

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

APPROSSIMAZIONI SADDLEPOINT

Tesi di Laurea in Finanza Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ANDREA PASCUCCI

Presentata da:
RACHELE LUZI

I sessione di laurea 2012-2013
28 Giugno 2013

*Ai miei genitori,
per avermi donato la vita,
e a Giacomo,
per avermi insegnato ad amarla.*

Indice

Introduzione	7
Notazioni generali	9
1 Espansioni di Edgeworth	11
1.1 Premesse	11
1.2 Sviluppo	12
1.3 Conclusione	14
2 Formula di Daniels	15
2.1 Sviluppo della formula di Daniels	15
2.2 Dimostrazioni	17
2.3 Applicazioni della formula di Daniels	18
2.3.1 Applicazione alla distribuzione gaussiana	18
2.3.2 Applicazione alla distribuzione esponenziale	20
3 Formula di approssimazione <i>saddlepoint</i> di Lugannani-Rice	23
3.1 Introduzione	23
3.2 La serie asintotica per $P_N(x)$	24
3.2.1 Definizione e proprietà dei parametri che caratterizza- no la serie asintotica	24
3.2.2 Condizioni sufficienti per le serie affinché siano asin- totiche	28
3.3 Osservazioni sulle serie asintotiche per $P_N(x)$	30
3.3.1 Generali valori di n	30
3.3.2 Caso in cui $x = \bar{x}$	31
3.3.3 Una seconda espressione per $P_N(x)$	31
3.4 Applicazione del metodo alla distribuzione esponenziale	32
4 Formula di Lugannani-Rice	35
4.1 Sviluppo della formula di Lugannani-Rice	35
4.2 Applicazioni della formula	38
4.2.1 Applicazione alla distribuzione gaussiana	38
4.2.2 Applicazione alla distribuzione esponenziale	38

A Famiglia esponenziale	41
B Trasformata di Fourier	43
C Serie asintotiche	45
D Metodo di Laplace in più dimensioni	47
Bibliografia	49

Introduzione

Lo studio dell'approssimazione della probabilità di coda della densità di una variabile aleatoria è di grande interesse in ambito statistico-matematico e, nel corso degli ultimi decenni, sono stati implementati per questo numerosi metodi basati in generale sull'integrazione di tale funzione di densità, sebbene in molti casi si ottengano risultati poco accurati e con ampi margini di errore. Vengono di seguito presentati alcuni metodi di approssimazione di tale probabilità di coda definiti *metodi di approssimazione saddlepoint*: tale appellativo è dovuto all'esistenza di un punto critico, calcolato rispetto alla funzione generatrice dei momenti di una variabile aleatoria X , fondamentale per l'implementazione di ciascuno di questi metodi. Infatti, se applicati alla funzione di densità di una variabile aleatoria avente una generica distribuzione, tali metodi forniscono l'approssimazione migliore se implementati rispetto al *saddle point* citato sopra: questo risulta dunque essere di fondamentale importanza per quanto riguarda l'accuratezza del metodo e permette in particolare di ottenere un'approssimazione esatta se la variabile aleatoria ha distribuzione gaussiana.

Nel Capitolo 1 vengono descritte le espansioni di Edgeworth, le quali forniscono una approssimazione della densità di probabilità di una variabile aleatoria X , considerata come somma di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite X_1, \dots, X_n . Tale espansione viene data in termini della densità di probabilità di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana e dei momenti di terzo e quarto ordine di una delle X_j presenti nella somma.

Nel 1954 venne implementata la formula di Daniels, la quale viene sviluppata nel Capitolo 2; questa, a partire dalla funzione di densità esponenziale (definita $p_t(x)$) associata alla densità di probabilità della variabile aleatoria X e sulla base del risultato ottenuto tramite le espansioni di Edgeworth, fornisce una approssimazione della densità di probabilità della variabile aleatoria X . Tale approssimazione viene data in termini della densità di probabilità di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana e dei momenti di secondo, terzo e quarto ordine della variabile aleatoria X_t avente densità di probabilità la densità esponenziale $p_t(x)$.

I matematici Lugannani e Rice, nel 1980, proposero una nuova formula, basata sull'integrazione della trasformata di Fourier della funzione di den-

sità di probabilità di una variabile aleatoria X , immaginata come somma di un numero finito di variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite. Questa prende il nome di formula di approssimazione saddle point di Lugannani-Rice che, trattata nel Capitolo 3, fornisce l'approssimazione della probabilità di coda tramite serie asintotiche, le quali permettono estrema accuratezza sull'intero dominio di integrazione. Viene infine proposta nel Capitolo 4 una seconda formulazione del risultato ottenuto da Lugannani e Rice.

Notazioni generali

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ è l'insieme dei numeri interi non negativi
- \mathbb{R} è l'insieme dei numeri reali
- $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$
- $\mathbb{1}_H$ è la funzione indicatrice dell'insieme H
- $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$ è la derivata parziale rispetto a x
- $p_X(x)$ è la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria X
- $P_X(x)$ è la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X
- $m_X(t)$ è la funzione generatrice dei momenti della variabile aleatoria X
- $g_X(t)$ è la funzione caratteristica della variabile aleatoria X
- $n(x)$ è la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria gaussiana
- C^∞ è lo spazio delle funzioni con derivate continue di ogni ordine
- \mathcal{S} è lo spazio di Schwartz

Capitolo 1

Espansioni di Edgeworth

Data una variabile aleatoria X , le espansioni di Edgeworth sono serie che si occupano dell'approssimazione della sua densità di probabilità servendosi di particolari momenti della funzione generatrice.

1.1 Premesse

1. Vale la seguente uguaglianza:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-k} = e^a \left(1 - k \frac{a}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1.1)$$

Dimostrazione.

Per mostrare l'uguaglianza ci poniamo nel caso in cui $n \rightarrow \infty$ e osserviamo i fatti seguenti.

- (i) È noto dai risultati dell'analisi che, per $n \rightarrow \infty$, si ha:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \rightarrow e^a.$$

- (ii) Fissiamo ora $k \in \mathbb{N}_0$ e consideriamo $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-k}$.
 $\frac{a}{n} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, dunque possiamo sviluppare l'esponenziale in serie di Taylor e, limitandoci al grado $s=1$, otteniamo:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-k} = 1 - k \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Combinando i risultati (i) e (ii), si ha che:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n-k} = e^a \left(1 - k \frac{a}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2. *Polinomi di Hermite*

Sia X una variabile con distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, considerata con parametri $\mu=0$ e $\sigma=1$. Sia poi $n(x)$ la sua funzione di densità di probabilità:

$$n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Allora:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} n(x) = H_k(x) n(x). \quad (1.2)$$

Inoltre:

$$\frac{d}{dx^k} [H_k(x) n(x)] = -H_{k+1}(x) n(x). \quad (1.3)$$

3. *Formula di inversione per le funzioni caratteristiche*

Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione $P_X(x)$ e funzione caratteristica $g_X(t)$.

Se $\int_{\mathbb{R}} |g_X(t)| dt < \infty$, allora $\exists p_X(x)$ e vale

$$p_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-itx}}{2\pi} g_X(t) dt. \quad (1.4)$$

4. *Identità*

Sia $k \in \mathbb{N}$, allora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2/2} (it)^k dt &= \frac{(-1)^k}{2\pi} \frac{d^k}{dx^k} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt = \\ &= \frac{(-1)^k}{2\pi} \frac{d^k}{dx^k} n(x) = \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$= H_k(x) n(x). \quad (1.6)$$

1.2 Sviluppo

Siano X_1, \dots, X_n n variabili aleatorie aventi funzione di ripartizione $P_X(x) = P(X \leq x)$.

Senza perdere di generalità posso supporre che $E[X_1]=0$ e che $\text{Var}(X_1)=1$, poiché posso sostituire ciascun X_j con $\frac{X_j - E[X_1]}{\sqrt{\text{Var}(X_1)}}$.

Assumiamo ora finiti

$$\begin{cases} \gamma = E[X_j^3] \\ \tau = E[X_j^4] \end{cases}$$

rispettivamente i momenti del terzo e del quarto ordine.

Considero ora la somma standardizzata $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$ e ne studio la distribuzione. Ricordo il seguente teorema:

Teorema 1.2.1 (Teorema del limite centrale). *Siano X_1, \dots, X_n n variabili aleatorie, ciascuna con media μ e varianza σ^2 . Allora la successione di variabili aleatorie $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n X_j$ converge in distribuzione ad una variabile X avente distribuzione di densità normale di parametri μ e σ^2 .*

Applicato in questo caso, tale teorema ci permette di affermare che $\forall x$,

$$P_{S_n}(x) \longrightarrow \mathcal{N}(0, 1),$$

dove $\mathcal{N}(0, 1)$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana.

Si vorrebbe però una approssimazione migliore di $P_{S_n}(x) = P(S_n \leq x)$.

Verrà di seguito indicata con X una qualunque delle variabili aleatorie X_j .

Cominciamo allora costruendo la funzione caratteristica di S_n :

$$g_{S_n}(t) = E \left[\exp \left(\left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \sum_{j=1}^n X_j \right) \right] = \left[g_X \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n.$$

Per $n \rightarrow \infty$, possiamo espandere $\exp \left(\frac{itX}{\sqrt{n}} \right)$ secondo Taylor, ottenendo:

$$\begin{aligned} g_X \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) &= E \left[1 + \frac{itX}{\sqrt{n}} + \frac{(it)^2 X^2}{2n} + \frac{(it)^3 X^3}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4 X^4}{24n^2} \right] + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \\ &= 1 + \frac{itE[X]}{\sqrt{n}} + \frac{(it)^2 E[X^2]}{2n} + \frac{(it)^3 E[X^3]}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4 E[X^4]}{24n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right). \end{aligned}$$

Ricordando ora che $\mu = E[X] = 0$ e che $\sigma^2 = E[X^2] = 1$, otteniamo la seguente espressione:

$$g_X(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + \frac{(it)^3 \gamma}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4 \tau}{24n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Raggruppiamo ora i termini dell'espressione sopra nel seguente modo

$$g_X(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right) + \left(\frac{(it)^3 \gamma}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4 \tau}{24n^2} \right) + o \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

ed eleviamo il polinomio ottenuto fino ad ottenere la potenza n -esima, applicando il teorema del binomio:

$$\begin{aligned} \left[g_X \left(\frac{it}{\sqrt{n}} \right) \right]^n &= \left[\left(1 - \frac{t^2}{2n} \right)^n + n \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right)^{n-1} \left(\frac{(it)^3 \gamma}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4 \tau}{24n^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n-1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right)^{n-2} \left(\frac{(it)^3 \gamma}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4 \tau}{24n^2} \right) \right] + o \left(\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

Svolgiamo ora i calcoli, osservando che la maggior parte dei termini ottenuti sono dell'ordine di $o\left(\frac{1}{n}\right)$:

$$\begin{aligned} \left[g_X\left(\frac{it}{\sqrt{n}}\right) \right]^n &= \left[\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n + n\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-1} \left(\frac{(it)^3\gamma}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4\tau}{24n^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-2} \left(\frac{(it)^3\gamma}{6n\sqrt{n}} + \frac{(it)^4\tau}{24n^2}\right)^2 \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \left[\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n + \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-1} \left(\frac{(it)^3\gamma}{6\sqrt{n}} + \frac{(it)^4\tau}{24n}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-2} \left(\frac{(it)^6\gamma}{72n}\right) \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Applichiamo ora l'uguaglianza (1.1) a ciascun addendo della somma (1.7):

1. $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \rightarrow e^{-t^2/2},$
2. $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-1} \left(\frac{(it)^3\gamma}{6\sqrt{n}} + \frac{(it)^4\tau}{24n}\right) = e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right) \left(\frac{(it)^3\gamma}{6\sqrt{n}} + \frac{(it)^4\tau}{24n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) =$
 $= e^{-t^2/2} \left(\frac{(it)^3\gamma}{6\sqrt{n}} + \frac{(it)^4\tau}{24n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$
3. $\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^{n-2} \left(\frac{(it)^6\gamma}{72n}\right) = e^{-t^2/2} \left(1 - \frac{2t^2}{2n}\right) \left(\frac{(it)^6\gamma}{72n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) =$
 $= e^{-t^2/2} \left(\frac{(it)^6\gamma}{72n}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$

Sommando i termini elaborati sopra otteniamo:

$$g_{S_n}(t) = e^{-t^2/2} \left[1 + \frac{(it)^3\gamma}{6\sqrt{n}} + \frac{(it)^4\tau}{24n} + \frac{(it)^6\gamma^2}{72n} \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (1.8)$$

1.3 Conclusione

Combinando (1.8) e (1.4) si ottiene la seguente funzione di densità come approssimazione della funzione di densità di probabilità di S_n :

$$\begin{aligned} p_{S_n}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2/2} dt + \frac{\gamma}{6\sqrt{n}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2/2} (it)^3 dt + \\ &\quad + \frac{\tau}{24n} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2/2} (it)^4 dt + \frac{\gamma^2}{72n} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2/2} (it)^6 dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Combinando infine (1.9) con (1.6) si ottiene l'espressione finale per l'approssimazione ottenuta tramite serie di Edgeworth:

$$p_{S_n}(x) = n(x) \left(1 + \frac{\gamma H_3(x)}{6\sqrt{n}} + \frac{\tau H_4(x)}{24n} + \frac{\gamma^2 H_6(x)}{72n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Capitolo 2

Formula di Daniels

2.1 Sviluppo della formula di Daniels

Nel 1954, Daniels, sulla base delle espansioni di Edgeworth e grazie ad alcune proprietà della funzione caratteristica, elaborò una ulteriore formula di approssimazione per la densità di una variabile aleatoria X con densità di probabilità $p_X(x)$.

Sia I un intervallo di \mathbb{R} . Supponiamo di conoscere la funzione generatrice dei momenti $m_X(t)$ della variabile aleatoria X , definita da $m_X(t) = E[e^{Xt}]$ e tale che $|m_X(t)| < \infty \quad \forall t \in I$.

Definiamo poi il logaritmo della funzione generatrice tramite la funzione $\phi(t) = \log(E[e^{Xt}]) = \log[m_X(t)]$.

Fissiamo ora $t \in I$ e definiamo nel seguente modo la funzione $p_t(x)$:

$$p_t(x) = \frac{e^{xt} p_X(x)}{m_X(t)} = e^{xt - \phi(t)} p_X(x). \quad (2.1)$$

La densità $p_t(x)$ appartiene alla famiglia delle densità esponenziali, dunque è ancora una funzione di densità di probabilità¹. Possiamo allora considerare una variabile aleatoria X_t avente funzione di densità di probabilità $p_t(x)$. Seguendo Daniels, scegliamo t in modo che sia soluzione dell'equazione

$$\phi'(t) = x, \quad (2.2)$$

in quanto vogliamo che la densità $p_t(x)$ abbia media in x^2 ; t svolge allora la funzione di *saddle point*.

Consideriamo ora una generica variabile aleatoria X_t con densità $p_t(x)$; siano $\bar{\mu}$ e $\bar{\sigma}^2$ rispettivamente la media e la varianza di X_t . Data una variabile aleatoria con tali caratteristiche, questa può sempre essere scritta come somma

¹Per approfondire la famiglia delle distribuzioni esponenziali consultare l'Appendice A.

²Questo dipende dal fatto che, data una variabile aleatoria con densità appartenente alla famiglia esponenziale, questa ha media $\mu = \phi'(t)$; si può trovare una dimostrazione di quanto detto nel Lemma A.0.1.

di n variabili aleatorie

$$\frac{X_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{X_n}{\sqrt{n}}$$

indipendenti e identicamente distribuite, ciascuna con media $\mu = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{n}}$ e varianza $\sigma^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{n}$ ³.

Osservazione 1. Per poter applicare l'espansione di Edgeworth, è necessario che le variabili aleatorie presenti nella somma abbiano media $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$: possiamo allora considerare la variabile $Z = \frac{X_t - \mu}{\sigma}$ ⁴, la quale, per come è costruita, rispetta le ipotesi richieste.

Applichiamo allora l'espansione di Edgeworth alla funzione di densità di probabilità della variabile Z e otteniamo la seguente funzione che denotiamo con $p_t^*(x)$:

$$p_t^*(z) = n(z) \left(1 + \frac{\gamma H_3(z)}{6\sqrt{n}} + \frac{\tau H_4(z)}{24n} + \frac{\gamma^2 H_6(z)}{72n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

dove indichiamo ancora con γ e τ rispettivamente i momenti del terzo e del quarto ordine di Z . Osserviamo ora che l'approssimazione normale è più accurata vicino alla media μ , dunque calcoliamo esattamente $p_t^*(0)$:

$$\begin{aligned} p_t^*(0) &= n(0) \left(1 + \frac{\gamma H_3(0)}{6\sqrt{n}} + \frac{\tau H_4(0)}{24n} + \frac{\gamma^2 H_6(0)}{72n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\tau}{8n} - \frac{5\gamma^2}{24n} \right) + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

essendo $H_4(0)=3$ e $H_6(0)=-15$.

Applichiamo ora il risultato del Lemma 2.2.1 e, osservando che possiamo sostituire il valore di σ^2 con la approssimazione data da $\phi''(t)$ ⁵, ricaviamo la seguente espressione per $p_t(x)$:

$$\begin{aligned} p_t(x) &= \frac{1}{\sigma} p_t^*\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{\phi''(t)}} p_t^*(0) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\phi''(t)}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{\tau}{8n} - \frac{5\gamma^2}{24n} \right) \right] + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Applicando infine la relazione inversa di (2.10),

$$p_X(x) = \frac{e^{\phi(t) - xt}}{\sqrt{\phi''(t)}} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[1 + \left(\frac{\tau}{8n} - \frac{5\gamma^2}{24n} \right) \right] + o\left(\frac{1}{n}\right) \right],$$

³Per la dimostrazione di tale affermazione vedere il Corollario 2.2.2.

⁴Per la dimostrazione di tale affermazione vedere il Lemma 2.2.1.

⁵Per la dimostrazione di tale affermazione vedere il Lemma A.0.1.

e ponendo $z = \sqrt{2[xt - \phi(t)]}$ ottenne la formula, valida $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$p_X(x) = \frac{n(z)}{\sqrt{\phi''(t)}} \left[1 + \left(\frac{\phi^{(4)}(t)}{8\phi''(t)^2} - \frac{5\phi'''(t)^2}{24\phi''(t)^3} \right) \right] + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2.3)$$

che prese il nome di *formula di Daniels*.

Osservazione 2. Sebbene tale formula sia valida, come detto sopra, $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}$, Daniels osserva che la migliore approssimazione si ottiene scegliendo t in modo che sia soluzione dell'equazione $\phi'(t) = x$, descritta in (2.2). Si risconterà una prova effettiva di tale affermazione nelle applicazioni che vengono effettuate nel paragrafo 2.3.

2.2 Dimostrazioni

Lemma 2.2.1. *Sia X una variabile aleatoria con funzione di distribuzione continua $P_X(x)$ e dunque con funzione di densità di probabilità $p_X(x)$. Allora $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, è sempre possibile determinare una variabile aleatoria Y tale che*

$$p_Y(y) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Tale variabile aleatoria Y avrà in particolare valore atteso $E[Y] = aE[X] + b$ e varianza $\text{var}(Y) = a^2 \text{var}(X)$.

Dimostrazione. Sia $p_X(x)$ la funzione di densità di probabilità della variabile aleatoria X . Consideriamo la variabile aleatoria $Y = aX + b$ e mostriamo che soddisfa le proprietà richieste. Consideriamo la funzione di distribuzione di Y :

$$P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-b}{a}\right).$$

Siano poi $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tali che $t_0 < t_1$; si ha che:

$$P(t_0 \leq Y \leq t_1) = P\left(\frac{t_0-b}{a} X \leq \frac{t_1-b}{a}\right).$$

Allora, per definizione di funzione di distribuzione, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} P(t_0 \leq Y \leq t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} p_Y(y) dy = \int_{t_0}^{t_1} p_{aX+b}(x) dx = \\ &= \int_{\frac{t_0-b}{a}}^{\frac{t_1-b}{a}} p_X(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} p_X\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{dx}{a}. \end{aligned}$$

In conclusione:

$$p_Y(y) = p_{aX+b}(x) = \frac{1}{a} p_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Inoltre, per le proprietà di valore atteso e varianza, si deduce facilmente che la variabile aleatoria Y ha in particolare valore atteso $E[Y] = aE[X] + b$ e varianza $\text{var}(Y) = a^2\text{var}(X)$. \square

Corollario 2.2.2. *Sia X una variabile aleatoria di media $\bar{\mu}$ e varianza $\bar{\sigma}^2$. È sempre possibile scrivere X come somma di n variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite*

$$\frac{X_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{X_n}{\sqrt{n}}$$

ciascuna con media $\mu = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{n}}$ e varianza $\sigma^2 = \frac{\bar{\sigma}^2}{n}$.

Dimostrazione. Per il lemma precedente, possiamo considerare n variabili aleatorie

$$\frac{X_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{X_n}{\sqrt{n}}$$

che soddisfano le condizioni richieste. In particolare si ha che:

$$(i) \quad \bar{\mu} = E[X] = \frac{n}{\sqrt{n}} E[X_1] = \frac{n}{\sqrt{n}} \mu = \frac{n}{\sqrt{n}} \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{n}},$$

$$(ii) \quad \bar{\sigma}^2 = \text{var}[X] = \frac{n^2}{(\sqrt{n})^2} \text{var}[X_1] = \frac{n^2}{n} \sigma^2 = \frac{n^2}{n} \frac{\bar{\sigma}^2}{n}.$$

\square

2.3 Applicazioni della formula di Daniels

2.3.1 Applicazione alla distribuzione gaussiana

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, 1)$ e avente dunque densità di probabilità

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Iniziamo definendo l'intervallo I sul quale la funzione generatrice dei momenti $m_X(t)$ ha valore finito. La funzione $m_X(t)$ è definita da

$$m_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_{\mathbb{R}_+} e^{tx} e^{-x^2/2} dx,$$

che è finita su tutto \mathbb{R} ; t può assumere qualunque valore reale.

Calcoliamo ora la funzione $\phi(t)$, logaritmo della generatrice dei momenti:

$$\phi(t) = \log(E[e^{xt}]) = \log\left(e^{t^2/2}\right) = \frac{t^2}{2}$$

e le sue derivate, necessarie per l'implementazione della formula:

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= t, \\ \phi''(t) &= 1, \\ \phi'''(t) &= \phi^{(4)}(t) = 0.\end{aligned}$$

Definiamo ora la variabile z :

$$z = \sqrt{2[xt - \phi(t)]} = \sqrt{2\left[xt - \frac{t^2}{2}\right]}.$$

Sostituiamo i valori, calcolati sopra, nella formula di Daniels e otteniamo:

$$\begin{aligned}p_X(x) &\sim \frac{n(z)}{\sqrt{\phi''(t)}} \left[1 + \frac{\phi^{(4)}(t)}{8\phi''(t)^2} - \frac{\phi'''(t)^2}{24\phi''(t)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(xt - \frac{t^2}{2}\right)}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Esempio 1. Calcoliamo la densità della gaussiana nel punto $x=2$:

$$p_X(2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2} = 0.05399096651,$$

e sostituiamo nella formula di Daniels, rispettivamente, ciascun valore del parametro t così considerato:

$t > x$) supponendo ad esempio $t = 4$ otteniamo:

$$p_X(2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(xt - \frac{t^2}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/2} = 0.2419707245;$$

$t = x$) supponendo ad esempio $t = 2$ otteniamo:

$$p_X(2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(xt - \frac{t^2}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2} = 0.05399096651;$$

$t < x$) supponendo ad esempio $t = 1$ otteniamo:

$$p_X(2) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(xt - \frac{t^2}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^3 = 8.012969903.$$

Possiamo dunque osservare che otteniamo il valore esatto della densità quando t ha lo stesso valore del punto in cui viene considerata la densità della distribuzione, mentre l'approssimazione è meno buona se $t < x$ e peggiora drasticamente se $t > x$. A conferma di questo, procediamo infatti calcolando il *saddle point* \hat{t} , come suggerito da Daniels.

Calcoliamo dunque ora il *saddle point* \hat{t} :

$$\phi'(\hat{t}) = x \implies \hat{t} = x,$$

e definiamo nuovamente variabile z_t in funzione di esso:

$$z_t = \sqrt{2[x\hat{t} - \phi(\hat{t})]} = \sqrt{2\left[x^2 - \frac{x^2}{2}\right]} = x.$$

Sostituiamo i nuovi valori, calcolati sopra, nella formula di Daniels e otteniamo:

$$\begin{aligned} p_X(x) &\sim \frac{n(z_t)}{\sqrt{\phi''(t)}} \left[1 + \frac{\phi^{(4)}(t)}{8\phi''(t)^2} - \frac{5\phi'''(t)^2}{24\phi''(t)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}; \end{aligned} \quad (2.5)$$

l'approssimazione è dunque esatta.

2.3.2 Applicazione alla distribuzione esponenziale

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

definita per $x > 0$ e $\lambda > 0$.

Iniziamo definendo l'intervallo I sul quale la funzione generatrice dei momenti $m_X(t)$ ha valore finito. La funzione $m_X(t)$ è definita da

$$m_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_{\mathbb{R}_+} e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \int_{\mathbb{R}_+} e^{(t-\lambda)x} dx,$$

e, affinché sia finita è necessario che $t < \lambda$; t può assumere dunque valori nell'intervallo $(-\infty, \lambda)$.

Calcoliamo ora la funzione $\phi(t)$, logaritmo della generatrice dei momenti:

$$\phi(t) = \log(E[e^{xt}]) = \log\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right),$$

e le sue derivate, necessarie per l'implementazione della formula:

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{1}{\lambda - t}, \\ \phi''(t) &= \frac{1}{(\lambda - t)^2}, \\ \phi'''(t) &= \frac{2}{(\lambda - t)^3}, \\ \phi^{(4)}(t) &= \frac{6}{(\lambda - t)^4}. \end{aligned}$$

Definiamo ora la variabile z :

$$z = \sqrt{2[xt - \phi(t)]} = \sqrt{2\left[xt - \log\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)\right]}.$$

Sostituiamo i valori, calcolati sopra, nella formula di Daniels e otteniamo:

$$\begin{aligned} p_X(x) &\sim \frac{n(z)}{\sqrt{\phi''(t)}} \left[1 + \frac{\phi^{(4)}(t)}{8\phi''(t)^2} - \frac{5\phi'''(t)^2}{24\phi''(t)^3} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(xt - \log(\frac{\lambda}{\lambda-t}))} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{6(\lambda-t)^4}{(\lambda-t)^4} \right) - \frac{5}{24} \left(\frac{4(\lambda-t)^6}{(\lambda-t)^6} \right) \right] = \\ &= \frac{11}{12} \frac{\lambda-t}{\sqrt{2\pi}} e^{-(xt - \log(\frac{\lambda}{\lambda-t}))}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Calcoliamo dunque ora il *saddle point* \hat{t} :

$$\phi'(\hat{t}) = x \implies \frac{1}{\lambda - \hat{t}} = x \implies \hat{t} = \lambda - \frac{1}{x},$$

e definiamo nuovamente la variabile z_t in funzione di esso:

$$\begin{aligned} z_t &= \sqrt{2[x\hat{t} - \phi(\hat{t})]} = \sqrt{2\left[\left(\lambda - \frac{1}{x}\right)x - \log\left(\frac{\lambda}{1/x}\right)\right]} = \\ &= \sqrt{2[\lambda x - 1 - \log(\lambda x)]}. \end{aligned}$$

Calcoliamo inoltre nel punto \hat{t} le derivate della funzione $\phi(t)$:

$$\begin{aligned} \phi'(\hat{t}) &= x, \\ \phi''(\hat{t}) &= x^2, \\ \phi'''(\hat{t}) &= 2x^3, \\ \phi^{(4)}(\hat{t}) &= 6x^4. \end{aligned}$$

Sostituiamo i nuovi valori, calcolati sopra, nella formula di Daniels e otteniamo:

$$\begin{aligned} p_X(x) &\sim \frac{n(z_t)}{\sqrt{\phi''(\hat{t})}} \left[1 + \frac{\phi^{(4)}(\hat{t})}{8\phi''(\hat{t})^2} - \frac{5\phi'''(\hat{t})^2}{24\phi''(\hat{t})^3} \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\lambda x - 1 - \log(\lambda x))}}{\frac{1}{\lambda - \hat{t}}} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{6x^4}{x^4} \right) - \frac{5}{24} \left(\frac{4x^6}{x^6} \right) \right] = \\ &= \frac{11}{12x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\lambda x - 1 - \log(\lambda x))}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Esempio 2. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

definita per $x > 0$ e $\lambda > 0$.

Supponiamo per semplicità che $\lambda = 1$ e osserviamo che l'intervallo di definizione per il parametro t è $I = (-\infty, 1)$.

Nel punto $x = 1$, la densità dell'esponenziale vale:

$$p_X(1) = e^{-1} = 0.3678794412.$$

Scegliamo ora un generico t nell'intervallo I e sostuiamo i valori di λ , t e x in (2.6). Sia $t = -2$:

$$\begin{aligned} p_X(x) &\sim \frac{11}{12} \frac{\lambda - t}{\sqrt{2\pi}} e^{-(xt - \log(\frac{\lambda}{\lambda-t}))} = \\ &= \frac{11}{12} \frac{1 - (-2)}{\sqrt{2\pi}} e^{-(-2 - \log(\frac{1}{3}))} = \\ &= 0.2210855168. \end{aligned}$$

Serviamoci invece ora dell'uguaglianza in (2.7) per calcolare l'approssimazione del valore della densità nel punto $x = 1$; in tal caso il valore di t che implicitamente consideriamo è quello ottenuto dall'equazione *saddlepoint*, secondo cui:

$$\hat{t} = \lambda - \frac{1}{x} = 0.$$

Si ottiene la seguente approssimazione per il valore di $p_X(x)$ nel punto $x = 1$:

$$\begin{aligned} p_X(x) &\sim \frac{11}{12x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\lambda x - 1 - \log(\lambda x))} = \\ &= \frac{11}{12} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1 - 1 - 0)} = \\ &= 0.3678709044. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Formula di approssimazione *saddlepoint* di Lugannani-Rice

3.1 Introduzione

Il problema riguardante il calcolo della probabilità $P_N(x)$ che la somma

$$X = v_1 + v_2 + \dots + v_N \quad (3.1)$$

di N variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite superi una certa x è stato ampiamente studiato. Un metodo per determinare un'approssimazione di $P_N(x)$ è valutare numericamente l'integrale

$$P_N(x) = P(X > x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux} [g_v(u)]^N}{iu} du,$$

dove, definito $\phi(iu) = \log[e^{iuv}]$ il logaritmo della funzione generatrice dei momenti, si ottiene $g_v(u) = e^{\phi(iu)}$.

Osservazione 3. Considerare l'integrale definito come sopra è equivalente a considerare la classica definizione di funzione di ripartizione: infatti possiamo applicare all'integrale

$$P(X > x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{z>x} p_X(z) dz,$$

la seguente proprietà per le trasformate di Fourier¹:

date due funzioni $f, g \in \mathcal{S}(\Omega)$ con rispettive trasformate \hat{f} ed \hat{g} vale:

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx = \int_{\Omega} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dx,$$

¹Vengono date rispettivamente la definizione di trasformata di Fourier e la proprietà utilizzata nell'Appendice B.

ottenendo appunto

$$P_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iux} [g_v(u)]^N}{iu} du,$$

dove la funzione caratteristica $g_v(u)$ è la trasformata di Fourier della densità di probabilità $p_v(x)$ di una generica v_j in (3.1).

3.2 La serie asintotica per $P_N(x)$

3.2.1 Definizione e proprietà dei parametri che caratterizzano la serie asintotica

Sulla base dell'osservazione precedente, l'integrale $P_N(x)$ può essere scritto come

$$P_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{N[\phi(iu) - iur]}}{iu} du, \quad (3.2)$$

dove $e^{\phi(iu)} = g(u)$ e $r = \frac{x}{N}$. Il principale risultato ottenuto da Lugannani e Rice è l'approssimazione di tale integrale tramite la seguente differenza di serie asintotiche:

$$P_N(x) \sim \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{-f_0}) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n), \quad (3.3)$$

dove:

$$f_0 = N[\phi(iu_0) - iu_0x], \quad (3.4)$$

$$\phi(iu) = \log[e^{iuv}],$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x\sqrt{2}}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

A_n e B_n sono serie asintotiche² e saranno date in seguito rispettivamente in (3.8), per $n=0,1,2$ e in (3.12). Analizziamo ora come Lugannani e Rice giunsero a tale formula di approssimazione enunciando e dimostrando alcuni lemmi e osservazioni.

Lemma 3.2.1. *Il punto u_0 che compare in (3.4) è il principale saddle point (ovvero punto in cui si annulla la derivata prima della funzione) di $e^{N[\phi(iu) - iux]}$ e si annulla quando $x = \bar{x} = E[X]$.*

²Per approfondire le serie asintotiche consultare l'Appendice C.

Dimostrazione. Deriviamo la funzione $e^{N[\phi(iu)-iux]}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} e^{N[\phi(iu)-iux]} &= e^{N[\phi(iu)-iux]} \frac{d}{du} N[\phi(iu) - iux] = \\ &= e^{N[\phi(iu)-iux]} \left[N \frac{d}{du} \phi(iu) ix \right] = 0 \\ &\iff N \frac{d}{du} \phi(iu) - ix = 0 \\ &\iff \frac{d}{du} \phi(iu) - ir = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se consideriamo il caso in cui $x = \bar{x} = E[X]$, otteniamo:

$$\phi'(iu) = \frac{d}{dt} \log E[e^{iuv}] = \frac{1}{E[e^{iuv}]} E[ive^{iuv}] \Big|_{t=0} = iE[v].$$

□

Osservazione 4. Calcolando A_n e B_n è conveniente porre $t_0 = iu_0$, dove t_0 è l'appropriata radice reale di

$$\frac{d}{dt} \phi(t) - r = 0. \quad (3.6)$$

Osservazione 5. Come detto sopra, verrà calcolato in seguito lo sviluppo in serie di P_N e si osserverà che questo coincide con la serie A_n ; sorge allora spontanea la domanda sul motivo per cui non venga utilizzata semplicemente tale serie per determinare l'approssimazione di P_N .

Per dare una risposta a tale questione iniziamo ponendo $x = \bar{x} = E[X]$ e consideriamo il rapporto $\frac{x-\bar{x}}{N}$. Se tale rapporto aumenta, a N fissato, allora necessariamente aumenta la distanza tra x e \bar{x} e di conseguenza aumenta la distanza tra i valori t_0 e $t=0$; sotto tali condizioni la serie A_n approssima con accuratezza l'integrale $P_N(x)$. Se supponiamo al contrario che $y \rightarrow \bar{y}$, allora $t_0 \rightarrow 0$ e la serie A_n diverge. È per questo motivo che risulta necessario introdurre lo sviluppo asintotico di $\text{erfc}(\sqrt{-f_0})$ e dunque considerare come approssimazione di $P_N(x)$

$$P_N(x) \sim \frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{-f_0}) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n),$$

in quanto solo così la serie data dalla differenza converge. Dobbiamo quindi sommare $\frac{1}{2} \text{erfc}(\sqrt{-f_0})$ alla serie ottenuta per bilanciare l'aggiunta del termine B_n .

Lemma 3.2.2. *La radice reale di (3.6), detta t_0 , è positiva quando $x > \bar{x}$, negativa quando $x < \bar{x}$ e nulla quando $x = \bar{x}$.*

Dimostrazione. È possibile dimostrare questo lemma mostrando che $\phi'(t)$ è una funzione monotona crescente, in quanto, sapendo che questa ha uno zero in t_0 quando $x = \bar{x}$, si avrebbe di conseguenza il risultato. Iniziamo allora calcolando rispettivamente la derivata prima e la derivata seconda di $\phi(t)$:

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \frac{1}{E[e^{tv}]} E[ve^{tv}], \\ \phi''(t) &= \frac{E[v^2 e^{2tv}]}{E[e^{2tv}]} - \frac{E[v^2 e^{2tv}]}{E[e^{tv}]^2} E[ve^{tv}] = \frac{1}{E[e^{tv}]} \left(E[v^2 e^{2tv}] - \frac{E[ve^{tv}]^2}{E[e^{tv}]} \right).\end{aligned}$$

Osserviamo ora che:

- il termine $\frac{1}{E[e^{tv}]}$ è sicuramente positivo, in quanto attesa di una quantità sicuramente positiva,
- la quantità nella parentesi è positiva, in quanto applicando a tali termini la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, otteniamo

$$E[ve^{tv}]^2 \leq E[v^2 e^{2tv}] E[e^{2tv}],$$

ma allora chiaramente $\phi''(t) \geq 0$. □

In termini di t_0 , (3.4) diventa

$$f_0 = N[\phi(t_0) - t_0 x]. \quad (3.7)$$

Lemma 3.2.3. *La funzione f_0 , definita come sopra, è una funzione non positiva e si annulla quando $t_0=0$.*

Dimostrazione. Osserviamo che:

- (i) $f(t) = \phi(t) - tr$
- (ii) $f'(t) = \phi'(t) - r \quad (= 0 \iff t = t_0)$.

Se consideriamo il caso in cui $t_0 > 0$, allora possiamo affermare:

$$f(t_0) = \phi(t_0) - t_0 r = \phi(0) + \int_0^{t_0} \phi'(s) ds - t_0 r \leq E[0] + \phi'(t_0)t_0 - t_0 r = 0,$$

in quanto:

- $E[0]=0$ per definizione di attesa
- $\phi'(t_0)t_0 - t_0 r = 0$ per (i).

Applicando l'analogo procedimento nel caso in cui $t_0 < 0$, si ottiene:

$$f(t_0) = \phi(t_0) - t_0 r = \phi(0) + \int_{t_0}^0 \phi'(s) ds - t_0 r \leq 0$$

In conclusione $f_0 \leq 0$, con l'uguaglianza in $t_0=0$. \square

Osservazione 6. Spostiamo ora l'attenzione sui termini A_n e B_n che compaiono nello sviluppo di $P_N(x)$ e vediamo in particolare come sono definiti.

A_n è l' n -esimo termine della serie asintotica ottenuta usando il classico metodo *saddlepoint* di Laplace³ per l'espansione dell'integrale $P_N(x)$ rispetto a u_0 ; consideriamo i primi tre termini del suo sviluppo:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi N}} e^{f_0} \\ A_1 &= \frac{-3A_0}{N} \left[\frac{1}{3}\mu^2 + \mu\theta_3 + \frac{1}{2(5\theta_3^2 - 2\theta_4)} \right] \\ A_2 &= \frac{15A_0}{N^2} \left[\frac{1}{5}\mu^4 + \mu^3\theta_3 + \frac{1}{2\mu^2(7\theta_3^2 - 2\theta_4)} \right] + \dots \end{aligned} \quad (3.8)$$

dove:

$$\begin{aligned} \phi(t)^{(n)} &= \left. \frac{d^n \phi(t)}{dt^n} \right|_{t_0=t} = i^{-n} \left. \frac{d^n \phi(iu)}{du^n} \right|_{u_0=u} \\ \theta &= \frac{\phi(t)^{(n)}}{n!(\phi''(x))^{(n/2)}} \\ \mu &= \frac{1}{t_0(\phi''(t))^{(1/2)}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Definiamo ora nel seguente modo la funzione $p_t(x)$ appartenente alla famiglia delle densità esponenziali⁴:

$$\begin{aligned} p_t(x) &= \frac{e^{xt_0} p_v(x)}{g_v(u_0)}, \\ g_v(u_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt_0} p_v(x) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Per quanto visto prima $\phi''(t)$ è non negativa e, per definizione momento di ordine n , $\phi(t)^{(n)}$ può essere interpretata come momento n -esimo della funzione di densità $p_t(x)$.

Osserviamo infine che la funzione caratteristica di $p_t(x)$ è:

$$E[e^{ixv}] = \frac{g_v(u_0 + x)}{g_v(u_0)}. \quad (3.11)$$

³Per approfondire il metodo di Laplace consultare l'Appendice D.

⁴Per approfondire la famiglia delle densità esponenziali consultare l'Appendice A.

B_n è l' n -esimo termine della serie asintotica per $\frac{1}{2}erfc(\sqrt{-f_0})$, ovvero:

$$B_n = \frac{1}{2\sqrt{-\pi f_0} f_0^n} \left(\frac{1}{2}\right)_n e^{f_0}, \quad (3.12)$$

dove $(\alpha)_0=1$ e $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$, con $n > 0$.

3.2.2 Condizioni sufficienti per le serie affinché siano asintotiche

Volendo ottenere uno sviluppo in serie asintotiche per $P_N(y)$, esaminiamo ora alcune condizioni sufficienti affinché la serie

$$P_N(x) \sim \frac{1}{2}erfc(\sqrt{-f_0}) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n)$$

sia asintotica in $\frac{1}{N}$ quando $r = \frac{y}{N}$ è fissato.

Considero in particolare il caso in cui $x > \bar{x}$ (l'analisi del caso in cui $x < \bar{x}$ è analoga). Se $x > \bar{x}$, allora t_0 è positivo, dunque u_0 giace sull'asse negativo immaginario. Suppongo che u_0 sia stato determinato dopo aver fissato il valore di r ; sia P il percorso che collega $\text{Im}(u-u_0)$ a $u_0 \pm \infty$ passando attraverso u_0 . Suppongo poi che la funzione caratteristica $g_v(u) = e^{\phi(iu)}$ soddisfi le seguenti condizioni:

- (i) $g_v(u)$ è analitica sulla striscia $-t_0 - \epsilon \leq \text{Im}(u) \leq \epsilon$, dove ϵ è una costante positiva;
- (ii) esistono α, c_0 e c_1 costanti positive tali che $|g_v(u)| < c_0/|u|^\alpha$ quando $|u| > c_1$ sul percorso P , come illustrato dall'immagine (3.1).

Queste condizioni ci permettono di spostare con una traslazione il percorso di integrazione dell'integrale $P_N(y)$ in (3.2) al percorso P . Allora, dopo aver posto con un cambio di variabile $x = u - u_0$, utilizziamo l'espressione (3.4) per f_0 e la relazione $g_v(u) = e^{\phi(iu)}$ per riscrivere (3.2) tramite il seguente integrale:

$$P_N(x) = \frac{e^{f_0}}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \frac{e^{N[\phi(iu_0+iy) - \phi(iu_0) - iyr]}}{iu_0 + iy} dy, \quad (3.13)$$

dove

$$e^{\phi(iu_0+iy) - \phi(iu_0)} = \frac{g_v(u_0 + y)}{g_v(u_0)} \quad (3.14)$$

è la funzione caratteristica $E[e^{ixv}]$ della densità associata $p_t(x)$ come osservato in (2.12).

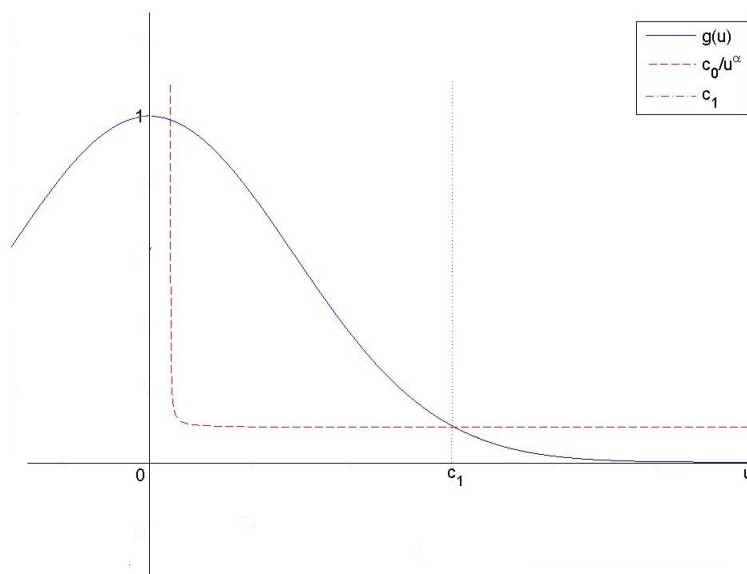


Figura 3.1: Grafico rappresentativo della condizione (ii) soddisfatta dalla funzione $g_v(u)$

Lemma 3.2.4. *Se la funzione $g_v(u) = e^{\phi(iu)}$ soddisfa la condizione (ii), allora vale:*

$$\left| \frac{g_v(u_0 + y)}{g_v(u_0)} \right| \leq 1.$$

Dimostrazione. Applichiamo la proprietà (ii) a entrambi i termini della frazione e otteniamo:

$$\begin{aligned} |g_v(u_0 + y)| &< \frac{c_0}{|u_0 + y|^\alpha} \quad e \\ |g_v(u_0)| &< \frac{c_0}{|u_0|^\alpha}, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{|g_v(u_0 + y)|}{|g_v(u_0)|} < \frac{|u_0|^\alpha}{|u_0 + y|^\alpha}.$$

Essendo $x \in \mathbb{R}_+$ ed $u_0 > 0$ per ipotesi, si può dedurre allora che

$$\frac{|u_0|^\alpha}{|u_0 + y|^\alpha} \leq 1 \quad (= 1 \iff y = 0),$$

da cui

$$\phi(iu_0 + iy) - \phi(iu_0) \leq 0.$$

□

Grazie al precedente lemma possiamo allora notare che

$$\operatorname{Re}[\phi(iu_0 + iy) - \phi(iu_0) - iyr] \leq 0 \quad (= 0 \iff y = 0).$$

Inoltre la condizione (i) mostra che, per definizione di funzione analitica, è possibile sviluppare $\phi(iu_0 + iy) - \phi(iu_0) - iyr$ in una serie di potenze, rispetto alla variabile y , convergente intorno a $y=0$; ma allora possiamo affermare che l'integrale stesso è convergente.

Per quanto osservato sopra e ricordando che il contributo di $P_N(x)$ nella regione attorno a u_0 corrisponda a $\sum A_n$, possiamo affermare che

$$P_N(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad \text{per } N \rightarrow \infty. \quad (3.15)$$

Sottraiamo infine la serie asintotica

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{-f_0}) \sim B_n, \quad (3.16)$$

come osservato inizialmente. Possiamo così completar la dimostrazione che, per $x > \bar{x}$ (con analogo procedimento per $x < \bar{x}$) e per $r = \frac{x}{N}$ fissato, possiamo sviluppare $P_N(x)$ come una serie asintotica così definita:

$$P_N(x) \sim \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{-f_0}) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n).$$

3.3 Osservazioni sulle serie asintotiche per $P_N(x)$

3.3.1 Generali valori di n

Dato un generico valore di j , A_j può essere calcolata applicando la ricorrente relazione per i coefficienti delle classiche serie asintotiche:

$$A_j = \frac{A_0}{N^j} \sum_{n=0}^{2j} (-\mu)^{2j-n} \sum_{m=0}^n d_{m,n} (-2)^{m+j} \left(\frac{1}{2}\right)_{m+j},$$

dove $d_{m,n}$ è incrementato passo dopo passo dalla relazione

$$d_{m+1,n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-m+1} k \theta_{k+2} d_{m,n-k+1}, \quad 0 \leq m \leq n,$$

partendo da

$$\begin{cases} d_{00} = 1, d_{0n} = 0, & \text{se } n > 0 \\ d_{1n} = \theta_{n+2}, & \text{se } n \geq 1 \\ d_{nn} = \frac{\theta_n^2}{n!}, & \text{se } n = m \end{cases}$$

Infine si consideri

$$\left(\frac{1}{2}\right)_{m+j} = \frac{\Gamma(m+j+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}.$$

La serie di Daniels per la densità di probabilità $p_N(x) = -(\frac{d}{dx})P_N(x)$ è:

$$p_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\phi^{(2)}}} e^{f_0} \left[1 - \frac{3}{2N}(5\theta_3^2 - 2\theta_4) + \dots \right].$$

L'equazione (3.15) può essere scritta come $p_N(y) = \sum \tilde{A}_j$, dove:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N\phi^{(2)}}} e^{f_0} \\ \tilde{A}_j &= \frac{\tilde{A}_0}{N^j} \sum_{m=1}^{2j} d_{m,2j} (-2)^{m+j} \left(\frac{1}{2}\right)_{m+j}. \end{aligned}$$

Sostituendo A_0 con \tilde{A}_0 e ponendo $\mu=0$ in (3.13) per A_j si ottiene \tilde{A}_j .

3.3.2 Caso in cui $x = \bar{x}$

Quando $x = \bar{x}$, allora $t_0=0$ e $A_n, B_n \rightarrow \infty$, ma il limite $A_n - B_n$ rimane finito. In tal caso, lo sviluppo in serie di $P_N(x)$ in (3.3) coincide con lo sviluppo di Edgeworth nel caso in cui $x = \bar{x}$, infatti:

$$P_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left[-\theta_3 + \frac{1}{N} \left(\frac{35}{2}\theta_3^3 - 15\theta_3\theta_4 + 3\theta_5 \right) + \dots \right].$$

3.3.3 Una seconda espressione per $P_N(x)$

Fissato N , è conveniente usare la formula (3.3),

$$P_N(x) \sim \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{-f_0}) + \sum_{n=0}^{\infty} (A_n - B_n).$$

Questa non dà però alcuna informazione in merito all'errore: per analizzare gli errori si può allora utilizzare la seguente espressione, che introduce il termine C_n , definito da:

$$A_n - B_n = \frac{C_n}{N^{n+1/2}} \frac{e^{N\gamma_0} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\pi},$$

dove $\gamma_0 = \gamma(u_0) = f_0/N$ e $\gamma(u) = \phi(iu) - iur$. Allora (3.3) diventa:

$$P_N(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{-N\gamma_0}) + \frac{1}{\pi} e^{N\gamma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{N^{n+1/2}} \Gamma(n + \frac{1}{2}).$$

3.4 Applicazione del metodo alla distribuzione esponenziale

Sia v una variabile aleatoria con funzione di densità $p_v(v) = \lambda e^{-\lambda v}$ definita per valori positivi di v . Suppongo in questo caso per semplicità $\lambda=1$. Allora la funzione di densità $p(v) = e^{-v}$ ha funzione caratteristica

$$g_v(u) = \int_0^{\infty} e^{iuv-v} dv = \frac{1}{1-iu}$$

e

$$\phi(iu) = \ln(g_v(u)) = -\ln(1-iu).$$

Dall'equazione *saddle point* (2.6) si ottiene $u_0 = -it_0$, dove $t_0 = 1 + \frac{1}{r}$ con $r = \frac{x}{N}$. Le quantità necessarie per calcolare A_n e B_n sono:

$$\begin{aligned} f_0 &= N(\ln(r) - r + 1), \\ \phi^{(n)} &= (n-1)!r^n, \\ \theta_n &= \frac{1}{n}, \\ \mu &= \frac{1}{r-1}, \end{aligned}$$

che, utilizzando le espressioni in (2.8) e (2.12) rispettivamente, danno:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi N}} e^{f_0}, \\ A_1 &= \frac{A_0}{N} \left(-\mu^2 - \mu - \frac{1}{12} \right), \\ A_2 &= \frac{A_0}{N^2} \left(3\mu^4 + 5\mu^3 + \frac{25}{12}\mu^2 + \frac{1}{12}\mu + \frac{1}{12} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{2\sqrt{-\pi f_0}} e^{f_0}, \\ B_1 &= \frac{B_0}{2f_0}, \\ B_2 &= \frac{3B_1}{2f_0}. \end{aligned}$$

Quando $x = \bar{x}=N$, $\mu = \infty$; allora è necessario usare la serie di Edgeworth

$$P_N(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{540N} + \dots \right].$$

L'esatta espressione per $P_N(x)$ è:

$$P_N(x) = e^{-x} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x^n}{n!}.$$

Capitolo 4

Formula di Lugannani-Rice

4.1 Sviluppo della formula di Lugannani-Rice

Come visto nel capitolo precedente, la dimostrazione dell'approssimazione *saddle point* risulta essere elegante ed accurata a livello teorico, ma può risultare scomoda la sua implementazione a livello pratico in quanto è comunque necessario effettuare lo sviluppo in serie asintotiche di $P_N(x)$. Per questo nel 1980 Lugannani e Rice derivarono una seconda formula, più semplice rispetto all'altra, per approssimare ugualmente le aree di coda di una funzione di densità di probabilità di una variabile aleatoria X . Dopo aver immaginato X come somma di N variabili aleatorie v_1, \dots, v_N indipendenti e identicamente distribuite¹, la formula risulta essere:

$$P_N(x) = P(X > x) = \mathcal{N}(z_l) + \left[\frac{1}{z_w} - \frac{1}{z_l} \right] n(z_l) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4.1)$$

dove:

- (i) \mathcal{N}, n sono rispettivamente la funzione di ripartizione e di densità di una variabile aleatoria gaussiana,
- (ii) $z_l = \sqrt{2(\hat{t}\phi'(\hat{t}) - \phi(\hat{t}))}$, dove $\phi(t) = \log(E[e^{Xt}]) = \log[m_X(t)]$, come definita nel Capitolo 2 per la formula di Daniels,
- (iii) $z_w = \hat{t}\sqrt{\phi''(\hat{t})}$.

Osservazione 7. La funzione di *saddle point* in questa formula è svolta dal punto \hat{t} , che è appunto soluzione dell'equazione

$$\phi'(\hat{t}) = x,$$

analoga all'equazione (3.5) vista nel capitolo precedente.

¹Le variabili aleatorie v_1, \dots, v_N hanno le stesse caratteristiche descritte nel Capitolo 2 dedicato alla formula di Daniels.

Procediamo ora con l'analisi di come Lugannani e Rice giunsero a tale formula.

Sia X una variabile aleatoria, definita come sopra, con funzione di densità $p_X(x)$; indico con $\phi(t)$ il logaritmo della funzione generatrice dei momenti di tale variabile aleatoria.

- (i) A partire dalla formula di Daniels vista in (2.3), esprimiamo la probabilità che X superi una certa quantità x tramite la seguente relazione:

$$\begin{aligned} P(X > x) &= \int_x^\infty p_X(x) dX = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{e^{\phi(T)-XT}}{\sqrt{\phi''(T)}} dX + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{e^{\phi(T)-XT}}{\sqrt{\phi''(T)}} \left[1 + \left(\frac{\phi^{(4)}(T)}{8\phi''(T)^2} - \frac{5\phi'''(T)^2}{24\phi''(T)^3} \right) \right] dX + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Chiamiamo il secondo integrale della somma E e procediamo con la valutazione del primo integrale.

- (ii) Con un cambio di variabili poniamo anzitutto $X = \phi'(T)$, da cui $dX = \phi''(T) dT$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{e^{\phi(T)-XT}}{\sqrt{\phi''(T)}} dX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{t}}^\infty \sqrt{\phi''(T)} e^{\phi(T)-T\phi'(T)} dT.$$

Poniamo poi $\frac{Z^2}{2} = T\phi'(T) - \phi(T)$, ricordando la sostituzione finale effettuata nello svolgimento delle serie di Daniels, da cui $\frac{dZ}{dT} = \frac{T\phi''(T)}{Z}$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{t}}^\infty \sqrt{\phi''(T)} e^{\phi(T)-T\phi'(T)} dT = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{t}}^\infty T\phi''(t) \left[\frac{1}{Z} + \frac{1}{T\sqrt{\phi''(T)}} - \frac{1}{Z} \right] e^{(\phi(T)-T\phi'(T))} dT = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_l}^\infty e^{-Z^2/2} dZ + \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{t}}^\infty \left[\frac{1}{T\sqrt{\phi''(T)}} - \frac{1}{Z} \right] e^{\phi(T)-T\phi'(T)} T\phi''(T) dT \end{aligned}$$

Osserviamo allora che il primo addendo coincide con la probabilità di coda normale, che chiamiamo $\Psi(z_l)$, e procediamo con l'integrazione per parti del secondo integrale rispetto alle variabili $V = -e^{\phi(T)-T\phi'(T)}$, da cui $dV = T\phi''(T)e^{\phi(T)-T\phi'(T)}$, e $U = \frac{1}{T\sqrt{\phi''(T)}} - \frac{1}{Z}$, ottenendo:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{\phi''(\hat{t})}} - \frac{1}{z_l} \right] e^{-z_l^2/2} \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{t}}^\infty e^{\phi(T)-T\phi'(T)} dU.$$

Ponendo infine $z_w = \hat{t}\sqrt{\phi''(\hat{t})}$ si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{t}}^{\infty} \sqrt{\phi''(T)} e^{\phi(T)-T\phi'(T)} dT = \\ & = \left[\frac{1}{z_w} - \frac{1}{z_l} \right] \phi(z_l) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{t}}^{\infty} e^{\phi(T)-T\phi'(T)} dU. \end{aligned} \quad (4.3)$$

(iii) Per avere infine un'idea in merito all'errore integrale approssimiamo U e cerchiamo di esprimere $\frac{1}{Z}$ in termini di T . Dopo avere sviluppato $\phi(T)$ in serie di Taylor e dopo aver ricordato il cambio di variabile $Z^2 = 2(T\phi'(T) - \phi(T))$ effettuato sopra, possiamo facilmente calcolare $\frac{1}{Z}$ con la seguente espressione:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{T\sqrt{\phi''(T)}} \left[1 - \frac{T}{3} \frac{\phi'''(T)}{\phi''(T)} + \frac{T^2}{12} \frac{\phi^{(4)}(T)}{\phi''(T)} + \dots \right],$$

a cui applichiamo il teorema del binomio, ottenendo:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{T\sqrt{\phi''(T)}} \left[1 + \frac{T}{6} \frac{\phi'''(T)}{\phi''(T)} - \frac{T^2}{24} \frac{\phi^{(4)}(T)}{\phi''(T)} + \frac{T^2}{24} \frac{\phi'''(T)^2}{\phi''(T)^2} + \dots \right].$$

Ricordiamo ora che $U = \frac{1}{T\sqrt{\phi''(T)}} - \frac{1}{Z}$ e, sfruttando l'espressione per $\frac{1}{Z}$ appena trovata, calcoliamo $\frac{dU}{dT}$:

$$\frac{dU}{dT} = \left[-\frac{1}{8} \frac{\phi^{(4)}(T)}{\phi''(T)^{3/2}} + \frac{5}{24} \frac{\phi'''(T)^2}{\phi''(T)^{5/2}} + \dots \right].$$

Possiamo allora approssimare l'integrale in (4.3) con:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{t}}^{\infty} e^{\phi(T)-T\phi'(T)} dU = \\ & = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\hat{t}}^{\infty} \sqrt{\phi''(T)} e^{\phi(T)-T\phi'(T)} \left[\frac{1}{8} \frac{\phi^{(4)}(T)}{\phi''(T)^2} - \frac{5}{24} \frac{\phi'''(T)^2}{\phi''(T)^3} + \dots \right] dT, \end{aligned} \quad (4.4)$$

espressione che coincide con E.

In conclusione, combinando i risultati ottenuti:

$$P(X > x) = \mathcal{N}(z_l) + \left[\frac{1}{z_w} - \frac{1}{z_l} \right] n(z_l) + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (4.5)$$

che prende il nome di *formula di Lugannani-Rice*.

4.2 Applicazioni della formula

4.2.1 Applicazione alla distribuzione gaussiana

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Iniziamo calcolando la funzione $\phi(t)$, logaritmo della generatrice dei momenti, che corrisponde a:

$$\phi(t) = \log(E[e^{xt}]) = \log\left(e^{t^2/2}\right) = e^{t^2/2},$$

ed il *saddle point* \hat{t} :

$$\phi'(\hat{t}) = x \implies \hat{t} = x.$$

Essendo poi $\phi'(\hat{t})=x$ e $\phi''(\hat{t})=1$, procediamo determinando i parametri definiti sopra, ovvero:

$$z_l = \sqrt{2(\hat{t}\phi'(\hat{t}) - \phi(\hat{t}))} = \sqrt{2(\hat{t}^2 - \frac{\hat{t}^2}{2})} = x$$

$$z_w = \hat{t}\sqrt{\phi''(\hat{t})} = x.$$

Sostituiti poi questi nella formula di lugannani-Rice otteniamo:

$$P(X > x) = \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(x) + \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right]n(x) = \mathcal{N}(x);$$

l'approssimazione dunque è esatta.

4.2.2 Applicazione alla distribuzione esponenziale

Sia X una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale

$$p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

definita per $x > 0$ e $\lambda > 0$.

Iniziamo calcolando la funzione $\phi(t)$, logaritmo della generatrice dei momenti, che corrisponde a:

$$\phi(t) = \log(E[e^{xt}]) = \log\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right),$$

ed il *saddle point* \hat{t} :

$$\phi'(\hat{t}) = x \implies \frac{1}{\lambda - \hat{t}} = x \implies \hat{t} = \lambda - \frac{1}{x}.$$

Essendo poi

$$\phi''(\hat{t}) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - \frac{1}{x}} \right)^2 = x^2,$$

procediamo determinando i parametri definiti sopra, ovvero:

$$\begin{aligned} z_l &= \sqrt{2(\hat{t}\phi'(\hat{t}) - \phi(\hat{t}))} = \sqrt{2 \left[\left(\lambda - \frac{1}{x} \right) x - \log \left(\frac{\lambda}{1/x} \right) \right]} = \\ &= \sqrt{2[\lambda x - 1 - \log(\lambda x)]} \\ z_w &= \hat{t} \sqrt{\phi''(\hat{t})} = \left(\lambda - \frac{1}{x} \right) \sqrt{x^2} = \lambda x - 1. \end{aligned}$$

Sostituiti poi questi nella formula di Lugannani-Rice otteniamo:

$$\begin{aligned} P(X > x) &= 1 - e^{-\lambda x} = \\ &= \mathcal{N}(x) + \left[\frac{1}{\sqrt{2[\lambda x - 1 - \log(\lambda x)]}} - \frac{1}{\lambda x - 1} \right] n(x). \end{aligned}$$

Per verificare che l'approssimazione data dalla formula di Lugannani-Rice sia buona, consideriamo il seguente esempio numerico.

Esempio 3. Supponiamo che la funzione esponenziale abbia parametro $\lambda=2$. Calcoliamo il valore di $P(X > x)$ utilizzando rispettivamente la funzione di ripartizione e la formula:

- (i) integrando la funzione densità si ottiene che $P(X > x)=0.0000453999$;
- (ii) sostituendo i valori nella formula si ottiene che $P(X > x)=0.0000463419$.

Possiamo allora osservare che otteniamo un errore assoluto pari a

$$9.41929 \cdot 10^{-7}.$$

Appendice A

Famiglia esponenziale

La famiglia esponenziale è un'ampia famiglia di funzioni di densità di probabilità tali che, fissato $t \in I$, I intervallo di \mathbb{R} , hanno la generica espressione:

$$p_t(x) = h(x)e^{T(x)t - \phi(t)},$$

dove:

- (i) t è un parametro reale fissato,
- (ii) $h(x)$ è una funzione misurabile secondo Lebesgue,
- (iii) $T(x)$ è una funzione continua,
- (iv) $\phi(t)$ è una funzione che svolge il ruolo di normalizzatrice, ovvero è definita in modo tale che $p_t(x)$ sia effettivamente una funzione di densità di probabilità, posta infatti

$$\phi(t) = \log\left(\int h(x)e^{T(x)t} dx\right),$$

si ha che:

$$\int p_t(x) = e^{-\phi(t)} \log\left(\int h(x)e^{T(x)t} dx\right) = 1.$$

Osservazione 8. Sia I un intervallo di \mathbb{R} .

Supponiamo di conoscere la funzione generatrice dei momenti $m_X(t)$ della variabile aleatoria X , definita da $m_X(t) = E[e^{Xt}]$ e tale che $|m_X(t)| < \infty \quad \forall t \in I$.

Definiamo poi il logaritmo della funzione generatrice tramite la funzione $\phi(t) = \log(E[e^{Xt}]) = \log[m_X(t)]$.

Fissato $t \in I$, è sempre possibile definire la funzione $p_t(x)$ della variabile aleatoria X , in modo tale che appartenga alla famiglia delle funzioni di densità esponenziali; sotto tali ipotesi, questa assume in generale la seguente forma:

$$p_t(x) = p_X(x)e^{T(x)t - \phi(t)}.$$

Enunciamo e dimostriamo il seguente lemma.

Lemma A.0.1. *Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità appartenente alla famiglia delle funzioni esponenziali. Sia dunque $p_t(x)$ la sua funzione di densità, definita come sopra. Valgono allora le seguenti relazioni:*

$$(i) \quad \frac{d}{dt}\phi(t) = E_t[T(x)],$$

$$(ii) \quad \frac{d^2}{dt^2}\phi(t) = \text{var}_t(T(x)).$$

Dimostrazione. Calcoliamo esplicitamente rispettivamente la derivata prima e la derivata seconda della funzione $\phi(t)$.

Poniamo $Q(t) = \int e^{T(x)t} p_X(x) dX$.

$$(i) \quad \begin{aligned} \phi'(t) &= \frac{d}{dt} \log \left(\int e^{T(x)t} p_X(x) dX \right) = \\ &= \frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{\int T(x) e^{T(x)t} p_X(x) dX}{\int e^{T(x)t} p_X(x) dX} = \\ &= \int T(x) e^{T(x)t - \phi(t)} p_X(x) dX = \\ &= E_t[T(X)]. \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} \phi''(t) &= \frac{d^2}{dt^2} \log \left(\int e^{T(x)t} p_X(x) dX \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{Q'(t)}{Q(t)} = \frac{Q''(t)}{Q(t)} - \left(\frac{Q'(t)}{Q(t)} \right)^2 = \\ &= \frac{\int T^2(x) e^{T(x)t} p_X(x) dX}{\int e^{T(x)t} p_X(x) dX} - E_t[T(X)]^2 = \\ &= \frac{\int T^2(x) e^{T(x)t - \phi(t)} p_X(x) dX}{\int e^{T(x)t - \phi(t)} p_X(x) dX} - E_t[T(X)]^2 = \\ &= E_t[T(X)^2] - E_t[T(X)]^2 = \\ &= \text{var}_t(X). \end{aligned}$$

□

Appendice B

Trasformata di Fourier

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Suppongo che la funzione appartenga allo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\Omega)$; per definizione di spazio di Schwartz f rispetta le seguenti proprietà:

1. $f \in C^\infty(\Omega)$,
2. $x^\alpha \partial_x^\beta f(x) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty \quad \forall \alpha, \beta$ multiindici¹.

Chiamo *trasformata di Fourier della funzione f* , e la identifico con \hat{f} , la seguente funzione:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tra le proprietà che caratterizzano la trasformata di Fourier di una funzione, ricordiamo la seguente:

Siano date due funzioni $f, g \in \mathcal{S}(\Omega)$ e siano \hat{f} ed \hat{g} rispettivamente le trasformate di f e g si ha allora:

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx = \int_{\Omega} \hat{f}(x)\hat{g}(x)dx.$$

¹Si definisce *multiindice* un vettore $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$, tale che:

(a) $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

(b) dato $x \in \mathbb{R}^n$ vale :

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$$

Appendice C

Serie asintotiche

Sia $(\varphi(x))_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue nel dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}$, tali che $\forall n \in \mathbb{N}$ si abbia:

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad x \rightarrow x_0,$$

dove x_0 è un punto del dominio. Sia $f(x)$ una funzione continua in tale punto x_0 . Allora è possibile determinare dei coefficienti a_n tali che $\forall N \in \mathbb{N}$, si possa scrivere:

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_{N+1}(x)) \quad x \rightarrow x_0.$$

Chiamiamo

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \rightarrow x_0$$

sviluppo asintotico di $f(x)$ in x_0 rispetto alle funzioni $\varphi_n(x)$. Possiamo ora notare che i coefficienti a_n che verificano l'uguaglianza descritta sopra sono univocamente determinati dalla seguente relazione:

$$a_{N+1} = \frac{f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \varphi_n(x)}{\varphi_{N+1}(x)}, \quad x \rightarrow x_0.$$

In questo modo le serie asintotiche risultano essere una generalizzazione delle Serie di Taylor. Tra i metodi per costruire tali sviluppi vi sono alcune trasformate integrali, infatti spesso si riesce ad individuare uno sviluppo asintotico effettuando ripetute integrazioni per parti.

Osservazione 9. Tali serie asintotiche sono state utilizzate nel Capitolo 3. Per come sono state definite, la serie A_n può essere calcolata solo in base alla funzione di densità della variabile aleatoria che è stata considerata,

ma possiamo dare l'espressione della serie B_n , che approssima l'integrale $erfc(x)$:

$$\begin{aligned} erfc(x) &= 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \sim \\ &\sim \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2x^2)^n} \right] = \\ &= \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{n!(2x)^{2n}} \right]. \end{aligned}$$

Appendice D

Metodo di Laplace in più dimensioni

Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n . Siano date le funzioni continue $S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e sia fissato il parametro $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Suppongo $S(x)$ abbia un unico massimo nel suo punto x_0 interno ad Ω . Il metodo di Laplace consiste nello studiare, per $\lambda \rightarrow \infty$ la serie asintotica dell'integrale di Laplace:

$$F(\lambda) = \int_{\Omega} f(x) e^{\lambda S(x)} dx.$$

Consideriamo allora l'espansione di Taylor della funzione $S(x)$ attorno al punto x_0 :

$$S(x) = S(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \partial_x^2 S(x_0)(x - x_0) + o((x - x_0)^3).$$

Se $\lambda \rightarrow \infty$ il contributo principale dell'integrale viene dall'intorno di x_0 in quanto è qui che la funzione $S(x)$ assume il suo valore di massimo. Sostituuiamo allora $f(x)$ con $f(x_0)$ e otteniamo un integrale gaussiano che possiamo integrare rispetto alla variabile x costruendo la serie asintotica per $\lambda \rightarrow \infty$:

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(x_0)} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \left[-\det(\partial_x^2 S(x_0)) \right]^{-\frac{1}{2}} f(x_0)$$

Più in generale calcolando l'espansione di Taylor delle funzioni $S(x)$ ed $f(x)$ otteniamo:

$$F(\lambda) \sim e^{\lambda S(x_0)} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{n/2} \left[-\det(\partial_x^2 S(x_0)) \right]^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^{-k},$$

dove i coefficienti a_k sono espressi in termini delle derivate di $S(x)$ ed $f(x)$.

Bibliografia

- [1] PASCUCCI A. *Calcolo stocastico per la finanza*. Dipartimento di Matematica, Bologna.
- [2] LUGANNANI R., RICE S. (1980) *Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables*. Advances in applied probability, 12, 475-490.
- [3] TERRELL G.R. *A stabilized Lugannani-Rice Formula*. Department of statistics, VPI & SU, Virginia.
- [4] BUTLER R.W. (1980) *Saddlepoint approximation with applications*. Cambridge series in statistical and probabilistic mathematics.
- [5] JENS L. JENSEN *Saddlepoint approximation*. Oxford statistical science series, 16.
- [6] JOHN E. KOLASSA *Series approximation methods in statistics*. Department of statistics, Rutgers university.
- [7] JIXIN LIE *Saddlepoint approximation*. Department of statistics, Purdue university.
- [8] ANIRBAN DASGUPTA *Asymptotic theory of statistics and probability*. Department of statistics, Purdue university.
- [9] JENS L. JENSEN (1993) *Saddlepoint approximations, Edgeworth expansions and normal approximations* Department of Theoretical Statistics, Institute of Mathematics, University of Aarhus.
- [10] D.F. ANDREWS, A. FEUERVERGER *General saddlepoint approximations, Methods for smooth functions*. University of Toronto.
- [11] YING-MING JOU (1997) *Application of the saddlepoint approximation to estimating the variance of a function*. Cornell University, May.