

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

**OMOLOGIA D'INTERSEZIONE
E SUE APPLICAZIONI
ALLA GEOMETRIA ALGEBRICA**

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Ivan Lorusso

I Sessione
Anno Accademico 2012/2013

Introduzione

Uno dei risultati più importanti sull'omologia e coomologia di uno spazio topologico X è il teorema di dualità di Poincaré con le sue generalizzazioni e varianti quali il teorema di dualità di Lefschetz. Questi teoremi valgono sotto l'ipotesi che lo spazio topologico considerato sia una *varietà* topologica.

Come esposto in [9], il significato della dualità di Poincaré può sintetizzarsi nei seguenti enunciati (per semplicità assumiamo X compatta, evitando così di specificare se si tratta di cicli a supporto compatto o chiuso, e orientabile, in modo che la dualità di Poincaré si enunci in modo semplice senza ricorrere al sistema locale dell'orientazione)

1. Presi un i -ciclo V e un j -ciclo W in X , questi possono essere deformati nella loro classe di omologia in modo che $V \cap W$ sia un ciclo di dimensione $i + j - n$ (cioè V e W sono in posizione generale).
2. la classe di omologia di questo ciclo non dipende dalla deformazione scelta né in generale dai cicli geometrici scelti per rappresentare le classi di omologia.
3. Prendendo $i + j = n$ si ha così una applicazione $H_i(X) \times H_{n-i}(X) \rightarrow H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, che, trascurando la torsione, è una forma bilineare non degenera.

Come già osservato dallo stesso Poincaré i teoremi di dualità cessano di valere quando si considerino spazi topologici con singolarità, anche assumendo ragionevoli ipotesi di regolarità dello spazio, (ad esempio assumendo che

sia dotato di una stratificazione con buone proprietà). Il fallimento della teoria della dualità è legato alla possibilità che i cicli in questione intersechino il luogo singolare della varietà in modo tale da rendere impossibile la loro deformazione a una situazione “trasversa”.

Nei primi anni '80 M. Goresky e R. MacPherson hanno messo a punto una teoria che ovvia a questi problemi definendo un nuovo invariante topologico, l'omologia di intersezione, definita per pseudovarietà stratificate, una classe di spazi topologici che include moltissimi esempi geometricamente interessanti, quali le varietà algebriche o analitiche, anche singolari. In realtà c'è un intero arsenale di omologie di intersezione che dipendono dalla scelta di una funzione, la *perversità*. Specificare una perversità permette di definire una omologia di intersezione: l'idea di base è che si considerano solo le catene la cui intersezione con gli strati del luogo singolare ha dimensione controllata dalla perversità. I dettagli tecnici sono piuttosto complessi, ma si dimostra che l'omologia di intersezione ha una buona teoria della dualità, che estende la dualità di Poincaré, in quanto l'omologia di intersezione di una varietà topologica coincide con l'omologia tradizionale.

L'orizzonte di questi invarianti si è ampliato moltissimo dopo che si è dimostrato che l'omologia di intersezione di perversità intermedia è il sostituto ottimale dell'omologia per varietà algebriche singolari. In particolare valgono per essa i teoremi fondamentali della topologia delle varietà algebriche quali il teorema di Lefschetz sulle sezioni iperplane e il teorema di Lefschetz difficile. Insieme alla dimostrazione che il complesso di intersezione è puro (teorema di purezza, di O. Gabber) questo ha aperto le porte a numerosissime applicazioni alla geometria algebrica e alla teoria delle rappresentazioni (citiamo la dimostrazione delle congetture di Kazhdan-Lusztig tra le molte applicazioni). Per una panoramica delle applicazioni della coomologia di intersezione, e per un resoconto storico più dettagliato si veda ad esempio il lavoro di rassegna [13].

Questa tesi descrive le proprietà fondamentali dell'omologia di intersezione, in particolare l'indipendenza dalla scelta della stratificazione e il teorema di

dualità. Per ragioni di spazio ci si limita ad accennare soltanto alle proprietà della coomologia di intersezione di perversità intermedia delle varietà algebriche, la cui trattazione richiederebbe in ogni caso l'uso di strumenti tecnici molto avanzati, come la coomologia étale o la teoria di Hodge. Sarà inoltre inclusa la trattazione di vari prerequisiti di topologia algebrica e teoria dei fasci, nonché di teoria delle stratificazioni.

Indice

Introduzione	i
1 Richiami di topologia algebrica	1
1.1 Omologia simpliciale	1
1.2 Omologia singolare	3
1.3 Alcuni teoremi importanti	4
1.4 Coomologia singolare e dualità di Poincaré	6
1.5 Coomologia di Čech	7
1.6 Coomologia di fasci	9
1.7 Successioni spettrali e ipercoomologia	12
1.8 Bibliografia	16
2 La definizione di omologia d'intersezione	17
2.1 Pseudovarietà topologiche	17
2.2 Varietà algebriche quasiproiettive	18
2.3 Catene e perversità	20
2.4 Alcuni esempi	23
2.4.1 Omologia d'intersezione di $\mathbb{R} \times Y$	25
2.4.2 Omologia d'intersezione di un cono aperto	26
2.5 Omologia d'intersezione di pseudovarietà normalizzate	28
2.6 Omologia d'intersezione relativa	30
2.7 Alcuni teoremi e considerazioni importanti	30
2.8 Omologia d'intersezione singolare	32

2.9	Funtorialità dell'omologia d'intersezione	33
2.10	Omologia d'intersezione a coefficienti locali	35
2.11	Bibliografia	37
3	Dualità di Poincaré generalizzata	39
3.1	Nozioni preliminari	39
3.2	Indipendenza dell'omologia dalla stratificazione	41
3.3	Dualità di Poincaré generalizzata	43
3.4	Alcune considerazioni sulla dualità	46
4	Omologia d'intersezione e fasci	49
4.1	Il complesso di fasci d'intersezione	49
4.2	Coomologia dei complessi di fasci	50
4.3	Verso l'invarianza topologica dell'omologia d'intersezione	52
4.4	La costruzione di Deligne del complesso di fasci d'intersezione	54
4.5	La filtrazione canonica	55
4.6	Bibliografia	57
5	Omologia e varietà algebriche	59
5.1	Kähler package	59
5.2	Enunciato delle congetture di Weil	62
5.3	Topologia étale e coomologia ℓ -adica	66
5.4	Proprietà fondamentali della coomologia ℓ -adica	69
5.5	Le congetture di Weil per varietà singolari	72
5.6	Bibliografia	74
A	Stratificazioni di Whitney	75

Capitolo 1

Richiami di topologia algebrica

1.1 Omologia simpliciale

Definizione 1.1. Siano v_1, \dots, v_{n+1} punti di \mathbb{R}^m . Si chiama *n-simplesso generato da v_1, \dots, v_{n+1}* l'involuppo convesso σ^n di v_1, \dots, v_{n+1} ; i punti v_1, \dots, v_{n+1} sono detti *vertici di σ^n* .

Dato un insieme di $q + 1$ vertici di σ^n , il q -simplesso generato da tali vertici si dice *faccia di σ^n* .

Definizione 1.2. Un *complesso simpliciale* N è un insieme di simplessi $\subseteq \mathbb{R}^m$ tale che:

- i) le facce dei simplessi di N stanno in N
- ii) l'intersezione di due simplessi di N è vuota oppure è una faccia comune dei due simplessi
- iii) ogni simplesso di N è faccia di al più un insieme finito di simplessi di N

- iv) un sottoinsieme di N è chiuso in \mathbb{R}^m se e solo se la sua intersezione con un qualunque semplice di N è chiusa

Si chiama *dimensione di N* la dimensione massima dei suoi semplici.

Definizione 1.3. Si chiama *i -scheletro di N* l'insieme N_i dei suoi semplici di dimensione minore o uguale a i .

Si chiama *supporto di N* lo spazio topologico $|N|$ il cui insieme di punti è dato dall'unione dei punti di N e la cui topologia è quella indotta da \mathbb{R}^m .

Definizione 1.4. Sia K un complesso simpliciale, sia S un suo sottocomplesso. Si definiscono:

- i) la *chiusura di S in K* come il più piccolo sottocomplesso $\text{Cl}(S, K)$ di K che contiene S
- ii) la *stella di S in K* come l'insieme $\text{St}(S, K)$ di tutti i semplici di K che hanno almeno una faccia in S
- iii) il *link di S in K* come l'insieme $\text{Lk}(S, K) = \text{ClSt}(S, K) \setminus \text{StCl}(S, K)$

Definizione 1.5. Una *triangolazione di uno spazio topologico Y* è una coppia (N, T) , dove N è un complesso simpliciale e $T : |N| \rightarrow Y$ è un omeomorfismo.

Definizione 1.6. Sia Y una varietà topologica con una triangolazione $T : |N| \rightarrow X$, sia R un gruppo abeliano. Una *i -catena (simpliciale) a coefficienti in R* è una combinazione lineare a coefficienti in R data da $\xi = \sum_{\sigma \in N_i} \xi_\sigma \sigma$ tale che al più una quantità finita di ξ_σ siano diversi da 0. Si indica con $C_i(Y; R)$ il gruppo abeliano delle i -catene a coefficienti in R .

Una *i -catena (simpliciale) localmente finita* è una combinazione lineare $\xi = \sum_{\sigma \in N_i} \xi_\sigma \sigma$ tale che al più una quantità numerabile di ξ_σ siano diversi da 0. Si indica con $C_i((Y; R))$ il gruppo abeliano delle i -catene localmente finite.

Definizione 1.7. Sia fissata un'orientazione su ogni sempliceo di N . Si definisce l'omomorfismo di bordo

$$\partial : C_i(Y; R) \longrightarrow C_{i-1}(Y; R)$$

come la mappa

$$\partial(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) = \sum_{r=0}^k (-1)^r \langle v_0, \dots, \widehat{v}_r, \dots, v_k \rangle,$$

dove $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$ indica il sempliceo generato da v_1, \dots, v_k e $\langle v_0, \dots, \widehat{v}_r, \dots, v_k \rangle$ ha l'orientazione indotta da $\langle v_1, \dots, v_k \rangle$.

Si chiama *i-esimo gruppo di omologia simpliciale a coefficienti in R di Y* il quoziente

$$H_i(Y; R) = \frac{\ker \partial : C_i(Y; R) \longrightarrow C_{i-1}(Y; R)}{\operatorname{im} \partial : C_{i+1}(Y; R) \longrightarrow C_i(Y; R)}$$

(analogamente, ma a partire dalle catene localmente finite, si definisce l'omologia a supporto chiuso $H_i^C(Y; R)$).

Osservazione 1. Si può dimostrare che la definizione dell'omologia simpliciale non dipende dalla triangolazione scelta.

1.2 Omologia singolare

Definizione 1.8. In \mathbb{R}^i si considerino i punti $v_0 = 0$ e $v_j = e_j$ per ogni j . Si chiama *i-simplesso standard* il sempliceo $\Delta_i = \langle v_0, \dots, v_i \rangle$.

Si definisce inoltre per ogni r compreso tra 0 e $i + 1$ una mappa

$$F_r^i : \Delta_i \longrightarrow \Delta_{i+1}$$

data estendendo per linearità la

$$F_r^i(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{se } 0 \leq j < r \\ v_{j+1} & \text{se } r \leq j \leq i \end{cases}$$

Definizione 1.9. Sia Y uno spazio topologico. Si chiama k -*simplexso singolare* una mappa continua $\sigma : \Delta_i \rightarrow Y$; il gruppo abeliano libero generato dagli i -simplexsi singolari di Y si indica con $S_i(Y)$.

Si definisce inoltre l'omomorfismo di bordo

$$\partial : S_i(Y) \rightarrow S_{i-1}(Y)$$

come la mappa che manda σ in $\partial\sigma = \sum_{r=0}^{i-1} (-1)^r \sigma \circ F_r^{i-1}$. L' i -esimo gruppo di omologia singolare di Y è definito come il quoziente

$$H_i(Y) = \frac{\ker \partial : S_i(Y) \rightarrow S_{i-1}(Y)}{\operatorname{im} \partial : S_{i+1}(Y) \rightarrow S_i(Y)}.$$

Definizione 1.10. Si chiama *varietà topologica PL di dimensione n* un complesso simpliciale K tale che il link di ogni suo vertice è omeomorfo a S^{n-1} .

Proposizione 1.2.1. *Sia Y una varietà topologica PL. Allora l'omologia simpliciale e l'omologia singolare su Y sono canonicamente isomorfe.*

Definizione 1.11. Sia Y uno spazio topologico, sia A un suo sottospazio. Si pone $S_i(Y, A) = \frac{S_i(Y)}{S_i(A)}$; allora l'omomorfismo di bordo su $S_i(Y)$ induce un omomorfismo di bordo ∂ su $S_i(Y, A)$,

Si definisce l'*omologia relativa di (Y, A)* come il quoziente

$$H_i(Y, A) = \frac{\ker \partial : S_i(Y, A) \rightarrow S_{i-1}(Y, A)}{\operatorname{im} \partial : S_{i+1}(Y, A) \rightarrow S_i(Y, A)}.$$

Proposizione 1.2.2. *Esiste una successione esatta lunga*

$$\dots \rightarrow H_i(A) \rightarrow H_i(Y) \rightarrow H_i(Y, A) \rightarrow H_{i-1}(A) \rightarrow \dots$$

1.3 Alcuni teoremi importanti

Teorema 1.3.1. (*invarianza per omotopia*) *Siano Y e Y' due spazi topologici omotopicamente equivalenti. Allora $H_*(Y) \cong H_*(Y')$.*

Teorema 1.3.2. (*successione di Mayer-Vietoris*) Sia Y una varietà topologica, siano U e V due sottoinsiemi di Y non banali tali che $Y = U \cup V = \text{int}_{U \cup V} U \cup \text{int}_{U \cup V} V$. Allora esiste una successione esatta lunga

$$\dots \longrightarrow H_i(U \cap V) \longrightarrow H_i(U) \oplus H_i(V) \longrightarrow H_i(Y) \longrightarrow H_{i-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

Teorema 1.3.3. (*teorema di escissione*) Sia Y uno spazio topologico, sia $U \subseteq A \subseteq Y$, sia $\bar{U} \subseteq \text{int}A$. Allora la mappa di escissione $(Y \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (Y, A)$ induce un isomorfismo

$$H_*(Y \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\cong} H_*(Y, A).$$

Definizione 1.12. Sia

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\alpha} G \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

una presentazione libera dell' R -modulo H , sia L un altro R -modulo. Si definisce il *prodotto di torsione di H e L* come l' R -modulo $\text{Tor}(H, L) = \ker(\alpha \otimes 1_L)$.

Teorema 1.3.4. (*formula di Künneth*) Siano Y e Y' due spazi topologici, sia R un PID. Allora esiste una successione esatta corta

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k} H_i(Y; R) \otimes H_j(Y'; R) \longrightarrow H_k(Y \times Y'; R) \longrightarrow \\ \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k-1} \text{Tor}(H_i(Y; R), H_j(Y'; R)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Teorema 1.3.5. (*teorema dei coefficienti universali*) Sia R un gruppo abeliano, sia Y uno spazio topologico. Esiste una successione esatta corta spezzante

$$0 \longrightarrow H_*(Y; \mathbb{Z}) \otimes R \longrightarrow H_*(Y; R) \longrightarrow \text{Tor}(H_{*-1}(Y; \mathbb{Z}), R) \longrightarrow 0.$$

1.4 Coomologia singolare e dualità di Poincaré

Definizione 1.13. Si definisce

$$S^i(Y; R) = \text{Hom}(S_i(Y; R), R), \quad \delta = \text{Hom}(\partial, 1_R).$$

L' i -esimo gruppo di coomologia singolare di Y a coefficienti in R è il quoziente

$$H^i(Y; R) = \frac{\ker \delta : S^p(Y; R) \longrightarrow S^{p+1}(Y; R)}{\text{im} \delta : S^{p-1}(Y; R) \longrightarrow S^p(Y; R)}$$

(in modo analogo si definisce la coomologia simpliciale).

Definizione 1.14. La mappa bilineare

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : S_k(Y; R) \times \text{Hom}(S_k(Y; R), R) \longrightarrow R$$

definita da $\langle z, c \rangle = c(z)$ induce una mappa bilineare

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_k(Y; R) \times H^k(Y; R) \longrightarrow R,$$

detta *prodotto di Kronecker*.

Osservazione 2. Applicando il funtore $\text{Hom}(-, R)$ a $S^i(Y, A; R)$ si può definire la *coomologia singolare relativa di (Y, A) a coefficienti in R* come si è fatto per la coomologia singolare.

Osservazione 3. Gli H^k sono funtori controvarianti.

Si hanno inoltre successioni esatte di coomologia relativa, di Mayer-Vietoris, e valgono il teorema di escissione, il teorema dei coefficienti universali e la formula di Künneth (opportunamente adattati).

Definizione 1.15. Sia $\lambda_p : \Delta_p \longrightarrow \Delta_{p+q}$, $\lambda_p(v_i) = v_i$ per ogni i , sia $\rho_q : \Delta_q \longrightarrow \Delta_{p+q}$, $\rho_q(v_j) = v_{p+j}$ per ogni j .

Si definisce il *prodotto cup* come la mappa bilineare

$$\cup : S^p(Y) \times S^q(Y) \longrightarrow S^{p+q}(Y)$$

che associa a $c \in S^p(Y)$ e $d \in S^q(Y)$ l'unico elemento $c \cup d \in S^{p+q}(Y)$ tale che

$$\langle \sigma, c \cup d \rangle = \langle \sigma \circ \lambda_p, c \rangle \langle \sigma \circ \rho_q, d \rangle$$

per ogni $\sigma \in S^{p+q}(Y)$.

Osservazione 4. Il prodotto cup su $S^*(Y)$ induce un prodotto cup su $H^*(Y)$ che lo rende un'algebra graduata.

Definizione 1.16. Si definisce il *prodotto cap* come la mappa bilineare

$$\cap : S_{p+q}(Y) \times S^p(Y) \longrightarrow S_q(Y)$$

che associa alla coppia (z, c) l'unica q -catena $z \cap c$ tale che

$$\langle z \cap c, d \rangle = \langle z, c \cup d \rangle$$

per ogni q -cocatena d .

Definizione 1.17. Sia Y una varietà di dimensione n compatta, senza bordo, connessa, orientabile. Allora $H_n(Y)$ è libero di rango 1, e si chiama *classe fondamentale di Y* il generatore di $H_n(Y)$ che dà l'orientazione di Y .

Teorema 1.4.1. (*dualità di Poincaré*) Sia Y una varietà di dimensione n compatta, senza bordo, connessa, orientabile con classe fondamentale ξ . Allora per ogni p esiste un isomorfismo

$$\xi \cap : H^p(Y) \xrightarrow{\cong} H_{n-p}(Y).$$

1.5 Coomologia di Čech

Definizione 1.18. Sia \mathcal{F} un fascio su uno spazio topologico X , sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Per ogni $p \geq 0$ sia I_p l'insieme dei

sottoinsiemi di I di cardinalità $p + 1$. Se $K = \{i_0, \dots, i_p\} \in I_p$ si pone

$$U_K = \bigcap_{k \in K} U_k.$$

Si definisce $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{K \in I_p} \mathcal{F}(U_K)$.

Osservazione 5. $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è un gruppo abeliano.

Un elemento $\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ è determinato dagli elementi $\alpha_K \in \mathcal{F}(U_K)$ per ogni $K \in I_p$.

Definizione 1.19. Data un'orientazione su K (cioè un ordinamento degli elementi a meno di permutazioni pari) si definisce la *mappa di cobordo* $d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ come segue.

Se $K = \{i_0, \dots, i_{p+1}\} \in I_{p+1}$ si pone $(d\alpha)_K = \sum_{j=0}^{p+1} (\pm \alpha_{K \setminus \{i_j\}}|_{U_K})$, dove il segno dipende dal fatto che l'orientazione su K coincida o meno con quella su $K \setminus \{i_j\}$.

Definizione 1.20. Si definisce il *p-esimo gruppo di coomologia di Čech di \mathcal{U} a coefficienti in \mathcal{F}* come il gruppo

$$\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\ker d : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{\operatorname{im} d : C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

Osservazione 6. Sia \mathcal{V} un raffinamento di \mathcal{U} . Allora esistono delle mappe $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ indotte dalle mappe di restrizione di \mathcal{F} e tali mappe commutano con d .

Definizione 1.21. Si definisce $C^p(X, \mathcal{F})$ come il limite diretto $\varinjlim C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sui ricoprimenti aperti rispetto al raffinamento.

Osservazione 7. Ogni elemento di $C^p(X, \mathcal{F})$ è rappresentato da un elemento di $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ per un qualche ricoprimento aperto \mathcal{U} ; inoltre due elementi di $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ e $C^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ rappresentano lo stesso elemento di $C^p(X, \mathcal{F})$ se hanno la stessa immagine in $C^p(\mathcal{W}, \mathcal{F})$ per un qualche \mathcal{W} che sia un raffinamento comune di \mathcal{U} e \mathcal{V} .

Osservazione 8. Le mappe di cobordo su $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ inducono delle mappe di cobordo $d : C^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(X, \mathcal{F})$.

Definizione 1.22. Si definisce il p -esimo gruppo di coomologia di Čech di X a coefficienti in \mathcal{F} come il gruppo

$$\check{H}^p(X, \mathcal{F}) = \frac{\ker d : C^p(X, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(X, \mathcal{F})}{\operatorname{im} d : C^{p-1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow C^p(X, \mathcal{F})}.$$

Proposizione 1.5.1. Se X è uno spazio topologico triangolabile, allora

$$H^*(X; R) = \check{H}^*(X, R_X),$$

dove con R_X si intende il fascio costante su X dato da R .

Corollario 1.5.2. Se X è triangolabile esiste un ricoprimento aperto \mathcal{U} tale che $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \check{H}^p(X, \mathcal{F})$.

1.6 Coomologia di fasci

Definizione 1.23. Sia X uno spazio topologico. Si indica con $\mathbf{Sh}(X)$ la categoria dei fasci di gruppi abeliani su X .

Definizione 1.24. Un funtore F da $\mathbf{Sh}(X)$ ad \mathbf{Ab} si dice *additivo* se

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \operatorname{Hom}(F(\mathcal{F}), F(\mathcal{G}))$$

è un omomorfismo di gruppi abeliani per ogni $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$.

Osservazione 9. La definizione precedente ha senso, in quanto $\mathbf{Sh}(X)$ e \mathbf{Ab} sono categorie additive (cioè l'insieme delle frecce tra due oggetti ha una struttura naturale di gruppo abeliano).

Definizione 1.25. Un funtore additivo si dice *esatto* se, data una successione esatta di fasci

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F}' \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0,$$

allora è esatta anche la successione

$$0 \longrightarrow F(\mathcal{F}) \xrightarrow{F(\phi)} F(\mathcal{F}') \xrightarrow{F(\psi)} F(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0.$$

Un funtore additivo si dice *esatto a sinistra (destra)* se la successione

$$0 \longrightarrow F(\mathcal{F}) \xrightarrow{F(\phi)} F(\mathcal{F}') \xrightarrow{F(\psi)} F(\mathcal{F}'') \longrightarrow 0.$$

è esatta a sinistra (destra).

Definizione 1.26. Un fascio \mathcal{I} si dice *iniiettivo* se il funtore controvariante $\text{Hom}(-, \mathcal{I}) : \mathbf{Sh}(X) \longrightarrow \mathbf{Ab}$ è esatto.

Osservazione 10. Dato che il funtore $\text{Hom}(-, \mathcal{I})$ è sempre esatto a sinistra, \mathcal{I} è iniettivo se e solo se, dato un morfismo di fasci $\psi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ tale che $\ker \psi = 0$, ogni morfismo di fasci $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}$ estende ad un morfismo $\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{I}$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{I} & \\ & \nearrow & \nwarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G} \end{array}$$

è commutativo.

Proposizione 1.6.1. Se \mathcal{F} è un fascio su X , allora esiste una successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d_1} \dots$$

tale che \mathcal{I}^j è iniettivo per ogni j .

Una successione di questo tipo si dice *risoluzione iniettiva* di \mathcal{F} .

Definizione 1.27. Un *complesso di fasci* \mathcal{A}^* è un insieme di fasci $\{\mathcal{A}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ con dei morfismi $\{d : \mathcal{A}^i \rightarrow \mathcal{A}^{i+1}\}$ (detti morfismi di cobordo) tali che $d^2 = 0$.

Definizione 1.28. Si definisce l'*i*-esimo fascio di coomologia di \mathcal{A}^* come il fascio

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*) = \frac{\ker d : \mathcal{A}^i \rightarrow \mathcal{A}^{i+1}}{\operatorname{im} d : \mathcal{A}^{i-1} \rightarrow \mathcal{A}^i}.$$

Osservazione 11. La spiga di $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*)$ in $x \in X$ è l'*i*-esimo gruppo di coomologia del complesso di spighe \mathcal{A}_x^* .

Definizione 1.29. Sia $F : \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$ un funtore covariante esatto a sinistra. Si definisce l'*i*-esimo funtore derivato destro $R^i F$ di F nel modo seguente.

Per ogni fascio \mathcal{F} si prende una sua risoluzione iniettiva

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{d_1} \dots$$

Applicando f a tale risoluzione omettendo \mathcal{F} si ottiene il complesso

$$0 \rightarrow f(\mathcal{I}^0) \xrightarrow{f(d_0)} f(\mathcal{I}^1) \xrightarrow{f(d_1)} \dots$$

Si definisce il derivato destro di F , denotato con $R^i F(\mathcal{F})$, come l'*i*-esimo fascio di coomologia di questo complesso.

Osservazione 12. Si può dimostrare che, per ogni i , $R^i F(\mathcal{F})$ è determinato a meno di isomorfismo unico, cioè non dipende dalla risoluzione iniettiva scelta e definisce un funtore additivo da $\mathbf{Sh}(X)$ ad \mathbf{Ab} . In particolare il funtore $R^0 F(\mathcal{F})$ è canonicamente isomorfo a $F(\mathcal{F})$.

Inoltre, data una successione esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$$

esiste un omomorfismo naturale $\delta^i : R^i F(\mathcal{F}'') \longrightarrow R^{i+1} F(\mathcal{F}')$ per ogni i che sta in una successione esatta

$$\dots \longrightarrow R^i F(\mathcal{F}') \longrightarrow R^i F(\mathcal{F}) \longrightarrow R^i F(\mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1} F(\mathcal{F}') \longrightarrow \dots$$

Definizione 1.30. Si definisce l' i -esimo gruppo di coomologia di \mathcal{F} su X come il gruppo

$$H^i(X, \mathcal{F}) = R^i \Gamma_X(\mathcal{F}),$$

dove Γ_X è il funtore da $\mathbf{Sh}(X)$ ad \mathbf{Ab} definito da $\Gamma_X(\mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$ e $\Gamma_X(\phi) = \phi(X)$.

Proposizione 1.6.2. $H^0(X; \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Proposizione 1.6.3. $H^p(X, -)$ è un funtore covariante additivo da $\mathbf{Sh}(X)$ ad \mathbf{Ab} per ogni $p \geq 0$.

Osservazione 13. Dalla proposizione 1.6.3 segue che ogni morfismo di fasci induce degli omomorfismi sui gruppi di coomologia in ogni grado. Inoltre se $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$, allora $H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(X, \mathcal{F}_1) \oplus H^p(X, \mathcal{F}_2)$ per ogni $p \geq 0$.

Osservazione 14. Se X è una varietà PL esistono quattro diverse definizioni di coomologia: la coomologia singolare, la coomologia simpliciale, la coomologia di Čech e la coomologia di fasci del fascio costante associato all'anello dei coefficienti.

Tutte queste coomologie sono canonicamente isomorfe; inoltre se X è una varietà differenziabile, e l'anello dei coefficienti è \mathbb{R} o \mathbb{C} anche la coomologia di De Rham di X è canonicamente isomorfa alle altre quattro.

1.7 Successioni spettrali e ipercoomologia

Definizione 1.31. Una *successione spettrale* è una famiglia di \mathbb{K} -spazi vettoriali $\{E_r^{p,q} | p, q, r \in \mathbb{Z}, r \geq r_0\}$, dove $r_0 \in \{0, 1, 2\}$, assieme a delle mappe

lineari $d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}$ tali che $d_r^2 = 0$ e

$$E_{r+1}^{p,q} = \frac{\ker d_r : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q-r+1}}{\operatorname{im} d_r : E_r^{p-r,q+r-1} \longrightarrow E_r^{p,q}}.$$

Se per ogni $p, q \in \mathbb{Z}$ esistono $r(p, q) \in \mathbb{Z}$ e un \mathbb{K} -spazio vettoriale $E_\infty^{p,q}$ tali che $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ per ogni $r \geq r(p, q)$, allora si dice che la successione spettrale ha limite $\{E_\infty^{p,q} | p, q \in \mathbb{Z}\}$.

Definizione 1.32. Un *complesso filtrato di \mathbb{K} -spazi vettoriali* è una famiglia $\{F^p \mathcal{K}^* | 0 \leq p \leq n\}$ tale che $F^0 \mathcal{K}^* = \mathcal{K}^*$ è un complesso di \mathbb{K} -spazi vettoriali e $F^p \mathcal{K}^*$ è un sottocomplesso di $F^{p-1} \mathcal{K}^*$ per ogni p .

Osservazione 15. Si può associare ad un complesso filtrato di \mathbb{K} -spazi vettoriali una successione spettrale $\{E_r^{p,q} | p, q, r \in \mathbb{Z}, r \geq 0\}$ data da

$$E_r^{p,q} = \frac{\{a \in F^p \mathcal{K}^{p+q} | da \in F^{p+r} \mathcal{K}^{p+q+1}\}}{dF^{p-r+1} \mathcal{K}^{p+q-1} + F^{p+1} \mathcal{K}^{p+q}}.$$

Inoltre se $\alpha \in E_r^{p,q}$ è rappresentato da $a \in F^p \mathcal{K}^{p+q}$, allora $d\alpha \in E_r^{p+r,q-r+1}$ è rappresentato da $da \in F^{p+r} \mathcal{K}^{p+q+1}$.

Definizione 1.33. Sia \mathcal{A}^* un complesso di fasci su uno spazio topologico X , sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto di X . Si definisce lo spazio vettoriale $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q)$ come lo spazio delle p -cocatene di Čech su \mathcal{U} a coefficienti in \mathcal{A}^q .

Osservazione 16. Si ha una mappa di cobordo

$$\delta_1 : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q)$$

e la mappa di cobordo $d : \mathcal{A}^q \longrightarrow \mathcal{A}^{q+1}$ induce una mappa

$$\delta_2 : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q) \longrightarrow C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^{q+1})$$

tale che $\delta_1^2 = \delta_2^2 = 0$ e $\delta_1 \delta_2 = \delta_2 \delta_1$.

Passando al limite diretto sui ricoprimenti aperti rispetto al raffinamento

si ottengono dei \mathbb{K} -spazi vettoriali $C^{p,q}(X, \mathcal{A}^*) = \varinjlim C^p(\mathcal{U}, \mathcal{A}^q)$ con delle mappe di cobordo $\delta_1 : C^{p,q}(X, \mathcal{A}^*) \longrightarrow C^{p+1,q}(X, \mathcal{A}^*)$ e $\delta_2 : C^{p,q}(X, \mathcal{A}^*) \longrightarrow C^{p,q+1}(X, \mathcal{A}^*)$.

Definizione 1.34. Si definisce l'*ipercoomologia* $\mathbb{H}^*(X, \mathcal{A}^*)$ di \mathcal{A}^* come la coomologia del complesso (\mathcal{K}^*, d) , dove $\mathcal{K}^n = \bigoplus_{p+q=n} C^{p,q}(X, \mathcal{A}^*)$ e $d = \delta_1 + (-1)^p \delta_2$.

Osservazione 17. Esiste un complesso filtrato $\{F^p \mathcal{K}^*\}$ definito da

$$F^p \mathcal{K}^n = \bigoplus_{p'+q=n, p' \geq p} C^{p',q}(X, \mathcal{A}^*).$$

Esiste inoltre una successione spettrale $\{E_r^{p,q} | p, q, r \in \mathbb{Z}, r \geq 0\}$ tale che

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}(\mathcal{A}^*))$$

e

$$E_\infty^{p,q} = \text{Gr}^p \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{A}^*),$$

dove

$$\text{Gr}^p \mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{A}^*) = \frac{\ker d : F^p \mathcal{K}^n \longrightarrow F^p \mathcal{K}^{n+1}}{\text{im} d : F^p \mathcal{K}^{n-1} \longrightarrow F^p \mathcal{K}^n}.$$

Questo implica che esiste un isomorfismo tra $\mathbb{H}^n(X, \mathcal{A}^*)$ e $\bigoplus_{p+q=n} E_\infty^{p,q}$. Tale isomorfismo tuttavia non è canonico, nonostante la filtrazione associata a $\mathbb{H}^n(X, \mathcal{A}^*)$ data da

$$\bigoplus_{p'+q=n, p' \geq p} E_\infty^{p',q}$$

sia canonica.

Definizione 1.35. Se vale quanto detto nell'osservazione 17, allora si dice che la successione spettrale $\{E_r^{p,q}\}$ converge a $\mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{A}^*)$.

Osservazione 18. Invertendo i ruoli di p e q si ottiene un altro complesso filtrato $\{\widehat{F}^q \mathcal{K}^*\}$ definito da

$$\widehat{F}^q \mathcal{K}^n = \bigoplus_{p+q'=n, q' \geq q} C^{p,q'}$$

con una successione spettrale associata $\{\widehat{E}_r^{p,q} | r \geq 0\}$ tale che

$$\widehat{E}_2^{p,q} = H^q(X, \mathcal{H}^p(X, \mathcal{A}^*)).$$

Anche questa successione spettrale si appoggia a $\mathbb{H}^{p+q}(X, \mathcal{A}^*)$. In particolare segue che se $H^p(X, \mathcal{A}^q) = 0$ per ogni q e per ogni $p \geq 0$, allora $\widehat{E}_\infty^{p,q} = 0$ per ogni q e per ogni $p \geq 0$, quindi $\mathbb{H}^n(X; \mathcal{A}^*) \cong \widehat{E}_\infty^{0,n}$ è l' n -esimo gruppo di coomologia del complesso $H_0(X, \mathcal{A}^*) = \Gamma(X, \mathcal{A}^*)$.

Esempio 1.1. Sia X una pseudovarietà topologica con una stratificazione fissata. Allora i complessi di fasci \mathcal{C}_X^* e \mathcal{IC}_X^* soddisfano la condizione

$$H^p(X, \mathcal{C}_X^q) = H^p(X, \mathcal{IC}_X^q) = 0$$

per ogni q e per ogni $p \geq 1$.

Allora i gruppi di ipercoomologia di \mathcal{C}_X^* e \mathcal{IC}_X^* sono canonicamente isomorfi ai gruppi di coomologia dei complessi $H^0(X, \mathcal{C}_X^*)$ e $H^0(X, \mathcal{IC}_X^*)$ rispettivamente. Poiché $H^0(X, \mathcal{C}_X^*) = C_{-*}((X))$ e $H^0(X, \mathcal{IC}_X^*) = IC_{-*}((X))$, allora i gruppi di coomologia $H^0(X, \mathcal{C}_X^*)$ e $H^0(X, \mathcal{IC}_X^*)$ coincidono con i gruppi d'omologia dei complessi $C_*((X))$ e $IC_*((X))$.

Allora ci sono degli isomorfismi canonici

$$\mathbb{H}^{-n}(X, \mathcal{C}_X^*) \cong H_n^C(X)$$

e

$$\mathbb{H}^{-n}(X, \mathcal{IC}_X^*) \cong IH_n^C(X).$$

Definizione 1.36. Una mappa $\phi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ di complessi di fasci si dice *quasi-isomorfismo* se i morfismi di fasci indotti $\mathcal{H}^i(\phi) : \mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*) \rightarrow \mathcal{H}^i(\mathcal{B}^*)$ sono degli isomorfismi per ogni i .

Osservazione 19. La nozione di quasi-isomorfismo equivale a richiedere che le mappe sulle spighe $H^i(\mathcal{A}_x^*) \rightarrow H^i(\mathcal{B}_x^*)$ siano isomorfismi per ogni i e x .

Definizione 1.37. Un *quasi-isomorfismo generalizzato* $\phi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ è una successione di quasi-isomorfismi

$$\mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}_1^* \leftarrow \mathcal{A}_2^* \rightarrow \mathcal{A}_3^* \leftarrow \mathcal{A}_4^* \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B}^*.$$

Osservazione 20. Segue dalla sequenza spettrale definita nell'osservazione 15 che un quasi-isomorfismo generalizzato $\phi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{B}^*$ induce degli isomorfismi tra l'ipercoomologia di \mathcal{A}^* e quella di \mathcal{B}^* .

Osservazione 21. Sia X una varietà algebrica proiettiva. Nell'esempio 1.1 si è visto che i gruppi d'omologia d'intersezione di X possono essere identificati con i gruppi di ipercoomologia del complesso di fasci \mathcal{IC}_X^* su X .

Inoltre se \mathcal{A}^* è un altro complesso di fasci e $\phi : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{IC}_X^*$ è un quasi-isomorfismo generalizzato, allora ϕ induce degli isomorfismi tra i gruppi di ipercoomologia di \mathcal{A}^* e i gruppi d'omologia d'intersezione di X .

1.8 Bibliografia

Per approfondire gli argomenti trattati nel capitolo si possono vedere [10], [11] (capitoli 2 e 5), [12] (capitoli 2 e 3), [14] (capitoli 4 e 5), [19] e [8].

Capitolo 2

La definizione di omologia d'intersezione

2.1 Pseudovarietà topologiche

Definizione 2.1. Sia L uno spazio topologico di Hausdorff compatto. Si definisce *cono aperto di L* lo spazio topologico $C(L)$ ottenuto identificando $L \times \{0\}$ in $L \times [0, 1[$ con un punto (detto *vertice* del cono).

Definizione 2.2. Sia Y uno spazio topologico di Hausdorff paracompatto. Una *stratificazione topologica m -dimensionale di Y* è data da una filtrazione

$$Y = Y_m \supseteq Y_{m-1} \supseteq \dots \supseteq Y_0$$

di Y , dove gli Y_j sono dei chiusi di Y tali che per ogni $x \in Y_j \setminus Y_{j-1}$ esiste un intorno aperto N_x di x in Y e uno spazio topologico di Hausdorff compatto L dotato di una stratificazione topologica $(m - j - 1)$ -dimensionale

$$L = L_{m-j-1} \supseteq L_{m-j-2} \dots \supseteq L_0$$

e di un omeomorfismo

$$\phi : N_x \longrightarrow \mathbb{R}^j \times C(L)$$

tali che $\phi|_{N_x \cap Y_{j+i+1}}$ sia un omeomorfismo con immagine $\mathbb{R}^j \times C(L_i) \subseteq \mathbb{R}^j \times C(L)$ per ogni $i = 0, \dots, m - j - 1$.

Osservazione 22. La definizione di stratificazione topologica è una definizione induttiva. Nel caso 0-dimensionale tale stratificazione esiste se e solo se Y è uno spazio topologico discreto numerabile.

Definizione 2.3. Uno spazio topologico di Hausdorff paracompatto si dice *pseudovarietà topologica di dimensione m* se ammette una stratificazione topologica m -dimensionale tale che $Y_{m-1} = Y_{m-2}$ e $Y \setminus Y_{m-1}$ è denso in Y .

Lo spazio Y_{m-2} si chiama *luogo singolare* Σ della pseudovarietà Y .

Osservazione 23. Ogni varietà topologica Y è una pseudovarietà topologica con la stratificazione banale

$$Y \supseteq \emptyset \supseteq \dots \supseteq \emptyset.$$

Osservazione 24. Per dare una prima definizione di omologia d'intersezione sarà anche richiesto che una pseudovarietà topologica Y ammetta una triangolazione $T : |N| \rightarrow Y$ compatibile con la stratificazione (cioè ogni chiuso Y_j della stratificazione deve essere unione di simplessi di N). In questo caso Y si dice *pseudovarietà topologica PL*.

2.2 Varietà algebriche quasiproiettive

Definizione 2.4. Una *varietà algebrica quasiproiettiva (complessa)* è un sottoinsieme X di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ della forma $X = Y \setminus Z$, dove Y e Z sono varietà proiettive (non necessariamente irriducibili) di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Osservazione 25. Ogni varietà quasiproiettiva X è aperta nella sua chiusura \overline{X} , che è una varietà proiettiva.

Una varietà quasiproiettiva si può quindi definire anche come un qualunque sottoinsieme aperto di Zariski di una varietà proiettiva.

Definizione 2.5. Un punto x di una varietà algebrica quasiproiettiva X si dice *nonsingolare* se esiste un intorno aperto U di x in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ed esistono dei polinomi omogenei f_1, \dots, f_m tali che

$$X \cap U = \{(x_0, \dots, x_n) \in U \mid f_j(x_0, \dots, x_n) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m\}$$

e la matrice jacobiana $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)$ ha rango massimo.

Un punto si dice *singolare* se non è nonsingolare.

Osservazione 26. L'insieme X_{reg} dei punti nonsingolari di X è un aperto denso di X ed ogni sua componente connessa è una sottovarietà complessa di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Definizione 2.6. Una varietà quasiproiettiva X si dice avere *dimensione pura* n se ogni componente connessa di X_{reg} è una varietà di dimensione complessa n .

Osservazione 27. Una varietà quasiproiettiva X è unione di al più un'infinità numerabile di varietà quasiproiettive irriducibili massimali $\{X_j\}_{j \in J}$ tali che per ogni $i \neq j$ si ha che $X_i \not\subseteq X_j$ ed ha dimensione pura n se e solo se per ogni $j \in J$ la varietà $(X_j)_{\text{nonsing}}$ ha dimensione complessa n

Teorema 2.2.1. *Sia X una varietà quasiproiettiva con una stratificazione di Whitney*

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0$$

(per la definizione di stratificazione di Whitney si veda l'appendice A). Allora X è una pseudovarietà topologica di dimensione $2n$ con la stratificazione topologica

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq X_{n-1} \supseteq X_{n-2} \supseteq \dots \supseteq X_1 \supseteq X_1 \supseteq X_0.$$

Teorema 2.2.2. *Sia X una varietà quasiproiettiva di dimensione pura n con una stratificazione di Whitney fissata. Allora esiste una triangolazione compatibile con la stratificazione topologica associata alla stratificazione di Whitney.*

2.3 Catene e perversità

Definizione 2.7. Sia Y una pseudovarietà topologica PL con una stratificazione topologica fissata

$$Y = Y_m \supseteq Y_{m-1} \supseteq \dots \supseteq Y_0$$

e una triangolazione $T : |N| \rightarrow Y$ compatibile con la stratificazione.

Si ricordi che si indica con $C_i^T(Y; R)$ lo spazio delle i -catene simpliciali finite a coefficienti in un gruppo abeliano R di Y rispetto alla triangolazione T e con $C_i^T((Y; R))$ lo spazio di quelle localmente finite (in seguito per semplificare la notazione R non sarà indicato).

Il *supporto* $|\xi|$ di una i -catena simpliciale $\xi = \sum_{\sigma \in N_i} \xi_\sigma \sigma$ è dato da $\bigcup_{\xi_\sigma \neq 0} T(\sigma)$.

In seguito si definiranno dei sottogruppi $IC_i^T(Y)$ e $IC_i^T((Y))$ di $C_i^T(Y)$ e $C_i^T((Y))$ rispettivamente tali che le intersezioni tra i supporti delle catene e gli spazi Y_j siano “non troppo grandi”.

Definizione 2.8. Una *perversità* è una successione finita $\bar{p} = (p_2, p_3, \dots, p_N)$ di interi tali che $p_2 = 0$ e $p_k - p_{k-1} \in \{0, 1\}$ per ogni k .

Esempio 2.1.

- i) $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ (perversità nulla)
- ii) $\bar{t} = (0, 1, \dots, N - 2)$ (perversità top)

iii) $\bar{t} - \bar{p} = (0, 1 - p_3, 2 - p_4, \dots, N - 2 - p_N)$ (perversità complementare di \bar{p})

Definizione 2.9. Sia $\bar{p} = (p_2, p_3, \dots, p_n)$ una perversità fissata. Si definisce $IC_i^{\bar{p}, T}(Y)$ come il sottospazio di $C_i^T(Y)$ dato dalle i -catene $\xi \in C_i^T(Y)$ tali che:

- i) $\dim_{\mathbb{R}}|\xi| \cap Y_{n-k} \leq i - k + p_k$ per ogni $k \geq 1$
- ii) $\dim_{\mathbb{R}}|\partial\xi| \cap Y_{n-k} \leq i - k + p_k - 1$ per ogni $k \geq 1$

(per convenzione si pone $\dim \emptyset = -\infty$).

Le catene che soddisfano i) si dicono \bar{p} -*ammissibili*.

In modo analogo (ma partendo dalle catene localmente finite) si definisce $IC_i^{\bar{p}, T}((Y))$.

Osservazione 28. Poiché la triangolazione T è compatibile con la stratificazione, $|\xi| \cap Y_{n-k}$ e $|\partial\xi| \cap Y_{n-k}$ sono unioni di simplessi, quindi hanno dimensione reale ben definita.

Osservazione 29. Se X è una varietà algebrica quasiproiettiva con una stratificazione di Whitney

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0$$

contano solo gli elementi di indice pari della perversità, quindi si potrebbe definire una perversità come una successione $\bar{p} = (p_2, p_4, \dots, p_{2n})$ tale che $p_2 = 0$ e $p_{2k} - p_{2k-2} \in \{0, 1, 2\}$. Inoltre le condizioni sulle catene diventano:

- i) $\dim_{\mathbb{R}}|\xi| \cap X_{n-k} \leq i - 2k + p_{2k}$ per ogni $k \geq 1$
- ii) $\dim_{\mathbb{R}}|\partial\xi| \cap X_{n-k} \leq i - 2k + p_{2k} - 1$ per ogni $k \geq 1$

Un caso particolarmente interessante (e che verrà approfondito più avanti) è dato dalla perversità media \bar{m} definita da $m_{2k} = 2k - 1$.

Osservazione 30. Si dimostra che se T' è un raffinamento di T , allora la mappa indotta $C_i^T((Y)) \longrightarrow C_i^{T'}((Y))$ manda catene in catene con lo stesso supporto, quindi restringe a due mappe $IC_i^{\bar{p},T}((Y)) \longrightarrow IC_i^{\bar{p},T'}((Y))$ e $IC_i^{\bar{p},T}(Y) \longrightarrow IC_i^{\bar{p},T'}(Y)$.

Definizione 2.10. Lo spazio $IC_i^{\bar{p}}(Y)$ delle i -catene d'intersezione finite si definisce come il limite diretto della famiglia di spazi $IC_i^{\bar{p},T}(Y)$ sulle triangolazioni compatibili con la stratificazione rispetto al raffinamento (analogamente si definisce $IC_i^{\bar{p}}((Y))$).

Osservazione 31. Ogni elemento di $IC_i^{\bar{p}}(Y)$ è rappresentato da un elemento di $IC_i^{\bar{p},T}(Y)$ per una qualche triangolazione T ; inoltre due elementi $\xi \in IC_i^{\bar{p},T}(Y)$ e $\xi' \in IC_i^{\bar{p},T'}(Y)$ rappresentano lo stesso elemento di $IC_i^{\bar{p}}(Y)$ se esiste un raffinamento T'' di T e T' tale che ξ e ξ' inducono lo stesso elemento in $IC_i^{\bar{p},T''}(Y)$.

Osservazione 32. Si noti che l'operatore di bordo

$$\partial : C_i((Y)) \longrightarrow C_{i-1}((Y))$$

restringe agli operatori di bordo

$$\partial : IC_i^{\bar{p}}((Y)) \longrightarrow IC_{i-1}^{\bar{p}}((Y))$$

e

$$\partial : IC_i^{\bar{p}}(Y) \longrightarrow IC_{i-1}^{\bar{p}}(Y).$$

Definizione 2.11. Si definisce l' i -esimo gruppo di omologia d'intersezione simpliciale di Y rispetto alla perversità \bar{p} come il quoziente

$$IH_i^{\bar{p}}(Y) = \frac{\ker \partial : IC_i^{\bar{p}}(Y) \longrightarrow IC_{i-1}^{\bar{p}}(Y)}{\operatorname{im} \partial : IC_{i+1}^{\bar{p}}(Y) \longrightarrow IC_i^{\bar{p}}(Y)}.$$

(in modo analogo si definisce $IH_i^{\bar{p},T}(Y)$)

Definizione 2.12. In modo del tutto analogo (ma partendo dalle catene localmente finite) si possono definire i *gruppi d'omologia simpliciale a supporto chiuso* $IH_{i,C}^{\bar{p}}(Y)$.

Definizione 2.13. Applicando il funtore $\text{Hom}(-, \mathbb{Z})$ ai complessi di catene dati dagli spazi $IC_{i,T}^{\bar{p},T}(Y)$ e $IC_i^{\bar{p}}(Y)$ si ottengono i complessi di cocatene $IC_{\bar{p},T}^i(Y)$ e $IC_{\bar{p}}^i(Y)$ rispettivamente, assieme all'omomorfismo di cobordo δ . Si definisce inoltre l'*i-esimo gruppo di coomologia d'intersezione di Y rispetto alla perversità \bar{p}* come il quoziente

$$IH_{\bar{p}}^i(Y) = \frac{\ker \delta : IC_{\bar{p}}^i(Y) \longrightarrow IC_{\bar{p}}^{i+1}(Y)}{\text{im} \delta : IC_{\bar{p}}^{i-1}(Y) \longrightarrow IC_{\bar{p}}^i(Y)}$$

(analogamente si definisce $IH_{\bar{p},T}^i(Y)$)

Osservazione 33. Come nel caso dell'omologia simpliciale si dimostra che $IH_{i,T}^{\bar{p},T}(Y) = IH_i^{\bar{p}}(Y)$ per ogni triangolazione T compatibile con la stratificazione (a priori $IH_i^{\bar{p}}(Y)$ dipende dalla stratificazione, ma più avanti si dimostrerà che è indipendente da tale scelta).

Definizione 2.14. Poiché la perversità media inferiore $(0, 0, 1, 1, \dots)$ è la più importante, si pone $IH_i(Y) = IH_i^{\bar{m}}(Y)$ e così via.

2.4 Alcuni esempi

Esempio 2.2. Sia X una varietà algebrica quasiproiettiva complessa nonsingolare. In questo caso tutte le catene sono \bar{p} -ammissibili per una perversità \bar{p} qualunque rispetto alla stratificazione banale, quindi $IH_i^{\bar{p}}(X) = H_i(X)$ per ogni i e \bar{p} .

Esempio 2.3. Sia X una varietà quasiproiettiva di dimensione pura n con una sola singolarità x . Allora $X_{\text{reg}} = X \setminus \{x\}$ e la filtrazione

$$X = X_n \supseteq \{x\} \supseteq \dots \supseteq \{x\}$$

è una stratificazione di Whitney.

In questo caso si ha che

$$IH_i(X) = \begin{cases} H_i(X) & \text{se } i > n \\ \text{im}H_i(X \setminus \{x\}) \rightarrow H_i(X) & \text{se } i = n \\ H_i(X \setminus \{x\}) & \text{se } i < n \end{cases}$$

Dimostrazione. Poiché

$$IC_i(X) = \{\xi \in C_i(X) \mid \dim|\xi| \cap \{x\} \leq i - n - 1, \dim|\partial\xi| \cap \{x\} \leq i - n - 2\},$$

si ha che per $i \leq n$ il punto x non può appartenere a $|\xi|$ (altrimenti si avrebbe $0 \leq i - n - 1 < 0$), quindi $IC_i(X) = C_i(X \setminus \{x\})$.

Invece per $i \geq n + 2$ si ha che $i - n - 2 \geq 0$, quindi $IC_i(X) = C_i(X)$.

Allora $IH_i(X) = H_i(X \setminus \{x\})$ per $i < n$ e $IH_i(X) = H_i(X)$ per $i > n + 1$.

Inoltre $\ker\partial : IC_{n+1}(X) \rightarrow IC_n(X) = (\ker\partial : C_{n+1}(X) \rightarrow C_n(X)) \cap IC_{n+1}(X)$, quindi $IH_{n+1}(X) = H_{n+1}(X)$. Infine si ha che $\partial IC_{n+1}(X) = \partial C_{n+1}(X) \cap IC_n(X)$ e $IC_n(X) = C_n(X \setminus \{x\})$, quindi $IH_n(X) = \text{im}H_n(X \setminus \{x\}) \rightarrow H_n(X)$. \square

Esempio 2.4. Come esempi specifici del caso precedente, si considerino le curve

i) $X_1 = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid yz = 0\}$ (somma wedge di due $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$)

ii) $X_2 = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x^3 + y^3 = xyz\}$ (toro strozzato)

Si ha che $(X_1)_{\text{nonsing}} = X_1 \setminus \{x_1 = [1, 0, 0]\}$ e $(X_2)_{\text{nonsing}} = X_2 \setminus \{x_2 = [0, 0, 1]\}$.

Calcolando i gruppi di omologia di X_1 e X_2 (usando Mayer-Vietoris) si ottiene che:

i) $H_0(X_1 \setminus \{x_1\}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, quindi $IH_0(X_1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

$H_1(X_1) = 0$, quindi $IH_1(X_1) = 0$.

$H_2(X_1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, quindi $IH_2(X_1) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$.

ii) $H_0(X_2 \setminus \{x_2\}) = \mathbb{C}$, quindi $IH_0(X_2) = \mathbb{C}$.

$H_1(X_2) = H_1(X_2 \setminus \{x_2\}) = \mathbb{C}$ e $H_1(X_2 \setminus \{x_2\}) \xrightarrow{0} H_1(X_2)$, quindi

$IH_1(X_2) = 0$.

$H_2(X_2) = \mathbb{C}$, quindi $IH_2(X_2) = \mathbb{C}$.

2.4.1 Omologia d'intersezione di $\mathbb{R} \times Y$

Osservazione 34. Sia Y una pseudovarietà topologica di dimensione m , sia $\mathbb{R} \times Y$ la pseudovarietà con stratificazione $(\mathbb{R} \times Y)_{i+1} = \mathbb{R} \times Y_i$. La corrispondenza $\xi \mapsto \mathbb{R} \times \xi$ dà una mappa di complessi $IC_*(Y) \longrightarrow IC_{*+1}(\mathbb{R} \times Y)$ chiamata *mappa di sospensione*.

Lemma 2.4.1. *Sia $\xi \in IC_i(\mathbb{R} \times Y)$ un ciclo con supporto in $\mathbb{R}_+ \times Y$. Allora $\xi = \partial\eta$, dove $\eta \in IC_{i+1}(\mathbb{R} \times Y)$ è una catena con supporto in $\mathbb{R}_+ \times Y$.*

Dimostrazione. Siano $\pi_1 : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\pi_2 : \mathbb{R} \times Y \longrightarrow Y$ le proiezioni, sia $f : \mathbb{R}_+ \times |\xi| \longrightarrow \mathbb{R} \times Y$, $(t, y) \mapsto (t + \pi_1(y), \pi_2(y))$.

Allora la catena $f_*(\mathbb{R}_+ \times \xi)$ ha bordo ξ e sta in $IC_{i+1}(\mathbb{R} \times Y)$ □

Proposizione 2.4.2. *La mappa di sospensione induce degli isomorfismi*

$$IH_i(Y) \cong IH_{i+1}(\mathbb{R} \times Y).$$

Dimostrazione. Poiché la mappa $IC_*(Y) \longrightarrow IC_{*+1}(\mathbb{R} \times Y)$ è iniettiva, è sufficiente mostrare che il complesso quoziente è aciclico, cioè che se $\xi \in IC_i(\mathbb{R} \times Y)$ è tale che $\partial\xi = \mathbb{R} \times \eta$ per una qualche catena $\eta \in IC_{i-2}(Y)$, allora $\xi = \partial\mu + \mathbb{R} \times \gamma$ per certi $\mu \in IC_{i+1}(\mathbb{R} \times Y)$ e $\gamma \in IC_{i-1}(Y)$.

Sia $\pi_1 : \mathbb{R} \times X \rightarrow \mathbb{R}$ la prima proiezione, sia $T : |N| \rightarrow Y$ una triangolazione di $\mathbb{R} \times Y$ tale che ξ e $(\mathbb{R} \times Y)_j$ siano dei sottocomplessi di N . Se Y è una pseudovarietà connessa, allora T ha al più un'infinità numerabile di vertici, quindi esiste $t \in \mathbb{R}$ tale che $\pi_1^{-1}(t)$ non contiene dei vertici di N . Allora $|\xi|$ interseca $\{t\} \times Y$ trasversalmente.

Si pone $\xi = \xi_+ + \xi_-$, dove $\xi_+ = \xi \cap [t, +\infty[\times Y$ e $\xi_- = \xi \cap]-\infty, t] \times Y$. Allora $\partial \xi_+ = [t, +\infty[\times \eta + \{t\} \times \gamma$, con $\gamma \in IC_{i-1}(Y)$ e $\partial \gamma = \eta$; da questo segue che $\xi_+ + [t, +\infty[\times \gamma$ è un ciclo in $IC_i(\mathbb{R} \times Y)$ con supporto in $[t, +\infty[\times Y$, quindi per il lemma 2.4.1 è un bordo.

Analogamente anche $\xi_- +]-\infty, t] \times \gamma$ è un bordo, quindi anche la loro somma $\xi + \mathbb{R} \times \gamma$ è un bordo. \square

2.4.2 Omologia d'intersezione di un cono aperto

Osservazione 35. Sia Y una pseudovarietà topologica compatta di dimensione $m - 1$, sia $C(Y)$ il suo cono aperto con vertice v e stratificazione

$$C(Y)_i = \begin{cases} C(Y_{i-1}) & \text{se } i > 0 \\ \{v\} & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

Se $\xi \in IC_{i-1}^{\bar{p}}(Y)$, quando si ha che $C(\xi) \in IC_i^{\bar{p}}(C(Y))$?

Se $i > k - p_k$, allora ogni ξ è tale che $C(\xi) \in IC_i^{\bar{p}}(C(Y))$; se $i = k - p_k$, questo vale solo per ξ tale che $\partial \xi = 0$; se $i < k - p_k$, allora nessuna ξ sta in $IC_i^{\bar{p}}(C(Y))$.

Definizione 2.15. Sia C_* un complesso di catene. Si definisce il *complesso*

troncato $\tau_r C_*$ come il complesso

$$\tau_r C_i = \begin{cases} C_i & \text{se } i > r \\ \ker \partial : C_r \longrightarrow C_{r-1} & \text{se } i = r \\ 0 & \text{se } i < r \end{cases}$$

Osservazione 36. Per quanto detto nell'osservazione 35 esiste una mappa di complessi

$$\tau_{k-p_k} IC_{*-1}^{\bar{p}}(Y) \longrightarrow IC_*^{\bar{p}}(C(Y))$$

definita da $\xi \mapsto C(\xi)$.

Proposizione 2.4.3. *La mappa definita nell'osservazione 36 induce degli isomorfismi sull'omologia d'intersezione, quindi*

$$IH_i^{\bar{p}}(C(Y)) = \begin{cases} IH_{i-1}^{\bar{p}}(Y) & \text{se } i \geq k - p_k \\ 0 & \text{se } i < k - p_k \end{cases}$$

Dimostrazione. La mappa $\tau_{k-p_k} IC_{*-1}^{\bar{p}}(Y) \longrightarrow IC_*^{\bar{p}}(C(Y))$ è iniettiva, quindi basta mostrare che se $\xi \in IC_i^{\bar{p}}(C(Y))$ e $\partial \xi = C(\eta)$ per un qualche $\eta \in IC_{i-2}^{\bar{p}}(Y)$, allora $\xi = \partial \mu + C(\gamma)$ per certi $\mu \in IC_{i+1}^{\bar{p}}(C(Y))$ e $\gamma \in IC_{i-1}^{\bar{p}}(Y)$. Sia $\pi : C(Y) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la proiezione del cono, sia $N_\varepsilon = \pi^{-1}([0, \varepsilon])$ un intorno chiuso di v . Per ε sufficientemente piccolo si ha che $N_\varepsilon \cap |\xi|$ non contiene nessun vertice oltre a v di una triangolazione fissata di $|\xi|$. Allora $\xi \cap N_\varepsilon$ è conico, cioè $\xi \cap N_\varepsilon = C(\gamma) \cap N_\varepsilon$ per un certo $\gamma \in IC_{i-1}^{\bar{p}}(Y)$; inoltre si ha che $\partial \gamma = -\eta$. Allora $\xi - C(\gamma)$ è un ciclo con supporto in $\pi^{-1}([\varepsilon, +\infty]) \cong \mathbb{R}_+ \times Y$, quindi per il lemma 2.4.1 $\xi - C(\gamma)$ è un bordo. \square

Proposizione 2.4.4. *Sia Y una pseudovarietà topologica compatta di dimensione $m - 1$. Allora esiste un diagramma commutativo*

$$\begin{array}{ccc} \tau_{n-p_m} IC_{*-(n-m+1)}(Y) & \xrightarrow{i} & IC_{*-(n-m+1)}(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ IC_*(\mathbb{R}^{n-m} \times C(Y)) & \xrightarrow{res} & IC_*(\mathbb{R}^{n-m} \times (C(Y) \setminus \{v\})) \end{array}$$

le cui frecce verticali inducono degli isomorfismi sull'omologia d'intersezione.

In particolare

$$IH_i(\mathbb{R}^{n-m} \times C(Y)) = \begin{cases} IH_{i-(n-m+1)}(Y) & \text{se } i \geq n - p_m \\ 0 & \text{se } i < n - p_m \end{cases}$$

Dimostrazione. Si veda [1], pag. 30. □

2.5 Omologia d'intersezione di pseudovarietà normalizzate

Definizione 2.16. Sia Y una pseudovarietà topologica con una stratificazione

$$Y = Y_m \supseteq Y_{m-1} \supseteq \dots \supseteq Y_0.$$

Y si dice *topologicamente normale* se per ogni $y \in Y$ esiste un intorno aperto U di y in Y tale che $U \setminus Y_{m-2}$ è connesso.

Proposizione 2.5.1. *Ogni varietà topologica è normale.*

Definizione 2.17. Una varietà algebrica quasiproiettiva si dice *normale* se per ogni $x \in X$ la spiga in x del fascio di funzioni regolari su X è un dominio integralmente chiuso.

Osservazione 37. Usando una formulazione equivalente del teorema principale di Zariski si può mostrare che una varietà algebrica normale è topologicamente normale (per l'enunciato del teorema si veda [10], capitolo III.9, enunciato V).

Proposizione 2.5.2. *Sia X una pseudovarietà topologica di dimensione n . Se X è topologicamente normale esistono due isomorfismi canonici $IH_i^{\bar{p}}(X) \cong H_i(X)$ e $IH_i^{\bar{0}}(X) \cong H^{n-i}(X)$.*

Teorema 2.5.3. *Sia X una varietà quasiproiettiva. Allora esiste ed è unica la varietà \widehat{X} (detta normalizzazione di X) con una funzione regolare canonica $\pi : \widehat{X} \rightarrow X$ che soddisfa la seguente proprietà universale:*

Per ogni varietà quasiproiettiva Z ridotta, irriducibile e normale, per ogni funzione regolare $g : Z \rightarrow X$, esiste ed è unica la funzione regolare $h : Z \rightarrow \widehat{X}$ tale che il diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 & \uparrow & \swarrow \pi \\
 g & & \widehat{X} \\
 & \downarrow & \nearrow h \\
 & Z &
 \end{array}$$

commuta.

Osservazione 38. La mappa π restringe ad un isomorfismo su X_{reg} .

Proposizione 2.5.4. *Esiste un isomorfismo naturale tra $IH_i^{\bar{p}}(\widehat{X})$ e $IH_i^{\bar{p}}(X)$ per ogni perversità \bar{p} .*

Osservazione 39. La normalizzazione di una curva algebrica X è sempre nonsingolare, quindi in questo caso $IH_i^{\bar{p}}(X) = H_i(\widehat{X})$ per ogni \bar{p} .

Esempio 2.5. Siano X_1 e X_2 come nell'esempio 2.4. Allora $\widehat{X}_1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \amalg \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ e $\widehat{X}_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, quindi usando l'osservazione 39 si possono calcolare i gruppi d'omologia di intersezione.

2.6 Omologia d'intersezione relativa

Osservazione 40. Sia Y una pseudovarietà topologica, sia U un aperto di Y . Si può restringere la stratificazione topologica di Y ad U ; inoltre ogni catena di $IC_i(U)$ può essere vista come un elemento di $IC_i^T(Y)$ per una triangolazione T opportuna.

Si ha dunque un'inclusione $IC_i(U) \hookrightarrow IC_i(Y)$ che commuta con le mappe di bordo, quindi esiste un omomorfismo naturale $IH_i(U) \rightarrow IH_i(Y)$; inoltre esiste un complesso $IC(Y, U) = \frac{IC(Y)}{IC(U)}$ con l'omomorfismo di bordo indotto da quello di $IC(Y)$.

Definizione 2.18. Si chiama *i -esimo gruppo di omologia d'intersezione relativa di (Y, U)* il gruppo

$$IH_i(Y, U) = \frac{\ker \partial : IC_i(Y, U) \rightarrow IC_{i-1}(Y, U)}{\operatorname{im} \partial : IC_{i+1}(Y, U) \rightarrow IC_i(Y, U)}.$$

Osservazione 41. Come nel caso dell'omologia singolare esiste una successione esatta lunga

$$\dots \rightarrow IH_i(U) \rightarrow IH_i(Y) \rightarrow IH_i(Y, U) \rightarrow IH_{i-1}(U) \rightarrow \dots$$

2.7 Alcuni teoremi e considerazioni importanti

Teorema 2.7.1. (*teorema di escissione*) Sia Y una pseudovarietà topologica,

sia U un aperto di Y , sia V un chiuso di Y in U . Allora l'inclusione

$$(Y \setminus V, U \setminus V) \hookrightarrow (Y, U)$$

induce un isomorfismo di gruppi

$$IH_i(Y \setminus V, U \setminus V) \cong IH_i(Y, U).$$

Teorema 2.7.2. (*successione di Mayer-Vietoris*) Sia Y una pseudovarietà topologica, siano U e V due aperti non banali di Y tali che $Y = U \cup V$. Allora si ha una successione esatta lunga (detta *successione di Mayer-Vietoris*)

$$\dots \longrightarrow IH_i(U \cap V) \longrightarrow IH_i(U) \oplus IH_i(V) \longrightarrow IH_i(Y) \longrightarrow IH_{i-1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

Teorema 2.7.3. Siano Y e Y' due pseudovarietà topologiche, sia \mathbb{K} un campo e sia \bar{p} una perversità tale che $p_k + p_l \leq p_{k+l} \leq p_k + p_l + 2$ per ogni k e l . Allora

$$\bigoplus_{i+j=q} IH_{\bar{p}}^i(Y; \mathbb{K}) \otimes IH_{\bar{p}}^j(Y'; \mathbb{K}) \cong IH_{\bar{p}}^q(Y \times Y'; \mathbb{K}).$$

Quest'ultimo risultato si può generalizzare nel modo seguente.

Teorema 2.7.4. (*formula di Künneth*) Siano Y e Y' due pseudovarietà topologiche, sia R un PID. Allora esiste una successione esatta corta spezzante

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k} IH_{\bar{p}}^i(Y; R) \otimes IH_{\bar{p}}^j(Y'; R) \longrightarrow IH_{\bar{p}}^k(Y \times Y'; R) \longrightarrow \\ \longrightarrow \bigoplus_{i+j=k-1} \text{Tor}(IH_{\bar{p}}^i(Y; R), IH_{\bar{p}}^j(Y'; R)) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Osservazione 42. Sia $X = C(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$, sia \bar{p} una perversità tale che $p_3 = 0$.

Usando la formula per il calcolo dell'omologia di un cono si ha che

$$IH_{\bar{p}}^i(X) = \begin{cases} IH_{\bar{p}}^i(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) & \text{se } i < 2 \\ 0 & \text{se } i \geq 2 \end{cases}$$

In particolare $IH_1^{\bar{p}}(X) \cong \mathbb{Z}_2$ e $IH_2^{\bar{p}}(X) = 0$. Analogamente, dato che la formula del cono vale per qualunque coefficiente si ha che $IH_1^{\bar{p}}(X; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ e $IH_2^{\bar{p}}(X; \mathbb{Z}_2) = 0$.

Ma questo viola il teorema dei coefficienti universali, in quanto implicherebbe che $Tor(IH_1^{\bar{p}}(X), \mathbb{Z}_2) = Tor(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = 0$.

Osservazione 43. Contrariamente al caso dell'omologia simpliciale, in generale non è possibile dare a $IH_*(Y)$ una struttura naturale di anello.

2.8 Omologia d'intersezione singolare

Definizione 2.19. Sia Y una pseudovarietà topologica con una stratificazione

$$Y = Y_m \supseteq Y_{m-1} \supseteq \dots \supseteq Y_0,$$

sia \bar{p} una perversità. Un i -simpleso singolare σ si dice \bar{p} -ammissibile se $\sigma^{-1}(Y_{m-k} \setminus Y_{m-k-1})$ è contenuto nell' $(i - k - p_k)$ -scheletro dell' i -simpleso standard Δ^i per ogni $k \geq 2$. Una i -catena si dice \bar{p} -ammissibile se è una combinazione lineare formale di i -simplessi \bar{p} -ammissibili.

Definizione 2.20. Si indica con $IS_i^{\bar{p}}(Y)$ il sottospazio lineare di $S_i(Y)$ formato dalle i -catene \bar{p} -ammissibili con bordo \bar{p} -ammissibile.

L' i -esimo gruppo di omologia d'intersezione singolare di Y rispetto alla perversità \bar{p} è dato da

$$IH_i^{\bar{p}}(Y) = \frac{\ker \partial : IS_i^{\bar{p}}(Y) \longrightarrow IS_{i-1}^{\bar{p}}(Y)}{\text{im} \partial : IS_{i+1}^{\bar{p}}(Y) \longrightarrow IS_i^{\bar{p}}(Y)}.$$

Osservazione 44. Nel caso delle pseudovarietà topologiche PL l'omologia singolare d'intersezione è canonicamente isomorfa all'omologia simpliciale d'intersezione definita in precedenza.

Definizione 2.21. In modo del tutto analogo (ma partendo dalle catene localmente finite) si possono definire i *gruppi d'omologia d'intersezione singolare a supporto chiuso* $IH_{i,C}^{\bar{p}}(Y)$.

2.9 Funtorialità dell'omologia d'intersezione

Se $f : Y \rightarrow Y'$ è una mappa continua, allora la composizione con f induce delle mappe $S_i(Y) \rightarrow S_i(Y')$ che commutano con l'omomorfismo di bordo, quindi inducono delle mappe lineari $H_i(Y) \rightarrow H_i(Y')$ sull'omologia singolare. Tuttavia la composizione con f non mantiene necessariamente la \bar{p} -ammissibilità, quindi una mappa continua in generale non induce degli omomorfismi $f_* : IH_*^{\bar{p}}(Y) \rightarrow IH_*^{\bar{p}}(Y')$.

Inoltre è abbastanza semplice verificare che i gruppi d'omologia d'intersezione di un cono non sono uguali a quelli del punto, quindi l'omologia d'intersezione non è invariante per omotopia. Allora cosa si può dire sulla funtorialità dell'omologia d'intersezione?

Definizione 2.22. Si dice che una mappa continua $f : Y \rightarrow Y'$ tra pseudovarietà topologiche *conserva gli strati* se la preimmagine di ogni strato di Y' è unione di strati di Y o, equivalentemente, se l'immagine di ogni strato di Y è contenuta in uno strato di Y' .

Una mappa $f : Y \rightarrow Y'$ che conserva gli strati si dice *placida* se per ogni strato S' di Y' si ha che

$$\text{codim} f^{-1}(S') \geq \text{codim} S'.$$

Proposizione 2.9.1. *Una mappa placida $f : Y \rightarrow Y'$ induce mappe da $S_i(Y)$ a $S_i(Y')$ che conservano la \bar{p} -ammissibilità, quindi induce degli omomorfismi $f_* : IH_i^{\bar{p}}(Y) \rightarrow IH_i^{\bar{p}}(Y')$.*

Rafforzando ulteriormente le condizioni sulle mappe si può ottenere una versione “stratificata” dell'invarianza per omotopia per l'omologia d'intersezione.

Definizione 2.23. Si dice che una mappa $f : Y \rightarrow Y'$ che conserva gli strati *conserva la codimensione* se per ogni strato S' di Y' si ha che

$$\text{codim} f^{-1}(S') = \text{codim} S'.$$

Definizione 2.24. Un'*equivalenza omotopica che conserva gli strati* tra due pseudovarietà Y e Y' è una coppia di mappe $f : Y \rightarrow Y'$ e $g : Y' \rightarrow Y$ tali che $g \circ f$ e $f \circ g$ sono omotope all'identità tramite delle omotopie

$$h : Y \times [0, 1] \rightarrow Y$$

e

$$k : Y' \times [0, 1] \rightarrow Y'$$

che conservano la codimensione (le stratificazioni sono indotte in modo ovvio sugli spazi prodotto).

Proposizione 2.9.2. *Se $f : Y \rightarrow Y'$ è un'equivalenza omotopica che conserva gli strati allora la composizione con f induce degli isomorfismi*

$$f_* : IH_i^{\bar{p}}(Y) \rightarrow IH_i^{\bar{p}}(Y').$$

Corollario 2.9.3. *Sia $f : Y \rightarrow Y'$ un omeomorfismo di pseudovarietà topologiche. Allora f induce degli isomorfismi*

$$f_* : IH_i^{\bar{p}}(Y) \rightarrow IH_i^{\bar{p}}(Y'),$$

quindi l'omologia d'intersezione è invariante per omeomorfismo.

Osservazione 45. Da quanto detto segue che l'omologia d'intersezione non dipende dalla stratificazione (una prova di questo fatto verrà fornita più avanti).

2.10 Omologia d'intersezione a coefficienti locali

Definizione 2.25. Sia X una pseudovarietà topologica. Un *sistema di coefficienti locali* L su X è il dato di un \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita L_x per ogni $x \in X$ con un isomorfismo $\phi^* : L_{\phi(0)} \rightarrow L_{\phi(1)}$ per ogni cammino continuo $\phi : [0, 1] \rightarrow X$ con le seguenti proprietà:

- i) $\phi^* = \psi^*$ se ϕ e ψ sono omotopi rispetto a $\{0, 1\}$
- ii) $(\phi * \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ se $\phi(1) = \psi(0)$ e $\phi * \psi$ è il cammino prodotto che va da $\phi(0)$ a $\psi(1)$

Definizione 2.26. Si definisce una *sezione piatta* di L come una mappa $g : X \rightarrow \coprod_{x \in X} L_x$ tale che $g(x) \in L_x$ per ogni $x \in X$, e se ϕ è un cammino da x a y in X , allora $\phi^*(g(x)) = g(y)$.

Osservazione 46. La restrizione di L ad ogni sottoinsieme semplicemente connesso Y di X è banale, nel senso che l'isomorfismo $\phi^* : L_x \rightarrow L_y$ indotto da un cammino ϕ da $x \in Y$ a $y \in Y$ è indipendente dalla scelta del cammino. In particolare, se $T : |N| \rightarrow X$ è una triangolazione, allora la restrizione di L ad un qualunque i -simplex singolare $T(\sigma)$ è banale, quindi se L_σ è lo spazio di tutte le sezioni piatte di L su $T(\sigma)$, allora le mappe di restrizione $\rho_x^\sigma : L_\sigma \rightarrow L_x$ sono isomorfismi per ogni $x \in T(\sigma)$. Inoltre se $\hat{\sigma}$ è una faccia di σ e $x \in T(\hat{\sigma})$, allora la composizione $\rho_{\hat{\sigma}}^\sigma = (\rho_x^{\hat{\sigma}})^{-1} \circ \rho_x^\sigma : L_\sigma \rightarrow L_{\hat{\sigma}}$ è indipendente da x .

Definizione 2.27. Sia X una pseudovarietà topologica, sia $C_i^T(X; L)$ il \mathbb{K} -spazio vettoriale di tutte le espressioni formali del tipo $\xi = \sum_{\sigma \in N_i} l_\sigma \sigma$, dove $l_\sigma \in L_\sigma$ e $l_\sigma \neq 0$ per al più un'infinità numerabile di σ .

Si definisce $\partial : C_i^T(X; L) \longrightarrow C_{i-1}^T(X; L)$ nel modo seguente:

$$\partial\xi = \sum_{\sigma \in N_i} (\pm \rho_\sigma^\sigma(l_\sigma)\hat{\sigma}),$$

dove il segno dipende dalla scelta dell'orientazione e $\hat{\sigma}$ è una qualunque faccia di σ .

Facendo il limite diretto sulle triangolazioni si ottiene lo spazio $C_i(X; L)$ delle i -catene simpliciali a coefficienti in L .

Definizione 2.28. Si definisce l' i -esimo gruppo di omologia di X a coefficienti in L come il quoziente

$$H_i(X; L) = \frac{\ker \partial : C_i(X; L) \longrightarrow C_{i-1}(X; L)}{\operatorname{im} \partial : C_{i+1}(X; L) \longrightarrow C_i(X; L)}.$$

Osservazione 47. In realtà, presa una varietà quasiproiettiva X con una stratificazione di Whitney

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0,$$

per far funzionare questa costruzione è sufficiente definire il sistema di coefficienti locali L sul sottoinsieme aperto nonsingolare $X \setminus X_{n-1}$ di X . Infatti le condizioni di ammissibilità su una i -catena d'intersezione ξ significano che se $\sigma \in N_i$ e il coefficiente relativo a σ in ξ è diverso da 0, allora $\operatorname{int} \sigma \subseteq X \setminus X_{n-1}$ e $\operatorname{int} \hat{\sigma} \subseteq X \setminus X_{n-1}$ per ogni $\hat{\sigma} \in N_{i-1}$ faccia di σ , quindi lo spazio L_σ delle sezioni piatte su $T(\sigma)$ è ben definito.

Da questo segue che si può definire $IC_i^{\bar{p}, T}(X; L)$ come lo spazio delle i -catene $\xi = \sum_{\sigma \in N_i} l_\sigma \sigma$, dove $l_\sigma \in L_\sigma$, $l_\sigma \neq 0$ per al più un'infinità numerabile di σ e tali che ξ sia \bar{p} -ammissibile con bordo \bar{p} -ammissibile. Facendo il limite diretto sulle triangolazioni si ottiene lo spazio $IC_i^{\bar{p}}(X; L)$.

Allora si può definire l' i -esimo gruppo di omologia d'intersezione di X a coefficienti in L

$$IH_i^{\bar{p}}(X; L) = \frac{\ker \partial : IC_i^{\bar{p}}(X; L) \longrightarrow IC_{i-1}^{\bar{p}}(X; L)}{\operatorname{im} \partial : IC_{i+1}^{\bar{p}}(X; L) \longrightarrow IC_i^{\bar{p}}(X; L)}$$

per ogni sistema di coefficienti locali L su $X \setminus X_{n-1}$.

2.11 Bibliografia

Per approfondire gli argomenti trattati nel capitolo si possono vedere [1] (capitoli 1-4), [2], [3], [6], [7], [9], [11] (capitoli 3 e 5), [12] e [14] (capitoli 1-3).

Capitolo 3

Dualità di Poincaré generalizzata

3.1 Nozioni preliminari

In questo paragrafo si definiscono, per una triangolazione $T : |N| \longrightarrow Y$ qualunque, certi insiemi elementari

$$\dots \subseteq Q_{i-1}^{\bar{p}} \subseteq Q_i^{\bar{p}} \subseteq Q_{i+1}^{\bar{p}} \subseteq \dots$$

tali che

$$IH_i^{\bar{p}}(Y) = \text{im} H_i(Q_i^{\bar{p}}) \longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p}}).$$

Questi insiemi giocano un ruolo chiave nella dimostrazione della dualità di Poincaré generalizzata e nella dimostrazione dell'indipendenza di $IH_i^{\bar{p}}(Y)$ dalla stratificazione scelta.

Definizione 3.1. Sia Y una pseudovarietà topologica di dimensione m , sia $T : |N| \longrightarrow Y$ una triangolazione compatibile con la stratificazione di Y , sia N' la prima suddivisione baricentrica di N . Per ogni perversità \bar{p} e per ogni

$i \geq 0$ si definisce una funzione $L_i^{\bar{p}} : \{1, 2, \dots, m+1\} \rightarrow \mathbb{N}$ come segue:

$$L_i^{\bar{p}}(k) = \begin{cases} i & \text{se } k = 0 \\ i - 1 & \text{se } k = 1 \\ -1 & \text{se } i - k + p_k < 0, \quad 1 < k \leq m \\ i - k + p_k & \text{se } 0 \leq i - k + p_k < m - k, \quad 1 < k \leq m \\ m - k & \text{se } i - k + p_k \geq m - k, \quad 1 < k \leq m \\ -1 & \text{se } k = m + 1 \end{cases}$$

Si definisce inoltre $\Delta L_i^{\bar{p}}(k) = L_i^{\bar{p}}(k) - L_i^{\bar{p}}(k+1)$.

Si definisce $Q_i^{\bar{p}, T}$ come il sottocomplesso di N' generato dall'insieme dei baricentri dei semplici $\{\sigma \in N \mid \Delta L_i^{\bar{p}}(m - \dim \sigma) = 1\}$.

Osservazione 48.

- i) $L_i^{\bar{p}}(k) = \max \dim |\xi| \cap Y_{m-k}$ per $\xi \in IC_i(Y)$
- ii) $Q_i^{\bar{p}, T}$ è un sottocomplesso di $Q_{i+1}^{\bar{p}, T}$
- iii) $\dim Q_i^{\bar{p}, T} = i$

Lemma 3.1.1. *Se $i \geq 1$ e $\bar{p} + \bar{q} = \bar{t}$, allora esistono delle retrazioni per deformazioni canoniche che conservano i semplici*

$$Y \setminus (|Q_{m-i+1}^{\bar{q}, T}| \cap |N_{m-2}|) \longrightarrow |Q_i^{\bar{p}, T}|$$

e

$$Y \setminus |Q_{m-i+1}^{\bar{q}, T}| \longrightarrow |Q_i^{\bar{p}, T}| \cap |N_{m-2}|.$$

Dimostrazione. Poiché $p_2 = 0$ per ogni \bar{p} , allora $\Delta L_i^{\bar{p}}(0) = \Delta L_i^{\bar{p}}(1) = 1$ per ogni $i > 0$. Allora, dato che $\sigma \in N$ e $\dim \sigma \geq m - 1$, il baricentro $\hat{\sigma}$ giace in ogni $Q_i^{\bar{p}, T}$.

D'altra parte, se $2 \leq k \leq m+1$, allora $L_i^{\bar{p}}(k) + L_{m-i+1}^{\bar{q}}(k) = m - k - 1$, quindi $\Delta L_i^{\bar{p}}(k) + \Delta L_{m-i+1}^{\bar{q}}(k) = 1$. Questo significa che un vertice di ogni simpleso in N_{m-2} sta o in $Q_i^{\bar{p},T}$ o in $Q_{m-i+1}^{\bar{q},T}$.

Allora l'insieme dei vertici in N' che genera $Q_{m-i+1}^{\bar{q},T} \cap N_{m-2}$ è il complementare dell'insieme dei vertici che generano $Q_i^{\bar{p}}$. Ogni simpleso di N' è quindi l'unione della sua intersezione con $|Q_i^{\bar{p},T}|$ e della sua intersezione con $|Q_{m-i+1}^{\bar{q},T}| \cap |N_{m-2}|$.

La prima retrazione è data su ogni simpleso di N' ritraendo lungo tali linee di unione.

(Analogamente si dimostra che esiste la seconda retrazione). \square

3.2 Indipendenza dell'omologia dalla stratificazione

Lemma 3.2.1. *Sia $T : |N| \rightarrow Y$ una triangolazione compatibile con la stratificazione di Y . Allora $\dim_{\mathbb{R}} |Q_i^{\bar{p},T}| \cap Y_{m-k} \leq i - k + p_k$ (cioè $Q_i^{\bar{p},T}$ è una i -catena \bar{p} -ammissibile).*

Dimostrazione. Per ogni $\sigma \in N_j$ si ha che $\dim_{\mathbb{R}} |Q_i^{\bar{p},T}| \cap |\sigma| = L_i^{\bar{p}}(m - j)$.

Inoltre per ogni $\sigma \in N_j$ tale che $|\sigma| \subseteq Y_{m-k}$ si pone $l = m - \dim \sigma$. Si ha quindi che $l \geq k$. Allora $|Q_i^{\bar{p},T}| \cap |\sigma| = \emptyset$ oppure $\dim |Q_i^{\bar{p},T}| \cap |\sigma| = L_i^{\bar{p}}(l) \leq i - l + p_l \leq i - k + p_k$, quindi $\dim_{\mathbb{R}} |Q_i^{\bar{p},T}| \cap Y_{m-k} \leq i - k + p_k$. \square

Definizione 3.2. Sia $T : |N| \rightarrow Y$ una triangolazione compatibile con la stratificazione di Y . Si definisce $C_i(Q_i^{\bar{p},T})$ come il sottogruppo di $C_i(X)$ formato dalle catene con supporto in $|Q_i^{\bar{p},T}|$ (si noti che la definizione è ben posta per il lemma 3.2.1).

Osservazione 49. Le inclusioni

$$\partial^{-1}C_i(Q_i^{\bar{p},T}) \cap C_{i+1}(Q_{i+1}^{\bar{p},T}) \subseteq IC_i^{\bar{p},T}(Y)$$

e

$$(\ker \partial : C_i(Y) \longrightarrow C_{i-1}(Y)) \cap C_i(Q_i^{\bar{p},T}) \subseteq IC_i^{\bar{p},T}(Y)$$

definiscono un omomorfismo

$$\psi : (\text{im} H_i(Q_i^{\bar{p},T}) \longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p},T})) \longrightarrow IH_i^{\bar{p}}(Y).$$

La seguente proposizione rappresenta il risultato fondamentale del paragrafo, e da essa si può trarre come corollario l'indipendenza dell'omologia d'intersezione dalla scelta della stratificazione.

Proposizione 3.2.2. *ψ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Si veda [4], pag. 148. □

Corollario 3.2.3. *$IH_i^{\bar{p}}(Y)$ è finitamente generato ed indipendente dalla stratificazione di Y .*

Dimostrazione. Date due stratificazioni di Y , si consideri una triangolazione $T : |N| \longrightarrow Y$ compatibile con entrambe. Allora

$$\text{im} H_i(Q_i^{\bar{p},T}) \longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p},T})$$

è il gruppo d'omologia d'intersezione definito rispetto ad entrambe le stratificazioni. □

Il seguente corollario afferma che è possibile definire l'omologia d'intersezione a partire da una qualunque triangolazione su Y servendosi degli insiemi $Q_i^{\bar{p},T}$.

Corollario 3.2.4. *Se $T : |N| \rightarrow Y$ è una triangolazione qualunque di Y , allora*

$$IH_i^{\bar{p}}(Y) \cong \text{im}H_i(Q_i^{\bar{p},T}) \longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{p},T}).$$

Dimostrazione. La filtrazione di Y data dagli scheletri $Y = |N_m| \supseteq |N_{m-1}| \supseteq \dots \supseteq |N_0|$ è una stratificazione di Y e T è compatibile con tale stratificazione, quindi il risultato segue per la proposizione 3.2.2. \square

3.3 Dualità di Poincaré generalizzata

Lemma 3.3.1. *Sia Y una pseudovarietà topologica compatta orientabile di dimensione m , siano \bar{p} e \bar{q} perversità complementari. Allora*

$$IH_i^{\bar{q}}(Y) \cong \text{im}H^{m-i}(Q_{m-i+1}^{\bar{p},T}) \longrightarrow H^{m-i}(Q_{m-i}^{\bar{p},T}).$$

Dimostrazione. Per il corollario 3.2.4 si ha che

$$IH_i^{\bar{q}}(Y) \cong \text{im}H_i(Q_i^{\bar{q},T}) \longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{q},T}).$$

Questo è isomorfo a

$$\text{im}H_i(Q_i^{\bar{q},T}, Q_i^{\bar{q},T} \cap N_{m-2}) \longrightarrow H_i(Q_{i+1}^{\bar{q},T}, Q_{i+1}^{\bar{q},T} \cap N_{m-2}),$$

poiché si ha un diagramma commutativo a colonne esatte

$$\begin{array}{ccc}
H_{i-1}(Q_{i+1}^{\bar{q},T} \cap N_{m-2}) & \longleftarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_i(Q_{i+1}^{\bar{q},T}, Q_{i+1}^{\bar{q},T} \cap N_{m-2}) & \longleftarrow & H_i(Q_i^{\bar{q},T}, Q_i^{\bar{q},T} \cap N_{m-2}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
H_i(Q_{i+1}^{\bar{q},T}) & \longleftarrow & H_i(Q_i^{\bar{q},T}) \\
\uparrow & & \uparrow \\
0 & \longleftarrow & H_i(Q_i^{\bar{q},T} \cap N_{m-2})
\end{array}$$

Applicando le retrazioni del lemma 3.1.1 e la dualità tra omologia e coomologia si ottiene il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc}
H_i(Q_i^{\bar{q},T}, Y'_i) & \longrightarrow & H_i(Q_{i+1}^{\bar{q},T}, Y'_{i+1}) \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
H_i(Y \setminus Y'_{m-i+1}, Y \setminus Q_{m-i+1}^{\bar{p},T}) & \longrightarrow & H_i(Y \setminus Y'_{m-i}, Y \setminus Q_{m-i}^{\bar{p},T}) \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
H^{m-i}(Q_{m-i+1}^{\bar{p},T}, Y'_{m-i+1}) & \longrightarrow & H^{m-i}(Q_{m-i}^{\bar{p},T}, Y'_{m-i})
\end{array}$$

$$(Y'_k = Q_k^{\bar{p},T} \cap N_{m-2}).$$

Allora si ha che

$$IH_i^{\bar{q}}(Y) \cong \text{im} H^{m-i}(Q_{m-i+1}^{\bar{p},T}, Y'_{m-i+1}) \longrightarrow H^{m-i}(Q_{m-i}^{\bar{p},T}, Y'_{m-i}) \cong$$

$$\cong \operatorname{im} H^{m-i}(Q_{m-i+1}^{\bar{p},T}) \longrightarrow H^{m-i}(Q_{m-i}^{\bar{p},T}).$$

□

Definizione 3.3. Siano A e B dei \mathbb{K} -spazi vettoriali. Una mappa bilineare $A \times B \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice perfetta se induce un isomorfismo $A \longrightarrow B^*$.

Lemma 3.3.2. Se $U \subseteq V$, allora la mappa di Kronecker $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{m-i}(U) \times H_{m-i}(U) \longrightarrow \mathbb{Z}$, $\langle x, y \rangle = \varepsilon(x \cap y)$ (dove $\varepsilon : H_0(Y) \longrightarrow \mathbb{Z}$ è la mappa che conta i punti con molteplicità) induce una mappa perfetta tra

$$\operatorname{im} H_{m-i}(U) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H_{m-i}(V) \otimes \mathbb{Q}$$

e

$$\operatorname{im} H^{m-i}(V) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow H^{m-i}(U) \otimes \mathbb{Q}.$$

Teorema 3.3.3. (dualità di Poincaré generalizzata) Sia $\varepsilon : IH_0^{\bar{i}}(Y) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la mappa che conta i punti con molteplicità. Allora la mappa

$$IH_i^{\bar{p}}(Y) \times IH_{m-i}^{\bar{q}}(Y) \longrightarrow IH_0^{\bar{i}}(Y) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

diventa non degenera tensorizzando con \mathbb{Q} .

Dimostrazione. Se $i = 0$ il teorema è ovvio.

Per $i \geq 1$, la proposizione 3.2.2 implica che

$$IH_{m-i}^{\bar{p}}(Y) \cong \operatorname{im} H_{m-i}(Q_{m-i}^{\bar{p},T}) \longrightarrow H_{m-i}(Q_{m-i+1}^{\bar{p},T}).$$

Inoltre per il lemma 3.3.1 si ha che

$$IH_i^{\bar{q}}(Y) \cong \operatorname{im} H^{m-i}(Q_{m-i+1}^{\bar{p},T}) \longrightarrow H^{m-i}(Q_{m-i}^{\bar{p},T}).$$

Allora per il lemma 3.3.2 questi due gruppi danno una mappa perfetta

$$(IH_i^{\bar{p}}(Y) \otimes \mathbb{Q}) \times (IH_{m-i}^{\bar{q}}(Y) \otimes \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

□

Osservazione 50. La mappa di dualità di Poincaré si ottiene mandando un ciclo nel suo prodotto cap con la classe fondamentale di Y (cioè la classe che definisce l'orientazione di Y).

Osservazione 51. Se Y non è compatta la mappa di dualità di Poincaré diventa

$$(IH_i^{\bar{p}}(Y) \otimes \mathbb{Q}) \times (IH_{m-i, C}^{\bar{q}}(Y) \otimes \mathbb{Q}) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

3.4 Alcune considerazioni sulla dualità

Osservazione 52. Sia X una pseudovarietà topologica di dimensione n . Allora se \bar{p} e \bar{q} sono perversità complementari esiste una mappa bilineare non degenera $IH_i^{\bar{p}}(X) \times IH_{n-i}^{\bar{q}}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}$. Se $\bar{p} = \bar{q} = \bar{m}$ tale mappa diventa $IH_i(X) \times IH_{n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}$.

Più precisamente la coppia $(a, b) \in IH_i(X) \times IH_{n-i}(X)$ può essere rappresentata da una coppia $(\xi, \eta) \in IC_i(X) \times IC_{n-i}(X)$ tale che $|\xi| \cap |\eta| \subseteq X \setminus X_{n-1}$ e $|\xi| \cap |\eta|$ è al più numerabile. Il numero di tali punti contato con pesi appropriati dipendenti dai coefficienti delle due catene è un numero complesso indipendente dalla scelta di ξ e η e si denota con $a \cap b$. Inoltre per ogni $a \neq 0$ esiste b tale che $a \cap b \neq 0$.

Osservazione 53. La dualità di Poincaré equivale ad affermare che esistono degli isomorfismi naturali $IH_i(X) \cong IH_{n-i}(X)^* \cong IH^{n-i}(X)$ per ogni i . Questo equivale ad affermare che esiste una mappa bilineare non degenera $IH^i(X) \times IH^{n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}$.

Inoltre se X è normale, allora per ogni i e j esistono due omomorfismi naturali $IH_i(X) \times IH_j(X) \longrightarrow H_{i+j-n}(X)$ e $IH^i(X) \times IH^j(X) \longrightarrow H_{n-i-j}(X)$; tuttavia in generale non è possibile sostituire i gruppi di omologia a destra

con dei gruppi di coomologia, poiché non è garantita la validità della dualità di Poincaré per l'omologia singolare.

Osservazione 54. Se X è topologicamente normale per la proposizione 2.5.2 vale

$$IH_i^{\bar{}}(X) \cong H_i(X), \quad IH_i^{\bar{0}}(X) \cong H^{n-i}(X),$$

quindi la dualità di Poincaré generalizzata per queste due perversità si riduce a quella ordinaria

$$H_i(X) \times H^i(X) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Definizione 3.4. Si definisce la *coomologia d'intersezione a supporto compatto* di X come $IH_C^* = \varinjlim IH^*(X, X \setminus K)$ sulla famiglia dei compatti K di X .

Osservazione 55. Esistono degli isomorfismi naturali $IH_C^i(X) \cong IH_i^C(X)^*$. Inoltre se X è compatta l'omologia d'intersezione è uguale a quella a supporto chiuso e la coomologia d'intersezione è uguale a quella a supporto compatto, quindi ci sono degli isomorfismi $IH^i(X) \cong IH_i(X)$.

Inoltre utilizzando la coomologia d'intersezione a supporto compatto si può generalizzare la dualità di Poincaré al caso di pseudovarietà topologiche non compatte. La mappa bilineare non degenere diventa quindi

$$IH^i(X) \times IH_C^{n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{Q}.$$

Inoltre tale mappa induce un isomorfismo

$$IH^i(X) \cong IH_C^{n-i}(X)^*.$$

Esempio 3.1. Sia X una varietà quasiproiettiva con singolarità isolate, siano \bar{p} e \bar{q} due perversità complementari. Si può generalizzare l'esempio 2.3 e

dimostrare che

$$IH_i^{\bar{p}}(X) = \begin{cases} H_i(X) & \text{se } i > 2n - p_n - i \\ \text{im}H_i(X_{\text{reg}}) \rightarrow H_i(X) & \text{se } i = 2n - p_n - i \\ H_i(X_{\text{reg}}) & \text{se } i < 2n - p_n - i \end{cases}$$

Inoltre grazie alla dualità di Poincaré si ha anche che

$$IH_i^{\bar{q},C}(X) = \begin{cases} H_i^C(X) & \text{se } i < 2n - q_n - i \\ \text{im}H_i^C(X_{\text{reg}}) \rightarrow H_i^C(X) & \text{se } i = 2n - q_n - i \\ H_i^C(X_{\text{reg}}) & \text{se } i > 2n - q_n - i \end{cases}$$

Capitolo 4

Omologia d'intersezione e fasci

4.1 Il complesso di fasci d'intersezione

Definizione 4.1. Sia X una pseudovarietà topologica, sia \bar{p} una perversità, siano U e V degli aperti di X tali che $V \subseteq U$. Se $T : |N| \rightarrow U$ è una triangolazione di U allora si può dimostrare facilmente che esiste una triangolazione $S : |M| \rightarrow V$ di V tale che per ogni $\sigma \in M_i$ esiste un unico $\tau(\sigma) \in N_i$ tale che $S(\sigma) \subseteq T(\tau(\sigma))$. Allora si può associare ad ogni catena $\xi \in C_i^T((U))$, $\xi = \sum \xi_\sigma \sigma$, una catena $\rho(\xi) \in C_i^S((V))$ data da $\rho(\xi) = \sum \xi_{\tau(\sigma)} \sigma$.

Si ha che $|\rho(\xi)| = |\xi| \cap V$, quindi se $\xi \in IC_i^{\bar{p},T}((U))$, allora $\rho(\xi) \in IC_i^{\bar{p},S}((V))$.

Facendo il limite diretto sulle triangolazioni rispetto al raffinamento si ottengono delle mappe di restrizione ben definite $\rho : IC_i^{\bar{p}}((U)) \rightarrow IC_i^{\bar{p}}((V))$ che commutano con l'omomorfismo di bordo ∂ . Tali restrizioni sugli aperti di X definiscono un fascio su X le cui sezioni su U sono date da $IC_i((U))$. Per convenzione questo fascio si denota con $\mathcal{IC}_X^{\bar{p},-i}$ (in questo modo si ottiene un fascio di complessi di cocatene invece che un fascio di complessi di catene).

Osservazione 56. Si vede che $\Gamma(U, \mathcal{IC}_X^{\bar{p},-i}) = IC_i^{\bar{p}}((U))$ e $\Gamma_C(U, \mathcal{IC}_X^{\bar{p},-i}) = IC_i^{\bar{p}}(U)$ (sezioni a supporto compatto) e sotto tale identificazione il mor-

fismo di fasci $\partial : \mathcal{IC}_X^{\bar{p}, -i} \longrightarrow \mathcal{IC}_X^{\bar{p}, -i+1}$ induce gli omomorfismi di bordo $\partial : IC_i^{\bar{p}}((U)) \longrightarrow IC_{i-1}^{\bar{p}}((U))$.

Inoltre con tale morfismo ∂ si ottiene un complesso di fasci.

Osservazione 57. In modo analogo si definisce il complesso di fasci $\mathcal{C}_X^{\bar{p}, *}$.

Osservazione 58. Se si considerano i semplici singolari e come mappa di restrizione si prende $\rho : S_i^{\bar{p}}((U)) \longrightarrow S_i^{\bar{p}}((V))$, $\rho(\sigma) = \sigma|_V$, si ottengono due complessi di fasci $\mathcal{S}_X^{\bar{p}, *}$ e $\mathcal{IS}_X^{\bar{p}, *}$.

Osservazione 59. Se L è un sistema locale di coefficienti si può definire in modo analogo anche il complesso di fasci $\mathcal{IC}_{(X, L)}^{\bar{p}, *}$.

4.2 Coomologia dei complessi di fasci

Osservazione 60. Da ora in poi, per rendere la notazione più semplice, si ometterà la perversità.

Definizione 4.2. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X . Allora esiste una triangolazione $T : |N| \longrightarrow X$ tale che per ogni $\sigma \in N$ esiste $i = i(\sigma) \in I$ tale che $T(\sigma) \subseteq U_i$.

Una triangolazione con questa proprietà si dice *compatibile con \mathcal{U}* .

Definizione 4.3. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X , sia V un aperto di X . Si possono definire delle mappe $\rho_i^V : \mathcal{C}_X^{-j}(U_i \cap V) \longrightarrow \mathcal{C}_X^{-j}(V)$ tali che per ogni $\xi \in \mathcal{C}_X^{-j}(U_i \cap V)$ il supporto di $\rho_i^V(\xi)$ sia contenuto in $U_i \cap V$ e se $\eta \in \mathcal{C}_X^{-j}(V)$, allora $\eta = \sum \rho_i^V(\eta|_{U_i \cap V})$ (questo ha senso perché la somma è localmente finita).

La famiglia di mappe $\{\rho_i^V\}$ si dice *partizione dell'unità per il fascio \mathcal{C}_X^{-j} rispetto al ricoprimento aperto \mathcal{U}* .

Osservazione 61. Per definire la partizione dell'unità è utile sapere che si può rappresentare ogni elemento di $\mathcal{C}_X^{-j}(U_i \cap V)$ con una catena $\xi = \sum \xi_\sigma \sigma$ di $C_j^S((U_i \cap V))$, dove $S : |M| \rightarrow U_i \cap V$ è una triangolazione tale che per ogni $\sigma \in M_j$ esiste un unico $\tau = \tau(\sigma) \in N_j$ tale che $S(\sigma) \subseteq T(\tau) \subseteq U_{i(\tau)}$.

Allora se $\tau \in N_j$ si ha che per $\sigma \in M_j$ vale $S(\sigma) = T(\tau) \cap V$.

Osservazione 62. Poiché T è una triangolazione di X , il sottoinsieme $T(\tau)$ di $U_{i(\tau)}$ è un chiuso di X , quindi il sottoinsieme $S(\sigma)$ di $U_{i(\tau)} \cap V$ è un chiuso di V . Questo significa che si può scegliere una triangolazione $R : |L| \rightarrow V$ tale che, preso $\sigma \in M_j$, allora $\sigma \in L_j$ e $R(\sigma) = S(\sigma)$.

Allora si può definire $\rho_i^V(\xi) = \sum_{\sigma \in M_j} \xi_\sigma \sigma$ come un elemento di $C_j^R((V))$, quindi anche come un elemento di $\mathcal{C}_X^{-j}(V)$. Si può mostrare che tali mappe $\rho_i^V : \mathcal{C}_X^{-j}(U_i \cap V) \rightarrow \mathcal{C}_X^{-j}(V)$ formano una partizione dell'unità per \mathcal{C}_X^{-j} compatibile con \mathcal{U} .

Inoltre è possibile definire con lo stesso metodo una partizione dell'unità per \mathcal{IC}_X^{-j} .

Lemma 4.2.1. *Se $p \geq 1$, allora $H^p(X, \mathcal{C}_X^{-j}) = H^p(X, \mathcal{IC}_X^{-j}) = 0$ per ogni j .*

Dimostrazione. Si veda [6], pag.81. □

Definizione 4.4. Un fascio \mathcal{F} si dice *fine* se per ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X esiste una partizione dell'unità per \mathcal{F} compatibile con \mathcal{U} .

Osservazione 63. Il lemma 4.2.1 consiste nel dimostrare che se \mathcal{F} è un fascio fine, allora $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $p \geq 1$.

4.3 Verso l'invarianza topologica dell'omologia d'intersezione

Definizione 4.5. Sia X una varietà quasiproiettiva. Si definisce l' i -esimo fascio di omologia d'intersezione locale $\mathcal{H}^{-i}(\mathcal{IC}_X^*)$ come il $-i$ -esimo fascio di coomologia del complesso \mathcal{IC}_X^* , cioè è il quoziente

$$\frac{\ker \partial : \mathcal{IC}_X^{-i} \longrightarrow \mathcal{IC}_X^{-i+1}}{\operatorname{im} \partial : \mathcal{IC}_X^{-i-1} \longrightarrow \mathcal{IC}_X^{-i}}.$$

Osservazione 64. La spiga di $\mathcal{H}^{-i}(\mathcal{IC}_X^*)$ in $x \in X$ è il gruppo d'omologia d'intersezione relativa $IH_i(X, X \setminus \{x\})$.

Osservazione 65. Si è visto che i gruppi d'omologia d'intersezione di X sono canonicamente isomorfi ai gruppi d'ipercoomologia del complesso \mathcal{IC}_X^* . Allora esiste una successione spettrale con i termini E_2 dati da $E_2^{p,q} = H^p(X, \mathcal{H}^q(\mathcal{IC}_X^*))$ che converge a $IH_{-p-q}(X)$.

In particolare si ha che $IH_*(X)$ è determinato da \mathcal{IC}_X^* a meno di quasi-isomorfismi generalizzati.

Osservazione 66. Per dimostrare che $IH_*(X)$ non dipende dalla stratificazione di Whitney è sufficiente dimostrare che il complesso di fasci \mathcal{IC}_X^* è indipendente a meno di quasi-isomorfismi generalizzati dalla scelta della stratificazione di Whitney.

Definizione 4.6. Si definisce la *restrizione di un fascio \mathcal{F} su X ad Y* come il fascio $\mathcal{F}|_Y$ ottenuto associando ad un aperto U di Y il limite diretto $\varinjlim \mathcal{F}(V)$ sulla famiglia diretta di indici data dagli aperti V contenenti U .

Definizione 4.7. Un fascio \mathcal{F} su X si dice *localmente costante* se per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U di x in X tale che per ogni $y \in U$ la mappa di restrizione $\mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_y$ è un isomorfismo.

Definizione 4.8. Un complesso di fasci \mathcal{A}^* si dice *limitato* se esiste $m \in \mathbb{Z}$ tale che $\mathcal{A}^i = 0$ per ogni i tale che $|i| \geq m$.

\mathcal{A}^* si dice *costruibile* se esiste una stratificazione $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ di X fatta di varietà quasiproiettive tali che i fasci di coomologia $\mathcal{H}^i(\mathcal{A}^*)|_{S_\alpha}$ sono localmente costanti per ogni i e α .

Osservazione 67. Si dimostra che \mathcal{IC}_X^* è un complesso di fasci limitati e costruibili.

L'indipendenza di $IH_*(X)$ dalla stratificazione di Whitney dipende dal seguente teorema:

Teorema 4.3.1. *Sia X una varietà quasiproiettiva puramente di dimensione n . Il fascio di complessi di cocatene \mathcal{IC}_X^* è univocamente caratterizzato a meno di quasi-isomorfismi generalizzati dalle seguenti proprietà:*

- i) \mathcal{IC}_X^* è un complesso di fasci limitati e costruibili*
- ii) esiste una sottovarietà Σ di X di codimensione complessa positiva tale che esiste un quasi-isomorfismo generalizzato tra $\mathcal{IC}_X^*|_{X \setminus \Sigma}$ e il complesso $\mathbb{C}_{X \setminus \Sigma}[2n]$ (che è il fascio costante $\mathbb{C}_{X \setminus \Sigma}$ in dimensione $-2n$ e 0 nelle altre dimensioni)*
- iii) per ogni $x \in X$ il gruppo di coomologia $H^{-i}(\mathcal{IC}_{X,x}^*)$ è un \mathbb{C} -spazio vettoriale di dimesione finita per ogni i ed è 0 per $i > 2n$*
- iv) per ogni $i < 2n$ vale la disuguaglianza $\dim_{\mathbb{C}}\{x \in X | H^{-i}(\mathcal{IC}_{X,x}^*) \neq 0\} < i - n$*
- v) per ogni $i < 2n$ vale la disuguaglianza $\dim_{\mathbb{C}}\{x \in X | H_C^{-2n+i}(\mathcal{IC}_{X,x}^*) \neq 0\} < i - n$, dove $H_C^{-2n+i}(\mathcal{IC}_{X,x}^*)$ è il $(-2n + i)$ -esimo gruppo di ipercoomologia a supporto compatto di \mathcal{IC}_X^* ristretto agli intorni aperti N_x*

di x in X dati dall'intersezione di X con una palla sufficientemente piccola di centro x in \mathbb{P}^n .

Dimostrazione. Si veda [6], pagg. 91-92. \square

4.4 La costruzione di Deligne del complesso di fasci d'intersezione

Osservazione 68. La dimostrazione del fatto che \mathcal{IC}_X^* è univocamente caratterizzato dalle proprietà del teorema 4.3.1 usa la costruzione di Deligne di un complesso che ammette un quasi-isomorfismo generalizzato con \mathcal{IC}_X^* .

Definizione 4.9. Sia \mathcal{A}^* un complesso di fasci su una varietà algebrica quasiproiettiva X , sia $p \in \mathbb{Z}$.

Si definisce il *complesso troncato* $\tau_p \mathcal{A}^*$ come il complesso di fasci dato da

$$\tau_p \mathcal{A}^i = \begin{cases} \mathcal{A}^i & \text{se } i < p \\ \ker d : \mathcal{A}^i \longrightarrow \mathcal{A}^{i+1} & \text{se } i = p \\ 0 & \text{se } i > p \end{cases}$$

Osservazione 69. Sia X una varietà quasiproiettiva, sia

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0$$

una stratificazione di Whitney di X , sia $i_k : X \setminus X_{n-k} \hookrightarrow X \setminus X_{n-k-1}$.

Si ricorda che se \mathcal{F} è un fascio su $X \setminus X_{n-k}$, allora $(i_k)_* \mathcal{F}$ è il fascio su $X \setminus X_{n-k-1}$ definito da $(i_k)_* \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(i_k^{-1}V)$ per ogni aperto V di $X \setminus X_{n-k-1}$.

Teorema 4.4.1. *Il complesso di fasci*

$$\tau_{-n-1} R(i_n)_* \tau_{-n-2} R(i_{n-1})_* \dots \tau_{-2n} R(i_1)_* \mathbb{C}_{X \setminus X_{n-1}}[2n]$$

soddisfa le condizioni del teorema 4.3.1.

Osservazione 70. Dal teorema 4.4.1 segue che tale complesso ammette un quasi-isomorfismo generalizzato con \mathcal{IC}_X^* .

Inoltre tale costruzione non richiede che la filtrazione sia fatta da sottovarietà algebriche. Si vedrà anche che esiste una filtrazione canonica

$$X = X_n^c \supseteq X_{n-1}^c \supseteq \dots \supseteq X_0^c$$

di X formata da sottoinsiemi chiusi tale che la costruzione di Deligne applicata a questa filtrazione dà un complesso che ammette un quasi-isomorfismo generalizzato con \mathcal{IC}_X^* .

Tali chiusi inoltre non saranno necessariamente sottovarietà di X , ma saranno univocamente determinati da X .

4.5 La filtrazione canonica

Osservazione 71. Sia U_1 il più grande sottoinsieme aperto di X tale che i fasci di coomologia del complesso \mathcal{C}_X^* ristretti ad U_1 sono tutti localmente costanti.

Poiché l' i -esimo fascio di coomologia di \mathcal{C}_X^* ha come spiga $H_i(X, X \setminus \{x\})$ in x e

$$H_i(X, X \setminus \{x\}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } i = 2n \\ 0 & \text{se } i \neq 2n \end{cases}$$

se x è un punto nonsingolare di X , segue che $X \setminus X_{n-1}^c \subseteq U_1$ per ogni stratificazione di Whitney

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0$$

di X .

Sia $X_{n-1}^c = X \setminus U_1$; allora X_{n-1}^c è un chiuso di X e $X_{n-1}^c \subseteq X_{n-1}$.

Si definisce X_{n-k}^c induttivamente per $1 \leq k \leq n$ nel modo seguente. Se $1 \leq j \leq k$ siano

$$i_j^c : X \setminus X_{n-j}^c \hookrightarrow X \setminus X_{n-j-1}^c$$

e

$$h_k : X \setminus X_{n-k}^c \hookrightarrow X.$$

Allora si definisce X_{n-k-1}^c come il complementare in X_{n-k}^c del più grande sottoinsieme aperto di X_{n-k}^c su cui i fasci di coomologia dei complessi

$$\mathcal{C}_{X_{n-k}^c}^*$$

e

$$R(h_k)_* \tau_{k-2n-2} R(i_{k-1}^c)_* \dots \tau_{-2n+1} R(i_2^c)_* \tau_{-2n} R(i_1^c)_* \mathcal{C}_{U_1}^*$$

sono entrambi localmente costanti.

Per induzione ogni X_{n-k}^c è un sottoinsieme chiuso di X e la filtrazione

$$X = X_n^c \supseteq X_{n-1}^c \supseteq \dots \supseteq X_0^c$$

è meno fine di una qualunque stratificazione di Whitney

$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0,$$

cioè per ogni j si ha che $X_j^c \subseteq X_j$.

Teorema 4.5.1. *Il complesso*

$$\tau_{-n-1} R(i_n^c)_* \tau_{-n-2} R(i_{n-1}^c)_* \dots \tau_{-2n} R(i_1^c)_* \mathcal{C}_{U_1}^*[2n]$$

è un invariante topologico di X .

Osservazione 72. Si può mostrare per induzione che ogni complesso di fasci limitati costruibili su X che soddisfa le proprietà del teorema 4.3.1 ammette una quasi-isomorfismo generalizzato canonico con il complesso del teorema

4.5.1. Poiché \mathcal{IC}_X^* è univocamente caratterizzato dal teorema 4.3.1, ne consegue che \mathcal{IC}_X^* è univocamente caratterizzato dal teorema 4.3.1 a meno di quasi-isomorfismi generalizzati canonici. Allora $IH_*(X)$ è indipendente dalla scelta della stratificazione di Whitney ed è un invariante topologico di X rispetto all'omeomorfismo.

4.6 Bibliografia

Per ulteriori approfondimenti sugli argomenti di questo capitolo si possono vedere [1] (capitolo 5), [11] (capitolo 5), [12] (capitolo 7), [14] (capitoli 6-9).

Capitolo 5

Omologia e varietà algebriche

5.1 Kähler package

I due seguenti teoremi sono fondamentali nell'indagine delle proprietà topologiche delle varietà algebriche complesse (per una trattazione dell'argomento si veda l'articolo *The topology of complex algebraic varieties after S. Lefschetz* di K. Lamotke). In particolare il secondo non ha una dimostrazione puramente topologica; le dimostrazioni note fanno appello alla teoria di Hodge oppure a delle profonde proprietà aritmetiche delle varietà algebriche, cioè le congetture di Weil (che verranno discusse in seguito in questo capitolo).

Teorema 5.1.1. (*teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane*) Sia X una varietà algebrica proiettiva nonsingolare di dimensione n in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, sia H un iperpiano in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ tale che $X \setminus H$ è nonsingolare. Allora l'omomorfismo indotto dall'inclusione

$$H_i(X \cap H) \longrightarrow H_i(X)$$

è un isomorfismo per $i < n - 1$ ed è suriettivo per $i = n - 1$.

Teorema 5.1.2. (*hard Lefschetz theorem*) Sia X una varietà algebrica proiettiva nonsingolare di dimensione n in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, sia H un iperpiano in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ tale che $X \setminus H$ è nonsingolare, sia $\Omega = [H \cap X] \in H^2(X)$. Allora la mappa

$$(\cap \Omega)^k : H_{n+k}(X) \longrightarrow H_{n-k}(X)$$

è un isomorfismo per ogni k .

Questi due teoremi fanno parte di un gruppo di teoremi fondamentali che riguardano le varietà algebriche, denominato *Kähler package*.

Teorema 5.1.3. (*Kähler package*) Sia X una varietà algebrica complessa di dimensione n , nonsingolare e compatta, immersa in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. La coomologia di X a coefficienti complessi soddisfa i seguenti teoremi:

i) *Decomposizione pura di Hodge:*

$$H^i(X) \cong \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X),$$

con $H^{\overline{p,q}}(X) = H^{q,p}(X)$.

ii) *Hard Lefschetz theorem*

iii) *Dualità di Poincaré*

iv) *Teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane*

v) *Teorema della segnatura di Hodge*

Esempio 5.1. Sia X la somma wedge di due $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Come si è visto in precedenza questa è una varietà algebrica complessa compatta con una singolarità, e i suoi numeri di Betti sono $(1, 0, 2)$. Da questo si può dedurre immediatamente che per X non valgono la dualità di Poincaré e l'hard Lefschetz theorem.

Da questo segue che la validità dei teoremi del Kähler package decade non appena si considerano delle varietà singolari.

Si può ottenere un analogo del Kähler package per varietà singolari usando l'omologia d'intersezione.

Teorema 5.1.4. (*Kähler package*) *Sia X una varietà algebrica quasiproiettiva compatta di dimensione pura n con una stratificazione di Whitney fissata e immersa in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. Allora valgono i seguenti teoremi:*

i) Decomposizione pura di Hodge: esiste una decomposizione

$$IH_k(X) \cong \bigoplus_{p+q=k} IH_{p,q}(X)$$

tale che $IH_{p,q}(X) \cong IH_{q,p}(X)$.

ii) Hard Lefschetz theorem: sia H un iperpiano trasverso a tutti gli strati di X , sia $\Omega = [H \cap X] \in H^2(X)$, sia $\cap \Omega$ il prodotto cap per Ω . Allora la mappa

$$(\cap \Omega)^k : IH_{n+k}(X) \longrightarrow IH_{n-k}(X)$$

è un isomorfismo per ogni k .

iii) Dualità di Poincaré generalizzata: esiste una mappa bilineare perfetta

$$\sigma : IH_i(X) \times IH_{2n-i}(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

(per vedere come è fatta questa mappa si guardi il teorema 3.3.3).

iv) Teorema di Lefschetz sulle sezioni iperpiane: sia H un iperpiano trasverso a tutti gli strati di X ; allora l'omomorfismo indotto dall'inclusione

$$IH_i(X \cap H) \longrightarrow IH_i(X)$$

è un isomorfismo per $i < n - 1$ ed è suriettivo per $i = n - 1$.

v) *Teorema della segnatura di Hodge:*

$$\sigma(X) = \sum_{p+q \in 2\mathbb{Z}} (-1)^p \dim IH_{p,q}(X).$$

Per la dimostrazione si vedano i lavori di Saito [16, 17, 18]. Una dimostrazione più elementare si trova nel lavoro [4]. Il survey [5] contiene una discussione delle idee alla base delle due dimostrazioni e un loro confronto.

Osservazione 73. La definizione di Ω è ben posta, in quanto nelle ipotesi del teorema il prodotto cap si può definire come la mappa

$$IH_{i+j}^{\bar{p}}(X) \times H^i(X) \longrightarrow IH_j^{\bar{p}}(X).$$

In generale questa mappa non è ben definita a causa delle condizioni di ammissibilità sulle catene, ma in questo caso $H^i(X) \cong IH_{2n-i}^{\bar{0}}(X)$, quindi il prodotto cap è ben definito, in quanto la nozione di trasversalità coincide con le condizioni di $\bar{0}$ -ammissibilità.

Esempio 5.2. Sia X la somma wedge di due $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Come si è visto in precedenza i numeri di Betti relativi all'omologia d'intersezione di X sono $(2, 0, 2)$, quindi X soddisfa i teoremi di Lefschetz e la dualità di Poincaré generalizzata (analogamente si può verificare che soddisfa i teoremi di Hodge).

5.2 Enunciato delle congetture di Weil

Definizione 5.1. Sia X una varietà proiettiva complessa nonsingolare in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di dimensione m definita su un anello di interi algebrici R , sia \mathfrak{m} un ideale massimale di R . Allora R/\mathfrak{m} è un campo finito.

Sia p la caratteristica di R/\mathfrak{m} . Allora R/\mathfrak{m} è un campo con $q = p^s$ elementi per un certo intero positivo s .

Si può definire un insieme

$$X_{\mathfrak{m}} \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{F}_q) = \frac{\mathbb{F}_q^{N+1} \setminus \{0\}}{\mathbb{F}_q \setminus \{0\}}$$

riducendo modulo \mathfrak{m} le equazioni a coefficienti in R che definiscono X . Se si sceglie \mathfrak{m} in modo tale che la caratteristica p di R/\mathfrak{m} sia un primo “buono”, allora $X_{\mathfrak{m}}$ è una varietà proiettiva nonsingolare di dimensione m su \mathbb{F}_q .

Sia $\overline{X}_{\mathfrak{m}}$ la varietà corrispondente definita sulla chiusura algebrica $\overline{\mathbb{F}_q}$ di \mathbb{F}_q definita dalle stesse equazioni di $X_{\mathfrak{m}}$. Sia N_r il numero di punti di $\overline{X}_{\mathfrak{m}}$ della forma $[x_0, \dots, x_N]$, dove ogni x_j sta in \mathbb{F}_{q^r} . Si definisce $Z(t)$ come

$$Z(t) = \exp \left(\sum_{r>0} N_r \frac{t^r}{r} \right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

Esempio 5.3. Se $X = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, $R = \mathbb{Z}$, $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}$ allora

$$N_r = 1 + p^r + p^{2r} + \dots + p^{mr}$$

e

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp \left(\sum_{r>0} (1 + p^r + \dots + p^{mr}) \frac{t^r}{r} \right) = \\ &= \frac{1}{(1-t)(1-pt)(1-p^2t) \dots (1-p^mt)}. \end{aligned}$$

Osservazione 74. Le congetture di Weil collegano i numeri N_r ai numeri di Betti $\dim H_j(X)$ di X . Questi possono essere espressi in termini della funzione $Z(t)$ come segue:

$$Z(t) = \frac{P_1(t)P_3(t) \dots P_{2m-1}(t)}{P_0(t)P_2(t) \dots P_{2m}(t)},$$

dove $P_0(t) = 1 - t$, $P_{2m}(t) = 1 - q^m t$ e se $0 < j < 2m$ allora $P_j(t)$ è un polinomio in t a coefficienti interi tale che

$$P_j(t) = \prod_{1 \leq i \leq \dim H_j(X)} (1 - \alpha_{ji} t),$$

dove ogni α_{ji} è un intero algebrico e $|\alpha_{ji}| = q^{\frac{j}{2}}$.

Si noti che tali condizioni significano che $Z(t)$ determina univocamente i polinomi $P_j(t)$, quindi anche i numeri di Betti di X , poiché $\dim H_j(X) = \deg P_j(t)$.

Proposizione 5.2.1. *Sia $E(X) = \sum_j (-1)^j \dim H_j(X)$ la caratteristica di Eulero di X . Allora $Z(t)$ soddisfa l'equazione funzionale*

$$Z\left(\frac{1}{q^m t}\right) = \pm q^{\frac{mE(X)}{2}} t^{E(X)} Z(t).$$

Osservazione 75. L'affermazione $|\alpha_{ji}| = q^{\frac{j}{2}}$ è chiamata *ipotesi di Riemann* per analogia con la funzione ζ di Riemann.

Infatti si pone $t = q^{-s}$ in $Z(t)$ per ottenere

$$Z(q^{-s}) = \exp\left(\sum_{r>0} N_r \frac{q^{-rs}}{r}\right).$$

Si dice che un divisore primo \mathfrak{p} di X è una classe d'equivalenza di punti di \overline{X}_m modulo la coniugazione su \mathbb{F}_q e si definisce la sua norma come

$$\|\mathfrak{p}\| = q^{\deg \mathfrak{p}},$$

dove $\deg \mathfrak{p}$ è il numero di punti nella classe d'equivalenza di \mathfrak{p} . Allora il numero di punti di \overline{X}_m definiti su \mathbb{F}_{q^r} è

$$N_r = \sum_{\deg \mathfrak{p} | r} \deg \mathfrak{p}.$$

Allora

$$\begin{aligned} Z(q^{-s}) &= \exp\left(\sum_{r>0} \sum_{\deg \mathfrak{p} | r} \frac{\deg \mathfrak{p} \|\mathfrak{p}\|^{\frac{-sr}{\deg \mathfrak{p}}}}{r}\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{\mathfrak{p}} \sum_i \frac{\|\mathfrak{p}\|^{-si}}{i}\right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{\mathfrak{p}} \exp(-\ln(1 - \|\mathfrak{p}\|^{-s})) = \\
&= \prod_{\mathfrak{p}} (1 - \|\mathfrak{p}\|^{-s})^{-1}.
\end{aligned}$$

Si ricorda che la funzione ζ classica è data da

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} n^{-s} = \prod_{p \text{ primo}} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

L'ipotesi di Riemann classica afferma che gli zeri di $\zeta(s)$ stanno sulla retta $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$ in \mathbb{C} . Quando $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ l'affermazione che $|\alpha_{ji}| = q^{\frac{j}{2}}$, dove

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \prod_j \left(\prod_{1 \leq i \leq \dim H_j(X)} (1 - \alpha_{ji}t) \right)^{(-1)^{j+1}} = \\
&= \left(\prod_{1 \leq i \leq \dim H_1(X)} (1 - \alpha_{1i}t) \right) (1-t)^{-1} (1-qt)^{-1},
\end{aligned}$$

equivale all'affermazione che se $Z(t) = 0$, allora $|t| = q^{\frac{1}{2}}$, cioè se $Z(q^{-s}) = 0$ allora $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Weil dimostrò alcuni casi particolari delle proprie congetture e realizzò che per dimostrare il caso generale era necessaria una teoria coomologica appropriata per le varietà algebriche su campi con caratteristica diversa da zero analoga alla coomologia ordinaria per le varietà su \mathbb{C} . Grothendieck riuscì a definire una tale coomologia, la coomologia ℓ -adica, servendosi della topologia étale e provò parte delle congetture (il fatto che $Z(t)$ è razionale e l'equazione funzionale). Deligne concluse la dimostrazione nel 1973 provando l'analogo dell'ipotesi di Riemann.

5.3 Topologia étale e coomologia ℓ -adica

Definizione 5.2. Sia ℓ un primo. Si definisce l'anello degli interi ℓ -adici come l'anello

$$\mathbb{Z}_\ell = \varprojlim \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z}$$

e si indica con \mathbb{Q}_ℓ il suo campo delle frazioni.

Osservazione 76. Sia X una varietà quasiproiettiva definita su un campo algebricamente chiuso \mathbb{K} . La topologia di Zariski su X riflette la struttura algebrica della varietà; tuttavia essa è troppo poco fine per molti propositi. Ovviamente quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ è possibile dare ad X la topologia usuale sui complessi, ma in generale questo non è possibile. La *topologia étale* su X ha un ruolo simile a quello della topologia complessa. Essa non è una topologia, ma si comporta come tale in molte situazioni. Invece di prendere degli aperti di X si considerano i morfismi étale $g : U \rightarrow X$.

Definizione 5.3. Un morfismo si dice *étale* se è piatto e non ramificato, cioè se è un ricoprimento non ramificato di un sottoinsieme di Zariski aperto in X .

Osservazione 77. Un morfismo è étale se induce un isomorfismo locale tra coni tangenti.

In termini algebrici, se U è una varietà algebrica quasiproiettiva su \mathbb{K} , allora $g : U \rightarrow X$ è un morfismo étale se e solo se ogni $u \in U$ è tale che esistono degli intorni aperti di Zariski V di u in U e W di $g(u)$ in X , delle funzioni $a_j : W \rightarrow \mathbb{K}$, $i \leq j \leq n$, tali che ogni a_j è una funzione razionale in coordinate non omogenee su W e per ogni $x \in W$ il polinomio

$$P(t, x) = t^n + a_1(x)t^{n-1} + \dots + a_n(x)$$

in t ha radici semplici, e un isomorfismo

$$V \longrightarrow \{(t, x) \in \mathbb{K} \times W \mid p(t, x) = 0\}$$

la cui proiezione su W è g .

Osservazione 78. Se $g : U \longrightarrow X$ e $f : V \longrightarrow U$ sono morfismi étale, allora anche $g \circ f : V \longrightarrow X$ è un morfismo étale.

Inoltre se $g : U \longrightarrow X$ e $f : V \longrightarrow X$ sono morfismi étale, allora esiste un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{a} & U \\ \downarrow b & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

con la proprietà universale che se

$$\begin{array}{ccc} W' & \xrightarrow{a'} & U \\ \downarrow b' & & \downarrow g \\ V & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

è un altro diagramma commutativo, allora esiste un unico $\tau : W' \longrightarrow W$ tale che $a' = a \circ \tau$ e $b' = b \circ \tau$.

La composizione $g \circ a = f \circ b : W \longrightarrow X$ rappresenta l'intersezione tra g e f per la topologia étale.

La definizione di un fascio \mathcal{F} su X rispetto alla topologia étale è simile a quella di un fascio per una topologia di X .

Definizione 5.4. Per ogni morfismo étale $g : U \rightarrow X$ esiste un gruppo abeliano $\mathcal{F}(g)$ che soddisfa le seguenti condizioni:

- i) se $f : V \rightarrow U$ è un morfismo étale, allora esiste una mappa di restrizione

$$\mathcal{F}(g) \rightarrow \mathcal{F}(g \circ f), \quad s \mapsto s|_{g \circ f}$$

con le proprietà functoriali dei fasci

- ii) se $g_i : U_i \rightarrow U$ sono morfismi étale tali che $U = \bigcup_{i \in I} g_i(U_i)$ e se $s_i \in \mathcal{F}(g \circ g_i)$ soddisfa

$$s_i|_{g \circ g_{ij}} = s_j|_{g \circ g_{ij}}$$

per ogni i e j , dove $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow U$ viene dal diagramma di pullback

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} & \longrightarrow & U_i \\ \downarrow & \searrow^{g_{ij}} & \downarrow g_i \\ U_j & \xrightarrow{g_j} & U \end{array}$$

allora esiste un unico $s \in \mathcal{F}(g)$ tale che $s_i = s|_{g \circ g_i}$ per ogni $i \in I$.

\mathcal{F} si dice *fascio étale*.

I morfismi di fasci étale vengono definiti in modo ovvio, e si ottiene una categoria $\mathbf{ÉtSh}(X)$ di fasci étale su X .

Definizione 5.5. La definizione di funtori derivati destri per funtori additivi esatti a sinistra si può estendere per definire i funtori derivati destri di funtori da $\mathbf{ÉtSh}(X)$ ad \mathbf{Ab} . C'è un funtore $\Gamma_X : \mathbf{ÉtSh}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$ definito da

$$\Gamma_X(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(1_X : X \rightarrow X).$$

I gruppi di coomologia étale di \mathcal{F} sono definiti come

$$H_{\text{ét}}^i(X; \mathcal{F}) = R^i \Gamma_X(\mathcal{F}).$$

Definizione 5.6. Sia ℓ un primo diverso da p . Il fascio costante $(\mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})_X$ su X è definito da

$$(\mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})_X(g : U \longrightarrow X) = C(U, \mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z}),$$

dove U è dotato della topologia di Zariski e $\mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z}$ ha la topologia discreta.

La mappa di restrizione

$$(\mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})_X(g) \longrightarrow (\mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})_X(g \circ f)$$

è data dalla composizione con f .

Definizione 5.7. La coomologia ℓ -adica di X è definita come

$$H^*(X; \mathbb{Q}_\ell) = (\varinjlim H_{\text{ét}}^*(X; (\mathbb{Z}/\ell^r \mathbb{Z})_X)) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

5.4 Proprietà fondamentali della coomologia ℓ -adica

Proposizione 5.4.1. *La coomologia ℓ -adica ha le seguenti proprietà:*

- i) La coomologia ℓ -adica è un funtore controvariante dalla categoria delle varietà quasiproiettive su \mathbb{K} alla categoria dei \mathbb{Q}_ℓ -spazi vettoriali*
- ii) $H^i(X; \mathbb{Q}_\ell) = 0$ a meno che $1 \leq i \leq 2m$, dove m è la dimensione di X ; inoltre la dimensione di $H^i(X; \mathbb{Q}_\ell)$ è finita per ogni i se X è proiettiva (e congetturalmente per ogni varietà quasiproiettiva)*

iii) (*Dualità di Poincaré*) Se X è nonsingolare e proiettiva, allora esiste una mappa bilineare perfetta

$$H^i(X; \mathbb{Q}_\ell) \otimes H^{2m-i}(X; \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2m}(X; \mathbb{Q}_\ell) \cong \mathbb{Q}_\ell$$

per $0 \leq i \leq 2m$

iv) (*Formula del punto fisso di Lefschetz*) Se X è nonsingolare proiettiva di dimensione m su \mathbb{K} e $f : X \longrightarrow X$ ha solo punti fissi isolati e di molteplicità 1, allora il numero di Lefschetz $L(f)$ di f definito da

$$L(f) = \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \text{Tr}(f^* : H^j(X; \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^j(X; \mathbb{Q}_\ell))$$

è uguale al numero di punti fissi; Più in generale se f ha punti isolati di molteplicità qualsiasi, allora $L(f)$ è il numero di punti fissi contati con molteplicità

v) (*Confronto e cambio di campo base*) Se X è una varietà complessa proiettiva nonsingolare, allora $H^j(X; \mathbb{Q}_\ell)$ è la coomologia ordinaria a coefficienti in \mathbb{Q}_ℓ , quindi

$$\dim_{\mathbb{C}} H^j(X) = \dim_{\mathbb{Q}_\ell} H^j(X; \mathbb{Q}_\ell);$$

inoltre se X è definita su un anello di interi algebrici R , allora

$$H^j(X; \mathbb{Q}_\ell) = H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell)$$

Osservazione 79. La coomologia ℓ -adica soddisfa anche la maggior parte delle proprietà della coomologia ordinaria, come l'esistenza dell'omologia relativa, le successioni lunghe esatte e così via.

Osservazione 80. Le proprietà della coomologia ℓ -adica descritte nella proposizione 5.4.1 possono essere usate per provare le congetture di Weil. Una definizione fondamentale per fare ciò è quella di mappa di Frobenius.

Definizione 5.8. La mappa di Frobenius $f : \overline{X}_m \rightarrow \overline{X}_m$ è data da

$$f([x_0, \dots, x_N]) = [x_0^q, \dots, x_N^q].$$

Osservazione 81. La definizione di mappa di Frobenius ha senso perché le equazioni che definiscono \overline{X}_m hanno coefficienti in \mathbb{F}_q e un polinomio $P(x_0, \dots, x_N)$ a coefficienti in \mathbb{F}_q soddisfa la proprietà

$$P(x_0^q, \dots, x_N^q) = P^q(x_0, \dots, x_N).$$

Osservazione 82. Un punto $x \in \overline{X}_m$ è fissato dall' r -esimo iterato di f se e solo se ha coordinate in \mathbb{F}_{q^r} , quindi il numero N_r di punti in \overline{X}_m con coordinate in \mathbb{F}_{q^r} coincide con il numero di punti fissi di f^r . Si può verificare che tutti i punti fissi di f^r hanno molteplicità 1, quindi per la formula del punto fisso di Lefschetz si ha che $N_r = L(f^r)$ per ogni $r > 0$. Questo significa che

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp \left(\sum_{r>0} \frac{L(f^r)t^r}{r} \right) = \\ &= \exp \left(\sum_{r>0} \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \text{Tr} \left((f^r)^* : H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \right) \frac{t^r}{r} \right) = \\ &= \prod_{j=0}^{2m} \exp \left(\sum_{r>0} (-1)^j \text{Tr} \left((f^r)^* : H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \right) \frac{t^r}{r} \right) = \\ &= \prod_{j=0}^{2m} \det \left(1 - t f^* : H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \right)^{(-1)^{j+1}} = \\ &= \frac{P_1(t)P_3(t) \dots P_{2m-1}(t)}{P_0(t)P_2(t) \dots P_{2m}(t)}, \end{aligned}$$

dove $P_j(t) = \det \left(1 - t f^* : H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \rightarrow H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \right)$.

Allora

$$P_j(t) = \prod_{1 \leq i \leq \dim H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell)} (1 - \alpha_{ji}t),$$

dove gli α_{ji} sono gli autovalori dell'azione della mappa di Frobenius su $H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell)$. Allora l'ipotesi di Riemann equivale all'affermazione che gli autovalori dell'azione della mappa di Frobenius su $H^j(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell)$ siano interi algebrici di modulo $q^{\frac{j}{2}}$. L'equazione funzionale della proposizione 5.2.1 per $Z(t)$ segue dalla dualità di Poincaré e dal fatto che se $\alpha \in H^i(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell)$ e $\beta \in H^{2m-i}(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell)$, allora l'immagine lungo la mappa di dualità di $f^*\alpha$ e $f^*\beta$ è q^m volte l'immagine di α e β , poiché la mappa di Frobenius induce una mappa

$$f^* : H^{2m}(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow H^{2m}(\overline{X}_m; \mathbb{Q}_\ell)$$

che è la moltiplicazione per q^m .

5.5 Le congetture di Weil per varietà singolari

Osservazione 83. Sia X una varietà proiettiva (possibilmente singolare) in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, sia $Y = \overline{X}_m$. Allargando l'anello R (se necessario), si può assumere che esista una stratificazione di Whitney data da una filtrazione

$$X = X_m \supseteq X_{m-1} \supseteq \dots \supseteq X_0$$

tale che gli X_j sono definiti su R . In più si può assumere che se Y_j è l'estensione a $\overline{\mathbb{F}}_q$ della riduzione modulo \mathfrak{m} di X_j , allora

$$Y = Y_m \supseteq Y_{m-1} \supseteq \dots \supseteq Y_0$$

è una filtrazione di Y fatta di sottovarietà chiuse tali che $Y_j \setminus Y_{j-1}$ è vuoto o nonsingolare di dimensione j per ogni j . A questo punto si può usare la costruzione di Deligne dell'omologia d'intersezione per definire la coomologia d'intersezione ℓ -adica.

Definizione 5.9. Sia $i_k : Y \setminus Y_{m-k} \longrightarrow Y \setminus Y_{m-k-1}$. Si definisce il complesso di fasci $\mathcal{IC}_Y^*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})$ su Y rispetto alla topologia étale come

$$\tau_{-m-1}R(i_m)_*\tau_{-m-2}R(i_{m-1})_*\cdots\tau_{-2m}R(i_1)_*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{Y \setminus Y_{m-1}}[2m],$$

dove $(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{Y \setminus Y_{m-1}}[2m]$ è il complesso su $Y \setminus Y_{m-1}$ dato dal fascio costante $(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z})_{Y \setminus Y_{m-1}}$ in grado $-2m$ e 0 negli altri gradi.

Per analogia con la coomologia ℓ -adica si definisce

$$IH_*(Y; \mathbb{Q}_\ell) = (\varinjlim H_{\acute{e}t}^*(Y; \mathcal{IC}_Y^*(\mathbb{Z}/\ell^r\mathbb{Z}))) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

e si pone la *coomologia d'intersezione ℓ -adica* $IH^*(Y; \mathbb{Q}_\ell)$ come il duale di $IH_*(Y; \mathbb{Q}_\ell)$.

Proposizione 5.5.1. *Sia X una varietà proiettiva complessa (possibilmente singolare) definita su un anello di interi algebrici R . La coomologia d'intersezione ℓ -adica ha le seguenti proprietà.*

i) (Confronto e cambio di campo base)

$$IH^*(Y; \mathbb{Q}_\ell) \cong IH^*(X; \mathbb{Q}_\ell).$$

Inoltre

$$\dim_{\mathbb{Q}_\ell} IH^i(X; \mathbb{Q}_\ell) = \dim_{\mathbb{C}} IH^i(X).$$

ii) (Dualità di Poincaré) Esiste una mappa bilineare perfetta

$$IH^i(Y; \mathbb{Q}_\ell) \otimes IH^{2m-i}(Y; \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow \mathbb{Q}_\ell.$$

iii) (Formula del punto fisso di Lefschetz) Se $f : Y \longrightarrow Y$ è un isomorfismo con punti fissi isolati, allora il numero di Lefschetz

$$L(f) = \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j \operatorname{Tr}(f^* : IH^j(Y; \mathbb{Q}_\ell) \longrightarrow IH^j(Y; \mathbb{Q}_\ell))$$

di f è uguale al numero di punti fissi contati con molteplicità.

Definizione 5.10. Si definisce la mappa di Frobenius $f : Y \rightarrow Y$ come la mappa

$$f([x_0, \dots, x_N]) = [x_0^q, \dots, x_N^q].$$

Osservazione 84. Il numero di Lefschetz $L(f^r)$ è il numero di punti di Y definiti sul campo \mathbb{F}_{q^r} contati con molteplicità. La molteplicità di un punto nonsingolare è 1, ma in generale la molteplicità dipende dalla singolarità di Y nel punto in questione.

Osservazione 85. Come nel caso nonsingolare la mappa di Frobenius agisce banalmente sull'omologia d'intersezione in grado 0 e come la moltiplicazione per q^m in grado $2m$. Inoltre gli autovalori della sua azione sull'omologia d'intersezione in grado j per ogni j tra 0 e $2m$ sono degli interi α_{ji} tali che

$$|\alpha_{ji}| = q^{\frac{j}{2}}.$$

Si può quindi recuperare la congettura di Weil analoga all'ipotesi di Riemann anche nel caso delle varietà singolari.

5.6 Bibliografia

Per approfondimenti sugli argomenti di questo capitolo si vedano [2], [4], [5], [16], [17], [18] e [12] (capitolo 10).

Appendice A

Stratificazioni di Whitney

(Per una trattazione più esaustiva dell'argomento, si vedano [11], capitolo 3.2, [12], capitolo 4.10 oppure le note *Lectures on stratification of complex analytic sets* di M. H. Schwartz)

Definizione A.1. Sia X una varietà quasiproiettiva di dimensione pura n . Una *stratificazione di Whitney di X* è una filtrazione

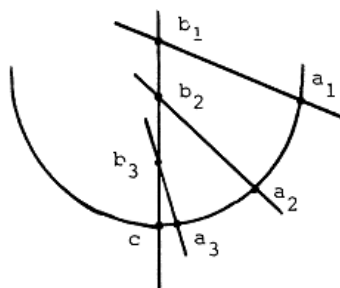
$$X = X_n \supseteq X_{n-1} \supseteq \dots \supseteq X_0$$

di varietà chiuse tale che per ogni j l'insieme $X_j \setminus X_{j-1}$ è vuoto o è una varietà quasiproiettiva nonsingolare di dimensione pura j .

Le componenti S_α di $X_j \setminus X_{j-1}$ sono dette *strati* della stratificazione e devono soddisfare le cosiddette *condizioni di Whitney*, cioè:

- i) se una successione di punti $a_i \in S_\alpha$ tende ad un punto $c \in S_\beta$, allora $T_c S_\beta$ è contenuto nel limite di $T_{a_i} S_\alpha$ (qualora esso esista)
- ii) Se due successioni di punti $a_i \in S_\alpha$ e $b_i \in S_\beta$ tendono a $c \in S_\beta$, allora il limite della retta contenente a_i e b_i è contenuto nel limite di $T_{a_i} S_\alpha$ (qualora essi esistano)

Esempio A.1. Sia $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^4 + y^4 = xyz\}$, siano $X_2 = X$, $X_1 = \{x = y = 0\}$ e $X_0 = \emptyset$. Questa filtrazione ha due strati $S_\alpha = X \setminus X_1$ e $S_\beta = X_1$ nonsingolari, ma non soddisfa la seconda condizione di Whitney. Infatti se si prendono due successioni $\{a_i\}$ e $\{b_i\}$ come mostrato in figura, in modo tale che $\{a_i\}$ converga molto più velocemente di $\{b_i\}$, si ha che il limite delle rette contenenti a_i e b_i è l'asse z , mentre gli spazi tangente $T_{a_i}S_\alpha$ tendono al piano di equazione $z = 0$.



Per fare in modo che tale condizione sia soddisfatta bisogna prendere l'insieme $X'_0 = \{c\}$ al posto di X_0 , e così si ottiene una stratificazione di Whitney di X .

Teorema A.0.1. (*Whitney*) *Ogni varietà quasiproiettiva X di dimensione pura n ammette una stratificazione di Whitney.*

Bibliografia

- [1] A. Borel et al., *Intersection cohomology*, Modern Birkhäuser classics, 2008
- [2] J. Cheeger, M. Goresky, R. MacPherson, *L^2 cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties*, Princeton University Press, 1982
- [3] D. Cohen, M. Goresky, L. Ji *On the Künneth formula for intersection cohomology*, Transactions of the American Mathematical Society (volume 333, number 1), 1992
- [4] M.A. de Cataldo, L. Migliorini, *The Hodge theory of algebraic maps*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4-ème série, t. **38**, (2005), 693-750.
- [5] M.A. de Cataldo, L. Migliorini, *The decomposition theorem, perverse sheaves and the topology of algebraic maps*, Bulletin of the Amer. Math. Soc. **46**,(2009), 535-633.
- [6] G. Friedman, *Intersection homology with field coefficients: K -Witt spaces and K -Witt bordism*, 2008
- [7] G. Friedman, J. McClure, *Cup and cap products in intersection (co)homology*, arXiv:1106.4799v1 (preprint), 2011

-
- [8] R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1973
- [9] M. Goresky, R. MacPherson, *Intersection homology theory*, Topology (volume 19), Pergamon Press, 1980
- [10] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002
- [11] F. Kirwan, *An introduction to intersection homology theory*, Pitman research notes in math. 187, Longman, 1988
- [12] F. Kirwan, J. Woolf, *An introduction to intersection homology theory, second edition*, Chapman & Hall/CRC, 2006
- [13] S. Kleiman, *The development of intersection homology theory*, Pure and applied mathematics quarterly (volume 3, number 1), 2007
- [14] B. Klingler, *Intersection homology and perverse sheaves*, note di un corso tenuto all'università Parigi 7
- [15] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes, second edition*, Springer-Verlag, 1999
- [16] M. Saito, *Modules de Hodge polarisables*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **24** (1988), no. 6, 849-995 (1989).
- [17] M. Saito, *Mixed Hodge modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990), no. 2, 221-333.
- [18] M. Saito, *Decomposition theorem for proper Kähler morphisms*, Tohoku Math. J. (2) **42**, no. 2, (1990), 127-147.
- [19] J. P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. 61, 1955