ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Scelte razionali e processi decisionali reali

Tesi di Laurea in Teoria delle Decisioni

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Paolo Negrini

Presentata da:
Roberto Lubelli

Sessione I
Anno Accademico 2012-2013

"camminate sempre a testa alta,
ho tre nipoti di cui poter
andare orgoglioso. . . "

Indice

Introduzione

Oggetto di studio della teoria delle decisioni è il processo decisionale. Attraverso l'analisi del comportamento degli *attori* (individui o gruppi) coinvolti nel processo si procede all'esame di come i *decisori* prendono o dovrebbero prendere delle decisioni.
I teorici della decisione indagano sulle conseguenze logiche di differenti regole decisionali o esplorano gli aspetti logico-matematici di diverse descrizioni di comportamento razionale.
In questa prima parte verranno presentati gli elementi essenziali della teoria normativa delle decisioni: ci si occuperà di come le decisioni dovrebbero essere prese per massimizzare il proprio benessere e non di come le decisioni sono effettivamente prese, argomento di cui ci occuperemo in seguito.
Ma, come già sottolineato, il riferimento alla teoria normativa non può essere assoluto, si deve infatti tenere conto di tutta una serie di vincoli e di condizionamenti, che emergono dall'analisi dei processi reali affinchè le **regole di comportamento razionale** possano tradursi in comportamenti effettivi.
Qualunque decisione comporta una scelta tra più alternative, azioni, o atti, ciascuna delle quali produrrà una tra più conseguenze che dipenderà dalle condizioni del contesto, **stato di natura**, nel quale il processo decisionale si svolge. Le decisioni sono pertanto costituite da **azioni**, **stati** e **conseguenze**, con le ultime che dipendono, nella generalità dei casi, dall'azione e dallo stato in cui l'azione si verifica.
Quando si analizza un problema di decisione, l'analista, che può essere lo stesso soggetto che prende la decisione, deve individuare l'insieme rilevante delle

azioni, degli stati e delle conseguenze per caratterizzare in modo adeguato il problema stesso. Ogni problema decisionale implica delle conseguenze che il soggetto della decisione considera migliori di altre, altrimenti non sussisterebbe un problema di scelta. In questo ambito assume particolare rilevanza il principio della dominanza, che dice di escludere tutte le alternative che comportano conseguenze peggiori, qualunque sia lo stato di natura di una qualche specifica alternativa. Se c'è un'alternativa che domina tutte le altre, il principio di dominanza porta a scegliere tale alternativa ed il problema decisionale è risolto in modo ottimale. Sfortunatamente, casi del genere si riscontrano molto raramente nelle situazioni reali.
Una interessante questione legata alla specificazione del problema decisionale è quella relativa alla distinzione tra **decisione giusta** e **decisione razionale**.
La decisione di chi agisce è giusta se si risolve in esiti ottimali. Se si disponesse di una conoscenza completa del futuro basterebbe, pertanto, fare riferimento al solo principio: *prendi la decisione giusta*. Purtroppo, la maggior parte delle decisioni sono basate su ciò che si ritiene possa accadere e non su quello che accadrà realmente. Nella quasi totalità dei casi risulta quindi impossibile prendere una decisione giusta, si dovrà allora prendere una decisione razionale, valutando al meglio l'insieme parziale di informazioni a disposizione riguardo al vero stato del mondo, e non è affatto scontata l'equivalenza:

$$\textbf{decisione razionale} = \textbf{decisione giusta}$$

Da quanto detto, emerge implicitamente una diversificazione tra situazioni decisionali. Usualmente si distinguono le decisioni in:

1. **decisioni in situazioni di certezza**

2. **decisioni in situazioni di rischio**

3. **decisioni in situazioni di incertezza**

Noi ci occuperemo del comportamento che si dovrebbe avere in situazioni di incertezza.

Capitolo 1

Teoria della razionalità

Prima di procedere alla discussione dei postulati o assiomi di comportamento razionale, diamo le definizioni di relazione di preferenza e di sistema di preferenza su un insieme A di azioni.
Indichiamo con il simbolo $\succeq$ la relazione di preferenza, ossia $a \succeq a'$ con $a, a' \in A$, significa che l'azione a è "almeno altrettanto buona che " l'azione a'. Si ha la relazione di preferenza stretta, per cui $a \succ a'$, cioè l'azione a "è preferita " all'azione a'; si ha, invece, la *relazione di indifferenza*, per cui $a \sim a'$, cioè l'azione a "è indifferente" all'azione a' e viceversa, se $a \succeq a'$ e $a \preceq a'$.

1.1 Il sistema di preferenza regolare

L'analisi economica spesso assume che il sistema di preferenza soddisfi alcune proprietà. La proprietà seguente definisce la *regolarità* (o *razionalità*) del sistema di preferenza.
Definizione. Il sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ è regolare (o razionale) se è completo e transitivo, ossia se

1. $a \succeq a'$ o $a' \succeq a$ per ogni coppia $a, a' \in A$ (*completezza*);

2. $a \succeq a''$ per ogni terna $a, a', a'' \in A$ con $a \succeq a'$ e $a' \succeq a''$ (*transitività*).

Queste due condizioni implicano anche la *riflessivita* della relazione di preferenza $a \succeq a$ per ogni $a \in A$. Quindi, il sistema binario di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ cosi introdotto stabilisce un preordinamento completo sull'insieme delle azioni.
E' opportuno tenere presente come la completezza e la transitivita siano ipotesi, in molti casi, abbastanza forti, nel senso che attribuiscono al soggetto una capacita di valutazione estesa (la completezza richiede che egli sia in grado di stabilire la relazione di preferenza per tutte le coppie di azioni in A) e coerente (la transitività implica l'assenza di relazioni cicliche, cioè $a \succeq a' \succeq a'' \succeq a$, che potrebbero determinare, se presenti, comportamenti irrazionali). Queste sono, tuttavia, ipotesi normalmente accolte nell'analisi economica della scelta individuale. La definizione di regolarità può anche essere introdotta, in modo del tutto equivalente, usando le relazioni di preferenza forte $\succ$ e di indifferenza $\sim$. Si ha che il sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ è regolare (o razionale) se:

1. sussiste una ed una soltanto delle tre relazioni $a \succ a'$, $a \sim a'$, $a' \succ a$ per ogni coppia $a, a' \in A$ (*completezza*);

2. $a \sim a''$ per ogni terna $a, a', a'' \in A$ con $a \sim a'$ e $a' \sim a''$; e $a \succ a''$ per ogni terna $a, a', a'' \in A$ con $a \succeq a'$, $a' \succeq a''$ e $a \succ a'$ e/o $a' \succ a''$ (*transitività*).

Queste due condizioni implicano anche la *riflessività* della relazione di indifferenza e la *irriflessività* della relazione di stretta preferenza.

1.2 La razionalità del sistema di preferenza

Esaminiamo ora la determinazione del sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ nel caso in cui le azioni abbiano una conseguenza incerta, cioè nel caso in cui a

ciascuna di esse siano associate diverse possibili conseguenze. In altri termini, il soggetto tiene conto, nel suo sistema di preferenza, delle conseguenze che possono risultare dalle azioni e degli eventi che le determinano.
Ad esempio, possa egli scegliere tra a e a' (quindi, con $A = \{a, a'\}$). Sia a l'acquisto per 100.000 euro di titoli di stato, da detenere per un periodo di tempo assegnato, alla fine del quale riceve con certezza la somma di 150.000 euro, e sia a' l'acquisto di un determinato appartamento di pari valore da detenere per lo stesso periodo di tempo.
Il soggetto sceglierà a se $a \succ a'$ oppure a' se $a' \succ a$ (mentre indifferentemente a o a' se $a \sim a'$).
Oggetto della nostra indagine sono le ragioni per cui risultano $a \succeq a'$ e/o $a' \succeq a$. Queste risiedono, in generale, nella valutazione delle conseguenze associate alle due azioni e delle circostanze che possono presentarsi nel periodo di tempo assegnato o alla fine di esso. La preferenza tra a e a' tiene conto che la conseguenza di a è il rimborso certo alla scadenza, senza che eventi particolari possano influire su di esso, e che le conseguenze di a' sono il possesso dell'appartamento, che consente al soggetto di usarlo o di locarlo a prezzi che dipendono da diverse possibili circostanze, e il suo incerto valore finale di vendita, che dipende anch'esso da diverse possibili circostanze. Queste circostanze hanno diverse possibilità di accadimento e rendono il possesso dell'appartamento più o meno appetibile.
Quanto indicato precedentemente può essere formalizzato nel modo seguente. Abbia il soggetto la possibilità di scegliere una delle azioni dell'insieme A. Ad ogni azione sono associati degli *esiti* (risultati, outcome, payoff), raggruppati nell'insieme X. Le possibili circostanze di cui tiene conto nella sua scelta siano gli elementi di un insieme di *stati di natura* S . Ogni stato di natura è una descrizione sufficientemente dettagliata delle circostanze che il soggetto ritiene influenti. Ad ogni azione $a \in A$ egli associa un insieme di *conseguenze* possibili $C(a)$. Ogni conseguenza è la descrizione di tutti gli aspetti dell'azione a di cui il soggetto tiene conto una volta che l'incertezza si sia risolta, cioè una volta che si sia realizzato uno stato di natura. Gli

insiemi A, X e S includono tutti gli aspetti rilevanti al riguardo, per cui le conseguenze delle azioni sono elementi di un insieme $C \subseteq A \times X \times S$. Scelta un'azione, si puo verificare una sola conseguenza, a seconda dello stato di natura che si realizza.
Perciò, ad ogni stato di natura corrisponde, in ogni azione, una sola conseguenza. Allora, introdotti gli insiemi A, X, S e $C \subseteq A \times X \times S$, un'azione è una funzione che associa ad ogni stato di natura una conseguenza, ossia

$$a : S \to C$$

Indicando con $c(s; a)$ la conseguenza che il soggetto ritiene si verifichi se scegliesse l'azione a e si realizzasse la stato di natura s, la funzione $a : S \to C$, se l'insieme degli stati di natura S è finito,

$$S = s_1, s_2, ...s_m$$

è rappresentata dal vettore

$$c(s_j; a)$$

con $j = 1, ..., m$, per cui un'azione $a \in A$ è indicata anche da

$$a = (c(s_1; a), s_1; c(s_2; a), s_2; ...; c(s_m; a), s_m)$$

o

$$(c(s_j; a), s_j)_{j=1}^{m}$$

Sia, ad esempio, l'insieme delle azioni $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, ove:

- a_1 è una gita a Portofino;
- a_2 un atto di beneficenza;
- a_3 l'acquisto del biglietto di una lotteria.

e ciascuna delle tre azioni comporti la stessa spesa.
Sia l'insieme degli esiti $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, dove:

- x_1 è il soggiorno a Portofino;

- x_2 il possesso del premio della lotteria;

- x_3 nulla di tutto ciò.

Il soggetto ritenga rilevanti le circostanze se piove o no e se quel biglietto vince il premio o no, mentre tutte le altre circostanze sono per lui irrilevanti ai fini della scelta dell'azione. Quindi, l'insieme degli stati di natura S è composto di 4 elementi:

- s_1 è lo stato di natura in cui piove e quel biglietto vince il premio;
- s_2 quello in cui non piove e quel biglietto vince il premio;
- s_3 quello in cui piove e quel biglietto non vince il premio;
- s_4 quello in cui non piove e quel biglietto non vince il premio.

Siano poi:

- $C_1 incondizionidiincertezza = \{(x_1, s_1 \cup s_3), (x_1, s_2 \cup s_4)\}$, ove $s_1 \cup s_3$ è l'evento "piove" e $s_2 \cup s_4$ quello "non piove", l'insieme delle conseguenze possibili dell'azione a_1 per cui il soggetto associa all'azione a_1 due conseguenze: "soggiorno a Portofino con pioggia" e "soggiorno a Portofino senza pioggia";

- $C_2 = \{(a_2, x_3)\}$, ossia una sola conseguenza, qualunque sia lo stato di natura, è associata all'azione di beneficenza che egli valuta non tanto per il suo esito ma, soprattutto, per l'azione stessa che reputa meritoria;

- $C_3 = \{x{-}_2, x_3\}$, ossia le conseguenze dell'azione a_3 coincidono con i suoi esiti.

Allora l'azione a_1 consiste nella funzione

$$c(s_1; a_1) = c(s_3, a_1) = (x_1, s_1 \cup s_3)$$

e

$$c(s_2; a_1) = c(s_4; a_1) = (x_1, s_2 \cup s_4)$$

ossia

$$a_1 = ((x_1, s_1 \cup s_3), s_1; (x_1, s_2 \cup s_4), s_2; (x_1, s_1 \cup s_3), s_3; (x_1, s_2 \cup s_4), s_4)$$

l'azione a_2 consiste nella funzione

$$c(s_1; a_2) = c(s_2, a_2) = c(s_3, a_2) = c(s_4, a_2) = (a_2, x_3)$$

ossia

$$a_2 = ((a_2, x_3), s_1; (a_2, x_3), s_2; (a_2, x_3), s_3; (a_2, x_3), s_4)$$

e l'azione a_3 è la funzione

$$c(s_1; a_3) = c(s_2; a_3) = x_2$$

e

$$c(s_3; a_3) = c(s_4; a_3) = x_3$$

ossia

$$a_3 = (x_2, s_1; x_2, s_2; x_3, s_3; x_3, s_4)$$

Le azioni, oltre che essere rappresentate come funzioni $a : S \to C$, possono essere rappresentate dalle loro corrispondenze inverse $a : C \to S \cup \emptyset$, che associano, per ogni azione, nessuno, uno o più stati di natura ad ogni conseguenza $c \in C$ possibile. Indicando allora con 2^S l'insieme di tutti i sottoinsiemi di S (insieme vuoto incluso), le azioni sono rappresentate sia dalle funzioni $a : S \to C$, sia dalle funzioni $a : C \to 2^S$. Inoltre, siccome ogni stato di natura genera una e una sola conseguenza, da un lato il dominio della funzione $a : S \to C$ coincide con S , dall'altro il codominio della funzione $a : C \to 2^S$ è una partizione di S. Gli elementi di questa partizione (escludendo, perciò, gli insiemi vuoti) sono denominati eventi, per cui un *evento* è uno stato di natura o un'unione di stati di natura cui corrisponde

la medesima conseguenza.
Se l'insieme S è finito, indicando le conseguenze dell'azione a con il vettore

$$(c_1(a), c_2(a), ..., c_n(a))$$

e gli eventi corrispondenti con il vettore

$$(E_1(a), E_2(a), ..., E_n(a))$$

l'azione può essere rappresentata con

$$a = (c_1(a), E_1(a); c_2(a), E_2(a); ...c_n(a), E_n(a))$$

o

$$(c_i(a), E_i(a))_{i=1}^{n}$$

(ovviamente $n \leq m$, essendo il numero n delle conseguenze possibili non superiore a quello m degli stati di natura).
Con riferimento all'esempio precedente, si ha la rappresentazione

$$a_1 = ((x_1, s_1 \cup s_3), s_1 \cup s_3; (x_1, s_2 \cup s_4), s_2 \cup s_4)$$

$$a_2 = ((a_2, x_3), S)$$

e

$$a_3 = (x_2, s_1 \cup s_2; x_3, s_3 \cup s_4)$$

che è equivalente a quella già indicata.
Si tratta ora di def-inire la razionalità del sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$. Introdotti gli insiemi delle azioni A, degli esiti delle azioni X, degli stati di natura S e delle conseguenze $C \subseteq A \times X \times S$, per cui ogni azione è definita da una funzione $a : S \to C$ oppure, in modo equivalente, da una funzione $a : C \to 2^S$ (il cui codominio è una partizione di S), il sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ è razionale se è basato, in modo razionale, sulle conseguenze delle azioni.
Se $a = (c(a), S)$ per ogni $a \in A$, se cioè ogni azione ha una sola conseguenza possibile, come accade in assenza di incertezza, allora la razionalita del

sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ coincide con l'esistenza di un sistema regolare (completo e transitivo) di preferenza sull'insieme delle conseguenze possibili. Se, invece, vi è incertezza, e quindi vi sono azioni con diverse possibili conseguenze, la definizione della razionalità del sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ può essere introdotta esplicitando tre condizioni di razionalità:

- esiste un sistema regolare di preferenza sull'insieme delle conseguenze $\langle C, \succeq^C \rangle$, il soggetto ha preferenze sulle conseguenze possibili e tiene conto di queste nella scelta dell'azione;

- esiste, per ogni azione $a \in A$, una funzione di aspettative razionali $\psi(a) : C \to \mathbb{R}$, il soggetto associa ad ogni azione una distribuzione di aspettative sulle possibili conseguenze (questa distribuzione è spesso una distribuzione di probabilità, ma non è necessario che sia cosi; si può, in generale, interpretare il valore $\psi(c; a)$ come il grado di fiducia che si realizzi la conseguenza c se si compie l'azione a). Le aspettative sono, poi, razionali se derivano da una teoria corretta dell'economia. Questa condizione implica che gli insiemi A ,S e C siano percepiti correttamente;

- esiste una funzione che determina il sistema di preferenza $\langle A, \succeq \rangle$ in base al sistema di preferenza $\langle C, \succeq^C \rangle$ e alla funzione $\psi(c; a)$. Questa funzione esprime propriamente la teoria dalla scelta in condizioni di incertezza e viene determinata in base ad ipotesi che rappresentano la razionalità delle preferenze sulle azioni, date le preferenze sulle conseguenze e le aspettative sulle conseguenze delle azioni.

Nel seguito, a meno di specificazione contraria, si assume che S sia un insieme finito del tipo $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ e $X \subseteq \mathbb{R}^k$ un insieme compatto (non necessariamente composto di un numero finito di punti). Se l'insieme S degli stati di natura è finito le azioni $a \in A$ sono finite, possono cioè dar luogo ad un numero finito di conseguenze possibili. In tal caso ogni azione $a \in A$ può essere rappresentata dal vettore

$$(c_j, s_j)_{j=1}^m$$

dove

$$c_j = c_j(s_j; a)$$

per $j = 1, ..., m$, oppure dal vettore

$$(c_i, E_i)_{i=1}^n$$

ove

$$c_i = c_i(a)$$

e

$$E_i = E_i(a)$$

per $i = 1, ..., n$ (con $E_i(a) = \bigcup_{c_j(s_j;a)=c_i} s_j$).

1.3 Lotterie e assioma di indipendenza

Si consideri il caso più semplice di azione con conseguenze incerte, quello in cui le azioni sono lotterie. Una lotteria è un'azione le cui conseguenze hanno probabilità date. Si definisce come *lotteria semplice* una lotteria i cui esiti diretti sono gli esiti finali della lotteria. Allora, una lotteria semplice l è un'azione $(x_1, p_1; x_2, p_2; ...; x_n, p_n)$, indicata anche come $l = (x_i, p_i)_{i=1}^n$, in cui l'esito x_1 si presenta con probabilità p_1 , l'esito x_2 con probabilità p_2, ecc. Si definisce, invece, come *lotteria composta* (o multistadio) una lotteria i cui esiti diretti sono altre lotterie, che possono essere a loro volta lotterie composte e così via, ma che sono nell'ultimo stadio lotterie semplici. Una lotteria composta (a due stadi) è del tipo $l = (l_h, p_h)_{h=1}^n$, con $l_h = (x_{i_h}, p_{i_h})_{i_h=1_h}^{n_h}$ per $h = 1, ..., n$.
L'incertezza presente nelle lotterie è propriamente indicata come *rischio*. Il termine *incertezza* viene invece normalmente usato per rappresentare sia genericamente le azioni con diverse possibili conseguenze, sia specificamente le azioni le cui conseguenze possibili dipendono da eventi cui non sono associate probabilità date.

Per una lotteria semplice si ha da una lato $C = X$, e dall'altro, che ogni stato di natura s_j in S ha probabilità data. Inoltre, l'unica caratteristica rilevante degli stati di natura è la probabilità, allora la funzione delle aspettative è assegnata esogenamente con le probabilità. Quindi, l'azione

$$(c_i(a), E_i(a))_{i=1}^n$$

se è una lotteria è

$$(x_i(l), p(E_i(l)))_{i=1}^n$$

e può essere rappresentata come

$$l = (x_i, p_i)_{i=1}^n$$

dove $x_i = x_i(l)$ e $p_i = p(E_i(l))$ per $i = 1, ..., n$.
Si indichino con $\mathcal{L}$ e X, rispettivamente, l'insieme delle lotterie (semplici e composte) e quello degli esiti e con $\langle \mathcal{L}, \succeq \rangle$ e $\langle X, \succeq \rangle$ il sistema di preferenze sulle lotterie e il sistema di preferenza sugli esiti.
Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme compatto, si tratta di determinare, per un insieme di lotterie assegnate $\mathcal{L}$, il legame tra il sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succeq \rangle$ e il sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$. Se una lotteria semplice ha solo un esito possibile, cioè questo esito si verifica con probabilità pari a 1 (queste lotterie vengono qualificate come *lotterie degeneri*), allora essa è ritenuta equivalente all'esito certo, ossia

$$l = (x, 1) \sim x$$

e quindi se $l = (x, 1)$ e $l' = (x', 1)$ si ha

$$l \succeq l' \Longleftrightarrow x \succeq x'$$

Se, invece, una lotteria ha diversi esiti possibili, è cioè una generica lotteria semplice del tipo

$$l = (x_i, p_i)_{i=1}^n$$

oppure è una lotteria composta, allora la teoria dominante sulla relazione tra i sistemi di preferenza è la *teoria dell'utilità attesa*, formalizzata da Von

Neumann e Morgenstern, 1944).
Definizione. (*Principio delle lotterie composte*).
Il principio delle lotterie composte asserisce che l'agente ritiene ogni lotteria composta equivalente alla lotteria semplice (o ridotta), ottenuta associando ad ogni esito finale la sua probabilità composta.
Ad esempio, la lotteria composta

$$l = (l_1, p_1; l_2, p_2)$$

ove

$$l_1 = (x_1, p_{1_1}; x_2, p_{2_1}; x_3, p_{3_1})$$

e

$$l_2 = (x_1, p_{1_2}; x_3, p_{3_2})$$

è equivalente alla lotteria

$$(x_1, p_{1_1}p_1 + p_{1_2}p_2; x_2, p_{2_1}p_1; x_3, p_{3_1}p_1 + p_{3_2}p_2)$$

Si noti come le condizioni

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_{1_1} + p_{2_1} + p_{3_1} = 1$$

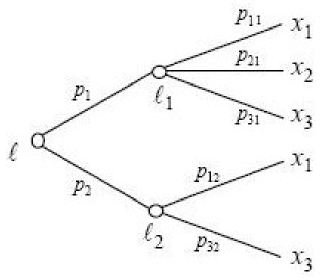
e

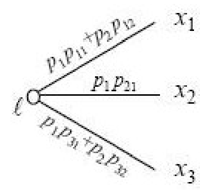
$$p_{1_2} + p_{3_2} = 1$$

implichino la condizione

$$(p_{1_1}p_1 + p_{1_2}p_2) + (p_{2_1}p_1) + (p_{3_1}p_1 + p_{3_2}p_2) = 1$$

Una lotteria composta può essere rappresentata con un diagramma ad albero, ove ogni nodo corrisponde ad una lotteria, ogni ramo ad un evento e ogni nodo finale ad un esito. Ad esempio, la lotteria composta suindicata è cosi rappresentata dalla seguente figura con la lotteria semplice ad essa equivalente.





Definizione (*Continuità del sistema di preferenza*). *Il sistema di preferenze sulle lotterie* $\langle \mathcal{L}, \succeq \rangle$ *è continuo se, per ogni terna di lotterie* $l, l', l'' \in \mathcal{L}$, *con* $l' \succ l \succ l''$, *esiste una lotteria composta* $l''' = (l', p; l'', 1-p)$, *cioè una probabilità* $p \in (0,1)$, *tale che* $l''' \sim l$.

Questa condizione può essere meglio rappresentata richiedendo che l'insieme delle lotterie composte da l' e l'', almeno altrettanto buone di l e quello delle analoghe lotterie non preferite a l siano insiemi chiusi, ossia siano chiusi gli insiemi

$$p \in [0,1] : (l', p; l'', 1-p) \succeq l \text{ e } p \in [0,1] : l \succeq (l', p; l'', 1-p)$$

Ad esempio, siano:

- l la lotteria $(x, 1)$, dove x è l'esito "essere in buona salute e moderatamente ricco ";

- $l' = (x', 1)$, dove x' è l'esito "essere in buona salute e ricchissimo ";

- $l'' = (x'', 1)$, dove x'' è l'esito "essere malato e povero ".

Si ha che $l' \succ l \succ l''$ poichè $x' \succ x \succ x''$.
L'assioma di continuità è soddisfatto se esiste una probabilità $p \in (0,1)$ tale che

$$l \sim (l', p; l'', 1-p)$$

quindi

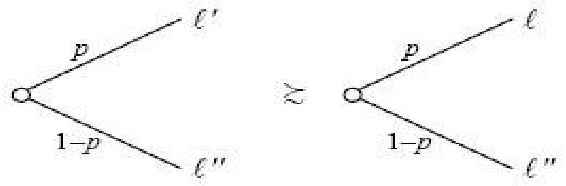
$$(x, 1) \sim (x', p; x'', 1-p)$$

Invece l'assioma di continuità non è soddisfatto se questa probabilità non esiste.
Ad esempio se $(x, 1) \succ (x', p; x'', 1-p)$ per ogni $p \in [0, 1)$, cioè se il soggetto preferisce "essere in buona salute e moderatamente ricco "ad ogni lotteria che includa l'esito, sia pure con probabilità piccolissima, di "essere malato e povero ".

Definizione (*Assioma di indipendenza*). *Il sistema di preferenza sulle lotterie $\langle \mathcal{L}, \succeq \rangle$ soddisfa l'assioma di indipendenza se, per ogni terna di lotterie $l, l', l'' \in \mathcal{L}$ e ogni probabilità $p \in [0, 1]$, si ha*

$$(l', p; l'', 1-p) \succeq (l, p; l'', 1-p) \textit{ se e solo se } l' \succeq l$$

come rappresentato in figura:



$$\textit{se e solo se } l' \succeq l$$

Questa condizione implica, per ogni $p \in (0, 1]$, le condizioni seguenti:

$$(l', p; l'', 1-p) \succ (l, p; l'', 1-p) \text{ se e solo se } l' \succ l$$
$$(l', p; l'', 1-p) \sim (l, p; l'', 1-p) \text{ se e solo se } l' \sim l$$

Infatti, $l' \succ l$ è equivalente a

$$l' \succeq l$$

e non

$$l \succeq l'$$

per cui la condizione suindicata richiede

$$(l', p; l'', 1-p) \succeq (l, p; l'', 1-p)$$

e non

$$(l, p; l'', 1-p) \succeq (l', p; l'', 1-p)$$

e quindi

$$(l', p; l'', 1-p) \succ (l, p; l'', 1-p)$$

Poi $l' \sim l$ equivale a $l' \succeq l$ e $l \succeq l'$ per cui risulta

$$(l', p; l'', 1-p) \sim (l, p; l'', 1-p)$$

L'assioma di indipendenza indica che sono irrilevanti, nella relazione di preferenza tra due lotterie, gli esiti che si presentano in entrambe le lotterie e si presentano in esse con la stessa probabilità. La relazione di preferenza dipende soltanto dalle diversità degli esiti e/o delle probabilità.
L'elemento di razionalità di questo assioma consiste nella considerazione che se si verifica l'evento che determina l'esito comune (l''), allora il soggetto si trova nella stessa situazione, mentre se si verifica l'evento complementare, allora si troverà in una situazione diversa a seconda della lotteria (con l' oppure con l), per cui è la preferenza tra gli esiti di questo evento ($l' \succeq l$) che determina la preferenza tra le lotterie (quindi, $(l', p; l'', 1-p) \succeq (l, p; l'', 1-p)$).
Si noti che, se si verifica un evento, non si verifica l'altro, cioè gli esiti possibili (l' o l'' con la lotteria $(l', p; l'', 1-p)$, l o l'' con la lotteria $(l, p; l'', 1-p)$) sono alternativi, non possono presentarsi congiuntamente.
Al contrario, quando si confrontano panieri di beni, può accadere che un sistema di preferenza $\langle X, \succeq \rangle$ indichi $x' \succ x$, ad esempio, che un bicchiere di vino bianco sia preferito ad un bicchiere di vino rosso, e anche $(x, x'') \succ (x', x'')$ ad esempio, che il paniere composto da un bicchiere di vino bianco e una bistecca sia meno gradito del paniere composto da un bicchiere di vino rosso e una bistecca. Quest'ultima relazione di preferenza è ragionevole perchè, nel paniere di consumo, il bicchiere di vino e la bistecca sono congiunti e non alternativi. Se, invece, si considerasse la relazione di preferenza tra la lotteria $(x', 1/2; x'', 1/2)$ e la lotteria $(x, 1/2; x'', 1/2)$, allora la disponibilità del bicchiere di vino sarebbe alternativa a quella della bistecca, per cui la preferenza per il bicchiere di vino bianco, in assenza della bistecca, sul bicchiere

di vino rosso si riverbererebbe, per l'assioma di indipendenza, sulla relazione di preferenza tra le due Oltre a questo particolare non di poco conto, abbiamo notato come le proprietà che dovrebbero essere soddisfatte dalla funzione utilità per aiutare i soggetti razionali nel creare una scala di preferenze non sempre vengono soddisfatte, in quanto, più che stabili e rivelate, le preferenze sono *costruite* dagli individui. Alla base delle ricerche presentate vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupano una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento.
lotterie $(x', 1/2; x'', 1/2)$ e $(x, 1/2; x'', 1/2)$.
L'assioma di indipendenza è cruciale per l'introduzione dell'utilità attesa ed è una condizione specifica della scelta in condizioni di incertezza. Tuttavia, esso non è sempre soddisfatto, anche se è un principio di razionalità del sistema di preferenza $\langle \mathcal{L}, \succeq \rangle$. Vi sono situazioni in cui le preferenze non si conformano all'assioma di indipendenza. Il caso più noto è quello del cosiddetto paradosso di Allais (dal nome dell'economista che lo ha proposto, 1953).

Capitolo 2

Il modello dell'utilità attesa

2.1 Il valore atteso

In condizioni di rischio o incertezza, consideriamo le diverse possibilità $i = 1, 2, .., n$, che a priori potrebbero verificarsi a seguito di una particolare scelta, e assegnamo a queste la probabilità p_i. Introduciamo inoltre una quantità M_i, che rappresenta il profitto (ad esempio nel caso di una scommessa in denaro M_i è una vincita monetaria), che otterremo se la i-esima possibilità dovesse in realtà verificarsi.

Oltre a questo particolare non di poco conto, abbiamo notato come le proprietà che dovrebbero essere soddisfatte dalla funzione utilità per aiutare i soggetti razionali nel creare una scala di preferenze non sempre vengono soddisfatte, in quanto, più che stabili e rivelate, le preferenze sono *costruite* dagli individui. Alla base delle ricerche presentate vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupano una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento.

Possiamo definire il **valore atteso** (o speranza matematica) di una certa decisione come

$$VA = \sum_i p_i M_i$$

Sembrerebbe ovvio che una persona che agisca nel proprio interesse debba sempre comportarsi in maniera tale da *massimizzare il suo valore atteso.* Ad

esempio consideriamo il caso di un rivenditore di giornali che abbia la possibilità di acquistare ogni giorno un certo numero di copie di un quotidiano. Ogni copia costa 0.50 mentre il prezzo di vendita è 1 e il rivenditore deve decidere quante acquistarne.
Ipotizziamo per semplicità che le decisioni possibili siano quelle di acquistare $D_1 = 1000, D_2 = 2000, D_3 = 3000$, o $D_4 = 4000$ copie. Le decisioni elencate saranno buone o cattive a seconda della domanda da parte del pubblico, situazione che rappresenta lo stato di natura che, sempre per semplicità, ipotizziamo possa essere $S_1 = 1000, S_2 = 2000, S_3 = 3000, S_4 = 4000$. Sulla base delle sue conoscenze pregresse sulla domanda da parte del pubblico, il rivenditore ipotizza che le probabilità legate alle varie richieste siano rispettivamente $p_1 = 0.2, p_2 = 0.5, p_3 = 0.2, p_4 = 0.1$
Tutti i possibili guadagni, in euro, in base allo stato di natura che si verificherà, sono descritti in tabella, dove compare il valore atteso (sempre in euro) di ogni decisione, infatti il valore atteso delle quattro decisioni risulta essere:

- per D_1: $500 * (0.2) + 500 * (0.5) + 500 * (0.2) + 500 * (0.1) = 500$;
- per D_2: $0 * (0.2) + 1000 * (0.8) = 800$;
- per D_3: $-500 * (0.2) + 500 * (0.5) + 1500 * (0.3) = 600$;
- per D_4: $-1000 * (0.2) - 500 * (0.5) + 1500 * (0.2) + 2000 * (0.1) = 50$.

	S_1	S_1	S_1	S_1	Valore Atteso (€)
D_1	500	500	500	500	500
D_2	0	1000	1000	1000	800
D_3	−500	500	1500	1500	600
D_4	−1000	−500	1500	2000	50

Con il criterio del valore atteso il rivenditore sceglierà la decisione con il valore atteso massimo, ovvero D_4.

Tuttavia il valore atteso non può essere sempre preso come criterio per determinare la decisione ottimale, vediamone il perchè.

2.2 Il Paradosso di San Pietroburgo

Il problema consiste nel determinare qual è la giusta tariffa Q da pagare per partecipare ad un gioco il cui premio è 2^n, con n pari al numero di lanci che si fanno prima che si presenti testa con una moneta onesta. La vincita, quindi, dipende dal numero di lanci: se esce testa al primo lancio, si vince 2; se esce croce, si raddoppia. In breve, si paga Q e si vince 2^n se la moneta è stata lanciata n volte quando compare testa per la prima volta.
Alla fine dei lanci si è dunque certi di incassare un premio, ma quanto si è disposti a pagare per partecipare al gioco?
Per calcolare il valore atteso di questo gioco dobbiamo sommare, per tutti i possibili eventi, la probabilità moltiplicata per il premio. La probabilità di ottenere testa all'ennesimo lancio è $(1/2)^n$, il prodotto probabilità per premio è $(1/2)^n * 2^n$, che è sempre pari a 1, indipendentemente da quando si presenta testa. Tuttavia in teoria è possibile che testa si presenti al primo lancio, al secondo, al terzo..., fino all'infinito.

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2)^{-n}(2)^n = \infty$$

Dunque il valore atteso è infinito e questo implica che se si utilizzasse il valore atteso come criterio, bisognerebbe essere disposti a pagare qualsiasi cifra pur di partecipare: ovvero ogni persona razionale non dovrebbe rinunciare a questa possibilità per nessuna cifra. Tuttavia nessuna persona sarebbe disposta a pagare una cifra alta, e questa scelta è giustificata dal fatto che statisticamente il 97 per cento delle volte esce testa entro il quinto lancio, con una vincita al massimo pari a 32 euro.
Il paradosso quindi mette in luce contraddizioni fondamentali dal punto di vista teorico.

2.3 Daniel Bernoulli e il modello dell'utilità attesa

Fu Daniel Bernoulli, in una memoria intitolata *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, scritta nel 1731 e contenuta nel volume dei *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* pubblicato nel 1738, a suggerire di utilizzare, in luogo del valore atteso, un *valore morale* o *utilità attesa (emolumentum o indicatore di Bernoulli)* che una persona è disposta a spendere e che *dipende dal patrimonio che possiede*, ovvero un valore soggettivo.
Bernoulli propose nel suo saggio una soluzione (che divenne famosa anche per l'intervento di Pierre Simon de Laplace) basata sull'utilità attesa percepita dal soggetto decisore. In questo approccio il problema diventa cosi quello della valutazione soggettiva dell'utilità. Notiamo subito che questa utilità non è sempre indentificabile letteralmente in termini monetari, ma in generale riassume diverse dimensioni di valore: denaro, piacere, speranza, e tutto quello che in linea di principio può contribuire all'utilità di un certo stato del mondo, nel senso di aumentare la nostra felicità. Può, però, essere espressa come un numero reale che, in prima approssimazione, racchiude in sè tutti gli aspetti della desiderabilità di questo stato del mondo per un individuo.
Bernoulli, dopo aver argomentato nel suo scritto che il criterio del valore atteso non è universalmente applicabile, propone quanto segue.
Si supponga che una persona possieda una certa quantità di moneta x, e ne riceva una certa altra quantità Δx. Il valore relativo di tale incremento è direttamente proporzionale a Δx, e inversamente proporzionale a x, ovvero

$$\Delta y = k\Delta x/x$$

dove k è una costante. Da cui

$$y = a + k \log x$$

ovvero

$$y = k \log (x/\alpha)$$

(con $\alpha = -k \log a$).
Lo stesso Laplace, a questo proposito, precisa *che il valore relativo di una somma infinitesima è pari al suo valore assoluto diviso la fortuna totale a disposizione della persona.*
Ossia, una buona rappresentazione dell'utilità per una persona che possiede un patrimonio pari a m è data dal logaritmo di m. Laplace aggiunge che una persona che dispone di 200 franchi non dovrebbe pagarne più di 9 per partecipare al gioco del paradosso di San Pietroburgo. In generale, secondo quasto assunto, l'utilità attesa risultante da un piccolo incremento della ricchezza dovrebbe essere inversamente proporzionale alla quantità di beni posseduta in precedenza: al crescere della quantità di un bene x posseduto da un individuo, *l'utilità marginale* di quantità aggiuntive mostra un andamento decrescente. Questa legge afferma che *l'utilità come funzione del denaro è una funzione concava.*
Si consideri un insieme x che rappresenti importi monetari e una funzione u tale che per ogni importo $x, u(x)$ esprima il gradimento di guadagnare x (chiameremo questa funzione *u funzione utilità* o *indice di Bernoulli*). Si è condotti a credere che successivi incrementi di capitale portino al proprietario una soddisfazione minore, via via più piccola, quindi possiamo ipotizzare che la funzione u sia concava.
Ad esempio, un incremento di stipendio da 15000 a 30000 euro consente un miglioramneto di vita nettamente superiore a quello che si ha da 100000 a 115000.
Per calcolare l'utilità attesa di una decisione l'idea di Bernoulli è quella di usare una formula molto simile a quella del valore atteso, ma di sostituire al valore monetario M_i l'utilità che tale valore M_i fornisce al soggetto decisore:

$$UA = \sum_i p_i u(M_i)$$

Nella tabella sono riportati i primi termini delle grandezze di interesse del paradosso di San Pietroburgo. Si noti che mentre il valore atteso è costante e vale sempre 1, l'utilità attesa diminuisce all'aumentare del numero di lanci.

#	$P_{(vincita)}$	$P_{(perdita)}$	*premio*	*P·premio*	Utilità $\log_e(premio)$	*P·utilità*
1	0.5	0.5	2	1	0.69315	0.34657
2	0.25	0.75	4	1	1.3863	0.34657
3	0.125	0.875	8	1	2.0794	0.25993
4	0.0625	0.9375	16	1	2.7726	0.17329
5	0.03125	0.96875	32	1	3.4657	0.1083
6	0.015625	0.98438	64	1	4.1589	0.064983
7	0.0078125	0.99219	128	1	4.852	0.037906
8	0.0039063	0.99609	256	1	5.5452	0.021661
9	0.0019531	0.99805	512	1	6.2383	0.012184
10	0.00097656	0.99902	1024	1	6.9315	0.006769

Per un giocatore la cui fortuna iniziale è m, la somma onesta da pagare $f(m)$ si ottiene eguagliando la sua utilità attuale ($\log m$), ossia prima di giocare, con l'utilità attesa se paga la somma e gioca:

$$\log_e(m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \log_e(m - f + 2^n)$$

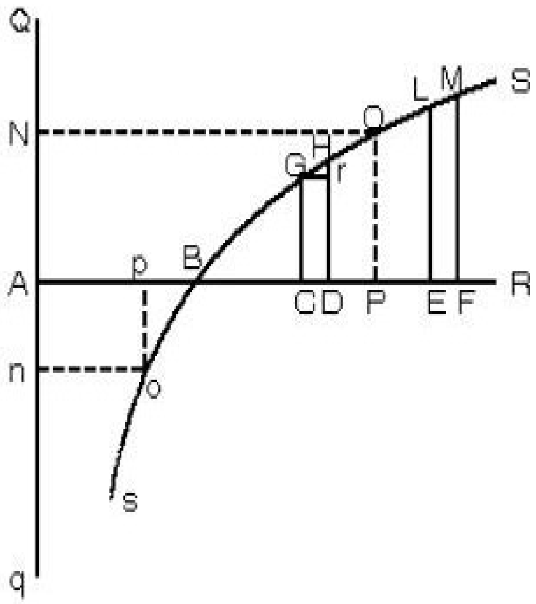
Il secondo membro dell'equazione non è altro che la probabilità di vincere al lancio ennesimo ($\frac{1}{2^n}$) moltiplicata per l'utilità sopra definita. Risolvendo numericamente l'equazione si ottiene che per un patrimonio iniziale di 200 franchi la quota di ingresso onesta per questo gioco è 8.72 franchi (risultato ottenuto di fatto da Laplace senza avere a disposizione un computer).
Allo stesso modo, per un patrimonio iniziale di 1000 o 100000 euro la quota di ingresso è rispettivamente 10.95 e 17.56 euro.
Questo ragionamento, anche se sembra provenire più da considerazioni di carattere descrittivo che normativo e comunque non funziona per piccolissime o enormi somme, fornisce senz'altro un approccio convincente ed ha avuto l'indubbio merito di mettere in luce come il criterio del valore atteso non tenesse in alcun conto i costi del rischio. Se l'utilità aumenta in accordo ad un andamento logaritmico si può razionalmente accettare una somma inferiore al valore atteso, ma sicura, piuttosto che rischiare di non vincere nulla (avversione al rischio).
Riassumendo, il punto centrale del ragionamento di Bernoulli-Laplace è che in questi casi per una decisione razionale si deve massimizzare l'utilità attesa e non il profitto in assoluto (valore atteso).

Ripercorriamo ora le tappe generali che hanno dato vita alla teoria dell'utilità avanzata da Bernoulli partendo dal presupposto che nessuna valutazione di un rischio può essere ottenuta se non si rende nello stesso tempo nota la sua utilità, anche se sull'utilità è difficile dire alcunchè di certo dal momento che può cambiare secondo le circostanze.
Cosi, benchè da uno stesso guadagno generalmente tragga più utilità un uomo povero di uno ricco, si può tuttavia immaginare che un uomo ricco ma in prigione, che possieda duemila euro e al quale ne servissero altrettanti per ritrovare la libertà, attribuirà più importanza a un guadagno di duemila euro che non altri uomini meno ricchi di lui.
Si possono immaginare innumerevoli esempi di questo genere, che rappresenterebbero però eccezioni rare. Considereremo cosi quel che accade ordinariamente e, per meglio afferrare il problema, ammetteremo che la ricchezza di un uomo possa essere aumentata a poco a poco in modo continuo per incrementi infinitamente piccoli. E' altamente probabile che ogni, seppur minimo, guadagno apporterà sempre un'utilità inversamente proporzionale alla somma dei beni già posseduti, dove per somma di beni già posseduti si comprende il vitto, l'abbigliamento e ogni cosa idonea a rendere la vita più comoda.

Nella figura che segue rappresentiamo con AB la quantità di beni inizialmente posseduti. Dopo aver prolungato AB, occore costruire la curva $BGLS$ della quale le ordinate CG, DH, EL, FM rappresentano l'utilità corrispondenti alle ascisse BC, BD, BE, BF, che rappresentano gli incrementi della ricchezza. Inoltre, chiamiamo $m, n, p, q, etc.$ i numeri di modi tramite i quali si possono ottenere gli accrescimenti di ricchezza BN,BD,BE,BF. Allora l'utilità sarà data da:

$$PO = \frac{m \cdot CG + n \cdot DH + p \cdot EL + q \cdot FM}{m + n + p + q} + etc.$$

Tracciamo AQ perpendicolare a AR e riportiamo su questo asse $AN = PO$. La distanza $NO - AB$, cioè BP, rappresenta il guadagno che può essere legittimamente atteso. Se poi volessimo sapere quale posta una persona potrà



essere incline a rischiare su questo tipo di proposta, la nostra curva dovrà estendersi in direzione opposta cosi che l'ascissa Bp corrisponda a una perdita e l'ordinata po rappresenti la perdita di utilità corrispondente.
In un gioco leale, il danno risultante dalla perdita deve essere uguale all'utilità risultante dalla vincita: dobbiamo dunque ammettere che $An = AN$ oppure $po = PO$. In questo modo Bp rappresenterà la posta che non dovranno oltrepassare le persone che tengano conto della propria situazione finanziaria. Studiamo ora la natura della curva sBS.
Poichè abbiamo considerato dei guadagni infinitamente piccoli, definiremo dei guadagni BC e BD all'incirca uguali, in modo che la loro differenza CD sia infinitamente piccola. Se noi tracciamo Gr parallela a BR, rH rappresenterà l'incremento di utilità infinitamente piccolo per una pesona il cui patrimonio è AC e che ottiene il piccolo guadagno CD. Ciononostante questa utilità va confrontata non solo con il minimo guadagno CD, al quale è proporzionale restando invariata ogni altra cosa, ma anche con AC, il patrimonio precedentemente posseduto, al quale essa è inversamente proporzionale. Se poniamo quindi $AC = x, CD = dx, CG = y, rH = dy, AB = \alpha$, otteniamo, essendo b una costante qualunque, $dy = \frac{bdx}{x}$ o meglio $y = b \log \frac{x}{\alpha}$.

La curva sBS è dunque una curva logaritmica, della quale la subtangente è in tutti i punti b e il cui asintoto è Qp.
Confrontando questi risultati con ciò che è stato detto in precedenza si ha che

$$PO = b\log\frac{AP}{AB}, CG = b\log\frac{AC}{AB}, DH = b\log\frac{AD}{AB} etc$$

Ma noi abbiamo

$$BP = \frac{m\cdot CG + n\cdot DH + p\cdot EL + q\cdot FM}{m+n+p+q} + etc$$

ne segue che

$$b\log\frac{AP}{AB} = \frac{mb\cdot\log\frac{AC}{AB} + nb\log\frac{AD}{AB} + pb\log\frac{AE}{AB} + qb\log\frac{AF}{AB}}{m+n+p+q} + etc.$$

e di conseguenza

$$AP = (AC^m\cdot AD^n\cdot AE^p\cdot AF^q)^{\frac{1}{m+n+p+q+etc}}$$

e sottraendo AB, la grandezza BP rappresenterà il valore richiesto (il valore della proposta di rischio in questione).
E' importante notare che in molti giochi, anche i più legali possibili, entrambi i giocatori possano attendersi di subire una perdita: vi è qui un avvertimento della natura per scongiurare il gioco, ciò risulta dalla concavità della curva sBS verso BR. In effetti, rendendo la posta Bp uguale al guadagno atteso BP, è chiaro che la *disutilità po* risultante da una perdita sarà sempre superiore all'utilità del guadagno atteso PO, illustriamo quanto detto con un esempio:
Immaginiamo due giocatori che dispongano entrambi di cento euro; ognuno scommette la metà del suo avere come posta in un gioco che offre medesime possibilità ad entrambi i giocatori. In questa ipotesi, ognuno avrà 50 euro, più la speranza di vincere ancora altri 100 euro. Tuttavia, la somma dei valori di questi due termini, secondo la regola vista in precedenza, si eleva a $(50\cdot 150)^{1/2}$, ovvero meno di 87 euro, cosi che, benchè il gioco sia condotto in condizioni di perfetta equità, ciascuno subirà una perdita attesa di oltre

13 euro.
Consideriamo ora l'esempio in cui uno dei due giocatori, prima di scommettere i suoi 50 euro, ne possieda 200. Questo giocatore avrà una perdita attesa di $200 - \sqrt{150 \cdot 250}$, che corrisponde a poco più di 6 euro.
Cosi, chi scommette una parte della propria fortuna, per quanto piccola essa sia, in un gioco d'azzardo matematicamente leale, si comporta in modo irrazionale: può dunque essere interessante ricercare quale deve essere l'entità del vantaggio di cui un giocatore deve disporre rispetto al suo avversario per evitare qualsiasi perdita attesa.
Consideriamo un gioco che sia il più semplice possibile e definito da due esiti ugualmente probabili, dei quali uno sia favorevole e l'altro sfavorevole. Sia a il guadagno che si ottiene se l'esito è favorevole, e x la posta che viene persa in caso di esito sfavorevole. Se la quantità iniziale di beni posseduti è α, noi avremo $AB = \alpha$, $BP = a$, $PO = b \cdot \log \frac{a+\alpha}{a}$ e poichè $po = PO$, risulta dalla natura logaritmica della curva che $BP = \frac{\alpha \cdot a}{\alpha + a}$. Ma Bp rappresenta la posta x, dunque $x = \frac{\alpha \cdot a}{\alpha + a}$, grandezza che è sempre inferiore al guadagno atteso a. Ne segue che una persona che rischi tutta la propria ricchezza agisce da stolto, per quanto elevata possa essere la sua vincita.

2.4 Analisi della teoria di Bernoulli

La teoria avanzata da Bernoulli si basa sul comportamento che dovrebbe avere un uomo *razionale* dinanzi a una scelta. Per analizzare questa teoria conviene prima definire cosa si intende per *razionalità*, di cui si possono dare due definizioni, una sul piano astratto e l'altra basata sull'esperienza:
Definizione astratta di razionalità:
Un uomo è razionale quando persegue dei fini coerenti con se stesso e impiega dei mezzi appropriati ai fini della sua sopravvivenza.
Due condizioni entrano in gioco come conseguenze di questa definizione:

1. il campo di scelta è ordinato;

2. se due scelte sono tali che la prima comporta un guadagno maggiore della seconda, allora questa sarà preferita.

Quest'ultima condizione, come già visto, rappresenta l'assioma di preferenza assoluta ed è basata sulla probabilità *oggettiva* che un evento si realizzi.
Definizione sperimentale di razionalità:
La razionalità è definita in base al comportamento delle persone che l'opinione pubblica considera razionali.
Quest'ultima non è una vera e propria definizione, in quanto si basa più che altro sul contesto sociale e culturale in cui si vive.
Dalla prima definizione e dalle condizioni che ne derivano si può dimostrare che è impossibile dedurre da queste l'esistenza di una funzione utilità. Vediamone subito un esempio teorico:
Supponiamo che un individuo debba scegliere tra differenti variabili aleatorie (P) caratterizzate da una distribuzione di Gauss di media M e scarto Σ, e supponiamo che, per effettuare una scelta, la funzione di indifferenza sia della forma

$$S = f(M, \Sigma)$$

Affinchè l'assioma di preferenza assoluta sia verificato, si può dimostrare facilmente che è necessario e sufficiente che per un valore dato di Σ, l'indice S è una funzione crescente di M:

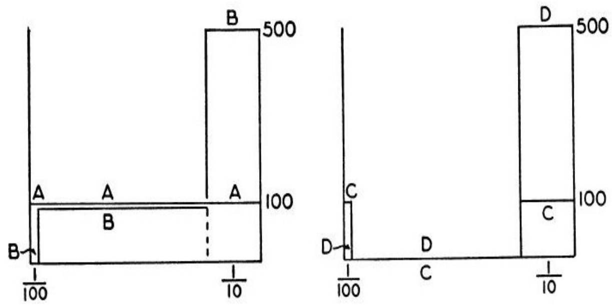
$$\frac{\partial f}{\partial M} > 0$$

e si può dimostrare in maniera del tutto generale che non esiste alcuna funzione utilità $u(x)$ crescente per tutti i valori di x tale che si possa avere

$$f(M, \Sigma) = \int_{x}^{-\infty} u(x) \frac{e^{-[(x-M)^2/2\Sigma^2]}}{\sqrt{2\pi}\Sigma} dx$$

Si verifica cosi che la formulazione di Bernoulli è più restrittiva delle sole implicazioni della definizione data di razionalità.
Il risultato è che un individuo razionale non deve necessariamente comportarsi secondo il principio di Bernoulli per essere considerato tale e che le

conseguenze della definizione astratta di razionalità sono meno restrittive degli assiomi visti fin qui, seguiti anche da Bernoulli nella sua teoria dell'utilità, in quanto questi ultimi contengono qualcosa di più che potremmo definire come *irrazionale.*
Nella teoria presentata da Bernoulli riveste un ruolo centrale il principio di indipendenza, ci sono però esempi di persone considerate *razionali* che rispondono, senza alcuna esitazione, in maniera contraria a questo principio.
Ci mettiamo nel caso particolare in cui bisogna scegliere tra guadagni certi e guadagni aleatori, quando i guadagni risultano grandi in relazione al prezzo di gioco. In questo caso si può mettere in evidenza l'importanza psicologica che può avere, a seconda del soggetto, il vantaggio del guadagno certo.



Le figure rappresentano graficamente i due problemi seguenti:
1) *Scegliere tra la lotteria A e la lotteria B*

- LOTTERIA A
  - guadagno certo di 100 milioni.
- LOTTERIA B
  - probabilità del 10 per cento di guadagnare 500 milioni;
  - probabilità dell' 89 per cento di guadagnare 100 milioni;
  - probabilità dell' 1 per cento di non guadagnare niente.

2) *Scegliere tra la lotteria C e la lotteria D:*

- LOTTERIA C
  - probabilità dell' 11 per cento di guadagnare 100 milioni;
  - probabilità dell' 89 per cento di non guadagnare niente.
- LOTTERIA D
  - probabilità del 10 per cento di guadagnare 500 milioni;
  - probabilità del 90 per cento di non guadagnare niente.

Il principio di indipendenza comporta che la preferenza di A rispetto a B implichi la preferenza di C rispetto a D. Ma è stato sperimentalmente provato che la maggior parte delle persone che vengono considerate dall'opinione pubblica razionali (e che quindi assumono decisioni in linea con la seconda definizione di razionalità), rispondono di preferire A a B e D a C, in contrasto con il principio di indipendenza. Infatti si può osservare che la speranza matematica di ciascuna situazione vale rispettivamente:

$$a = 100 \text{ milioni}, \ b = 139 \text{ milioni}, \ c = 11 \text{ milioni}, \ d = 50 \text{ milioni}$$

Risulta da questo esempio che per un uomo razionale non esiste una generica funzione utilità $u(x)$ tale che la decisione ottimale da prendere sia quella che massimizzi la quantità

$$\sum p_i u(x_i)$$

Vi è quindi una distinzione tra l'indicatore di Bernoulli (la funzione utilità) e il valore psicologico del soggetto che deve prendere delle decisioni.
Supponiamo si possa definire una funzione utilità e consideriamo la formulazione di Bernoulli

$$u(V) = \sum \hat{p}_i B(g_i)$$

dove le $\hat{p}_i$ rappresentano le probabilità *soggettive*, uguali alle probabilità *oggettive* p_i per un uomo razionale.
Siano $E_1, E_2, ..., E_n$ gli eventi di probabilità $p_1, p_2..., p_n$ che, al verificarsi, danno un guadagno rispettivamente di $g_1, g_2, ...g_n$, e che questi siano aumentati

di Δg_i, quantità inferiori a una soglia minima Δg_i^m che varia al variare di g_i. Si può quindi dedurre che il valore V della variabile aleatoria considerata aumenti a sua volta di ΔV, quantità inferiore a una soglia minima percepibile ΔV^m. Si può mostrare che se i Δg_i sono superiori alla soglia minima percepibile Δg_i^m corrispondente, allora anche ΔV risulterà superiore a ΔV^m. Inoltre se

$$\Delta g_i = \Delta g_i^m$$

per ogni i, allora

$$\Delta V = \Delta V^m$$

Si dimostra quindi che la curva della funzione $u(V)$ si identifica necessariamente con la curva dei valori psicologici.
Il solo caso in cui è possibile definire effettivamente un indicatore di Bernoulli è il caso in cui questo indicatore si confonde con la soddisfazione assoluta.

Capitolo 3

Principi di razionalità e paradossi

Nel capitolo precedente abbiamo visto come sia difficile definire una funzione utilità, difficoltà dovuta alla teoria assiomatica presentata nel primo capitolo, in quanto un uomo razionale nel fare delle scelte spesso contraddice l'assioma di indipendenza, assioma fondamentale nella teoria dell'utilità. L'esempio numerico che abbiamo riportato porta il nome di *Paradosso di Allais*, in quanto da Allais per prima analizzato. In questo esempio il problema è nella percezione che si ha del guadagno certo presente nella prima lotteria. Questo altera significativamente il comportamento dei soggetti, la certezza, infatti, risulta sempre preferita da coloro che sono avversi al rischio.
Una possibile soluzione al paradosso di Allais è stata trovata indebolendo l'assioma di indipendenza. L'assioma che viene suggerito al suo posto è quello detto *betweenness* (che potremmo tradurre con *via di mezzo*).
Assioma betweenness:
Date due lotterie S_1, S_2 e un numero reale $\alpha \in (0, 1)$ vale

$$S_1 \sim S_2 \Longleftrightarrow \alpha S_1 + (1 - \alpha) S_2 \sim S_1$$

Una lotteria ottenuta dalla combinazione lineare di due lotterie indifferenti risulta anch'essa indifferente a quelle iniziali. Appare evidente come questo assioma sia un caso particolare di quello di indipendenza (basta porre $z = y$

in quello e assumere $x \sim y$), tuttavia l'assioma di indipendenza non può essere tratto da quest'ultimo, il quale pone delle condizioni meno restrittive. Numerosi sono gli esempi, anche recenti, in letteratura nei quali le idee di Bernoulli e Laplace e la successiva teoria dell'utilità di Von Neumann e Morgenstern sono state criticate. Lo stesso Kahneman, nella *Prize Lecture* effettuata l'8 dicembre 2002 alla ricezione del premio Nobel, definisce l' **errore di Bernoulli** il fatto che nella sua pubblicazione *non c'è nessun riconoscimento di qualsivoglia dissidio tra prescrizione e descrizione.*
Vogliamo così discutere nei prossimi paragrafi di questo capitolo, attraverso l'analisi dei risultati di alcuni dei più noti lavori in questo campo, ed in particolare le ricerche di Kahneman e Tversky, le condizioni nelle quali gli esseri umani più spesso appaiono non compiere scelte razionali.
A partire dagli anni Settanta, in una serie di esperimenti sugli aspetti procedurali del giudizio e della decisione, Kahneman e Tversky (due psicologi israeliani, il primo come già accennato vincitore del premio Nobel per l'economia nel 2002 che avrebbe condiviso con Tversky se non fosse prematuramente scomparso nel 1996), esplorando la psicologia delle scelte e delle credenze *intuitive* e indagando i relativi principi che governano la creazione, la percezione e la valutazione delle alternative nei processi decisionali, hanno documentato diversi casi in cui i soggetti violano sistematicamente i principi della razionalità, soprattutto in ambito economico.
Seguendo un **approccio sperimentale** Kahneman e Tversky hanno perseguito l'obiettivo di esplorare il mondo che, potremmo dire, sta alla base delle scelte, ossia il mondo delle *preferenze.* Analizziamo ora questi *esperimenti* in cui l'uomo razionale attua scelte incoerenti con il modello dell'utilità attesa che si basa su 5 importanti principi di razionalità:

1. Principio di indipendenza;

2. Principio di transitività;

3. Principio di dominanza;

4. Principio di regolarità;
5. Principio di invarianza.

E' meglio precisare sin da ora però, che gli esempi che seguiranno rappresentano casi limite in cui la teoria viene violata, in generale quest'ultima assume un ruolo determinante e coerente per l'orientamento delle scelte delle persone razionali. Di volta in volta cercheremo di dare una spiegazione delle contraddizioni tra il comportamento attuato e la teoria, contraddizioni che nascono per lo più da *fattori psicologici* che entrano in gioco al momento di fare una scelta.

3.1 Violazione del principio di indipendenza

Come già visto, il *principio di indipendenza* afferma che la scelta tra le diverse alternative dovrebbe dipendere esclusivamente dagli esiti differenti di ciascuna alternativa, la massimizzazione dell'utilità attesa si ottiene quindi anche grazie all'eliminazione degli stati del mondo che sono indipendenti da ciò che viene scelto. Abbiamo già trattato un esempio di come questo principio non venga sempre rispettato (paradosso di Allais), ora vediamo altri casi che possiamo denominare sotto il titolo di *effetto certezza*, in quanto si constaterà che, nel prendere decisioni tra più lotterie, l'effetto di un esito certo ha un valore psicologico particolare sul decisore.

3.1.1 Effetto certezza

Sono state proposte ad un gruppo di persone le seguenti lotterie:

- *LOTTERIA A*
  - vincita sicura di 3000 euro.
- *LOTTERIA B*

  - vincere 4000 euro con l'80% di probabilità;
  - non vincere niente con il 20% di probabilità;

Venga poi data, allo stesso gruppo, la possibilità di scegliere tra:

- *LOTTERIA C*
  - vincere 3000 euro con il 25% di probabilità;
  - non vincere niente con il 75% di probabilità.
- *LOTTERIA D*
  - vincere 4000 euro con il 20% di probabilità;
  - non vincere niente con 80% di probabilità;

Le due coppie di scommesse, (A, B) e (C, D) sono identiche, nel secondo caso si sono soltanto ridotti gli esiti ad un quarto della probabilità offerte dal primo per il quale si è constatata la preferenza per la prima lotteria, in quanto si è attratti maggiormente da un guadagno certo di 3000 euro rispetto all'incertezza (seppur bassa) di guadagnarne 4000. Nel secondo caso però vi è un'inversione di tendenza nella scelta perché, non essendovi più guadagni certi, si preferisce tentare di vincere una somma più alta che comunque comporta un maggior rischio di non vincere nulla.
Si può descrivere il fenomeno in questi termini: in presenza di un guadagno certo, anche se inferiore, è questo che ha un valore psicologicamente più alto; mentre nell'incertezza si preferirà rischiare di più per vincere una somma più alta.
Un altro esempio famoso di violazione del principio di indipendenza è il cosiddetto *paradosso di Ellsberg*

3.1.2 Il paradosso di Ellsberg

Un'urna contiene 300 palline di cui 100 sono rosse e 200 sono blu e verdi. Vengono proposte le seguenti due lotterie (con A_i e B_i indichiamo i rispettivi guadagni se l'evento si realizza):

- *LOTTERIA A*
  - $A_1 = 1000$ euro se la prima pallina estratta è rossa;
  - $A_2 = 0$ euro se la prima pallina estratta non è rossa;
- *LOTTERIA B*
  - $B_1 = 1000$ euro se la prima pallina estratta è blu;
  - $B_2 = 0$ euro se la prima pallina estratta non è blu;

La scelta viene effettutata nei termini seguenti:

$$A \succeq B \iff$$
$$\tfrac{1}{3}u(1000) + (1 - \tfrac{1}{3})u(0) \geq p(blu)u(1000) + (1 - p(blu))u(0)$$
$$\iff (\tfrac{1}{3} - p(blu))u(1000) \geq (\tfrac{1}{3} - p(blu))u(0)$$

Viene poi data la possibilità di scegliere tra altre due lotterie:

- *LOTTERIA C*
  - $C_1 = 1000$ euro se la prima pallina estratta non è rossa;
  - $C_2 = 0$ euro se la prima pallina estratta è rossa;
- *LOTTERIA D*
  - $D_1 = 1000$ euro se la prima pallina estratta non è blu;
  - $D_2 = 0$ euro se la prima pallina estratta è blu;

Sia

$$C \succeq D \iff$$
$$\tfrac{1}{3}u(1000) + (1 - \tfrac{1}{3})u(0) \geq (1 - p(blu))u(1000) + p(blu)u(0)$$
$$\iff (\tfrac{1}{3} - p(blu))u(1000) \leq (\tfrac{1}{3} - p(blu))u(0)$$

La conclusione è che se un soggetto sceglie A anziché B deve preferire D a C. I soggetti a cui è stato proposto l'esperimento hanno spesso preferito A a B e C a D, mostrando una scelta incoerente con il modello dell'utilità attesa. La spiegazione psicologica del comportamento descritto da Ellsberg risiede nell'errata valutazione che si fa delle probabilità. In particolare si attua un processo logico diverso per valutare la probabilità che qualcosa accada rispetto alla probabilità che qualcosa non accada dando, come in questo caso, un valore psicologicamente più alto alla probabilità che un evento non si realizzi.

3.2 Violazione del principio di transitività

Ricordiamo che il *principio di transitività* afferma che se una persona preferisce l'alternativa A alla B, allora l'aggiunta di un'alternativa C, considerata inferiore a B, non dovrebbe modificare la scelta per l'alternativa A. Vediamo un esempio proposto dallo psicologo israeliano Amos Tversky, collaboratore del premio Nobel Daniel Kahneman nello studio degli errori sistematici umani e delle decisioni in condizioni di incertezza.

3.2.1 Lexicographic semiorder

Un datore di lavoro debba scegliere tra tre candidati di cui possiede informazioni relative al QI e agli anni di esperienza lavorativa, la regola decisionale adottata è la seguente:

- se c'è una differenza nel QI tra due candidati maggiore di 10 punti sceglie il più intelligente;
- se la differenza è uguale o minore di 10 punti sceglie il candidato con maggiore esperienza.

I candidati presentano le seguenti caratteristiche:

- Candidato A: QI 120 esperienza di un anno;
- Candidato B: QI 110 esperienza di due anni;
- Candidato C: QI 100 esperienza di tre anni.

Secondo le regole decisionali B deve essere preferito a A, C a B, ma allo stesso tempo A viene preferito a C, in contraddizione con il principio. In questo caso non vi è nessun fattore psicologico che entra in azione, è un dato di fatto che il metodo usato per la scelta non rappresenti una relazione d'ordine, (ricordiamo che questi esempi rappresentano casi limite e che nella maggior parte delle volte sono escogitati apposta per violare i principi della teoria). Un altro esempio di questo tipo è rappresentato dal cosiddetto *paradosso del quadrato magico*.

3.2.2 Il paradosso del quadrato magico

Si definisce *magico* qualunque quadrato di dimensione $n \times n$ formato dai primi n^2 numeri naturali e nel quale siano costanti le somme di tutte le righe, di tutte le colonne e delle due diagonali. Prendiamo, per semplicità, il più piccolo dei quadrati magici:

$$\begin{matrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{matrix}$$

Immaginiamo ora il seguente gioco: esistono tre urne che contengono, rispettivamente, dei foglietti con i numeri delle tre righe del quadrato magico. Dunque si ha:

$$A_1 = 4, 9, 2$$
$$A_2 = 3, 5, 7$$
$$A_3 = 8, 1, 6$$

Si debba scegliere, tra le prime due, da che urna estrarre un numero, tenendo conto che da quella scartata verrà estratto un altro numero da un secondo giocatore, e vincerà chi avrà estratto il numero maggiore. Osserviamo il caso in cui si scelga l'urna A_1:

- uscendo il numero 4 si vince 1 volta (sul numero 3) si perde 2 volte (sul 5 e sul 7);
- uscendo il numero 9 si vince 3 volte;
- uscendo il numero 2 si perde 3 volte.

Cosi il saldo dell'urna A_1 rispetto all'urna A_2 è di 4 vincite e 5 perdite. Conviene, allora, scegliere l'urna A_2.

$$A_2 \succ A_1$$

Si debba scegliere ora tra l'urna A_1 e l'urna A_3. Ripetendo il ragionamento precedente abbiamo i seguenti casi:

1. uscendo il numero 4 si vince 1 volta (sul numero 1) e si perde 2 volte (sull'8 e sul 6);
2. uscendo il numero 9 si vince 3 volte;
3. uscendo il numero 2 si vince 1 volta e si perde 2 volte.

Il saldo totale dell'urna A_1 rispetto all'urna A_3 è cosi di 5 vincite e 4 perdite. Conviene, allora, scegliere l'urna A_1.

$$A_1 \succ A_3$$

Per la teoria vista il sistema di preferenze deve soddisfare la proprietà transitiva, quindi saremmo portati a concludere che l'urna A_2 dovrà essere preferita all'urna A_3. Osserviamo, quindi, se questa conclusione teorica viene rispettata nel caso in questione. Dovendo scegliere tra l'urna A_2 e l'urna A_3 osserviamo che, estraendo dall'urna A_2:

1. uscendo il 3 si vince 1 volta e si perde 2 volte;
2. uscendo il 5 si vince 1 volta e si perde 2 volte;
3. uscendo il 7 si vince 2 volte e si perde 1 volta.

In conclusione usando l'urna A_2 si vince 4 volte e si perde 5. Conviene quindi scegliere l'urna A_3, in contrasto con quanto prevede la transitività del sistema di preferenze.
In questi due esempi riportati, come già detto, non entrano in gioco delle componenti psicologiche che tendono a far violare il principio, ma sono semplicemente dei casi particolari in cui esso non vale, bisogna sottolineare, quindi, che nella quasi totalità dei casi in cui bisogna attuare delle scelte tra più lotterie si può sempre utilizzare il principio di transitività, sono rari i casi in cui questo venga violato.

3.3 Violazione del principio di dominanza

Il *principio di dominanza* afferma che se un'alternativa è migliore di un'altra su un attributo e non inferiore su tutti gli altri allora dovrebbe essere sempre preferita. Questo è probabilmente il più ovvio principio di razionalità, e nonostante questo non viene sempre rispettato dai decisori reali, vediamone un esempio riportato da Tversky e Kahneman.

3.3.1 Pesi decisionali sub-additivi

Si debba scegliere tra due lotterie:

- *LOTTERIA A*
  - non vincere niente con il 90% di probabilità;
  - vincere 45 euro con il 6% di probabilità;

- vincere 30 euro con l' 1% di probabilità;
- perdere 15 euro con il 3% di probabilità.

- *LOTTERIA B*
  - non vincere niente con il 90% di probabilità;
  - vincere 45 euro con il 7% di probabilità;
  - perdere 10 euro con l' 1% di probabilità;
  - perdere 15 euro con il 2% di probabilità.

Nell'esperimento condotto da Tversky e Kahneman la maggioranza degli intervistati ha scelto la lotteria A, nonostante essa sia dominata dalla lotteria B. Infatti la prima lotteria ha un valore atteso pari a $2,55$ inferiore al valore atteso della seconda che è $2,65$.
Il motivo di questa preferenza, in contraddizione con il principio di dominanza, va ricercato ancora una volta nei valori psicologici che entrano in gioco durante la fase decisionale, secondo i quali si tende a dare più valore al fatto che nella lotteria A vi sia un numero maggiore di esiti positivi (due) rispetto che nella lotteria B (uno).

3.4 Violazione del principio di regolarità

Il principio di regolarità afferma che se il numero di alternative disponibili aumenta, la frequenza di scelta relativa tra le due alternative iniziali dovrebbe rimanere costante. Nel caso in cui vi sono inizialmente due alternative (A e B), al quale poi se ne aggiunge un'altra (C), la frequenza di scelta delle due precedenti non può aumentare, essa potrà o diminuire qualora qualcuno scelga C, oppure rimanere invariata se nessuno sceglie l'alternativa C.
Oltre a questo particolare non di poco conto, abbiamo notato come le proprietà che dovrebbero essere soddisfatte dalla funzione utilità per aiutare i soggetti razionali nel creare una scala di preferenze non sempre vengono soddisfatte, in quanto, più che stabili e rivelate, le preferenze sono *costruite* dagli

individui. Alla base delle ricerche presentate vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupano una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento.
Vediamo due esempi in cui questo principio viene violato.

3.4.1 Effetto attrazione

Immaginiamo una situazione in cui un manager deve decidere quale progetto finanziare. Ha a disposizione un budget per nuovi progetti pari a 100000 euro e si trova a valutare due diversi progetti i cui attributi più importanti sono il costo e la probabilità di raggiungere l'obiettivo previsto.

- *PROGETTO A*
  - costa 100000 euro;
  - c'è una probabilità dell'85% di riuscire a realizzarlo.
- *PROGETTO B*
  - costa 50000 euro;
  - c'è una probabilità del 65% di riuscire a realizzarlo.

In una simile situazione, il manager si troverà a vivere un conflitto a quale alternativa è la più conveniente, il progetto A ha una probabilità maggiore di riuscire con successo, tuttavia è più costosa (richiede tutto il budget disponibilie) e la riuscita non è certa; mentre il progetto B ha una probabilità minore di riuscire con successo, ma è meno costoso (si preserva metà del budget disponibile per finanziare altri progetti).
Di conseguenza, a seconda di chi decide potrebbe essere messo in atto il progetto A oppure il progetto B, in questo caso è particolarmente difficile definire una funzione utilità che vada bene per tutti coloro che devono prendere questa decisione, la scelta ha un carattere prettamente personale, tuttavia questo è un problema di cui non ci occuperemo.

Immaginiamo una situazione alternativa in cui i progetti che possono essere finanziati sono tre anziché solo sue (sempre A e B):

- *PROGETTO C*
  - costa 50000 euro;
  - c'è una probabilità del 55% di riuscire a realizzarlo.

Il progetto C è dominato dal progetto B e giustamente non viene scelto da nessuno ma, è sperimentalmente constatato, che in questo caso aumenta la frequenza di scelta accordata al progetto B, violando cosi il principio di regolarità.
Quel che accade è che i manager vengono *attratti* dall'alternativa che sicuramente risulta vantaggiosa rispetto a un'altra, quasi non curandosi più dell'alternativa iniziale, l'aggiunta di un terzo progetto dominato dal secondo psicologicamente facilita la decisione da prendere. Vedremo nel prossimo esempio come l'inserimento di un'altra opportuna alternativa, che risulta essere palesemente meno vantaggiosa rispetto a quella più costosa, farà vertere la frequenza delle scelte verso quest'ultima dimostrando, quindi, come sia essenziale, nel processo decisionale, riconoscere il vantaggio di un'alternativa rispetto a un'altra.
Immaginiamo la situazione in cui sono presenti inizialmente il progetto B e il progetto D:

- *PROGETTO D*
  - costa 90000 euro;
  - c'è una probabilità del 75% di riuscire a realizzarlo.

Si aggiunga poi l'alternativa rappresentata dal progetto A. In questo caso l'inserimento dell'alternativa più estrema fa aumentare le scelte per l'alternativa che inizialmente era più costosa (progetto D), in quanto questa risulta essere vantaggiosa rispetto a quella aggiunta.

3.5 Violazione del principio di invarianza

Il principio di invarianza afferma che se viene preferita un'alternativa ad un'altra, tale preferenza non dovrebbe essere modificata per effetto della metodologia utilizzata per misurarla o per l'effetto del modo in cui le opzioni sono state presentate (descrizione in termini positivi contro quelli negativi, valutazione congiunta contro valutazione separata).

3.5.1 Inversione delle preferenze

Immaginiamo di dover scegliere quali delle seguenti scommesse giocare:

- P-Bet: offre 28/36 di probabilità di vincere 10 euro.
- S-Bet: offre 3/36 di probabilità di vincere 100 euro.

La P-Bet, quindi, offre una bassa vincita ma con probabilità elevata, mentre la S-Bet offre una vincita elevata ma con bassa probabilità. La maggioranza delle scelte ricade sulla scommessa offerta da P-Bet rilevando il fatto che risulta più attraente una vincita molto probabile anche se la somma in palio è minore.
Si debba ora decidere quale sia il prezzo minimo al quale vendere ciascuna scommessa ad un altro giocatore. La maggioranza delle persone chiede una somma maggiore per vendere la S-Bet in quanto offre una vincita monetaria maggiore attribuendo, quindi, un valore più elevato anche se la probabilità di vincere è minore. Secondo la teoria la nostra preferenza dovrebbe sempre tenere conto di entrambe le dimensioni e se una delle due ci sembra più rilevante dovrebbe sempre essere cosi. Ciò che accade in realtà è che quando ai tester viene chiesto di scegliere si concentrano sulla probabilità di vincere, mentre quando devono stabilire un prezzo minimo a cui vendere le due scommesse si concentrano sulla somma in palio.

3.5.2 Effetto framing

In un primo esperimento, alle persone è stato proposto il seguente scenario:
"Immagina che una malattia sconosciuta stia per colpire la popolazione italiana. Questa malattia dovrebbe contagiare almeno 600 persone, quali di questi programmi di cura sceglieresti?"
Ad un primo gruppo di persone è stata data la possibilità di scegliere tra:

PROGRAMMA A: Adottando questo programma 200 persone si salveranno certamente.

PROGRAMMA B: Adottando questo programma c'è 1/3 di probabilità che tutti si salvino e 2/3 di probabilità che nessuno si salvi.

Ad un secondo gruppo di persone è stata data la possibilità di scegliere tra:

PROGRAMMA C: Adottando questo programma 400 persone moriranno certamente.

PROGRAMMA D: Adottando questo programma c'è 1/3 di probabilità che nessuno muoia e 2/3 di probabilità che 600 persone muoiano.

Il risultato ottenuto è che il 72% delle persone del primo gruppo (*frame positivo*) ha scelto l'alternativa certa, mentre il 78% dei componenti del secondo gruppo (*frame negativo*) ha optato per l'alternativa incerta.
Come emerge da questo esempio, l'*effetto framing* dipende dal modo in cui le informazioni rilevanti per la decisione vengono *incorniciate*. In molti casi diversi, le stesse informazioni possono essere fornite sia in forma positiva sia in forma negativa, si tratta di versioni complementari della stessa informazione e quindi non dovrebbero modificare le preferenze delle persone.
Notiamo da questo esperimento come la certezza assuma maggior valore nel caso di frame positivo, mentre in caso di frame negativo si scelga un evento di tipo probabilistico.
In un secondo esperimento ad un gruppo di persone è stato presentato il

seguente scenario:
"Immagina di aver deciso di andare a teatro e che il prezzo del biglietto sia di 10 *euro. Al momento di entrare nel teatro ti accorgi di aver perso una banconota da* 10 *euro. Paghi lo stesso i* 10 *euro del biglietto? Si/No"*
Ad un secondo gruppo di persone è stato presentato, invece, uno scenario diverso:
"Immagina di aver deciso di andare a teatro e di aver pagato 10 *euro per il biglietto. Al momento di entrare nel teatro ti accorgi di aver perso il biglietto (i posti non sono numerati e non si può risalire a chi ha comprato i biglietti). Paghi i* 10 *euro necessari per un nuovo biglietto? Si/No"*
Dal punto di vista economico le due situazioni sono identiche e prevedono una spesa totale di 20 euro, di conseguenza, per quanto descritto dalla teoria della razionalità, la scelta delle persone non dovrebbe risultare diversa nelle due situazioni. Ciò però non avviene, ben l'88% delle persone sarebbero state disposte a pagare comunque il biglietto anche dopo aver perso la banconota, mentre solo il 46% di quelle che ipoteticamente hanno perso il biglietto hanno preso la stessa decisione.
Nel secondo caso le persone pensano di aver già speso il *budget teatro* e che quindi sarebbe una spesa gravosa quella di ricomprare il biglietto. Nel primo scenario, invece, la perdita della banconota è vista in maniera indipendente dall'ingresso a teatro e quindi dall'acquisto del biglietto: la banconota da 10 euro è persa ma, sempre dipendentemente dalle possibilità economiche del soggetto, questo non comporta nessun cambiamento nei piani prestabiliti, mentre la perdita del biglietto comporta psicologicamente il fallimento di un intero programma.

3.5.3 Incoerenza negli atteggiamenti verso il rischio

In questo esperimento viene presentata una situazione in cui si devono prendere nello stesso momento le due decisioni che seguono:

- Scelta tra le lotterie A e B:

  - A: vincita sicura si 240 euro;
  - B: vincita di 1000 euro con probabilità del 25% e niente con probabilità del 75%.

- Scelta tra le lotterie C e D:
  - C: perdita sicura di 750 euro;
  - D: perdita di 1000 euro con probabilità del 75% e niente del 25%.

Dal momento che le due scelte vengono prese nello stesso momento i loro esiti si combinano e possono essere considerate come un'unica scelta:

- *LOTTERIA A+D*
  - 25% di probabilità di vincere 240 euro e 75% di probabilità di perdere 760 euro.
- *LOTTERIA B+C*
  - 25% di probabilità di vincere 250 euro e 75% di probabilità di perdere 750 euro.

Nel caso in cui vengono presentate le due decisioni in maniera separata il 77% delle persone a cui è stato proposto il test ha scelto la combinazione di lotterie A+D, nel caso invece in cui vengono presentate in maniera aggregata il 100% dei tester ha scelto la lotteria B+C, presentando quindi un'incoerenza con i dati prima ottenuti.
Questa incoerenza è data dal fatto che, nel primo caso, assume un più alto valore psicologico il sapere di poter vincere con **certezza** una quantità di denaro seppur inferiore, e di perderne **probabilmente** una quantità anche se superiore.
Quindi ci troviamo di nuovo di fronte all'evidenza che si è più propensi a rischiare in caso di perdita, mentre in caso di guadagno si è disposti ad *accontentarsi* di una vincita certa anche se inferiore.

3.6 Altri assiomi e paradossi

3.6.1 Il paradosso di Machina

Siano dati i seguenti eventi:

- A = vincere una gita a Venezia;
- B = vincere una videocassetta su Venezia;
- C = nessuna vincita.

Supponiamo che per un uomo razionale sia:

$$u(A) > u(B) > u(C)$$

Vengono poi proposte due lotterie:

- *LOTTERIA X*
  - A si realizzi con una probabilità pari a 0.999;
  - B si realizzi con una probabilità pari a 0.001.
- *LOTTERIA Y*
  - A si realizzi con una probabilità pari a 0.999;
  - C si realizzi con una probabilità pari a 0.001.

L'assioma di indipendenza ci obbliga a scegliere la prima lotteria. La vincita A, infatti, avviene nelle due lotterie con la stessa probabilità mentre esse differiscono solo per il risultato alternativo. Poichè $u(B) > u(C)$ ciascun uomo razionale le cui preferenze soddisfacciano l'assioma di indipendenza deve concludere che $u(X) > u(Y)$.
Supponiamo, quindi, che si scelga la lotteria X e che, con un colpo di sfortuna, non si vinca il viaggio a Venezia. Ci si potrebbe sentire però piuttosto miserabili a guardare il documentario in videocassetta. Questo significa che prima di giocare vale $u(B) > u(C)$ ma, una volta che si ha giocato e si ha

perso, le preferenze si modificano.
Questo non è propriamente un paradosso poiché si tratta di una drastica violazione dell'ipotesi che l'utilità rimanga la stessa in tutti gli stati del mondo.

3.6.2 Assioma di sostituibilità di Samuelson

Nelle scelte da parte di uomini razionali molte volte non solo l'assioma di indipendenza non viene rispettato, ma anche il cosidetto **Assioma di sostituibilità di Samuelson**:
Siano A e B due lotteIntroduzionerie tali che

$$A \prec B$$

l'assioma di sostituibilità afferma che se C e α sono rispettivamente una lotteria e una probabilità qualsiasi si avrà:

$$\hat{A} = \alpha A + (1 - \alpha)(C) \prec \hat{B} = \alpha B + (1 - \alpha)(C)$$

Quindi l'ordine di preferenza tra A e B non cambia per composizione con un'altra lotteria C (l'assioma conserva la preferenza per composizione).
Vediamo ora un esempio in cui questo assioma non viene rispettato.
Consideriamo le seguenti lotterie:

- *LOTTERIA A*
  - probabilità pari a 0.98 di vincere 500 milioni;
  - probabilità pari a 0.02 di non vincere nulla.
- *LOTTERIA B*
  - certezza di vincere 100 milioni.
- *LOTTERIA C*
  - certezza di vincere 1 euro.

L'esperienza mostra come le persone giudicate razionali (secondo le definizioni date in precedenza), scelgano la lotteria A, in particolare:

$$A \succ B \succ C$$

Ma, allo stesso tempo, preferiscono avere 0.98 chances su 100 di guadagnare 100 milioni a una chance su 100 di guadagnarne 100, in quanto, lontani da un guadagno certo, entrano in campo dei valori psicologici differenti, vale cioè

$$\hat{u}(V) = \sum p_i \hat{u}(g_i)$$

dove la funzione utilità $\hat{u}(g)$ è tale che assuma un valore nettamente maggiore per l'importo più alto (500 milioni).
Ora, questa seconda preferenza indica che per gli uomini razionali si abbia

$$\hat{A} = \frac{1}{100}(A) + \frac{99}{100}(C) \succ \hat{B} = \frac{1}{100}(B) + \frac{99}{100}(C)$$

Abbiamo quindi definito due nuove lotterie (che rappresentano proprio il primo e il secondo membro della disuguaglianza dell'assioma):

- *LOTTERIA* $\hat{A}$
  - probabilità pari a 0.0098 di vincere 500 milioni;
  - probabilità pari a 0.99 di vincere 1 euro;
  - probabilità pari a 0.0002 di non vincere niente.
    E questa lotteria è del tutto simile a:
  - probabilità pari a 0.0098 di vincere 500 milioni;
  - probabilità pari a 0.9902 di non vincere niente.
- *LOTTERIA* $\hat{B}$
  - probabilità pari a 0.01 di vincere 100 milioni;
  - probabilità pari a 0.99 di vincere 1 euro.
    E questa lotteria è del tutto simile a:
  - probabilità pari a 0.01 di vincere 100 milioni;

– probabilità pari a 0.99 di non vincere niente.

E in effetti è preferibile la prima lotteria alla seconda, il che contraddice l'assioma di Samuelson, secondo il quale doveva continuare a risultare preferibile la seconda lotteria, vediamo perchè non è cosi.
Il ragionamento che ha portato Samuelson alla formulazione di questo assioma è il seguente, usiamo le stesse notazioni dell'esempio in cui però consideriamo le due lotterie A e B equivalenti: consideriamo i due biglietti delle lotterie composte $\hat{A}$ e $\hat{B}$ e supponiamo di dover operare un sceta tra queste. Se si realizza l'evento di probabilità $(1-\alpha)$ si ottiene con i due biglietti la stessa lotteria C, e i due biglietti risultano quindi equivalenti. Se, al contrario, si realizza l'evento con probabilità α, il primo biglietto corrisponderà alla lotteria A e il secondo alla lotteria B ma dato che, per ipotesi, le lotterie A e B sono equivalenti, lo sono anche le lotterie $\hat{A}$ e $\hat{B}$.
Il ragionamento è lineare e sembra non mostrare eccezioni, quando però un individuo deve operare una scelta non sa quale evento si realizzerà, la sua decisione dovrà essere fatta *ex ante*, mentre il ragionamento presentato è condotto *ex post*, che elimina, senza rendercOltre a questo particolare non di poco conto, abbiamo notato come le proprietà che dovrebbero essere soddisfatte dalla funzione utilità per aiutare i soggetti razionali nel creare una scala di preferenze non sempre vengono soddisfatte, in quanto, più che stabili e rivelate, le preferenze sono *costruite* dagli individui. Alla base delle ricerche presentate vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupano una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento.
ene conto, l'importanza della distribuzione aleatoria.
Nell'esempio preso in considerazione la teoria, quindi, suggerirebbe di associare la scelta della seconda lotteria con la scelta di avere 1 probabilità su 100 di vincere 100 milioni rispetto a 0.98 probabilità su 100 di vincerne 500, ma questo è un ragionamento fatto a posteriori, limitandosi a considerare le due situazioni in cui si suppone che la prima abbia già avuto esito (negativo o positivo che sia). Queste due situazioni sono psicologicamente differenti tra

loro, ma da un punto di vista teorico ci si aspetta che dinanzi a esse ci si comporti allo stesso modo, ma è sperimentalmente provato che l'uomo razionale è portato a preferire la certezza nel caso di grandi guadagni e l'incertezza nel caso di grandi rischi.

Capitolo 4

Teoria del Prospetto

A partire dagli studi sulla violazione degli assiomi di razionalità, Kahneman e Tversky (1982) hanno proposto un modello volto a descrivere in modo più accurato le scelte reali delle persone, questo modello è stato denominato **Teoria del Prospetto**.
La Teoria del Prospetto non è in contraddizione con la Teoria dell'Utilità Attesa ma punta ad integrarla: mentre quest'ultima fornisce un modello teorico relativo al modo in cui le persone dovrebbero comportarsi per prendere la decisione migliore, la Teoria del Prospetto fornisce un modello teorico relativo ai processi decisionali che inducono le persone a prendere decisioni sub-ottimali.
Questa teoria, che è una delle prime alternative a quella dell'utilità attesa, si basa sull'idea che gli individui interpretino e valutino le prospettive o le opzioni proposte in termini di scarto da un dato punto di riferimento. In altre parole, a prescindere dalle caratteristiche dello specifico contesto decisionale, sembra che i soggetti abbiano bisogno di individuare un punto di riferimento cognitivo che funga da termine di paragone in base al quale valutare le opzioni a loro disposizione. Il decisore ha bisogno di una *prospettiva* con cui affrontare le dinamiche della scelta.
Il termine *prospetto* sostituisce il termine economico di lotteria, ma punta a dare un'impressione più forte del carattere soggettivo che le alternative as-

sumono nella testa dei decisori. Un prospetto è la combinazione di tutti i possibili esiti di un'alternativa e delle probabilità ad essi legate

$$X : (x_1, p_1; ...; x_n, p_n)$$

dove, ovviamente, $p_1 + ... + p_n = 1$. Per semplicità si possono omettere i risultati nulli e usare la notazione (x, p) per indicare il prospetto $(x, p; 0, 1-p)$ che offre il risultato x con probabilità p e 0 con probabilità $1-p$. Il prospetto privo di rischio, che offre la certezza di ottenere x si indica con la forma x. Il processo decisionale si articola in due fasi successive: la fase di *Editing* e la fase di *Valutazione*. L'analisi preliminare dei prospetti (Editing) viene fatta, per lo più, a livello inconsapevole e porta a una visione semplificata dei prospetti disponibili. Le principali operazioni di editing sono le seguenti:

- **Codifica**
  I risultati offerti da un prospetto vengono codificati in base ad un punto di riferimento. Le persone si rappresentano gli esiti offerti da un prospetto in termini di guadagni o perdite rispetto alla loro condizione al momento della decisione. Ad esempio, da un punto di vista economico un investitore dovrebbe sempre considerare un guadagno di 3000 euro come positivo, in realtà, un tale guadagno potrebbe essere considerato come un risultato negativo se l'obiettivo (punto di riferimento) era quello di ottenere 4000 euro.

- **Combinazione**
  Utilizzando questa operazione il decisore combina esiti che sono tra loro identici come entità ma differenti in termini di probabilità di realizzarsi. Ad esempio il prospetto $Y : (100, 0.25; -200, 0.3; 100, 0.45)$ potrebbe essere semplificato con $Z : (100, 0.7; -200, 0.3)$.

- **Separazione**
  In alcuni casi è possibile dover valutare prospetti che offrono sia elementi privi di rischio (esiti certi) sia elementi rischiosi (esiti incerti).

In questi casi si può separare gli esiti certi da quelli incerti. Ad esempio il prospetto $Y : (400, 0.8; 150, 0.2)$ potrebbe essere semplificato con $Z : (150; 250, 0.8)$.

- **Cancellazione**
  Per semplificare la scelta tra più prospetti i decisori potrebbero cancellare, o eliminare, le componenti che sono comuni a tutti i prospetti. Ad esempio, se la scelta è tra il prospetto $A : (1000, 0.25; -100, 0.75)$ e il prospetto $B : (1000, 0.1; 500, 0.4; -200, 0.5)$, potrebbero essere semplificati nel modo seguente: $A' : (1000, 0.15; -100, 0.75)$ e $B' : (500, 0.4; -200, 0.5)$.

- **Semplificazione**
  Spesso i decisori possono semplificare gli elementi di un prospetto che lo rendono meno agevole da valutare. Ad esempio, un tipo di semplificazione è quello di arrotondare il valore degli esiti e delle probabilità ad essi associate: $X : (199, 0.49; -201, 0.49; -100, 0.02)$ potrebbe essere semplificato con $Y(200, 0.5, -200, 0.5)$. In questo modo però un prospetto che era inizialmente leggermente svantaggioso viene percepito come neutrale.

- **Riconoscimento della dominanza**
  Solitamente i decisori reali cercano di identificare delle relazioni di dominanza tra le alternative e scartano quei prospetti che sono dominati da altri più interessanti. Tuttavia, come abbiamo visto trattando della violazione della dominanza, i decisori reali sono spesso ingannati dal modo in cui le alternative sono presentate. Riconoscono i rapporti di dominanza solamente quando sono espressi in modo esplicito.

Le operazioni di semplificazione possono essere applicate senza un ordine preciso a seconda delle informazioni su cui si concentra ogni decisore. Ciò crea un problema per la prevedibilità delle valutazioni (e conseguenti scelte) delle persone perché l'uso di una determinata azione di semplificazione potrebbe precludere l'uso di un'altra operazione, di conseguenza l'ordine con cui vengono utilizzate diventa fondamentale.

In seguito, nella fase di valutazione, vengono messe a confronto le forme semplificate dei prospetti tra cui scegliere. Questa fase si basa su due funzioni che le persone utilizzano per valutare, in modo soggettivo, gli esiti e le probabilità ad essi associate: la funzione di **ponderazione** delle probabilità e la funzione del **valore**.
Oltre a questo particolare non di poco conto, abbiamo notato come le proprietà che dovrebbero essere soddisfatte dalla funzione utilità per aiutare i soggetti razionali nel creare una scala di preferenze non sempre vengono soddisfatte, in quanto, più che stabili e rivelate, le preferenze sono *costruite* dagli individui. Alla base delle ricerche presentate vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupano una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento.
La funzione di ponderazione mette in luce due aspetti fondamentali relativi alla percezione soggettiva delle probabilità:

- le probabilità più basse vengono sopravvalutate;
- le probabilità medie e alte vengono sottovalutate.

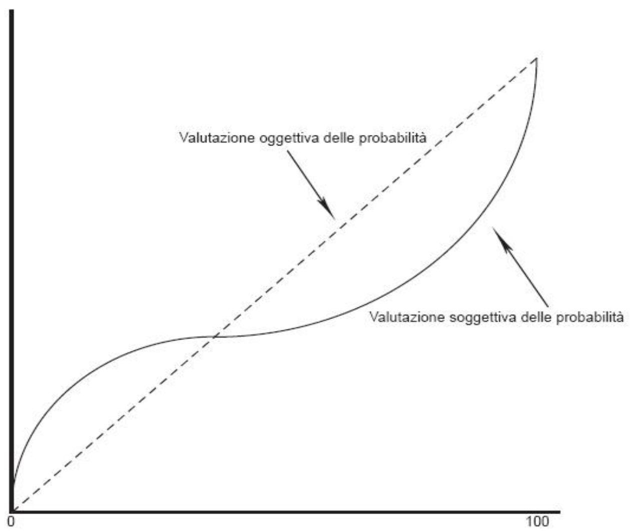


Figura 4.1: Funzione Ponderazione

Ciò significa che esiti poco probabili sono sopravvalutati rispetto alla certezza di non ottenerli e, allo stesso modo, esiti molto probabili sono sottovalutati rispetto alla certezza di ottenerli.
Questo fatto spiega l'effetto certezza e l'esempio sulla violazione del principio di indipendenza. Passare da una vincita certa ad una vincita molto probabile (es. 98%) riduce in modo significativo il grado di attrazione di un'alternativa, *la probabilità elevata viene sottovalutata*, mentre passare da una perdita certa ad una perdita molto probabile rende un'alternativa meno negativa, *la ridotta probabilità di evitare la perdita viene sopravvalutata.*
La funzione del valore proposta da Kahneman e Tversky ha tre caratteristiche fondamentali:

- gli esiti vengono valutati in relazione ad un punto di riferimento e sono categorizzati come guadagni o perdite;
- in entrambi i quadranti (guadagni e perdite) la funzione è caratterizzata da una diminuzione della sensibilità ai cambiamenti;
- nel quadrante delle perdite la funzione è più ripida che nel quadrante dei guadagni.Oltre a questo particolare non di poco conto, abbiamo notato come le proprietà che dovrebbero essere soddisfatte dalla funzione utilità per aiutare i soggetti razionali nel creare una scala di preferenze non sempre vengono soddisfatte, in quanto, più che stabili e rivelate, le preferenze sono *costruite* dagli individui. Alla base delle ricerche presentate vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupano una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento.

Dal momento che la curva è più ripida nel quadrante delle perdite rispetto al quadrante dei guadagni le persone hanno una percezione asimmetrica di esiti che cadono sopra o sotto il punto di riferimento. Le perdite creano un dolore circa doppio rispetto al piacere che suscitano le vincite e, da un punto

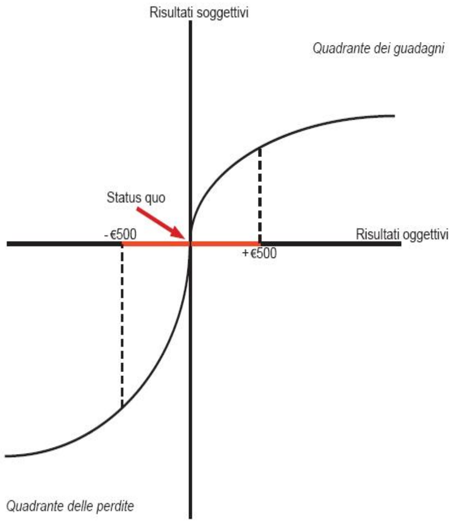


Figura 4.2: Funzione Valore

di vista psicologico, una vincita ed una perdita di uguale entità non si annullano, l'individuo percepisce il risultato finale come una perdita.
Per questo motivo le persone sono poco propense ad accettare una scommessa che le dia la stessa probabilità del 50% di vincere o perdere 100 euro, il peso psicologico della possibile perdita supera quello della possibile vincita e la scommessa viene vista come impari.
A causa dell'avversione alla perdita e della tendenza a codificare gli esiti in guadagni e perdite, le persone sono più abili a fare valutazioni comparative piuttosto che assolute, il che spiega anche la violazione del principio di regolarità con il cosiddetto *effetto attrazione*.
Un altro effetto delle valutazioni comparative tra due esiti positivi di valore assoluto differente, è che i decisori possono preferire l'esito inferiore purché sia migliore rispetto a quello ottenuto da altre persone. Questo comportamento è chiaramente non razionale, dal momento che da un punto di vista oggettivo si dovrebbe sempre ambire ad ottenere l'esito più elevato possibile, tuttavia, in molti casi, la sensazione di essere *migliori* degli altri è più importante del risultato stesso che si ottiene ed aumenta, soggettivamente, il valore di una certa alternativa.

Abbiamo quindi visto come, nella teoria del prospetto, le persone non trattino le probabilità come sono realmente, ma ne utilizzino delle distorsioni. In particolare, gli individui tendono a sovrastimare le piccole probabilità e a sottostimare le probabilità medie o elevate.
Inoltre, la teoria del prospetto predice che le preferenze per cui opta il soggetto dipendono dal tipo di rappresentazione mentale del problema decisionale (*effetto framing*). Secondo Tversky e Kahneman (1981), i soggetti si costruiscono i problemi, cioè elaborano *frames*, in maniera differente a seconda del modo in cui viene strutturata la situazione problematica.

Conclusioni

Analizzando la storia che ha portato all'evoluzione della Teoria della Razionalità, notiamo come i primi primi passi di questa teoria siano nati con la definizione da parte di Bernoulli della funzione utilità, da cui poi è nato il modello dell'utilità attesa che ha portato allo sviluppato di tutta la teoria.
Osserviamo che questo modello è nato per risolvere il Paradosso di San Pietroburgo, in cui la vincita cresce in modo esponenziale rispetto al numero dei lanci di una moneta. Abbiamo visto come per decidere il prezzo per partecipare al gioco, senza cadere in contraddizione, non si possa più usare il valore atteso come metro di valutazione, ma è necessaria l'introduzione di una funzione utilità che, nel modello proposto da Bernoulli, è di tipo logaritmico. Ciò ci suggerisce che questa funzione debba compensare la crescita del possibile guadagno, in modo da ottenere una successione di valori lineare delle preferenze.
Questa osservazione ci fa capire che si possono creare numerosi altri paradossi di questo genere: infatti possiamo ideare giochi in cui le possibili vincite crescano in maniera più che esponenziale, per cui occorrerà, per compensare questa crescita, una funzione utilità che cresca più lentamente del logaritmo. Possiamo ovviamente iterare il procedimento all'infinito, dimostrando che non può esistere una funzione utilità che vada bene per tutti i possibili casi.
Oltre a questo particolare non di poco conto, abbiamo notato come le proprietà che dovrebbero essere soddisfatte dalla funzione utilità, per aiutare i soggetti razionali nel creare una scala di preferenze, non sempre vengono soddisfatte, in quanto, più che stabili e rivelate, le preferenze sono *costruite*

dagli individui.
Alla base delle ricerche presentate vi è l'idea che i giudizi intuitivi occupano una posizione intermedia fra le operazioni automatiche della percezione e le operazioni deliberate del ragionamento.
Abbiamo visto come le violazioni della razionalità presentate non possono essere facilmente spiegate con una mancanza di attenzione e non possono interessarci solo marginalmente in quanto semplici *abbagli della ragione*. Kahneman e Tversky hanno quindi suggerito che in molti casi sia le persone comuni sia gli esperti, anziché servirsi di regole razionalmente valide, elaborano giudizi e prendono decisioni grazie a strategie cognitive più semplici, dette *euristiche*, *scorciatoie* che eliminano o riducono le necessità di attribuire probabilità ed assegnare valori numerici. Le euristiche a volte funzionano, e ci risparmiano certamente ragionamenti e calcoli complessi, ma altre volte no!
Come noto, molto spesso, le persone quando devono scegliere affermano di affidarsi a **intuizioni**. Gli scienziati cognitivi le definiscono *percezioni preliminari di coerenza non rappresentate coscientemente*, che servirebbero a *guidare* il pensiero verso una ipotesi riguardo la natura della coerenza in questione. Si ipotizza quindi l'esistenza di una serie di meccanismi mentali inconsapevoli che analizzano, processano e classificano l'informazione a disposizione e fanno sì che il soggetto acquisisca una conoscenza procedurale (pratica), che cade al di fuori della consapevolezza e che permetterà di fornire risposte in un tempo minore rispetto ai processi consapevoli.
Tale conoscenza contrasta fortemente con la conoscenza esplicita, acquisibile attraverso il controllo intenzionale e consapevole delle informazioni. Le operazioni del primo tipo sono veloci, automatiche, senza sforzo, associative e difficili da controllare e modificare. Le operazioni del secondo tipo sono più lente, seriali, impegnative, flessibili e deliberatamente controllate. Ebbene, come sottolineano Kahneman e Tversky nei loro scritti, le persone non sono di norma allenate a pensare in maniera impegnativa e spesso si sentono soddisfatte nel fare affidamento su un giudizio plausibile che viene in mente in

maniera veloce.
Ed è cosi che si vengono a formare i cosiddetti paradossi analizzati nel terzo capitolo. Il termine paradosso però è stato utilizzato in maniera non del tutto propria, deve essere chiaro che c'è una grande differenza tra un vero paradosso della logica e quella che potremmo definire un' *illusione cognitiva* (termine usato spesso da Kahneman nei suoi lavori). La differenza sta nel fatto che un paradosso mette in crisi la logica e la nostra concezione della razionalità, mentre un'illusione cognitiva mette in crisi solo la teoria che la razionalità normativa, e in particolare la logica, sia un modello realistico dei nostri comportamenti. Quindi si critica l'ipotesi psicologica che noi siamo di fatto guidati dalla razionalità, ma non si mette affatto in dubbio l'ipotesi epistemologica che noi dovremmo cercare di essere guidati da essa.
Il fatto che le persone non scelgano talvolta secondo le norme di razionalità non giustifica di per sé la conclusione che quelle norme vadano modificate:
"Proprio come il fatto che molte persone sbagliano nel calcolare mentalmente la radice quadrata di 4217, ovviamente, non giustifica una revisione della matematica. Al contrario, si potrebbe concludere che i soggetti sperimentali hanno sbagliato rispondendo al questionario, l'errore può essere loro mostrato, e li si può invitare a imparare a scegliere correttamente in futuro, appunto come prescrive le teoria normativa." (Motterlini, Piattelli Palmarini, 2005).
Del resto le ricerche presentate e discusse nei capitoli precedenti hanno sottolineato le distorsioni e le deviazioni del pensiero umano dal modello normativo di razionalità ma non hanno proposto una reale alternativa teorica.
Non dobbiamo perciò concludere che l'uomo sia fondamentalmente irrazionale o che la teoria sia sbagliata, ma piuttosto che la razionalità è un ideale dai lineamenti complessi, a cui naturalmente tendiamo come caso limite.

Bibliografia

1. Allais, *Le comportament de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole americaine*, Paris (1953)
2. Allais, *Traité d'economie pure*, Paris (1953)
3. Ce.R.D. (Centro di Ricerca sul Rischio e la Decisione), *Teoria del Prospetto: avversione alle perdite, framing e status quo*, Università degli Studi di Padova
4. Daniel Bernoulli, *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, (1738)
5. David M. Kreps, *Corso di microecomomia*, Il Mulino (1993)
6. Friedman, Savage, *The Utility Analysis of Choice Involving Risk*
7. Paolo Agnoli, Francesco Piccolo, *Probabilità e scelte razionali*, Armando (2008)
8. Robert S. Pindyck, Daniel L. Rubinfeld, *Microeconomia*, Zanichelli (2006)
9. Von Neumann, John e Oskar Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press (1947)

Ringraziamenti

"Goditi questi anni di università perché saranno anni indimenticabili e i più belli della tua vita. "
E' con queste parole nella testa, che mi sono state dette da un'amica sei anni fa, che mi sono avvicinato a questo giorno.
Negli ultimi mesi ho riflettuto su quanto queste fossero vere, la mia carriera universitaria volge al termine con un pizzico di tristezza, la tristezza di chi sa di aver incontrato nel proprio percorso persone speciali, che hanno saputo riempirgli la vita. Molte di queste già non le vedo da un pò, altre molto probabilmente non le vedrò più in futuro, ma comunque tutte rimarranno per sempre parte di me.
Ci sono perciò molte persone che vorrei ringraziare, per fare maggior ordine e per deformazione professionale ne faccio un elenco, ringrazio:

- innanzi tutto te...voglio ringraziare te che stai leggendo questa dedica, perché se lo stai facendo vuol dire che stai condividendo con me questo giorno importante della mia vita;

- il Prof. Negrini, per l'enorme disponibilità dimostratami e per avermi dato la possibilità di sviluppare un argomento di tesi che mi ha da sempre interessato e affascinato;

- i miei colleghi universitari, tra tutti Andrea e Teresa con i quali abbiamo affrontato insieme le ansie e le tensioni pre-esami (soprattutto quelle di Andrea!);

- Francesca e Nicolaj, amici sempre pronti a darmi una mano in tutte le difficoltà incontrate durante la mia permanenza a Bologna e non solo;

- Alice, che mi ha fatto da mamma per quanto riguarda lo studio e da amica sincera per tutto il resto;

- l'altra Alice, per avermi insegnato finalmente come si gioca a calcetto;

- Roberta, con cui ho condiviso tormenti e felicità per la stesura di questa tesi, il quale supporto è stato indescrivibile;

- la mia famiglia bolognese rappresentata dai ragazzi dello studentato, in particolar modo Andrea, Donatella, Gabriele, Marco e Paolo (messi in ordine alfabetico in quanto tutti hanno stessa importanza...cosi non si arrabbiano spero!) con cui ho convissuto gran parte di questi due anni a Bologna tra pranzi, cene e uscite improbabili: spero che tutti nella vita possano aver modo di incontrare persone come loro che, con la propria semplice pazzia, ti sappiano rendere felice e far sentire sempre a casa;

- tutti i miei amici di Taranto, che mi hanno fatto sentire sempre la loro vicinanza e mi hanno sopportato nei giorni passati a casa;

- Chiara, che tra alti e bassi mi è stata sempre accanto anche nella lontananza, credendo lei prima di me nelle mie capacità;

- mamma, papà e la nonna che mi hanno dato l'opportunità di fare questa esperienza e che hanno saputo resistere alla mia lontananza senza farmelo mai pesare, avendo sempre fiducia in me, il che è stato di fondamentale importanza per arrivare a raggiungere questo traguardo;

- i miei fratelli, di cui ho sentito più di ogni altra persona la mancanza, la lontananza non potrà mai cambiare il legame che ci unisce che va oltre l'essere fratelli e amici.

Un posto tutto speciale invece lo dedico a una persona che mi è sempre stata vicina durante non solo questi due anni, che ha sempre creduto in me quando anche io stentavo a farlo: se sono qui gran parte del merito è suo! Purtroppo oggi non potrà essere presente, ma sono sicuro che sarebbe stata la persona più felice di essere qui accanto a me

"non dimenticherò mai i tuoi occhi pieni di orgoglio ogni volta che tornavo a casa dopo aver superato un esame, quegli stessi occhi pieni di orgoglio che sono sicuro mi stanno guardando anche ora...grazie nonno "