

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL FENOMENO DI GIBBS

Tesi di Laurea in Complementi di Analisi

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari

Presentata da:
Chiara Guidi

I Sessione
2012-2013

*Alla mia famiglia,
che mi sostiene e mi incoraggia.*

*A Lorenzo,
che sa sempre come farmi sorridere.*

Introduzione

Questa trattazione si propone di fornire una spiegazione del fenomeno di Gibbs in termini matematici. Con l'espressione fenomeno di Gibbs intendiamo la presenza di forti oscillazioni nei polinomi di Fourier di una funzione con discontinuità di prima specie. Si osserva che queste anomalie, presenti vicino ai punti di discontinuità, non sembrano diminuire aumentando il grado del polinomio, al punto che la serie pare non convergere alla funzione sviluppata. Osserveremo che utilizzando un altro tipo di polinomi trigonometrici, quelli di Fejér in luogo di quelli di Fourier, scomparirà il fenomeno di Gibbs. Nonostante ciò, spesso si preferisce rappresentare una funzione utilizzando il suo polinomio di Fourier poiché questo è il polinomio trigonometrico che meglio approssima la funzione in norma quadratica.

Anche se il fenomeno di Gibbs non porta il suo nome, il primo che lo notò fu il matematico inglese Henry Wilbraham nel 1848 e fu solo dopo cinquant'anni, nel 1898, che Josiah Willard Gibbs, ne diede una descrizione precisa sulla rivista *Nature*. Anche Bôcher nel 1906 diede il suo contributo dimostrando e generalizzando le affermazioni fatte da Gibbs. Sebbene la spiegazione di questo fenomeno sia stata data più di cento anni fa, l'argomento rimane attuale. Infatti nei processi di approssimazione, come ad esempio la ricostruzione o il filtraggio di immagini o segnali, è fondamentale eliminare o comunque tenere sotto controllo le oscillazioni dovute a tale fenomeno.

Abbiamo deciso di dividere la trattazione in tre capitoli. Nel primo capitolo ricaveremo dal teorema di localizzazione di Riemann condizioni sufficienti per la convergenza della serie di Fourier, dalle quali, sotto opportune ipotesi,

seguirà che una funzione con discontinuità di prima specie è sviluppabile in serie di Fourier. Osserveremo inoltre che tra tutti i polinomi trigonometrici quelli di Fourier godono dell'importante proprietà di minimizzare l'errore in norma quadratica. Nel secondo capitolo viene analizzato in dettaglio il fenomeno di Gibbs. Studieremo il comportamento dei polinomi di Fourier della funzione onda quadra vicino ad un punto di discontinuità quantificando l'entità delle sovraoscillazioni. Utilizzeremo poi i risultati trovati per dimostrare che il fenomeno di Gibbs si presenta tutte le volte che si tronca la serie di Fourier di funzione periodica, regolare a tratti, con discontinuità di prima specie. Osserveremo poi i grafici dei polinomi di Fourier dell'onda a dente di sega constatando, anche in questo caso, il verificarsi del fenomeno di Gibbs. Infine nell'ultimo capitolo definiremo la convergenza secondo Cesàro e le somme di Fejér dimostrando che con queste è possibile eliminare l'effetto Gibbs. Nell'appendice si può trovare uno dei programmi Matlab ideati e utilizzati per produrre i grafici presenti in questa trattazione.

Indice

Introduzione	i
1 Alcuni risultati dell' analisi di Fourier	1
1.1 Polinomi e serie di Fourier	1
1.2 Convergenza della serie di Fourier	4
2 Il fenomeno di Gibbs	11
2.1 Un caso particolare: l'onda quadra	11
2.1.1 Calcolo della serie di Fourier di q	11
2.1.2 Calcolo dei massimi e dei minimi di $S_{2n-1}(q; x)$	14
2.1.3 Comportamento di $S_{2n-1}(q; x)$	15
2.2 Un risultato generale	19
2.3 Un altro esempio: l'onda a dente di sega	21
3 Le somme di Fejér: una soluzione al fenomeno di Gibbs	23
3.1 La convergenza secondo Cesaro e il teorema di Fejér	23
3.2 Eliminazione del fenomeno di Gibbs	28
Appendice	33
Bibliografia	37

Capitolo 1

Alcuni risultati dell' analisi di Fourier

1.1 Polinomi e serie di Fourier

Definizione 1. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica $f \in L^1(] - \pi; \pi[)$. Definiamo polinomio di Fourier di grado $n \in \mathbb{N}$ della funzione f il polinomio trigonometrico reale

$$S_n(f; t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt$$

Possiamo osservare che i coefficienti a_0, a_k, b_k , detti coefficienti di Fourier di f , sono ben definiti in quanto $|\cos kt| \leq 1$, $|\sin kt| \leq 1$ e la funzione f è sommabile su $] - \pi; \pi[$.

Come dimostra la seguente osservazione tra tutti i polinomi trigonometrici di grado al più n , quelli di Fourier minimizzano l'errore in norma quadratica. Per questo nelle applicazioni si preferisce rappresentare la funzione utilizzando questi ultimi.

Osservazione 1. Sia $I =] - \pi; \pi[$, sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica $f \in L^2(I)$. Allora

$$\|S_n(f) - f\|_{L^2(I)} \leq \|p - f\|_{L^2(I)}$$

qualsiasi $p \in T_n$ ¹

Dimostrazione. Consideriamo la norma quadratica $\|p\|_{L^2(I)}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} p^2(t) dt$. È noto che T_n sia uno spazio vettoriale di dimensione $2n + 1$ e che

$$\{e_0; \dots; e_{2n}\} := \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\cos t}{\sqrt{2\pi}}; \dots; \frac{\cos nt}{\sqrt{2\pi}}; \frac{\sin t}{\sqrt{2\pi}}; \dots; \frac{\sin nt}{\sqrt{2\pi}} \right\}$$

sia una base ortonormale rispetto alla norma quadratica. Ne segue che qualsiasi polinomio trigonometrico $p \in T_n$ può essere scritto come

$$p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k \quad \text{dove} \quad c_k = \int_{-\pi}^{\pi} p(t) e_k(t) dt \quad \forall k = 0, \dots, 2n$$

In particolare il polinomio di Fourier di f di grado n risulterà essere

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k e_k \quad \text{dove} \quad \hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e_k(t) dt \quad \forall k = 0, \dots, 2n$$

Vale che

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_{L^2(I)} &= \int_{-\pi}^{\pi} (S_n(f; t) - f(t))^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt + \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \|p - f\|_{L^2(I)} &= \int_{-\pi}^{\pi} (p(t) - f(t))^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k \end{aligned}$$

¹Usiamo la notazione T_n per indicare l'insieme dei polinomi trigonometrici di grado minore o uguale ad n

dunque

$$\begin{aligned} \|p - f\|_{L^2(I)} - \|S_n(f) - f\|_{L^2(I)} &= \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k f_k + \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \hat{f}_k)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Da cui la tesi. □

Introduciamo ora una famiglia di funzioni utile per dare una rappresentazione integrale dei polinomi di Fourier.

Definizione 2. Definiamo n -esimo nucleo di Dirichelet il polinomio trigonometrico di grado n

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$$

Il nucleo di Dirichelet gode di alcune importanti proprietà:

- i)* Il nucleo di Dirichelet è una funzione pari;
- ii)* Il nucleo di Dirichelet è una funzione 2π -periodica;
- iii)* Vale che

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\pi D_n(t) dt \tag{1.1}$$

Utilizzando le formule di Prostaferesi è immediato verificare che qualsiasi $t \in]0; \pi[$ vale

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{t}{2}}$$

La seguente osservazione, che non dimostriamo, fornisce una rappresentazione integrale per i polinomi di Fourier.

Osservazione 2. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica $f \in L^1(] - \pi; \pi[)$. Allora $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ il polinomio di Fourier di f si può scrivere nella forma:

$$S_n(f; t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds$$

Notiamo che per passare dal polinomio di Fourier di grado n a quello di grado $n+1$ è sufficiente aggiungere due termini alla sommatoria:

$$S_{n+1}(f; t) = S_n(f; t) + a_{n+1} \cos((n+1)t) + b_{n+1} \sin((n+1)t)$$

Possiamo quindi osservare che “la successione dei polinomi di Fourier di f si presenta spontaneamente come una serie” [2, p.74]

Definizione 3. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica $f \in L^1(] - \pi; \pi[)$. Si chiama serie di Fourier di f la serie trigonometrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

dove a_0, a_k, b_n con $k \in \mathbb{N}$ sono i coefficienti di Fourier di f .

1.2 Convergenza della serie di Fourier

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(] - \pi; \pi[)$ diciamo che:

- la serie di Fourier di f converge puntualmente in $t \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f; t) \in \mathbb{R}$$

- f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto $t \in \mathbb{R}$ se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f; t) = f(t)$$

Vogliamo sottolineare che il problema della convergenza della serie di Fourier (cioè quello dell'esistenza del limite di S_n) è diverso da quello della sviluppabilità di f (cioè dall'eventuale uguaglianza di tale limite con $f(t)$). Infatti i coefficienti di Fourier di f , essendo definiti come integrali di Lebesgue, non variano modificando la funzione su un insieme di misura nulla secondo Lebesgue. Ne segue che anche la successione dei polinomi di Fourier rimane invariata. Dunque, può accadere che la serie sia convergente in un punto ma che il suo limite non sia la funzione calcolata in tale punto. Vogliamo ora ricavare delle condizioni che garantiscano la convergenza della serie di Fourier. A tale scopo sarà utile il seguente lemma la cui dimostrazione si può trovare in [5, p.70].

Lemma 1.2.1. *(di Riemann-Lebesgue) Sia $g:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ con $g \in L^1(]a; b[)$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ allora valgono*

$$i) \lim_{|M| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \sin Mt \, dt = 0$$

$$ii) \lim_{|M| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) \cos Mt \, dt = 0$$

Dimostriamo ora un teorema fondamentale per definire condizioni sufficienti per la convergenza della serie di Fourier

Teorema 1.2.2. *(Teorema di localizzazione di Riemann) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi; \pi[)$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f; t) = \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.2)$$

è equivalente all'esistenza di $c \in]0; \pi[$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{1}{s} \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \sin((n+1/2)s) \, ds = 0 \quad (1.3)$$

Dimostrazione. Poniamo $m_f(s, t) := \frac{f(t+s)+f(t-s)}{2}$

Per per prima cosa troviamo una condizione equivalente alla (1.2)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f; t) = \lambda \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f; t) - \lambda = 0$$

per l'osservazione 2

$$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi m_f(s, t) D_n(s) ds - \lambda = 0 \quad (1.4)$$

per la (1.1)

$$\iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (m_f(s, t) - \lambda) D_n(s) ds = 0$$

Per concludere la dimostrazione basta provare che (1.3) è equivalente a (1.4).

Definiamo

$$g(s) = (m_f(s, t) - \lambda) \frac{1}{\sin s/2}$$

Tale funzione è sommabile su $]c; \pi[$ per ogni $c \in]0; \pi[$, quindi per il lemma di Riemann-Lebesgue

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_c^\pi g(s) \sin((n + 1/2)s) ds = 0$$

Ne segue

$$(1.4) \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c g(s) \sin((n + 1/2)s) ds = 0$$

se e solo se $\exists c \in]0; \pi[$ tale che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c (m_f(s, t) - \lambda) \left(\frac{1}{\sin s/2} - \frac{2}{s} \right) \sin((n + 1/2)s) ds \\ + \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{2}{s} (m_f(s, t) - \lambda) \sin((n + 1/2)s) ds = 0 \end{aligned}$$

La funzione $s \mapsto \left(\frac{1}{\sin s/2} - \frac{2}{s} \right)$ è continua e limitata su $]0; c[$, quindi la funzione

$$s \mapsto m_f(s, t) \left(\frac{1}{\sin s/2} - \frac{2}{s} \right)$$

è sommabile su $]0; c[$. Sempre usando il lemma di Riemann-Lebesgue si conclude che

$$(1.4) \iff \exists c \in]0; \pi[\quad \text{tale che} \quad \int_0^c \frac{2}{s} m_f(s, t) \sin((n + 1/2)s) ds = 0$$

□

Definizione 4. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione per la quale in esistono finiti i limiti destro $f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ e sinistro $f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Si definisce

$$f^*(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

Teorema 1.2.3. (di Dini) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, $f \in L^1(] - \pi; \pi[)$, sia $t \in \mathbb{R}$. Se

$$\text{esiste finito } f^*(t) \quad (1.5)$$

e se esiste $c \in]0; \pi[$ tale che

$$s \mapsto \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s} \in L^1(]0; c[) \quad (1.6)$$

Allora la serie di Fourier di f è convergente puntualmente in t a $f^*(t)$

Dimostrazione. Poiché la funzione (1.6) è sommabile, per il lemma di Riemann-Lebesgue vale la (1.3) dove $\lambda = f^*(t)$. Quindi, per il teorema di localizzazione di Riemann, vale la (1.2). \square

Teorema 1.2.4. (criterio di Hölder) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, sommabile in $] - \pi; \pi[$, sia $t \in \mathbb{R}$. Se esistono $\alpha \in]0; 1[$, $M, \delta > 0$ tali che

$$|f(s) - f(u)| \leq M|s - u|^\alpha \quad \forall s, u \in]t - \delta, t[, \quad \forall s, u \in]t, t + \delta[\quad (1.7)$$

Allora la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è f^*

Dimostrazione. Per provare il teorema basta verificare che valgono le ipotesi del teorema di Dini. Dimostriamo innanzitutto che esiste finito $\lim_{s \rightarrow 0^+} f(t+s)$. Questo equivale a provare che qualsiasi successione reale positiva $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ esiste finito $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t+a_n)$. Per la (1.7) nota anche come condizione di Hölder si ha che

$$|f(t+a_n) - f(t+a_m)| \leq M|a_n - a_m|^\alpha$$

Da tale disuguaglianza e dal fatto che $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy segue che lo è anche $(f(t+a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dunque esiste finito il limite $f(t^+)$.

In modo del tutto analogo si prova l'esistenza anche di $f(t^-) \in \mathbb{R}$. Risulta quindi soddisfatta la condizione (1.5).

Sempre per la (1.7), per $0 < s < \delta$ vale:

$$f(t+s) - f(t^+) \leq \lim_{u \rightarrow 0} M|s-u|^\alpha = Ms^\alpha$$

analogamente

$$f(t+s) - f(t^+) \leq Ms^\alpha$$

Dunque

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \left| \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right| &\leq \frac{1}{2s} (|f(t+s) - f(t^+)| + |f(t-s) - f(t^-)|) \\ &\leq \frac{M}{2s} (|s|^\alpha + |s|^\alpha) \\ &= \frac{M}{s^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

La condizione (1.6) è soddisfatta in quanto la funzione $s \mapsto \frac{1}{s^{1-\alpha}} \in L^1(]0; c[)$ □

Definizione 5. La funzione $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ è detta regolare a tratti in $[a; b]$ se valgono le seguenti proprietà:

i) esiste un numero finito di punti x_0, \dots, x_{n+1} con

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$$

tali che f è di classe C^1 negli intervalli $]x_k; x_{k+1}[$ per $k = 0, \dots, n$;

ii) nei punti x_1, \dots, x_n esistono finite le derivate destra e sinistra; nel punto x_0 esiste finita la derivata destra; nel punto x_{n+1} esiste finita la derivata sinistra;

iii) nei punti x_1, \dots, x_n esistono finiti i limiti destro e sinistro, nel punto x_0 esiste finito il limite destro, nel punto x_{n+1} esiste finito il limite sinistro.

Quindi le uniche discontinuità ammesse da una funzione di questo tipo sono quelle di prima specie.

Corollario 1.2.5. *Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica $f \in L^1(] - \pi; \pi[)$, regolare a tratti in $[-\pi; \pi]$. Allora qualsiasi $t \in [-\pi; \pi]$ la serie di Fourier di f converge ad $f^*(t)$*

Dimostrazione. Per ipotesi la funzione è regolare a tratti su $[-\pi; \pi]$ esistono quindi $n + 2$ punti

$$-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = \pi$$

tali che f è di classe C^1 negli intervalli $]x_k, x_{k+1}[$ per $k = 0, \dots, n$ e nei quali valgono le proprietà della Definizione 5.

Se $t = x_k$ per un certo $k \in \{1, \dots, n\}$ ², sia $0 < \delta < \min\{|x_{k+1} - t|; |t - x_{k-1}|\}$. Per il teorema del valore medio di Lagrange $\forall s, u \in]t - \delta, t[$, $\forall s, u \in]t, t + \delta[$ esiste $\sigma \in]s; u[$ tale che

$$|f(s) - f(u)| = |f'(\sigma)||s - u|$$

Poiché f è regolare a tratti, f' è limitata su $]x_{k-1}; t[\cup]t; x_{k+1}[$ quindi a maggior ragione lo è su $]t - \delta; t[\cup]t; t + \delta[$. Ne segue che esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$|f'(\sigma)| \leq M \quad \forall \sigma \in]t - \delta; t[\cup]t; t + \delta[$$

Di conseguenza

$$|f(s) - f(u)| = M|s - u| \quad \forall s, u \in]t - \delta, t[\quad \forall s, u \in]t, t + \delta[$$

Se invece vale $t \in]x_k; x_{k+1}[$ per un certo $k \in \{0, \dots, n\}$ si procede in modo analogo scegliendo δ tale che $0 < \delta < \min\{|t - x_k|; |x_{k+1} - t|\}$. La condizione di Hölder risulta quindi verificata per ogni $t \in] - \pi; \pi[$ con $\alpha = 1$ \square

Osservazione 3. *Sia f una funzione come nel corollario 1.2.5, se nei punti di discontinuità di f vale $f(t) = f^*(t)$ allora la serie di Fourier di f converge puntualmente ad $f(t)$ qualsiasi $t \in \mathbb{R}$*

Dimostrazione. Poiché nei punti di continuità di una funzione vale $f(t) = f^*(t)$, l'osservazione risulta provata dal corollario 1.2.5 \square

²essendo f regolare a tratti su $[-\pi; \pi]$, per periodicità, lo è anche su $[-3\pi; 3\pi]$. Quindi per i punti $k_0 = -\pi$ e $k_{n+1} = \pi$ si farà una dimostrazione del tutto analoga a quella che svolgeremo ora

Capitolo 2

Il fenomeno di Gibbs

2.1 Un caso particolare: l'onda quadra

Vogliamo ora esaminare in dettaglio il comportamento dei polinomi di Fourier di una semplice funzione chiamata onda quadra. In particolare ci interessa provare che vicino ai suoi punti di discontinuità di prima specie si evidenzia il fenomeno di Gibbs.

2.1.1 Calcolo della serie di Fourier di q

Per prima cosa definiamo la funzione onda quadra

$$q(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = \pi; \\ -1, & \text{se } -\pi < x < 0; \\ 0, & \text{se } x = 0; \\ 1, & \text{se } 0 < x < \pi; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione appena definita è regolare a tratti su $[-\pi; \pi]$ e può essere estesa periodicamente su tutto \mathbb{R} . Il suo grafico è rappresentato nella figura 2.1

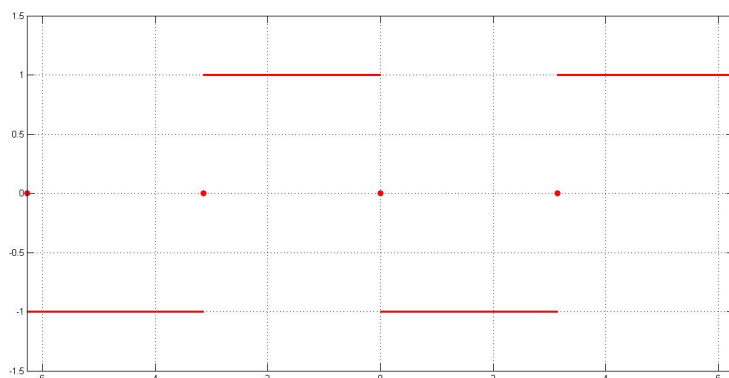


Figura 2.1: Grafico della funzione onda quadra

La funzione q è sommabile in $[-\pi; \pi]$, ha senso quindi calcolare i suoi coefficienti di Fourier. Come accade per tutte le funzioni dispari definite un intervallo simmetrico rispetto all'origine si avrà che $a_k = 0$ per ogni $k = 0, \dots, n$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt = 0$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt = 0$$

mentre per i b_k si calcola:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ pari;} \\ \frac{4}{k\pi}, & \text{se } k \text{ dispari.} \end{cases}$$

Quindi le ridotte della serie di Fourier di q hanno l'espressione:

$$S_{2n-1}(q; x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1} \quad (2.1)$$

Esiste anche un'espressione integrale per $S_{2n-1}(q; x)$:

$$\begin{aligned}
 S_{2n-1}(q; x) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1} \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^x \cos((2k-1)t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) dt \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

L'ultima uguaglianza è provata dal seguente

Lemma 2.1.1. *Per ogni $k = 1, 2, \dots$ e per ogni $x \notin \mathbb{Z}$ vale*

$$\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) dt = \frac{\sin 2nt}{2 \sin t} dt$$

Dimostrazione. Sfruttando la formula di Werner

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

possiamo scrivere:

$$\cos((2k-1)t) = \frac{\cos((2k-1)t) \sin t}{\sin t} = \frac{\sin 2kt - \sin((2k-2)t)}{2 \sin t}$$

sommando sull'indice k , i termini all'ultimo membro si cancellano due a due e si ottiene:

$$\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)t) = \frac{1}{2 \sin t} \sum_{k=1}^n (\sin 2kt - \sin((2k-2)t)) = \frac{\sin 2nt}{2 \sin t}$$

da cui la tesi. □

Proviamo ora alcune osservazioni che sfrutteremo in seguito.

Osservazione 4. *Per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus 0$ vale*

$$i) S_{2n-1}(q; x) = S_{2n}(q; x)$$

ii) $S_{2n-1}(q; -x) = -S_{2n-1}(q; x)$ cioè sono funzioni dispari.

iii) $S_{2n-1}(q; \pi - x) = S_{2n-1}(q; x)$

Dimostrazione. Il punto i) segue immediatamente dal fatto che, per k , pari entrambi i coefficienti a_k e b_k sono nulli. I punti ii) iii) sono ovvie conseguenze delle corrispondenti proprietà delle funzioni seno \square

2.1.2 Calcolo dei massimi e dei minimi di $S_{2n-1}(q; x)$

Derivando l'espressione (2.2) per $S_{2n-1}(q; x)$ otteniamo

$$S'_{2n-1}(q; x) = \frac{2 \sin 2nx}{\pi \sin x} \quad (2.3)$$

Si verifica facilmente che gli zeri di tale funzione nell'intervallo $[-\pi; \pi]$ sono i punti della forma $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ con $k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(2n-1)$. Dimostriamo ora che le ascisse degli estremi relativi di $S_{2n-1}(q; x)$ in $[0, \pi]$ coincidono con gli zeri della funzione $S'_{2n-1}(q; x)$ in $[0, \pi]$, cioè che nessun punto della forma $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ $k = 1, 2, \dots, (2n-1)$ è un punto di flesso per $S_{2n-1}(q; x)$ ma sono tutti estremali. In particolare si ha che i punti x_k sono di

- massimo relativo se $k = 1, 3, \dots, (2n-1)$, cioè

$$x_h = \frac{2h-1}{2n}\pi \quad \text{con } h = 1, 2, \dots, n$$

- minimo relativo se $k = 2, 4, \dots, (2n-2)$, cioè

$$x_h = \frac{h}{n}\pi \quad \text{con } h = 1, 2, \dots, n-1$$

Per provare l'affermazione basta derivare l'espressione (2.3) ottenendo

$$S''_{2n-1}(q; x) = \frac{2}{\pi} \frac{2n \cos 2nx \sin x - \sin 2nx \cos x}{\sin^2 x}$$

ed osservare che

$$\begin{aligned}
S''_{2n-1}\left(q; \frac{2h-1}{2n}\pi\right) &= \frac{2n \cos(2h\pi - \pi) \sin\left(\frac{2h-1}{2n}\pi\right) - \sin(2h\pi - \pi) \cos\left(\frac{2h-1}{2n}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{2h-1}{2n}\pi\right)} \\
&= \frac{2n(-1) \sin\left(\frac{2h-1}{2n}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{2h-1}{2n}\pi\right)} < 0 \quad \text{per } h = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S''_{2n-1}\left(q; \frac{h}{n}\pi\right) &= \frac{2n \cos 2h\pi \sin\left(\frac{h}{n}\pi\right) - \sin 2h\pi \cos\left(\frac{h}{n}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{h}{n}\pi\right)} \\
&= \frac{2n(1) \sin\left(\frac{h}{n}\pi\right)}{\sin^2\left(\frac{h}{n}\pi\right)} > 0 \quad \text{per } h = 1, \dots, n-1
\end{aligned}$$

Inoltre per l'osservazione 4 si avrà che i punti $-x_k \in [-\pi, 0]$ sono

- di minimo relativo se $k = 2, 4, \dots, (2n-2)$;
- di massimo relativo se $k = 1, 3, \dots, (2n-1)$.

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per studiare il comportamento della serie ridotta $S_{2n-1}(q; x)$

2.1.3 Comportamento di $S_{2n-1}(q; x)$

Per l'osservazione 3 sappiamo che $S_{2n-1}(q; x)$ per $n \rightarrow +\infty$ deve convergere puntualmente alla funzione q in tutto l'intervallo $[-\pi; \pi]$.

Guardando la figura 2.2 si osserva però che il valore del primo massimo a destra dell'origine si assesta su un valore costante maggiore di 1 e in modo del tutto analogo il primo minimo a sinistra dell'origine tende ad un valore inferiore di -1 , cosicché, per quanto grande si prenda n , approssimando la funzione q con il suo polinomio di Fourier di grado n il salto della funzione

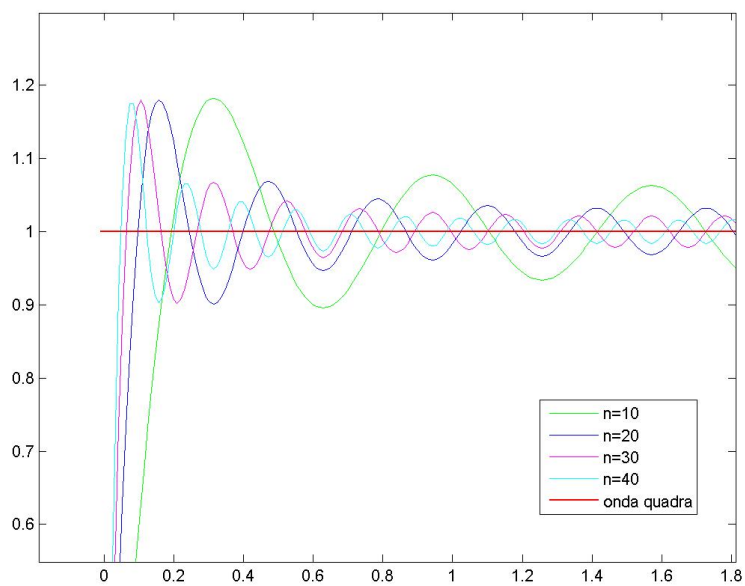


Figura 2.2: Fenomeno di Gibbs, un particolare

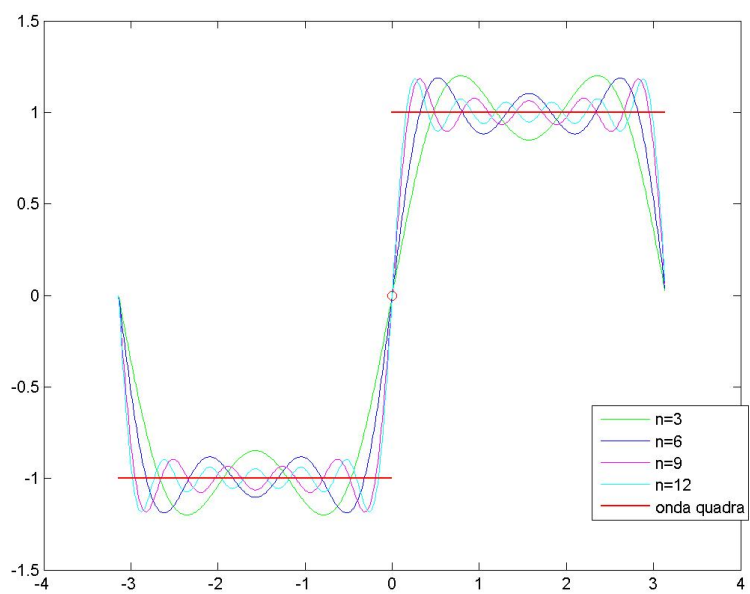


Figura 2.3: Fenomeno di Gibbs

viene enfatizzato e la serie pare a prima vista non convergere vicino all'origine.

Questo bizzarro comportamento è noto come fenomeno di Gibbs ed è originato dal fatto che nei punti di discontinuità di q non si ha convergenza uniforme ma solo puntuale: esistono infatti intervalli I in cui $\max_I |S_n(q; t) - q(t)| \geq c$ qualsiasi n . La lunghezza di tali intervalli tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$ garantendo così la convergenza puntuale. Si veda la figura 2.3.

Dimostriamo ora ciò che abbiamo già potuto osservare dai grafici.

Il primo punto di massimo relativo che si incontra a destra dell'origine ha ascissa $x_M^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$ e ordinata $y_M^{(n)} = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$ mentre il primo minimo a sinistra dell'origine ha ascissa $x_m^{(n)} = \frac{-\pi}{2n}$ e ordinata $y_m^{(n)} = \int_0^{\frac{-\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt$.

Calcoliamo ora il valore limite per n che tende all'infinito del primo massimo a destra dell'origine.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_M^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin 2nt \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \right) \end{aligned}$$

A questo punto si osserva che la funzione $\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t}$ è limitata in $[0, \frac{\pi}{2}]$; è infatti continua in $]0, \pi]$ e utilizzando lo sviluppo di Taylor nell'intorno di 0 si ha

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^3 + o(t^3)}{t^2 + o(t^3)} = 0$$

dunque

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin 2nt \left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right) dt \right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left| \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right| dt \leq \frac{c}{2n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty$$

di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_M^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{t} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \quad (2.4)$$

Si può stimare numericamente che questo valore limite è circa 1.178980... che quindi risulta essere maggiore di 1.

Per calcolare il valore limite per n che tende all'infinito del primo minimo a sinistra dell'origine basta operare un cambio di variabile e sfruttare l'uguaglianza (2.4).

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} y_m^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{-\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t} dt \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} y_M^{(n)} = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt\end{aligned}$$

Ovviamente, per quanto detto in precedenza, tale limite è minore di -1.

Abbiamo quindi provato che in prossimità dell'origine, punto di discontinuità della funzione q , i relativi polinomi di Fourier sono tali che la differenza tra il massimo e il minimo di tali polinomi in un intorno del punto di discontinuità si mantiene maggiore del salto della funzione q in tale punto. Abbiamo anche dimostrato che questo fenomeno di sovraoscillazione non tende a scomparire al crescere di n . Possiamo quantificare in modo più preciso l'errore che si commette approssimando q con i polinomi di Fourier.

Definizione 6. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiamo salto della funzione f nel punto $a \in \mathbb{R}$

$$\Delta(a) = f(a^+) - f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Nel caso di onda quadra $\Delta(0) = 2$. Calcoliamo poi

$$\Delta S_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} |S_{2n-1}(q; x_M^{(n)}) - S_{2n-1}(q; x_m^{(n)})| = \left| \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right| \sim 2.35796 \dots$$

Quindi approssimando il salto della funzione con ΔS_{2n-1} si commette un'errore di sovrastima del 18%. Riformulando l'affermazione possiamo dire che il salto della funzione viene aumentato di un fattore $\frac{2}{\pi}G$, dove il valore $G = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$ è noto come costante di Wilbraham-Gibbs. Tale risultato non è valido solo nel caso di onda quadra ma anche più in generale nel caso di funzioni regolari a tratti che presentano una discontinuità di prima specie.

2.2 Un risultato generale

Nel paragrafo precedente abbiamo osservato il comportamento delle ridotte della serie di Fourier dell'onda quadra vicino all'origine. Vogliamo ora esaminare un caso più generale: quello di una funzione periodica, regolare a tratti, che presenta discontinuità di prima specie. A tale scopo sarà utile il seguente

Lemma 2.2.1. *Sia $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue in $[a, b]$ tali che $g_n \rightrightarrows g$ uniformemente su tale intervallo. Sia $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in $[a, b]$ tale che $c_n \rightarrow c$. Allora la successione $(g_n(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tende a $g(c)$ per n che tende all'infinito.*

Dimostrazione. Per ipotesi $g_n \rightrightarrows g$ uniformemente in $[a, b]$ quindi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > n_\varepsilon, \quad \forall x \in [a, b]$$

quindi in particolare si avrà che $|g_n(c) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Inoltre, poiché g è continua in c (in quanto limite uniforme di funzioni continue) e poiché $c_n \rightarrow c$ si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |g(c_n) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \bar{n}_\varepsilon$$

Scegliendo $\bar{n} > \max\{\bar{n}_\varepsilon, n_\varepsilon\}$ si ha che

$$|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \varepsilon \quad \forall n > \bar{n}$$

□

Dimostriamo ora un teorema più generale.

Teorema 2.2.2. *Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti $2L$ -periodica e sia a un punto di discontinuità di prima specie per f con salto $\Delta(a)$. Allora posto $x_n = \frac{L}{2n}$ vale che:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(f; a \pm x_n) = f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{\pi} G \quad (2.5)$$

Ponendo invece $x_M^{(n)} = \frac{L}{2n}$ e $x_m^{(n)} = -\frac{L}{2n}$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n-1}(f; a + x_M^{(n)}) - S_{2n-1}(f; a + x_m^{(n)})) = \Delta(a) \frac{2}{\pi} G \quad (2.6)$$

Dimostrazione. Ridefinendo eventualmente il valore di $f(a)$ non è limitativo supporre $f(a) = f^*(a)$.

Poniamo $\tilde{q} := q\left(\frac{x-a}{L}\pi\right)$. Osserviamo che \tilde{q} è l'onda quadra traslata e deformata in modo da avere discontinuità in a e periodo $2L$.

Definiamo $\varphi(x) = f(x) - f^*(a) - \frac{\Delta(a)}{2}\tilde{q}(x)$. Osserviamo che $\varphi(x)$ è regolare a tratti, $2L$ -periodica e continua in a infatti:

$$\varphi(a) = f(a) - f^*(a) - \frac{\Delta(a)}{2}\tilde{q}(a) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{2f(x) - f(a^+) - f(a^-)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2}\tilde{q}(x) = \frac{\Delta(a)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2f(x) - f(a^+) - f(a^-)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2}\tilde{q}(x) = -\frac{\Delta(a)}{2} - \frac{\Delta(a)}{2}(-1) = 0$$

Fissato un intervallo $I = [a - \delta; a + \delta]$ che non contiene altre discontinuità di f (oltre ad a) ne risulta che φ è continua in I . Così si ha che $S_n(\varphi) \Rightarrow \varphi$ uniformemente in I^1

Sia $x_n = \frac{L}{2n}$. Data l'uguaglianza $S_{2n-1}(\tilde{q}; a \pm x_n) = S_{2n-1}(q; \frac{\pm x_n}{L}\pi)$ è lecito scrivere

$$S_{2n-1}(f; a \pm x_n) = S_{2n-1}(\varphi; a \pm x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2}S_{2n-1}(q; \frac{\pm x_n}{L}\pi)$$

Da questa espressione per il lemma 2.2.1, per il comportamento di $S_{2n-1}(q)$ vicino all'origine e per il fatto che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n-1}(f; a \pm x_n) &= \varphi(a) + f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{2} \frac{2}{\pi} G \\ &= f^*(a) \pm \frac{\Delta(a)}{\pi} G \end{aligned}$$

¹Infatti una condizione sufficiente affinché la serie di Fourier di una funzione 2π -periodica converga uniformemente ad f è che tale funzione sia continua e C^1 a tratti.

Abbiamo così dimostrato la (2.5). Da questa segue immediatamente la (2.6), infatti:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n-1}(f; a + x_M^{(n)}) - S_{2n-1}(f; a + x_m^{(n)})) = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{\pi}G - f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{\pi}G) = \\ & = \Delta(a) \frac{2}{\pi}G \end{aligned}$$

□

Il teorema appena dimostrato prova che il fenomeno di Gibbs si presenta ogni qualvolta si consideri la serie di Fourier di una funzione che presenta discontinuità di prima specie. Prova anche un risultato importante per le applicazioni pratiche che si occupano di ricostruire i segnali, cioè che approssimando il salto di tale funzione con la ridotta n-esima della serie di Fourier si commette un errore pari a circa il 18% del salto.

2.3 Un altro esempio: l'onda a dente di sega

Un'altra funzione le cui somme parziali presentano il fenomeno di Gibbs è quella cosiddetta a dente di sega:

$$s(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in] - \pi; \pi[\\ 0, & \text{se } x = \pm \pi \end{cases}$$

Guardando la figura 2.4, che rappresenta la funzione $s(x)$ estesa periodicamente su tutto \mathbb{R} , notiamo la presenza di discontinuità di prima specie nei punti $\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Per quanto dimostrato in precedenza ci aspettiamo che nell'intorno di questi punti si verifichi il fenomeno di sovraoscillazione già osservato nell'onda quadra. La figura 2.5 ce ne dà conferma.

Per questa funzione il fenomeno di Gibbs è in un certo senso ancora più sorprendente. Infatti, accade che il valore del primo massimo che si incontra a sinistra della discontinuità aumenta al crescere di n (si osservi la figura 2.6). Questa particolarità non impedisce la convergenza della serie di Fourier che è invece assicurata dall'osservazione 3.

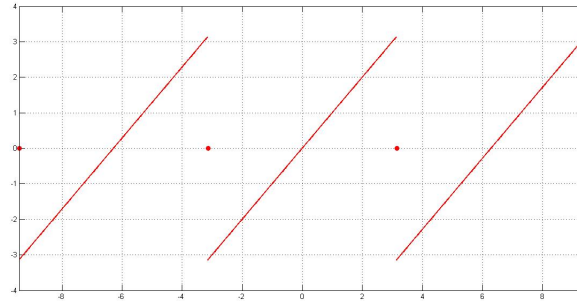


Figura 2.4: Onda a dente di sega

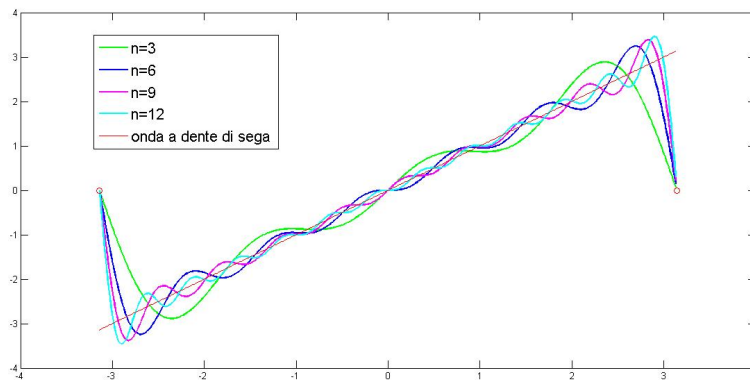


Figura 2.5: Fenomeno di Gibbs nell'onda a dente di sega

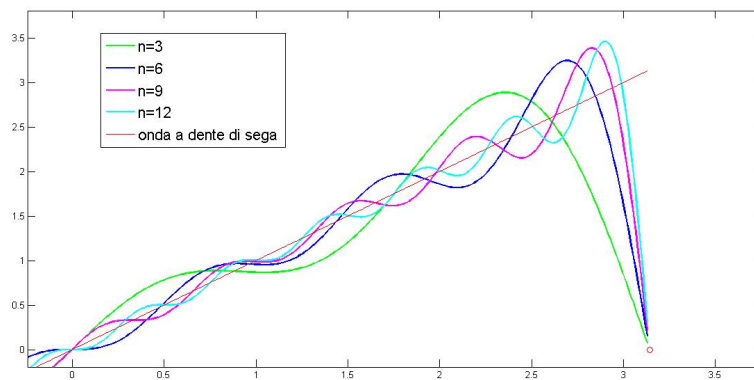


Figura 2.6: Fenomeno di Gibbs, un particolare

Capitolo 3

Le somme di Fejér: una soluzione al fenomeno di Gibbs

3.1 La convergenza secondo Cesaro e il teorema di Fejér

In questo capitolo vogliamo definire un nuovo tipo di convergenza di successioni trigonometriche che permettano di eliminare l'effetto Gibbs. L'idea è quella di estendere il concetto di convergenza secondo Cesaro delle serie numeriche anche alle serie di funzioni.

Definizione 7. Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione numerica, sia $(S_n)_{k \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme parziali dove $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Diciamo che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge secondo Cesaro al numero reale s se la successione delle medie aritmetica delle somme parziali converge ad s :

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = s \quad \text{dove} \quad \sigma_n := \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$$

Questa nuova definizione di convergenza è più debole di quella usuale, vale infatti la seguente osservazione

Osservazione 5. Sia $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione numerica reale. Se la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ converge ad $s \in \mathbb{R}$ allora la serie converge secondo Cesaro allo stesso numero reale s .

Dimostrazione. Poiché $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$ vale che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |S_n - s| < \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon$$

di conseguenza

$$|\sigma_n - s| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |S_k - s| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |S_k - s| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n |S_k - s| \right) \leq \frac{1}{n} (c + n\varepsilon)$$

dove c è una costante reale.

Qualsiasi $\varepsilon' > \varepsilon \quad \exists N$ tale che $\frac{1}{N}(c + N\varepsilon) \leq \varepsilon'$. Quindi $|\sigma_n - s| \leq \varepsilon'$ inoltre poiché ε è arbitrario lo è anche ε' . \square

Non vale invece l'implicazione opposta. Estendo in modo naturale la definizione di convergenza secondo Cesaro anche alle serie di funzioni otteniamo che nel caso particolare delle serie di Fourier vale

$$\sigma_n(f; t) = \frac{S_0(f; t) + \cdots + S_{n-1}(f; t)}{n}$$

$\sigma_n(f; t)$ è detta n -esima somma di Fejér. Vogliamo ora dare una rappresentazione integrale delle somme di Fejér. A tale scopo introduciamo i cosiddetti nuclei di Fejér.

Definizione 8. Sia $s \in \mathbb{R}$ definiamo nucleo di Fejér la funzione

$$F_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{n \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k+1/2)s), & \text{se } s \neq 2k\pi; \\ \frac{n}{2\pi}, & \text{se } s = 2k\pi. \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Osservazione 6. Per $s \in]-\pi; \pi[$ vale la seguente uguaglianza

$$F_n = \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
 F_n(s) &= \frac{1}{n \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k+1/2)s) \\
 &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k+1/2)s) \sin s/2 \\
 &= \frac{1}{n \sin^2 \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (\cos((k-1)s) - \cos ks) \\
 &= \frac{1}{2n \sin^2 \frac{s}{2}} (1 - \cos ns) \\
 &= \frac{\sin^2 \frac{ns}{2}}{n \sin^2 \frac{s}{2}}
 \end{aligned}$$

□

Osservazione 7. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi; \pi[)$; sia $S_n(f; t)$ il polinomio di Fourier di f di grado n nel punto $t \in]-\pi; \pi[$ e sia $\sigma_n(f; t) = \frac{S_0(f; t) + \dots + S_{n-1}(f; t)}{n}$. Allora vale la seguente uguaglianza:

$$\sigma_n(f; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

Dimostrazione. Ricordiamo che per l'osservazione 2 vale

$$S_n(f; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \frac{\sin((n+\frac{n}{2})s)}{\sin \frac{s}{2}} ds$$

quindi si avrà

$$\begin{aligned}
 \sigma_n(f; t) &= \frac{S_0(f; t) + \dots + S_{n-1}(f; t)}{n} \\
 &= \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2 \sin \frac{s}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} \sin((k+1/2)s) ds \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds
 \end{aligned}$$

□

Elenchiamo ora alcune importanti proprietà del nucleo di Fejér che ci saranno utili in seguito:

i) Vale che

$$\pi = \int_0^\pi F_n(s) ds \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Si consideri la funzione costante $f \equiv 1$. I coefficienti di Fourier di f sono $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Così qualsiasi $n \geq 0$ vale $S(1; t) = 1$ e quindi $\sigma_n(1; t) = 1$. Di conseguenza

$$1 = \sigma_n(1; t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_n(s) ds$$

□

ii) Il nucleo di Fejér è pari;

iii) Il nucleo di Fejér è non negativo;

iv) Qualsiasi $\delta > 0$ fissato, $F_n(f; t)$ tende uniformemente a zero per $\delta \leq |t| \leq \pi$

Dimostrazione. infatti per $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$ vale $\sin y \geq \frac{2}{\pi}y$, quindi

$$0 \leq F_n(f; t) \leq \frac{\sin^2 ns/2}{n \sin^2 s/2} \leq \frac{\pi^2}{n\delta^2}$$

□

Possiamo notare che tra i nuclei di Fejér e quelli di Dirichelet vi sono alcune analogie, quello che però ci interessa sono le differenze. In particolare le proprietà iii) e iv) dimostrate sopra, valgono per i nuclei di Fejér ma non per quelli di Dirichelet. Sono proprio queste differenze che determinano il diverso comportamento delle relative somme σ_n e S_n e che garantiscono la validità del seguente teorema.

Teorema 3.1.1. (*Teorema di Fejér*) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, f sommabile in $] -\pi; \pi[$. Sia $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione delle somme di Fejér. Sia $t \in \mathbb{R}$ tale che esiste $f^*(t)$. Allora vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f, t) = f^*(t) \quad (3.2)$$

Inoltre se f è continua in $[-\pi; \pi]$, la successione $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a f in $[-\pi; \pi]$

$$\sigma_n \rightrightarrows f \quad \text{per } n \rightarrow +\infty \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Iniziamo la dimostrazione provando la (3.2). Sia $t \in \mathbb{R}$ tale che esiste $f^*(t)$, sfruttando (3.1) ricaviamo la seguente uguaglianza

$$\sigma(f, t) - f^*(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) F_n(s) ds$$

Definiamo ora la funzione

$$g_t(s) = \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)$$

Per come abbiamo definito $g_t(s)$ vale che $g_t(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0$, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tale che } |g_t(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall s \in]0; \delta[\quad (3.4)$$

dove δ dipende sia da t che da ε . Sfruttando la positività del nucleo di Fejér otteniamo

$$|\sigma_n(f; t) - f^*(t)| \leq \int_0^\pi |g_t(s)| F_n(s) ds = \int_0^\delta |g_t(s)| F_n(s) ds + \int_\delta^\pi |g_t(s)| F_n(s) ds$$

chiamiamo $I_1 = \int_0^\delta |g_t(s)| F_n(s) ds$ e $I_2 = \int_\delta^\pi |g_t(s)| F_n(s) ds$. Ora per la (3.4) vale

$$I_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\pi \frac{F_n(s)}{\pi} ds = \frac{\varepsilon}{2}$$

mentre

$$I_2 \leq \frac{1}{\pi n \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_\delta^\pi |g_t(s)| ds \leq \frac{I(t)}{n \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

dove $I(t) = \int_0^\pi |g_t(s)| ds$. Scegliendo N tale che $\frac{I}{N \pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (ricordiamo che t è fissato e N dipende sia da ε che da t) ne segue che $\forall n > N$

$$|\sigma_n(f; t) - f^*(t)| \leq I_1 + I_2 \leq \varepsilon$$

Abbiamo quindi provato la convergenza puntuale delle somme di Fejér.

Dimostriamo la seconda affermazione. La funzione f è continua su $[-\pi; \pi]$,

compatto di \mathbb{R} , quindi per il teorema di Heine-Cantor è uniformemente continua su tale intervallo:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{\delta} \quad |g_t(s)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{tale che} \quad \forall s \in]0 : \bar{\delta}[\quad \forall t \in [-\pi; \pi]$$

Con passaggi analoghi ai precedenti si ha

$$|\sigma_n(f; t) - f^*(t)| \leq I_3 + I_4$$

dove $I_3 = \int_0^{\bar{\delta}} |g_t(s)| F_n(s) ds$ e $I_4 = \int_{\bar{\delta}}^{\pi} |g_t(s)| F_n(s) ds$

Come prima si ha

$$I_3 \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\pi} \frac{F_n(s)}{\pi} ds = \frac{\varepsilon}{2}$$

Poichè $g_t(s)$ è continua su $[-\pi; \pi]$, è limitata su tale intervallo, inoltre $g_t(s)$ è 2π -periodica e quindi limitata su tutto \mathbb{R} : $\sup_{t, s \in \mathbb{R}} |g_t(s)| \leq M$

Scegliendo N tale che $\frac{M}{N\pi \sin^2 \frac{\delta}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (in questo caso N dipende solo da ε) ne segue che $\forall n > N$

$$|\sigma_n(f; t) - f^*(t)| \leq I_3 + I_3 \leq \varepsilon$$

Abbiamo quindi provato la convergenza uniforme □

3.2 Eliminazione del fenomeno di Gibbs

Vogliamo ora mostrare come le somme di Fejér abbiano la proprietà di eliminare l'effetto Gibbs.

Osservazione 8. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, $f \in L^1(]-\pi; \pi[)$. Se esistono $c, C \in \mathbb{R}$ tali che $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi; \pi]$ allora

$$c \leq \sigma_n(f; t) \leq C \quad \text{per ogni} \quad t \in [-\pi; \pi]$$

Dimostrazione.

$$\sigma_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

poichè $c \leq f(t) \leq C$ per quasi ogni $t \in [-\pi; \pi]$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2c}{2} F_n(s) ds \leq \sigma_n(f; t) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{2C}{2} F_n(s) ds$$

da cui, per la (3.1), segue la tesi. □

Osservazione 9. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti $2L$ -periodica e sia a un punto di discontinuità di prima specie per f con salto $|\Delta(a)|$. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una qualsiasi successione di numeri reali tale che $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. Allora non si presenta il fenomeno di Gibbs e vale

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_n) \leq |\Delta(a)|$$

Dimostrazione. Usando le stesse notazioni del teorema 2.2.2 ma considerando le somme di Fejér al posto di quelle di Fourier otteniamo

$$\sigma_n(f; a \pm x_n) = \sigma_n(\varphi; a \pm x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \sigma_n(q; \frac{\pm x_n}{L} \pi)$$

Per l'osservazione 8: $-1 \leq q(t) \leq 1 \implies -1 \leq \sigma(q; t) \leq 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ dunque

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(\varphi; x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q; \frac{x_n - a}{2} \pi)$$

per la (3.3)

$$\begin{aligned} &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q; \frac{x_n - a}{2} \pi) \\ &\leq \varphi(a) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} (1) \\ &= f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(q; \frac{x_n - a}{2} \pi) \\ &\geq \varphi(a) + f^*(a) + \frac{\Delta(a)}{2} (-1) \\ &= f^*(a) - \frac{\Delta(a)}{2} \end{aligned}$$

Quindi si avrà che

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_n) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n(f; x_n) \leq |\Delta(a)|$$

□

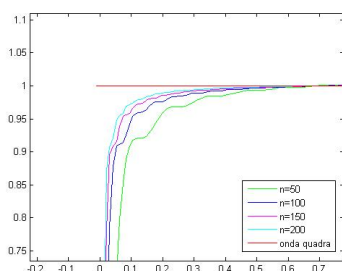


Figura 3.1: Somme di Fejér dell'onda quadra: un particolare

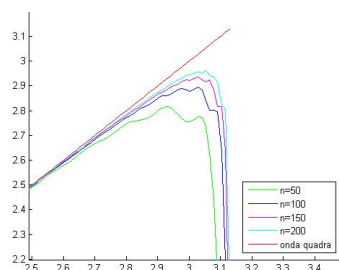


Figura 3.2: Somme di Fejér dell'onda a dente di sega: un particolare

Riportiamo ora alcuni grafici per mostrare meglio il comportamento delle somme di Fejér nell'intorno dei punti di discontinuità di prima specie.

Possiamo notare che nelle figure 3.1 e 3.2 nelle quali sono rappresentati rispettivamente un particolare delle somme di Fejér dell'onda quadra e dell'onda a dente di sega vicino al punto di discontinuità sono assenti le sovraoscillazioni dovute al fenomeno di Gibbs. Ciò è ancora più evidente se si osservano le figure 3.3 e 3.4 nelle quali vi è un confronto tra i primi 50 polinomi di Fourier e le prime 50 somme di Fejér rispettivamente nel caso di onda quadra e in quello di onda a dente di sega.

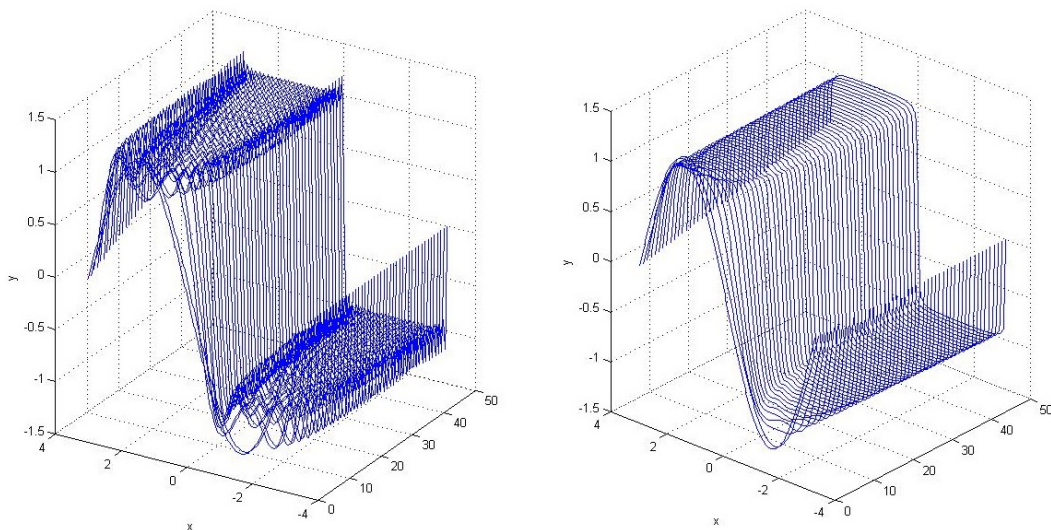


Figura 3.3: Confronto onda quadra

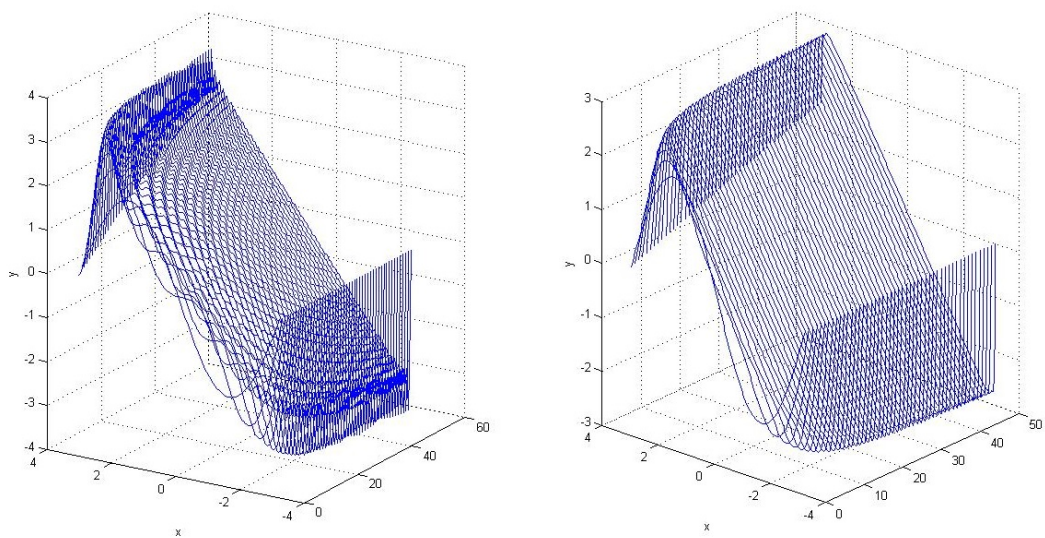


Figura 3.4: Confronto onda a dente di sega

Appendice

Riportiamo qui il programma usato per disegnare le figure 3.3 e 3.4

Programma principale: grafici 3d

```
clc
clear
close all

n=input('Fino a che grado si desidera disegnare? ');
choice=menu('scegli la funzione onda','quadra','dente di sega');
punti=200;

h=2*pi/punti;

for i=1:punti
    ascisse(i)=-pi+(i-1)*h;
end

for i=1:n
    xS(:,i)=ascisse;
    z(:,i)=i*ones(1,punti);
end

if choice==1;
    for i=1:n
        ygibbs(:,i)=q(ascisse,i);
```



```
        end
    else
        for i=1:n
            ygibbs(:,i)=s(ascisse,i);
        end
    end

box=ygibbs;
yfej=ygibbs;

for i=2:n
    for j=1:i-1
        yfej(:,i)=yfej(:,i)+ygibbs(:,j);
    end
    yfej(:,i)=yfej(:,i)./i;
end

%grafico
figure(1)

subplot(1, 2, 1)
plot3(z,xS,ygibbs,'b','LineWidth',1);
xlabel('grado del polinomio');
ylabel('x');
zlabel('y');
grid on;

subplot(1, 2, 2)
plot3(z,xS,yfej,'b','LineWidth',1);
xlabel('grado del polinomio');
ylabel('x');
zlabel('y');
grid on;
```

Funzione q

```
function [y]=q(x,n)

y=zeros(1,length(x));

for i=1:n

    if mod(i,2)==1

        y=y+4*sin(i*x)/(pi*i);

    end

end

end
```

Funzione s

```
function [y]=s(x,n)

y=zeros(1,length(x));
for i=1:n

    if mod(i,2)==1

        y=y+2*sin(i*x)/(i);
    else
        y=y-2*sin(i*x)/(i);
    end

end

end

end
```


Bibliografia

- [1] Apostol, Tom Mike, *Mathematical analysis*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1974
- [2] Barozzi, Giulio Cesare, *Matematica per l'ingegneria dell'informazione*, Zanichelli, Bologna, 2004
- [3] Carslaw, H.S. *A trigonometrical sum and the Gibbs'phenomenon in Fourier's series*, American Journal of Mathematics, Vol. 39, The Johns Hopkins University Press, Aprile 1917, pp. 185-198
- [4] Hewitt, Edwin e Hewitt, Robert E. *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: an episode in Fourier Analysis*, archive for History of Exact Sciences, Vol. 21, Springer-Verlag, 1979, pp 129-160
- [5] Lanconelli, Ermanno, *Lezioni di analisi matematica 2*, Pitagora Editrice, Bologna, 1997
- [6] Pozzi, Gianni A. *Cenni sulle serie di Fourier*, <http://www-dimat.unipv.it/giulio/linkedmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>, 2007
- [7] Prestini, Elena, *Applicazioni dell'analisi armonica*, Hoepli, Milano, 1996

Ringraziamenti

Desidero ringraziare la professoressa Montanari per il tempo che mi ha dedicato, per i preziosi consigli e per la gentilezza con la quale mi ha sempre ricevuta. È una docente straordinaria in grado di trasmettere curiosità e passione per la materia.

Vorrei poi ringraziare la mia famiglia che mi ha sostenuta in questi anni di studio e che è sempre stata presente nei momenti difficili.

Infine vorrei ringraziare Giulia, Ilaria, Stefano e Lorenzo che hanno condiviso con me le gioie e le fatiche di questi tre anni.

Grazie di cuore a tutti.