\gamma)-\frac{1}{2}xL(y+y+P\alpha) =$$

  $$= \frac{1}{2}xN(2y + R\gamma) + LN\frac{1}{2}(2y + P\alpha + R\gamma) - xL\frac{1}{2}(2y + P\alpha) =$$

  $$= -\frac{1}{2}xN \times P\alpha + 0 + \frac{1}{2}xL \times R\gamma = -\frac{1}{2}xN \times P\alpha + \frac{1}{2}xL \times R\gamma.$$

  Inoltre vale $xL = L\alpha$, $xN = N\gamma$; sostituendo tali valori nell'ultima espressione trovata, abbiamo per l'area del triangolo yln:

  $$\Delta yln = -\frac{1}{2}N\gamma \times P\alpha + \frac{1}{2}L\alpha \times R\gamma = \frac{1}{2}\alpha\gamma(LR - NP). \qquad (6.6)$$

- Triangolo ylm:

  L'area del triangolo ylm viene calcolata come somma e sottrazione delle aree dei tre seguenti trapezi: $T_1 = xymM$, $T_6 = LlmM$, $T_5 = xylL$. Quindi

$$\Delta ylm = A_{T_1} + A_{T_6} - A_{T_5}$$

  dove

$$A_{T_1} = \frac{1}{2}xM(xy+Mm), \quad A_{T_6} = \frac{1}{2}LM(Ll+Mm), \quad A_{T_5} = \frac{1}{2}xL(xy+Ll),$$

  da cui

$$\Delta ylm = \frac{1}{2}xM(xy + Mm) + \frac{1}{2}LM(Ll + Mm) - \frac{1}{2}xL(xy + Ll).$$

  Ora, sostituendo al posto di xy, Ll, Mm, le loro coordinate, si ha:

$$\Delta ylm = \frac{1}{2}xM(y+y+Q\beta)+\frac{1}{2}LM(y+P\alpha+y+Q\beta)-\frac{1}{2}xL(y+y+P\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}xM(2y + Q\beta) + LM\frac{1}{2}(2y + P\alpha + Q\beta) - xL\frac{1}{2}(2y + P\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{2}xM \times P\alpha + 0 + \frac{1}{2}xL \times Q\beta = -\frac{1}{2}xM \times P\alpha + \frac{1}{2}xL \times Q\beta.$$

  Inoltre vale $xL = L\alpha$, $xM = M\beta$; sostituendo tali valori nell'ultima espressione trovata, abbiamo per l'area del triangolo ylm:

$$\Delta ylm = -\frac{1}{2}M\beta \times P\alpha + \frac{1}{2}L\alpha \times Q\beta = \frac{1}{2}\alpha\beta(LQ - MP). \qquad (6.7)$$

Sostituiamo, ora, in (6.4) le espressioni (6.5), (6.6), (6.7) e troviamo così il volume della piramide $z\lambda\mu\nu$ nello stato di agitazione:

$$-\frac{1}{3}S\alpha\frac{1}{2}\beta\gamma(NQ - MR) - \frac{1}{3}T\beta\frac{1}{2}\alpha\gamma(LR - NP) + \frac{1}{3}V\gamma\frac{1}{2}\alpha\beta(LQ - MP) =$$

$$-\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma S(NQ - MR) - \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma T(LR - NP) + \frac{1}{6}\alpha\beta\gamma V(LQ - MP).$$

Raccogliendo a fattore comune $\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma$, che rappresenta il volume della piramide $Z\xi\eta\theta$ nello stato di equilibrio, e sviluppando le parentesi si ha:

$$\frac{1}{6}\alpha\beta\gamma(LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT).$$

Quindi la densità dell'aria in z, ovvero nello stato di agitazione, sarà:

$$\frac{1}{LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT}$$

dove 1 rappresenta la densità dell'aria nello stato di equilibrio.
Indicando con Π l'altezza della colonna che bilancia l'elasticità dell'aria nello stato di agitazione, abbiamo:

$$\Pi = \frac{h}{LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT}$$

dove h è l'altezza della colonna che bilancia l'elasticità dell'aria nello stato di equilibrio. Poniamo per abbreviare:

$$LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT = K$$

da cui segue $\Pi = \dfrac{h}{K}$.
Si ha che Π (ovvero l'elasticità in z) è una funzione delle tre variabili X, Y, Z.
Poniamo quindi:

$$d\Pi = EdX + FdY + GdZ$$

dove

$$E = \left(\frac{d\Pi}{dX}\right), \quad F = \left(\frac{d\Pi}{dY}\right), \quad G = \left(\frac{d\Pi}{dZ}\right).$$

Consideriamo, ora, nello stato di equlibrio, un punto Z' infinitamente vicino a Z e determinato dalle coordinate $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$; Z' si troverà dopo l'agitazione in z' le cui coordinate sono date da:

$$x + LdX + MdY + NdZ,$$

$$y + PdX + QdY + RdZ,$$

$$z + SdX + TdY + VdZ;$$

L'elasticità in z' sarà, quindi, espressa da:

$$\Pi + d\Pi = \Pi + EdX + FdY + GdZ. \tag{6.8}$$

Ora, viceversa, se la posizione del punto z', infinitamente vicino a z nello stato di agitazione, è fornita dalle coordinate $x + \alpha$, $y + \beta$, $z + \gamma$ (dove α, β,

γ indicano quantità molto piccole), possiamo trovare la sua posizione nello stato di equilibrio (Z') che sarà data dalle coordinate $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$, in modo che, ponendo

$$\alpha = LdX + MdY + NdZ,$$
$$\beta = PdX + QdY + RdZ,$$
$$\gamma = SdX + TdY + VdZ;$$

si ha

$$dX = \frac{\alpha(QV - RT) + \beta(NT - MV) + \gamma(MR - NQ)}{K},$$

$$dY = \frac{\alpha(RS - PV) + \beta(LV - NS) + \gamma(NP - LR)}{K},$$

$$dZ = \frac{\alpha(PT - QS) + \beta(MS - LT) + \gamma(LQ - MP)}{K}.$$

Abbiamo già osservato che l'elasticità in z' è data dalla (6.8), e ponendo per abbreviare:

$$E(QV - RT) + F(RS - PV) + G(PT - QS) = A, \tag{6.9}$$

$$E(NT - MV) + F(LV - NS) + G(MS - LT) = B, \tag{6.10}$$

$$E(MR - NQ) + F(NP - LR) + G(LQ - MP) = C, \tag{6.11}$$

l'elasticità in z' diventa

$$\Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{K}.$$

Infatti sostituendo nella (6.8) le espressioni trovate per dX, dY, dZ si ha:

$$\Pi + EdX + FdY + GdZ =$$

$$\begin{aligned}\Pi + \frac{1}{k}\,[E\alpha(QV - RT) + E\beta(NT - MV) + E\gamma(MR - NQ) +\\ +F\alpha(RS - PV) + F\beta(LV - NS) + F\gamma(NP - LR) +\\ +G\alpha(PT - QS) + G\beta(MS - LT) + G\gamma(LQ - MP)] =\end{aligned}$$

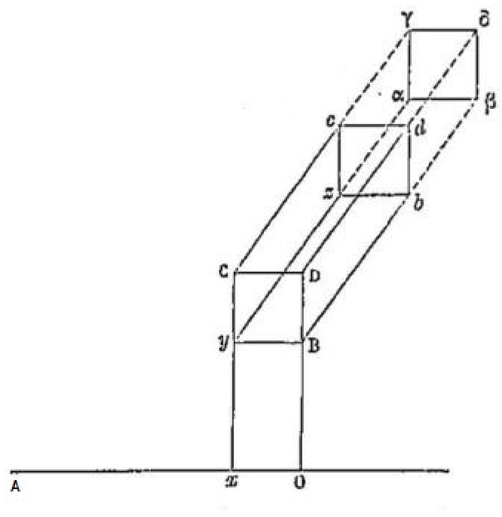
raccogliendo rispetto ad α, β, γ si ha:

$$
\begin{aligned}
= \Pi + \frac{1}{k}\{&[E(QV-RT)+F(RS-PV)+G(PT-QS)]\alpha + \\
&+[E(NT-MV)+F(LV-NS)+G(MS-LT)]\beta + \\
&+[E(MR-NQ)+F(NP-LR)+G(LQ-MP)]\gamma\} =
\end{aligned}
$$

$$
= \Pi + \frac{1}{k}(A\alpha + B\beta + C\gamma) = \Pi + \frac{A\alpha + B\beta + C\gamma}{k}.
$$

Consideriamo ora, un parallelepipedo rettangolo infinitamente piccolo $zbcd\alpha\beta\gamma\delta$ (Fig.3) i cui lati siano paralleli alle nostre tre coordinate, e che denotiamo con $zb = \alpha$, $zc = \beta$ e $z\alpha = \gamma$.

Fig. 3.



Il suo volume è dato da $(zb \cdot zc) \cdot z\alpha = \alpha\beta\gamma$ ed essendo la densità in z uguale a $\frac{1}{k}$, la sua massa è $\alpha\beta\gamma \cdot \frac{1}{k} = \frac{\alpha\beta\gamma}{K}$.
Vogliamo trovare le forze alle quali questo parallelepipedo è sottoposto; per farlo, cerchiamo innanziutto l'elasticità in ognuno dei suoi angoli, che si troverà facilmente a partire dalle tre coordonate relative a ciascuno.

Punto	Coordinate			Elasticità
z	x	y	z	Π
b	$x+\alpha$	y	z	$\Pi+\frac{A\alpha}{K}$
c	x	$y+\beta$	z	$\Pi+\frac{B\beta}{K}$
d	$x+\alpha$	$y+\beta$	z	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta}{K}$
α	x	y	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{C\gamma}{K}$
β	$x+\alpha$	y	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+C\gamma}{K}$
γ	x	$y+\beta$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{B\beta+C\gamma}{K}$
δ	$x+\alpha$	$y+\beta$	$z+\gamma$	$\Pi+\frac{A\alpha+B\beta+C\gamma}{K}$

Per trovare la forza, dalla quale il parallellepipedo è spinto verso la direzione Ax, consideriamo le facce opposte $zc\alpha\gamma$ e $bd\beta\delta$. Tutte le pressioni che agiscono sulla faccia $bd\beta\delta$ sorpassano quelle su $zc\alpha\gamma$, della quantità $\frac{A\alpha}{K}$. Quindi essendo l'area di queste facce uguale a $\beta\gamma$, ne risulta una forza lungo la direzione Ax uguale a $-\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}$.
Allo stesso modo, le forze che agiscono sulla faccia $cd\gamma\delta$ sorpassano quelle su $zb\alpha\beta$, della quantità $\frac{B\beta}{K}$; essendo l'area di queste facce uguale ad $\alpha\gamma$, ne risulta una forza lungo la direzione xy uguale a $-\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}$.
Infine le forze che agiscono sulla faccia $\alpha\beta\gamma\delta$ sorpassano quelle su $zbcd$, della quantità $\frac{C\beta}{K}$; essendo l'area di queste facce uguale a $\alpha\beta$, ne risulta una forza lungo la direzione yz uguale a $-\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}$.
Avendo trovato queste forze, introduciamo il tempo t e calcoliamo le accelerazioni lungo le stesse tre direzioni.
La massa del parallelepipedo è $\frac{\alpha\beta\gamma}{K}$. Sia g l'altezza dalla quale un corpo pesante cade in un secondo[7], ed esprimendo il tempo trascorso t in secondi,

[7] La g è la gravità.

i principi della Meccanica ci forniscono le tre accelerazioni seguenti[8]:

- Accelerazione lungo Ax:

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{K}\Big(\frac{ddx}{dt^2}\Big) = 2g\Big(-\frac{A\alpha\beta\gamma}{K}\Big) \implies \Big(\frac{ddx}{dt^2}\Big) = -2gA \tag{6.12}$$

- Accelerazione lungo xy:

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{K}\Big(\frac{ddy}{dt^2}\Big) = 2g\Big(-\frac{B\alpha\beta\gamma}{K}\Big) \implies \Big(\frac{ddy}{dt^2}\Big) = -2gB \tag{6.13}$$

- Accelerazione lungo yz:

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{K}\Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = 2g\Big(-\frac{C\alpha\beta\gamma}{K}\Big) \implies \Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = -2gC. \tag{6.14}$$

Le formule trovate sono generali per tutte le agitazioni possibili; consideriamo il caso in cui queste agitazioni sono infinitamente piccole. Poniamo quindi $x = X + p$, $y = Y + q$ e $z = Z + r$, dove p, q, r sono delle quantità infinitamente piccole; segue $p = x - X$, $q = y - Y$, $r = z - Z \Rightarrow dp = dx - dX$, $dq = dy - dY$, $dr = dz - dZ$. Ora sostituiamo le (6.1), (6.2), (6.3) rispettivamente in dp, dq, dr:

$$dp = LdX + MdY + NdZ - dX,$$

$$dq = PdX + QdY + RdZ - dY,$$

$$dr = SdX + TdY + VdZ - dZ,$$

raccogliendo abbiamo

$$dp = (L-1)dX + MdY + NdZ,$$

$$dq = PdX + (Q-1)dY + RdZ,$$

$$dr = SdX + TdY + (V-1)dZ,$$

[8]Per la notazione utlizzata vedi Introduzione al Problema delle corde vibranti, pagina 48 nota (42).

e pertanto, all'incirca,

$$L = 1, \quad M = 0, \quad N = 0, \tag{6.15}$$

$$P = 0, \quad Q = 1, \quad R = 0, \tag{6.16}$$

$$S = 0, \quad T = 0, \quad V = 1, \tag{6.17}$$

da cui, essendo $K = LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT$, segue

$$K = 1.$$

Per il differenziale di Π abbiamo

$$E = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dX}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dX}\Big) + \Big(\frac{dV}{dX}\Big)\Big), \tag{6.18}$$

$$F = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dY}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dY}\Big) + \Big(\frac{dV}{dY}\Big)\Big), \tag{6.19}$$

$$G = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dZ}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dZ}\Big) + \Big(\frac{dV}{dZ}\Big)\Big). \tag{6.20}$$

Infatti, consideriamo ad esempio E, poi per F e G è analogo: $E = \dfrac{d\Pi}{dX}$, ed essendo $\Pi = \dfrac{h}{LQV - MPV + MRS + NQS + NPT - LRT} = \dfrac{h}{K}$, si ha

$$E = -h\frac{\Big[\Big(\frac{dL}{dX}\Big)QV + \Big(\frac{dQ}{dX}\Big)LV + \Big(\frac{dL}{dX}\Big)LQ - \Big(\frac{dM}{dX}\Big)PV - \Big(\frac{dP}{dX}\Big)MV -}{K^2}$$

$$\frac{-\Big(\frac{dV}{dX}\Big)MP + \Big(\frac{dM}{dX}\Big)RS + \Big(\frac{dR}{dX}\Big)MS + \Big(\frac{dS}{dX}\Big)MR + \ldots + \ldots - \ldots\Big]}{K^2}.$$

Ora poiché valgono le (6.15), (6.16), (6.17) e $K = 1$, nell'espressione di E a numeratore si annullano tutti i termini a parte i primi tre e a denominatore abbiamo $K^2 = 1$.

Quindi

$$E = -h\Big(\Big(\frac{dL}{dX}\Big) + \Big(\frac{dQ}{dX}\Big) + \Big(\frac{dV}{dX}\Big)\Big).$$

In maniera analoga si trovano le espressioni di F e G.
In seguito, sostituendo nelle (6.9), (6.10), (6.11) i valori forniti dalle (6.15), (6.16), (6.17) abbiamo:

$$A = E; \qquad B = F \qquad e \qquad C = G.$$

Infine, per eliminare le altre lettere notiamo che

$$L = 1 + \Big(\frac{dp}{dX}\Big), \quad Q = 1 + \Big(\frac{dq}{dY}\Big), \quad V = 1 + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big),$$

così oltre alle coordinate principali X, Y, Z con il tempo t, restano nel calcolo solo le lettere p, q, r che rappresentano lo spostamento di ogni punto.
Infatti, da quanto appena scritto, segue:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{dL}{dX}\Big) &= \Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big), & \Big(\frac{dQ}{dX}\Big) &= \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big), & \Big(\frac{dV}{dX}\Big) &= \Big(\frac{ddr}{dXdZ}\Big),\\
\Big(\frac{dL}{dY}\Big) &= \Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big), & \Big(\frac{dQ}{dY}\Big) &= \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big), & \Big(\frac{dV}{dY}\Big) &= \Big(\frac{ddr}{dYdZ}\Big),\\
\Big(\frac{dL}{dZ}\Big) &= \Big(\frac{ddp}{dXdZ}\Big), & \Big(\frac{dQ}{dZ}\Big) &= \Big(\frac{ddq}{dYdZ}\Big), & \Big(\frac{dV}{dZ}\Big) &= \Big(\frac{ddr}{dZ^2}\Big).
\end{aligned}$$

Ora, sostituendo i valori trovati nelle (6.18), (6.19), (6.20), abbiamo:

$$E = -h\Big(\Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dXdZ}\Big)\Big), \tag{6.21}$$

$$F = -h\Big(\Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dYdZ}\Big)\Big), \tag{6.22}$$

$$G = -h\Big(\Big(\frac{ddp}{dXdZ}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dYdZ}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dZ^2}\Big)\Big). \tag{6.23}$$

Poiché $A = E$, $B = F$ e $C = G$, considerando le (6.12), (6.13), (6.14) e sostituendo i valori ottenuti, abbiamo che il movimento dell'aria causato da una qualunque agitazione, ma molto piccola (quindi al posto di x abbiamo p, al posto di y abbiamo q e al posto di z abbiamo r), è determinato dalle tre equazioni seguenti:

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) &= -2g\Big[-h\Big(\Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dXdZ}\Big)\Big)\Big] =\\
&= 2gh\Big(\Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dXdZ}\Big)\Big);
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dXdZ}\Big), \tag{6.24}$$

$$\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = -2g\Big[-h\Big(\Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dYdZ}\Big)\Big)\Big] = \\ = 2gh\Big(\Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dYdZ}\Big)\Big);$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dXdY}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dYdZ}\Big) \tag{6.25}$$

e

$$\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = -2g\Big[-h\Big(\Big(\frac{ddp}{dXdZ}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dYdZ}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dZ^2}\Big)\Big)\Big] = \\ = 2gh\Big(\Big(\frac{ddp}{dXdZ}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dYdZ}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dZ^2}\Big)\Big);$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddr}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddp}{dXdZ}\Big) + \Big(\frac{ddq}{dYdZ}\Big) + \Big(\frac{ddr}{dZ^2}\Big). \tag{6.26}$$

Queste tre equazioni esprimono la propagazione del suono nell'aria nel caso delle tre dimensioni (equazione tridimensionale delle onde): una particella d'aria che nello stato di equlibrio si trova in un punto determinato dalle coordinate X, Y, Z, si troverà dopo un'agitazione infinitamente piccola e dopo un tempo t, in un altro punto determinato dalle coordinate $X + p$, $Y + q$, $Z+r$, dove p, q, r sono quantità infinitamente piccole, e funzioni delle variabili X, Y, Z e del tempo t, la cui natura è espressa appunto dalle tre equazioni (6.24), (6.25), (6.26).
Ora, se per semplificare i calcoli, poniamo

$$\Big(\frac{dp}{dX}\Big) + \Big(\frac{dq}{dY}\Big) + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big) = u,$$

abbiamo

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = \frac{d}{dX}\Big[\Big(\frac{dp}{dX}\Big) + \Big(\frac{dq}{dY}\Big) + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big)\Big] = \Big(\frac{du}{dX}\Big)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{du}{dX}\Big), \tag{6.27}$$

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = \frac{d}{dY}\Big[\Big(\frac{dp}{dX}\Big) + \Big(\frac{dq}{dY}\Big) + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big)\Big] = \Big(\frac{du}{dY}\Big)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddq}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{du}{dY}\Big), \tag{6.28}$$
$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddr}{dt^2}\Big) = \frac{d}{dZ}\Big[\Big(\frac{dp}{dX}\Big) + \Big(\frac{dq}{dY}\Big) + \Big(\frac{dr}{dZ}\Big)\Big] = \Big(\frac{du}{dZ}\Big)$$
$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddr}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{du}{dZ}\Big), \tag{6.29}$$

dalle quali segue

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddu}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{ddu}{dX^2}\Big) + \Big(\frac{ddu}{dY^2}\Big) + \Big(\frac{ddu}{dZ^2}\Big), \tag{6.30}$$

che esprime la propagazione del suono nell'aria nel caso delle tre dimensioni, e nella quale si ha solo u come variabile non nota.
Si deve quindi determinare la funzione u che dipende dalle coordinate X, Y, Z e dal tempo t.
Possiamo trovare un'infinità di soluzioni particolari, come:

$$p = A\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$q = B\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$r = C\Phi(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

purché sia $\alpha = \sqrt{2gh(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}$, dove β, γ, δ sono delle quantità qualsiasi, e Φ rappresenta una funzione qualsiasi.
Vediamo come si ricava l'espressione di α. Poniamo $v = \Phi(c)$, e notiamo che Eulero utilizza i seguenti simboli per indicare la differenziazione di Φ:

$$\frac{dv}{dz} = \Phi'(c) \quad e \quad \frac{ddv}{dz^2} = \Phi''(c).$$

Consideriamo l'equazione (6.24) e calcoliamo le quantità che vi appaiono facendo riferimento alle ultime espressioni scritte per p, q ed r:

$$\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = A\,\alpha^2\,\Phi''(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$\Big(\frac{ddp}{dX^2}\Big) = A\,\beta^2\,\Phi''(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

$$\left(\frac{ddq}{dXdY}\right) = B\ \beta\gamma\ \Phi''(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$
$$\left(\frac{ddr}{dXdZ}\right) = C\ \beta\delta\ \Phi''(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z),$$

Sostituendo questi valori in (6.24) e dividendo per $\Phi''(\alpha t + \beta X + \gamma Y + \delta Z)$, si ottiene:

$$\frac{A\alpha^2}{2gh} = A\beta^2 + B\beta\gamma + C\beta\delta = \beta(A\beta + B\gamma + C\delta). \tag{6.31}$$

Procedendo in modo analogo per le altre due equazioni (6.25),(6.26), troviamo:

$$\frac{B\alpha^2}{2gh} = A\beta\gamma + B\gamma^2 + C\gamma\delta = \gamma(A\beta + B\gamma + C\delta), \tag{6.32}$$
$$\frac{C\alpha^2}{2gh} = A\beta\delta + B\gamma\delta + C\delta^2 = \delta(A\beta + B\gamma + C\delta). \tag{6.33}$$

Ora, facendo il rapporto di (6.31) con (6.32) e il rapporto di (6.32) con (6.33) si ottiene rispettivamente:

$$\frac{A}{B} = \frac{\beta}{\gamma} \implies A = \beta \text{ e } B = \gamma,$$

$$\frac{B}{C} = \frac{\gamma}{\delta} \implies C = \delta.$$

Sostituendo questi valori in (6.31) si ha:

$$\frac{\beta\alpha^2}{2gh} = \beta(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) \implies \alpha = \sqrt{2gh(\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)}$$

dove, come già detto, β, γ, δ sono delle quantità qualunque. Quindi, qualsiasi valore si prenda, abbiamo sempre una certa vibrazione della quale possiamo determinare la continuazione.

Consideriamo il caso in cui la vibrazione sia inizialmente racchiusa in un piccolo spazio intorno al punto A, da dove si diffonde poi, sotto forma di sfere concentriche, in tutte le direzioni. In questa situazione, quindi, gli spostamenti p, q e r saranno proporzionali alle coordinate X, Y, e Z; poniamo:

$$p = Xs, \quad q = Ys, \quad r = Zs,$$

dove s è una funzione del tempo t e della quantità $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = V$, che rappresenta la distanza dal punto Z al punto A nello stato di equilibrio. Quindi poiché

$$ds = dt\Big(\frac{ds}{dt}\Big) + dV\Big(\frac{ds}{dV}\Big),$$

e

$$dV = \frac{2XdX + 2YdY + 2ZdZ}{2\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \frac{XdX + YdY + ZdZ}{V}$$

abbiamo

$$ds = dt\Big(\frac{ds}{dt}\Big) + \frac{XdX + YdY + ZdZ}{dV}\Big(\frac{ds}{dV}\Big).$$

Inoltre da

$$\Big(\frac{dp}{dX}\Big) = \Big(\frac{d(Xs)}{dX}\Big) = s + X\ \frac{X}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big),$$
$$\Big(\frac{dq}{dY}\Big) = \Big(\frac{d(Ys)}{dY}\Big) = s + Y\ \frac{Y}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big),$$
$$\Big(\frac{dr}{dZ}\Big) = \Big(\frac{d(Zs)}{dZ}\Big) = s + Z\ \frac{Z}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big),$$

segue

$$u = \Big(\frac{dp}{dX}\Big)+\Big(\frac{dq}{dY}\Big)+\Big(\frac{dr}{dZ}\Big) = s+s+s+\frac{X^2+Y^2+Z^2}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big) = 3s+V\Big(\frac{ds}{dV}\Big).$$

Ora, poiché si ha

$$\Big(\frac{ds}{dX}\Big) = \frac{X}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big), \quad \Big(\frac{dV}{dX}\Big) = \frac{X}{V}, \quad \Big(\frac{dds}{dXdV}\Big) = \frac{X}{V}\Big(\frac{dds}{dV^2}\Big), \qquad (6.34)$$

la prima delle nostre tre equazioni, ovvero la (6.27), diventerà

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{dds}{dt^2}\Big) = \frac{4}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big) + \Big(\frac{dds}{dV^2}\Big). \qquad (6.35)$$

Infatti da $p = Xs$, si ha $\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big) = X\Big(\frac{dds}{dt^2}\Big)$ e ugualiando questa espressione trovata per $\Big(\frac{ddp}{dt^2}\Big)$ con quella fornita da (6.27), otteniamo:

$$\frac{X}{2gh}\Big(\frac{dds}{dt^2}\Big) = \Big(\frac{du}{dX}\Big)$$

dove

$$\Big(\frac{du}{dX}\Big) = \frac{d}{dX}\Big(3s + V\Big(\frac{ds}{dV}\Big)\Big) = 3\Big(\frac{ds}{dX}\Big) + \Big(\frac{dV}{dX}\Big)\Big(\frac{ds}{dV}\Big) + V\Big(\frac{dds}{dXdV}\Big),$$

quindi abbiamo

$$\frac{X}{2gh}\Big(\frac{dds}{dt^2}\Big) = 3\Big(\frac{ds}{dX}\Big) + \Big(\frac{dV}{dX}\Big)\Big(\frac{ds}{dV}\Big) + V\Big(\frac{dds}{dXdV}\Big).$$

Ora, sostituendo in quest'ultima equazione i valori trovati in (6.34), si ha:

$$\frac{X}{2gh}\Big(\frac{dds}{dt^2}\Big) = 3\frac{X}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big) + \frac{X}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big) + V\ \frac{X}{V}\Big(\frac{dds}{dV^2}\Big) =$$

$$= 4\frac{X}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big) + X\Big(\frac{dds}{dV^2}\Big),$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\Big(\frac{dds}{dt^2}\Big) = \frac{4}{V}\Big(\frac{ds}{dV}\Big) + \Big(\frac{dds}{dV^2}\Big)$$

che è l'equazione cercata e alla quale si riducono anche le altre due (6.28), (6.29).

L'allontanamento del punto z dal centro A, espresso in relazione allo stato di equilibrio, è dato da:

$$Vs = s\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \sqrt{s^2X^2+s^2Y^2+s^2Z^2} = \sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

in modo che il raggio di uno strato sferico, che nello stato di equilibrio è uguale a V, sarà ora uguale a $V + Vs$.

Se poniamo questo intervallo $Vs = u$, quindi $s = \dfrac{u}{V}$, abbiamo:

$$\Big(\frac{dds}{ddt^2}\Big) = \frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dV^2}\Big), \quad \Big(\frac{ds}{dV}\Big) = -\frac{u}{V^2} + \frac{1}{V}\Big(\frac{du}{dV}\Big),$$

$$\Big(\frac{dds}{dV^2}\Big) = \frac{2u}{V^3} - \frac{2u}{V^2}\Big(\frac{du}{dV}\Big) + \frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dV^2}\Big).$$

Sostituendo i valori appena trovati nell'equazione (6.35) si ha:

$$\frac{1}{2gh}\frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dt^2}\Big) = \frac{4}{V}\Big(-\frac{u}{V^2} + \frac{1}{V}\Big(\frac{du}{dV}\Big)\Big) + \frac{2u}{V^3} - \frac{2u}{V^2}\Big(\frac{du}{dV}\Big) + \frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dV^2}\Big) =$$

$$= -\frac{4u}{V^3} + \frac{4}{V^2}\Big(\frac{du}{dV}\Big) + \frac{2u}{V^3} - \frac{2u}{V^2}\Big(\frac{du}{dV}\Big) + \frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dV^2}\Big) = -\frac{2u}{V^3} + \frac{2u}{V^2}\Big(\frac{du}{dV}\Big) + \frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dV^2}\Big),$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2gh}\frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dt^2}\Big) = -\frac{2u}{V^3} + \frac{2u}{V^2}\Big(\frac{du}{dV}\Big) + \frac{1}{V}\Big(\frac{ddu}{dV^2}\Big).$$

Da cui otteniamo la seguente equazione per l'intervallo di spostamento u:

$$\frac{1}{2gh}\Big(\frac{ddu}{dt^2}\Big) = -\frac{2u}{V^2} + \frac{2}{V}\Big(\frac{du}{dV}\Big) + \Big(\frac{ddu}{dV^2}\Big). \tag{6.36}$$

È dalla risoluzione di questa equazione che dipende la propagazione del suono nell'aria nel caso delle tre dimensioni.
Dopo molte ricerche, Eulero trova che questa equazione ammette una risoluzione generale[9] simile al caso in cui si suppone all'aria una sola dimensione.
Sia $\Phi(z)$ una funzione qualunque di z, e indichiamo il suo differenziale in questo modo:

$$d\Phi(z) = \Phi'(z)dz.$$

Ciò posto, si vede che l'equazione (6.36) è soddisfatta supponendo

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V \pm t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V \pm t\sqrt{2gh})$$

dalla quale possiamo ricavare, qualsiasi sia la funzione Φ e qualsiasi sia il tempo t, la quantità u che esprime l'intervallo di spostamento di uno strato sferico di raggio V dopo l'agitazione. Conosciamo anche la velocità con la quale, questo strato sferico, si allontana dal centro A in cui avviene la vibrazione iniziale. Infatti indicando con $d\Phi(z)' = \Phi''(z)$ il differenziale di $\Phi'(z)$, abbiamo :

$$\Big(\frac{du}{dt}\Big) = \pm\frac{A\sqrt{2gh}}{V^2}\,\Phi'(V \pm t\sqrt{2gh}) \mp \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\,\Phi''(V \pm t\sqrt{2gh}).$$

All'inizio dell'agitazione (ovvero per $t = 0$), abbiamo per u:

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V).$$

Poiché abbiamo supposto che all'inizio l'agitazione è racchiusa in un piccolo spazio intorno ad A, per applicare questa formula alla propagazione del suono, la funzione Φ deve essere tale che le sue tre espressioni $\Phi(z)$, $\Phi'(z)$, $\Phi''(z)$ siano sempre uguali a zero, eccetto il caso in cui la quantità z è estremamente piccola, affinché non soltanto la quantità u, ma anche la velocità

[9]Eulero riporta la risoluzione di questa equazione nella memoria E.307.

$\left(\dfrac{du}{dt}\right)$ svanisca all'inizio, ovunque eccetto il piccolo spazio intorno ad A. Indichiamo con Ψ una funzione discontinua della stessa natura; abbiamo la seguente soluzione generale:

$$u = \frac{A}{V^2}\,\Phi(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A}{V}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) +$$

$$+\frac{B}{V^2}\,\Psi(V - t\sqrt{2gh}) - \frac{B}{V}\,\Psi'(V - t\sqrt{2gh})$$

e, per la velocità

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \frac{A\sqrt{2gh}}{V^2}\,\Phi'(V + t\sqrt{2gh}) - \frac{A\sqrt{2gh}}{V}\,\Phi''(V + t\sqrt{2gh}) -$$

$$-\frac{B\sqrt{2gh}}{V^2}\,\Psi'(V - t\sqrt{2gh}) + \frac{B\sqrt{2gh}}{V}\,\Psi''(V - t\sqrt{2gh}).$$

Eulero osserva che da quanto ottenuto, segue la stessa velocità del suono che Newton ha trovato, ovvero più piccola rispetto all'esperienza, e individua la causa di questa differenza nella supposizione che le vibrazioni siano infinitamente piccole; se le vibrazioni non fossero supposte infinitamente piccole, la loro grandezza determinerebbe una propagazione più rapida e quindi una velocità del suono maggiore.

Inoltre dalle formule trovate notiamo che, quando le distanze V sono molto grandi, i termini divisi per V^2 spariscono a confronto degli altri divisi per V; così sia gli spazi u che le velocità $\left(\dfrac{du}{dt}\right)$ diminuiscono in ragione inversa delle distanze. Da ciò si può dedurre l'attenuazione del suono per grandi distanze[10]; ovvero a mano a mano che le distanze crescono, le onde sonore percorrono spazi sempre più piccoli e anche le loro velocità diventano sempre più piccole cosicchè per grandi distanze il suono si percepisce in modo molto più attenuato.

Osserviamo anche che, Eulero, non essendo riuscito a risolvere l'equazione nel caso delle due dimensioni dell'aria[11], rimane molto stupito di riuscirci nel

[10]Era quindi giusta la previsione di Eulero che, nella lettera del 23 ottobre 1759, scrive: "Almeno è certo che le vibrazioni sarebbero allora tanto più deboli, quanto più si allontanino dalla loro origine." Vedi: Traduzione in lingua italiana, pagina 31.

[11]Vedi: Lettara del 23 ottobre 1759 Eulero a Lagrange, pagina 72 equazione (3.24).

caso appena esposto (caso delle tre dimensioni). Infatti, all'inizio della sua memoria E.307, Eulero scrive: *"Quando ho considerato solo due dimensioni, ho applicato le formule trovate al caso in cui l'agitazione iniziale venga esercitata in un punto, dal quale le vibrazioni si diffondono in seguito attraverso cerchi concentrici*[12] *[...] Ma la formula che ho trovato è soggetta a difficoltà così grandi, che non sono riuscito a superarale; e avendo applicato la stessa procedura nell'ipotesi delle tre dimensioni, potevo ancora meno sperare che mi sarebbe stato possibile sviluppare la formula che determina le vibrazioni diffuse in tutte le direzioni a partire da un punto fisso, attraverso delle superfici sferiche."*

La lettera che abbiamo analizzato contiene la teoria della propagazione del suono nell'aria nell'ipotesi delle tre dimensioni, e Eulero, rispondendo alla pressante domanda di Lagrange[13], gli propone di inserirla nel secondo Volume delle "Misc. Taurin" e di aggiungervi, nel caso sia necessario, dei commenti o dei chiarimenti. Lagrange, infatti, pubblicherà questa lettera, come memoria, all'inizio del secondo tomo delle "Misc. Taurin.", alla quale farà seguire le sue "Nouvelles recherches" [14].

Eulero conclude la lettera dicendo di essersi occupato, ormai da molto tempo, delle corde di spessore non uniforme, e di avere letto davanti all'Accademia alcune Memorie sul suono delle campane, dei tamburi e dei timpani, fondate sulla stessa teoria delle funzioni discontinue.

[12]Vedi: Lettera del 23 ottobre 1759 Eulero a Lagrange, pagina 70.

[13]Vedi: Traduzione in lingua italiana, lettera del 24 novembre 1759, pagina 80.

[14]Vedi: Traduzione in lingua italiana, lettera del 24 novembre 1759, nota (7) pagina 80.

Capitolo 7

Lettera di Lagrange a Eulero, Torino, 1 Marzo 1760

7.1 Lettera in lingua originale

LAGRANGE À EULER

Turin, 1$^{\text{er}}$ mars 1760.

Monsieur,
Notre Société a reçu la pièce que vous m'avez fait l'honneur de m'adresser dans votre dernière lettre du 1$^{\text{er}}$ janvier, avec tous les sentiments d'estime et de reconnaissance dus au mérite de votre illustre personne. Elle est extrêmement flattée de pouvoir orner ses nouveaux Mélanges d'un nom tel que le votre, ce qui ne peut pas manquer de lui attirer dans le public une considération à laquelle elle n'aurait jamais osé prétendre. Quelques occupations indispensables m'ont empêché de vous répondre plus tôt pour m'acquitter de ce devoir que toute la Société m'a d'abord imposé de vous remercier en son nom, et de vous témoigner combien elle a été sensible à une telle marque d'honneur qu'il vous a plu de lui donner; je vous prie d'en recevoir mes très humbles excuses. J'ai lu vos recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique avec la même admiration avec laquelle j'ai toujours étudié tous vos Ouvrages. J'ai été charmé surtout de voir l'analyse

du problème de la propagation des ébranlements finis, sur lequel je m'étais déjà exercé en vain; je doute cependant qu'on puisse jamais, au moins par les méthodes connues, parvenir à la construction de telles équations, dans lesquelles les fonctions inconnues se trouvent engagées entre elles dans des puissances quelconques, comme il en est de celles que vous avez découvertes pour les ébranlements finis. Il y a longtemps que celle espèce d'équations m'est connue, y ayant été conduit par la recherches des plus grands et plus petits dans les surfaces courbes, selon ma méthode analytique, que j'ai eu autrefois l'honneur de vous communiquer. Par exemple, si l'on cherche la figure d'un corps qui, sous la même surface, ait la plus grande solidité, je trouve, en appelant x, y, z ses coordonnées rectangles, de sorte que $z =$ fonctions x, y et $dz = pdx + qdy$, l'équation générale

$$\frac{d\,\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} + \frac{d\,\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} + \frac{1}{a} = 0,$$

a étant une constante arbitrarie quelconque, je vois que je puis satisfaire è cette équation en supposant $z^2 = 4a^2 - x^2 - y^2$, ce qui donne une sphère de rayon $= 2a$; mais ce n'est là qu'une solution tout à fait particulière. A l'égard de la gńérale, je désespère de pouvoir jamais la trouver. Il en est de même de tous les autres problèmes *de maximis et minimis*, que personne que je sache n'a jamais encore traités sous ce nouveau point de vue. J'ai été extrêmement satisfait de trouver dans votre Mémoire la construction de l'équation pour les ébranlements sphériques infiniment petits, tout à fait conforme à celle que ma méthode m'a donnée et que j'espère que vous aurez pu voir dans la lettre que je vous ai, pour cela, envoyée le 27 décembre de l'année passée. Il n'y a de différence entre vos résultats et les miens, qu'en ce qui regarde l'affaiblissement des ébranlements, dont vous faites diminuer la force en raison inverse des distances, lorsqu'elles sont assez grandes, au lieu que cette raison se trouve, selon mes calculs, toujours l'inverse des carrés des distances; mais c'est une méprise que j'ai reconnue ensuite, et dans laquelle je n'ai été entraîné qu'en considérant l'équation intégrale

$$z = \frac{\int Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\, dZ}{Z^2},$$

qui m'était d'abord résultée, sans y donner l'attention nécessaire. M. Daniel Bernoulli m'a écrit, il n'y a pas longtemps, que des recherches qu'il avait faites autrefois sur les vibrations de l'air dans des tuyaux coniques lui avaient appris que la force des ébranlements diminuait aussi dans la raison inverse des distances simples depuis le sommet du cône, ce qui devait être ainsi pour tout ébranlement répandu à la ronde autour d'un centre. ll faudrait que la même loi fût encore observée dans la lumière, supposé que sa propagation se fasse, comme il est très vraisemblable, par les ébranlements d'un milieu élastique, ce qui ne s'accorde pas avec l'opinion reçue des physiciens, qui établissent sa diminution dans la raison inverse doublée des distances: c'est pourquoi ce géomètre souhaiterait qu'on fit sur ce projet des expériences exactes qui pussent nous mettre en état de décider un point si important.
Dans ma dernière lettre mentionnée, je n'ai donné que les formules générales pour résoudre l'équation

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dZ^2} + \frac{m\, d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ}\right)$$

qui contient les lois des ébranlements de l'air dans un tuyau conoïdal, dont les sections sont proportionnelles à Z^m, formules qui ne deviennent exactes et finies, que lorsque $\pm(m+1)-1$ est un nombre pair positif. Or, j'ai trouvé depuis moyen de les étendre encore à cette autre équation

$$Z^n\,\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dZ^2} + \frac{m\, d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ}\right)$$

qui est beacoup plus générale et qui appartient aussi au même problème; mais, en supposant l'air hétérogène et de différente gravité spécifique, j'ai trouvé que, pour que la valeur de z soit ici exprimée par une formule finie, il faut que $\pm\dfrac{2m+2}{n+2} - 1$ suit un nombre pair positif. Si on suppose $m = 0$, on a la solution du problème des vibrations des cordes inégalement épaisses, qui ne peut être exacte, par mes calculs, à moins que $\pm\dfrac{2}{n+2}-1$ soit un nombre pair positif, de sorte que, posant pour μ un nombre quelconque entier positif, il faudra que $n=\pm\dfrac{2}{2\mu+1}-2$. Par exemple, si $\mu=0$ et qu'on prenne le signe négatif, on aura

$$n=-4 \quad et \quad z=Z\varphi(Z^{-1}\pm t\sqrt{c});$$

si $\mu=1$, prenant le signe positif, on aura $n=-\dfrac{4}{3}$ et la valeur de z sera

$$\varphi\left(Z^{\frac{1}{3}}\pm\frac{t\sqrt{c}}{3}\right)-Z^{\frac{1}{3}}\,\varphi'\left(Z^{\frac{1}{3}}\pm\frac{t\sqrt{c}}{3}\right);$$

en général, ces formules auront toujours autant de termes qu'il y a d'unités dans $\mu+1$; mais ce qu'il y a de remarquable, c'est qu'excepté la première, et celle où $n=0$, qui ne sont composées que d'un seul terme, toutes les autres donnent des courbes génératrices avec des branches dissemblables à l'infini; d'où il suit que les cordes ne peuvent jamais plus reprendre leur figure primitive, si cela n'arrive par hasard, et rendre par conséquent un ton fixe et invariable; c'est ce que l'expérience parait confirmer dans toutes les cordes d'inégale épaisseur, et que les musiciens nomment pour cela fausses. Comme il serait de la dernière importance de décider si la grandeur des ébranlements peut rendre leur propagation plus prompte, j'ai cherché des moyens pour résoudre ce problème au moins par approximation, en supposant d'abord les ébranlements infiniment petits et puis en introduisant dans les termes qu'on a négligés les valeurs trouvées, et résolvant de nouveau l'équation, comme on le pratique ordinairement dans toutes les approximation. J'ai vu que le tout dépendait de la résolution des équations

$$\frac{d^2z}{dt^2}=c\,\frac{d^2z}{dZ^2}+F; \quad et \quad \frac{d^2z}{dt^2}=c\left(\frac{d^2z}{dZ^2}+2\,\frac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ}\right)+F$$

F étant une fonction quelconque donnée de Z et t; or j'ai trouvé pour cela, selon ma méthode, les formules suivantes: soit fait $Z+t\sqrt{c}=p$; $Z-t\sqrt{c}=q$

et, substituant dans $\int F\,dZ$ au lieu de Z d'abord $p - t\sqrt{c}$, ensuite $q + t\sqrt{c}$, qu'elle devienne $\psi(p,t)$ et $\psi(q,t)$; on aura, pour la première équation,

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) + \int \frac{[\psi(p,t) - \psi(q,t)]\,dt}{2\sqrt{c}}$$

et, pour la seconde,

$$\varphi + \frac{d\,Zz}{dZ} = \varphi(p) + \varphi(q) +$$

$$+ \int \frac{\left[\psi(p,t) - \psi(q,t) + (p - t\sqrt{c})\,\dfrac{d\psi(p,t)}{dp} - (q + t\sqrt{c})\,\dfrac{d\psi(q,t)}{dq}\right] dt}{2\sqrt{c}}\,.$$

Or, en considérant le cas d'une ligne physique d'air, on trouve aisément l'équation

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} - c\,d\,\frac{d\Big(\dfrac{d^2z}{dZ^2} - \dfrac{d^3z}{dZ^3} + \dots\Big)}{dZ}\,;$$

on aura donc, pour la première approximation qui provient du terme $\dfrac{d^2z}{dZ^2}$,

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) - \frac{t\sqrt{c}}{2}\sqrt{(\varphi'(p))^2 - (\varphi'(q))^2 - \frac{1}{2}[\varphi'(p) - \varphi'(q)]^2}\,,$$

sauf erreur de calcul; on trouvera aussi, par les appioximations suivantes, des termes de trois, de quatre, … dimensions de φ. Or, afin que la vitesse de la propagation augmente, il faudrait que ce fût le coefficient de t dans $\varphi(p)$ et $\varphi(q)$ qui augmente, ce qui devrait donner des termes à ajouter à φ de cette sorte $\alpha t\varphi'$, $\beta t^2\varphi''$, … d'où il me parait raisonnable de pouvoir conclure que les termes trouvés ne sont nullement propres à faire augmenter cette vitesse. On trouvera aussi des résultats semblables en calculant la propagation par la seconde formule; mais je me défendrai néanmoins de rien décider sur ce point avant d'en avoir votre jugement, que je suis très empressé à vous demander. Au reste, lorsque le temps t aura une valeur assez grande, les termes qui ne sont pas multipliés par t s'évanouiront auprès de ceux de leurs semblables qui le sont; on trouvera dans ce cas la formule

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) - \frac{\sqrt{c}\,t}{2}\sqrt{(\varphi'(p))^2 - (\varphi'(q))^2} -$$

$$-c\,\frac{\sqrt{c}\,t^2}{2\cdot 4\cdot 3}\sqrt{\left[\frac{d\varphi'(p)}{dp}\right]^2-\left[\frac{d\varphi'(p)}{dp}\right]^2}-c^3\,\frac{\sqrt{c}t^2}{2\cdot 4\cdot 16\cdot 9\cdot 3}\cdot\ldots$$

A l'égard de la formule pour la propagation sphérique, elle est si compliquée que n'est pas la peine de la transcrire ici.

J'ai l'honneur d'être, avec une parfaite considération et un entier dévouement,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
Louis de la Grange.

7.2 Traduzione in lingua italiana

LAGRANGE A EULERO

Torino, 1 marzo 1760.

Signore,

la nostra Società ha ricevuto il pezzo[1] che voi avete fatto l'onore di inviarmi nella vostra ultima lettera dell'1 gennaio, con tutti i sentimenti di stima e di riconoscenza dovuti al merito della vostra illustre persona. La Società è estremamente lusingata di potere arricchire le sue nuove *Mélanges*[2] con un nome come il vostro, ciò che farà nascere nel pubblico una considerazione che non avrebbe mai osato pretendere. Alcune importanti occupazioni mi hanno impedito di rispondervi prima per assolvere questo dovere che tutta la Società mi ha da subito imposto, ovvero di ringraziarvi a suo nome e di testimoniarvi quanto essa è stata sensibile a un tale segno d'onore che voi le avete dato; io vi prego di ricevere le mie umilissime scuse. Ho letto le vostre ricerche sulla propagazione delle vibrazioni in un mezzo elastico con la stessa ammirazione con cui ho sempre studiato tutte le vostre Opere. Sono stato

[1]Lagrange si riferisce alla memoria di Eulero contenuta nella precedente lettera dell'1 gennaio 1760.

[2]"Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale de Taurin" è il nuovo titolo con il quale viene pubblicato il secondo Volume delle "Misc Taurin". Vedi nota (46) pagina 53.

affascinato soprattutto di vedere l'analisi del problema della propagazione delle vibrazioni finte, sul quale io mi ero già esercitato invano; dubito tuttavia che si possa mai, almeno con i metodi conosciuti, giungere alla costruzione di tali equazioni, nelle quali le funzioni sconosciute si trovano legate tra loro con potenze qualsiasi, come avviene in quelle che voi avete scoperto per le vibrazioni finite. È da molto tempo che questa specie di equazione mi è nota, essendovi stato condotto dalla ricerca dei massimi e dei minimi nelle superfici curve secondo il mio metodo analitico, che un tempo ho avuto l'onore di comunicarvi[3]. Per esempio, se si cerca la figura di un corpo che, sotto la stessa superficie, abbia il più grande volume, io trovo, chiamando x, y, z le sue coordinate, in modo che z sia una funzione di x, y e $dz = pdx + qdy$, l'equazione generale

$$\frac{d\,\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} + \frac{d\,\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} + \frac{1}{a} = 0,$$

essendo a una costante arbitraria qualunque, vedo che posso soddisfare questa equazione supponendo $z^2 = 4a^2 - x^2 - y^2$, ciò che dà una sfera di raggio $2a$; ma questa è solo una soluzione del tutto particolare. Riguardo alla generale io mi scoraggio di poterla mai trovare. Ed è lo stesso per tutti gli altri problemi *de maximis et minimis*, che nessuno che io sappia ha mai trattato sotto questo nuovo punto di vista. Sono stato estremamente soddisfatto di trovare nella vostra Memoria la costruzione dell'equazione per le vibrazioni sferiche infinitamente piccole, del tutto conforme a quella che il mio metodo mi ha fornito e che spero voi abbiate potuto vedere nella lettera che vi ho, per questo, inviato il 27 dicembre dell'anno scorso[4]. Non ci sono differenze tra i vostri risultati e i miei, a parte ciò che riguarda l'indebolimento delle vibrazioni, delle quali voi fate diminuire la forza in ragione inversa delle distanze, quando esse sono abbastanza grandi, mentre questa ragione si trova, secondo i miei calcoli, sempre nell'inverso dei quadrati delle distanze; ma è

[3]Lagrange si riferisce alla lettera del 5 ottobre 1756 che appartiene alla prima parte della corrispondenza fra Eulero e Lagrange e che non è presente in questo elaborato.

[4]Si tratta della lettera del 26 dicembre 1759 e non del 27.

una svista che ho riconosciuto in seguito, e alla quale sono stato indotto considerando l'equazione integrale

$$z = \frac{\int Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\, dZ}{Z^2},$$

che mi era dapprima risultata, senza apporvi l'attenzione necessaria.

Il Signor Daniel Bernoulli mi ha scritto, non molto tempo fà, che da alcune ricerche che aveva fatto un tempo sulle vibrazioni dell'aria nei tubi conici, aveva capito che la forza delle vibrazioni diminuiva anche nella ragione inversa delle distanze semplici dalla sommità del cono, e che doveva essere così per ogni vibrazione diffusa in modo circolare attorno ad un centro. Bisognerebbe che la stessa legge fosse ancora osservata nella luce, supposto che la sua propagazione avvenga, come è verosimile, attraverso le vibrazioni di un mezzo elastico, ciò che non si accorda con l'opinione corrente dei fisici, che stabiliscono la sua diminuzione nella ragione inversa dei quadrati delle distanze: ecco perché questo geometra auspica che si facciano su questa questione delle esperienze esatte che ci rendano capaci di decidere su un punto così importante.

Nell'ultima mia lettera menzionata, ho solo dato le formule generali per risolvere l'equazione

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dZ^2} + \frac{m\, d\,\frac{z}{Z}}{dZ}\right),$$

che contiene le leggi delle vibrazioni dell'aria in un tubo conoidale, del quale le sezioni sono proporzionali a Z^m, formule che diventano esatte e finite, solo quando $\pm(m+1) - 1$ è un numero pari positivo. Ora ho trovato il modo di estenderla ancora a quest'altra equazione

$$Z^n \frac{d^2 z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2 z}{dZ^2} + \frac{m\, d\,\frac{z}{Z}}{dZ}\right)$$

che è molto più generale e che appartiene allo stesso problema; ma supponendo l'aria eterogenea e di differente gravità specifica, ho trovato che, affinché il valore di z sia quì espresso da una formula finita, bisogna che $\pm\dfrac{2m+2}{n+2} - 1$

sia un numero pari positivo. Se si suppone $m = 0$, si ha la soluzione del problema delle vibrazioni delle corde di spessore non uniforme, che non può essere esatta, secondo i miei calcoli, a meno che $\pm\dfrac{2}{n+2} - 1$ sia un numero pari positivo, in modo che, indicando con μ un numero qualunque intero positivo, bisognerà che $n = \pm\dfrac{2}{2\mu+1} - 2$. Per esempio, se $\mu = 0$ e se si prende il segno negativo, si avrà

$$n = -4 \quad e \quad z = Z\varphi(Z^{-1} \pm t\sqrt{c});$$

se $\mu = 1$, prendendo il segno positivo, si avrà $n = -\dfrac{4}{3}$ e il valore di z sarà

$$\varphi\left(Z^{\frac{1}{3}} \pm \frac{t\sqrt{c}}{3}\right) - Z^{\frac{1}{3}}\,\varphi'\left(Z^{\frac{1}{3}} \pm \frac{t\sqrt{c}}{3}\right);$$

in generale, queste formule avranno sempre tanti termini quante sono le unità in $\mu + 1$; ma ciò che è degno di nota, è che eccetto la prima, e quella in cui $n = 0$, che sono composte solo da un termine, tutte le altre danno delle curve generatrici con rami differenti all'infinito; da cui consegue che le corde non possono mai più riprendere la loro figura primitiva, a meno che ciò non succeda per caso, e non possono rendere di conseguenza un tono fisso e invariabile; e ciò che l'esperienza sembra confermare in tutte le corde di spessore non uniforme, e che i musicisti chiamano perciò stonate. Siccome sarebbe di estrema importanza stabilire se la grandezza delle vibrazioni possa rendere la loro propagazione più veloce, ho cercato dei mezzi per risolvere questo problema almeno per approssimazione, supponendo dapprima le vibrazioni infinitamente piccole e poi introducendo nei termini che sono stati tralasciati i valori trovati, e risolvendo di nuovo l'equazione, come si pratica ordinariamente in tutte le approssimazioni. Ho visto che tutto dipendeva dalla risoluzione delle equazioni

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + F; \quad e \quad \frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dZ^2} + 2\,\frac{d\,\frac{z}{Z}}{dZ}\right) + F$$

essendo F una qualunque funzione data di Z e t; ora ho trovato per questa, secondo il mio metodo, le formule seguenti: sia $Z + t\sqrt{c} = p$; $Z - t\sqrt{c} = q$ e sostituendo in $\int F\,dZ$ al posto di Z prima $p - t\sqrt{c}$, poi $q + t\sqrt{c}$, che quella diventi $\psi(p,t)$ e $\psi(q,t)$; si avrà per la prima equazione

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) + \int \frac{[\psi(p,t) - \psi(q,t)]\,dt}{2\sqrt{c}}$$

e per la seconda,

$$\varphi + \frac{d\,Zz}{dZ} = \varphi(p) + \varphi(q) +$$

$$+ \int \frac{\left[\psi(p,t) - \psi(q,t) + (p - t\sqrt{c})\,\dfrac{d\psi(p,t)}{dp} - (q + t\sqrt{c})\,\dfrac{d\psi(q,t)}{dq}\right] dt}{2\sqrt{c}}\,.$$

Ora, considerando il caso di una linea fisica d'aria, si trova facilmente l'equazione

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} - c\,d\,\frac{d\left(\dfrac{d^2z}{dZ^2} - \dfrac{d^3z}{dZ^3} + \dots\right)}{dZ}\,;$$

si avrà dunque, per la prima approssimazione che proviene dal termine $\dfrac{d^2z}{dZ^2}$

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) - \frac{t\sqrt{c}}{2}\sqrt{(\varphi'(p))^2 - (\varphi'(q))^2 - \frac{1}{2}[\varphi'(p) - \varphi'(q)]^2}\,,$$

salvo errori di calcolo; si troveranno anche, attraverso le approssimazioni successive, dei termini di tre, quattro, … dimensioni di φ. Ora, affinché la velocità della propagazione aumenti bisognerebbe che fosse il coefficiente di t in $\varphi(p)$ e $\varphi(q)$ ad aumentare, ciò che dovrebbe dare dei termini da aggiungere a φ di questo tipo $\alpha t\varphi'$, $\beta t^2\varphi''$, …, da cui mi sembra di poter ragionevolmente concludere che i termini trovati non sono in nessun modo appropriati per fare aumentare questa velocità. Si troveranno anche dei risultati simili calcolando la propagazione con la seconda formula; ma io mi guarderò bene dal decidere alcunché su questo punto prima di avere il vostro parere, che mi affretto a domandarvi. Per il resto, quando il tempo t avrà un valore abbastanza grande, i termini che non sono moltiplicati da t svaniranno a confronto di quelli che lo sono; si troverà in questo caso la formula

$$z = \varphi(p) + \varphi(q) - \frac{\sqrt{c}\,t}{2}\sqrt{(\varphi'(p))^2 - (\varphi'(q))^2} -$$

$$-c\,\frac{\sqrt{c}\,t^2}{2\cdot 4\cdot 3}\sqrt{\left[\frac{d\varphi'(p)}{dp}\right]^2-\left[\frac{d\varphi'(p)}{dp}\right]^2}-c^3\,\frac{\sqrt{c}t^2}{2\cdot 4\cdot 16\cdot 9\cdot 3}\cdot\ldots$$

A proposito della formula per la propagazione sferica, essa è così complicata che non vale la pena trascriverla quì.
Ho l'onore di essere, con una totale considerazione e una totale devozione,

il Vostro umilissimo ed obbedientissimo servitore,
Louis de la Grange.

7.3 Commento della Lettera

In questa lettera dell'1 marzo 1760, Lagrange conferma la ricezione della lettera di Eulero dell'1 gennaio 1760 e della Memoria ivi contenuta. Si scusa per non avere risposto prima e lo ringrazia vivamente per questo prezioso contributo che andrà ad arricchire il secondo Volume delle "Misc. Taurin"; Volume che apparirà nel 1762 con il nuovo titolo di "Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale de Taurin".
Richiamando il tentativo fatto da Eulero nell'affrontare il problema della propagazione delle onde finite, Lagrange ricorda di avere incontrato difficoltà analoghe nel suo lavoro di integrazione dell'equazione delle superfici minimali. Lagrange si riferisce, quì, alla lettera del 5 ottobre 1756, non presente in questo elaborato, nella quale espone brevemente le sue ricerche sulla teoria delle superfici e affronta il problema delle superfici minimali[5].

[5]Riportiamo alcuni passi significativi della lettera del 5 ottobre 1759: *"Ma per ora, se provo a ottenere attraverso questo metodo le superfici dotate della proprietà di un* massimo *e di un* minimo, *mi trovo di fronte a grandi difficoltà. Per esempio, si deve trovare una superficie tale che fra tutte le superfici isoperimetriche (è così che le chiamo), abbia il volume più grande. Per un solido, la formula è* $\int\int z\,dx\,dy$. *Se si differenzia questa formula per* δ, *il suo valore differenziale sarà uguale a* $\int\int dx\,dy\,\delta z$ *(pongo* dx *e* dy *costanti). Ma per una superificie, la formula è* $\int\int dx\,dy\,\sqrt{1+P^2+Q^2}$ *avendo posto* $dz = Pdx + Qdy$*."* Riportiamo anche la corrispondente parte originale in latino: "*Interim vero si me ad superficies hac methodo* maximi minimique *proprietate praeditas inveniendas converto, maximis me obrutum invenio difficultatibus. Sit e[xempli] g[ratia] proposita invenien-*

Nella lettera dell'1 marzo 1760, Lagrange scrive: "se si cerca la figura di un corpo che, sotto la stessa superficie, abbia il più grande volume, io trovo, chiamando x, y, z le sue coordinate, in modo che z sia una funzione di x, y e $dz = pdx + qdy$, l'equazione generale

$$\frac{d\,\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dx} + \frac{d\,\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}}{dy} + \frac{1}{a} = 0, \tag{7.1}$$

essendo a una costante arbitraria qualunque."
Non riuscendo a trovare la soluzione generale dell'equazione (7.1), Lagrange indica una sola superficie che la soddisfa: la sfera di raggio $2a$ e di equazione $z^2 = 4a^2 - x^2 - y^2$.
Anche Eulero, dietro sollecitazione di Lagrange, prova ad affrontare questo problema senza però riuscire a fare grandi passi in avanti[6]: si accontenta di indicare la superficie sferica e la superficie cilindrica come soluzioni particolari dell'equazione (7.1).
Lagrange torna ora a parlare della Memoria contenuta nella lettera dell'1 gennaio 1760. Nota la coincidenza fra i suoi risultati e quelli di Eulero nello studio delle onde sferiche, ad eccezione di ciò che riguarda l'attenuazione delle vibrazioni del suono nell'aria per grandi distanze. Infatti, in base ai calcoli fatti da Eulero, questa diminuzione avviene in ragione inversa delle distanze[7], mentre per Lagrange in ragione inversa dei quadrati delle distanze[8]. Lagrange riconosce di avere sbagliato e si giustifica dicendo che è stata una svista

da superficies, quae inter omnes (ita dicam) isoperimetras, maximam contineat soliditatem. Formula pro soliditate est $\int\int z\,dx\,dy$ *unde differ[entiatia] per* δ *fiet eius valor different[ialis]=* $\int\int dx\,dy\,\delta z$ *(pono dx et dy const[antia]). Formula vero pro superficie est* $\int\int dx\,dy\,\sqrt{1+P^2+Q^2}$ *posito esse* $dz = Pdx + Qdy$*."*

[6]Eulero tratterà molto rapidamente questa questione nella lettera del 24 giugno 1760 (vedi pagina 175), in quella del 9 novembre 1762 e più tardi nel terzo volume delle "Institutiones calculi integrali". I suoi studi saranno ripresi da Meusnier e Mongue, ma la soluzione dell'equazione "alle derivate parziali" sarà dedotta correttamente solo da A.M.Legendre ("Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles", 1789).

[7]Vedi: Commento della Lettera, lettera dell'1 gennaio 1760, pagina 146.

[8]Vedi: Commento della Lettera, lettera del 26 dicembre 1759, pagina 97.

dovuta ad un'interpretazione inesatta dell'equazione

$$z = \frac{\int Z\varphi(Z \pm t\sqrt{c})\, dZ}{Z^2}$$

soluzione generale dell'equazione

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\,\frac{d^2z}{dZ^2} + 2c\,\frac{d\,\dfrac{z}{Z}}{dZ} \tag{7.2}$$

che descrive la propagazione del suono nell'ipotesi delle tre dimensioni[9].
Lagrange, dopo avere velocemente richiamato la corrispondenza che intrattiene con Daniel Bernoulli[10], osserva che questa legge della diminuzione delle vibrazioni in ragione inversa delle distanze, si dovrebbe osservare anche nella luce (supposto che la sua propagazione avvenga in un mezzo elastico). Questo però non si accorda con l'opinione dei fisici del tempo, che stabiliscono la sua diminuzione nella ragione inversa dei quadrati delle distanze.
La legge che afferma la diminuzione della "forza" della luce in ragione inversa del quadrato delle distanze, annunciata sotto una forma ancora oscura da Keplero nel 1604, era presente in tutti i trattati di ottica del diciottesimo secolo[11]. La verfica sperimentale e la dimostrazione di questa legge, si

[9]Vedi: Commento della Lettera, lettera del 26 dicembre 1759, pagina 98.

[10]Le uniche due lettere della corrispondenza fra Lagrange e D.Bernoulli che ci sono pervenute sono: la lettera del 22 agosto e quella del 15 novembre 1759. La lettera alla quale Lagrange si riferisce è andata persa. Tuttavia, sappiamo che le ricerche di D.Bernoulli sulle vibrazioni dell'aria in un tubo conico risalgono agli anni 1739-1741. In seguito alla pubblicazione nel 1762 delle "Nouvelles Recherches" di Lagrange, D.Bernoulli ritorna su questo problema nelle sue "Recherches physiques, mécaniques et analytiques sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues différement construits".

[11]La formulazione oscura di questa legge si trova nel trattato di Keplero "Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiae pars Optica traditur", Capitolo I, Proposizione IX: *"Proprio come le superfici sferiche, nelle quali la sorgente di luce è il centro, dal più lontano al più vicino: così è la densità o la forza dei raggi nello [spazio] più vicino, verso le più lontane superfici sferiche, cioè, inversamente."* Riportiamo anche la proposzione in lingua originale: *"Sicut se habent spherica superficies, quibus origo lucis pro centro est, amplior ad angustiorem: ita se habet fortitudo seu densitas lucis radiorum in angustiori, ad illamin laxiori spherica superficie, hoc est, connersim."*

trovano, presentate in maniera più dettagliata e precisa, in due importanti opere del 1760: la seconda edizione del "Traité d'optique sur la gradation de la lumière" di P.Bouguer e la "Photometria" di Lambert. È proprio facendo riferimento a Lambert e alla sua opera che Eulero, nella lettera del 24 giugno 1760 risponderà a queste osservazioni di Lagrange[12].
Ora Lagrange, ritorna sulla questione della propagazione delle vibrazioni dell'aria in un tubo conoidale, affrontata nella lettera del 26 dicembre 1759, e fornisce la seguente equazione:

$$Z^n \frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{m\,d\,\frac{z}{Z}}{dZ}\right) \tag{7.3}$$

più generale rispetto a quella precedentemente trovata[13]

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dZ^2} + \frac{m\,d\,\frac{z}{Z}}{dZ}\right).$$

e che esprime le leggi delle vibrazioni dell'aria in un tubo conoidale, del quale le sezioni sono proporzionali a Z^m.
Considera poi il caso delle corde di spessore non uniforme, che corrisponde a supporre $m = 0$ nell'equazione (7.3) e nel considerare la quantità c non più come costante ma come variabile espressa con una funzione di Z. Indichiamo con f tale funzione, allora l'equazione (7.3) diventa:

$$Z^n \frac{d^2z}{dt^2} = f\,\frac{d^2z}{dZ^2}. \tag{7.4}$$

La soluzione di questa equazione, che descrive le vibrazioni delle corde di spessore non uniforme, è espressa da un valore esatto e finito solo quando $\pm\frac{2}{n+2} - 1$ è un numero pari positivo, in modo che indicando con μ un qualsiasi numero intero positivo si ha $n = \pm\frac{2}{2\mu+1} - 2$. Infatti, poichè $\pm\frac{2}{n+2} - 1$ deve essere un numero pari positivo e μ indica un qualsiasi

[12]Vedi: Commento della Lettera, lettera del 24 giugno 1760, pagine 178, 179.
[13]Vedi: Traduzione in lingua italiana, lettera del 26 dicembre 1759, pagina 93.

numero intero positivo, poniamo $\pm\frac{2}{n+2} - 1 = 2\mu$. Ora svolgiamo i calcoli e ricaviamo n:

$$\pm\frac{2}{n+2} - 1 = 2\mu \;\Rightarrow\; \frac{\pm 2 - (n+2)}{n+2} = \frac{2\mu(n+2)}{n+2} \;\Rightarrow\; \pm 2 - (n+2) = 2\mu(n+2)$$

$$\Rightarrow\; \pm 2 = 2\mu(n+2) + (n+2) \;\Rightarrow\; \pm 2 = (2\mu+1)(n+2) \;\Rightarrow\; n+2 = \pm\frac{2}{2\mu+1}$$

$$\Rightarrow\; n = \pm\frac{2}{2\mu+1} - 2\,.$$

In tutti gli altri casi la serie va all'infinito.
Lagrange inoltre, esprime brevemente il concetto di corde "stonate", che affronta in maniera più dettagliata nelle "Nouvelles Recherches", Capitolo IV, "Des vibrations des cordes inégalement épaisses": *"Sia che si trovi per y un valore esatto o no,*[14] *le vibrazioni della corda non saranno mai isocrone, eccetto il solo caso in cui $n = 0$, che è quello di spessore uniforme... La mancanza di isocronismo nelle corde di spessore non uniforme, le rende incapaci di produrre un suono fisso e apprezzabile all'orecchio; così gli artisti*[15] *le rifiutano sempre e le chiamano di solito corde* stonate*, poiché esse non possono mai accordarsi perfettamente con le altre."*
Una delle questioni più delicate che rimane da chiarire, è la divergenza persistente fra le previsioni teoriche e i risultati delle esperienze effettuate per misurare la velocità del suono nell'aria: fin'ora le previsioni teoriche hanno fornito valori inferiori rispetto a quelli ricavati dall'esperienza. Eulero attribuisce questa differenza al fatto che nel calcolo le vibrazioni sono sempre supposte infinitamente piccole; qualora le vibrazioni venissero supposte finite, ciò causerebbe un aumento della velocità e quindi la divergenza fra i valori ottenuti scomparirebbe[16]. Questa spiegazione, fornita da Eulero, è solo una supposizione che non prova attraverso i calcoli. Lagrange, invece, vuole verificare se l'introduzione di queste vibrazioni di ampiezza finita produce un

[14] La y sta per la nostra z; Lagrange si sta riferendo al valore della soluzione dell'equazione (7.4).

[15] Si riferisce ai musicisti.

[16] Vedi: Commento della Lettera, lettera dell'1 gennaio 1760, pagina 146.

aumento della velocità del suono. Per farlo utilizza un metodo di approssimazioni successive ma adopera un'equazione di partenza inesatta.
Lagrange conclude la lettera osservando che, dai calcoli effettuati, non risulta l'aumento della velocità previsto ma, prima di dedurre qualsiasi cosa, chiede ad Eulero il suo giudizio. Eulero, nella lettera di risposta del 24 giugno 1760, non ritorna sui calcoli di Lagrange e si limita solo a constatare: " Tutti gli sforzi che avete fatto per determinare la propagazione delle vibrazioni finite proveranno incontestabilmente che nessuna accelerazione potrebbe risultarne, come io avevo supposto[17]."
Lagrange riprenderà lo studio di questo problema, in maniera più approfondita, nel Capitolo V delle "Nouvelles Recherches", "De la propagation du son en supposant que les ébranlemens des particules de l'air ne sont pas infiniment petits", dove scrive: *"Per quanto naturale possano apparire le ipotesi esaminate nel Capitolo III, esse tuttavia forniscono una velocità del suono minore rispetto a quella vera di circa* 163 *piedi al secondo [...] Questa differenza è senza dubbio troppo grande, per essere attribuita agli errori dell'esperienza che fornisce gli elementi per la nostra teoria, come io ero stato portato a pensare quando avevo dato le mie prime* Recherches sur le son*; ma quale potrebbe allora esserne la causa? Eulero ha creduto di trovarla nella supposizione delle vibrazioni infinitamente piccole, sulla quale abbiamo fino a quì basato i calcoli della propagazione del suono (si veda la sua memoria* Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique[18], *Miscellanea Taurinensia, t. II). Questa congettura è plausibile ma dubito che esaminandola a fondo la si trovi così soddisfacente come poteva sembrare all'inizio."* Dopo avere riaffrontato il problema applicando il suo metodo delle approssimazioni successive, e non trovando nessun aumento della velocità nell'ipotesi delle vibrazioni di ampiezza finita, Lagrange scrive: *"Dopo quanto abbiamo appena dimostrato, credo che si possa considerare una verità costante, che l'ipotesi delle vibrazioni infinitamente piccole sia l'unica ammissibile*

[17]Vedi: Traduzione in lingua italiana, lettera del 24 giugno 1760, pagina 173.
[18]Lagrange si riferisce alla memoria contenuta nella lettera dell'1 gennaio 1760, pubblicata nel secondo Volume delle "Misc Taurin".

nella teoria della propagazione del suono [...] Ritornerò quindi su questa ipotesi, e cercherò di determinare le leggi della propagazione del suono in modo più generale ed esatto, rispetto a quanto ho fatto fino adesso."

Capitolo 8

Lettera di Eulero a Lagrange, Berlino, 24 Giugno 1760

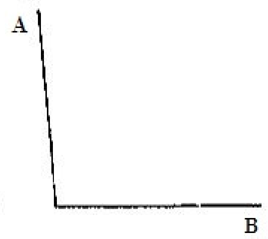
8.1 Lettera in lingua originale

EULER À LAGRANGE

Berlin, 24 juin 1760.

Monsieur,
Je suis bien flatté de l'approbation dont votre illustre Académie, et vous en particulier, avez bien voulu honorer mon essai sur les ébranlements dans un milieu élastique; l'honneur de ces profondes recherches est uniquement dû à votre sagacité, et je n'y ai rien fait que profiter des lumières que votre excellent Mémoire m'a fournies. Vous y avez ouvert une carrière tout à fait nouvelle, où tous les géomètres qui viendront après nous trouveront toujours abbondamment de quoi occuper leur adresse, et, à mesure qu'ils y réussiront, l'Analyse en acquerra des accroissements très considérables. Or la matière même est sans doute la plus importante dans la Physique: non seulement tous les phénomènes de la propagation du son en dépendent, mais je suis assuré que la propagation de la lumière suit les mêmes lois. On n'a qu'a substituer l'éther au lieu de l'air, et les ébranlements qui y sont répandus

nous donneront la propagation de la lumière. Maintenant il serait à souhaiter qu'on pût déterminer les altérations que les ébranlements excités dans un milieu souffrent lorsqu'ils passent dans un autre milieu dont la densité et l'élasticité sont différentes. Je ne sais pas si l'on peut espérer la solution de ce problème, mais je suis convaincu qu'on y découvrirait infailliblement non seulement les véritables lois de la réfraction, mais aussi la plus complète explication de la réflexion dont la réfraction est toujours accompagnée: on verrait qu'il est impossible que les rayons passent d'un milieu dans un autre, sans qu'une partie rebrousse chemin. Peut-être que cette considération pourrait faciliter le développement de l'analyse et fournir au moins quelques solutions particulières; mais on rencontrera ici une nouvelle difficulté. Comme il faut estimer tant la densité que l'élasticité des autres milieux transparents, comme par exemple du verre, la densité, étant si grande par rapport à celle de l'éther sans qu'on puisse supposer plus grande son élasticité que la vitesse des rayons dans le verre deviendrait extrêmement petite; cependant je crois que la réfraction même prouve suffisament que la vitesse des rayons dans le verre à celle dans l'éther doit être dans la raison de 2 à 3. Si les pores du verre sont remplis d'un éther pur par lequel se ferait la propagation, il semble que la matière du verre n'y contribuerait en rien, ce qui est pourtant faux. De là je voudrais bien conclure qu'il faut tenir compte des particules du verre même, mais d'une manière tout à fait différente de celle dont nous concevons la propagation des ébranlements par l'air, où nous supposons les moindres particules parfaitement liquides. Or il doit y avoir une différence très essentielle entre les particules fluides et solides dont le milieu est composé: par les particules fluides, les impressions ne sont transmises que successivament, pendant qu'une particule solide, étant frappé par un bout, transmet le coup quasi dans un instant à l'autre bout; et je crois que c'est la raison pourquoi les rayons de lumière traversent le verre avec une si prodigieuse vitesse, que si la densité était des milliers de fois plus petite qu'elle n'est effectivement. Cette pensée me semble conduire à l'explication de cet étrange phénomène, que la vitesse du son par l'air est plus grande que le calcul nous indique. Tous les efforts que vous avez faits pour déterminer la propagation des ébranlements finis prouvent incontestablement qu'aucune accélération n'en saurait résulter, comme je l'avais soupçonné. Il faut donc que cette accélération actuelle que l'expérience nous découvre dans la propagation du son provienne d'une autre cause. Ne pourrait-on donc dire que l'air n'est pas un milieu parfaitement liquide dans ses moindres particules, mais qu'il renferme des particules solides ou rigides qui, étant frappées d'un côté, communiquent l'impulsion dans un instant à l'autre côté, et que la propagation successive, sur laquelle est fondé le calcul, n'a pas lieu dans ces particules solides? Je crois que cette explication pourrait être vérifiée par quantité d'expériences, où le son est transmis par d'autres corps que l'air. Nous savons que le son pénètre par tous les corps, pourvu qu'ils ne soient pas trop épais. On entend parler à travers des murailles, et l'on ne saurait dire que la cominunication se fasse par les particules d'air renfermées dans les pores de la muraille; la propagation du son se fait plutôt par la substance de la muraille. Et il me semble que tous les corps sont, par rapport au son, la même chose que les corps transparents par rapport à la lumière; et comme tous les corps, si sont assez minces, sont transparents, et que réciproquement les corps transparents, si sont trop épais, perdent la trasparence; il en est de même de tous les corps à l'égard du son, qui tous, s'ils ne sont pas trop épais, transmettent les sons, les uns pourtant plus aisément que les autres. Je souhaiterais qu'on fit plus d'expériences sur cette matière et qu'on examinât surtout si le son, en traversant un autre corps, ne souffre point quelque réfraction. Je vois bien que la chose serait assujettie à de grandes difficultés, puisque nous ne pouvons pas si aisément juger de la direction du son que de la lumière. La question que notre Académie vient de proposer pour l'année 1762 est relative à cette matière. On demande une explication mathématique, comment la représentation du son se fait dans l'organde l'ouïe; semblable ou analogue à celle dont on explique la représentation des objets visibles dans le fond de l'oeil. Il faut bien que les rayons quasi sonores, qui partent d'un point sonore, soient réunis dans un seul point dans la cavité de l'oreille, et qu'ils y représentent une espèce d'image ou un simulacre, sans quoi il serait impossible que nous distinguassions tant de sons différents. Or une telle réunion des rayons sonores, qui sont divergents en entrant dans l'oreille, ne saurait arriver sans une espèce de réfraction; voilà donc à quoi se réduit notre question, c'est de montrer que les rayons sonores sont assujettis à quelque réfraction sous certaines circonstances. Quelques expériences nous pourraient fournir bien de la lumière là-dessus; par exemple, l'angle d'un bastion y pourrait servir. Si quelqu'un en A criait bien fort, un autre en B devrait juger suivant quelle direction



il écouterait le son. Or, ayant bien développé les circostances sous lesquelles la direction du son souffre quelque changement, on ne manquera pas de recontrer de pareilles circostances dans la structure de l'oreille. Puissiez-vous vous résoudre, Monsieur, à travailler sur cette question; je doute fort que tout autre que vous soit capable de travailler là-dessus.

Quoique la diminution des ébranlements transmis à de grandes distances suive la raison des distances, je crois pourtant que la force du son que nous apercevons soit proportionnelle réciproquement au carré des distances. Chaque particule d'air étant ébranlée se meut par un certain espace qui détermine son excursion, et tant cet espace, que la plus grande vitesse même qu'elle y acquiert est réciproquement proportionnel à la distance (si je ne me trompe, car j'oublie aisément telles circonstances, et je n'ai pas le temps de consulter mes calculs); or il me semble que la force dont une telle particule frappe nos organes dépend conjointement de son excursion et de sa vitesse, ce qui produirait la raison inverse des carrés. Vous aurez vu sans doute la *Photométrie* de M. Lambert où il prouve incontestablement que la force des lumières décroit

en raison inverse du carrée des distances; mais il parle de la force et non pas de la vitesse ou de l'excussion de chaque particule; et, partant, je ne trouve aucune contradiction entre ses expériences et nos calculs.
Ce que vous me marquez, Monsieur, sur les ébranlements de l'air dans un tuyau conoïdal, où vous supposez même l'air hétérogène, est extrêmement profond, et quoiqu'il ne puisse servir à nous éclairer sur la réfraction, vous en pourrez connaître, pour les cas où l'équation est résoluble, s'il n'y a point des ébranlements répandus aussi en arrière. Cela prouverait que, dans toutes les réfractions, ou lorsqu'un rayon passe d'un milieu dans un autre, il s'y fait toujours quelque réflexion.
Pour les formules que vous avez trouvées pour la figure d'un corps qui sous la même surface ait la plus grande solidité, où p et q doivent être telles fonctions de x et y, pour que cette formule $pdx+qdy$ devienne intégrable, j'ai remarqué que l'autre condition se réduit à ce que cette formule $\dfrac{pdy-qdx}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\dfrac{ydx}{a}$ doit aussi être intégrable, mais cela n'avance rien.
Au reste, la solution générale doit être telle que, posant $z=0$, l'équation entre x et y donne une figure quelconque et même décrite par hasard, sans avoir quelque continuité.
J'ai l'honneur d'être avec la plus profonde considération, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
L. Euler.

8.2 Traduzione in lingua italiana

EULERO A LAGRANGE

Berlino, 24 giugno 1760.

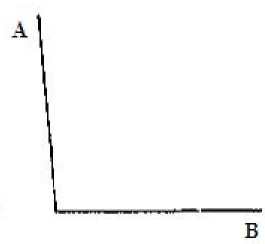
Signore,
io sono molto lusingato dell'approvazione con la quale la vostra Accademia, e voi in particolare, avete cortesemente voluto onorare il mio saggio[1] sulle

[1] Eulero si riferisce alla memoria inviata a Lagrange con la lettera dell'1 gennaio 1760.

vibrazioni in un mezzo elastico; l'onore di queste profonde ricerche è unicamente dovuto alla vostra sagacità e io non ho fatto altro che approfittare delle luci che la vostra eccellente Memoria[2] mi ha fornito. Voi avete aperto una strada del tutto nuova, in cui tutti i geometri che verranno dopo di noi troveranno abbondantemente di che occuparsi, e, man mano che ci riusciranno, l'Analisi ne acquisirà degli avanzamenti molto importanti. Ora la materia stessa è senza dubbio la più importante nella Fisica: non soltanto tutti i fenomeni della propagazione del suono dipendono da essa, ma sono certo che la propagazione della luce segue le stesse leggi. Si deve solo sostituire l'etere al posto dell'aria, e le vibrazioni che là (vi) sono diffuse ci daranno la propagazione della luce. Ora bisognerebbe augurarsi che si possano determinare le alterazioni che le vibrazioni, esercitate in un mezzo, subiscono quando passano in un altro mezzo in cui la densità e l'elasticità sono differenti. Io non so se si può sperare nella soluzione di questo problema, ma sono convinto che si otterrebbe immancabilmente, non soltanto le vere leggi della rifrazione, ma anche la più completa spiegazione della riflessione dalla quale la rifrazione è sempre accompagnata: si vedrebbe che è impossibile che i raggi passino da un mezzo all'altro, senza che una parte ritorni indietro. Forse questa considerazione potrebbe facilitare lo sviluppo dell'analisi e fornire almeno qualche soluzione particolare; ma si incontrerà quì una nuova difficoltà. Poiché bisogna stimare tanto la densità che l'elasticità degli altri mezzi trasparenti, come per esempio il vetro nel quale la densità, essendo talmente grande in rapporto a quella dell'etere, senza che si possa supporre maggiore la sua elasticità, la velocità dei raggi nel vetro diventerebbe estremamente piccola; tuttavia io credo che la rifrazione stessa provi sufficientemente che la velocità dei raggi nel vetro rispetto a quella nell'etere debba essere nel rapporto di 2 a 3. Se i pori del vetro venissero riempiti da un etere puro attraverso il quale avverrebbe la propagazione, sembrerebbe che la materia del vetro non vi contribuisca in nulla, ciò che è tuttavia falso. Da questo vorrei ben concludere

[2]Evidente richiamo alle "Recherches" di Lagrange, sulle quali Eulero aveva già espresso un giudizio molto positivo nella lettera del 23 ottobre 1759.

che bisogna tenere conto delle particelle del vetro stesso, ma in un modo del tutto differente rispetto a quello con cui concepiamo la propagazione delle vibrazioni nell'aria, dove supponiamo le particelle più piccole perfettamente liquide. Ora deve esserci una differenza essenziale tra le particelle liquide e solide dalle quali il mezzo è composto: con le particelle liquide, le vibrazioni sono trasmesse solo successivamente, mentre una particella solida, essendo colpita da un lato trasmette il colpo quasi nello stesso istante all'altro lato; e io credo che questa sia la ragione per cui i raggi di luce attraversano il vetro con una così prodigiosa velocità, come se la densità fosse migliaia di volte più piccola di quanto è effettivamente. Questo pensiero mi sembra condurre alla spiegazione di questo strano fenomeno, che la velocità del suono attraverso l'aria è più grande di quanto il calcolo ci mostra. Tutti gli sforzi che avete fatto per determinare la propagazione delle vibrazioni finite proveranno incontestabilmente che nessuna accelerazione potrebbe risultarne, come io avevo supposto. Bisogna dunque che questa accelerazione che l'esperienza ci rivela nella propagazione del suono, provenga da un'altra causa. Non si potrebbe allora dire che l'aria non è un mezzo perfettamente liquido nelle sue particelle più piccole, ma che contiene delle particelle solide o rigide che, una volta colpite in un lato comunicano l'impulso in un istante all'altro lato, e che la propagazione successiva, sulla quale è fondato il calcolo, non ha luogo in queste particelle solide? Credo che questa spiegazione potrebbe essere verificata da un certo numero di esperienze, in cui il suono è trasmesso attraverso altri corpi diversi dall'aria. Sappiamo che il suono penetra attraverso tutti i corpi, a patto che non siano troppo spessi. Si sente parlare attraverso i muri, e non si potrebbe dire che la comunicazione avvenga attraverso le particelle d'aria racchiuse nei pori del muro; la propagazione del suono avviene piuttosto attraverso la sostanza del muro. E mi sembra che tutti i corpi siano, in rapporto al suono, la stessa cosa dei corpi trasparenti in rapporto alla luce; e poiché tutti i corpi, se sono abbastanza sottili, sono trasparenti, e viceversa i corpi trasparenti, se sono troppo densi, perdono la trasparenza; la stessa cosa accade in tutti i corpi rispetto al suono, ognuno dei quali, se non è troppo denso, trasmette i suoni, anche se alcuni più agevolmente di altri. Mi auspico che si facciano più esperimenti su questa materia e che si esamini soprattutto se il suono, attraversando un altro corpo, non subisca qualche rifrazione. Riconosco che la cosa sarà soggetta a grandi difficoltà, poiché non possiamo così agevolmente indicare la direzione del suono come quella della luce. L'argomento che la nostra Accademia ha appena proposto per l'anno 1762 è relativo a questa materia. Si domanda una spiegazione matematica, su come la rappresentazione del suono avviene nell'organo dell'udito; simile o analoga a quella con cui si spiega la rappresentazione degli oggetti visibili nel fondo dell'occhio. È necessario che i raggi quasi sonori, che partono da un punto sonoro, siano riuniti in un solo punto nella cavità dell'orecchio, e che quì rappresentino una specie di immagine o un simulacro, senza il quale sarebbe impossibile distinguere tanti suoni differenti. Ora un tale incontro di raggi sonori, che sono divergenti entrando nell'orecchio, non potrebbe arrivare senza una specie di rifrazione; ecco dunque a cosa si riduce la nostra domanda, di dimostrare che i raggi sonori sono sottoposti, in alcune circostanze, a qualche rifrazione. Alcuni esperimenti potrebbero fornirci molta luce su questo tema; per esempio l'angolo di un bastione ci potrebbe servire. Se qualcuno in A gridasse molto forte, un altro in B dovrebbe capire



secondo quale direzione egli ascolterebbe il suono. Ora, avendo ben sviluppato le circostanze nelle quali la direzione del suono subisce qualche cambiamento, non si potrà fare a meno di incontrare circostanze simili nella struttura dell'orecchio. Potreste decidervi, Signore, a lavorare su questo problema; temo che nessun altro se non voi sia capace di lavorare su un tale argomento.

Benché la diminuzione delle vibrazioni trasmesse a grandi distanze segua la ragione delle distanze, credo tuttavia che la forza del suono che noi percepiamo sia reciprocamente proporzionale al quadrato delle distanze. Ogni particella d'aria essendo scossa si muove in un certo spazio che determina il suo spostamento, e tanto questo spazio quanto la maggior velocità che essa vi acquisisce, è reciprocamente proporzionale alla distanza (se non mi sbaglio, perché io dimentico facilmente tali circostanze, e non ho il tempo di consultare i miei calcoli); ora mi sembra che la forza con cui una tale particella colpisce i nostri organi dipende congiuntamente dal suo spostamento e dalla sua velocità, ciò che produrrebbe la ragione inversa dei quadrati [delle distanze]. Avrete visto senza dubbio la *Photométrie* di Lambert, dove egli prova incontestabilmente che la forza della luce decresce in ragione inversa del quadrato delle distanze; ma egli parla della forza e non della velocità o dello spostamento di ogni particella; e, pertanto, non trovo nessuna contraddizione tra le sue esperienze e i nostri calcoli.
Ciò che mi fate notare, Signore, sulle vibrazioni dell'aria in un tubo conoidale, dove voi supponete anche l'aria eterogenea, è estremamente profondo, e benché non possa servire a darci chiarimenti sulla rifrazione, voi potreste capire, nel caso in cui l'equazione è risolvibile, se non ci sono affatto vibrazioni diffuse anche indietro. Ciò proverebbe che, in tutte le rifrazioni, o quando un raggio passa da un ambiente ad un altro, si ha sempre qualche riflessione.
Per le formule che avete trovato per la figura di un corpo che sotto la stessa superficie abbia il più grande volume, in cui p e q devono essere certe funzioni di x e y, affinché questa formula $pdx + qdy$ diventi integrabile, ho notato che l'altra condizione si riduce al fatto che questa formula $\frac{pdy - qdx}{\sqrt{1+p^2+q^2}} - \frac{ydx}{a}$ deve ugualmente essere integrabile, ma ciò non ci fà progredire. Per il resto, la soluzione generale deve essere tale che, ponendo $z = 0$, l'equazione in x e y dia una figura qualunque e anche descritta per caso, senza avere alcuna continuità.
Ho l'onore di essere con la più profonda considerazione, Signore,

Vostro umilissimo ed obbedientissimo servitore,
L. Euler.

8.3 Commento della Lettera

Rinunciando a seguire Lagrange nei calcoli riportati nella precedente lettera dell'1 marzo 1760, Eulero, in questa lettera del 24 giugno 1760 insiste sull'importanza del problema della propagazione del suono. Osserva che dallo studio della propagazione del suono si può passare a quello della luce attraverso la sola sostituzione dell'etere al posto dell'aria. Eulero riprende quì un punto di vista che aveva sviluppato, sin dal 1744, nella memoria "Nova theoria lucis et colorum" (E.88), pubblicata nel 1746 nel tomo I dei suoi "Opuscola varii argumentii". Questa memoria ha avuto una grande influenza nello studio dell'ottica nel diciottesimo secolo ed è con la sua pubblicazione che ha avuto inizio il dibattito sulla dualità onda-particella[3].
Eulero considera poi, il problema della determinazione delle alterazioni che subiscono le vibrazioni passando da un mezzo ad un altro in cui la densità

[3]Casper Hakfoort, nella sua "Optics in the Age of Euler: Conception of the Nature of Light 1700-1795", fornisce uno studio dettagliato della memoria E.88, insieme a molti altri scritti di Eulero sull'ottica. C.Hakfoort dimostrò l'importanza della memoria E.88 arrivando a fare vedere che in ottica il dibattito sulla dualità onda-particella comincia proprio con la pubblicazione di questo lavoro di Eulero. Meritano di essere citate le due frasi con cui Hakfoort apre il capitolo relativo alla memoria E.88: *"Quando L.Euler pubblicò il suo trattato 'Nova theoria lucis et colorum' ('Una nuova teoria della luce e dei colori') nel* 1746*, egli diede un contributo alla tradizione del mezzo nell'ottica che fu senza eguali nel diciottesimo secolo. La 'Nova theoria' rappresenta la* teoria del mezzo *più lucida, completa e sistematica di quel secolo."* (Con il termine, *teoria del mezzo*, riportato nella frase di Hakfoort, si intende la teoria ondulatoria della luce: per avere una teoria ondulatoria, la luce deve attraversare un mezzo). Riportiamo le corrispondenti frasi in lingua originale: *"When Leonhard Euler published his treatise 'Nova theoria lucis et colorum' ('A new theory of light and colours') in 1746, he made a contribution to the medium tradition in physical optics that was without parallel in the eighteenth century. The 'Nova theoria' constitutes the most lucid, comprehensive, and systematic medium theory of that century."*

e l'elasticità sono differenti; è convinto che se si riuscissero a trovare queste alterazioni, si otterebbe, oltre alle vere leggi della rifrazione, una chiara spiegazione della riflessione "dalla quale la rifrazione è sempre accompagnata". Si vedrebbe infatti "che è impossibile che i raggi passino da un mezzo all'altro, senza che una parte ritorni indietro". Considera il vetro come esempio di mezzo trasparente con diversa densità ed elasticità. Cerca di spiegare le differenze nella velocità di propagazione della luce (o del suono) in questi mezzi, attraverso la loro diversa struttura molecolare. Eulero infatti, osserva che deve esserci una notevole differenza fra le particelle liquide e solide dalle quali i mezzi son composti: mentre nel caso delle particelle liquide la propagazione delle vibrazioni avviene in successione, nel caso delle particelle solide è istantanea ("una particella solida, essendo colpita da un lato trasmette il colpo quasi nello stesso istante all'altro lato"). Questo è il motivo per cui i raggi di luce attraversano il vetro con una velocità così grande da far sembrare la densità del vetro migliaia di volte più piccola rispetto al suo vero valore. Quanto appena osservato, suggerisce ad Eulero la spiegazione dello "strano fenomeno" per il quale la velocità del suono nell'aria è minore rispetto a quella che si trova con i calcoli. Riferendosi alla lettera dell'1 marzo 1760 (dove Lagrange cerca di verificare se la causa della discordanza, nei valori trovati per la velocità, si possa identificare nella grandezza delle vibrazioni), dice: "Tutti gli sforzi che avete fatto per determinare la propagazione delle vibrazioni finite proveranno incontestabilmente che nessuna accelerazione potrebbe risultarne, come io avevo supposto. Bisogna dunque che questa accelerazione che l'esperienza ci rivela nella propagazione del suono, provenga da un'altra causa." Eulero quindi ipotizza che l'aria non sia un mezzo "perfettamente liquido" (come è stato supposto nei calcoli) ma che contenga anche delle particelle solide. Questa supposizione potrà essere verificata attraverso una serie di esperimenti in cui il suono viene trasmesso in mezzi diversi dall'aria, come ad esempio il muro.
Lagrange affronterà, a sua volta, questa questione nelle "Nouvelles Recherches", Capitolo V, "Conjecture sur la loi de l'èlasticitè des particules de l'air",

e sarà il primo a notare che le differenti relazioni fra la pressione e la densità conducono alle stesse leggi generali della propagazione ma a velocità diverse. Eulero parla ora del concorso bandito dall'Accademia di Berlino per il 1762. Il tema del concorso era stato stabilito in un'assemblea pubblica del 5 giugno 1760, ed era stato comunicato con il seguente titolo: "La spiegazione dell'udito per quanto riguarda il modo con cui avviene la percezione del suono in base alla struttura interna dell'orecchio". Eulero specifica che l'Accademia richiede una spiegazione matematica sul modo in cui avviene la rappresentazione del suono nell'organo dell'udito e osserva che ci sono delle analogie fra i meccanismi di funzionamento dell'udito e quelli della vista. Nonostante l'incoraggiamento da parte di Eulero, Lagrange deciderà di non partecipare a questo concorso, il cui premio verrà assegnato solo nel 1763.
Ora Eulero cambia argomento e risponde al problema relativo alla diminuzione delle vibrazioni del suono nell'aria per grandi distanze, sollevato da Lagrange[4] nella lettera dell'1 marzo 1760. Lagrange aveva osservato che la legge della diminuzione delle vibrazioni del suono in ragione inversa delle distanze, deve valere anche per la luce (supposto che la sua propagazione avvenga in un mezzo elastico). Ma questa visione non era condivisa dai fisici del tempo, secondo i quali la forza della luce descresce in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Eulero allora propone la seguente distinzione: mentre la diminuzione delle vibrazioni segue la ragione inversa delle distanze, la forza del suono che percepiamo è inversamente proporzionale al quadrato delle distanze. Infatti quando una particella d'aria viene scossa, si muove per un certo spazio che rappresenta il suo spostamento. Sia questo spazio percorso, sia la maggior velocità che la particella vi acquisisce, sono inversamente proporzionali alla distanza. La forza con cui la particella colpisce i nostri organi dipende sia dal suo spostamento sia dalla sua velocità; ne segue, quindi, che la forza diminuisce in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Poi Eulero riferendosi a Lambert, che nella sua "Photométrie"[5] fornisce una

[4]Vedi: Commento della Lettera, lettera dell'1 marzo 1760, pagine 160, 161, 162.

[5]L'importante opera di Lambert, "Photometria sive de mensura et grandibus luminis, colorum et umbrae", viene pubblicata all'inizio del 1760. Eulero, in corrispondenza con

dettagliata dimostrazione della diminuzione della forza della luce in ragione inversa dei quadrati delle distanze, dice: "egli [Lambert] parla della forza e non della velocità o dello spostamento di ogni particella; e, pertanto, non trovo nessuna contraddizione tra le sue esperienze e i nostri calcoli.
Questo problema viene affrontato da Eulero anche nella memoria "Continuation des recherches sur la propagation du son" (E.307), dove scrive: *"Abbiamo immaginato che le agitazioni diffuse nell'aria dovessero diminuire in ragione dei quadrati delle distanze, e rimaniamo sorpresi di vedere che i piccoli spazi attraverso i quali gli strati sferici avanzano, diminuiscono solo in ragione delle distanze, quando le distanze sono molto grandi. Ma bisogna osservare che l'agitazione di ogni strato non dipende solo dal suo spostamento, ma anche dalla sua velocità [...]; e quest'ultima è inversamente proporzionale alla distanza dal centro [...] Per il resto, se la forza del suono [...] dipende o dal solo spostamento delle particelle d'aria, o solamente dalla loro velocità, si potrà dire che la forza del suono diminuisce in ragione delle distanze, ma se dipende da entrambe, seguirà la ragione inversa dei quadrati delle distanze."*

Lambert dall'1 luglio 1758, era al corrente dei suoi progressi su questa materia. Lambert invia ad Eulero la sua "Photometria" in una lettera del 4 aprile 1760. Nella lettera di risposta del 20 maggio 1760, Eulero esprime un giudizio positivo su questa opera ed espone le sue idee sull'analogia fra la propagazione della luce e quella del suono.

Capitolo 9

Lettera di Lagrange a Eulero, Torino, 14 Giugno 1762

9.1 Lettera in lingua originale

LAGRANGE À EULER

A Turin, ce 14 juin 1762.

Monsieur,
Voici le second Volume des *Mélanges* de notre Société que le Roi a bien voulu honorer du titre de *Société Royale*. Elle m'a chargé de vous l'envoyer, et de vous prier de l'accepter comme un tribut qu'elle vous doit et qu'elle est glorieuse de vous devoir. Comme j'ai quelque part à cette Ouvrage, je vous prie encore, Monsieur, de me permettre de vous le présenter comme un témoignage du respect et de l'attachement avec lequel je suis et je serai toute ma vie, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
De La Grange.

À Monsieur Euler, Directeur de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

9.2 Traduzione in lingua italiana

LAGRANGE A EULERO

Torino, 14 giugno 1762.

Signore,
ecco il secondo Volume delle *Mélanges* della nostra Società che il Re ha cortesemente voluto onorare con il titolo di Società Reale. Essa mi ha incaricato di inviarvelo e di pregarvi di accettarlo come un tributo che vi deve e che è ben fiera di dovervi. Siccome ho qualche merito in questa Opera, io vi prego ancora, Signore, di permettermi di presentarvela come una testimonianza del rispetto e dell'attaccamento per il quale io sono e sarò per tutta la vita, Signore,

Vostro umilissimo ed obbedientissimo servitore,
De La Grange.

Al Signor Eulero, Direttore dell'Accademia reale delle Scienze e Belle-Lettere di Berlino.

9.3 Commento della Lettera

La lettera del 14 giugno 1762, anche se molto breve, è importante in quanto segna la ripresa della corrispondenza fra Eulero e Lagrange, dopo un'interruzione durata circa due anni (24 giugno 1760-14 giugno 1762) a causa dalla guerra dei Sette Anni[1]. Eulero, durante questo lungo periodo, aveva cercato

[1]La guerra dei Sette Anni fu un conflitto che si svolse tra il 1756 e il 1763 e coinvolse le principali potenze europee dell'epoca, fra cui la Gran Bretagna, la Prussia, la Francia, l'Austria e l'Impero russo. Questa guerra, fu la prima della storia ad essere combattuta non solo sul territorio europeo, ma anche in varie altre parti del globo nelle quali le potenze europee avevano dei possedimenti coloniali; è per questo motivo che è stata anche definita come la prima vera "guerra mondiale". I due schieramenti in conflitto furono la coalizione formata da Austria, Francia, Russia, Polonia e Svezia e l'alleanza fra Gran Bretagna e Prussia, che combattevano per ottenere sia nuovi territori, sia il dominio commerciale.

di riprendere lo scambio epistolare con Lagrange chiedendo aiuto anche all'intermediario Louis Bertand[2], ma nessuno dei tentativi andò a buon fine. È grazie a Lagrange, quinidi, che viene ripresa la corripondenza con questa lettera del 14 giugno 1762 in cui invia ad Eulero il secondo Volume delle "Misc. Taurin". Questo secondo Volume apparirà con il titolo di "Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royal de Turin" per gli anni 1760-1761, e in sottotitolo "Miscellanea Taurnensis". Infatti la Società aveva da poco ottenuto il riconoscimento reale attraverso l'intercessione del principe ereditario Vittorio Amedeo, al quale i fondatori della Società avevano dedicato il primo Volume delle "Misc Taurin". Il grande entusiasmo con cui è stato accolto il primo Volume e la collaborazione dei prestigiosi uomini del tempo, fra cui Haller e Euerlo, sono sicuramente stati degli elementi determinanti in questa decisione.
Il contributo di Lagrange al secondo Volume è considerevole: corrisponde, infatti, a 278 pagine che comprendono quattro memorie di Lagrange e una breve nota.
Due di queste quattro memorie sono relative alla propagazione del suono: le "Nouvelles Recherches sur la nature et la propagation du son" e l'"Addition à la première partie des Recherches sur la nature et la propagation du son imprimées dans le volume précédent". Nelle "Nouvelles Recherches" sono riportati tutti i risultati delle ricerche intraprese da Lagrange sulla propagazione del suono a partire da novembre del 1759, e perseguite dopo la lettura della memoria di Eulero contenuta nella lettera dell'1 gennaio 1760. L'"Addition" rappresenta la risposta di Lagrange alle critiche avanzate da D'Alembert contro le sue "Recherches" del 1759.
Le altre due memorie contenute nel secondo Volume sono: l'"Essay d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies", in cui viene presentato il nuovo metodo di calcolo delle variazioni elaborato da Lagrange sin da 1755, e l'"Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solutions des différentes problèmes

[2]Vedi: nota (18) a pagina 34.

de Dynamique", in cui viene applicato questo nuovo metodo alla soluzione di differenti problemi di Dinamica.

Infine la breve nota riguarda il calcolo degli asintoti e la metefisica degli infinitamente piccoli.

Capitolo 10

Lettera di Lagrange a Eulero, Torino, 28 Ottobre 1762

10.1 Lettera in lingua originale

LAGRANGE À EULER

Turin, ce 28(?) octobre 1762.

Monsieur,

Notre Société a fait paraître, il y a quelques mois, le second Volume de ses *Mélanges*, et elle s'est fait gloire d'y insérer votre excellent Mémoire sur les ébranlements dans un milieu élastique. Je n'ai pas manqué, aussitôt que je l'ai pu, de m'acquitter du devoir dont elle m'avait chargé, en vous envoyant un exemplaire de cet Ouvrage, que j'ai aussi accompagné d'une de mes Lettres; mais de crainte de quelque accident qui pût l'empêcher de parvenir entre vos mains, j'ai cru devoir encore profiter d'une autre occasion qui s'est présentée depuis peu pour vous en faire tenir une autre copie. Si vous les recevez toutes deux, je vous prie d'en remettre une de ma part à M. Formey, secrétaire de votre Académie.

Je ne vous dirai rien sur la partie de ce Recueil qui m'appartient; et j'attends sur cela votre jugement avec la plus grande impatience.

Ayant appris, par une de vos Lettres de 1759, que vous aviez fait assez de cas de ma méthode *de maximis et minimis* pour l'étendre et la perfectionner dans un Traité particulier, j'ai cru devoir supprimer entièrement celui que j'avais presque déjà achevé sur ce sujet, et je me suis borné à en exposer simplement les principes dans un Mémoire que j'ai tâché de rendre le plus court qu'il m'a été possible; je ne me suis même déterminé à composer ce Mémoire que parce que vous m'avez fait l'honneur de me mander dans la même lettre que vous ne vouliez point publier votre travail avant le mien. Je suis impatient de pouvoir profiter des nouvelles lumières que vous aurez sans doute répandues sur une matière si difficile; en attendant, je vous prie de recevoir ici mes très humbles remerciments de l'honneur que vous avez bien voulu me faire, et que je regarde comme la récompense la plus flatteuse de mes études mathématiques.

Je dois encore vous remercier de la Notice que vous avez eu la bonté de me donner dans votre dernière Lettre au sujet du prix proposé par votre Académie pour l'année présente. Je ne me suis pas senti ni le courage ni la sagacité nécessaire pour travailler sur un sujet si difficile; je me flatte que d'autres auront rempli cet objet d'une manière digne de l'importance de la matière et des vues profondes de l'Académie, et je souhaiterais fort de connaître la pièce qui aura été couronnée. Au reste, vous m'obligerez infiniment de me faire savoir les questions qui auront été proposées pour les sujets des prix des années qui viennent tant par votre Académie que par celle de Pétersbourg.

J'ai l'honneur d'être, avec toute l'estime et tous les sentiments que je dois à votre personne et à l'amitié dont vous m'honorez, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
De La Grange.

À Monsieur Euler, Directeur perpétuel de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin.

10.2 Traduzione in lingua italiana

LAGRANGE A EULERO

Torino, 28(?) ottobre[1] 1762.

Signore,

la Nostra Società ha pubblicato qualche mese fa il secondo Volume delle sue *Mélanges*, e si è onorata di inserirvi la vostra eccellente Memoria sulle vibrazioni in un mezzo elastico[2]. Non ho mancato, non appena ho potuto, di adempiere al compito che la Società mi aveva assegnato, inviandovi un esemplare di questa Opera, che ho anche accompagnato con una delle mie lettere[3]; ma per paura che qualche incidente potesse impedire di farla giungere nelle vostre mani, ho creduto di dover approfittare di un'ulteriore occasione che si è presentata da poco, per riservarvene un'altra copia. Se le riceverete tutte e due, vi prego di passarne una da parte mia al Signor Formay[4], segretario della vostra Accademia.

Non vi dirò nulla sulla parte di questa Raccolta che mi appartiene; e aspetto su questa il vostro parere con la più grande impazienza. Avendo appreso da una delle vostre lettere[5] del 1759 che avete dato molta importanza al mio metodo *de maximis et minimis*[6], tanto da estenderlo e perfezionarlo in un Trattato particolare, ho ritenuto di dover sopprimere interamente quello che avevo già quasi completato su questo argomento, e mi sono limitato ad esporne semplicemente i principi in una Memoria che ho cercato di rendere più breve possibile; mi sono deciso a comporre questa memoria solo perché voi

[1] La data non veritiera del 38 ottobre 1762, che si legge chiaramente nella lettera originale, deve probabilmente essere sostituita con quella del 28 ottobre 1762.

[2] Si riferisce alla memoria di Eulero contenuta nella lettera dell'1 gennaio 1760.

[3] Si tratta della precedente lettera di Lagrange del 14 giugno 1760.

[4] Samuel Formay fu il segretario dell'Accademia di Berlino dal 1748 fino alla sua morte nel 1797. In alcune circostanze ha fatto da intermediario nella corrispondenza fra Eulero e Lagrange.

[5] Lagrange si riferisce alla lettera del 2 ottobre 1759, appartenente alla precedente corrispondenza in lingua latina e non presente in questo elaborato.

[6] Con metodo *de maximis et minimis* si intende il metedo delle variazioni.

mi avete fatto l'onore di comunicarmi, nella stessa lettera, che non volevate affatto pubblicare il vostro lavoro prima del mio. Sono impaziente di poter approfittare dei nuovi chiarimenti che voi avrete senza dubbio fornito su una materia così difficile; nell'attesa, vi prego di ricevere i miei più umili ringraziamenti per l'onore che mi avete fatto, e che io considero come la ricompensa più lusinghiera dei miei studi matematici.
Devo ancora ringraziarvi per l'Avviso che mi avete cortesemente fornito nella vostra ultima lettera in merito al premio proposto dalla vostra Accademia per l'anno presente. Non mi sono sentito né il coraggio né la sagacità necessaria per lavorare su un argomento così difficile; spero bene che altri abbiano assolto questo compito in modo degno dell'importanza della materia e delle vedute profonde dell'Accademia, e avrei molto piacere di conoscere lo scritto che risulterà vincitore. Per il resto, mi farete cosa grata di rendermi note le domande che sono state proposte come tema dei premi per gli anni a venire, tanto per la vostra Accademia che per quella di Pietroburgo.
Ho l'onore di essere con tutta la stima e tutti i sentimenti che devo alla vostra persona e all'amicizia con cui voi mi onorate, Signore,

Vostro umilissimo ed obbedientissimo servitore,
De La Grange.

Al Signor Eulero, Direttore dell'Accademia reale delle Scienze e Belle-Lettere di Berlino.

10.3 Commento della Lettera

Nella precedente lettera del 14 giugno 1762, Lagrange aveva inviato a Eulero il secondo Volume delle "Misc. Taurin.", ma non avendo ricevuto risposta, gli invia di nuovo il Volume in questa lettera del 28 ottobre 1762.
Lagrange ringrazia Eulero per avere contribuito a questo secondo Volume con la sua eccellente Memoria sulla propagazione delle vibrazioni in un mezzo elastico.

Accena poi, per la prima volta nella corrispondenza in lingua francese, al suo metodo delle variazioni. Infatti scrive: "Avendo appreso da una delle vostre lettere del 1759 che avete dato molta importanza al mio metodo *de maximis et minimis*, tanto da estenderlo e perfezionarlo in un Trattato particolare, ho ritenuto di dover sopprimere interamente quello che avevo già quasi completato su questo argomento, e mi sono limitato ad esporne semplicemente i principi in una Memoria che ho cercato di rendere più breve possibile; mi sono deciso a comporre questa memoria solo perché voi mi avete fatto l'onore di comunicarmi, nella stessa lettera, che non volevate affatto pubblicare il vostro lavoro prima del mio. Sono impaziente di poter approfittare dei nuovi chiarimenti che voi avrete senza dubbio fornito su una materia così difficile; nell'attesa, vi prego di ricevere i miei più umili ringraziamenti per l'onore che mi avete fatto, e che io considero come la ricompensa più lusinghiera dei miei studi matematici."
Le parole di Lagrange, appena riportate, sono molto significative e vi si può cogliere anche un leggero tono sarcastico. Lagrange si sta riferendo alla precedente corrispondenza latina, nella quale viene trattato principalmente il calcolo delle variazioni, e in particolare alla lettera del 2 ottobre 1759 non presente in questo elaborato. Per poter quindi comprendere l'importanza di queste parole, ripercorriamo brevemente gli avvenimenti più significativi, relativi al calcolo delle variazioni, nella precedente corrispondenza latina.

Eulero, Lagrange e il calcolo delle variazioni

Eulero, sin dal 1727, aveva intrapreso lo studio di problemi del tipo: dato un corpo pesante trovare il cammino che deve percorrere per passare nel minor tempo possibile da un punto a quota più alta ad un altro a quota più bassa; dati due punti su una superficie trovare la linea di lunghezza minima che li congiunge; data una curva chiusa piana di lunghezza assegnata trovare quale configurazione deve avere affinché l'area della porzione di piano da essa racchiusa risulti massima, ecc. Per risolvere questo genere di problemi Eulero decise di ricorrere ad un metodo geometrico, e riportò l'insieme di problemi

così affrontati nel suo celebre trattato "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes", pubblicato nel 1744. Si rese subito conto però che, per una trattazione rigorosa e sistematica, quell'insieme di problemi affrontati richiedeva l'utilizzo di un metodo analitico; nonostante le numerose ricerche, Eulero, non fu in grado di trovarlo.
Il 12 agosto 1755, undici anni dopo la pubblicazione del "Methodus inveniendi", Lagrange invia ad Eulero una lettera (la seconda lettera della corrispondenza latina iniziata il 28 giugno 1754), nella quale gli comunica quel metodo puramente analitico e generale, il metodo delle variazioni, che sta a fondamento del calcolo delle variazioni e che Eulero da tempo stava cercando.
A questa lettera Eulero risponde il 6 settembre 1755 scrivendo: *"[...] sembra che tu abbia portato la teoria dei massimi e dei minimi pressoché al suo più alto grado di perfezione, [...] non solo nel mio trattato su questo argomento avevo desiderato trovare un metodo puramente analitico che permetta di dedurre le regole che vi sono presentate, ma successivamente avevo dedicato non pochi sforzi alla ricerca di tale metodo [...]. Ho dunque quanto prima esaminato attentamente il tuo metodo che, manifestamente, permette di ottenere con i soli strumenti dell'analisi le mie soluzioni dei problemi considerati, in modo molto più generale del mio metodo che si fonda su idee geometriche[7]."*
Lagrange continua così le sue ricerche sul calcolo delle variazioni e anche sul principio della minima azione, del quale Eulero aveva fornito una formulazione e una giustificazione nell'Appendice II del suo "Methodus inveniendi" (1744). Le origini di questo principio si possono ritrovare nel principio relativo alla propagazione della luce scoperto da Fermat, al quale avevano contribuito, attraverso varie ricerche e considerazioni, Decartes e Leibniz.

[7]Dalla lettera del 6 settembre 1755: *"[...] Theoriam maximorum ac minimorurn ad summum fere perfectionis fastigium erexisse videris, [...] non solum in Tractatu meo de hoc argumento methodum mere analyticam desideravissenm. qua regulae ibi traditae erui possent., sed etiam deinceps non parum studii in hujusmodi methodo detegenda consumpsissem [...]. Statim autem perspexi analysin tuam, qua meas hujusmodi problematum solutiones per sola analyseos praecapta elicuisse multo latius patere mea methodo ideis geometricis innixa."*

Anche Pierre-Loius Moreau de Maupertis, a quel tempo presidente dell'Accademia delle Scienze di Berlino, si era molto occupato di questo principio, con considerazioni che avevano però più carattere metafisico che scientifico. La formulazione che Maupertuis fornisce del principio della minina azione e che pretende di dedurre filosoficamente dalle cause finali, è: *"La quantità d'azione*[8] *necessaria per produrre un cambiamento nel movimento dei corpi è sempre un minimo."*
Nonostante il grande impegno e le numerose ricerche sul principio della minima azione, Eulero non riuscì a ricavarne un estensione generale dal punto di vista matematico. La formulazione di tale principio, nel caso di più corpi, poteva anche sembrare piuttosto semplice, ma mancava ad Eulero, un adeguato strumento matematico che gli permetesse di giustificarla, ovvero il metodo delle variazioni scoperto undici anni dopo da Lagrange.
Con la lettera del 28 luglio 1759, Lagrange invia ad Eulero il primo Volume delle "Misc. Taurin.[9]" che non contiene niente delle sue ricerche sul calcolo delle variazioni e sul principio della minima azione. Compare però, nelle considerazioni conclusive della memoria "Recherches sur la méthode de maximis et minimis", contenuta in questo primo Volume e relativa alla teoria dei massimi e minimi per le funzioni in più variabili, la comunicazione che sta preparando un'opera in cui esporrà il suo metodo delle variazioni e dedurrà "tramite il principio della minima azione, tutta la meccanica dei corpi, sia solidi che fluidi." Inoltre Lagrange riferisce di avere quasi completato quest'opera e di volerla inviare a Berlino per la sua pubblicazione.
Eulero risponde a Lagrange nella lettera del 2 ottobre 1759 segnalando le difficoltà che si potrebbero presentare nel pubblicare l'opera a Berlino. Si nota, in questa lettera, un atteggiamento distaccato da parte di Eulero; mostra, infatti, poco interesse per l'opera di Lagrange e si limita a commentare: *"La*

[8]Per *quantità d'azione* Maupertuis intende il prodotto di una massa per la sua velocità e per lo spazio che essa percorre.

[9]Vedi: Lettere precedenti a quella del 23 ottobre 1759; Lettera del 2 ottobre 1759, pagina 56.

tua soluzione analitica del problema isoperimetrico[10] *racchiude, come constatato, tutto quello che può essere desiderabile in questa questione; e per ciò che mi riguarda provo una grande gioia che questo argomento, del quale ero stato pressoché il solo a trattare dopo i primi vaghi tentativi, sia stato portato al suo più alto grado di perfezione da te*[11]."

Inoltre comunica a Lagrange: *"L'importanza della questione mi ha incitato, con l'ausilio della luce da te gettata, a cercare una mia soluzione analitica, che tuttavia ho deciso di non rendere pubblica fino a quando non avrai rese pubbliche le tue riflessioni, per non togliere niente alla gloria che ti è dovuta*[12]."

È proprio a quest'ultima frase di Eulero, che Lagrange si riferisce nella lettera del 28 ottobre 1762. Eulero, infatti, abbandonando il metodo geometrico seguito nel suo "Methodus inveniendi" e partendo dai nuovi principi stabiliti da Lagrange, aveva dato la propria esposizione del calcolo delle variazioni in due vaste memorie: "Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum" e "Elementa calculi variationum", presentate rispettivamente il 9 e il 16 settembre 1756 davanti all'Accademia di Berlino. Queste due memorie vennero successivamente inviate e presentate all'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo nel 1760.

A questo punto Lagrange, come annuncia nella lettera del 28 ottobre 1762, decide di sopprimere il trattato che stava preparando e che voleva pubblicare a Berlino. Questo trattato viene sostituito dall'"Essay d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies", lungo poco più di venti pagine ed estremamente scarno e conciso. Lagrange adotta un modo di procedere molto essenziale, tanto che la maggior

[10]Eulero si riferisce alla scoperta di Lagrange del metodo delle variazioni.

[11]Dalla lettera del 2 ottobre 1759: *"Tua solutio problematis isoperimetrici continet, ut video, quidquid in hac quaestione desiderari potest; et ego maxime gaudeo hoc argumentum, quod fere solus post primos conatus tractaveram, a te potissimum ad summum perfectionis fastigium esse evectum."*

[12]Dalla lettera del 2 ottobre 1759: *"Rei dignitas me excitavit ut tuis luminibus adjutus, ipse solutionem analyticam conscripserim quam tamen celare statui, donec ipse tuas meditationes publici juris feceris, ne ullam partem gloriae tibi debitae praeripiam."*

parte delle deduzioni è del tutto priva delle necessarie premesse e considerazioni esplicative. Queste premesse e considerazioni abbondano, invece, nelle due memorie di Eulero che verranno pubblicate nel 1766 e che, grazie alla chiarezza e all'ampiezza dei contenuti, acquisiranno un ruolo importante nella diffusione e nello studio del calcolo delle variazioni. Nel sommario che precede le due opere, Eulero, precisa comunque che il merito di avere introdotto il nuovo tipo di analisi sulla quale si basano i suoi calcoli si deve a Lagrange. Questa precisazione però, non fu sufficiente per far sì che Lagrange ottenesse la gloria che si meritava.

Commentiamo ora, la restante parte della breve lettera del 28 ottobre 1762. Lagrange ringrazia Eulero per la comunicazione, fornita nella lettera del 24 giugno 1760, relativa al concorso bandito dall'Accademia di Berlino per il 1762. Riferisce, però, di non avere avuto "né il coraggio, né la sagacità necessaria per affrontare un argomento così difficile e si augura di conoscere presto lo scritto che risulterà vincitore. Infatti, quando Lagrange scrive questa lettera ad Eulero, il premio del concorso non è ancora stato assegnato in quanto l'Accademia non ha ritenuto idoneo nessuno degli scritti ricevuti. Quasi un anno dopo (2 giugno 1763), il premio verrà assegnato a U.N. Belz, dottore in medicina.

Capitolo 11

Lettera di Eulero a Lagrange, Berlino, 9 Novembre 1762

11.1 Lettera in lingua originale

EULER À LAGRANGE

Berlin, ce 9 novembre 1762.

Monsieur,
Je dois être infiniment flatté de la distinction toute particulière, dont la nouvelle Académie Royale des Sciences vient de m'honorer, en accordant une place dans ses Mémoires à mes faibles recherches sur la propagation du son, que j'avais pris la liberté de vous envoyer. Je connais tout le prix de cette distinction, et j'en suis le plus vivement touché; ce que je vous supplie, monsieur, de témoigner à l'illustre Académie, et de lui présenter mes très humbles remerciments en l'assurant de ma plus haute vénération et de mon attachement le plus inviolable. Mais je ne sens aussi que trop que c'est uniquement à vous que je suis redevable de cette glorieuse distinction. Je vous en suis infiniment obligé, de même que des deux exemplaires du premier Recueil académique que vous m'avez bien voulu envoyer. Vous ne douterez pas que je ne l'aie parcouru avec la plus grande avidité, et je fus tout à fait surpris

de l'excellence et de la richesse des Mémoires que ce Recueil renferme. Vous en particulier, Monsieur, vous y avez véritablement prodigué vos profondes découvertes; tout autre en aurait eu abondamment de quoi fournir à plusieurs Académies et à plusieurs Volumes, pendant que vous y avez ramassé en quelques morceaux des sciences entières et accomplies, dont la moindre particule aurait coûté à d'autres les plus pénibles recherches. Vous ne craignez pas de vous épuiser pour les Volumes suivants, puisque vos ressources sont inépuisables; et je suis tout stupéfait, quand je pense seulement que les Volumes suivants ne brilleront pas moins de nouvelles découvertes, quoique je ne puisse pas encore comprendre sur quelles matières elles rouleront. Mais je vous avoue franchement, que je ne suis quasi qu'ébloui de l'abondance et de la profondeur de vos recherches, et bien d'autres souhaiteront avec moi que vous preniez la peine de traiter successivement plus en détail tous les sujets particuliers, que vous n'avez fait jusqu'ici qu'envelopper dans la plus grande généralité.

Quelle satisfaction n'aurait pas M. de Maupertuis, s'il était encore en vie, de voir son principe de la moindre action porté au plus haut degré de dignité dont il est susceptible.

Dans vos autres recherches, il s'agit principalement d'une branche tout à fait nouvelle de l'Analyse, qui mériterait bien d'être développée avec tous les soins possibles. C'est la résolution de cette espèce d'équation

$$\Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = P\Big(\frac{ddz}{dx^2}\Big) + Q\Big(\frac{dz}{dx}\Big) + Rz,$$

dont l'intégrale complète renferme par sa propre nature des fonctions indéterminées, et même discontinues, contre les prétentions de M. d'Alembert, qui cependant sera bien embarrassé des réponses solides que vous lui avez faites, quoique je doute fort qu'il s'y rende.

Avant toutes choses, il faudrait bien chercher des méthodes plus propres à traiter ces équations. Il semble que des transformations convenables y puissent beaucoup. En voici un échantillon que j'appliquerai au cas le plus simple

$$\Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = a\Big(\frac{ddz}{dx^2}\Big);$$

au lieu des variables t et x, j'en introduirai deux autres p et q, de sorte que

$$p = \alpha x + \beta t \quad et \quad q = \gamma x + \delta t\,.$$

Pour cette effet, considérant une fonction quelconque de t et x qui sont v, puisque

$$dv = dt\Big(\frac{dv}{dt}\Big) + dx\Big(\frac{dv}{dx}\Big)$$

et par les nouvelles variables

$$dv = dp\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + dq\Big(\frac{dv}{dq}\Big),$$

en substituant ici pour dp et dq leurs valeurs, j'aurai

$$dv = \alpha\, dx\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \beta\, dt\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\, dx\Big(\frac{dv}{dq}\Big) + \delta\, dt\Big(\frac{dv}{dq}\Big) =$$

$$= dx\Big(\alpha\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\Big) + dt\Big(\beta\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\Big)$$

d'où il s'ensuit, pour les substitutions dont j'ai besoin,

$$\Big(\frac{dv}{dt}\Big) = \beta\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dv}{dq}\Big) \quad et \quad \Big(\frac{dv}{dx}\Big) = \alpha\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dv}{dq}\Big),$$

donc

$$\Big(\frac{dz}{dt}\Big) = \beta\Big(\frac{dz}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dz}{dq}\Big) \quad et \quad \Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = \beta^2\Big(\frac{ddz}{dp^2}\Big) + 2\beta\delta\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) + \delta^2\Big(\frac{ddz}{dq^2}\Big)\,,$$

$$\Big(\frac{dz}{dx}\Big) = \alpha\Big(\frac{dz}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dz}{dq}\Big) \quad et \quad \Big(\frac{ddz}{dx^2}\Big) = \alpha^2\Big(\frac{ddz}{dp^2}\Big) + 2\alpha\gamma\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) + \gamma^2\Big(\frac{ddz}{dq^2}\Big)\,.$$

Maintenant je pose

$$\beta^2 - \alpha^2\, a = 0 \quad et \quad \delta^2 - \gamma^2\, a = 0$$

ou

$$\beta = \alpha\sqrt{a} \quad et \quad \delta = -\gamma\sqrt{a}\,,$$

pour avoir cette équation

$$2(\beta\delta - \alpha\gamma\, a)\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0 \quad ou \quad \Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0.$$

A présent M. d'Alembert ne saurait discovenir que l'intégration de cette formule, en ne prenant que p comme variable, ne donne

$$\left(\frac{dz}{dq}\right) = \varphi'(q)$$

et ensuite, faisant quarrer,

$$z = \varphi(q) + \psi(p) = \varphi(x - t\sqrt{a}) + \psi(x + t\sqrt{a}),$$

où ces fonctions sont absolument indéterminées et dépendent entièrement de notre volonté, de sorte que la construction générale se puisse faire par deux courbes décrites à plaisir, l'appliquée de l'une donnant $\varphi(x - t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x - t\sqrt{a}$, et de l'autre $\psi(x + t\sqrt{a})$ pour l'abscisse $x + t\sqrt{a}$.
Mais, si l'on demandait une semblable intégrale complète pour le cas où a serait une quantité négative $-b$, je ne vois pas comment on la pourrait représenter par des courbes arbitraires, puisqu'on n'y saurait assigner les appliquées qui répondent à des abscisses imaginaires.
La réduction aux arcs de cercle, en posant

$$x = v\, cos\varphi \quad e \quad t\sqrt{b} = v\, sin\varphi,$$

qui donneront

$$\begin{aligned} z = A + B\, v\, cos\varphi + C\, v^2\, cos2\varphi + \dots \\ +K\, v\, sin\varphi + L\, v^2\, sin2\varphi + \dots, \end{aligned}$$

combien de termes qu'on ne prenne, ne saurait jamais produire une solution générale, en sorte que posant $t = 0$, il en résulte entre z et x une relation donnée exprimée par quelque courbe décrite à volonté.
Pour le problème des isopérimètres pris dans sa plus grande étendue, c'est à vous que nous sommes redevables de la plus parfaite solution et je fus bien surprise de voir par quelle adresse vous l'avez étendu à des surfaces et même a des polygones. Vous conviendres que ces profondes recherches mériteraient un développement plus détaillé. Il est facheux que la solution du cas où l'on demande, entre tous les solides de la même capacité, celui dont la surface

est la plus petite conduise à une équation presque absolument intrataible; on voit bien que les surfaces sphériques et cylindriques y sont comprises, sans être en état de les en conclure. Mais les corps ont des bizarreries qui ne se trouvent pas dans les surfaces; quoique tous les côtés d'un polygone et même leur ordre soient donnés, la figure est encore susceptible d'une infinité de déterminations; mais, dans un polyèdre, dès qu'on connaît tous les hèdres avec leur ordre, le corps est tout à fait déterminé. Ensuite, on ne saurait donner deux courbes différentes qui aient pour toutes les abscisses des arcs égaux; mais on peut toujours trouver une infinité de surfaces différentes où les elements $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$ soient les mêmes. Ainsi les surfaces coniques dont l'axe est perpendiculaire à la base conviennent avec une surface plane, et les corps exprimés par ces équations $az = xy$ et $2az = x^2 + y^2$ ont leurs surfaces égales, puisque p^2+q^2 est le même de part et d'autre; mais on trouve aisément une infinité d'autres surfaces de la même nature, où l'on peut même introduire des fonctions arbitraires et discontinues. Or il est plus difficile de trouver de tels corps, dont la surface convienne avec celle de la sphère. Il s'agit de trouver une telle équation intégrable $dz = pdx + qdy$ que $p^2 + q^2$ soit égal à $\dfrac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}$. Je puis bien définir toutes les fonctions possibles pour p et q, mais je n'en puis tirer aucune d'où l'équation entre x, y et z devient algébrique. C'est encore un sujet qui demande la nouvelle branche de l'Analyse qui roule sur les fonctions de deux ou plusieurs variables, de certains rapports entre leurs différentiels étant donnés.
Sur le problème du mouvement d'un corps attiré vers deux points fixes en raison réciproque carrée des distances, j'ai trouvé moyen de construire la courbe que le corps décrit quand même elle ne serait point dans le même plan, et j'y ai observé une infinité de cas où la courbe devient algébrique, outre ceux de l'ellipse ou hyperbole dont les foyers tombent dans les deux points fixes.
J'ai l'honneur d'être avec la plus haute considération, monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,
L.Euler.

11.2 Traduzione in lingua italiana

EULERO A LAGRANGE

Berlino, 9 novembre 1762.

Signore,
mi sento lusingato della particolare considerazione, con la quale la Nuova Accademia Reale delle Scienze mi ha appena onorato, riservando un posto nelle sue Memorie alle mie umili ricerche sulla propagazione del suono, che avevo preso la libertà di inviarvi. Io riconosco tutto il valore di questa considerazione, e ne sono vivamente toccato; per ciò vi supplico, Signore, di testimoniare all'illustre Accademia, e di presentare i miei più umili ringraziamenti assicurandole la mia grande venerazione e il mio attaccamento più inviolabile. Ma io sento soprattutto che è unicamente a voi che io sono debitore di questa gloriosa considerazione. Ve ne sono infinitamente riconoscente, come pure per le due copie della prima Raccolta accademica che mi avete gentilmente fatto avere. Penso che non dubiterete che io l'abbia divorata con la più grande avidità, e che io sia stato del tutto sorpreso dall'eccellenza e dalla ricchezza delle Memorie che questa Raccolta racchiude. In particolare voi, Signore, vi avete veramente prodigato le vostre profonde scoperte; chiunque altro avrebbe avuto abbondantemente di che fornire a più Accademie e a più Volumi, mentre voi vi avete raccolto in alcuni frammenti le scienze intere e compiute, delle quali la minima parte sarebbe costata ad altri le più dure ricerche. Non abbiate timore di esaurirvi per i Volumi seguenti, poiché le vostre risorse sono inesauribili; e io sono del tutto stupefatto, quando penso che i Volumi seguenti non brilleranno certo meno di nuove scoperte, benché io non possa ancora comprendere su quali materie essi verteranno. Ma vi confesso francamente che io sono quasi abbagliato dall'ampiezza e dalla profondità delle vostre ricerche, e molti altri desidererebbero come me che voi vi prendeste l'incarico di trattare successivamente più in dettaglio tutti gli argomenti particolari, che voi non avete fatto altro fin quì che sviluppare nella più grande generalità.

Quale soddisfazione avrebbe il Signor De Maupertuis, se fosse ancora in vita, nel vedere il suo principio della minima azione portato al più alto grado di dignità a cui esso potesse aspirare[1].

Per quanto riguarda le vostre altre ricerche, si tratta principalmente di un ramo del tutto nuovo dell'Analisi, che meriterebbe di essere sviluppato con tutta la cura possibile. È la risoluzione di questo tipo di equazione

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = P\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + Q\left(\frac{dz}{dx}\right) + Rz,$$

il cui integrale completo contiene per sua propria natura delle funzioni indeterminate, e anche discontinue, contro le pretese del Signor d'Alembert, il quale tuttavia sarà molto a disagio per le valide risposte che gli avete fornito, anche se dubito molto che si arrenderà a ciò.

Prima di ogni altra cosa bisognerebbe cercare dei metodi più adatti per trattare queste equazioni. Sembra che delle trasformazioni appropriate possano contribuire molto a ciò. Eccone un esempio che io applicherò al caso più semplice

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right);$$

al posto delle variabili t e x ne introdurrò altre due p e q, in modo che

$$p = \alpha x + \beta t \quad e \quad q = \gamma x + \delta t\,.$$

Per questo scopo, si considera una funzione qualunque di t e x; sia v tale funzione. Poiché

$$dv = dt\left(\frac{dv}{dt}\right) + dx\left(\frac{dv}{dx}\right)$$

e con le nuove variabili

$$dv = dp\left(\frac{dv}{dp}\right) + dq\left(\frac{dv}{dq}\right),$$

sostituendo quì al posto di dp e dq i loro valori, avrò

$$dv = \alpha\, dx\left(\frac{dv}{dp}\right) + \beta\, dt\left(\frac{dv}{dp}\right) + \gamma\, dx\left(\frac{dv}{dq}\right) + \delta\, dt\left(\frac{dv}{dq}\right) =$$

[1]Riferimento alla memoria di Lagrange: "Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solutions des différentes problèmes de Dynamique".

$$= dx\Big(\alpha\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\Big) + dt\Big(\beta\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\Big)$$

da cui ne consegue, per le sostituzioni di cui necessito

$$\Big(\frac{dv}{dt}\Big) = \beta\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dv}{dq}\Big) \quad e \quad \Big(\frac{dv}{dx}\Big) = \alpha\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dv}{dq}\Big),$$

dunque

$$\Big(\frac{dz}{dt}\Big) = \beta\Big(\frac{dz}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dz}{dq}\Big) \quad e \quad \Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = \beta^2\Big(\frac{ddz}{dp^2}\Big) + 2\beta\delta\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) + \delta^2\Big(\frac{ddz}{dq^2}\Big),$$

$$\Big(\frac{dz}{dx}\Big) = \alpha\Big(\frac{dz}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dz}{dq}\Big) \quad e \quad \Big(\frac{ddz}{dx^2}\Big) = \alpha^2\Big(\frac{ddz}{dp^2}\Big) + 2\alpha\gamma\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) + \gamma^2\Big(\frac{ddz}{dq^2}\Big).$$

Ora io pongo

$$\beta^2 - \alpha^2\, a = 0 \quad e \quad \delta^2 - \gamma^2\, a = 0$$

o

$$\beta = \alpha\sqrt{a} \quad e \quad \delta = -\gamma\sqrt{a}\,,$$

per avere la seguente equazione

$$2(\beta\delta - \alpha\gamma\, a)\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0 \quad o \quad anche \quad \Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0.$$

Adesso d'Alembert non saprebbe mettere in dubbio che l'integrazione di questa formula, prendendo solo p come variabile, non dia

$$\Big(\frac{dz}{dq}\Big) = \varphi'(q)$$

e in seguito, facendo quadrare,

$$z = \varphi(q) + \psi(p) = \varphi(x - t\sqrt{a}) + \psi(x + t\sqrt{a}),$$

in cui queste funzioni sono assolutamente indeterminate e dipendono interamente dalla nostra volontà, in modo che la costruzione generale si possa ottenere attraverso due curve descritte a piacere, l'ordinata dell'una dando $\varphi(x-t\sqrt{a})$ per l'ascissa $x-t\sqrt{a}$, e dell'altra $\psi(x+t\sqrt{a})$ per l'ascissa $x+t\sqrt{a}$. Ma, se si richiedesse un simile integrale completo per il caso in cui a fosse una quantità negativa $-b$, non vedo come lo si potrebbe rappresentare con due curve arbitrarie, perché non si sarebbe in grado di assegnare le ordinate che rispondono a delle ascisse immaginarie. La riduzione ad archi di cerchio, ponendo

$$x = v\, cos\varphi \quad e \quad t\sqrt{b} = v\, sin\varphi,$$

che forniranno

$$\begin{aligned} z = A + B\, v\, cos\varphi + C\, v^2\, cos2\varphi + \dots \\ +K\, v\, sin\varphi + L\, v^2\, sin2\varphi + \dots, \end{aligned}$$

qualunque sia il numero dei termini che si prendono, non potrebbe mai fornire una soluzione generale, di modo che ponendo $t = 0$, ne risulta tra z ed x una relazione data espressa da qualche curva descritta a piacere[2].
Per quanto riguarda il problema degli isoperimetri [problema isoperimetrico], preso nella sua più grande generalità, è a voi che siamo debitori per la migliore soluzione, e sono stato molto sorpreso di vedere con quale abilità l'avete esteso alle superfici e anche ai poligoni[3]. Voi converrete che queste profonde ricerche meriterebbero uno sviluppo molto più dettagliato. È un peccato che la soluzione del caso in cui si richiede, tra tutti i solidi dello stesso volume, quello la cui superficie è più piccola, conduca ad un'equazione quasi del tutto intrattabile; si vede bene che le superfici sferiche e cilindriche vi sono comprese, senza però essere in grado di dedurle. Ma i corpi hanno delle stranezze che non si trovano nelle superfici; benché tutti i lati di un poligono e anche il loro ordine siano dati, la figura rimane ancora suscettibile ad un'infinità di determinazioni; ma, in un poliedro, non appena si conoscono tutte le superfici con il loro ordine, il corpo è del tutto determinato. Inoltre, non si potrebbero dare due curve differenti che abbiano per tutte le ascisse degli archi uguali; ma si può sempre trovare un'infinità di superfici differenti in cui gli elementi $dxdy\sqrt{1+p^2+q^2}$ siano gli stessi[4]. Così le superfici

[2] Eulero mantiene la sua opposizione al metodo di D.Bernoulli che comporta l'introduzione delle serie trigonometriche.

[3] Eulero fa riferimento alle due Appendici che concludono l'"Essay" di Lagrange.

[4] Eulero affronta quì, rapidamente, il problema delle superfici isometriche con i casi particolari delle superfici sviluppabili e delle superfici isometriche ad una sfera.

coniche il cui asse è perpendicolare alla base convengono ad una superficie piana, e i corpi espressi da queste equazioni $az = xy$ e $2az = x^2 + y^2$ hanno le loro superfici uguali, poiché $p^2 + q^2$ è lo stesso da una parte e dell'altra; ma si trova facilmente un'infinità di altre superfici della stessa natura, in cui si possono anche introdurre delle funzioni arbitrarie discontinue. Ora è più difficile trovare tali corpi, dei quali la superficie convenga a quella della sfera. Si tratta di trovare una tale equazione integrabile $dz = pdx + qdy$ [tale] che $p^2 + q^2$ sia uguale a $\dfrac{x^2 + y^2}{a^2 - x^2 - y^2}$. Posso ben definire tutte le funzioni possibili per p e q, ma non posso ricavarne nessuna dalla quale l'equazione tra x, y e z diventi algebrica. È ancora un argomento che richiede la nuova branca dell'Analisi che verte sulle funzioni di due o più variabili , essendo dati certi rapporti tra i loro differenziali.

Per quanto riguarda il problema del movimento di un corpo attirato verso due punti fissi in ragione inversa del quadrato delle distanze, ho trovato il modo di costruire la curva che il corpo descrive quand'anche essa non è nello stesso piano, e vi ho osservato un'infinità di casi in cui la curva diventa algebrica, oltre quelli dell'ellisse o dell'iperbole i cui fuochi cadono nei due punti fissi.

Ho l'onore di essere con la più grande considerazione, Signore,

Vostro umilissimo e obbedientissimo servitore,
L. Euler

11.3 Commento della Lettera

Eulero scrive a Lagrange il 9 novembre 1762 dopo avere finalmente ricevuto il secondo Volume delle "Misc. Taurin". Si profonde in elogi per i contributi di Lagrange contenuti in tale Volume, ma si riferisce principalmente alle ricerche sulla propagazione del suono. Infatti, nella lettera si trova solo un breve accenno all'"Application[5]": "Quale soddisfazione avrebbe il Signor

[5] "Application de la méthode exposée dans le Mémoire précédent à la solutions des différentes problèmes de Dynamique"; vedi Commento della Lettera, lettera del 14 giugno

De Maupertuis, se fosse ancora in vita, nel vedere il suo principio della minima azione portato al più alto grado di dignità a cui esso potesse aspirare."
Eulero non aggiunge nessun'altra considerazione, in coerenza con l'atteggiamento che aveva assunto, fin dall'inizio, nei confronti delle ricerche di Lagrange sul principio della minima azione e sul calcolo delle variazioni[6]. Infatti, Eulero spende poche parole anche per l'"Essay", che viene considerato a fine lettera. Queste parole vengono spese, fra l'altro, per introdurre alcune considerazioni su delle applicazioni fatte da Lagrange nelle due Appendici[7] che concludono l'"Essay". Infatti, Eulero scrive: "Per quanto riguarda il problema degli isoperimetri, preso nella sua più grande generalità, è a voi che siamo debitori per la migliore soluzione, e sono stato molto sorpreso di vedere con quale abilità l'avete esteso alle superfici e anche ai poligoni. Voi converrete che queste profonde ricerche meriterebbero uno sviluppo molto più dettagliato. È un peccato che la soluzione del caso in cui si richiede, tra tutti i solidi dello stesso volume, quello la cui superficie è più piccola, conduca ad un'equazione quasi del tutto intrattabile; si vede bene che le superfici sferiche e cilindriche vi sono comprese, senza però essere in grado di dedurle[8]. Ma i corpi hanno delle stranezze che non si trovano nelle superfici [. . .]."
Questo atteggiamento freddo e schivo di Eulero, che dura da vari anni, è dovuto a due principali avvenimenti che vedono Lagrange come protagonista: per primo, la scoperta di quel metodo analitico (il metodo delle variazioni), alla base del calcolo delle variazioni, che da tempo Eulero cercava; per secondo, la generalizzazione del principio della minima azione che Eulero aveva formulato e giustificato nel caso di un solo corpo e che avrebbe potuto dare già ai tempi della pubblicazione del suo "Methodus inveniendi" (1744), ma che non fornì poiché non in possesso dell'indespensabile metodo delle varia-

1762, pagina 183.

[6]Vedi: Commento della Lettera, lettera del 28 ottobre 1762, 'Eulero, Lagrange e il calcolo delle variazioni', pagina 189 e seguenti.

[7]L'Appendice I riguarda le superfici minimali, mentre nell'Appendice II viene affrontato il problema di trovare, fra tutti i poligoni che hanno un numero dato di lati, quello la cui area è la più grande.

[8]Vedi: Commento della Lettera, lettera dell'1 marzo 1760, pagina 160.

zioni[9]. Eulero, sentendosi superato da Lagrange e avendo perso l'occasione di scoprire e applicare il principio della minima azione in tutta la sua generalità alla meccanica, abbandonò ogni suo interesse per questo argomento.

Per quanto riguarda, invece, le ricerche di Lagrange sulla propagazione del suono, Eulero si è mostrato sempre molto entusiasta, rivolgendo a Lagrange numerosi complimenti ed elogiandolo in ogni occasione. È infatti innegabile, il grande valore che hanno avuto per Eulero, le memorie di Lagrange sulla teoria della propagazione del suono. In una lettera a Lambert del 4 dicembre 1762, Eulero insistendo sull'importanza delle memorie di Lagrange che si trovano nel secondo Volume delle "Misc. Taurin.", scrive: *"Ora avrete visto, Signore, il nuovo volume dell'Accademia Reale delle Scienze di Torino, e sarete stato sorpreso, così come me, dell'importanza delle memorie del Signor de la Grange, che contengono le più sublimi scoperte, e di cui tutte le altre Accademie avranno sufficientemente di cosa riempire più volumi. Le ricerche sulla propagazione del suono sono ora arrivate al loro massimo, dopo essere state riportate ad un Analisi meglio fondata. L'infinità di equazioni, che esprimono la prima soluzione, e che il Signor de la Grange ha saputo maneggiare in modo ingenioso, è stata ridotta ad una sola equazione differenziale, ma che è sostanzialmente differente da quelle che abbiamo trattato fino a quì [...]".*

Torniamo alla lettera del 9 novembre 1762, dove Eulero dopo avere fatto il breve accenno all'"Application" di Lagrange, scrive: "Per quanto riguarda le vostre altre ricerche, si tratta principalmente di un ramo del tutto nuovo dell'Analisi, che meriterebbe di essere sviluppato con tutta la cura possibile. È la risoluzione di questo tipo di equazione

$$\Big(\frac{ddz}{dt^2}\Big) = P\Big(\frac{ddz}{dx^2}\Big) + Q\Big(\frac{dz}{dx}\Big) + Rz, \tag{11.1}$$

il cui integrale completo contiene per sua propria natura delle funzioni indeterminate, e anche discontinue, contro le pretese del Signor D'Alembert, il quale tuttavia sarà molto a disagio per le valide risposte che gli avete fornito,

[9]Vedi: Commento della Lettera, lettera del 28 ottobre 1762, pagina 191.

anche se dubito molto che si arrenderà a ciò."
Le "valide risposte", alle quali Eulero si riferisce, sono fornite nella memoria "Addition à la première partie des Recherches sur la nature et la propagation du son imprimées dans le volume précédent", contenuta nel secondo Volume delle "Misc. Taurin.", nella quale Lagrange risponde alle critiche formulate contro le sue "Recherches" negli "Opuscoles mathématiques" di D'Alembert[10]. Infatti, D'Alembert nella lettera del 27 novembre 1761 che invia a Lagrange e che contiene i primi due Volumi dei suoi "Opuscoles", scrive: *"Sarei molto lusingato, Signore, se quest'Opera possa meritare la vostra approvazione. Non posso tuttavia nascondervi che, sull'articolo delle corde sonore, non ho potuto essere del vostro parere; ma opponendomi alla vostra opinione, ho parlato di voi nella mia Opera, con la più grande stima che il vostro talento mi ha suscitato [...]".* Lagrange l'1 gennaio 1762 invia a D'Alembert il secondo Volume delle "Misc. Taurin.". D'Alembert nella lettera del 15 novembre 1762, ringraziando Lagrange per l'invio del Volume, scrive: *"Sono stato così occupato che non ho ancora avuto il tempo di leggere questa bella Opera, che ha aumentato la grande opinione che ho del vostro genio."* Poi, dopo avere ringraziato Lagrange per avergli segnalato due innavvertenze, precisa: *"Per quanto riguarda le corde vibranti, vi confesso che non mi sono ancora ricreduto, così come le leggi del movimento dei fluidi che voi attaccate. Credo anche di avere trovato delle nuove motivazioni per confermarmi su questi due punti."*
Ora Eulero, nella lettera del 9 novembre 1762, notando l'interesse di Lagrange per la risoluzione di equazioni del tipo di (11.1) e osservando che "bisognerebbe cercare dei metodi più adatti per trattare queste equazioni", espone il metodo di sostituzione lineare delle variabili e lo applica al caso più semplice:

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) \tag{11.2}$$

[10]Vedi: Commento della Lettera, lettera del 14 giugno 1762, pagina 183.

che permette di riportare l'equazione delle corde vibranti, appena scritta, alla forma

$$\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0\,. \tag{11.3}$$

Cerchiamo di ricostruire tutti i passaggi e i calcoli esposti da Eulero.
Al posto delle variabili t ed x presenti nell'equazione (11.2), Eulero introduce altre due variabili p e q, tali che:

$$p = \alpha x + \beta t \quad e \quad q = \gamma x + \delta t\,. \tag{11.4}$$

Considera una qualsiasi funzione v di t e x.
Allora:

$$dv = dt\Big(\frac{dv}{dt}\Big) + dx\Big(\frac{dv}{dx}\Big)$$

e con le nuove variabili

$$dv = dp\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + dq\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\,. \tag{11.5}$$

Ora poiché

$$dp = \alpha\, dx + \beta\, dt \quad e \quad dq = \gamma\, dx + \delta\, dt$$

sostituendo tali valori nella (11.5), si ha

$$\begin{aligned} dv &= (\alpha\, dx + \beta\, dt)\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + (\gamma\, dx + \delta\, dt)\Big(\frac{dv}{dq}\Big) = \\ &= \alpha\, dx\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \beta\, dt\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\, dx\Big(\frac{dv}{dq}\Big) + \delta\, dt\Big(\frac{dv}{dq}\Big) = \\ &= dx\Big(\alpha\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\Big) + dt\Big(\beta\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\Big) \end{aligned}$$

da cui segue

$$\Big(\frac{dv}{dt}\Big) = \beta\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dv}{dq}\Big) \quad e \quad \Big(\frac{dv}{dx}\Big) = \alpha\Big(\frac{dv}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dv}{dq}\Big)\,.$$

Per quanto appena scritto, essendo anche z una funzione di t e x, si ha

$$\Big(\frac{dz}{dt}\Big) = \beta\Big(\frac{dz}{dp}\Big) + \delta\Big(\frac{dz}{dq}\Big)\,, \tag{11.6}$$

e

$$\Big(\frac{dz}{dx}\Big) = \alpha\Big(\frac{dz}{dp}\Big) + \gamma\Big(\frac{dz}{dq}\Big)\,. \tag{11.7}$$

Dalla (11.6) segue

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \beta\left(\frac{ddz}{dp^2}\right)\underbrace{\left(\frac{dp}{dt}\right)}_{=\beta} + \beta\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)\underbrace{\left(\frac{dq}{dt}\right)}_{=\delta} + \delta\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)\left(\frac{dq}{dt}\right) + \delta\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)\left(\frac{dp}{dt}\right) =$$

$$= \beta^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + \beta\delta\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \beta\delta\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \delta^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \beta^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \delta^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right). \tag{11.8}$$

Dalla (11.7) segue

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \alpha\left(\frac{ddz}{dp^2}\right)\underbrace{\left(\frac{dp}{dx}\right)}_{=\alpha} + \alpha\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)\underbrace{\left(\frac{dq}{dx}\right)}_{=\gamma} + \gamma\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)\left(\frac{dp}{dx}\right) =$$

$$= \alpha^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + \alpha\gamma\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \alpha\gamma\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \gamma^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \alpha^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\alpha\gamma\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \gamma^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right). \tag{11.9}$$

Ora Eulero pone:

$$\beta^2 - \alpha^2\, a = 0 \quad e \quad \delta^2 - \gamma^2\, a = 0$$

o

$$\beta = \alpha\sqrt{a} \quad e \quad \delta = -\gamma\sqrt{a}\,, \tag{11.10}$$

in modo da ottenere la seguente equazione

$$2(\beta\delta - \alpha\gamma\, a)\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0 \quad o \quad anche \quad \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0.$$

Infatti sostituendo le (11.8) e (11.9) nella (11.2), si ha

$$\beta^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \delta^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right) = a\Big[\alpha^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\alpha\gamma\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \gamma^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)\Big]$$

poiché $\beta^2 = a\,\alpha^2$ e $\delta^2 = a\,\gamma^2$, segue

$$a\,\alpha^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\beta\delta\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + a\,\gamma^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right) = a\,\alpha^2\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2a\,\alpha\gamma\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + a\,\gamma^2\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)$$

$$\Rightarrow 2\beta\delta\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 2a\,\alpha\gamma\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big)$$
$$\Rightarrow 2\beta\delta\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) - 2a\,\alpha\gamma\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0$$

$$\Rightarrow 2(\beta\delta - a\,\alpha\gamma)\Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Big(\frac{ddz}{dpdq}\Big) = 0 \qquad (11.11)$$

Considerando la (11.4) e la (11.10), si ha:

$$p = \alpha x + \beta t = \alpha x + \alpha\sqrt{a}\,t = \alpha(x + t\sqrt{a})$$

e

$$q = \gamma x + \delta t = \gamma x - \gamma\sqrt{a}\,t = \gamma(x - t\sqrt{a})\,.$$

Integrando la (11.11), si ottiene

$$z = \varphi(q) + \psi(p) = \varphi(x - t\sqrt{a}) + \psi(x + t\sqrt{a})\,,$$

dove le funzioni φ e ψ sono assolutamnete indeterminate e del tutto arbitrarie.

Ora Eulero cambia argomento: espone qualche considerazione sull'"Essay" di Lagrange e cita brevemente le sue ricerche sul movimento di un corpo attirato verso due punti fissi in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Eulero dedica tre memorie a quest'ultimo problema: "De motu corporis ad duo centra virium fixa atracti" (E.301), letta davanti all'Accademia di Berlino il 5 aprile 1759; "Problème. Un corps etant attire en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique, resolu par M. Euler" (E.337), letta il 28 ottobre 1762; "De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti" (E.328), letta il 15 luglio 1763.

Con questa lettera del 9 novembre 1762, la corrispondenza fra Eulero e Lagrange si interrompe di nuovo. Riprenderà tre anni dopo con la lettera di Eulero del 16 febbraio 1765 e verterà sui più disparati argomenti: da problemi vari e di grande rilevanza di teoria dei numeri, all'integrazione di particolari

tipi di funzioni, senza però trattare il problema delle corde vibranti.
La lunga interruzione epistolare (9 novembre 1762 - 16 febbraio 1765) non può essere attribuita solo alla guerra dei Sette Anni. Sembra, infatti, abbastanza sorprendente che si sia dovuto aspettare l'inizio del 1765 per riprendere la corrispondenza, quando la firma dei trattati di pace di Parigi e di Hubertsbourg risaliva a due anni prima (febbraio 1763). Il ripristino della pace aveva permesso ad Eulero, già dai primi mesi del 1763, di programmare la sua partenza per Pietroburgo, alla quale però rinuncierà improvvisamente a luglio dello stesso anno, e a Lagrange di recarsi a Parigi per un soggiorno piuttosto lungo (novembre 1763 - maggio 1764).
La situazione politica, quindi, non giustifica questo ritardo che sembra attribuibile ad un raffreddamento dei rapporti fra Lagrange e Eulero. I segni di tale raffreddamento erano visibili già da tempo; Lagrange, di certo, non era stato contento di sopprimere il suo trattato sul calcolo delle variazioni, nel momento in cui era venuto a sapere che Eulero aveva prodotto due vaste memorie sullo stesso argomento[11].
Ma, probabilmente, due nuovi elementi hanno contribuito a raffreddare i rapporti fra Eulero e Lagrange. Per prima cosa, il soggiorno di Lagrange a Parigi, durato sei mesi, che gli ha permesso di mettersi in contatto diretto con i principali uomini colti francesi, fra cui D'Alembert. Eulero, infatti, temeva che Lagrange finisse per aderire alle posizioni difese da D'Alembert per quanto riguarda il problema delle corde vibranti.
L'altra ragione di disaccordo, quasi sicuramente più determinante, riguarda il concorso bandito dall'Accademia di Parigi per il 1764 e relativo alla teoria della Luna. Infatti, anche se nella precedente corrispondenza, Eulero e Lagrange non avevano fatto alcuna allusione alle questioni di astronomia e di meccanica celeste, entrambi, l'uno all'insaputa dell'altro, avevano dedicato parte del 1763 a svolgere lavori da destinare a questo concorso. La memoria di Lagrange, ricevuta a Parigi il 9 agosto 1763, venne premiata dall'Assemblea

[11]Vedi: Commento della Lettera, lettera del 28 ottobre 1762, 'Eulero, Lagrange e il calcolo delle variazioni', pagina 192.

pubblica il 2 maggio 1764, sotto approvazione di una commissione composta da Clairaut, Camus, Le Mannier, Lalande e Bezout. La commissione non premiò Eulero perché la sua memoria si basava sul principio degli assi principali di rotazione, già utilizzato in un lavoro coronato nel 1761; il metodo esposto nella memoria di Lagrange, invece, era "del tutto nuovo e molto elegante".

Bibliografia

[1] Leonhard Euler, *Commercium epistolicum, Euler, Opera, series IV A, Vol. V, Correspondance de Leonhard Euler avec A.C. Clairaut, J. D'Alembert et J.L. Lagrange*, A.P. Juskevic e R. Taton, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.

[2] Morris Kline, *Storia del pensiero matematico, Volume I, Dall'Antichità al Settecento*, Edizione italiana a cura di Alberto Conte, Einaudi Editore, Torino, 1991.

[3] *Correspondance de Lagrange avec Euler*, in Oeuvres de Lagrange publiées par J.-A. Serret, Vol. XIV, Gauthier-Villars, Parigi, 1867, p. 133-245. La Gallica-Bibliothèque nationale de France, ha anche reso la corrispondenza disponibile on line: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k229949x/f145.image.r=lagrange.langEN

[4] Grattan Guinnes, *From the calculus to set theory, 1630-1910: an introductory history*, Duckworth, London, 1980.

[5] C.A. Truesdell, *The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638-1788. Introduction to Leonhardi Euleri Opera Omnia Vol. X et XI seriei secundae*, Orell Füssli Turici, Svizzera, 1960.

[6] Heinrich G.W. Begher, Robert P. Gilbert e Man-Wah Wong, *Analysis and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 2003, p. 255-258.

[7] Dionigi Galletto e Bruno Barberis, *Euler e Lagrange*, da Volume Monografico *Leonhard Euler nel terzo centenario della nascita*, p. 61-76, Accademia delle Scienze di Torino, 2007. Disponibile on line al sito www.accademiadellescienze.it/media/310

[8] Silvia Mazzone, *Euler e i fondamenti dell'Analisi*, da Volume Monografico *Leonhard Euler nel terzo centenario della nascita*, p. 98-102, Accademia delle Scienze di Torino, 2007. Disponibile on line al sito www.accademiadellescienze.it/media/310

[9] *Présentation du Mémoire 1, Recherches sur les vibrations des Cordes sonores*, disponibile on line al sito http://www.edu.upmc.fr/maths/prive/guilbaud/Master-Enseignement/M2/Dossiers/Cordes-vibrantes-Jouve-2008.pdf

[10] Guillaume Jouve, *Imprèvues et piéges des cordes vibrantes chez D'Alembert (1755-1783). Doutes et certitudes sur les équations aux dérivées partielles, les séries et les fonctions, Tome I*, Tesi di Dottorato, 2007.

[11] Diderot & D'Alembert, *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, Tomo XV, 1765, p. 343.

[12] Jean Le Rond D'Alembert, *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1747), 1749, p. 214-219.

[13] Jean Le Rond D'Alembert, *Addition au memoire sur la courbe que forme une corde tendüe, mise en vibration*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1750), 1752, p. 355-360.

[14] *The Euler Archive*, libreria digitale dedicata ai lavori e alla vita di Eulero, contiene tutte le sue pubblicazioni. Sito internet di riferimento: http://www.eulerarchive.com/

[15] Leonhard Euler, *De infinitis curvus eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis ejusdembgeneris*, Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, Volume 7 (1734), 1740, p. 174-183; Opera Omnia, serie 1, Vol. 22, p. 36-56, (E.44).

[16] Leonhard Euler, *Sur la vibration des cordes*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, Volume IV (1748), 1750, p. 69-85 ; Opera Omnia, serie II, Vol. 10, p. 63-77, (E.140).

[17] Leonhard Euler, *Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1753), 1755, pag. 196-222; Opera Omnia, serie II, Vol. 10, pag. 233-254, (E213).

[18] Leonhard Euler, *Lettre de M. Euler à M. de La Grange. 1 janvier 1760, Recherches sur la propagation des ébranlements dans un milieu élastique*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société royale des sciences de Turin, Volume II (1760-61), 1762, p. 1-10, (E.268).

[19] Leonhard Euler, *De la propagation du son*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1759), 1766, p. 185-209; Opera Omnia, serie 3, Vol. 1, p. 428-451, (E.305).

[20] Leonhard Euler, *Supplement aux recherches sur la propagation du son*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1759), 1766, p. 210-240; Opera Omnia, serie 3, Vol. 1, p. 452-483, (E.306).

[21] Leonhard Euler, *Continuation des recherches sur la propagation du son*, Histoire de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1759), 1766, p. 241-264; Opera Omnia, serie 3, Vol. 1, p. 484-507, (E.307).

[22] Joseph-Louis Lagrange, *Recherches sur la méthode de maximis et minimis*, Miscellanea philosophico-mathematica Societatis Privatae Taurinensis, Volume I (1757-1759), 1759.

[23] Joseph-Louis Lagrange, *Recherches sur la nature et la propagation du son*, Miscellanea philosophico-mathematica Societatis Privatae Taurinensis, Volume I (1757-1759), 1759.

[24] Joseph-Louis Lagrange, *Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son*, Mélanges de philosophie et de mathématique de la Société Royale de Turin, Volume II (1760-1761), 1762.

[25] Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687, Libro II, Proposizione XLIX, Problema XI, p. 713.

[26] Johannes Kepler, *Ad Vitellionem Paralipomena, quibus Astronomiae pars Optica traditur*, 1604, Capitolo I, Proposizione IX, p. 10.

[27] O. Gal & R. Chen-Morris, *The Archaeology of the Inverse Square Law: Metaphysical Images and Mathematical Practices*, History of Science, Vol. 43, p. 391-414. Disponibile on line al sito http://articles.adsabs.harvard.edu//full/2005HisSc..43..391G/0000398.000.html

[28] Ronald Calinger, *Leonhard Euler: vita e pensiero*, Matepristem, sito internet: http://matematica.unibocconi.it/articoli/leonhard-euler-vita-e-pensiero

[29] Luigi Pepe, *Giuseppe Luigi Lagrange*, Enciclopedia Treccani on line, sito internet: http://www.treccani.it/enciclopedia/giuseppe-luigi-lagrange/