

Università degli Studi di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**ORIGINI E APPLICAZIONI
DELL'ANALISI
NON STANDARD**

Tesi di Laurea in Analisi matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:
Giorgia Laghi

I Sessione
Anno Accademico 2012-2013

Indice

Introduzione	1
1 Il contesto storico	9
1.1 Leibniz e il problema delle tangenti	9
1.2 La critica di Berkeley	13
1.3 Weierstrass e il concetto di limite	14
1.4 Gli infinitesimi di Robinson	16
2 Alcune nozioni di logica	21
2.1 Il linguaggio predicativo del primo ordine	21
2.2 Strutture del primo ordine e modelli	23
2.3 Ultrafiltri e ultraprodotti	25
2.4 Principio del finito	27
2.5 Ordine superiore	30
2.5.1 Linguaggio di ordine superiore	31
2.5.2 Strutture e modelli di ordine superiore	33
2.6 Espansioni	35
2.6.1 Proprietà delle espansioni	39
3 Analisi non standard	43
3.1 Aritmetica non standard	43
3.2 Analisi non standard e numeri iperreali	46
3.2.1 La parte reale	54

4	Standard e Non Standard a confronto	63
4.1	Successioni e convergenza	64
4.2	Continuità e uniforme continuità	72
4.2.1	Continuità uniforme	78
4.3	Derivabilità	80
4.3.1	Regole di derivazione	82
4.3.2	Le derivate di Leibniz	86
5	Analisi non standard per le scuole superiori	93
5.1	Perchè introdurre i numeri iperreali a scuola?	95
5.1.1	Come introdurre i numeri iperreali	96
5.1.2	Infinitesimi e infiniti: la loro visualizzazione	96
5.1.3	Confronto di infinitesimi ed infiniti	99
	Bibliografia	103

Introduzione

L'analisi non standard, un nuovo ramo della matematica aperto negli anni sessanta da Abraham Robinson, segna un nuovo stadio di sviluppo per la soluzione di un gran numero di antichi e celebri paradossi. Robinson ha riesumato la nozione di *infinitesimo*, cioè di un numero che è infinitamente piccolo e tuttavia maggiore di zero. Questo concetto, che ha radici nell'antichità, appariva per l'analisi tradizionale, o analisi standard, palesemente autocontraddittorio, anche se era stato un importante strumento in meccanica e in geometria almeno fin dai tempi di Archimede. Nel XIX secolo gli infinitesimi vennero eliminati dalla matematica una volta per tutte, o almeno così sembrava e, per soddisfare le esigenze della logica, il calcolo infinitesimale di Isaac Newton e di Gottfried Wilhelm Leibniz fu riformulato da Karl Weierstrass senza infinitesimi. Ma oggi è proprio la logica matematica, con la sua sottigliezza e le sue attuali capacità, che ha riportato in vita l'infinitesimo e lo ha reso di nuovo accettabile. In un certo senso Robinson ha reso legittimo l'incauto trasporto dei matematici del XVII secolo contro il rigore pieno di scrupoli dei matematici del XVIII secolo, aggiungendo un nuovo capitolo alla interminabile contesa tra finito e infinito, continuo e discontinuo.

Vediamo ora un esempio tipico dell'uso di ragionamenti infinitesimali in geometria: 'Vogliamo trovare la relazione tra l'area del cerchio e la sua circonferenza. Per semplicità, supponiamo che il raggio del cerchio sia 1. Ora, la circonferenza può essere pensata come composta da un numero infinito di segmenti rettilinei, tutti uguali tra loro e infinitamente corti, mentre il cerchio come somma di triangoli infinitesimi, che hanno tutti altezza 1. Per un tri-

angolo l'area è data dalla metà del prodotto della base per l'altezza, dunque la somma delle aree dei triangoli è l'area del cerchio, mentre la somma delle basi è la sua circonferenza, perciò l'area del cerchio di raggio 1 è uguale alla metà della sua circonferenza'. Questo ragionamento, che Euclide avrebbe respinto¹, fu pubblicato nel XV secolo da Nicola Cusano. La sua conclusione è ovviamente vera, ma non è difficile sollevare obiezioni a questo modo di procedere, infatti la nozione di triangolo con base infinitamente piccola è perlomeno ambigua. Certamente la base di un triangolo deve avere lunghezza zero o maggiore di zero. Se è zero, allora l'area è zero, d'altra parte, se è maggiore di zero, per quanto piccola, se sommiamo un numero infinito di termini uguali, otteniamo una somma infinitamente grande. In nessuno dei due casi possiamo perciò ottenere un cerchio di circonferenza finita come somma di un numero infinito di parti identiche. L'essenza di questa confutazione è l'asserzione che un numero diverso da zero anche molto piccolo diventa arbitrariamente grande se viene aggiunto a se stesso un numero di volte sufficiente. Poichè tale asserzione fu resa esplicita per la prima volta da Archimede, è detta proprietà archimedeo dei numeri reali. Un infinitesimo perciò, se esistesse, sarebbe un numero non archimedeo: un numero maggiore di zero, che resterebbe per esempio minore di 1, qualunque numero (finito) di volte fosse sommato a se stesso. Archimede, che operava seguendo la tradizione di Aristotele e di Euclide asserì che ogni numero è archimedeo; non ci sono dunque infinitesimi. Archimede, tuttavia, era pure un filosofo della natura, un ingegnere e un fisico e faceva uso degli infinitesimi e della loro intuizione fisica per risolvere problemi della geometria della parabola. Allora visto che gli infinitesimi non esistono, diede una dimostrazione rigorosa dei suoi risultati, servendosi del *metodo di esaustione*, che si basa su un ragionamento diretto e su costruzioni puramente finite. La dimostrazione rigorosa è data nel suo trattato *'Sulla quadratura della parabola'*, noto fin dall'an-

¹Nelle controversie sul concetto di infinitesimo che accompagnano lo sviluppo del calcolo infinitesimale, la geometria di Euclide era lo standard rispetto al quale i moderni si misuravano. In Euclide sono deliberatamente esclusi sia l'infinitesimo sia l'infinito.

tichità, mentre il metodo con gli infinitesimi, che in effetti era servito per trovare la soluzione del problema, è contenuto in uno scritto chiamato ‘*Sul metodo*’, che rimase sconosciuto fino alla sua scoperta nel 1906. Il metodo di esaustione di Archimede, che evita il ricorso agli infinitesimi, è concettualmente vicino al metodo *epsilon-delta* con cui Weierstrass e i suoi allievi nel XIX secolo bandirono i metodi infinitesimali dall’analisi. E’ facile spiegarlo facendo riferimento all’esempio del cerchio, vogliamo perciò ottenere una dimostrazione logicamente accettabile dell’enunciato ‘L’area del cerchio con raggio 1 è uguale alla metà della sua circonferenza’. Ragioniamo come segue. L’enunciato esprime l’uguaglianza di due quantità associate a un cerchio di raggio 1: l’area è la metà della circonferenza. Così, se l’enunciato fosse falso, una di queste quantità sarebbe maggiore dell’altra, sia A il numero positivo ottenuto sottraendo la minore alla maggiore. Ora, possiamo circoscrivere alla circonferenza un poligono regolare di tanti lati quanti si voglia. Dal momento che il poligono è composto di un numero finito di triangoli finiti di altezza 1, sappiamo che la sua area è uguale alla metà del suo perimetro; rendendo il numero dei lati sufficientemente grande, possiamo far sì che l’area del poligono differisca dall’area del cerchio per meno della metà di A , allo stesso tempo il perimetro del poligono differirà dalla circonferenza per meno della metà di A , ma allora l’area e il semiperimetro della circonferenza differiranno per meno di A , il che contraddice l’ipotesi di partenza. Dunque tale ipotesi è assurda e A deve essere zero, come volevasi dimostrare. Questo ragionamento da un punto di vista logico è impeccabile, ma paragonato al procedimento diretto con cui si è precedentemente analizzata la questione, esso risulta molto più complesso.

Ma allora se l’uso degli infinitesimi da la risposta giusta non sarà corretto per certi aspetti anche il ragionamento? Anche se non si è in grado di giustificare i concetti che esso usa, come può essere di fatto sbagliato se ci fa giungere a un risultato corretto?

Tale difesa agli infinitesimi non fu fatta da Archimede. In realtà nello scritto ‘*Sul metodo*’ egli ha cura di spiegare che ‘le verità qui enunciate

non vengono difatto dimostrate con il ragionamento usato' e che una dimostrazione rigorosa è stata pubblicata da un'altra parte. D'altra parte, Nicola Cusano, che era un cardinale, preferiva il ragionamento per quantità infinite per via della sua convizione che l'infinito costituisse 'la fonte, i mezzi e nel medesimo tempo lo scopo irraggiungibile di tutta la conoscenza'. Il più famoso mistico matematico fu senza dubbio Blaise Pascal, il quale rispondendo a quei contemporanei che sollevavano obiezioni contro il ragionamento con quantità infinitamente piccole, paragonava l'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo a misteri, a qualcosa che la natura ha posto innanzi all'uomo non perchè l'uomo la comprenda, ma perchè l'uomo la ammira.

La piena fioritura del metodo degli infinitesimi si ebbe però con le generazioni dopo Pascal: Newton e Leibniz i quali, tra il 1660 e il 1680, formularono i teoremi fondamentali del calcolo. A dir la verità Leibniz non proclamava che gli infinitesimi esistessero realmente, ma solo che si poteva ragionare come se esistessero senza commettere errori. Robinson con la sua opera mostra che dopo tutto Leibniz aveva ragione ed è grazie alla logica e alla nozione di linguaggio formale che Robinson è riuscito a formalizzare l'affermazione di Leibniz, ovvero che si può ragionare senza errore come se gli infinitesimi esistessero. Leibniz aveva pensato gli infinitesimi come numeri positivi o negativi infinitamente piccoli che ancora godevano delle stesse proprietà degli usuali numeri della matematica (ovvero i reali). A prima vista l'idea sembra autocontraddittoria, infatti se gli infinitesimi godono delle medesime proprietà dei numeri usuali, come possono godere anche della proprietà di essere positivi e tuttavia minori di ogni numero positivo usuale? Fu usando un linguaggio formale che Robinson riuscì a risolvere tale paradosso. Egli mostrò come costruire un sistema contenente infinitesimi identico al sistema dei numeri reali, riguardo a tutte le proprietà esprimibili in un certo linguaggio formale, ovviamente, la proprietà di essere positivo e tuttavia minore di ogni numero positivo usuale risulterà non esprimibile nel linguaggio e in questo modo si eliminerà il paradosso.

Nell'analisi non standard si prendono come punto di partenza i numeri

reali finiti e tutte le loro proprietà. Chiameremo questo l'*universo standard* e lo indicheremo con la lettera M , mentre indicheremo con L il suo linguaggio formale. Ogni proposizione in L è un enunciato su M e, naturalmente deve essere o vera o falsa, cioè ogni proposizione di L o è vera o è vera la sua negazione. Chiamiamo K l'insieme di tutte le proposizioni vere e diciamo che M è un modello per K ; con ciò vogliamo dire che M è una struttura matematica tale che, ogni proposizione di K , una volta interpretata in riferimento a M , è vera. Il punto principale, è che, oltre a M , universo standard, vi sono anche modelli non standard di K , cioè esistono strutture matematiche, M^* , differenti in modo essenziale da M e che sono modelli di K , nel senso che ci sono oggetti in M^* e relazioni tra oggetti di M^* tali che, se reinterpretiamo i simboli di L in modo da riferirli a questi pseudo-oggetti e pseudo-relazioni in modo opportuno, allora ogni proposizione di K è ancora vera, anche se con un differente significato.

L'esistenza di interessanti modelli non standard fu per la prima volta scoperta dal logico norvegese Thoralf A. Skolem, che trovò che gli assiomi del 'contare', ovvero gli assiomi dei numeri naturali, ammettono modelli non standard che contengono strani oggetti non contemplati dalla usuale aritmetica. La grande intuizione di Robinson fu di comprendere come questo originale risultato della logica formale moderna poteva costruire la base per far rivivere i metodi infinitesimali nel calcolo differenziale e integrale. In questa ripresa egli si basava su un teorema dimostrato per la prima volta dal logico russo Anatolij Malcev e generalizzato in seguito da Leon A. Henkin, dell'università della California di Berkeley. Questo teorema è il *teorema di compattezza*. Esso è legato al celebre *teorema di completezza* di Kurt Gödel, che afferma che un insieme di proposizioni è logicamente coerente se e solo se le proposizioni hanno un modello, cioè se e solo se c'è un universo in cui esse sono tutte vere. Il teorema di compattezza afferma che se si suppone che nell'universo standard ogni sottoinsieme finito di una collezione di proposizioni del linguaggio L sia vero, allora esiste un universo non standard in cui tutte le proposizioni dell'intera collezione sono simultaneamente vere. Una

diretta conseguenza del teorema di compattezza è l'esistenza di infinitesimi. Consideriamo, per esempio, le seguenti proposizioni:

- c è un numero maggiore di zero e minore di $1/2$
- c è un numero maggiore di zero e minore di $1/3$
- c è un numero maggiore di zero e minore di $1/4$
- ...

Questa è una collezione infinita di proposizioni, ciascuna delle quali può essere scritta servendosi del linguaggio formale L . Se ci riferiamo all'universo standard \mathbb{R} dei numeri reali, ogni suo sottoinsieme finito è vero, tuttavia se consideriamo l'intero insieme infinito di queste proposizioni, esso risulta falso in riferimento ai numeri reali standard, poichè per quanto piccolo possiamo scegliere un numero reale positivo c , $1/n$ risulterà più piccolo di c prendendo n sufficientemente grande. Il teorema di compattezza afferma che c'è un universo non standard \mathbb{R}^* che contiene numeri pseudo-reali, chiamati iperreali, compreso ad esempio, un numero positivo c , minore di un qualsiasi numero della forma $1/n$. Cioè, c è un infinitesimo. Inoltre c gode di tutte le proprietà dei numeri reali standard: ogni enunciato vero a proposito di reali standard, che possiamo esprimere nel linguaggio formale L , è vero anche a proposito dei reali non standard. D'altra parte, proprietà proprie dei numeri reali standard possono non essere trasferite agli iperreali non standard, se non è possibile esprimere queste proprietà nel linguaggio formale L . La proprietà archimedeica (non esistenza di infinitesimi) di \mathbb{R} può essere espressa facendo uso di un insieme di proposizioni di L come segue:

$$\begin{aligned} c &> 1 \\ c + c &> 1 \\ c + c + c &> 1 \text{ e così via} \end{aligned}$$

(1)

Questo non è vero tuttavia per gli iperreali \mathbb{R}^* : se c è infinitesimo tutte queste proposizioni sono false, in altri termini nessuna somma di un numero finito di addendi uguale a c può essere maggiore di 1, qualunque numero di addendi prendiamo. Proprio il fatto che la proprietà archimedeica è vera nel modello standard, ma falsa in quello non standard, prova che la proprietà non può essere espressa con una proposizione di L ; infatti l'enunciato che abbiamo usato è in realtà costituito da un numero infinito di proposizioni. Essi si comportano formalmente come oggetti standard eppure differiscono per importanti proprietà che non sono formalizzabili in L . Benchè l'universo non standard sia concettualmente distinto da quello standard, è comodo pensare quest'ultimo come un ampliamento dell'universo standard, ovvero \mathbb{R}^* contiene i numeri reali standard di \mathbb{R} , insieme con un'ampia collezione di quantità infinitesime e infinite, in cui \mathbb{R} è immerso.

Quando diciamo che gli infinitesimi esistono, non lo intendiamo ovviamente come sarebbe stato inteso da Euclide. Fino ad un secolo fa era tacitamente assunto da tutti i filosofi e matematici che l'oggetto della matematica fosse dotato di realtà obiettiva in un senso molto vicino a quello in cui l'oggetto della fisica è reale. Oggi molti matematici non condividono più tale convinzione dell'esistenza obiettiva degli oggetti che essi studiano. La teoria dei modelli non si compromette in un modo o nell'altro su tali questioni ontologiche. Quello che i matematici vogliono dagli infinitesimi, non è una forma di esistenza materiale, ma piuttosto il diritto di servirsi di essi nelle dimostrazioni. A questo scopo tutto ciò di cui si ha bisogno è la certezza che una dimostrazione che faccia uso di infinitesimi non è più sbagliata di una che non ne fa uso. L'impiego dell'analisi non standard nella ricerca fa qualcosa di simile. Supponiamo di voler dimostrare un teorema che fa riferimento solo a oggetti standard. Se si immergono gli oggetti standard nell'ampliamento non standard, si può trovare una dimostrazione molto più breve e più intuitiva usando oggetti non standard. In questo modo dimostriamo teoremi su oggetti standard ragionando su oggetti non standard. Ricordiamo per esempio la dimostrazione di Nicola Cusano che l'area di un cerchio di raggio 1 è uguale

alla metà della sua circonferenza. Vediamo in che senso nella teoria di Robinson il ragionamento di Cusano è corretto. Dal momento che disponiamo di numeri infiniti e infinitesimi (nell'universo non standard), si può dimostrare che l'area del cerchio è la parte standard della somma (nell'universo non standard) di un numero infinito di infinitesimi.

Lo scopo di questa mia relazione finale ha perciò lo scopo di presentare l'analisi non standard e i suoi vantaggi nella didattica della scuola superiore. Nel primo capitolo daremo una breve introduzione storica di come gli infinitesimi, introdotti per la prima volta da Leibniz, accanto all'entusiasmo suscitato dagli straordinari risultati che venivano raggiunti destarono la preoccupazione che quella nuova matematica fosse costruita su basi logiche molto dubbie.

Nel secondo capitolo daremo le nozioni basilari di logica dei predicati e di teoria dei modelli necessarie per lo sviluppo della teoria non standard.

Nel terzo capitolo introdurremo il modello dei numeri iperreali, come estensione del campo dei numeri reali, e le loro fondamentali proprietà e regole di calcolo.

Nel quarto capitolo presenteremo invece i principali risultati dell'analisi di base nell'ottica non standard (limiti, continuità, derivabilità) confrontandoli con quelli tradizionali. Si vedrà come in alcuni casi la maggiore complessità necessaria per definire i modelli non standard, ripaghi rendendo più semplici alcune dimostrazioni classiche.

Nell'ultimo capitolo mostreremo infine come alcuni professori italiani di istituti secondari superiori abbiano sperimentato didattiche non standard per introdurre i numeri iperreali nelle scuole superiori al fine di facilitare l'acquisizione di alcuni concetti difficili da capire per gli studenti.

Capitolo 1

Il contesto storico

1.1 Leibniz e il problema delle tangenti



Figura 1.1: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

La matematica del seicento venne caratterizzata fondamentalmente dalla ricerca della soluzione ad un celebre e antico problema: il così detto problema delle tangenti. Esso consiste, come facilmente si può intuire, nella determinazione della retta tangente al grafico di una data funzione reale di variabile

reale in ogni suo punto. Queste ed altre questioni di minor rilievo portarono alla nascita di una nuova disciplina matematica chiamata calcolo differenziale o più familiarmente *Analisi Matematica*, i cui fondatori furono essenzialmente Gottfried Wilhelm Leibniz (figura 1.1) e Isaac Newton, i quali tra l'altro si rivolsero a vicenda non poche accuse di plagio a proposito dell'assoluta priorità sull'invenzione del metodo. Oggi si tende a ripartire equamente tra i due i meriti delle scoperte che in ogni caso non mancarono di avere i loro detrattori. In effetti qualcosa non funzionava: c'era qualcosa di misterioso che sfuggiva o più semplicemente qualcosa di cui non si riusciva a dare una definizione non autocontraddittoria. Era questa la nozione di *infinitesimo* o numero infinitamente piccolo, ovvero minore in valore assoluto di qualsiasi altro reale positivo tuttavia diverso da zero. Eppure questo strano oggetto fu proprio lo strumento che permise lo sviluppo del calcolo differenziale (che possiamo chiamare anche calcolo infinitesimale) e quindi la risoluzione dei problemi citati.

Esaminiamo a grandi linee il metodo infinitesimale per la determinazione delle tangenti.

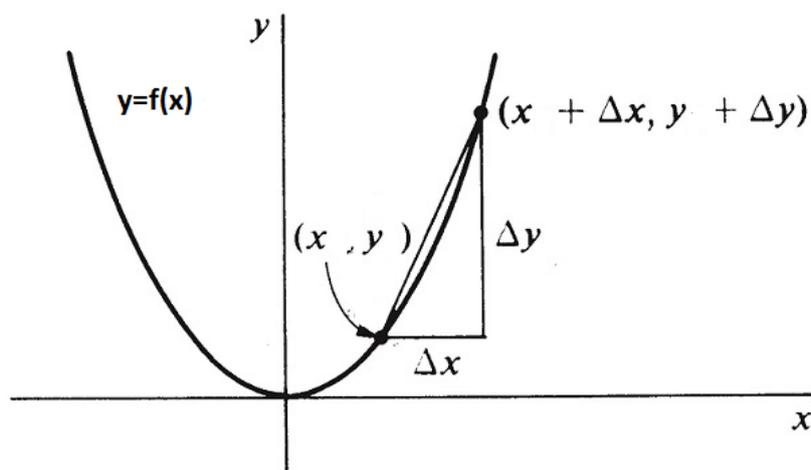


Figura 1.2: $y = f(x)$

Data una funzione reale abbastanza regolare $y = f(x)$ ed il suo grafico (figura 1.2), consideriamo un generico punto (x, y) appartenente ad esso. Dando un incremento Δx alla variabile indipendente x si ottiene un corrispondente incremento della variabile y che risulta essere $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Il punto del grafico corrispondente a questi due incrementi sarà perciò $(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Se tracciamo la retta passante da esso e da $(x; y)$ è facile vedere che in corrispondenza ad un incremento sempre più piccolo della variabile indipendente x , tale retta approssima sempre meglio la retta che è ragionevole chiamare tangente. Il rapporto $\Delta y/\Delta x$ rappresenta il coefficiente angolare della retta passante per i nostri due punti ed in particolare rappresenterà una buona approssimazione del coefficiente angolare della retta tangente in corrispondenza a incrementi Δx sempre più piccoli. Ma a noi non interessa un'approssimazione, seppur buona, della tangente: noi vogliamo la tangente vera e propria.

Ora arriva la parte che Leibniz e Newton non riuscirono a formulare con rigore, benchè producesse risultati corretti. Immaginiamo di mettere sotto un microscopio il grafico della nostra funzione. Ebbene, se ci focalizziamo sul punto $(x; y)$ ci accorgiamo che la curva è indistinguibile dalla sua tangente in quel punto. Possiamo allora pensare che il nostro grafico sia costituito da tanti piccoli *tratti* rettilinei e diciamo che per tratti infinitesimi la curva si può considerare dritta (figura 1.3).

Supponiamo perciò di dare un incremento infinitesimo dx alla variabile indipendente x (scriviamo dx al posto di Δx per indicare, appunto, un incremento infinitesimo). La variabile dipendente verrà incrementata di una quantità anch'essa infinitesima $dy = f(x + dx) - f(x)$ e dunque, in accordo con quanto detto, dato che per tratti infinitamente piccoli la curva coincide con la tangente, la retta passante per i punti $(x; y)$ e $(x + dx; y + dy)$ è proprio la tangente cercata ed il rapporto dy/dx rappresenta il suo coefficiente angolare.

Si noti che il cambiamento di Δ in d sta ad indicare semplicemente incrementi

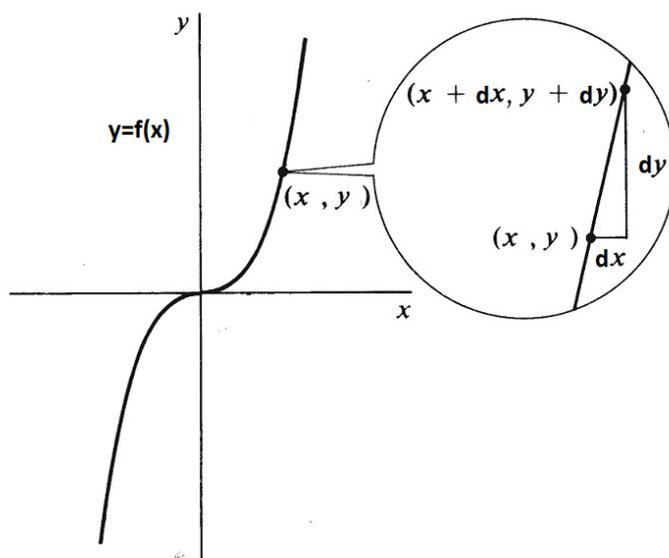


Figura 1.3: grafico della funzione $y = f(x)$ e della sua retta tangente nel punto (x, y)

infinitesimi, cioè vale l'uguaglianza

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \text{ se } \Delta x = dx \text{ è infinitesimo.}$$

Vediamo ora, per fissare le idee, un esempio di come Leibniz riesce a trovare la tangente a una curva algebrica; consideriamo quindi la semplice parabola: $y = x^2$.

Assumendo l'ipotesi di Leibniz secondo la quale gli infinitesimi obbedirebbero alle regole elementari dell'aritmetica dei numeri reali (*Principio di Estensione*, che Leibniz non dimostra), incrementiamo di un infinitesimo sia la x sia la y :

$$y + dy = x^2 + (x + dx)^2 - x^2$$

ricordando che $y = x^2$ si possono eliminare i primi termini:

$$dy = (x + dx)^2 - x^2$$

e applicando la regola del quadrato del binomio (per il principio di estensione valida anche per gli infinitesimi):

$$dy = x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2$$

$$dy = 2xdx + dx^2$$

e dividendo tutto per dx :

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx$$

ma dx è trascurabile rispetto a $2x$ e quindi:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

In questo modo abbiamo trovato il coefficiente angolare della tangente alla parabola; e lo abbiamo trovato non in punto particolare ma per qualsiasi punto. Il risultato del calcolo di Leibniz infatti non è un numero ma una funzione che prende il nome di *funzione derivata* o brevemente derivata. Il problema della tangente è così risolto in modo generale. Il metodo infatti si applica facilmente a qualsiasi funzione algebrica e non solo a quelle di secondo grado. Generalizzando il metodo si arriva a questa definizione di derivata:

$$D_x f(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

dove $f(x)$ è una qualsiasi funzione continua.

Nel caso precedente per esempio sostituendo $f(x)$ con x^2 :

$$\begin{aligned} D_x x^2 &= \frac{(x + dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} = \\ &= \frac{2xdx + dx^2}{dx} = 2x + dx \cong 2x \end{aligned}$$

1.2 La critica di Berkeley

Nel 1734 George Berkeley vescovo anglicano scrisse un breve saggio intitolato *The Analyst* nel quale criticava pesantemente i fondamenti del calcolo

infinitesimale così come erano stati definiti da Newton e Leibniz ed in particolare sosteneva, a ragione, la contraddittorietà della nozione di infinitesimo il quale è considerato al tempo stesso uguale a zero e diverso da zero.

In effetti, come può un numero essere più piccolo in valore assoluto di un qualsiasi altro numero positivo e tuttavia essere diverso da zero? Il campo dei numeri reali deve soddisfare infatti la seguente proprietà:

Proposizione 1.2.1 (Proprietà Archimedeica). *Per ogni numero reale positivo a esiste un numero naturale n tale che*

$$\frac{1}{n} < a.$$

Questo ci dice che non può esistere nessun numero reale positivo che sia più piccolo di ogni altro numero reale positivo ($1/n$ è un numero reale). Ciò sancisce la caduta degli infinitesimi e di tutto il ragionamento che ci ha portato alla definizione di derivata: se dx non è zero, allora è diverso da zero e nell'esempio considerato non abbiamo il diritto di eliminarlo impunemente. Se è zero il rapporto dy/dx assume il valore $0/0$ che è un'espressione priva di significato. Scrisse Berkeley: *Una volta ammesso che gli incrementi scompaiono, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre viene mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa.* Berkeley concluse sarcasticamente che gli infinitesimi sono *Ghosts of departed quantities*, cioè fantasmi di entità defunte.

1.3 Weierstrass e il concetto di limite

La critica di Berkeley non turbò troppo matematici, fisici e ingegneri; il calcolo infinitesimale funzionava troppo bene perché si potesse seriamente pensare di abbandonarlo.

Quando nel XIX secolo si presentò una forte esigenza di rigore matematico, il calcolo differenziale venne completamente riformulato da Karl Weier-



Figura 1.4: Karl Weierstrass (1815-1897)

strass (figura 1.4), tra il 1870 ed il 1880, introducendo il concetto di limite, il quale permise di operare in termini dei soli numeri reali eliminando una volta per tutte l'uso degli infinitesimi.

Riprendiamo il nostro esempio e ragioniamo come propone Weierstrass. Sia Δx un numero reale qualsiasi e calcoliamo il rapporto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Ebbene, vediamo che $2x$ è il numero che viene approssimato sempre meglio scegliendo Δx sempre più piccolo (dato che Δx è arbitrario) e diciamo quindi che $2x$ è il limite di $\Delta y/\Delta x$ per x tendente a zero. In simboli:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

Risulta allora naturale assumere la seguente come definizione di derivata:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x$$

mantenendo l'antica notazione, dove il cambiamento di Δ in d indica semplicemente un'operazione di passaggio al limite.

Nulla da dire riguardo il rigore matematico di questa definizione: gli infinitesimi non vengono neppure sfiorati e siamo giunti al risultato che volevamo senza contraddizioni, infatti il rapporto $\Delta y/\Delta x$ non è mai privo di significato perchè non viene mai posto $\Delta x = 0$.

L'approccio di Weierstrass è quello *standard* ormai consolidato che viene insegnato oggi nei corsi di Analisi. Tuttavia, pur essendo un metodo rigoroso, come possiamo osservare ad esempio dalla definizione precedente, ha il difetto di farci perdere l'intuizione iniziale che aveva dato il via alla nascita del calcolo infinitesimale e che comunque ci aveva condotto a delle conclusioni corrette.

E se i risultati sono corretti, non potrà esserlo in qualche modo anche il procedimento? La risposta a questa domanda è sì!

1.4 Gli infinitesimi di Robinson



Figura 1.5: Abraham Robinson (1918-1974)

Nella seconda metà del XX secolo un matematico americano crede fermamente che Leibniz non farneticava quando insisteva sul fatto che si poteva parlare di infiniti e infinitesimi: così, quel matematico, il cui nome è Abra-

ham Robinson (figura 1.5), si prese il compito di dimostrare a tutto il mondo che c'era qualcosa di esatto nella testa di Leibniz: era il 1963 e si stavano schiudendo le porte dell'*analisi non standard*.

Robinson non solo costruisce un campo totalmente ordinato i cui elementi sono non solo tutti i numeri reali, ma anche i numeri infiniti e i numeri infinitesimi, ma scrive un'intera opera e ne dimostra la coerenza logica.

Questa sua scoperta si fonda in modo essenziale sulla logica matematica, anche se verso la fine degli anni sessanta il matematico americano H. Jerome Keisler è riuscito a riformulare tutta l'Analisi Matematica secondo il principio infinitesimale di Robinson, seguendo una via alternativa che non la utilizza, rendendo questo metodo accessibile addirittura alle matricole universitarie. Robinson battezzò questo nuovo calcolo differenziale *Analisi Non Standard*, in quanto esso si basa appunto su un modello non standard dei numeri reali.

L'idea di Robinson è la seguente. Prendiamo un numero infinitesimo, il che vuol dire che tale numero è sì piccolo, ma più piccolo di ogni inverso dei numeri naturali; si potrebbe pensare che tale numero sia zero, ma se è vero che $1/n$ tende a zero per $n \rightarrow \infty$, è pur vero che noi affermiamo ciò poiché esiste l'elemento separatore (Dedekind docet). Ma chi ci assicura che tale elemento separatore sia unico? La sua unicità si può solo postulare, ma mai dimostrare; quindi l'unicità dello zero quale elemento separatore non potrà mai venire dimostrata, perciò se è vero ciò, sarà anche vero che ci potrebbero essere altri elementi. Proprio su questo concetto Robinson costruisce il suo punto di forza: nessuno potrà mai confutare che a separare le due classi non è un elemento bensì un *trattino* di retta, i cui punti sono più piccoli di tutti gli inversi dei numeri naturali. Questi nuovi punti sono numeri e costituiscono, insieme a tutti i reali, il campo dei *numeri iperreali*, costruito egregiamente da Robinson. L'insieme di questi nuovi numeri, gli infinitesimi, non si trova soltanto attorno allo zero, ma anche attorno a qualunque numero reale, visto che essi possono essere sommati e traslati lungo tutta la retta iperreale. Tale insieme viene chiamato da Robinson *monade*, riprendendo un termine già usato da Leibniz. A questo punto, la retta reale risulta *estesa*: di essa fanno

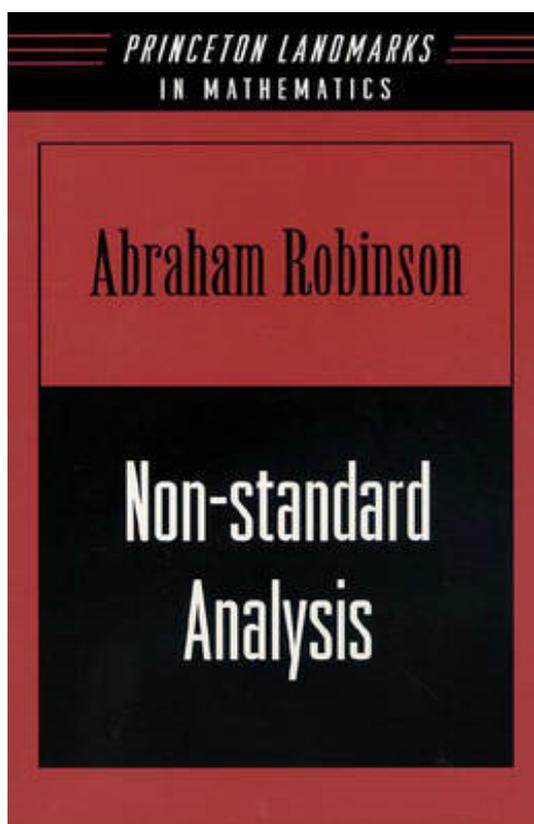


Figura 1.6: 'Non Standard Analysis' di Abraham Robinson

parte tutti i reali e tutte le monadi. Ma non è finita qui, poiché a destra e a sinistra di tutti i numeri reali ci stanno gli inversi (data la struttura di campo degli iperreali) di tutti gli infinitesimi: gli infiniti. La retta reale non è stata solo estesa, così come si richiede alle nuove scoperte matematiche, ma anche *allungata*.

Robinson ha dato quindi vita al sogno di Leibniz, ricostruisce tutta l'analisi su questo nuovo campo, sbarazzandosi anche del concetto di limite: infatti nel campo dei numeri iperreali non è più necessario dire *si supponga che x assuma valori arbitrariamente piccoli*, poiché ora si può tranquillamente dire *sia x un numero iperreale infinitesimo*.

Capitolo 2

Alcune nozioni di logica

2.1 Il linguaggio predicativo del primo ordine

La teoria dei modelli è quella branca della logica che si occupa delle relazioni intercorrenti tra un linguaggio formale e le sue interpretazioni. Cruciali per essa sono i concetti di linguaggio e modello.

Definizione 2.1.1. Un *linguaggio* è un insieme di simboli, per i quali sono formalmente definite delle regole di utilizzo.

Si può dire che tali regole definiscano il senso di tali simboli. A partire da un linguaggio è possibile generare delle proposizioni, combinazioni di simboli che abbiano un senso compiuto (cioè che rispettino certe regole).

A partire da un linguaggio ed alcune proposizioni in esso, può essere costruito un modello di quelle proposizioni.

Definizione 2.1.2. Un *modello* è costituito da un insieme e da una funzione detta di interpretazione, che associa ad ogni simbolo presente nella teoria elementi o relazioni di quell'insieme.

In questo senso si può intendere il modello come un'interpretazione del linguaggio. Il modo più semplice di realizzare un linguaggio e le sue rappresentazioni è quello detto del primo ordine, che è sufficiente per l'assiomatizzazione di entità matematiche come gruppi e campi.

Definizione 2.1.3. Si definisce *linguaggio predicativo del primo ordine* un insieme di simboli. Tali simboli sono divisi nelle seguenti categorie:

Costanti Servono ad indicare elementi che godono di proprietà particolari per il linguaggio (come lo 0 per un gruppo additivo). La cardinalità del loro insieme è arbitraria (anche non numerabile) e fissata.

Variabili Servono ad indicare elementi generici. Si supporrà che la cardinalità dell'insieme di questi simboli sia sempre sufficiente per scrivere tutte le proposizioni necessarie.

Relazioni di ordine n (o anche n -arie) Esprimono le relazioni e le funzioni. La loro cardinalità è fissata e può non essere numerabile.

Connettivi Si tratta dei simboli : \neg (negazione), \vee (disgiunzione), \wedge (congiunzione), \Rightarrow (implicazione), \Leftrightarrow (doppia implicazione o equivalenza).

Quantificatori Sono i simboli \forall (universale) e \exists (esistenziale).

Parentesi I simboli [e], che definiscono le priorità.

Un linguaggio sarà dunque indicato con

$$L \{c_1, c_2, \dots, R_1, R_2, \dots\}$$

dove i primi (c_i) sono simboli di costanti e i seguenti (R_i) di relazioni. Per convenzione non verranno indicati esplicitamente né i simboli di variabile, supponendo che essi siano sempre in numero sufficiente, né i connettivi, né i quantificatori, né le parentesi.

Definizione 2.1.4. Dato un linguaggio L sia L' un linguaggio che possiede tutti (ma non solo) i simboli di L . Si dirà che L' *espande*¹ L .

Definito il linguaggio, è ora necessario dare le regole per la formazione di frasi di senso compiuto a partire da tali simboli: formule atomiche e formule ben formate.

¹Alla nozione di espansione verrà poi dedicato l'intero paragrafo 2.6

Definizione 2.1.5. Si definiscono *formule atomiche* i simboli di relazione, opportunamente riempiti con simboli di costanti o variabili, (cioè se R è un simbolo di relazione n -aria, allora $R(a, b, \dots, x)$ è una formula atomica, dove a, b, \dots, x sono variabili o costanti).

Si definiscono poi in maniera ricorsiva le *formule ben formate* (fbf), o proposizioni:

- sia ξ una formula atomica, allora $[\xi]$ è una fbf;
- siano φ e ψ fbf, allora sono fbf $[\neg\varphi]$, $[\varphi \wedge \psi]$, $[\varphi \vee \psi]$, $[\varphi \Rightarrow \psi]$, $[\varphi \Leftrightarrow \psi]$;
- sia φ una fbf e x una variabile, allora sono fbf $[\forall x\varphi]$, $[\exists x\psi]$.

2.2 Strutture del primo ordine e modelli

Finora si è studiato il linguaggio e come esso possa esprimere i concetti di una teoria. A questo punto si analizzerà in che modo siano fatte le sue interpretazioni.

Definizione 2.2.1. Una *struttura del primo ordine* M , è definita da un insieme A di elementi (detti *individui*) ed un altro insieme P di *relazioni* di A . Una relazione di ordine n può essere definita come un sottoinsieme $R \subseteq A \times A \times \dots \times A$ n volte; si dice che una n -pla (a_1, a_2, \dots, a_n) soddisfa tale relazione se $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$ (altrimenti si dice *non soddisfarla*).

Per esempio, una struttura algebrica è definita a partire dai suoi elementi (individui) e da tre relazioni tra gli elementi: una binaria $E(\cdot, \cdot)$ identità, dove $E(a, b)$ sta per $a = b$, e due ternarie $S(\cdot, \cdot, \cdot)$ somma e $P(\cdot, \cdot, \cdot)$ prodotto, dove $S(a, b, c)$ sta per $a + b = c$ e $P(a, b, c)$ sta per $a \cdot b = c$.

Si noti che una funzione $F : X \longrightarrow Y$ può essere espressa come relazione, cioè come $F \subseteq X \times Y$ costituita dalle coppie $(x, F(x))$.

Infine ecco come ha luogo l'*interpretazione*. Siano L ed M un linguaggio ed una struttura del primo ordine. Si supponga che possa essere definita una funzione (detta funzione o *mappa d'interpretazione*) \mathbf{I} da $A \cup P$ (cioè

dall'unione degli insiemi degli individui e delle relazioni di M) ad un sottoinsieme dei simboli di L , in modo da mappare individui in simboli di individui e relazioni n -arie in simboli di relazioni n -arie. Una fbf di L , φ , sarà detta definita in M se tutti i simboli di costanti e relazioni di φ appartengono all'immagine di \mathbf{I} (d'ora in poi $Imm(\mathbf{I})$).

Dunque per una fbf di L definita in M è giunto il momento di definire la sua *validità* in M (se una proposizione definita vale in M si dice anche che è vera, altrimenti che è falsa). Anche questa definizione, come quella di fbf, è ricorsiva e sarà data per gradi²:

Definizione 2.2.2.

- (a) Sia φ fbf, con $\varphi = [\xi]$ dove ξ è una formula atomica. Dunque si può scrivere (per definizione) $\xi = \mathbf{R}(x_1, \dots, x_n)$ dove \mathbf{R} è un simbolo di relazione n -aria di L . φ è valida in M se $\mathbf{R}, x_1, \dots, x_n$ appartengono tutti all'immagine di \mathbf{I} , e se, ponendo $a_i = \mathbf{I}^{-1}(x_i)$ e $R = \mathbf{I}^{-1}(\mathbf{R})$, la n -pla (a_1, \dots, a_n) soddisfa la relazione R in A .
- (b) Sia φ una fbf di L definita in M , allora risultano definite anche le sue combinazioni tramite connettivi (purchè ben formati). La proposizione $\theta = [\neg\varphi]$ risulta vera in M se e solo se φ è falsa in M . Sia ora ψ un'altra fbf. Le combinazioni tramite connettivi di queste due proposizioni risultano valide se lo sono φ e ψ secondo le tabelle di verità.
- (c) Sia φ una fbf definita in M della forma $\varphi = [\exists x\psi]$ (dunque anche ψ è una fbf definita in M). Se il simbolo di variabile x non compare in ψ , allora φ è vera se e solo se ψ è vera in M . Altrimenti se x compare in ψ (si indicherà con $\psi = \psi(x)$), allora essa è valida in M se e solo se esiste un individuo $a \in Imm(\mathbf{I})$ tale che la proposizione $\psi(a)$ sia valida in M . Sia ora invece φ una fbf definita in M della forma $\varphi = [\forall x\psi]$. Come prima, se x non compare in ψ come variabile allora φ è valida in M se e solo se ψ è valida in M . Altrimenti se $\psi = \psi(x)$, allora φ è valida se

²Tale definizione è conosciuta in letteratura con il nome di 'semantica di Tarsky'

e solo se per tutti gli individui $a \in Imm(\mathbf{I})$ tutte le proposizioni $\psi(a)$, sono vere in M .

Si mostra facilmente per induzione che le regole enunciate sopra sono sufficienti per definire sempre il valore di verità in M di una qualsiasi proposizione ivi definita.

Definizione 2.2.3. Siano dunque L ed M un linguaggio ed una struttura del primo ordine, sia X un insieme di fbf di L , tale per cui esista una mappa d'interpretazione, in modo che tutte le proposizioni di X siano definite e vere in M . In questo caso M viene detto un *modello* di X .

Un insieme di fbf di un linguaggio viene detto *consistente* se possiede almeno un modello, altrimenti si dice *non consistente* o contraddittorio.

Sia M un modello di un insieme X , come sopra, composto da proposizioni definite e vere del linguaggio L . E' sempre possibile estendere L ad un linguaggio L' in modo che tutti gli individui di M (cioè ogni elemento di A) abbiano un'immagine tramite \mathbf{I}' (estensione della mappa d'interpretazione di partenza). Per evitare complicazioni, si supponrà d'ora in poi di aver sempre portato a termine tale innocua estensione. Dunque per ogni individuo e relazione di M esiste un corrispondente simbolo di costante o relazione (tramite \mathbf{I}). Si noti comunque che il fatto che una qualsiasi proposizione di L sia valida o meno in M dipende solo da \mathbf{I} , cioè date \mathbf{I}^1 e \mathbf{I}^2 due estensioni definite su tutto M (a valori dunque in L_1, L_2 , linguaggi che estendono L), una qualsiasi proposizione φ di L definita in M è vera tramite \mathbf{I}^1 se e solo se lo è tramite \mathbf{I}^2 .

2.3 Ultrafiltri e ultraprodotti

E' opportuno ora introdurre una particolare struttura del primo ordine che sarà utile in seguito per la dimostrazione del teorema di compattezza.

Definizione 2.3.1. Sia I un insieme di indici ($I \neq \emptyset$) e si supponga che sia definita per ogni $i \in I$ una struttura del primo ordine M_i , con insieme delle

relazioni P uguale per tutte. Si definisce *ultrafiltro*³ di I , un insieme U di sottoinsiemi di I che gode delle seguenti proprietà:

- a. l'insieme vuoto $\emptyset \notin U$;
- b. se $A, B \in U$, allora $A \cap B \in U$;
- c. se $A \in U$ e $A \subseteq B \subseteq I$, allora $B \in U$;
- d. per ogni $A \subseteq I$, $A \in U$ oppure $I - A \in U$ (ma non entrambi per (a) e (b)).

Dalle proprietà sopra elencate discende subito che un ultrafiltro è sempre massimale. Infatti dati due ultrafiltri U_1 e U_2 tali che $U_1 \subseteq U_2$; se $A \in U_2$, dato che $A \subseteq I$ per (d) si deve avere che o $A \in U_1$ o $I - A \in U_2$, ma la seconda possibilità è assurda, altrimenti U_1 non sarebbe contenuto in U_2 , poichè $I - A \notin U_2$ per (d) e (a). Dunque si ha $U_1 = U_2$, perciò un ultrafiltro non essendo mai contenuto in nessun altro ultrafiltro più grande è sempre massimale.

A partire dunque da un insieme di modelli $M_i (i \in I)$ e da un ultrafiltro U è possibile costruire una nuova struttura del primo ordine detta *ultraprodotto*.

Definizione 2.3.2. Siano $M_i (i \in I)$ un insieme di modelli e U un ultrafiltro definito su I . Si dice *ultraprodotto* una struttura del primo ordine M_U definita come segue:

- l'insieme degli individui di M_U è l'insieme di tutte le funzioni

$$f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$$

definite su I tali che $f(i) \in M_i$ per ogni $i \in I$;

- per ogni relazione n -aria $R(x_1, \dots, x_n)$ contenuta in M_i e per ogni n -pla (f_1, \dots, f_n) di individui di M_U , sia A l'insieme degli i tali che $R(f_1(i), \dots, f_n(i))$ vale in M_i . Si pone allora che $R(f_1, \dots, f_n)$ vale in M_U solo se $A \in U$.

³La definizione di ultrafiltro non è unica in letteratura. Qui è riportata quella di Robinson.

2.4 Principio del finito

Com'è stato detto, un insieme di proposizioni di L linguaggio del primo ordine è detto consistente se ha almeno un modello. Supponendo di prendere in considerazione una teoria T (inteso qui come insieme di proposizioni) è importante saper distinguere se T è o non è consistente, dato che, per così dire, non siamo interessati allo studio di sistemi contraddittori (all'interno dei quali è possibile dimostrare qualsiasi proposizione, comprese due che siano l'una la negazione dall'altra). In questa sezione verrà enunciato un teorema utile per riconoscere una teoria consistente.

E' però necessario prima introdurre alcune definizioni formali:

Definizione 2.4.1. Una fbf in L è detta in *forma normale* se, costruendola a partire dalle sue formule atomiche, i quantificatori (se presenti) vengono applicati dopo i connettivi (se presenti).

Inoltre:

Definizione 2.4.2. Due proposizioni φ e ψ sono dette *equivalenti* se contengono gli stessi simboli di costanti e relazioni, e se la fbf $\varphi \Leftrightarrow \psi$ è vera in ogni modello dove φ e ψ risultano definite (sostanzialmente due proposizioni sono equivalenti se significano la stessa cosa).

Lemma 2.4.3. *Sia L un linguaggio del primo ordine e φ una proposizione, allora esiste una proposizione $\bar{\varphi}$ equivalente (\approx) a φ ed in forma normale.*

Dimostrazione. La dimostrazione sarà accennata⁴, non essendo di particolare interesse ai fini della trattazione.

Sia dunque φ una proposizione di L . Innanzitutto si noti che l'equivalenza tra proposizioni gode della proprietà transitiva, quindi per dimostrare il teorema l'idea è quella di costruire una successione di proposizioni equivalenti, fino a giungere ad una in forma normale. Con gli strumenti del calcolo proposizionale, si possono dimostrare le seguenti equivalenze, scritte qui in

⁴Per maggiori dettagli si veda il testo '*Non-standard Analysis*' di Robinson

ordine gerarchico (cioè per dimostrare le ultime si deve fare uso delle prime). Si farà uso della notazione $\varphi = \varphi(x)$ e $\varphi \neq \varphi(x)$ per indicare se il simbolo di variabile x compare o no in φ .

$$[\varphi \iff \psi] \approx [[\varphi \rightarrow \psi] \wedge [\psi \rightarrow \varphi]]$$

$$[\varphi \rightarrow \psi] \approx [\neg\varphi \vee \psi]$$

$$\neg[\varphi \vee \psi] \approx [\neg\varphi \wedge \neg\psi]$$

$$\neg[\varphi \wedge \psi] \approx [\neg\varphi \vee \neg\psi]$$

$$\neg[\exists x\varphi] \approx [\forall x\neg\varphi]$$

$$\neg[\forall x\varphi] \approx [\exists x\neg\varphi]$$

$$[[\exists x\varphi(x)] \vee \phi] \approx [\exists y[\varphi(y) \vee \phi]] \text{ purchè } \varphi \neq \varphi(y) \quad (2.1)$$

$$[\phi \vee [\exists x\varphi(x)]] \approx [\exists y[\phi \vee \varphi(y)]] \text{ purchè } \varphi \neq \varphi(y) \quad (2.2)$$

Si considerino inoltre valide tutte le combinazioni di (2.1) e (2.2) ottenute sostituendo \exists con \forall e \vee con \wedge .

A partire da queste formule di equivalenza è ora possibile ottenere una proposizione in forma normale a partire da una qualsiasi, equivalente a quest'ultima.

◇

Si noti infine che la forma normale di una fbf non è unica; ad esempio per la proposizione $[\exists x\varphi(x)] \wedge [\forall y\psi(y)]$ entrambe le proposizioni (ad essa equivalenti) $\exists x[\forall y[\varphi(x) \wedge \psi(y)]]$ e $\forall y[\exists x[\varphi(x) \wedge \psi(y)]]$ sono in forma normale. D'ora in poi quindi verranno omesse le parentesi tra due quantificatori successivi, essendo irrilevante il loro ordine.

A questo punto è possibile enunciare il Principio del Finito (detto anche teorema di compattezza).

Teorema 2.4.4 (Teorema di Compattezza). *Sia L un linguaggio del primo ordine e X un insieme di proposizioni tale che ogni suo sottoinsieme finito è consistente, allora X è consistente.*

Dimostrazione. Come in precedenza si darà uno schema della dimostrazione, omettendone alcuni dettagli⁵.

Innanzitutto si supporrà che X sia costituito da sole proposizioni in forma normale. Grazie al lemma precedente l'ipotesi non è riduttiva, infatti sostituendo tutte le proposizioni non in forma normale con delle altre equivalenti in forma normale rimane preservata la proprietà di X di avere un modello per ogni sottoinsieme finito. L'idea è quella di costruire un modello di X a partire dalle strutture associate a tutti i suoi sottoinsiemi finiti, tramite un ultraprodotto.

Si definisce innanzitutto l'insieme di indici I come l'insieme di tutti i sottoinsiemi finiti di X . Per ogni $i \in I$ si scelga una struttura M_i , in modo che essa sia un modello di i . Possiamo identificare le relazioni nei diversi M_i che sono istanze dello stesso simbolo di relazione in i distinti. Cioè, sia \mathbf{R} un simbolo di relazione n -aria che compare in X , si indicherà con R la relazione associata in ogni M_i per cui i contiene proposizioni dove compare \mathbf{R} . Invece per gli $i \in I$ tale che \mathbf{R} non vi compare, è innocuo aggiungere la relazione n -aria R vuota (cioè non soddisfatta da alcun individuo) in M_i . In questo modo si costruisce l'insieme P di relazioni uguale per tutti gli $i \in I$. Così la struttura degli individui del modello di X è stata costruita: essa è l'insieme di tutte le funzioni

$$f : I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i$$

tali che $f(i) \in M_i$ per ogni $i \in I$, con insieme di relazioni P . Si considerino ora gli insiemi

$$d_i = \{j \in I : i \subseteq j\} \text{ e sia } U = \cup_{i \in I} d_i.$$

Si può dimostrare che U è un ultrafiltro per I e, supponendo di averlo fatto, si indicherà con M_U la struttura di ultraprodotto ottenuta tramite gli elementi precedenti (I, M_i, U) . Bisogna ora mostrare che effettivamente M_U è un modello di X .

Innanzitutto bisogna definire la mappa di interpretazione \mathbf{I} . Per quanto riguarda le relazioni, la definizione di \mathbf{I} è semplice, essendo stato costruito

⁵Di nuovo per maggiori dettagli si veda il testo '*Non-standard Analysis*' di Robinson

l'insieme P in corrispondenza biunivoca con i simboli di relazione occorrenti in X . \mathbf{I} manderà dunque la generica relazione $R \in P$ nel simbolo R associato in X . Per l'interpretazione delle costanti invece si procede come segue: sia x un simbolo di costante che compare in X . Si deve definire la funzione

$$f_x : I \rightarrow \cup_{i \in I} M_i$$

associata a tale simbolo (ossia $f_x = \mathbf{I}^{-1}(x)$). Come detto precedentemente, supponendo di aver esteso i simboli di costante di X in modo che ogni individuo di M abbia un nome, è quindi irrilevante definirla a partire dai simboli o dagli individui. Per gli $i \in I$ tali che x compare in i esiste un unico elemento $a_x^i = \mathbf{I}^{-1}$ in M_i (dove con \mathbf{I}_i si è indicata la mappa d'interpretazione del modello M_i di i). Per tali i si definisce dunque $f_x(i) = a_x^i$. Per gli altri i (quelli dove x non vi compare), si definisce $f_x(i)$ un valore arbitrario.

Ora, per terminare la dimostrazione, è necessario verificare che una qualsiasi proposizione in X è vera in M_U . Per definizione della struttura prodotto, φ è vera in M_U se l'insieme degli $i \in I$ per cui la sua interpretazione è vera (nei singoli M_i), appartiene all'ultrafiltro U .

◇

2.5 Ordine superiore

Come si è visto nella sezione precedente, gli strumenti della logica del primo ordine sono sufficienti per definire molti concetti algebrici. Il suo limite principale però sta nel non essere in grado di esprimere concetti equivalenti ai quantificatori che riguardino entità più grandi dei singoli individui (ad esempio per insiemi di individui, insiemi di insiemi,...). Per questa ragione la teoria del primo ordine è estesa a quella di ordine superiore, che permette di ovviare a tali limiti. Ovviamente questa maggior libertà viene pagata a prezzo di una maggior complessità strutturale. I concetti introdotti nella sezione precedente di linguaggio e modello di primo ordine, saranno modificati. In particolare la definizione di linguaggio sarà ampliata, mentre quella

di struttura sarà data ex novo. Ovviamente i casi della sezione precedente possono essere ricondotti a quelli della presente.

Inoltre, cruciale in questa sezione, sarà la definizione di espansione di un modello di una teoria. Dato un modello di un certo insieme di proposizioni, un'espansione è un altro modello di quell'insieme, che però contiene un sottoinsieme proprio uguale al primo. Gli elementi del nuovo modello, contenuti nel sottoinsieme uguale al modello più piccolo, saranno detti *standard*, gli altri *non standard*.

L'analisi non standard è un esempio di espansione del modello della retta reale \mathbb{R} .

2.5.1 Linguaggio di ordine superiore

Prima di ogni altra cosa è necessario qui introdurre la definizione di tipo. I tipi sono necessari per costruire relazioni che comprendano contemporaneamente elementi ed insiemi di elementi, senza incorrere in entità indesiderabili (come un insieme che contenga contemporaneamente individui ed insiemi di individui).

Definizione 2.5.1. Si definisce un *tipo* nella seguente maniera ricorsiva:

- 0 è un tipo;
- sia n un intero e t_1, \dots, t_n tipi, allora (t_1, \dots, t_n) è un tipo

Si indicherà con T l'insieme di tutti i tipi.

In sostanza il tipo 0 è quello usato per indicare gli elementi, gli altri possono indicare tutte le entità costituite a partire dagli elementi (così come tutti i tipi vengono costruiti a partire da 0).

Per esempio si consideri un insieme A . Un sottoinsieme di A è di tipo (0), un sottoinsieme di $A \times \dots \times A$ è del tipo $(0, \dots, 0)$ n volte, mentre il tipo $((0), 0)$ indica un insieme costituito da sottoinsiemi di A e contemporaneamente da singoli elementi.

Si indicherà d'ora in poi con A^t l'insieme di tutti gli insiemi di tipo t , costruiti a partire da A . Dunque $A^0 = A$, $A^{(0,\dots,0)} = A \times \dots \times A$ n volte e $A^{((0),0)} = \mathbf{P}(A) \times A$ (dove con $\mathbf{P}(A)$ si intende l'insieme delle parti di A).

Possiamo ora dare la definizione di linguaggio predicativo di ordine superiore.

Definizione 2.5.2. Si definisce *linguaggio predicativo di ordine superiore* un particolare linguaggio del primo ordine, in cui gli unici simboli di relazione sono costituiti da Φ_t per ogni $t \in T - \{0\}$, con la convenzione che se $t = (t_1, \dots, t_n) \in T - \{0\}$, la relazione associata Φ_t è di ordine $n + 1$.

E' necessario introdurre questi simboli di relazione per permettere la definizione delle costanti; si ricordi infatti che nell'ordine superiore una costante può essere interpretata come una relazione avente argomenti di tipo diverso. Dunque la notazione di linguaggio di ordine superiore diventa

$$\Lambda \{c_1, c_2, \dots\}$$

essa è ulteriormente snellita, avendo ommesso per convenzione i simboli di relazione.

Le definizioni di *formula atomica* e *formula ben formata* sono identiche a quelle già date. Tra le fbf di un linguaggio di ordine superiore vengono inoltre distinte le cosiddette formule stratificate.

Definizione 2.5.3. Per ogni $t_0 = (t_1, \dots, t_n)$, si dirà t_i il tipo del simbolo (di variabile o di costante) occupante la posizione $i + 1$ di Φ_{t_i} (per $i = 0, \dots, n$).

Una fbf si dice *stratificata* se ogni simbolo vi compare solo in posizioni dello stesso tipo.

Un insieme X di proposizioni si dice *stratificato* se tutte le fbf che lo compongono sono stratificate e se, per ogni simbolo x che occorre in X , esso occorre sempre nello stesso tipo in tutte le proposizioni stratificate.

Le formule stratificate prendono il posto di quelle ben formate nella teoria di ordine superiore: infatti perchè una proposizione abbia senso, è necessario che il tipo di ogni costante sia univoco.

2.5.2 Strutture e modelli di ordine superiore

A questo punto, per introdurre le strutture, è necessaria una definizione preliminare.

Definizione 2.5.4. Sia A un insieme qualsiasi; si consideri l'insieme di tutte le funzioni $f : K \rightarrow A$, dove K è un qualunque insieme di indici, permettendo le ripetizioni (cioè è possibile che esistano $k, k' \in K$ tali che $f(k) = f(k')$). Siano f e f' due di tali funzioni, definite su rispettivi insiemi K e K' , si dice che f e f' sono *equivalenti* se può essere definita una funzione biunivoca $q : K \rightarrow K'$ tale che $f(k) = f'(q(k))$ per ogni $k \in K$.

Si dirà *sottoinsieme con ripetizione* S una qualsiasi classe di equivalenza delle funzioni definite precedentemente.

Infatti in ogni classe d'equivalenza, $Imm(f) \subseteq A$ è costante al variare di f nella classe; dunque due classi di equivalenza di funzioni, che hanno come immagine lo stesso sottoinsieme di A , differiscono solo per la presenza di elementi ripetuti di A . In questo senso per ogni insieme A si può considerare un sottoinsieme con ripetizione di A come un effettivo sottoinsieme $B \subseteq A$ (prendendo in considerazione l'immagine di una qualsiasi funzione), purchè si tengano conto delle ripetizioni. Nel caso in cui ogni elemento di A compaia in un insieme con ripetizioni A' solo una volta, si scriverà, con un abuso di notazione, $A = A'$.

Si può ora dare la definizione di struttura di ordine superiore.

Definizione 2.5.5. Si definisce una *struttura di ordine superiore* M come una famiglia B_t di insiemi, con $t \in T$, tale che esista un insieme di individui (non vuoto) A tale per cui per ogni $t \in T$, B_t è un sottoinsieme con ripetizioni di A^t , con l'aggiunta dell'ipotesi che $B_0 = A^0 = A$

Le relazioni sono ora diventate qualcosa di più generale: per ogni $t = (t_1, \dots, t_n) \in T - \{0\}$ se $R \in B_t$, si impone allora che R possa essere soddisfatta solo da n -ple del tipo (R_1, \dots, R_n) con $R_i \in B_{t_i}$. In sostanza R può essere considerata un sottoinsieme del prodotto cartesiano di $A^{t_1} \times \dots \times A^{t_n}$.

D'ora in poi si chiameranno indefinitamente relazioni tutti gli elementi di B_t , per ogni $t \in T$ (compreso $t = 0$).

Se per ogni tipo $t \in T$, B_t contiene tutti gli elementi A^t diremo che M è *pieno* (cioè M contiene tutte le possibili relazioni di tutti i tipi); se ogni B_t non contiene ripetizioni, allora M si dirà *normale*. Quindi per una struttura piena e normale si ha $B_t = A^t$ per ogni $t \in T$. Si noti che una struttura del primo ordine è una particolare struttura di ordine superiore con $B_t = 0$ per ogni tipo $t \neq (0, \dots, 0)$ n -volte (ovviamente si richiede anche $B_0 \neq 0$).

Siano infine Λ e M un linguaggio ed una struttura di ordine superiore. Si definisce (nuovamente) la *funzione di interpretazione*, come una mappa \mathbf{I} dall'insieme $\{B_t\}_{t \in T}$ ad un sottoinsieme delle costanti del linguaggio Λ . Come detto in precedenza, d'ora in poi si supporrà sempre di aver esteso il linguaggio Λ in modo da avere simboli a sufficienza per tutte le relazioni di M .

Definizione 2.5.6. Sia $t_0 = (t_1, \dots, t_n)$, e sia $\varphi = \Phi_{t_0}(x_0, \dots, x_n)$ una formula stratificata di Λ . Essa è detta *ammissibile* in M se tutti i simboli di costante che compaiono in φ appartengono all'immagine di \mathbf{I} , in modo che il tipo della posizione occupato in φ sia lo stesso dell'interpretazione in M (ossia $\mathbf{I}(x_i) \in B_{t_i}$, per $i = 0, \dots, n$). Più in generale se φ è una formula stratificata, essa è detta ammissibile in M se ogni costante a è mappata in una relazione di tipo corrispondente al tipo nella propria posizione.

Si noti che la definizione di ammissibilità dipende solo dalla mappa d'interpretazione \mathbf{I} . Per quanto riguarda il valore di verità delle proposizioni, la definizione ricalca quella data in precedenza.

- (a) Sia $t_0 = (t_1, \dots, t_n) \in T$, e sia $\varphi = \Phi_{t_0}(x_0, \dots, x_n)$ una formula ammissibile. φ si dirà valida in M se $\mathbf{I}^{-1}(x_0)$ è soddisfatta da $(\mathbf{I}^{-1}(x_1), \dots, \mathbf{I}^{-1}(x_n))$, altrimenti verrà detta falsa.
- (b) Sia ora φ una combinazione tramite connettivi di formule ammissibili come $\psi_j = \Phi_{t_0}(x_0, \dots, x_n)$, per $t_0 \in T$ (si noti che quindi per definizione

φ stessa è ammissibile in M). Il suo valore di verità viene ricavato a partire dalle singole Φ_j secondo le regole del calcolo proposizionale.

- (c) Siano ora φ e θ proposizioni ammissibili in M del tipo $\varphi = \exists x\psi$ e $\theta = \forall x\psi$. Come nel caso del primo ordine, se x non occorre in ψ si pongono φ e θ vere se e solo se ψ è vera. Se invece $\psi = \psi(x)$, sia t il tipo di x in ψ (ossia il tipo della posizione in cui compare nelle formule atomiche di ψ). Diremo $\varphi = \exists x\psi$ vera in M se e solo se esiste una relazione $R \in B_t$ tale che $\psi(\mathbf{I}(R))$ sia vera in M . Così θ sarà detta vera se per ogni $R \in B_t$, $\psi(\mathbf{I}(R))$ è vera in M .

Diamo ora la definizione di modello di ordine superiore.

Definizione 2.5.7. Sia X un insieme di formule stratificate di Λ . Un *modello* di X , sarà una struttura di ordine superiore (non vuota), tale per cui esista una funzione di interpretazione \mathbf{I} in modo che ogni proposizione di X sia vera in M . Come per il primo ordine, X sarà detta *consistente* se possiede almeno un modello di ordine superiore.

Il teorema di compattezza, si estende all'ordine superiore, ma la sua dimostrazione sarà omessa⁶.

Teorema 2.5.8 (Teorema di Compattezza). *Sia Λ un linguaggio di ordine superiore e X un insieme di proposizioni stratificate tale che ogni sottoinsieme finito è consistente, allora X è consistente.*

2.6 Espansioni

Siano rispettivamente X e φ un insieme di formule stratificate ed una singola proposizione stratificata. φ si dice *definita* in X se tutti i simboli che compaiono in φ occorrono tra le proposizioni di X .

Una proposizione ψ definita in X si dice *ammissibile* in X se $X \cup \psi$ è stratificata.

⁶Per la dimostrazione completa si veda il testo 'Non-standard Analysis' di Robinson

Infine una proposizione ammissibile θ si dice che *deducibile* da X se $X \cup \{\neg\theta\}$ è contraddittorio (o non consistente) e si indica con $X \vdash \theta$.

Sia Λ un linguaggio di ordine superiore. Sia dunque X un insieme di proposizioni e sia Γ l'insieme delle costanti che compaiono nelle proposizioni di X . Si indicherà con il tipo di un elemento di Γ , il tipo della posizione occupata da tale elemento nelle proposizioni di X (è sempre lo stesso poichè X è stratificato). Sia $b \in \Gamma$ del tipo $t = (t_1, t_2)$ (b è dunque una relazione binaria); si consideri

$$G_b = \{g \in \Gamma : X \vdash [\exists y \Phi_t(b, g, y)]\}.$$

b verrà chiamato *concorrente* se per ogni $g_1, \dots, g_n \in G_b$ si ha

$$X \vdash [\exists y \Phi_t(b, g_1, y) \wedge \dots \wedge \Phi_t(b, g_n, y)].$$

Si indicherà con $\Gamma_c \subseteq \Gamma$ l'insieme degli elementi concorrenti che compaiono in X . Ora per ogni $b \in \Gamma_c$ si scelga una costante $a_b \in \Lambda$ in modo che siano tutte distinte e $a_b \in \Lambda$. Sia infine

$$X_c = \bigcup_{b \in \Gamma_c} \left\{ \bigcup_{g \in G_b} \Phi_t(b, g, a_b) \right\}.$$

Definizione 2.6.1. Si definisce *espansione* di X l'insieme $H = X \cup X_c$. Evidentemente H è unico a meno della scelta delle costanti a_b , che comunque variano all'interno dello stesso tipo.

Innanzitutto per garantire che un'espansione abbia sempre senso ecco il seguente risultato:

Teorema 2.6.2. *Sia X un insieme di proposizioni stratificate di un linguaggio di ordine superiore. Se X è consistente, allora la sua espansione H è consistente.*

Per la dimostrazione è necessario il seguente lemma, la cui dimostrazione verrà omessa⁷:

⁷Nel testo '*Non-standard Analysis*' di Robinson viene presentata una dimostrazione per un linguaggio del primo ordine.

Lemma 2.6.3. *Sia Λ un linguaggio di ordine superiore, Z un insieme di proposizioni stratificate di Λ con insieme di simboli di costante Γ . Sia $\mathbf{J} : \Gamma \longrightarrow C$ una mappa multi-a-uno, ove C è un insieme arbitrario di costanti di Λ . Se $\mathbf{J}(Z)$ è consistente, allora Z è consistente.*

Qui con $\mathbf{J}(Z)$ si è indicato l'insieme delle proposizioni ottenuto da Z sostituendo ogni sua costante con l'immagine ottenuta attraverso \mathbf{J} .

Dimostrazione. (teorema) Come definito in precedenza si ricorda che $H = X \cup X_c$. Grazie al teorema (2.5.8) sarà sufficiente mostrare che ogni sottoinsieme finito di H è consistente. Ma poichè X è consistente per ipotesi, ciò è equivalente a mostrare che sia consistente l'insieme di formule stratificate $X \cup Y$, ove Y è un qualsiasi insieme di cardinalità finita di X_c . Sia Γ l'insieme dei simboli di costante di $X \cup Y$ e si consideri

$$\begin{aligned} Y = & \{ \Phi_{t_1}(b_1, g_{11}, a_{b_1}), \dots, \Phi_{t_1}(b_1, g_{1k_1}, a_{b_1}), \\ & \Phi_{t_2}(b_2, g_{21}, a_{b_2}), \dots, \Phi_{t_2}(b_2, g_{2k_2}, a_{b_2}), \\ & \dots \\ & \Phi_{t_n}(b_n, g_{n1}, a_{b_n}), \dots, \Phi_{t_n}(b_n, g_{nk_n}, a_{b_n}) \} \end{aligned}$$

dove le costanti b_1, \dots, b_n sono distinte. Per definizione di concorrenza (dei b_i), esiste un modello M di X , e delle costanti $a_1, \dots, a_n \in \Lambda - \Gamma$ in modo tale che le proposizioni

$$\begin{aligned} Y = & \{ \Phi_{t_1}(b_1, g_{11}, a_{b_1}), \dots, \Phi_{t_1}(b_1, g_{1k_1}, a_{b_1}), \\ & \Phi_{t_2}(b_2, g_{21}, a_{b_2}), \dots, \Phi_{t_2}(b_2, g_{2k_2}, a_{b_2}), \\ & \dots \\ & \Phi_{t_n}(b_n, g_{n1}, a_{b_n}), \dots, \Phi_{t_n}(b_n, g_{nk_n}, a_{b_n}) \} \end{aligned}$$

siano vere in M . Applicando dunque il lemma precedente (dove si è posto $Z = X \cup Y$ e la mappa $\mathbf{J} : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ è definita come l'identità su $\Gamma - \{a_{b_1}, \dots, a_{b_n}\}$ e $\mathbf{J} : a_{b_i} \mapsto a_i$), si ottiene che M è un modello di $X \cup Y$, da cui la tesi.

◇

Tornando alla definizione di espansione, sia $B \subseteq \Gamma_c$. Come fatto precedentemente, si scelga per ogni $b \in B$ distinte costanti $a_b \in \Lambda - \Gamma$, e si consideri l'insieme

$$X_B = \bigcup_{a \in B} \left\{ \bigcup_{g \in G_b} \Phi_t(b, g, a_b) \right\}.$$

Si può estendere la definizione precedente e chiamare l'insieme $H_B = X \cup X_B$ una B -espansione, univocamente determinata a meno di variazioni delle costanti a_b (si noti che per definizione si ha $H_{\Gamma_c} = H$). Poichè $H_B \subseteq H$ se X è consistente, H_B è consistente.

Definizione 2.6.4. Un modello M di X verrà detto un B -modello di X se per ogni $b \in B$ esiste un simbolo di costante a in modo che l'insieme

$$\bigcup_{g \in G_b} \Phi_t(b, g, a)$$

sia vero in M .

Per esempio un modello di H_B è un B -modello di X . Il viceversa non è sempre vero però, poichè può esistere un'unica relazione R , tale che il simbolo di costante $\mathbf{I}(R)$ renda vero l'insieme precedente per diversi $b \in B$ (mentre nella definizione di B -espansione le costanti sono scelte distinte).

Si consideri un linguaggio di ordine superiore Λ e un insieme A , di cardinalità arbitraria. Sia data inoltre una struttura di ordine superiore M con A insieme di individui, in modo tale che ci sia una corrispondenza uno-a-uno tra i simboli di costante di Λ e le relazioni di M (con una funzione d'interpretazione \mathbf{I}). Sia infine X l'insieme delle formule stratificate che sono vere (e dunque ammissibili) in M . Si parlerà, con un abuso di linguaggio, di *espansioni* di M , considerando le espansioni di X .

2.6.1 Proprietà delle espansioni

Sia M una struttura di ordine superiore in corrispondenza con un linguaggio Λ , con X insieme delle proposizioni stratificate e valide in M (come sopra) e sia M^* un'espansione di M .

Verranno ora fatte alcune considerazioni sulle espansioni, per mostrare come essi si comportino bene rispetto alle strutture originali. Il concetto è che M^* è un modello di X tanto quanto lo è M . Cioè ogni relazione che è definita in M , è definita anche in M^* ed ogni proposizione vera in M è vera anche in M^* , interpretando opportunamente i simboli che vi compaiono. In questa parte verrà preso in esame questo concetto in modo più preciso.

Innanzitutto si mostrerà in che modo possiamo considerare A^* (insieme degli individui di M^*) come un'estensione di A . Sia $a \in A$ e sia $r \in B_{(0)}$ qualsiasi; $\Phi_{(0)}(r, I(a))$ è stratificata e ammissibile in M , dunque o $\Phi_{(0)}(r, \mathbf{I}(a))$ o $\neg\Phi_{(0)}(r, \mathbf{I}(a))$ appartiene a X , quindi il simbolo di costante $\mathbf{I}(a)$ compare in qualche proposizione di X . Ora poichè anche M^* è un modello di X , deve esistere una relazione A^* , tale che ${}^*\mathbf{I}(A) = I(A)$ (dove si è indicato con \mathbf{I}^* la mappa d'interpretazione di M^*). Inoltre poichè il tipo di a in A è 0 (determinato dalla proposizione precedente), deve essere $a^* \in A^*$. Pertanto, considerando la mappa $a \mapsto a^*$, possiamo definire un'immersione di A in A^* (essendo gli elementi diversi di A identificati da simboli diversi in Λ). In realtà in modo del tutto identico si può costruire un'immersione di B_t in B_t^* , per ogni $t \in T$. Dunque possiamo considerare M^* come un'estensione di M , nel senso che considerando gli elementi di B_t^* che sono immagine di uno (e un solo) elemento di B_t per ogni $t \in T$, otteniamo un modello di X isomorfo a M (per isomorfismo di modelli si intende l'esistenza di una mappa biunivoca $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}'$, in modo che per ogni relazione R di \mathbb{N} si ha $\mathbf{J}(R) = \mathbf{J}'(\nu(R))$).

Come seconda considerazione ci si metta nelle condizioni precedenti e si consideri $A' \subseteq A$ senza ripetizioni. A partire da A' può essere definita una nuova struttura di ordine superiore M' . Ovviamente $A' = B'_0$, mentre per gli altri $t \in T$ la definizione è più articolata. Si comincia definendo B_t , per $t = (0, \dots, 0)$ (n volte) come l'insieme $\{R \in B_t : R \subseteq A' \times \dots \times A'\}$. I

B'_t per i t rimanenti vengono definiti ricorsivamente come i sottoinsiemi dei B_t corrispondenti, formati dalle relazioni soddisfatte da elementi nei B_t già definiti. Ora tutti i simboli di costante relativi ad elementi di A' danno origine ad un sottoinsieme $*A' \subseteq A^*$. Anche in M^* dunque possiamo definire una struttura di ordine superiore M'^* , come fatto precedentemente. Si può dimostrare che, nelle condizioni precedenti, M'^* è un'espansione di M . L'importanza di questa considerazione è presto detta: si consideri infatti M la retta reale e M^* una sua espansione. Quanto detto sopra, ci garantisce di poter prendere in considerazione i numeri interi o i razionali come M' ed essere sicuri di trovare una corrispondente espansione M'^* . Più in generale lo stesso è valido per una struttura M' costruita, come sopra a partire da un insieme $A' \subseteq B_t$, per $t \in T$ qualsiasi. Per esempio si può pensare di prendere come A un qualsiasi insieme di funzioni da \mathbb{R} a \mathbb{R} .

Viene finalmente data la terminologia che, in un certo senso, giustifica il termine *analisi non standard*.

Definizione 2.6.5. Data M una struttura di ordine superiore e M^* una sua espansione con insieme di individui A^* , per ogni $t \in T$, si chiameranno allora *esterni* gli elementi di $(A_t^*)^t - B_t^*$, *interni* gli altri. Infine si definiscono *non standard* gli elementi di $B^* - B_t$, *standard* i normali elementi di M . Così ogni B -modello dei numeri naturali (visto come insieme ordinato con tutte le peculiarità di \mathbb{N}) si chiamerà *modello dell'aritmetica non standard*, mentre ogni B -modello della retta reale sarà invece detto *modello dell'analisi non standard*.

Per assicurarsi che esistano elementi non standard (e giustificare i nomi dei precedenti modelli), si conclude questo paragrafo con il seguente risultato:

Proposizione 2.6.6. *Sia M una struttura di ordine superiore con espansione M^* . Sia $R \in B_{(t)}$ e sia $t \in T$. Allora R contiene elementi interni non standard se e solo se la cardinalità di R (visto come insieme) è infinita.*

Si noti che R (essendo di tipo (t)) è un insieme di relazioni di tipo t dunque

si intende come sua cardinalità come il numero di elementi che la soddisfano. Prendendo $t = 0$ si garantisce l'esistenza di individui non standard.

Dimostrazione. Per mostrare che la condizione è necessaria, si consideri R di cardinalità finita n . Se $n = 0$, si deve avere per forza $R^* = 0$ (deriva dalla proposizione, vera in M , $\forall x \neg \Phi_{(t)}(\mathbf{I}(R), x)$). Se invece $n > 0$ sia $R = \{S_1, \dots, S_n\}$ ed e il simbolo che denota la relazione d'identità in $A^{(t,t)}$. La proposizione (vera in M):

$$\forall x [\Phi_{(t)}(\mathbf{I}(R), x) \Rightarrow [\Phi_{(t,t)}(e, \mathbf{I}(S_1), x) \vee \dots \vee \Phi_{(t,t)}(e, \mathbf{I}(S_n), x)]]$$

assicura che R^* non può possedere altri elementi che S_1^*, \dots, S_n^* (corrispettivi dei senza asterisco).

Per la sufficienza si supponga che R contenga (sia soddisfatta da) un numero infinito di elementi; si definisca allora Q , nuova relazione binaria di M , nel modo seguente. Q è soddisfatta dalle coppie $(S, S') \in R$ purchè $S \neq S'$. Grazie all'infinità di R si ha che Q è concorrente. Dunque esiste una relazione interna F di M^* , tale che per ogni relazione standard di $S^* \in R^*$, la coppia (S^*, F) soddisfa Q^* . Ma questo significa che $F \in R^*$ è dunque l'elemento interno e non standard cercato (per definizione di espansione, F è interpretazione di un simbolo di cui non ci sono controimmagini in M).

◇

Dunque, per ricapitolare, sia M una struttura di ordine superiore con X insieme delle proposizioni stratificate e valide e sia M^* un'espansione. Essendo anche quest'ultimo un modello di X , si ha che ogni individuo, relazione, operazione, insieme o funzione definito in M , deve avere (almeno un) corrispettivo in M^* . Inoltre ogni assioma, teorema, o proprietà valida in M (purchè espressa in X) risulta vera per M^* , facendo però attenzione alla nuova interpretazione dei simboli di X . Si noti per esempio che un quantificatore universale fa riferimento in un'espansione ad ogni relazione di M^* , e non solo a quelle standard. Infine sia M' una sottostruttura di M , cioè una struttura costruita, come si è visto precedentemente, da un sottoinsieme

degli individui del modello di partenza. E' garantito trovare nell'espansione una sottostruttura M'^* che è essa stessa un'espansione di M' , dunque che rispetta esistenza e validità delle relazioni e proposizioni di M' , con la giusta interpretazione.

Capitolo 3

Analisi non standard

3.1 Aritmetica non standard

Grazie a quanto detto nel primo capitolo, è stato possibile definire l'ambiente in cui si intende lavorare: i modelli dell'analisi non standard. Si supporrà sempre di considerare modelli ed espansioni di ordine superiore. Si può pensare comunque che si tratti di modelli del primo ordine, purchè non si esuli dai limiti che esso ci impone, cioè l'uso dei quantificatori solo per gli individui e le relazioni n -arie.

Ora dunque l'idea è quella di presentare un insieme di risultati validi per questo ambiente. In questa prima parte verranno analizzate le peculiarità che rendono tipici i B -modelli¹ rispetto alle istanze normali. Poichè per la definizione di successione è necessario il concetto di numeri naturali, verrà per prima analizzata l'aritmetica non standard (ovvero le espansioni di \mathbb{N}). Si ricordi che, per quanto detto nel precedente capitolo, ogni nozione che ha senso ed è vera per la struttura di base, ha senso ed è valida per la sua espansione o, per essere più formali, ogni nozione che è espressa da una proposizione stratificata che è vera nella struttura di partenza è vera in ogni suo B -modello, purchè queste vengano interpretate in \mathbb{N}^* con la giusta interpretazione.

¹Per la definizione di B -modello si veda la definizione 2.6.4 del capitolo 2.

Siano dunque \mathbb{N} il normale modello dei numeri naturali con ordine, X l'insieme delle sue proposizioni stratificate valide e \mathbb{N}^* una sua espansione. Si supponrà per comodità che in X si faccia uso dei simboli di costante $0, 1, 2, \dots$ che identificano gli elementi di \mathbb{N} e che la struttura \mathbb{N}^* sia normale in \mathbb{N} , cioè che tutti i B_t non contengono ripetizioni. Come è stato detto, dunque anche in \mathbb{N}^* sono definiti un ordine e le operazioni di somma e prodotto con le normali proprietà. D'ora in avanti si chiameranno numeri naturali i generici elementi di \mathbb{N}^* , aggiungendo standard per indicare in particolare l'immagine di \mathbb{N} dentro a \mathbb{N}^* .

Sia q il simbolo in X che indica la normale relazione di ordine in X (cioè $\Phi_{(0,0)}(q, a, b)$ sta per $a < b$) ed e il simbolo di X che identifica la relazione di equivalenza (cioè $\Phi_{(0,0)}(e, a, b)$ sta per $a = b$); allora la proprietà di tricotomia di \mathbb{N} (cioè: dati due qualsiasi numeri non uguali si ha sempre che uno dei due è minore dell'altro) è valida in \mathbb{N}^* e sono inoltre altrettanto valide le seguenti proposizioni:

$$\begin{aligned} & \forall x [\Phi_{(0,0)}(e, 0, x) \vee \Phi_{(0,0)}(q, 0, x)] \\ & \forall x [\Phi_{(0,0)}(e, 0, x) \vee \Phi_{(0,0)}(e, 1, x) \vee \Phi_{(0,0)}(q, 1, x)] \\ & \forall x [\Phi_{(0,0)}(e, 0, x) \vee \Phi_{(0,0)}(e, 1, x) \vee \Phi_{(0,0)}(e, 2, x) \vee \Phi_{(0,0)}(q, 2, x)] \\ & \dots \end{aligned}$$

Da esse discende quindi che un qualsiasi numero naturale non standard (sappiamo che \mathbb{N}^* ne contiene almeno uno per la proposizione 2.6.3) è maggiore di tutti quelli standard. Per questa ragione, d'ora in poi i numeri naturali standard si chiameranno anche *finiti*, mentre quelli non standard si chiameranno anche *infiniti* e saranno indicati con \mathbb{N}_ω . Dunque in ogni B -modello di \mathbb{N} i numeri naturali finiti ne costituiscono il segmento iniziale.

E' altrettanto semplice mostrare che

Proposizione 3.1.1. \mathbb{N}_ω non ha minimo

Dimostrazione. Sia $a \neq 0$ un numero infinito, per la definizione di successivo in \mathbb{N} deve essere $a = b + 1$. Se fosse b finito seguirebbe che anche a deve essere

finito, ma ciò è assurdo per ipotesi. Perciò non esiste un numero infinito che sia più piccolo di a , cioè \mathbb{N}_ω non ha minimo.

◇

Si consideri ora la funzione $(x, y) \mapsto |x - y|$. Essa è definita in \mathbb{N}^* come in \mathbb{N} , perciò, per ogni $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$|a - b| \begin{cases} a - b & \text{se } a > b \\ b - a & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si può allora definire la seguente relazione di equivalenza:

per ogni $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \approx b$ se e solo se $|a - b|$ è un numero finito.

Si noti che tale relazione, non essendo immagine di alcuna relazione in \mathbb{N} , non è detto che sia interna. Inoltre tale relazione definisce su \mathbb{N}^* delle classi di equivalenza che assumono la forma di intervalli di \mathbb{N}^* infatti se $a \approx b$ e $a < c < b$ allora $a \approx c$ e $c \approx b$. Si vedrà poi l'importanza di tali classi quando si ripeterà il ragionamento su \mathbb{R} .

Si osservi inoltre che i numeri primi di \mathbb{N} rimangono tali anche in \mathbb{N}^* e dato che la proposizione che stabilisce che i numeri primi standard sono in numero infinito è vera in \mathbb{N} , ne segue che l'insieme dei numeri primi è infinito anche in \mathbb{N}^* . Inoltre anche il teorema fondamentale dell'aritmetica rimane valido in \mathbb{N}^* , dandone però la giusta interpretazione. La sua riformulazione in \mathbb{N}^* è la seguente:

Teorema 3.1.2 (Teorema fondamentale dell'aritmetica (non standard)). *Per ogni naturale $x \in \mathbb{N}$ esistono $n \in \mathbb{N}^*$ e p_1, \dots, p_n numeri primi tali che*

$$x = p_1 \cdots p_n.$$

Si noti che in \mathbb{N}^* il numero n dei divisori primi può essere anche infinito.

Infine si vuole presentare in questa sezione un piccolo risultato, che garantisce l'esistenza di entità esterne² in \mathbb{N} .

²Per la definizione di elemento esterno si veda la definizione 2.6.5

Teorema 3.1.3. *Gli elementi dell'insieme \mathbb{N}_ω dei numeri naturali infiniti sono esterni in \mathbb{N}^**

Dimostrazione. Come si è detto sopra, \mathbb{N}_ω non possiede un minimo. Ma la proposizione di \mathbb{N} che garantisce l'esistenza di un minimo su ogni suo sottoinsieme proprio (cioè per ogni elemento di $B_{(0)}$) vale anche in \mathbb{N}^* , perciò un numero naturale infinito $\mathbb{N}^* \ni n_\omega \notin B_{(0)}^*$. Dunque ricordando che un elemento si dice esterno se è incluso in $A^t - B_t$ si ha subito la tesi.

◇

Inoltre si ha anche che:

Teorema 3.1.4. *Gli elementi dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali finiti sono esterni in \mathbb{N}^**

Dimostrazione. Se per assurdo fosse interno, sarebbe possibile esprimere i suoi elementi tramite una formula stratificata³ di \mathbb{N}^* , e in tal caso, negando quella formula, si avrebbe che \mathbb{N}_ω è interno, assurdo per il teorema precedente.

◇

3.2 Analisi non standard e numeri iperreali

Sia \mathbb{R} il modello usuale del campo ordinato dei numeri reali e sia \mathbb{R}^* una sua espansione. Di nuovo come per i numeri naturali le operazioni e le relazioni di \mathbb{R} si estendono a \mathbb{R}^* . Poichè quindi \mathbb{R}^* è un campo ordinato l'estensione propria di \mathbb{R} deve essere non archimedeo⁴. Chiameremo d'ora in poi \mathbb{R}^* come *campo dei numeri iperreali*.

Definizione 3.2.1. Un numero iperreale a si dirà *finito* se esiste un reale standard b , tale che $|a| < b$, *infinito positivo* se a è maggiore di ogni numero

³Per la definizione di formula stratificata si veda la definizione 2.5.3 del capitolo 2.

⁴Nel primo capitolo abbiamo già sottolineato il contrasto tra la definizione di numero archimedeo e di infinitesimo.

reale, *infinito negativo* se a è minore di ogni numero reale. L'insieme dei numeri finiti si indicherà con \mathbb{R}_f , mentre quello degli infiniti con \mathbb{R}_ω .

Un numero iperreale a si dirà inoltre *infinitesimo* o *infinitamente piccolo* se $|a| < c$ per ogni c reale standard. L'insieme degli infinitesimi verrà indicato con \mathbb{R}_ϵ .

Si noti che per questa definizione il solo reale infinitesimo è lo zero, che ogni numero reale è finito e che ogni infinitesimo è finito.

La figura (3.1) mostra un disegno della retta iperreale. I cerchi rappresentano microscopi infinitesimi che sono sufficientemente potenti da mostrare una porzione infinitamente piccola della retta iperreale. L'insieme \mathbb{R} dei numeri reali è sparso tra i numeri finiti. Attorno a ciascun numero reale c c'è una porzione di retta iperreale composta dai numeri infinitamente vicini a c (mostrata attraverso un microscopio infinitesimo per $c = 0$ e per $c = 100$). I numeri infinitamente vicini a zero sono gli infinitesimi. Nella figura (3.1) le parti finite e infinite della retta iperreale sono separate una dall'altra da una linea tratteggiata.

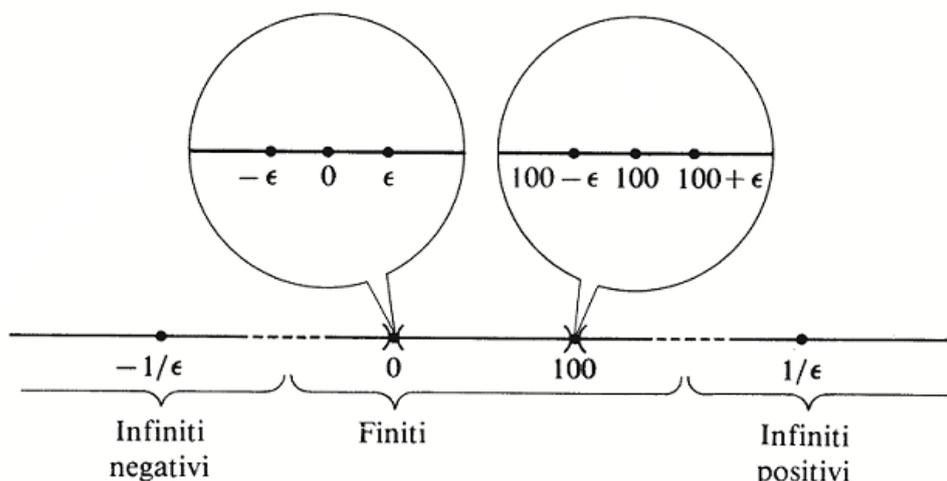


Figura 3.1: Retta iperreale

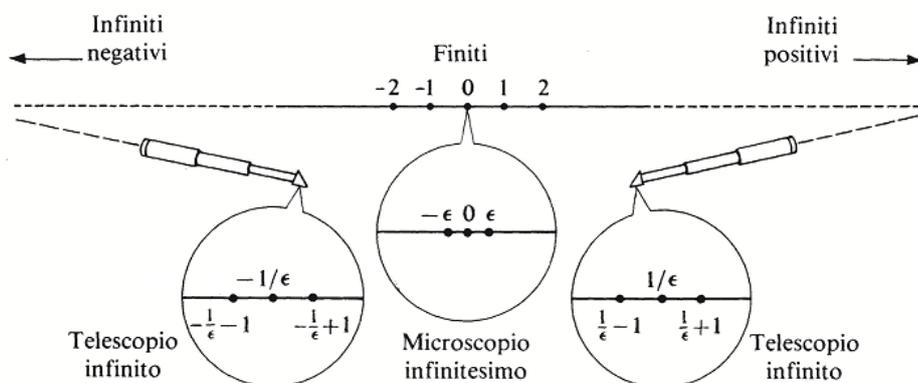


Figura 3.2: Telescopio e microscopio infinitesimo

Un altro modo per rappresentare le parti infinite della retta iperreale è con un telescopio infinito come mostra la figura (3.2). Il campo di vista di un telescopio infinito ha la stessa scala della parte finita di retta iperreale, mentre in campo di vista di un microscopio infinitesimo contiene una parte infinitamente piccola della retta iperreale ingrandita.

Dalla definizione si capisce subito che \mathbb{R}_f è un anello e che \mathbb{R}_ϵ è un ideale in \mathbb{R}_f ; più in particolare non è difficile verificare che \mathbb{R}_ϵ è un ideale massimale di \mathbb{R}_f ; da ciò segue che l'anello quoziente $\mathbb{R}_f/\mathbb{R}_\epsilon$ è un corpo e quest'ultimo contiene un sottocorpo isomorfo a \mathbb{R} , dal momento che elementi di \mathbb{R} sono diversi in modulo \mathbb{R}_ϵ . D'altra parte ogni elemento di \mathbb{R}_f determina una sezione dedekindiana in \mathbb{R} ed è congruente modulo \mathbb{R}_ϵ all'elemento di \mathbb{R} che determina la stessa sezione. Se ne conclude che $\mathbb{R}_f/\mathbb{R}_\epsilon$ è isomorfo a \mathbb{R} .

Vediamo ora due teoremi che riassumono le regole di calcolo tra numeri iperreali.

Teorema 3.2.2 (regole per i numeri infinitesimi, finiti e infiniti). *Supponiamo che ϵ, δ siano infinitesimi, b, c siano iperreali finiti ma non infinitesimi e H, K siano iperreali infiniti.*

i Opposti:

- $-\epsilon$ è *infinitesimo*
- $-b$ è *finito ma non infinitesimo*
- $-H$ è *infinito*

ii *Reciproci:*

- Se $\epsilon \neq 0$ allora $\frac{1}{\epsilon}$ è *infinito*
- $\frac{1}{b}$ è *finito ma non infinitesimo*
- $\frac{1}{H}$ è *infinitesimo, ma non è zero*

iii *Somme:*

- $\epsilon + \delta$ è *infinitesimo*
- $b + \epsilon$ è *finito ma non infinitesimo*
- $b + c$ è *finito*
- $H + \epsilon$ e $H + b$ sono *infiniti*

iv *Prodotti:*

- $\epsilon \cdot \delta$ e $b \cdot \epsilon$ sono *infinitesimi*
- $b \cdot c$ è *finito ma non infinitesimo*
- $H \cdot b$ e $H \cdot K$ sono *infiniti*

v *Radici:*

- Se $\epsilon > 0$ allora $\sqrt[n]{\epsilon}$ è *infinitesima*
- Se $b > 0$ allora $\sqrt[n]{b}$ è *finita ma non infinitesima*
- Se $H > 0$ allora $\sqrt[n]{H}$ è *infinita*

Dimostrazione. Vediamo solo alcune di queste regole di calcolo. Tutte le altre dimostrazioni sono simili e verranno perciò omesse.

Dimostriamo per esempio che se ϵ è un infinitesimo positivo, allora $-\epsilon$ è un infinitesimo negativo. Sia r un numero reale negativo così che $-r$ sia negativo, si ha perciò

$$\begin{aligned} 0 < \epsilon & \quad \text{e} \quad \epsilon < -r \\ -\epsilon < 0 & \quad \text{e} \quad -(-r) < -\epsilon \\ & \quad \Downarrow \\ -\epsilon < 0 & \quad \text{e} \quad r < -\epsilon \end{aligned}$$

Perciò $-\epsilon$ è un infinitesimo negativo.

Dimostriamo ora che se ϵ è un infinitesimo positivo diverso da zero allora $\frac{1}{\epsilon}$ è un infinito positivo. Sia r un numero reale positivo, poichè ϵ è un infinitesimo positivo

$$0 < \epsilon < \frac{1}{r}.$$

Usando ora le regole dell'algebra si ha

$$\frac{1}{\epsilon} > r.$$

Perciò si ha che $\frac{1}{\epsilon}$ è un infinito positivo.

Dimostriamo infine che il prodotto $b\epsilon$ tra un numero reale positivo e un infinitesimo positivo è un infinitesimo positivo. Sia r un qualsiasi numero reale positivo, allora

$$0 < \epsilon < \frac{r}{b}$$

e moltiplicando per b si ha

$$0 < b\epsilon < r.$$

Perciò $b\epsilon$ è un infinitesimo positivo.

◇

Combinando le regole dei reciproci e dei prodotti otteniamo immediatamente le seguenti regole per i quozienti.

Teorema 3.2.3 (Regole per i quozienti). *Supponiamo che ϵ, δ siano infinitesimi, b, c siano iperreali finiti ma non infinitesimi e H, K siano iperreali infiniti.*

- $\frac{\epsilon}{b}, \frac{\epsilon}{H}$ e $\frac{b}{H}$ sono infinitesimi.
- $\frac{b}{c}$ è finito ma non infinitesimo.
- $\frac{b}{\epsilon}, \frac{H}{\epsilon}$ e $\frac{H}{b}$ sono infiniti se $\epsilon \neq 0$.

Dimostrazione. Anche in questo caso vediamo solo alcune di queste regole di calcolo. Ad esempio $\frac{b}{H}$ può essere scritto come prodotto

$$\frac{b}{H} = b \cdot \frac{1}{H}.$$

Poichè b è finito e $\frac{1}{H}$ infinitesimo, per il teorema precedente, il prodotto è infinitesimo.

Analogamente, b è finito non infinitesimo e $\frac{1}{\epsilon}$ è infinito, così che il prodotto

$$\frac{b}{\epsilon} = b \cdot \frac{1}{\epsilon}$$

è infinito.

◇

Si noti che, come nel caso dei limiti (nell'analisi standard) non sono state date regole per le seguenti combinazioni, le così dette *forme indeterminate*, che si presentano nei casi in cui la conoscenza dei tipi degli operandi non consente di determinare il tipo di risultato. Contrariamente al caso dei limiti, però, in cui il limite può non esistere, nel caso delle operazioni con gli iperreali il risultato esiste sempre, tranne la divisione per zero.

Mostriamo ora le forme indeterminate:

- $\frac{\epsilon}{\delta}$, rapporto di due infinitesimi.
- $\frac{H}{K}$ rapporto di due numeri infiniti.
- $H\epsilon$ prodotto di un infinito per un infinitesimo

- $H + K$ somma di due numeri infiniti.

Ciascuno di essi può essere o infinitesimo, o finito ma non infinitesimo, o infinito a seconda di chi sono ϵ , δ , H e K . Per questo motivo sono chiamate *forme indeterminate*. Ecco tre rapporti di infinitesimi molto diversi.

- $\frac{\epsilon^2}{\epsilon}$ è infinitesimo (uguale a ϵ).
- $\frac{\epsilon}{\epsilon}$ è finito ma non infinitesimo (uguale a 1).
- $\frac{\epsilon}{\epsilon^2}$ è infinito (uguale a $\frac{1}{\epsilon}$).

La prossima tabella mostra le tre possibilità per ciascuna forma indeterminata.

forma indeterminata	infinitesimo	finito (uguale a 1)	infinito
$\frac{\epsilon}{\delta}$	$\frac{\epsilon^2}{\epsilon}$	$\frac{\epsilon}{\epsilon}$	$\frac{\epsilon}{\epsilon^2}$
$\frac{H}{K}$	$\frac{H^2}{H}$	$\frac{H}{H}$	$\frac{H}{H^2}$
$H\epsilon$	$H \cdot \frac{1}{H^2}$	$H \cdot \frac{1}{H}$	$H^2 \cdot \frac{1}{H}$
$H + K$	$H + (-H)$	$(H + 1) + (-H)$	$H + H$

Vediamo alcuni esempi di come si usano queste regole.

Esempio 3.2.4. Il rapporto

$$\frac{b - 3\epsilon}{c + 2\delta}$$

è finito ma non infinitesimo.

Infatti ϵ è un infinitesimo, e così pure -3ϵ è infinitesimo e $b - 3\epsilon$ è finito ma non infinitesimo. Analogamente $c + 2\delta$ è finito ma non infinitesimo.

◇

Esempio 3.2.5. Se $\epsilon \neq 0$ il rapporto

$$\frac{5\epsilon^4 - 8\epsilon^3 + \epsilon^3}{3\epsilon}$$

è infinitesimo.

Infatti il numero dato è uguale a

$$\frac{5}{3}\epsilon^3 - \frac{8}{3}\epsilon^2 + \frac{1}{3}\epsilon.$$

Tutti i termini sono infinitesimi, perciò anche la loro somma è un infinitesimo.

◇

Esempio 3.2.6. Se $\epsilon \neq 0$, il rapporto

$$\frac{3\epsilon^3 + \epsilon^2 - 6\epsilon}{2\epsilon^2 + \epsilon}$$

è finito ma non infinitesimo.

Infatti dividendo per ϵ sia numeratore che denominatore, si ha

$$\frac{3\epsilon^2 + \epsilon - 6}{2\epsilon + 1}.$$

Poichè $3\epsilon^2 + \epsilon$ è infinitesimo, mentre -6 è finito ma non infinitesimo, il numeratore $3\epsilon^2 + \epsilon - 6$ è finito ma non infinitesimo. Analogamente il denominatore $2\epsilon + 1$, perciò il rapporto è finito ma non infinitesimo.

◇

Esempio 3.2.7. Se $\epsilon \neq 0$, il rapporto

$$\frac{\epsilon^4 - \epsilon^3 + 2\epsilon^2}{5\epsilon^4 + \epsilon^3}$$

è infinito.

Infatti dividendo per ϵ^2 sia il numeratore che il denominatore, si ha

$$\frac{\epsilon^2 - \epsilon + 2}{5\epsilon^2 + \epsilon}.$$

Poichè $\epsilon^2 - \epsilon + 2$ è finito ma non infinitesimo e $5\epsilon^2 + \epsilon$ è infinitesimo il rapporto è infinito.

◇

Esempio 3.2.8. Il rapporto

$$\frac{2H^2 + H}{H^2 - H + 2}$$

è finito ma non infinitesimo.

Infatti moltiplicando per $1/H^2$ sia il numeratore che il denominatore, si ha

$$\frac{2 + \frac{1}{H}}{1 - \frac{1}{H} + \frac{2}{H^2}}.$$

Ora $1/H$ e $1/H^2$ sono infinitesimi, perciò sia il numeratore che il denominatore sono finiti ma non infinitesimi, e così anche il rapporto.

◇

Nel prossimo teorema saranno invece elencate le proprietà dell'ordinamento dei numeri iperreali.

Teorema 3.2.9. *Valgono le seguenti proprietà:*

- i *Ogni numero iperreale compreso tra due infinitesimi è infinitesimo.*
- ii *Ogni numero iperreale compreso tra due iperreali finiti è finito.*
- iii *Ogni numero iperreale maggiore di qualche infinito positivo è infinito positivo.*
- iv *Ogni numero iperreale minore di qualche infinito negativo è infinito negativo.*

Dimostrazione. Tutte le dimostrazioni sono facili e intuitive; dimostreremo (iii) in quanto è particolarmente utile.

Supponiamo che H sia un infinito positivo e che $H < K$. Allora per ogni reale r , $r < H < K$. Perciò $r < K$ e K infinito positivo.

◇

A questo punto è possibile definire una relazione di equivalenza in \mathbb{R} simile a quella definita su \mathbb{N}

3.2.1 La parte reale

Definizione 3.2.10. Due numeri iperreali a e b si dicono *infinitamente vicini* tra loro, in simboli $b \cong c$, se la loro differenza $a - b$ è infinitesima; l'insieme di tutti i numeri infinitamente vicini ad a si dice *monade* e sarà indicato con $\mu(a)$.

Si può subito osservare che se ϵ è un infinitesimo, allora $a \cong a + \epsilon$. Infatti la differenza $a - (a + \epsilon) = -\epsilon$ è infinitesima; a è un infinitesimo se e solo se $a \cong 0$; inoltre se a e b sono numeri reali e a è infinitamente vicino a b , allora a è uguale a b infatti $a - b$ è reale e infinitesimo, dunque zero, perciò $a = b$.

Dalla definizione si ha inoltre che l'insieme delle monadi è isomorfo a $\mathbb{R}^*/\mathbb{R}_\epsilon$. Dunque considerando i soli numeri reali finiti si ha che l'insieme delle classi d'equivalenza di \cong in \mathbb{R}_f è isomorfo a $\mathbb{R}_f/\mathbb{R}_\epsilon$.

Osservazione 3.2.11. Si supponga $a \cong b$. Allora

- se a è infinitesimo, allora lo è anche b ;
- se a è finito, allora lo è anche b ;
- se a è infinito, allora lo è anche b .

I numeri reali sono a volte chiamati numeri *standard*, mentre gli iperreali sono chiamati numeri *non standard*. Per questo motivo un numero reale che sia infinitamente vicino a a è detto parte standard (o parte reale) di a .

Definizione 3.2.12. Sia a un iperreale finito. Si definisce *parte standard* di a e si scrive $st(a)$ il numero reale che è infinitamente vicino a a , ovvero quell'unico numero reale standard nella sua classe di equivalenza per \cong . Un numero infinito non può avere parte standard poichè non può essere infinitamente vicino ad alcun numero finito.

Si osserva subito che se a un numero iperreale finito allora la sua parte standard è un numero reale, che risulta $a = st(a) + \epsilon$ per qualche infinitesimo e che se b è reale, allora $b = st(b)$.

Vediamo le regole di calcolo per la parte standard delle funzioni più semplici

Teorema 3.2.13. *Siano a e b due numeri iperreali finiti. Allora:*

- i** $st(-a) = -st(a)$
- ii** $st(a + b) = st(a) + st(b)$

$$\text{iii } st(a - b) = st(a) - st(b)$$

$$\text{iv } st(ab) = st(a) \cdot st(b)$$

$$\text{v } \text{Se } st(b) \neq 0, \text{ allora } st\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{st(a)}{st(b)}$$

$$\text{vi } st(a^n) = (st(a))^n$$

$$\text{vii } \text{Se } a \geq 0, \text{ allora } st(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{st(a)}$$

$$\text{viii } \text{Se } a \leq b, \text{ allora } st(a) \leq st(b).$$

Dimostrazione. Sia r la parte standard di a e sia s la parte standard di b , allora possiamo scrivere

$$a = r + \epsilon \text{ e } b = s + \delta$$

per opportuni infinitesimi ϵ e δ .

$$\text{i } st(-a) = -st(a)$$

Mostriamo che $-a$ è infinitamente vicino a $-r$:

$$-a = -(r + \epsilon) = -r - \epsilon \cong -r$$

perciò $-r$ è la parte standard di $-a$.

$$\text{ii } st(a + b) = st(a) + st(b)$$

Calcoliamo la parte standard di $a+b$ mostrando che $a+b$ è infinitamente vicino a $r + s$:

$$a + b = (r + \epsilon) + (s + \delta) = (r + s) + (\epsilon + \delta) \cong r + s$$

da cui:

$$st(a + b) = r + s = st(a) + st(b).$$

$$\text{iii } st(a - b) = st(a) - st(b)$$

Calcoliamo la parte standard di $a-b$ mostrando che $a-b$ è infinitamente vicino a $r - s$:

$$a - b = (r + \epsilon) - (s + \delta) = (r - s) + (\epsilon - \delta) \cong r - s$$

da cui:

$$st(a - b) = r - s = st(a) - st(b).$$

iv $st(ab) = st(a) \cdot st(b)$

Calcoliamo la parte standard di ab mostrando che ab è infinitamente vicino a rs :

$$ab = (r + \epsilon)(s + \delta) = rs + r\delta + s\epsilon + \epsilon\delta \cong rs$$

da cui:

$$st(ab) = rs = st(a)st(b).$$

v Se $st(b) \neq 0$, allora $st\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{st(a)}{st(b)}$

Mostriamo che la parte standard di $\frac{a}{b}$ è $\frac{r}{s}$ mostrando che la differenza

$$\frac{a}{b} - \frac{r}{s}$$

è infinitesima. Usiamo perciò le regole di calcolo per gli infinitesimi viste fino adesso.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{r}{s} &= \frac{as - br}{bs} = \frac{(r + \epsilon)s - (s + \delta)r}{bs} = \\ &= \frac{rs + \epsilon s - sr - \delta r}{bs} = (\epsilon s - \delta r) \frac{1}{b} \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Ora usando le regole sugli infinitesimi, vediamo che $(\epsilon s - \delta r)$ è infinitesimo; inoltre poichè $s = st(b) \neq 0$, b non è infinitesimo e quindi $\frac{1}{b}, \frac{1}{s}$ sono finiti. Perciò

$$\frac{a}{b} - \frac{r}{s} = (\epsilon s - \delta r) \frac{1}{b} \frac{1}{s}$$

è infinitesimo. Abbiamo perciò dimostrato che $\frac{a}{b} \cong \frac{r}{s}$, di conseguenza

$$st\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{r}{s} \frac{st(a)}{st(b)}.$$

vi $st(a^n) = (st(a))^n$

Ciò si dimostra applicando la regola del prodotto n -volte:

$$st(a^n) = st(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ volte}}) = \underbrace{st(a) \cdot st(a) \cdots st(a)}_{n \text{ volte}} = (st(a))^n$$

vii Se $a \geq 0$, allora $st(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{st(a)}$

Si ricordi che per $a > 0$, $\sqrt[n]{a}$ è la soluzione di $x^n = a$. Sia ora $b = \sqrt[n]{a}$, perciò $b^n = a$ e $b, s \geq 0$. Ora per la formula della potenza si ha che :

$$r = st(a) = st(b^n) = (st(b))^n = s^n.$$

Quindi s è un numero reale non negativo la cui potenza n -esima è r , cioè $s = \sqrt[n]{r}$.

Perciò ricapitolando:

$$st(\sqrt[n]{a}) = st(b) = s = \sqrt[n]{r} = \sqrt[n]{st(a)}.$$

viii Se $a \leq b$, allora $st(a) \leq st(b)$

Sia $a \leq b$. Allora

$$r + \epsilon \leq s + \delta \text{ quindi } r \leq s + (\delta - \epsilon).$$

Ora per ogni t reale positivo si ha $(\delta - \epsilon) < t$; quindi $r \leq s + (\delta - \epsilon) < s + t$, perciò $r \leq s$. In conclusione:

$$st(a) = r \leq s = st(b).$$

◇

Negli esempi seguenti useremo le regole del teorema precedente come punto di partenza per calcolare la parte standard di espressioni più complesse.

Esempio 3.2.14. Sia Δx un infinitesimo e x un reale. Calcolare la parte standard di

$$3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Usando le regole del teorema precedente, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} st(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) &= st(3x^2) + st(3x\Delta x) + st((\Delta x)^2) \\ &= 3x^2 + st(3x) \cdot st(\Delta x) + st(\Delta x)^2 \\ &= 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2. \end{aligned}$$

◇

Esempio 3.2.15. Se $st(c) = 4$ e $c \neq 4$, trovare

$$st\left(\frac{c^2 + 2c - 24}{c^2 - 16}\right).$$

Notiamo che il denominatore ha parte standard 0,

$$st(c^2 - 16) = st(c^2) - 16 = 4^2 - 16 = 0.$$

Tuttavia poichè $c \neq 4$ la frazione è definita, e può essere definita fattorizzando sia numeratore che denominatore.

$$\frac{c^2 + 2c - 24}{c^2 - 16} = \frac{(c + 6)(c - 4)}{(c + 4)(c - 4)} = \frac{c + 6}{c + 4}.$$

Allora

$$\begin{aligned} st\left(\frac{c^2 + 2c - 24}{c^2 - 16}\right) &= st\left(\frac{c + 6}{c + 4}\right) = \frac{st(c + 6)}{st(c + 4)} \\ &= \frac{st(c) + 6}{st(c) + 4} = \frac{4 + 6}{4 + 4} = \frac{10}{8}. \end{aligned}$$

◇

Ora abbiamo a disposizione tre metodi di calcolo. Prima ci sono calcoli che coinvolgono funzioni reali e numeri iperreali. Nell'esempio 3.2.15 i due passaggi che davano

$$\frac{c^2 + 2c - 24}{c^2 - 16} = \frac{c + 6}{c + 4}$$

erano calcoli di questo tipo.

Poi ci sono calcoli che coinvolgono la parte standard. Nell'esempio 3.2.15 i tre passaggi che davano

$$st\left(\frac{c^2 + 2c - 24}{c^2 - 16}\right) = \frac{st(c) + 6}{st(c) + 4}$$

erano di questo tipo.

Infine ci sono calcoli con i numeri reali. A volte i numeri reali compaiono come parti standard. Nell'esempio 3.2.15 gli ultimi due passaggi che davano

$$\frac{st(c) + 6}{st(c) + 4} = \frac{10}{8}$$

erano calcoli di questo tipo.

Generalmente, nel calcolare la parte standard di un numero iperreale, usiamo il primo tipo di calcolo, poi il secondo tipo e poi il terzo nell'ordine. Diamo ora altri due esempi in qualche modo diversi e notiamo questi tre livelli nei calcoli.

Esempio 3.2.16. Sia H un numero iperreale infinito positivo; calcolare la parte standard di

$$c = \frac{2H^3 + 5H^2 - 3H}{7H^3 - 2H^2 + 4H}.$$

In questo esempio sia il numeratore che il denominatore sono infiniti e dobbiamo usare il primo tipo di calcoli per trasformare l'equazione in una forma diversa prima di poter prendere la sua parte standard.

Primo livello.

$$c = \frac{2H^3 + 5H^2 - 3H}{7H^3 - 2H^2 + 4H} = \frac{H^{-3} \cdot (2H^3 + 5H^2 - 3H)}{H^{-3} \cdot (7H^3 - 2H^2 + 4H)} = \frac{2H + 5H^{-1} - 3H^{-2}}{7H - 2H^{-1} + 4H^{-2}}$$

Secondo livello. H^{-1} e H^{-2} sono infinitesimi, perciò

$$\begin{aligned} st(c) &= st\left(\frac{2H + 5H^{-1} - 3H^{-2}}{7H - 2H^{-1} + 4H^{-2}}\right) = \frac{st(2H + 5H^{-1} - 3H^{-2})}{st(7H - 2H^{-1} + 4H^{-2})} \\ &= \frac{st(2H) + st(5H^{-1}) - st(3H^{-2})}{st(7H) - st(2H^{-1}) + st(4H^{-2})} = \frac{2 + 0 - 0}{7 - 0 + 0}. \end{aligned}$$

Terzo livello.

$$st(c) = \frac{2 + 0 - 0}{7 - 0 + 0} = \frac{2}{7}.$$

◇

Esempio 3.2.17. Se ϵ è un infinitesimo diverso da zero, trovare la parte standard di

$$b = \frac{\epsilon}{5 - \sqrt{25 + \epsilon}}.$$

Sia il numeratore che il denominatore sono infinitesimi non nulli.

Primo livello. Si moltiplichino numeratore e denominatore per $5 + \sqrt{25 + \epsilon}$.

$$\begin{aligned} b &= \frac{\epsilon}{5 - \sqrt{25 + \epsilon}} = \frac{\epsilon(5 + \sqrt{25 + \epsilon})}{(5 - \sqrt{25 + \epsilon})(5 + \sqrt{25 + \epsilon})} \\ &= \frac{\epsilon(5 + \sqrt{25 + \epsilon})}{25 - (25 + \epsilon)} = \frac{\epsilon(5 + \sqrt{25 + \epsilon})}{-\epsilon} \\ &= -5 - \sqrt{25 + \epsilon}. \end{aligned}$$

Secondo livello.

$$\begin{aligned} st(b) &= st(-5 - \sqrt{25 + \epsilon}) = st(-5) - st(\sqrt{25 + \epsilon}) \\ &= -5 - \sqrt{st(25 + \epsilon)} = -5 - \sqrt{25}. \end{aligned}$$

Terzo livello.

$$st(b) = -5 - \sqrt{25} = -10.$$

◇

Si consideri ora \mathbb{N} come sottostruttura di \mathbb{R} . Per quanto detto nel capitolo precedente, esisterà perciò una sottostruttura corrispondente \mathbb{N}^* di \mathbb{R}^* , che sostanzialmente è un modello di aritmetica non standard. Risulta subito evidente che i numeri naturali rispettivamente finiti o infiniti sono anche numeri reali finiti o infiniti. Infatti un numero naturale finito è in particolare un numero reale standard, e quindi il suo modulo è limitato. Pertanto effettivamente si può considerare la struttura \mathbb{N}^* costituita da elementi di \mathbb{R}^* (ricordando che esiste un'iniezione che rende vera tale considerazione). D'ora in poi quindi, con un abuso di notazione si userà lo stesso simbolo per indicare sia le strutture che l'insieme degli individui corrispondenti, con la convenzione di intendere gli individui di un'espansione contenente l'insieme degli individui del modello base (ad esempio \mathbb{R}^* indica i reali non standard e \mathbb{N} i numeri naturali finiti in \mathbb{R}^*). Grazie al teorema 3.1.2 è facile dimostrare che:

Teorema 3.2.18. *Gli elementi degli insiemi \mathbb{R} , \mathbb{R}_f , \mathbb{R}_ω e $\mu(a)$ con $a \in \mathbb{R}^*$ sono esterni in \mathbb{R}^* .*

Dimostrazione. La dimostrazione è data per assurdo. Si ha che $\mathbb{N} = \mathbb{R} \cap \mathbb{N}^*$ e anche $\mathbb{N} = \mathbb{R}_f \cap \mathbb{N}^*$, dunque se \mathbb{R} o \mathbb{R}_f fosse interno, anche \mathbb{N} sarebbe interno, poichè l'intersezione di relazioni interne è interna e questo è assurdo per la proposizione 3.1.2.

L'insieme \mathbb{R}_ω è il complementare di \mathbb{R}_f , dunque non può essere interno.

Si supponga ora $a \in \mathbb{R}^*$ tale che $\mu(a)$ è interno. Allora è interno anche l'insieme $\{b \in \mathbb{R}^* : \exists c \in \mu(a) \text{ tale che } b = c - a\} = \{x \in \mathbb{R}^* : x \cong 0\} = \mu(0)$, quindi è interno anche l'insieme dei reciproci di $\mu(0) - \{0\}$, ma tale insieme è \mathbb{R}_ω . Perciò $\mu(a)$ è esterno.

◇

Capitolo 4

Standard e Non Standard a confronto

L'insegnamento dell'analisi nei licei ricalca quasi sempre la sequenza *limiti-derivate-integrali*, dove i limiti vengono definiti alla maniera di Weierstrass, cosa che comporta notevoli difficoltà di comprensione iniziale e una complessità tale da sacrificare molto spesso l'ultimo argomento (gli integrali).

In questo capitolo cercheremo di mostrare come l'analisi non standard e i numeri iperreali di Robinson possano notevolmente semplificare le cose. L'approccio infinitesimale ha infatti due importanti vantaggi per gli studenti, per prima cosa è più vicino all'intuizione che inizialmente ha portato all'analisi; e, per seconda cosa, dà la possibilità di affrontare i concetti fondamentali di derivata e di integrale prima del concetto di limite in maniera molto più semplice e facile sia da capire che da usare da parte degli studenti.

Nelle prossime pagine cercheremo di mettere a confronto alcuni di questi concetti presentati nella maniera classica e nella maniera non standard cercando di evidenziare gli aspetti interessanti che quest'ultima propone.

4.1 Successioni e convergenza

Al fine di definire la continuità è necessario il concetto di limite. Come in ogni corso di analisi le prime cose che si introducono per la definizione di limiti sono le successioni.

Definizione 4.1.1. Per *successione* in \mathbb{R} si intende una sequenza $\{s_n\}$ infinita e numerabile di numeri reali standard. $\{s_n\}$ è quindi una funzione di n definita per tutti i numeri naturali standard $n \in \mathbb{N}$ che assume valori in \mathbb{R} , ovvero

$$s_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il passaggio da \mathbb{R} a \mathbb{R}^* estende automaticamente la definizione di successione a tutti i numeri naturali non standard $n \in \mathbb{N}^*$ ($\{s_n^*\}$ successione non standard); ovviamente risulterà $s_n = s_n^*$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Si presenterà ora un primo risultato sulle successioni; già con esso si può intuire l'utilità di considerare le espansioni di \mathbb{R} :

Teorema 4.1.2. *Una successione $\{s_n\}$ è limitata in \mathbb{R} se e solo se s_n^* è un numero reale finito per ogni $n \in \mathbb{N}^*$*

Dimostrazione. Si supponga $\{s_n\}$ limitata in \mathbb{R} : per definizione ciò significa che esiste un numero reale r_{sup} tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $|s_n| < r_{sup}$. Passando quindi all'espansione si ha che $|s_n^*| < r_{sup}$ per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, dunque la tesi.

D'altra parte se s_n^* è un numero reale finito per ogni $n \in \mathbb{N}^*$, sia r un qualunque numero reale positivo infinito (cioè un numero positivo appartenente a \mathbb{R}_ω), allora la proposizione

$$\phi = |s_n^*| < r \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

è valida in \mathbb{R}^* . Ma ϕ può essere formulata come proposizione di X^1 , quindi risulta essere definita anche in \mathbb{R} , perciò ϕ o $\neg\phi$ deve valere in \mathbb{R} . Ma se, per assurdo, fosse $\neg\phi$ ad essere vera in \mathbb{R} , $\neg\phi$ sarebbe vera anche in \mathbb{R}^* , perciò risulterebbe $\phi \wedge \neg\phi$ valida in un modello non contraddittorio. Assurdo, perciò se s_n^* è un numero reale finito per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ allora $\{s_n\}$ è limitata in \mathbb{R} .

¹Insieme delle proposizioni stratificate valide in \mathbb{R}

◇

Si noti la procedura di dimostrazione adottata nella seconda parte della dimostrazione: si scrive una proposizione valida in \mathbb{R}^* definibile anche in \mathbb{R} , in modo che tale proposizione o la sua contraria debba essere vera in \mathbb{R} e si è ottenuta la tesi per assurdo. Si avranno altri esempi di questo tipo di prova nei seguenti risultati, si tenga quindi presente tale procedimento per le prossime dimostrazioni.

Si consideri a questo punto la nozione di limite per una successione $\{s_n\}$.

Definizione 4.1.3 (Limite standard). Un numero reale s è il *limite* di una successione $\{s_n\}$ se la distanza tra s_n e s è arbitrariamente piccola quando n è sufficientemente grande. In simboli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \iff \forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } |s_n - s| < \epsilon, \forall n > m.$$

In questo caso si dice che $\{s_n\}$ *converge* a s .

Questa definizione ci presenta già alcune difficoltà assolutamente non banali. La prima, e forse quella più importante, è che con questa definizione si parte dal codominio della successione, cioè si parte da una precisione fissata. Vale a dire che non possiamo applicare questa definizione se non conosciamo già a priori il valore del limite. Questa definizione serve a testare la veridicità del valore del limite, cioè serve a stabilire se un dato valore è o non il limite della successione per n tendente all'infinito. Non ci viene data alcuna indicazione riguardo il calcolo di un limite; semplicemente possiamo dire che un valore dato è il limite della successione se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero naturale m tale che risulti $|s_n - s| < \epsilon$ per ogni $n > m$, oppure che non lo è se questo non accade.

Definizione 4.1.4 (Limite Non standard). Un numero reale s è il *limite* di una successione $\{s_n^*\}$ se s_n^* è infinitamente vicino s . In simboli:

$$s_n^* \cong s \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}^*$$

In questo caso si dice che la successione $\{s_n^*\}$ *converge* a s .

Vediamo ora come le due definizioni siano equivalenti.

Teorema 4.1.5. *Siano $\{s_n\}$ e s una successione ed un numero reale entrambi standard. s è il limite di $\{s_n\}$ in \mathbb{R} se e solo se, indicata con $\{s_n^*\}$ la successione corrispondente a $\{s_n\}$ in \mathbb{R}^* , risulta $s_n^* - s$ infinitesimo, ovvero se e solo se $s_n^* \cong s$ per tutti gli n infiniti.*

Dimostrazione. Si supponga che $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$. Dalla definizione di limite segue che:

$$\forall \epsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } |s_n - s| < \epsilon, \forall n > m$$

Tale proposizione è valida in \mathbb{R} , dunque risulta valida anche in \mathbb{R}^* per ogni numero reale non standard, in particolare però è vera in \mathbb{R}^* limitandosi ai soli numeri reali standard, quindi per ν simbolo di costante, interpretazione di un numero naturale infinito, si ottiene $|s_\nu^* - s| < \epsilon$ per un ϵ simbolo di costante di un numero reale positivo standard arbitrario. Quindi, per ogni ν numero naturale infinito, $|s_\nu^* - s|$ è più piccolo di ogni numero reale standard, ossia $s_\nu^* - s \cong 0$, quindi $s_\nu^* \cong s$.

Per l'altra implicazione, si supponga che per ogni numero naturale infinito n , $s_n^* \cong s$ e sia ϵ un simbolo di costante di un qualsiasi numero reale standard. Interpretando inoltre ν come un qualsiasi numero intero infinito, $|s_\nu^* - s| < \epsilon$ è ancora valida in \mathbb{R}^* , ma non è definita in \mathbb{R} , dato che ν non ha controimmagine in \mathbb{R} . Si può però riscriverla nel seguente modo:

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \text{ tale che } \forall n > m \text{ vale } |s_n^* - s| < \epsilon$$

Anche in questa nuova forma è ancora vera in \mathbb{R}^* poichè basta prendere come m un qualsiasi numero naturale infinito ed inoltre risulta definita anche su \mathbb{R} . Dunque, come nella dimostrazione del teorema 4.1.2, si ottiene la sua validità anche in \mathbb{R} e per l'arbitrarietà di ϵ , si conclude che s è il limite della successione $\{s_n\}$.

◇

Grazie al teorema precedente si ottiene il teorema del limite per somme di successioni.

Teorema 4.1.6. *Siano $\{s_n^1\}$ e $\{s_n^2\}$ due successioni con limite s^1 e s^2 . Per ogni ν naturale infinito si ha:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n^1 + s_n^2) \cong (s_\nu^1)^* + (s_\nu^2)^* \cong s^1 + s^2 \cong \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^1 + \lim_{n \rightarrow \infty} s_n^2.$$

Viene ora presentata un'interessante applicazione dell'analisi non standard, cioè la dimostrazione del teorema di Bolzano-Weierstrass (B-W). Esso assicura che da ogni successione limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente. Si vedrà che grazie alle considerazioni valide nell'espansione di \mathbb{R} , la dimostrazione di B-W diventerà elementare.

Prima però si definisca per una successione standard $\{s_n\}$ il concetto di punto limite, utile per esprimere B-W in modo equivalente.

Definizione 4.1.7. Un numero $s \in \mathbb{R}$ è un *punto limite* di $\{s_n\}$ in \mathbb{R} se per ogni $\epsilon > 0$ in \mathbb{R} ed $m \in \mathbb{N}$, esiste un $n > m$ naturale tale che $|s_n - s| < \epsilon$. Si indica con S l'insieme dei punti limite di una successione.

E' evidente che l'esistenza di un punto di limite per una successione ($S \neq \emptyset$) è equivalente all'esistenza di una sottosuccessione convergente.

Prima di enunciare e dimostrare B-W è però necessario il seguente lemma.

Lemma 4.1.8. *Sia $\{s_n\}$ una successione reale standard e sia S l'insieme dei punti limite di $\{s_n\}$; allora:*

$$S = \{st(s_n^*) \text{ tale che } n \in \mathbb{N}_\omega \wedge s_n^* \in \mathbb{R}_f\}.$$

Dimostrazione. Si noti per prima cosa che per definizione gli elementi di S sono numeri reali standard. Si dimostrerà il lemma provando la doppia inclusione dei due insiemi.

Sia $s \in S$. Dalla definizione di punto di limite si ha:

$$\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N} \text{ tale che } z > y \wedge |s_z - s| < x.$$

La proposizione è vera in \mathbb{R}^* (poichè vera in \mathbb{R}). In particolare quindi prendendo $x = \epsilon$ infinitesimo e $y = \nu$ naturale infinito, si ottiene:

$$\exists z \in \mathbb{N}^* \text{ tale che } z > \nu \wedge |s_z^* - s| < \epsilon. \quad (4.1)$$

Dunque preso un qualsiasi punto limite s , si trova un numero naturale infinito z tale per cui $s_z^* \cong s$, da cui, poichè s reale, $s = st(s_z^*)$. Pertanto si è dimostrato che S è contenuto nell'altro insieme.

D'altra parte, sia $s = st(s_n^*)$ reale finito con n naturale infinito. Per definizione si ha $|s_n^* - s|$ è infinitesimo; e per ogni ϵ standard e $\nu \in \mathbb{N}$ esiste un naturale $z > \nu$ tale per cui $|s_z - s| < \epsilon$. Ma allora la (4.1) è valida in \mathbb{R}^* . Procedendo come nella proposizione 4.1.2, si ottiene quindi che (4.1) è valida anche in \mathbb{R} (sostituendo ovviamente s_n^* con s_n). Dunque s è un punto limite ed è quindi valida anche l'inclusione inversa. Pertanto i due insiemi coincidono.

◇

Enunciamo ora il teorema di B-W dimostrandolo sia in maniera non standard che in maniera classica. E' facile notare come quella non standard sia notevolmente più semplice.

Teorema 4.1.9 (Teorema di Bolzano - Weierstrass). *Se $\{s_n\}$ è una successione reale standard limitata allora possiede un punto limite (ovvero è possibile estrarre una sottosuccessione convergente).*

Dimostrazione. (Non Standard) Se $\{s_n\}$ è limitata in \mathbb{R} , allora tutti gli s_n^* sono finiti in \mathbb{R}^* per il teorema 4.1.2. Quindi $st(s_n^*)$ è definita per tutti gli n interi infiniti e pertanto S (insieme dei punti limite) è non vuoto per il lemma precedente.

◇

Dimostrazione. (Standard) Sia $\{s_n\}$ una successione limitata di numeri reali. Allora esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che:

$$-M < s_n < M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\alpha_n = \sup \{s_k \mid k \geq n\}.$$

Notiamo che essendo la successione limitata risulta

$$-M < \alpha_n < M \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

inoltre come si riconosce direttamente dalla definizione di α_n ,

$$\alpha_n \geq \alpha_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dunque $\{\alpha_n\}$ è una successione monotona decrescente e limitata, esiste allora $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lambda.$$

Vale inoltre che

$$\forall \epsilon > 0, \forall p \in \mathbb{N} \exists n \geq p : \lambda - \epsilon < s_n.$$

Infatti poiché α_p è decrescente risulta $\lambda \leq \alpha_p$ e, quindi, $\lambda - \epsilon < \alpha_p$ per ogni $\epsilon > 0$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$. Pertanto, essendo

$$\alpha_p = \sup \{s_n/n \geq p\}$$

esiste $n \geq p$ tale che $\lambda - \epsilon < s_n$.

Sia ora $\{k_n\}$ la successione definita per ricorrenza nel modo seguente:

$$\begin{cases} k_1 = \min \{k \in \mathbb{N} \text{ tale che } \lambda - 1 < s_k\} \\ k_{n+1} = \min \{k \in \mathbb{N} \text{ tale che } k > k_n, \lambda - \frac{1}{n+1} < s_k\} \end{cases}$$

Di conseguenza $\{s_{k_n}\}$ risulta essere una sottosuccessione di $\{s_n\}$ verificante le seguenti disuguaglianze:

$$\lambda - \frac{1}{n} < s_{k_n} \leq \alpha_{k_n}.$$

Ora poiché $\alpha_{k_n} \rightarrow \lambda$ per $n \rightarrow \infty$ ne viene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{k_n} = \lambda.$$

Questo prova il teorema.

◇

Passiamo infine a considerare il criterio di convergenza che caratterizza le successioni. In analisi classica il più importante è sicuramente quello di Cauchy il quale afferma:

Teorema 4.1.10 (Teorema di Cauchy). *Una successione $\{s_n\}$ converge se e solo se è di Cauchy, ovvero se*

$$\forall \epsilon \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |s_n - s_m| < \epsilon \quad \forall n, m > \bar{n}$$

Dimostrazione. (\implies) Sia $\{s_n\}$ una successione reale convergente a λ ($\in \mathbb{R}$). Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|s_n - s_m| < \frac{\epsilon}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n > \bar{n}$. Pertanto:

$$|s_n - s_m| < |s_n - \lambda| + |\lambda - s_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ con $n, m > \bar{n}$. Questo prova che $\{s_n\}$ sia di Cauchy.

(\impliedby) Sia $\{s_n\}$ una successione reale di Cauchy. Allora

$$\forall \epsilon \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |s_n - s_m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m > \bar{n}.$$

Occorre provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lambda.$$

Proviamo per prima cosa che $\{s_n\}$ è limitata. Scegliendo $\epsilon = 1$ si ha

$$|s_n - s_m| < 1 \quad \forall n, m > \bar{n},$$

quindi per ogni $n > \bar{n}$,

$$|s_n| \leq |s_n - s_{\bar{n}+1}| + |s_{\bar{n}+1}| < 1 + |s_{\bar{n}+1}|,$$

perciò

$$|s_n| \leq \max \{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_{\bar{n}}|, 1 + |s_{\bar{n}+1}|\} \equiv M (\in \mathbb{R})$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Ciò prova che $\{s_n\}$ è limitata. Allora per il teorema di Bolzano Weierstrass, esiste $\{s_{k_n}\}$ sottosuccessione di $\{s_n\}$ ed esiste λ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{k_n} = \lambda.$$

Pertanto

$$\forall \epsilon > 0 \exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : |s_n - \lambda| < \frac{\epsilon}{2} \forall n > \bar{n}_1.$$

Posto ora $\dot{n} = \max \{\bar{n}, \bar{n}_1\}$, se $n > \dot{n}$ risulta

$$|s_n - \lambda| \leq |s_n - s_{k_n}| + |s_{k_n} - \lambda| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

In definitiva $\forall \epsilon > 0 \exists \dot{n} \in \mathbb{N} : |s_n - \lambda| < \epsilon \forall n > \dot{n}$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lambda$$

e il teorema è provato. ◇

Notiamo subito come questa dimostrazione abbastanza laboriosa non possa fare a meno del precedente teorema di Bolzano Weierstrass, mostriamo ora il corrispondente criterio di convergenza in termini non standard la cui dimostrazione non richiede il teorema di B-W, in particolare si userà \mathbb{R}^* per eliminare la tradizionale tecnica degli ϵ .

Teorema 4.1.11. *Siano $\{s_n\}$ una successione di numeri reali standard. La successione $\{s_n\}$ converge se e solo se $s_n^* \cong s_m^*$ per ogni n ed m naturali infiniti.*

Dimostrazione. Si supponga che la successione converga al numero standard s . Dal teorema precedente si ha quindi che per ogni n ed m naturali infiniti $s_n^* \cong s$ e $s_m^* \cong s$. Ma allora $s_n^* \cong s_m^*$, e ciò mostra che la condizione è necessaria.

D'altra parte si supponga ora che $s_n^* \cong s_m^*$ per tutti gli n e m naturali infiniti e sia $\nu \in \mathbb{N} \cap \mathbb{R}_\omega$ qualsiasi. Si mostrerà innanzitutto che s_ν^* è finito, poi che la parte standard di s_ν^* è il limite di $\{s_n\}$. Per assurdo sia s_ν reale infinito; si consideri allora il seguente insieme:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : |s_\nu^* - s_n^*| < 1\}$$

Tale insieme risulta un insieme interno, infatti in \mathbb{R} vale la proposizione:

$$\forall x \in \mathbb{N}, \exists M \subseteq \mathbb{N} \text{ tale che } \forall m \text{ si ha } [m \in M \iff |s_x - s_m| < 1].$$

La proposizione vale anche in \mathbb{R}^* e prendendo $x = \nu$, si ottiene l'insieme A . Quindi A è un insieme interno in \mathbb{R}^* . Inoltre A contiene di certo tutti i numeri naturali infiniti, poichè per ipotesi abbiamo $(s_n^* - s_m^*) \cong 0$. D'altra parte, per qualsiasi $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$|s_\nu^*| = |(s_\nu^* - s_n^*) + s_n^*| \leq |s_\nu^* - s_n^*| + |s_n^*|$$

Quindi se $s_n^* \in A$, allora $s_\nu^* \leq 1 + |s_n^*|$ ed essendo s_ν^* infinito, s_n^* non può essere finito, dunque n deve essere almeno un naturale infinito. Pertanto si ha che A è un insieme interno che contiene tutti e soli i numeri naturali infiniti, ma questo è assurdo per la proposizione 3.1.2.

Si è dimostrato allora che s_ν^* è finito e ha pertanto senso definire $s = st(s_\nu^*)$. Per definizione $s_\nu^* \cong s$ e, poichè dalle ipotesi si ha $s_\nu^* \cong s_n^*$ per ogni n naturale infinito, si ottiene $s_n^* \cong s$. Quindi per il teorema precedente, la successione $\{s_n\}$ converge ad s .

◇

Si noti che grazie al teorema precedente si potrebbe definire la convergenza per una generica successione di \mathbb{R}^* , ovvero $\{s_n^*\}$ converge a s numero reale (non per forza standard) se e solo se $s_n^* \cong s$ per ogni n naturale infinito. Come mostra il teorema, questa definizione estende quella classica, nel senso che se $\{s_n^*\}$ è standard, allora s ne è il limite in senso tradizionale.

I risultati ottenuti in questa sezione sono sufficienti per cominciare lo studio elementare di funzioni reali standard. Come si è già visto per le successioni, i metodi non standard permetteranno di semplificare alcuni dei risultati.

4.2 Continuità e uniforme continuità

Passiamo ora a trattare la nozione di continuità e uniforme continuità, cercando sempre di confrontare il metodo classico, o standard, con quello non

standard. La prima cosa che possiamo notare è come la continuità non standard non abbia bisogno di premettere lo studio delle successioni e della teoria dei limiti, quindi in un ipotetico percorso didattico non standard quanto detto nel precedente paragrafo potrebbe tranquillamente essere omesso.

Vediamo ora nel dettaglio le due definizioni.

Definizione 4.2.1 (Continuità standard). Una funzione reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *continua* in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tale che } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \text{ per ogni } |x - x_0| < \delta$$

ovvero se e solo se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si dice poi che f è continua in un sottoinsieme $D \subseteq \mathbb{R}$ se è continua in ogni suo punto.

Definizione 4.2.2 (Continuità Non Standard). Una funzione reale $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *continua* in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se

$$f^*(x) \cong f^*(x_0) \text{ per ogni } x \cong x_0.$$

Il contenuto intuitivo di questa definizione è evidente. Una funzione f è continua nel punto x_0 se i punti vicini ad x_0 hanno una immagine vicina a $f(x_0)$. Ad esempio, la funzione quadrato $f(x) = x^2$ è continua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$ perchè per ogni infinitesimo ϵ si ha:

$$f(x_0 + \epsilon) - f(x_0) = x_0^2 + 2x_0\epsilon + \epsilon^2 - x_0^2 = \epsilon(x_0 + \epsilon) \cong 0.$$

In particolare, quando f è continua in un punto c , la parte della curva dove $x \cong c$ sarà visibile al microscopio infinitesimo puntato in $(c, f(c))$ come mostrato in figura(4.1(a)). Ma se f è non continua in un punto c , qualche valore di $f(x)$ per $x \cong c$ sarà o non definito o fuori dal campo di vista del microscopio come nella figura(4.1(b)).

Mostriamo ora un teorema che mostra l'equivalenza tra le due definizioni.

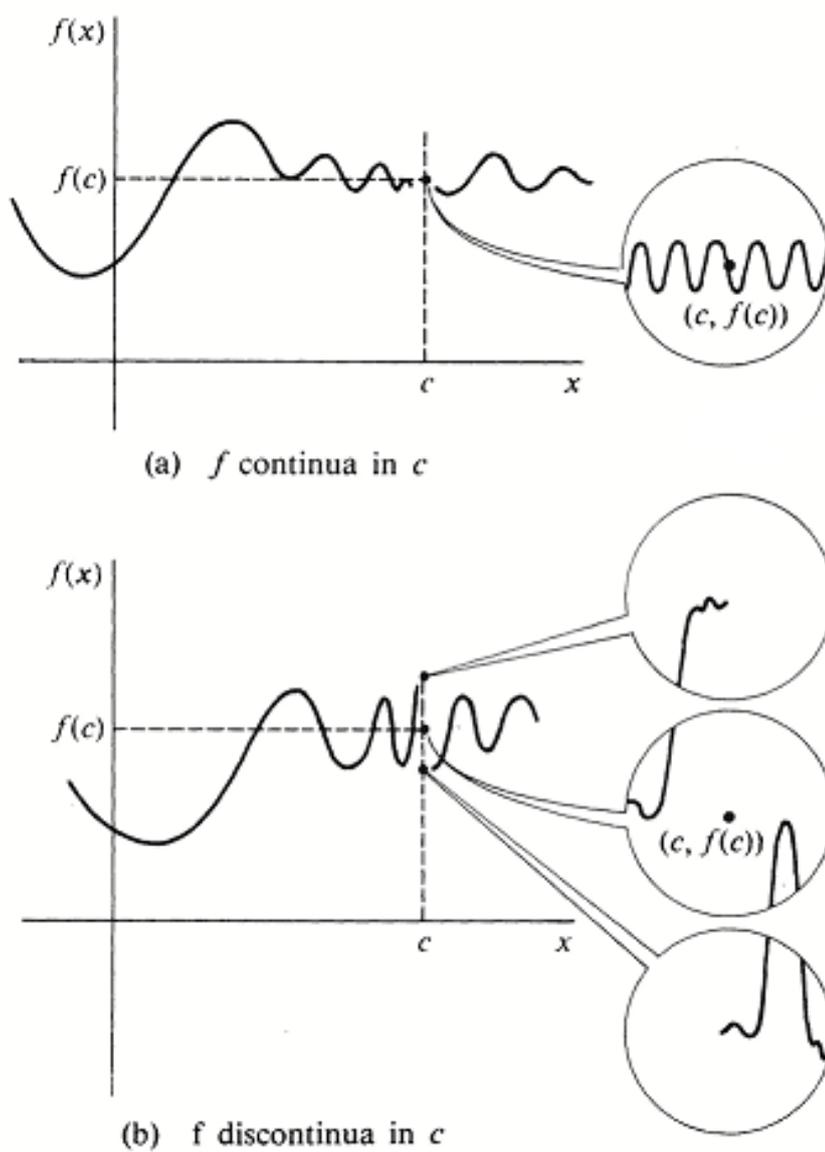


Figura 4.1: Continuità e discontinuità in un punto

Teorema 4.2.3. *Siano, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $l, x_0 \in \mathbb{R}$. Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ se e solo se } f(x) \cong l \text{ per ogni } x \cong x_0$$

Dimostrazione. (\Rightarrow) Supponiamo per ipotesi che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. Siano ϵ e δ numeri reali positivi dati dalla definizione di limite. Per ogni $x \cong x_0$ si ha che $|x - x_0|$ è infinitesimo, ma allora, per definizione, $|x - x_0| < \delta$ per ogni δ reale positivo. Quindi $|f(x) - l| < \epsilon$ vale per qualunque reale positivo, perciò si ha che $f(x) \cong l$.

(\Leftarrow) Viceversa supponiamo vero $f(x) \cong l$ per ogni $x \cong x_0$ e sia δ un infinitesimo positivo. Dato allora un numero reale positivo ϵ nell'insieme degli iperreali risulta vera la proposizione:

$$\forall x [|x - x_0| < \delta \text{ e } x \in \mathbb{R}] \Rightarrow [|f(x) - l| < \epsilon].$$

Essa garantisce quindi che in \mathbb{R} per ogni ϵ positivo esiste un δ positivo che soddisfa le condizioni date, cioè tali che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

◇

Corollario 4.2.4. *Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua nel punto x_0 se e solo se $f(x) \cong f(x_0)$ per ogni $x \cong x_0$.*

Dimostriamo ora alcuni classici risultati dell'analisi.

Teorema 4.2.5 (Teorema di Weierstrass). *Ogni funzione continua $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. (Non standard) Sia $l = \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$. Allora $l = st(f(\xi_0))$ per un opportuno elemento $f(\xi_0)$ appartenente all'estensione non-standard

$$\{f(x) | x \in [a, b]\}^* = \{f(\xi) | \xi \in [a, b]^*\}.$$

Poichè $\xi_0 \in [a, b]^*$, la sua parte standard $x_0 = st(\xi_0) \in [a, b]$. Per l'ipotesi di continuità,

$$x_0 \cong \xi_0 \implies f(x_0) \cong f(\xi_0) \cong l.$$

Ma due numeri reali sono infinitamente vicini solo se coincidono, quindi

$$f(x_0) = l$$

è il punto di massimo cercato.

Analogamente si prova l'esistenza del punto di minimo.

◇

Dimostrazione. (Standard) Si dimostra² che esiste una successione $\{x_n\}$ in $[a, b]$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \sup_{[a,b]} f.$$

Poichè $[a, b]$ è compatto da $\{x_n\}$ si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente ad un punto x_0 di $[a, b]$.

Allora per la continuità di f si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = f(x_0).$$

D'altra parte si ha anche che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) = \sup_{[a,b]} f$. Allora per l'unicità del limite,

$$\sup_{[a,b]} f = f(x_0).$$

Quindi $f(x_0) = \max_{[a,b]} f$.

Analogamente si prova l'esistenza del minimo di f .

◇

Teorema 4.2.6 (Teorema degli zeri). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ con $f(c) = 0$.*

Dimostrazione. (Non standard) Per ogni naturale $n > 0$, siano $x_n, y_n \in [a, b]$ due punti tali che

$$f(x_n) < 0, f(y_n) > 0 \text{ e } 0 < y_n - x_n \leq 1/n.$$

²Si veda 'Lezioni di analisi matematica I' di Lanconelli

Ad esempio siano

$$x_n = \max \{r \in \Lambda_n | f(r) < 0\} \text{ e } y_n = x_n + (b - a)/n$$

dove $\Lambda_n = \{a + i(b - a)/n | i = 0, 1, \dots, n\}$. Siano $\{x_n^*\}$ e $\{y_n^*\}$ le estensioni non standard delle successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, e fissiamo M naturale infinito. Sarà quindi, $x_M^*, y_M^* \in [a, b]^*$, tali che

$$f(x_M^*) < 0, f(y_M^*) > 0 \text{ e } 0 < y_M^* - x_M^* < 1/M \cong 0.$$

Sia adesso $c = st(x_M^*) = st(y_M^*) \in [a, b]$. Per l'ipotesi di continuità, da $c \cong x_M^*$ e $c \cong y_M^*$ segue che $f(c) \cong f(x_M^*)$ e $f(c) \cong f(y_M^*)$. Poichè $f(c) \in \mathbb{R}$ è infinitamente vicino sia ad un numero iperreale negativo che ad un numero iperreale positivo, necessariamente $f(c) = 0$.

◇

Dimostrazione. (Standard) Sia $c = \frac{a+b}{2}$ il punto medio di $[a, b]$. Allora $f(a)f(c) \leq 0$, oppure $f(c)f(b) \leq 0$ (se fosse $f(a)f(c) > 0$ e $f(c)f(b) > 0$ sarebbe $f(a)f(b) > 0$ contro l'ipotesi). Nella prima eventualità poniamo

$$a_1 = a, \text{ e } b_1 = c$$

nella seconda eventualità poniamo

$$a_1 = c, \text{ e } b_1 = b$$

Abbiamo così

$$a_1 \leq b_1 \leq b, f(a_1)f(b_1) \leq 0, b_1 - a_1 = \frac{b - a}{2}.$$

Sia ora $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ il punto medio di $[a_1, b_1]$.

Risulta allora $f(a_1)f(c_1) \leq 0$, oppure $f(c_1)f(b_1) \leq 0$ (in caso contrario si avrebbe $f(a_1)f(b_1) > 0$). Nella prima eventualità poniamo

$$a_2 = a_1, \text{ e } b_2 = c_1$$

nella seconda eventualità poniamo

$$a_2 = c_1, \text{ e } b_2 = b_1$$

Abbiamo così

$$a_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq b_1, \quad f(a_2)f(b_2) \leq 0, \quad b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}.$$

Proseguendo in questo modo si costruiscono due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ in $[a, b]$ tali che

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad f(a_n)f(b_n) \leq 0, \quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

per ogni n naturale.

Le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, in quanto monotone e limitate, sono convergenti. Inoltre, poichè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n} = 0,$$

e poichè $a_n, b_n \in [a, b] \forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0 \in [a, b].$$

Allora, per la continuità di f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n f(a_n) f(b_n) = (f(x_0))^2 \leq 0$$

e, quindi, $f(x_0) = 0$. Ciò prova il teorema.

◇

4.2.1 Continuità uniforme

Il concetto di continuità uniforme viene spesso omesso nelle trattazioni scolastiche. Eppure si tratta di una nozione molto importante: ad esempio su di essa si basa la dimostrazione che ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è integrabile. Saper distinguere tra continuità e continuità uniforme spesso non è facile. L'analisi nonstandard può essere di aiuto perchè consente di formulare le definizioni in termini più semplici. Vediamole entrambe.

Definizione 4.2.7 (Continuità uniforme standard). Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è *uniformemente continua* su \mathbb{R} se

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \epsilon \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ con } |x - y| < \delta$$

Definizione 4.2.8 (Continuità uniforme non standard). Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è *uniformemente continua* su \mathbb{R} se per ogni $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^*$, si ha che

$$\xi \cong \zeta \implies f(\xi) \cong f(\zeta).$$

Mentre nella definizione di continuità la coppia di punti considerati contiene un numero reale x_0 , per l'uniforme continuità occorre considerare tutte le coppie di numeri iperreali (quindi anche le coppie di punti entrambi infinitesimi o infiniti). Ovviamente ogni funzione uniformemente continua su $[a, b]$ è necessariamente continua in ogni punto di $[a, b]$, ma non vale il viceversa. Ad esempio, la funzione quadrato $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su \mathbb{R} . Infatti, fissato un numero infinito ω , si ha $\omega \cong \omega + 1/\omega$ mentre $f(\omega + 1/\omega) - f(\omega) = 2 + 1/\omega^2$ non è infinitesimo.

Il prossimo risultato è fondamentale per dimostrare l'integrabilità delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati. Il teorema verrà dimostrato in entrambi i modi, è facile notare come la dimostrazione non standard sia poco più di un banale esercizio.

Teorema 4.2.9 (Teorema di Heine-Cantor). *Ogni funzione continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua.*

Dimostrazione. (Non standard) Se due punti $\xi, \zeta \in [a, b]^*$ sono infinitamente vicini allora hanno la stessa parte standard $st(\xi) = st(\zeta) = x_0$. Poichè $[a, b]$ è chiuso e limitato, $x_0 \in [a, b]$. Per continuità, $f(\xi) \cong f(x_0) \cong f(\zeta)$, dunque $f(\xi) \cong f(\zeta)$.

◇

Dimostrazione. (Standard) Ragioniamo per assurdo e supponiamo f non uniformemente continua su $[a, b]$. Allora:

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta, |f(x) - f(y)| \geq \epsilon.$$

In particolare: per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, y_n \in [a, b]$ tali che $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.

Dalla successione $\{x_n\}$, poichè $[a, b]$ è chiuso e limitato si può estrarre una sottosuccessione $\{x_{k_n}\}$ convergente ad un punto $x_0 \in [a, b]$. Di conseguenza poichè $|x_{k_n} - y_{k_n}| < \frac{1}{k_n} \forall n \in \mathbb{N}$, anche $y_{k_n} \rightarrow x_0$. Allora, per la continuità di f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})) = f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Ciò è assurdo in quanto $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \epsilon > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

◇

4.3 Derivabilità

Definizione 4.3.1 (Derivata standard). Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in [a, b]$. Si dice che f è derivabile in x_0 se esiste ed è reale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Questo limite si chiama *derivata* di f nel punto x_0 e viene indicato con $f'(x_0)$.

Definizione 4.3.2 (Derivata non standard). Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in un punto x_0 se esiste un numero reale $f'(x_0)$ tale che per ogni incremento infinitesimo dx della variabile x risulti

$$\frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \cong f'(x_0).$$

$f'(x_0)$ si chiama *derivata* di f nel punto x_0 .

Dalle due definizioni si nota subito come il calcolo di una derivata in analisi non standard non sia altro che il banale calcolo di una parte standard, ovvero

$$f'(x_0) = st \left(\frac{f(x_0 + dx) - f(x_0)}{dx} \right).$$

Più semplicemente sia $y = f(x)$ e $dy = f(x_0 + dx) - f(x_0)$ l'incremento corrispondente alla variabile dipendente, allora l'espressione $y' = f'(x)$ della

derivata assume la breve forma

$$y' = st \left(\frac{dy}{dx} \right).$$

Per esempio si voglia calcolare la derivata della funzione $y = x^3$ in un generico punto x . Calcoliamo per prima cosa $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^3 - x^3}{dx} = \frac{x^3 + 3x^2dx + 3xdx^2 + dx^3 - x^3}{dx} = 3x^2 + 3xdx + dx^2$$

Passiamo poi al calcolo della parte standard $st \left(\frac{dy}{dx} \right)$:

$$y' = st \left(\frac{dy}{dx} \right) = st (3x^2 + 3xdx + dx^2) = 3x^2.$$

Analogamente si calcoli la derivata della funzione $y = \frac{1}{x}$ in un generico punto $x \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx} = \frac{x - (x + dx)}{x(x + dx)dx} = \frac{-1}{x(x + dx)}$$

considerando poi le parti standard si ottiene

$$y' = st \left(\frac{dy}{dx} \right) = st \left(\frac{-1}{x(x + dx)} \right) = -\frac{1}{st(x)st(x + dx)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Ancora una volta è evidente come la trattazione della teoria dei limiti sia inutile ai fini di questo argomento.

A questo punto si può estendere il risultato di regolarità delle funzioni derivabili.

Teorema 4.3.3. *Una funzione $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in x_0 è continua in x_0 .*

Dimostrazione. (non standard) Sia f derivabile in x_0 , per definizione dunque esiste un numero reale standard c , tale che $f(x) - f(x_0) \cong c(x - x_0)$ per ogni $x \cong x_0$ (escluso x_0 stesso). Ma poichè $x - x_0$ è infinitesimo, anche $f(x) - f(x_0)$ deve esserlo. Quindi f risulta essere continua.

◇

Dimostrazione. (standard) Per prima cosa si dimostra che f è derivabile in x_0 se e solo se esistono $\lambda \in \mathbb{R}$ e una funzione $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\omega(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$ e

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0) \quad \forall x \in [a, b]$$

In questo caso $\lambda = f'(x_0)$

Infatti se vale $f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0)$ per ogni $x \in [a, b]$, risulta

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda + \omega(x) \quad \forall x \in [a, b] - \{x_0\}$$

e quindi, poichè $\omega(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$, f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = \lambda$.

Viceversa, supponiamo f derivabile in x_0 . Poniamo $\omega(x_0) = 0$ e

$$\omega(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{per } x \in A - \{x_0\}.$$

Allora $\omega(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow x_0$; inoltre

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \omega(x)(x - x_0).$$

Da ciò si ricava subito che f è derivabile allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

come si voleva dimostrare.

◇

4.3.1 Regole di derivazione

Vediamo ora le regole di calcolo per la derivata di una somma, prodotto e quoziente di due funzioni. Anche in questo caso è semplice vedere come queste regole in analisi non standard si riducano alla banale applicazione di calcoli e proprietà algebriche.

Teorema 4.3.4. *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in $x_0 \in [a, b]$.*

Allora

1. $f + g$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

2. fg è derivabile in x_0 e si ha

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0);$$

3. se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Dimostrazione. (Non standard)

Poniamo per semplicità $u = f(x_0)$ e $v = g(x_0)$, allora si ha $f(x_0 + dx) = u + du$ e $g(x_0 + dx) = v + dv$.

1. Sia $y = u + v$, si vuole perciò calcolare $y' = (u + v)'$.

$$\begin{aligned} y' &= st \left(\frac{(u + du) + (v + dv) - (u + v)}{dx} \right) = st \left(\frac{du + dv}{dx} \right) \\ &= st \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \right) = u' + v' \end{aligned}$$

Ovvero indicando con le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si ha

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Sia $y = uv$, si vuole perciò calcolare $y' = (uv)'$.

$$\begin{aligned} y' &= st \left(\frac{(u + du)(v + dv) - uv}{dx} \right) = st \left(\frac{udv + vdu + dudv}{dx} \right) \\ &= st \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} + \frac{dudv}{dx} \right) = uv' + u'v \end{aligned}$$

Ovvero indicando con le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si ha

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. Sia $y = \frac{u}{v}$, si vuole perciò calcolare $y' = \left(\frac{u}{v}\right)'$.

$$\begin{aligned} y' &= st \left(\frac{\frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v}}{dx} \right) = st \left(\frac{\frac{(u+du)v - u(v+dv)}{v(v+dv)}}{dx} \right) = st \left(\frac{\frac{dvw - udv}{v^2 + vdv}}{dx} \right) \\ &= st \left(\frac{dx \frac{dv}{v^2 + vdv} - \frac{du}{v^2 + vdv}}{dx} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2 + vdv}. \end{aligned}$$

Ovvero indicando con le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = (f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0))/(g^2(x_0)).$$

◇

Dimostrazione. (Standard)

1. Si ha, per ogni $x \in [a, b] - \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ x \rightarrow x_0 & f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

Questo prova che $f+g$ è derivabile in x_0 e che

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Si ha, per ogni $x \in [a, b] - \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ x \rightarrow x_0 & f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \end{aligned}$$

Si noti che $g(x) \rightarrow g(x_0)$ per $x \rightarrow x_0$ in quando g è derivabile, quindi continua in x_0 . Questo prova che fg è derivabile in x_0 e che

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

3. Si ha, per ogni $x \in [a, b] - \{x_0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} \\ &= \frac{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)}{g(x)g(x_0)} \\ x \xrightarrow{\quad} x_0 &\frac{1}{g^2(x_0)}(f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)). \end{aligned}$$

Si noti che $g(x) \rightarrow g(x_0)$ per $x \rightarrow x_0$ in quanto g è derivabile, quindi continua in x_0 . Questo prova che $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 e che

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g^2(x_0))}.$$

◇

Diamo infine un ultimo esempio di come ancora una volta l'approccio non standard sia più semplice e immediato; analizziamo perciò il calcolo della derivata di una funzione composta. Sia $y = f(x)$ una funzione composta mediante le funzioni

$$y = f(t) \text{ e } t = g(x).$$

La regola della derivata della funzione composta viene giustificata dagli infinitesimi con una banale semplificazione algebrica in croce di infinitesimi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

Si calcoli per esempio la derivata della seguente funzione

$$y = e^{x^2-1}.$$

Questa funzione seguendo la notazione usata è la composizione delle due funzioni

$$y = e^t \text{ e } t = x^2 - 1$$

perciò ne segue che

$$\frac{dy}{dt} = e^t, \quad \frac{dt}{dx} = 2x \implies \frac{dy}{dx} = e^t 2x = 2xe^{x^2-1}$$

Nell'analisi classica questa banale dimostrazione viene considerata sbagliata perchè basata sugli infinitesimi (non considerati legittimi) e sostituita con dimostrazioni molto più complesse.

Teorema 4.3.5. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(A) \subseteq B$. Sia $x_0 \in A$ e supponiamo f derivabile in x_0 . Sia inoltre $f(x_0) \in B$ e supponiamo g derivabile in $f(x_0)$.*

Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione. Poichè g è derivabile in $f(x_0)$, esiste una funzione $\omega : B \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $f(x_0)$, tale che $\omega(y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow f(x_0)$ e

$$g(y) - g(f(x_0)) = g'(f(x_0))(y - f(x_0)) + \omega(y)(y - f(x_0)) \quad \forall y \in B.$$

Allora, per ogni $x \in A - \{x_0\}$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\ &= g'(f(x_0)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \omega(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow \\ &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0) \text{ per } x \rightarrow x_0. \end{aligned}$$

Questo prova che $g \circ f$ è derivabile in x_0 e che $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

◇

4.3.2 Le derivate di Leibniz

Vedremo in questo paragrafo che i ragionamenti usati nelle dimostrazioni non standard delle regole di derivazione non sono altro che quelli che fece anche Leibniz. Le regole di derivazione furono infatti presentate per la prima volta da Leibniz nel 1684 nella sua opera *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* (Nuovo metodo per i massimi e

I.

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR, ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS*).

Sit (fig. 111) axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z). His positis, calculi regulae erunt tales.

Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et dax erit aequalis adx. Si sit y aequ. v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuius ordinatae respondentis curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit $z - y + w + x$ aequ. v, erit $dz - y + w + x$ seu dv aequ. $dz - dy + dw + dx$. *Multiplicatio*: $d\overline{xv}$ aequ. $x dv + v dx$, seuposito y aequ. xv, fiet dy aequ. $x dv + v dx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi.

Porro *Divisio*: $d\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm v dy \mp y dv}{yy}$.

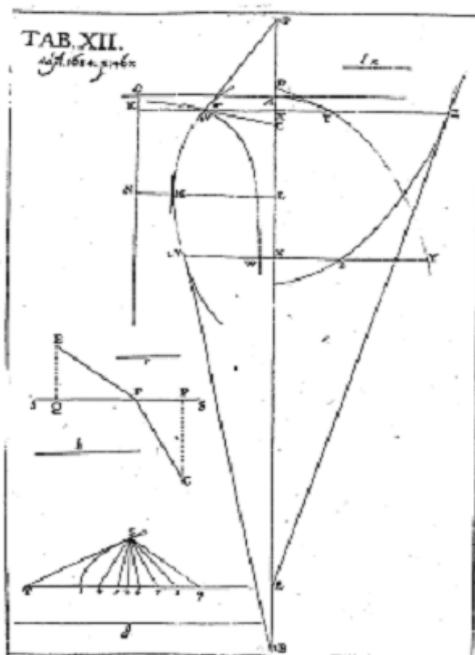
Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, et pro + z scribi + dz, pro - z scribi - dz, ut ex addi-

*) Act. Erud. Lips. an. 1684.

i minimi, come anche per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali e modo unico di calcolo per i suddetti).

Scrive Leibniz³:

‘Siano dati l’asse AX e più curve come VV , WW , YY , ZZ , le cui ordinate VX , WX , YX , ZX , normali all’asse, siano chiamate rispettivamente v , w , y , z . Il segmento AX , tagliato sull’asse, sia chiamato x . Le tangenti siano VB , WC , YD , ZE , le quali incontrano l’asse rispettivamente nei punti B , C , D , E . Ora si indichi con dx un certo segmento preso arbitrariamente, e si indichi con dv (o dw , o dy , o dz) il segmento che sta a dx come v (o w , o y , o z) sta a XB (o XC , o XD , o XE) cioè dv (o dw , o dy , o dz) è la differenza delle v (o delle w , o delle y , oppure delle z).



³Tutte le traduzioni della *Nova methodus* sono tratte da Leibniz 84. *Il decollo enigmatico del calcolo differenziale*, a cura di P.DUPONT e S.ROERO, Rende, Mediterranean Press, 1991.

Fatte queste premesse, le regole del calcolo saranno le seguenti.

Sia a una quantità costante, sarà

$$da = 0 \text{ e } d(ax) = adx.$$

Se è $y = v$ (ossia se un'ordinata qualsiasi della curva YY è uguale ad una qualsiasi ordinata simmetrica della curva VV) sarà $dy = dv$.

Addizione e Sottrazione:

se si ha

$$z - y + w + x = v$$

risulterà

$$d(z - v + w + x) = dv = dz - dy + dw + dx.$$

Moltiplicazione:

$$d(xv) = xdv + vdx$$

ovvero posto $y = xv$ sarà

$$dy = xdv + vdx$$

poichè è ad arbitrio usare la forma xv oppure, al posto di questa, abbreviando, la lettera y .

Si deve osservare che, in questo calcolo, x e dx sono trattati come y e dy o qualsiasi altra variabile e il suo differenziale.

E' anche da notarsi che non sempre è possibile risalire dall'equazione differenziale all'equazione primitiva, se non con una certa cautela, di cui si dirà altrove.

Divisione:

posto

$$z = \frac{v}{y}$$

si ha

$$dz = \frac{vdy - ydv}{y^2}.$$

[...]

Potenza:

$$dx^a = ax^{a-1}dx;$$

per esempio $dx^3 = 3x^2dx$.

$$d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}};$$

per esempio $d\frac{1}{x^3} = -\frac{3dx}{x^4}$.**Radice:**

$$d\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}.$$

(Da qui si deduce che:

$$d\sqrt{y} = \frac{dy}{2\sqrt{y}},$$

poichè in questo caso a è uguale a 1, b è uguale a 2; dunque $\frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$ viene ad essere uguale a $\frac{1}{2}\sqrt{y^{-1}}$, e $y^{-1} = \frac{1}{y}$ per la natura degli esponenti della progressione geometrica, e $\sqrt{\frac{1}{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}$).

$$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}.$$

Sarebbe invero bastata la regola della potenza intera per determinare i differenziali tanto delle frazioni, quanto delle radici; la potenza infatti diviene una frazione quando l'esponente è negativo e si muta in radice quando l'esponente è frazionario; ma ho preferito dedurre io stesso queste conseguenze, piuttosto che lasciarle ad altri da dedurre, dal momento che sono del tutto generali e si incontrano spesso, e in un argomento per se stesso intricato, è preferibile provvedere alla facilità. Grazie alla conoscenza di questo, per così dire, Algoritmo di tale calcolo, che chiamo differenziale, tutte le altre equazioni differenziali possono essere trovate con il calcolo comune e ottener-si i massimi e i minimi, come pure le tangenti, senza che sia necessario eliminare le frazioni, gli irrazionali o altri vincoli, come invece si doveva fare con i metodi pubblicati fino ad ora.

La dimostrazione di tutte le regole esposte, sarà facile per chi è versato in questi studi, ed una cosa sola non è stata sin qui spiegata a sufficienza: che

cioè si possano avere dx , dy , dv , dw , dz , proporzionali alle differenze o agli incrementi o alle diminuzioni momentanee di x , y , v , w , z (rispettivamente). Quindi, data una equazione qualsiasi, si può scrivere la sua equazione differenziale in questo modo.

Per ogni termine, (ossia per ogni parte che concorre a formare l'equazione per la sola addizione o sottrazione) si sostituirà semplicemente la quantità differenziale del termine; e invece per un'altra quantità (che non sia un termine, ma concorra a formare un termine) s'impiegherà la sua quantità differenziale, per formare la quantità differenziale del termine stesso non semplicemente, ma secondo l'algoritmo precedentemente stabilito. [...]

Si può subito notare che Leibniz enuncia queste regole, ma non le dimostra. In effetti la dimostrazione di tali regole, come si è già visto nelle dimostrazioni non standard dei teoremi precedenti, venivano fatte trascurando gli infinitesimi di ordine superiore. Infatti per esempio per il prodotto si ha:

$$d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy;$$

poichè dx e dy sono infinitesimi, il loro prodotto sarà *infinitamente infinitesimo* e quindi si potrà trascurare, ottenendo così il risultato

$$d(xy) = xdy + ydx.$$

Capitolo 5

Analisi non standard per le scuole superiori

Lo studio dell'analisi matematica viene proposto agli studenti, sia nei licei sia negli istituti tecnici, solo durante gli ultimi due anni di scuola superiore. L'analisi, quella standard venne inserita nei programmi agli inizi del novecento in seguito alla riforma di Luigi Credaro, ma i programmi relativi furono stilati da Guido Castelnuovo, il quale riteneva che per far conoscere allo studente la matematica moderna fosse necessario introdurre il concetto di funzione e le operazioni fondamentali del calcolo infinitesimale.

Nell'insegnamento dell'analisi oggi viene seguito il canonico percorso che, dall'introduzione delle generalità sulle funzioni, passa nell'ordine a limiti, continuità, derivate ed integrali (se va bene). Spesso questo percorso si blocca sul concetto di limite. Infatti, gli alunni non acquisiscono in maniera adeguata il suo significato e anche se successivamente intraprendono la carriera universitaria non arrivano a comprenderne la vera natura.

Nei capitoli precedenti sono già stati evidenziati alcuni dei vantaggi che potrebbe dare un approccio non standard all'analisi matematica affrontata nelle scuole superiori, così per concludere questa trattazione mostreremo come effettivamente i numeri iperreali e gli infinitesimi possano essere introdotti agli studenti. Ovviamente la costruzione 'alla Robinson' è sicura-

mente improponibile in quanto molto complicata, richiede infatti notevoli conoscenze di teoria degli insiemi e di logica¹ e non è certamente alla portata di uno studente delle superiori. E' però possibile seguire un'altra strada, quella assiomatica introdotta per la prima volta da H. Jerome Keisler nel suo libro *Elementary calculus*².

Anche i numeri reali possono essere definiti assiomaticamente, essi infatti sono l'unico campo ordinato completo archimedeo e ai fini del passaggio ai numeri iperreali a noi interessa il fatto che i numeri i numeri reali formano un insieme archimedeo. L'assioma di Eudosso-Archimede afferma che dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore o, equivalentemente, esiste un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore. In sostanza, questo assioma nega l'esistenza di quantità infinite o infinitesime. Negando l'assioma di Eudosso-Archimede possiamo permettere l'esistenza dei numeri iperreali. Ecco dunque una definizione assiomatica di questo insieme:

Definizione 5.0.6. L'insieme \mathbb{R}^* dei numeri iperreali è una struttura algebrica che gode delle seguenti proprietà:

- \mathbb{R}^* contiene il sistema dei numeri reali (questo non significa solo che ogni numero reale è contenuto in \mathbb{R}^* , ma anche che ogni relazione definita sui reali è definita anche sugli iperreali.)
- \mathbb{R}^* contiene un infinitesimo (o, equivalentemente, un infinito).
- Tutte le formule del primo ordine vere in \mathbb{R} lo sono anche in \mathbb{R}^* , e viceversa.

L'ultimo assioma è detto *principio del transfer*, e permette di trasferire le affermazioni fatte sui numeri iperreali ai numeri reali, e viceversa.

¹Per le nozioni di teoria dei modelli e di logica necessari allo sviluppo dell'analisi non standard si veda il secondo capitolo

²Per la versione italiana si veda H. Jerome Keisler 'Elementi di analisi matematica', Piccin Editore, Padova, 1982. Traduzione italiana a cura di R. Ferro, G. Sambin, L. Colussi, A. Facchini, A. Le Donne.

Anche in Italia negli ultimi anni alcuni docenti di scuole secondarie hanno sperimentato con i propri studenti una didattica non standard. I risultati delle loro esperienze sono state presentate e messe a confronto nel corso di due convegni, il primo nel 2011 *I giornata di studio: analisi non standard per le scuole superiori* a Venezia, il secondo nel 2012 *II giornata di studio: analisi non standard per le scuole superiori* a Modena. L'idea di queste giornate dedicate allo studio dell'analisi non standard nei licei è nata nel 2011 nell'ambito della lista Cabrinews, su proposta del prof. Tito Pellegrino; erano presenti circa sessanta docenti di matematica, tra i quali anche il professore Ruggero Ferro dell'università di Verona, traduttore del libro di Keisler e pioniere dell'analisi non standard in Italia, che è anche intervenuto sul modo di introdurre i numeri reali e iperreali nella scuola e sul tema degli ultrafiltri.

5.1 Perché introdurre i numeri iperreali a scuola?

Perché ricorrere agli infinitesimi e agli infiniti se si dimostra che ogni risultato riguardante i numeri reali, ottenuto mediante gli iperreali, può essere ottenuto anche coi soli numeri reali?.

Nello studio della matematica lo studente impara a conoscere i numeri razionali, ma non c'è problema che riguarda i numeri razionali che non possa essere risolto usando semplicemente i numeri interi. Il grande vantaggio dei numeri razionali sta nel fatto che essi racchiudono già il concetto di rapporto tra interi, consentendo di lavorare in modo assai più spedito. Analogamente non c'è problema che si risolva coi numeri reali che non possa essere risolto usando successioni approssimanti di numeri razionali. Nei numeri reali questo processo di approssimazione è già incluso e con essi possiamo lavorare in modo molto più efficiente. Così accade che i numeri iperreali contengano in qualche modo il processo di limite reso attuale, consentendo così di affrontare tanti concetti notevoli in modo assai più semplice e diretto.

Riporteremo ora la testimonianza di Giorgio Goldoni, professore di un

istituto tecnico industriale, che durante un seminario del primo convegno ha mostrato come i numeri iperreali possono essere introdotti in modo molto intuitivo nella scuola superiore facendo uso di strumenti ottici ideali ispirati ai microscopi e ai telescopi di Keisler.

5.1.1 Come introdurre i numeri iperreali

La costruzione dei numeri iperreali a partire dai numeri reali è certamente improponibile nella scuola superiore; del resto, ormai, nemmeno nei corsi universitari di analisi standard si affronta in dettaglio la costruzione dei numeri reali a partire dai razionali, ma si introducono i reali in modo assiomatico, che è come dire che ci si appoggia, di fatto, all'intuizione che lo studente già possiede delle loro proprietà. La trattazione assiomatica ha il pregio di fornire immediatamente l'operatività, ma nasconde un grave pericolo per lo studente. Infatti, l'assiomatizzazione è di solito la sintesi finale di una vasta esperienza precedente, che lo studente non possiede e la cui mancata conoscenza rischia di impedirgli di formarsi un'immagine intuitiva dello strumento che sta usando, col rischio di sentirsi definitivamente estraneo all'argomento. Si opta così per un approccio assiomatico, ma opportunamente accompagnato da una visualizzazione che renda il più possibile ovvi gli enunciati degli assiomi, riempiendoli di significato come si fa per la geometria.

5.1.2 Infinitesimi e infiniti: la loro visualizzazione

Vediamo ora come si passa a sviluppare un approccio visivo molto efficace agli infinitesimi e agli infiniti. Questo non per evitare una trattazione algebrica, ma per fare in modo che gli studenti posseggano una forte intuizione degli iperreali e dei risultati delle operazioni coi vari tipi di iperreali. Si chiamano *numeri standard* i numeri reali e *segmenti standard* i segmenti la cui misura rispetto a un'unità prefissata è esprimibile mediante un numero reale. Nella rappresentazione visiva, si chiama poi *scala ordinaria* la scala

della retta in cui i punti corrispondenti ai numeri 0 e 1 sono ben visibili e nettamente separati fra loro.

Si fa poi uso di alcuni strumenti ottici immaginari. Il primo è il *microscopio standard* a n ingrandimenti. Lo si può puntare su un numero x qualsiasi della retta nella scala ordinaria (ma anche in qualsiasi altra scala) e si vede una porzione di retta centrata in x e ingrandita di n volte. Un secondo strumento è il *telescopio standard*, che ci mostra una parte lontana di retta nella stessa scala della retta vicina, qualsiasi sia la sua scala. Si introduce infine un terzo strumento: lo zoom all'indietro, o semplicemente *zoom standard*. Lo zoom standard ci mostra una porzione di retta rimpicciolita di n volte rispetto alla scala iniziale e si punta tipicamente nell'origine.

Gli strumenti ottici appena introdotti possono essere combinati tra loro, nel senso che ciascuno strumento può essere applicato al campo visivo di un altro. È importante osservare che tutto quello che possiamo descrivere con gli strumenti ottici ha un esatto corrispondente algebrico e che la scelta dell'approccio visivo ha lo scopo di fissare in profondità nello studente le proprietà dei numeri iperreali.

A questo punto si passa a definire i segmenti e i numeri infiniti e infinitesimi. Un *segmento infinitesimo* è un segmento minore di ogni segmento standard (non nullo). Analogamente, un *numero infinitesimo* è un numero in valore assoluto minore di ogni numero standard positivo. Affermare che ϵ è infinitesimo significa che, per tutti gli n , se si punta nello zero un microscopio standard a n ingrandimenti, lo si vede sempre sovrapposto allo zero. Per separare ϵ dallo zero occorre un nuovo strumento: un *microscopio non standard* a infiniti ingrandimenti. Nel campo visivo del microscopio non standard si vedono lo zero e ϵ nettamente separati (figura 5.1).

Un *segmento infinito* è un segmento maggiore di ogni segmento standard. Un *numero infinito* è allora un numero in valore assoluto maggiore di ogni numero standard. Affermare che M è infinito significa che, comunque si punti uno zoom standard nell'origine, non si riesce mai a farlo rientrare nel campo visivo dello zoom. Quindi, per ogni n , se rimpicciolisco n volte, M continua

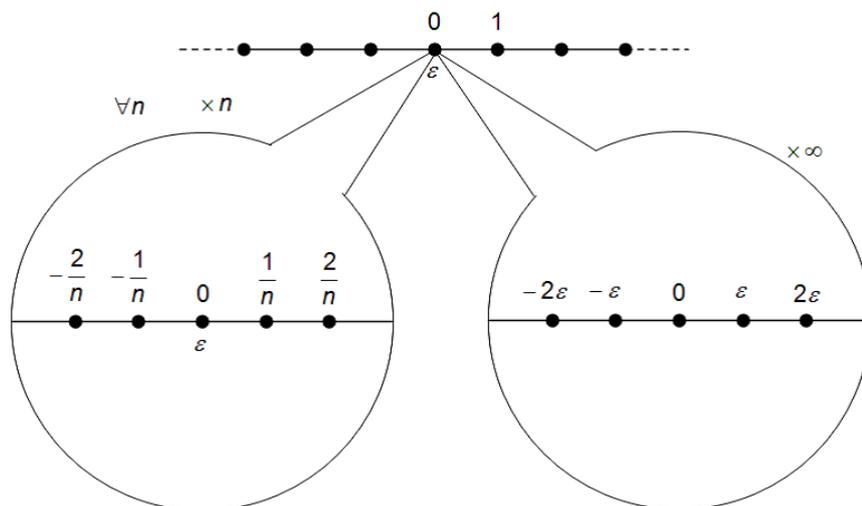


Figura 5.1: microscopio standard e non standard

a rimanere a destra del campo visivo. Occorre un nuovo strumento, che è lo *zoom non standard*, che riesce a fare rientrare nel campo visivo il numero infinito M (figura 5.2).

Un *segmento finito* è un segmento minore di almeno un numero standard, cioè è un segmento che si riesce sempre a fare rientrare completamente nel campo visivo di uno zoom standard puntato in un suo estremo. Un *numero finito* è allora un numero in valore assoluto minore di almeno un numero standard. Per esempio, i numeri standard sono tutti finiti. Infatti sono tutti minori di se stessi più uno, che è ancora un numero standard. Un *segmento non infinitesimo* è un segmento maggiore di almeno un segmento standard (non nullo). Quindi un *numero non infinitesimo* è un numero in valore assoluto maggiore di almeno un numero standard positivo. Abbiamo quindi una classe di numeri che sta fra gli infinitesimi e gli infiniti. Un *segmento finito e non infinitesimo* è un segmento compreso tra due segmenti standard (non nulli). Così un *numero finito non infinitesimo* è un numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi.

I numeri iperreali, visti come i numeri che corrispondono alle misure dei

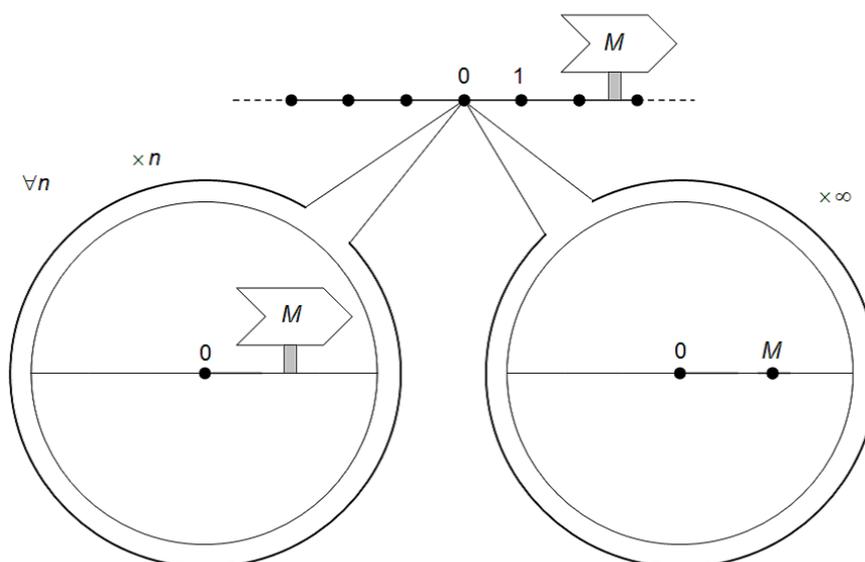


Figura 5.2: zoom standard e non standard

segmenti, una volta ammessa l'esistenza di segmenti infinitesimi e infiniti, e la possibilità di estendere ad essi le operazioni, possono quindi essere classificati nel modo seguente. Un numero è infinito oppure finito, a seconda che sia in valore assoluto maggiore di tutti i numeri standard o minore di almeno un numero standard positivo. Un numero finito può a sua volta essere o non essere infinitesimo a seconda che sia in valore assoluto minore di ogni numero standard positivo o maggiore di almeno uno. Gli infinitesimi sono a loro volta lo zero e gli infinitesimi non nulli. Chiaramente, tutti gli infinitesimi non nulli e tutti gli infiniti sono numeri non standard. I finiti non infinitesimi invece comprendono, tranne lo zero, tutti i numeri standard.

5.1.3 Confronto di infinitesimi ed infiniti

Nel calcolo infinitesimale alla vecchia maniera, che l'analisi non standard ha resuscitato, è di fondamentale importanza il confronto di infinitesimi e di infiniti. Per confrontare due infinitesimi non nulli ϵ e δ si considera il loro

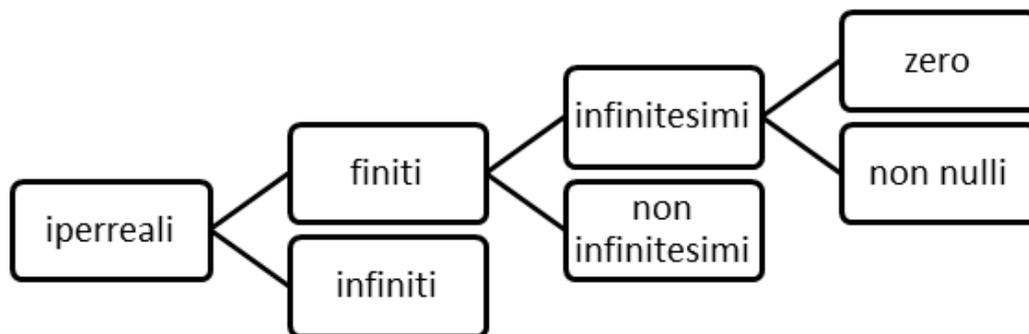


Figura 5.3: classificazione degli iperreali

quoziente. Si tratta di una forma indeterminata, nel senso che il quoziente di due infinitesimi non nulli può essere di qualsiasi tipo: un infinitesimo non nullo, un finito non infinitesimo oppure un infinito.

$$\frac{\epsilon}{\delta} = \begin{cases} \text{infinitesimo non nullo} & \text{se } \epsilon \text{ è di ordine superiore a } \delta \\ \text{finito} & \text{se } \epsilon \text{ è dello stesso ordine di } \delta \\ \text{infinito} & \text{se } \epsilon \text{ è di ordine inferiore a } \delta \end{cases}$$

Se $\frac{\epsilon}{\delta}$ è un infinitesimo, diciamo che ϵ è un infinitesimo di ordine superiore a δ . Nella scala ordinaria i due numeri si vedono sovrapposti allo zero e non riusciamo a separarli dallo zero con nessun microscopio standard. Si tratta cioè di due infinitesimi. Usando un microscopio non standard il primo numero ad essere separato dallo zero è δ . Quando, nel campo visivo del microscopio, vedo δ separato dallo zero, ϵ risulta ancora sovrapposto allo zero e non riesco, in quella scala, a separarlo dallo zero con nessun microscopio standard. In altri termini, ϵ e δ sono entrambi infinitesimi, ma ϵ è infinitesimo anche rispetto a δ e, nella scala in cui vedo δ , ϵ è un infinitesimo. In quella scala occorre un microscopio non standard per separare ϵ dallo zero (figura 5.4).

Se il quoziente $\frac{\epsilon}{\delta}$ è un finito non infinitesimo diciamo che ϵ e δ sono infinitesimi dello stesso ordine. Si tratta infatti di una relazione simmetrica

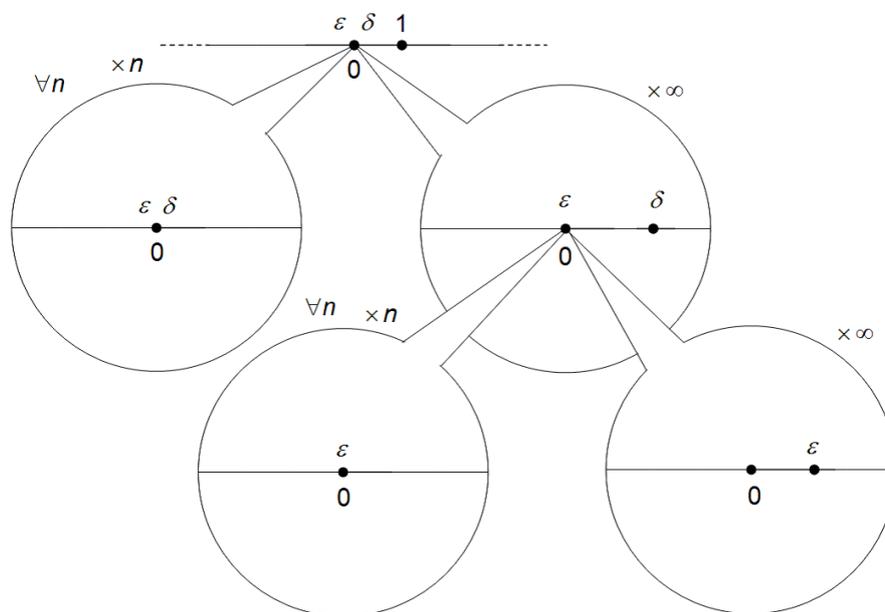
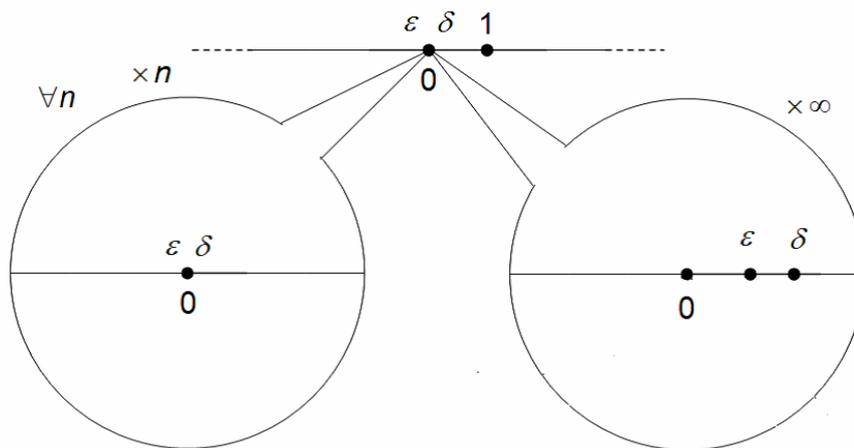


Figura 5.4: ϵ infinitesimo di ordine superiore a δ

in quanto il reciproco di un finito non infinitesimo è ancora un finito non infinitesimo. Possiamo visualizzare la situazione nel modo seguente. Per semplicità supponiamo ancora una volta che i due numeri siano positivi e, inoltre, che sia $\epsilon < \delta$. Anche in questo caso i due numeri, nella scala ordinaria, appaiono sovrapposti allo zero e non possono essere separati dallo zero con nessun microscopio standard. Occorre allora usare un microscopio non standard per ottenere un'immagine di δ e di ϵ simultaneamente separati dallo zero (figura 5.5).

Se, infine, il quoziente $\frac{\epsilon}{\delta}$ è infinito, diciamo che ϵ è un infinitesimo di ordine inferiore a δ . Poiché il reciproco di un infinito è un infinitesimo non nullo, ciò equivale ad affermare che δ è un infinitesimo di ordine superiore a ϵ e la visualizzazione è identica a quella già vista a patto di scambiare ϵ con δ .

Il confronto di infiniti si effettua in modo del tutto analogo a quello degli infinitesimi e può essere visualizzato utilizzando degli zoom.

Figura 5.5: ε e δ infinitesimi dello stesso ordine

Bibliografia

- [1] A. Robinson, '*Non-standard Analysis*', North-Holland publishing company, Amsterdam - London, 1970
- [2] A. Robinson, '*Introduzione alla teoria dei modelli e alla matematica dell'algebra*', Boringhieri, 1974
- [3] H. Jerome Keisler '*Elementi di analisi matematica*', Piccin Editore, Padova, 1982
- [4] '*I giornata di studio - Analisi non standard per le scuole superiori*', matematicamente.it, Atti del convegno, Venezia 20 Novembre 2011
- [5] '*II giornata di studio - Analisi non standard per le scuole superiori*', matematicamente.it, Atti del convegno, Modena 16 Settembre 2012
- [6] Paolo Bonavoglia, '*Il calcolo infinitesimale - Analisi per i licei alla maniera non standard*', matematicamente.it
- [7] Ermanno Lanconelli, '*Lezioni di Analisi Matematica 1*', Pitagora Editrice Bologna
- [8] Carl B. Boyer, '*Storia della matematica*', ISEDI Istituto Editoriale Internazionale
- [9] Martin Davis, Reuben Hersh, '*L'analisi non standard - Lo studio dei rapporti fra le teorie formalizzate e i loro modelli ha dato uno nuovo significato all'antica nozione di infinitesimo*', da 'Le scienze' n.40, settembre 1972