

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Elettronica

Tesi di Laurea in Metodi Numerici per l'Ingegneria LS

**L'EQUAZIONE DELLE ONDE PER LA
CLASSIFICAZIONE DI FIGURE GEOMETRICHE**

Tesi di Laurea di:

ALESSANDRO BIGIARINI

Relatore:

Prof.ssa FIORELLA SGALLARI

Correlatore:

Dott.ALESSANDRO LANZA

Anno Accademico 2011/12

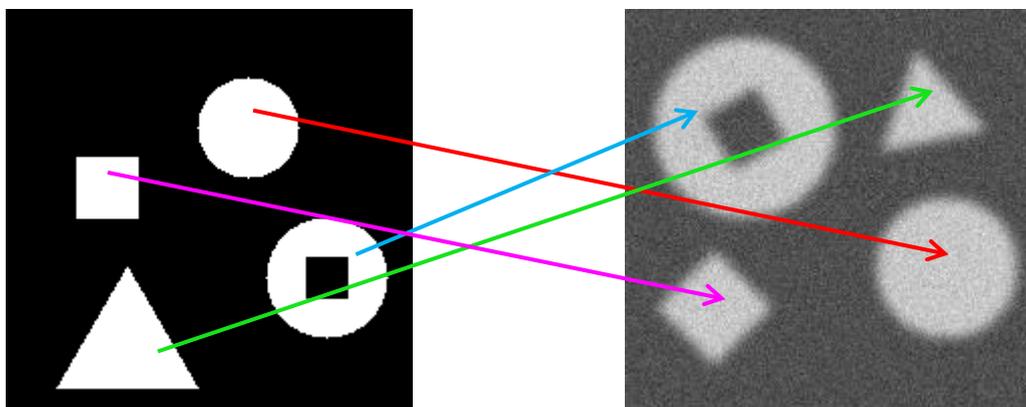
Indice

Scopo della tesi	1
Introduzione	3
Capitolo 1:	
Equazioni delle onde applicata alle immagini	7
1.1 Equazione delle onde per immagini 2-D	8
1.2 Soluzione numerica tramite il metodo alle differenze finite	11
1.2.1 Schema esplicito	12
1.2.2 Schema implicito	15
1.2.3 Scelta dello schema	18
1.2.4 Stabilità numerica	19
1.3 Dispersione numerica	21
1.4 Discretizzazione del laplaciano a nove punti	23

Capitolo 2:	
Rilevamento di punti salienti tramite l'equazione delle onde	27
2.1 Algoritmo per la selezione di punti salienti	31
Capitolo 3:	
Classificazione di figure geometriche tramite l'equazione delle onde	33
3.1 Descrittore al variare dei fattori di disturbo	37
3.1.1 Roto-traslazione	37
3.1.2 Variazione di scala	39
3.1.3 Variazione di contrasto	41
3.1.4 Rumore	43
3.1.5 Sfocamento	45
3.2 Classificazione delle figure geometriche tramite matching dei descrittori	47
Capitolo 4:	
Esperimenti	49
Conclusioni	59
Bibliografia	61

Scopo della tesi

L'obiettivo di questo lavoro di tesi consiste nello studio, lo sviluppo e la validazione sperimentale di un algoritmo per il riconoscimento e la classificazione di figure geometriche in immagini 2-D. In particolare, si vuole che il riconoscimento e la classificazione siano robusti rispetto ad un ben definito insieme di possibili distorsioni geometriche e fotometriche delle figure stesse, quali roto-traslazioni, variazioni di scala, variazioni di contrasto, sfocamento e rumore, come illustrato nella figura.



Si vuole perseguire l'obiettivo suddetto nell'ambito di quelle tecniche di elaborazione dell'immagine, oggi sempre più utilizzate, basate sull'applicazione di equazioni differenziali alle derivate parziali. In particolare, il metodo che si intende sviluppare si basa sull'applicazione dell'equazione delle onde alle immagini contenenti le figure da classificare: dopo aver individuato punti *salienti* caratterizzanti le figure tramite il rilevamento dei punti di shock dell'onda, e dopo aver caratterizzato ciascuno di tali punti per mezzo di un appropriato descrittore, il riconoscimento e la classificazione delle figure si basano sul confronto tra i descrittori estratti.

Introduzione

Nel campo della Visione Artificiale, negli ultimi anni il riconoscimento automatico di oggetti in immagini ha fatto notevoli passi in avanti grazie all'introduzione di metodi basati sul confronto tra *features* locali. Tali approcci consentono infatti di stabilire in maniera molto robusta corrispondenze tra le proiezioni di uno stesso punto fisico dell'oggetto in immagini differenti. Questi algoritmi sono tipicamente costituiti da due fasi ben distinte: il rilevamento di regioni *salienti*, ossia fortemente discriminabili, e la loro successiva descrizione tramite vettori di features che possano essere messi in corrispondenza tra di loro in maniera robusta. Tra i più noti e usati ricordiamo *SIFT* (*Scale Invariant Feature Transform*) [5] e *SURF* (*Speeded Up Robust Feature*) [6], che consentono un quasi istantaneo riconoscimento di oggetti ad alta tessitura in immagini diverse anche quando gli oggetti vengono sottoposti a particolari distorsioni geometriche e fotometriche o addirittura in presenza di occlusioni parziali dell'oggetto stesso. In figura riportiamo un esempio di riconoscimento di un oggetto tramite l'individuazione delle corrispondenze tra punti salienti in immagini acquisite da punti di vista differenti e con parziale occlusione.



L'inconveniente più grande di questi algoritmi è costituito dalla loro intrinseca inadeguatezza a trattare il caso di oggetti a bassa tessitura, che sono tuttavia piuttosto comuni in importanti scenari applicativi. Lo sviluppo di metodi capaci di gestire oggetti a bassa tessitura o addirittura senza tessitura risulta quindi tuttora di grande interesse in quanto consentirebbe l'estensione dell'applicabilità del riconoscimento di oggetti ad importanti ambiti applicativi.

In un recente lavoro di tesi [1] è stato proposto un algoritmo per l'estrazione di punti salienti basato sull'applicazione dell'equazione delle onde. Tale algoritmo, come evidenziato in [1] e [2], consente di individuare punti salienti discriminativi anche nel caso di oggetti a bassa tessitura. I punti salienti si trovano in corrispondenza di punti di *shock* dell'onda, ovvero di estremanti spazio-temporali della soluzione dell'equazione delle onde, ed evidenziano particolari simmetrie locali dell'oggetto.

Questo lavoro di tesi si configura come la continuazione di [1] e [2]; in particolare, si è voluto fare uno studio preliminare circa la possibilità di sviluppare un descrittore dei punti salienti estratti basato anch'esso sulla soluzione dell'equazione delle onde. La preliminarità dello studio presentato risiede nel fatto che ci si è concentrati su di un caso applicativo specifico: il riconoscimento di forme geometriche, ossia di oggetti sintetici a tessitura nulla. Il descrittore proposto dovrà essere robusto ad un insieme ben definito di distorsioni geometriche e fotometriche, quali roto-traslazioni, variazioni di scala, variazioni di contrasto sfocamento e rumore.

Questo tesi è organizzata come segue. Nel primo capitolo introduciamo l'equazione delle onde ed illustriamo come questa possa essere applicata nel caso di immagini 2-D, quindi descriviamo le metodologie numeriche utilizzate per il calcolo efficiente ed accurato della soluzione dell'equazione. Nel secondo capitolo descriviamo l'algoritmo proposto nel precedente lavoro di tesi [1] per l'estrazione di punti salienti ad elevata simmetria in immagini tramite l'applicazione dell'equazione delle onde, lavoro da cui questa tesi prende spunto. Nel terzo capitolo illustriamo nel dettaglio l'algoritmo proposto per la descrizione dei punti salienti e la successiva classificazione/riconoscimento di figure geometriche. Nel quarto capitolo presentiamo i risultati di esperimenti atti a validare il metodo proposto, in particolare testando la capacità di classificare correttamente le figure geometriche a fronte delle distorsioni geometriche e fotometriche considerate in fase di progettazione dell'algoritmo. Infine, traiamo le conclusioni del lavoro e delineiamo alcuni possibili sviluppi futuri.

Equazione delle onde applicata alle immagini

L'equazione delle onde, conosciuta anche come equazione di d'Alembert, è un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine lineare di tipo iperbolico di grande importanza. Essa modella matematicamente il generico fenomeno della propagazione di un'onda nel tempo e nello spazio; essa descrive quindi, ad esempio, la propagazione di onde sonore ed elettromagnetiche. Varianti più o meno complesse dell'equazione delle onde si trovano anche in meccanica quantistica e relatività generale.

La forma generale dell'equazione delle onde per il caso di dominio spaziale n -dimensionale è la seguente:

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) \quad (1.1)$$

dove t rappresenta la variabile temporale, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ la variabile spaziale n -dimensionale, $c > 0$ la velocità di propagazione dell'onda e Δu l'operatore laplaciano spaziale. Assegnate opportune

condizioni iniziali ed al contorno, l'unica soluzione dell'equazione è una funzione $u(\mathbf{x},t)$ che rappresenta il valore della grandezza scalare propagata al tempo t nel punto \mathbf{x} . Ad esempio, per una corda vibrante, la soluzione $u(\mathbf{x},t)$ rappresenta lo spostamento fisico della corda rispetto alla sua posizione di riposo.

Mentre nel caso di dominio spaziale ad una e tre dimensioni esiste un'espressione analitica semplice della soluzione dell'equazione delle onde, ciò non è vero nel caso di dominio a due dimensioni, che è proprio quello che ci interessa in questo lavoro di tesi. Pertanto, per studiare la propagazione delle onde nel caso di immagini 2-D, risulta indispensabile la ricerca di soluzioni approssimate tramite l'utilizzo di metodi numerici. Nei paragrafi successivi, dopo aver formalizzato l'equazione delle onde per il caso di immagini 2-D con le opportune condizioni iniziali ed al contorno, illustreremo brevemente come una soluzione approssimata possa essere ottenuta tramite il metodo alle differenze finite.

1.1 Equazione delle onde per immagini 2-D

Data un'immagine $F(x,y)$, che assumiamo avere dominio spaziale rettangolare $[0,M] \times [0,N]$, proponiamo di applicare l'equazione delle onde secondo il seguente modello:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(x, y, t) \quad (x, y, t) \in D \times [0, T] \quad (1.2a) \\ u(x, y, 0) = I(x, y) \quad (x, y) \in D \quad (1.2b) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = 0 \quad (x, y) \in D \quad (1.2c) \end{array} \right.$$

dove le equazioni (1.2b) ed (1.2c) esprimono, rispettivamente, le condizioni iniziali di ordine zero ed uno: al tempo iniziale $t = 0$ la soluzione u coincide con l'immagine F e la derivata prima temporale della soluzione è nulla.

Affinchè la soluzione sia unica, occorre imporre delle opportune condizioni al contorno. Per ragioni specifiche del problema applicativo che si vuole studiare in questo lavoro di tesi e che saranno illustrate successivamente, si sono scelte condizioni al contorno così dette *assorbenti* del tipo proposto in [4]. In particolare, le condizioni sui quattro lati del dominio spaziale rettangolare $[0,M] \times [0,N]$ dell'immagine sono:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{x=0} - c \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{y=0} - c \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{x=M} - c \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=M} &= 0 \\
 \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right|_{y=N} - c \left. \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=N} &= 0
 \end{aligned} \tag{1.2d}$$

Queste condizioni hanno lo scopo di evitare che l'onda, quando raggiunge i bordi del dominio spaziale, venga riflessa ri-propagandosi verso l'interno del dominio.

In Figura (1.1) mostriamo la soluzione numerica del problema continuo (1.2), ottenuta con i metodi numerici che saranno illustrati nei paragrafi successivi, per un'immagine iniziale sintetica molto

semplice costituita da un cerchio chiaro su sfondo scuro. In particolare, nelle prime sei sotto-figure mostriamo la soluzione ottenuta a sei passi temporali crescenti precedenti il raggiungimento da parte dell'onda dei bordi del dominio spaziale. Nelle ultime tre sotto-figure visualizziamo invece la soluzione ottenuta ad una stessa iterazione successiva ma con condizioni al contorno, rispettivamente, di tipo Neumann (omogenee), Dirichlet (non omogenee) ed assorbenti. Si nota chiaramente come le condizioni assorbenti siano le uniche capaci di evitare la riflessione dell'onda.

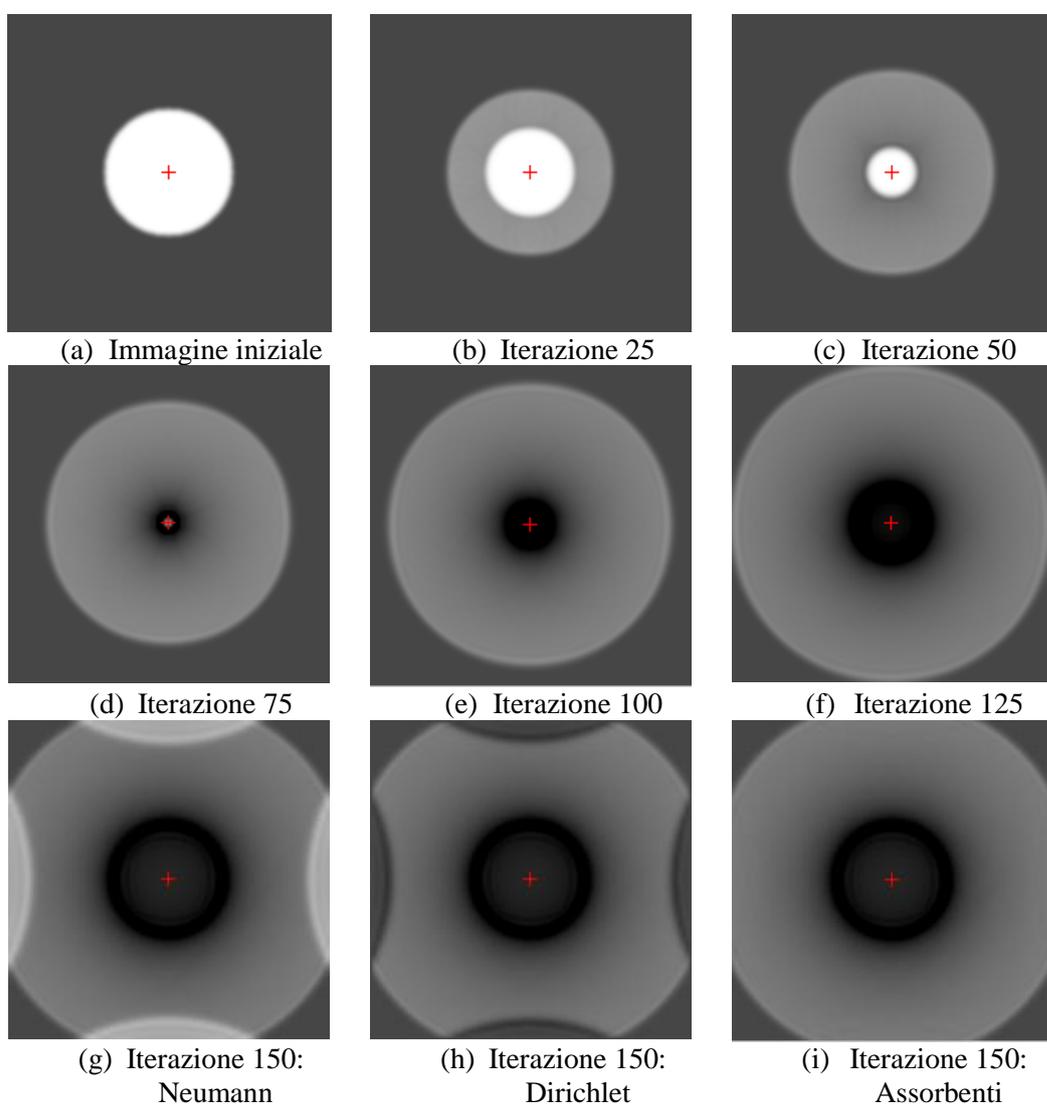


Figura 1.1. Soluzione numerica del problema (1.2) a successive iterazioni.

1.2 Soluzione numerica tramite il metodo alle differenze finite

Soluzioni approssimate del problema differenziale (1.2) possono essere ottenute tramite diversi metodi numerici, quali i metodi alle differenze finite, agli elementi finiti ed ai volumi finiti.

A causa principalmente della *regolarità* del dominio spaziale, per la soluzione numerica di equazioni differenziali alle derivate parziali applicate ad immagini il metodo alle differenze finite risulta il più utilizzato, grazie anche alla sua semplicità di implementazione.

In questo lavoro, si è scelto quindi di utilizzare il metodo alle differenze finite. In particolare, si sono considerati due differenti schemi numerici standard, il primo esplicito, il secondo implicito. Nei paragrafi successivi illustreremo i due schemi applicati alla soluzione del problema (1.2), quindi i relativi vantaggi e svantaggi la cui valutazione ha portato ad una scelta di progetto tra i due.

In entrambi i casi, ipotizziamo di discretizzare il dominio spazio-temporale tramite una mesh regolare:

$$\begin{cases} x_i &= i\Delta x, & i = 1, \dots, M \\ y_j &= j\Delta y, & j = 1, \dots, N \\ t_n &= n\Delta t, & n = 1, \dots, T \end{cases}$$

dove Δx , Δy , Δt rappresentano, rispettivamente, i passi di discretizzazione spaziali lungo x ed y e temporale.

Indicheremo con $u_{i,j}^n$ la soluzione approssimata calcolata dal metodo alle differenze finite in corrispondenza del nodo (i,j,n) della mesh suddetta.

1.2.1 Schema esplicito

Discretizziamo l'equazione differenziale (1.2a) sostituendo le derivate parziali del secondo ordine rispetto al tempo ed allo spazio con differenze finite centrate, ottenendo:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\Delta t^2} = & (1.3) \\ & = c^2 \left[\frac{u_{(i+1)j}^n - 2u_{ij}^n + u_{(i-1)j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i(j+1)}^n - 2u_{ij}^n + u_{i(j-1)}^n}{\Delta y^2} \right] \end{aligned}$$

Considerando passi di discretizzazione spaziale uguali lungo x ed y ed unitari $\Delta x = \Delta y = 1$ (nel caso di immagini, uguali ad un pixel), e ponendo per comodità

$$r_1 = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$$

otteniamo:

$$u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1} = r_1 [u_{(i+1)j}^n + u_{(i-1)j}^n + u_{i(j+1)}^n - 4u_{ij}^n + u_{i(j-1)}^n]$$

da cui, esplicitando rispetto all'unica incognita, abbiamo:

$$u_{ij}^{n+1} = -u_{ij}^{n-1} + r_1 [u_{(i+1)j}^n + u_{(i-1)j}^n + u_{i(j+1)}^n + u_{i(j-1)}^n] + (2 - 4r_1)u_{ij}^n$$

Chiaramente, occorre considerare separatamente il caso iniziale, ossia la prima iterazione (corrispondente a $t = 0$), in cui l'equazione diventa:

$$u_{ij}^1 = -u_{ij}^1 + r_1 [u_{(i+1)j}^0 + u_{(i-1)j}^0 + u_{i(j+1)}^0 + u_{i(j-1)}^0] + (2 - 4r_1)u_{ij}^0$$

da cui otteniamo la relazione esplicita lineare di aggiornamento della soluzione:

$$v_1 = A_0^e * v_0 + \frac{r_1}{2} * u_{boundary}$$

dove v_l e v_0 sono i vettori ordinati riga per riga, da sinistra verso destra, partendo dal punto (x_0, y_0) , dell'immagine. In particolare, v_0 contiene i valori dell'immagine iniziale, mentre v_l quelli dell'immagine al primo passo temporale. A_0^e è la matrice dei coefficienti, mentre con $u_{boundary}$ si intende il vettore delle condizioni al contorno così composto:

$$u_{boundary} = \begin{bmatrix} u_{1,0}^0 + u_{0,1}^0 \\ u_{0,2}^0 \\ \dots \\ u_{0,N-1}^0 \\ u_{0,N-1}^0 + u_{1,N}^0 \\ \hline u_{2,0}^0 \\ \dots \\ u_{2,N}^0 \\ \hline u_{3,0}^0 \\ \dots \\ u_{3,N}^0 \\ \hline \dots \\ \hline u_{M-2,0}^0 + u_{M,1}^0 \\ u_{M,2}^0 \\ \dots \\ u_{M,N-2}^0 \\ u_{M,N-1}^0 + u_{M-1,N}^0 \end{bmatrix}$$

Per tutti gli altri istanti temporali, invece, abbiamo l'equazione:

$$u_{ij}^{n+1} = -u_{ij}^{n-1} + r_1 [u_{(i+1)j}^n + u_{(i-1)j}^n + u_{i(j+1)}^n + u_{i(j-1)}^n] + (2 - 4r_1)u_{ij}^n$$

da cui la relazione di aggiornamento:

$$v_{n+1} = A^e * v_n + r_1 * u_{boundary}^n - v_{n-1}$$

le cui definizioni per i vettori v_n , v_{n+1} e per la matrice A^e sono analoghe a quelle delle equazioni dell'istante iniziale, mentre le condizioni al contorno diventano:

$$u_{boundary}^n = \begin{bmatrix} u_{1,0}^n + u_{0,1}^n \\ u_{0,2}^n \\ \dots \\ u_{0,N-1}^n \\ u_{0,N-1}^n + u_{1,N}^n \\ \hline u_{2,0}^n \\ \dots \\ u_{2,N}^n \\ \hline u_{3,0}^n \\ \dots \\ u_{3,N}^n \\ \hline \dots \\ \hline u_{M-2,0}^n + u_{M,1}^n \\ u_{M,2}^n \\ \dots \\ u_{M,N-2}^n \\ u_{M,N-1}^n + u_{M-1,N}^n \end{bmatrix}$$

La discretizzazione proposta presenta un'accuratezza $O(\Delta x^2, \Delta t^2)$.

1.2.2 Schema implicito

L'unica differenza rispetto al metodo esplicito illustrato nel paragrafo precedente deriva da una diversa discretizzazione della derivata temporale: invece della differenza finita centrata, si utilizza quella all'indietro ottenendo quindi:

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1}}{\Delta t^2} =$$

$$= c^2 \left[\frac{u_{(i+1)j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{(i-1)j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i(j+1)}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i(j-1)}^{n+1}}{\Delta y^2} \right]$$

Analogamente al caso esplicito, considerando passi di discretizzazione spaziale uguali lungo x ed y ed unitari $\Delta x = \Delta y = 1$ e ponendo

$$r_1 = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$$

otteniamo:

$$u_{ij}^{n+1} - 2u_{ij}^n + u_{ij}^{n-1} = r_1 \left[u_{(i+1)j}^{n+1} + u_{(i-1)j}^{n+1} + u_{i(j+1)}^{n+1} - 4u_{ij}^{n+1} + u_{i(j-1)}^{n+1} \right]$$

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2}u_{ij}^{n-1} - \frac{r_1}{2} \left[u_{(i+1)j}^{n+1} + u_{(i-1)j}^{n+1} + u_{i(j+1)}^{n+1} + u_{i(j-1)}^{n+1} \right] + \left(\frac{1}{2} + 2r_1 \right) u_{ij}^{n+1}$$

Per la prima iterazione, si ha invece:

$$u_{ij}^0 = -\frac{r_1}{2} \left[u_{(i+1)j}^1 + u_{(i-1)j}^1 + u_{i(j+1)}^1 + u_{i(j-1)}^1 \right] + \left(\frac{1}{2} + 2r_1 \right) u_{ij}^1$$

da cui la relazione lineare implicita di aggiornamento (sistema lineare):

$$v_0 = A_0^i * v_1 - \frac{r_1}{2} * u_{boundary}$$

dove la matrice A_0^i e i vettori v sono definiti analogamente al caso esplicito, mentre le condizioni al contorno sono:

$$u_{boundary} = \begin{bmatrix} u_{1,0}^1 + u_{0,1}^1 \\ u_{0,2}^1 \\ \dots \\ u_{0,N-1}^1 \\ u_{0,N-1}^1 + u_{1,N}^1 \\ \hline u_{2,0}^1 \\ \dots \\ u_{2,N}^1 \\ \hline u_{3,0}^1 \\ \dots \\ u_{3,N}^1 \\ \hline \dots \\ \hline u_{M-2,0}^1 + u_{M,1}^1 \\ u_{M,2}^1 \\ \dots \\ u_{M,N-2}^1 \\ u_{M,N-1}^1 + u_{M-1,N}^1 \end{bmatrix}$$

Per tutti gli altri istanti temporali, invece, abbiamo l'equazione:

$$u_{ij}^n = \frac{1}{2}u_{ij}^{n-1} - \frac{r_1}{2} \left[u_{(i+1)j}^{n+1} + u_{(i-1)j}^{n+1} + u_{i(j+1)}^{n+1} + u_{i(j-1)}^{n+1} \right] + \left(\frac{1}{2} + 2r_1 \right) u_{ij}^n$$

da cui il sistema lineare:

$$v_n = A^i * v_{n+1} - \frac{r_1}{2} * u_{boundary}^{n+1} + \frac{1}{2}v_{n-1}$$

le cui definizioni per i vettori v_n , v_{n+1} e per la matrice A^e sono analoghe a quelle delle equazioni dell'istante iniziale, mentre le condizioni al contorno sono le stesse del caso esplicito, dove i termini al tempo n devono essere prese al tempo $n+1$:

1.2.3 Scelta dello schema

Nella scelta dello schema numerico per la soluzione del problema (1.2) occorre tenere conto di:

- Stabilità dello schema
- Costo computazionale dello schema

Ricordiamo che un metodo numerico risulta *stabile* se a piccole perturbazioni sui dati corrispondono piccole perturbazioni sulla soluzione.

Il metodo implicito risulta incondizionatamente stabile, ma presenta un elevato costo computazionale per via della necessità di dover risolvere un sistema lineare ad ogni passo temporale.

Il metodo esplicito presenta invece una stabilità condizionata dal passo temporale (questo non deve essere più grande di una certa soglia), ma presenta un minor costo computazionale in quanto l'aggiornamento della soluzione numerica a ciascuna iterazione si ottiene semplicemente tramite moltiplicazione matrice-vettore.

Tuttavia, il vincolo sul passo temporale non è rilevante per quanto riguarda l'utilizzo che della soluzione numerica faremo per lo scopo di questo lavoro. In particolare, poichè, come vedremo in seguito, per la classificazione accurata delle figure geometriche avremo

bisogno della soluzione a passi temporali piuttosto ravvicinati, non ci interesserà usare passi temporali più grandi di quelli permessi dalla condizione di stabilità che sarà trattata nel paragrafo successivo.

Pertanto, si è scelto di utilizzare lo schema esplicito, guadagnando in termini di costo computazionale ed in ultima analisi di tempi necessari per la classificazione.

1.2.4 Stabilità numerica

In questo paragrafo, studiamo la stabilità dello schema alle differenze finite esplicito illustrato nel paragrafo 1.2.1 che useremo in questo lavoro. A tale scopo, secondo una metodologia standard, ipotizziamo che la soluzione dell'equazione delle onde sia esprimibile nella forma $u_n = G^n e^{ikx} e^{ily}$ e cerchiamo la soluzione con il metodo della separazione delle variabili.

Sostituendo u_n nello schema alle differenze finite del metodo esplicito, si ottiene:

$$\frac{G^2 - 2G + 1}{(\Delta t)^2} = G \frac{2\cos(k\Delta x) - 2}{(\Delta x)^2} + G \frac{2\cos(l\Delta y) - 2}{(\Delta y)^2}$$

Fattorizzando secondo G , il problema si riconduce ad un'equazione di secondo grado:

$$G^2 - 2 \left[1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 (1 - \cos(k\Delta x)) - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 (1 - \cos(l\Delta y)) \right] G + 1 = 0$$

che per comodità possiamo vedere nella forma $G^2 - 2aG + 1 = 0$

Affinché il sistema sia stabile, occorre che $|G| = 1$, quindi $-1 \leq a \leq 1$. Per trovare la condizione di stabilità andiamo a vedere la situazione critica, cioè quando i coseni valgono -1:

$$-1 \leq 1 - 2 \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - 2 \left(c \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2$$

$$\left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 + \left(c \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \leq 1$$

dove, nel caso di passi di discretizzazione spaziali uguali $\Delta x = \Delta y$, si trova la condizione di stabilità:

$$\left(\frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \quad \equiv \quad \frac{c \Delta t}{\Delta x} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

nota come condizione di Courant, Friedrichs, Lewy, che viene quindi indicata come condizione CFL.

In Figura (1.2) mostriamo la soluzione numerica del problema continuo (1.2) applicato alla stessa immagine iniziale di Figura (1.1). In particolare, la soluzione numerica è stata ottenuta con lo schema esplicito e con due diversi valori di CFL: il primo, 0.5, minore del limite di stabilità; il secondo, 1, maggiore. Si può chiaramente notare come nel secondo caso la soluzione numerica perda molto velocemente di significato a causa dei fenomeni di instabilità numerica.

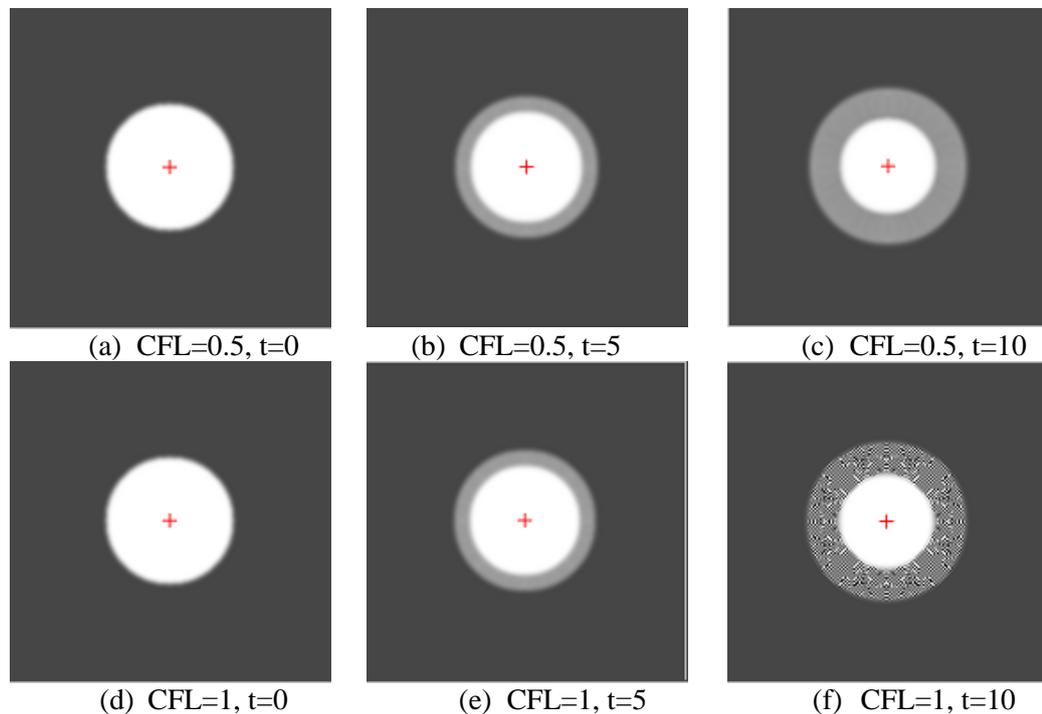


Figura 1.2. Soluzione numerica del problema (1.2) in successive iterazioni

Come anticipato nel paragrafo precedente, l'introduzione della condizione di stabilità per lo schema esplicito comporta un vincolo sul passo di discretizzazione temporale: fissata la velocità dell'onda c , non sarà possibile scegliere un passo temporale troppo grande, pena l'instabilità della soluzione.

1.3 Dispersione numerica

L'applicazione del metodo esplicito, pur scegliendo una coppia di valori della velocità dell'onda c e del passo di discretizzazione temporale Δt che soddisfi la condizione di stabilità, non garantisce sempre dei risultati soddisfacenti. Questo fenomeno è dovuto al problema della dispersione numerica.

Come spiegato in [7], a causa di fenomeni numerici risulta che le componenti armoniche dell'onda non viaggiano tutte alla stessa velocità. Pertanto, si verranno a creare delle oscillazioni spurie che andranno a perturbare la soluzione.

Esistono vari metodi per attenuare i disturbi dovuti alla dispersione numerica. Nel precedente lavoro di tesi da cui questo prende spunto, si era scelto di aggiungere un passo di diffusione lineare tra passi successivi di soluzione dell'equazione delle onde.

Con lo scopo di migliorare l'efficienza computazionale del metodo, noi scegliamo invece di regolarizzare una volta per tutte l'immagine iniziale tramite la convoluzione della stessa con un kernel Gaussiano; in altre parole, applichiamo uno smoothing Gaussiano all'immagine iniziale, risolvendo quindi l'equazione delle onde tramite lo schema alle differenze finite esplicito illustrato nel paragrafo 1.2.1. Gli esempi mostrati in Figura 1.1 e Figura 1.2 sono stati ottenuti applicando questa regolarizzazione.

In Figura 1.3 mostriamo, per la solita immagine iniziale, la differenza tra le soluzioni numeriche ottenute, rispettivamente, con (prima riga) e senza (seconda riga) la suddetta regolarizzazione. Si può notare come nel secondo caso la dispersione numerica provochi oscillazioni spurie nella soluzione, oscillazioni invece assenti nel primo caso.

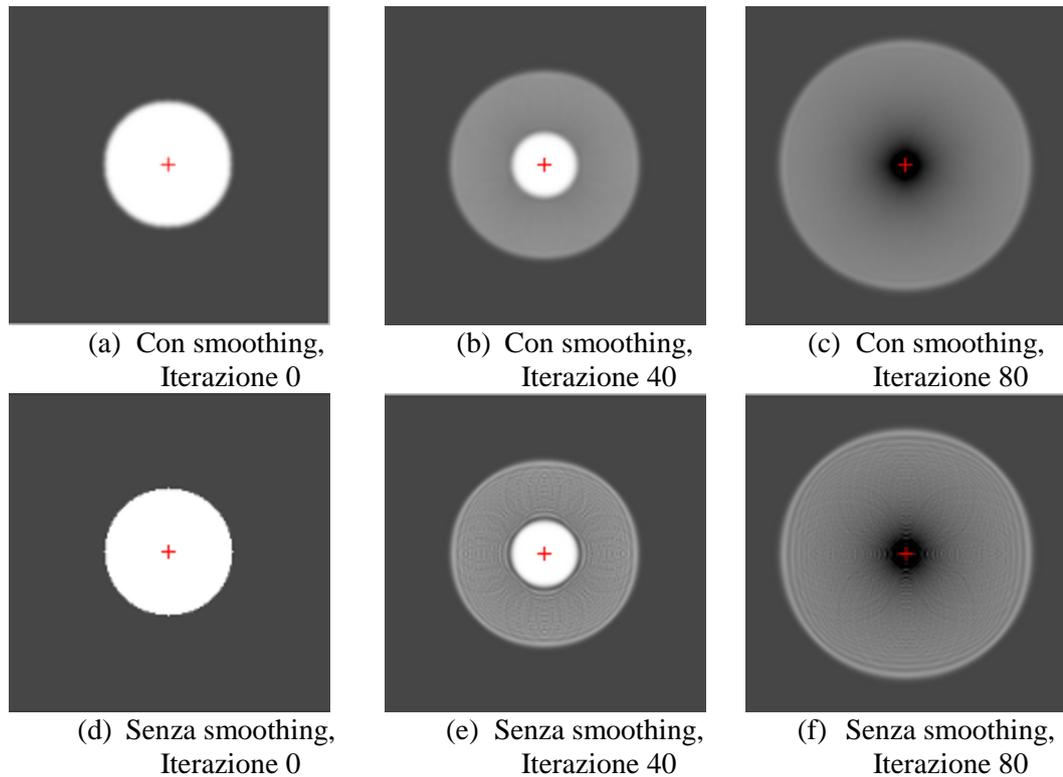


Figura 1.3. Soluzione numerica del problema (1.2) in successive iterazioni

1.4 Discretizzazione del laplaciano a nove punti

Nel procedimento descritto nei paragrafi precedenti per la risoluzione dell'equazione delle onde applicata alle immagini tramite schema alle differenze finite esplicito con regolarizzazione iniziale, il laplaciano spaziale è stato discretizzato usando il kernel standard a cinque punti, con *stencil*:

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Tuttavia, per garantire una maggiore invarianza della discretizzazione alla rotazione, si è deciso di investigare l'utilizzo di kernel diversi, più sofisticati. Con lo scopo di mantenere una buona efficienza computazionale, abbiamo deciso di limitare la ricerca ai casi di kernel con supporto spaziale a 9 punti e abbiamo selezionato il kernel proposto in [3]:

1	2	1	*1/4
2	-12	2	
1	2	1	

La relazione lineare esplicita per l'aggiornamento della soluzione alla n -esima iterazione diventa quindi la seguente:

$$\begin{aligned}
 u_{ij}^{n+1} = & -u_{ij}^{n-1} + \frac{r_1}{4} [2u_{(i+1)j}^n + 2u_{(i-1)j}^n + 2u_{i(j+1)}^n + 2u_{i(j-1)}^n] + \\
 & + \frac{r_1}{4} [u_{(i-1)(j+1)}^n + u_{(i-1)(j-1)}^n + u_{(i+1)(j+1)}^n + u_{(i+1)(j-1)}^n] + \\
 & + (2 - 3r_1)u_{ij}^n
 \end{aligned}$$

che, in forma matriciale, si può scrivere:

$$v_{n+1} = A * v_n + \frac{r_1}{2} * u_{boundary} + \frac{r_1}{4} * u_{boundary1} - v_{n-1}$$

in cui A rappresenta la matrice dei coefficienti, v_n e v_{n+1} sono i vettori con i valori dei pixel dell'immagine al tempo n e $n+1$ e $u_{boundary1}$ le condizioni al contorno:

$$u_{boundary1} = \left[\begin{array}{c}
u_{0,0}^n + u_{2,0}^n + u_{0,2}^n \\
u_{0,1}^n + u_{0,3}^n \\
\dots \\
u_{0,N-2}^n + u_{0,N}^n + u_{2,N}^n \\
\hline
u_{1,0}^n + u_{3,0}^n \\
\dots \\
u_{1,N}^n + u_{M-1,N-1}^n \\
\hline
\dots \\
\hline
u_{M-2,1}^n + u_{M,0}^n + u_{M,2}^n \\
u_{M,1}^n + u_{M,3}^n \\
\dots \\
u_{M,N-2}^n + u_{M,N}^n + u_{M-2,N}^n
\end{array} \right]$$

Rilevamento di punti salienti tramite l'equazione delle onde

In questo capitolo, descriviamo brevemente l'algoritmo per l'estrazione di punti salienti basato sull'applicazione dell'equazione delle onde alle immagini proposto nel precedente lavoro di tesi [1] e pubblicato in [2]. Infatti, il descrittore di punti salienti che proporremo nel capitolo successivo e che costituisce il contributo principale di questa tesi è strettamente legato a questo estrattore. Ricordiamo che l'algoritmo in [1], [2] si propone di essere robusto rispetto a roto-traslazioni, variazioni di scala, variazioni di contrasto, sfocamento e rumore.

In Figura 2.1 mostriamo un esempio di estrazione tratto da [2] in immagini 2-D:

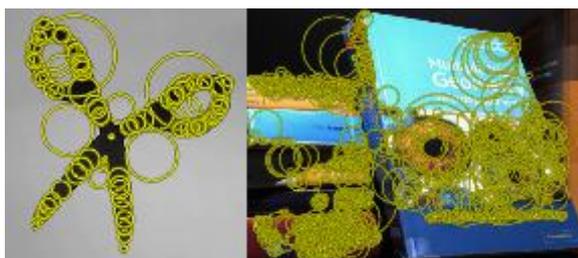


Figura 2.1 Keypoints estratti

dove i punti salienti sono rappresentati tramite cerchi gialli: i centri indicano la posizione del punto saliente mentre i raggi indicano la scala. Applicando l'equazione delle onde all'immagine iniziale (in maniera molto simile a quella spiegata nel capitolo precedente), i punti salienti vengono selezionati in corrispondenza degli estremanti spazio-temporali della soluzione dell'equazione, quindi in tutti quei punti in cui si verifica una forte interferenza tra i vari fronti d'onda. Più l'interferenza è forte, più il punto saliente sarà marcato e facile da individuare. Intrinsecamente, questi punti salienti sono punti dell'immagine iniziale che presentano *elevata simmetria*.

Per meglio illustrare l'idea alla base dell'algoritmo, in Figura 2.2 e Figura 2.3 mostriamo, rispettivamente, una immagine iniziale costituita da un cerchio bianco su sfondo nero e la soluzione numerica (visualizzazione 3D) dell'equazione delle onde applicata a tale immagine e ottenuta all'istante di tempo in cui il fronte d'onda partito dal bordo del cerchio raggiunge il centro del cerchio stesso (dopo aver percorso, ovviamente, una distanza pari al raggio del cerchio). Si nota come in corrispondenza del centro del cerchio la soluzione presenti un estremante spaziale molto forte, in particolare un minimo locale. In Figura 2.4 mostriamo l'andamento nel tempo della soluzione in corrispondenza del centro del cerchio. Si vede come la soluzione presenti un minimo locale temporale in corrispondenza dell'istante in cui il fronte d'onda raggiunge il centro. Quindi, l'algoritmo individuerà un punto saliente nel centro del cerchio con scala uguale al raggio del cerchio.



Figura 2.2. Immagine iniziale

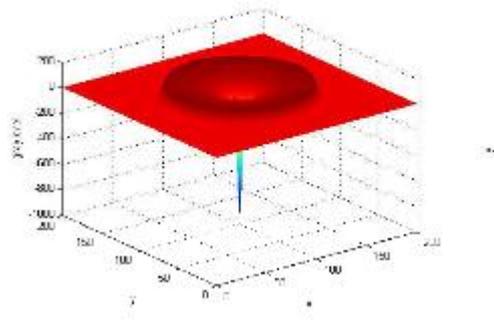


Figura 2.3. Visualizzazione 3D della soluzione al tempo t .

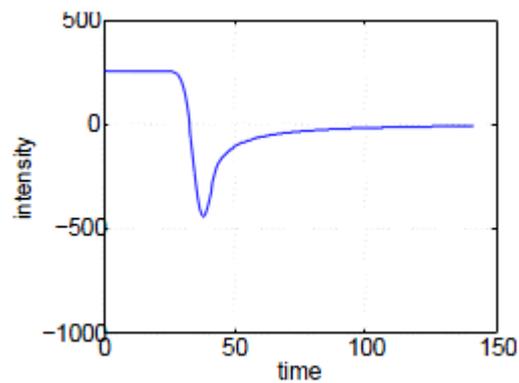


Figura 2.4. Soluzione nel centro del cerchio.

Se invece consideriamo un altro esempio in cui l'immagine iniziale contiene un rettangolo bianco su sfondo nero, come in Figura 2.5(a), avremo i risultati di Figura 2.5(b).

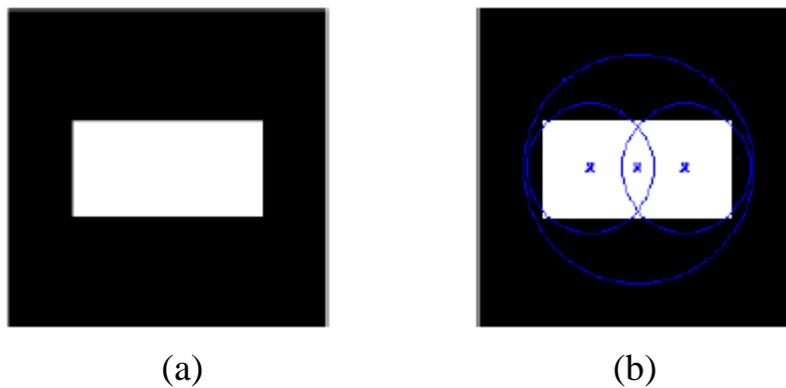


Fig. 2.5 Immagine iniziale (a) e punti salienti trovati (b)

In questo caso i punti salienti sono più di uno: si formeranno prima, e contemporaneamente, due estremanti spazio-temporali in corrispondenza dei punti di incontro delle bisettrici, poi un altro estremante nel centro del rettangolo, ossia nel punto di intersezione delle diagonali. In totale, avremo i tre punti salienti rappresentati in blu nella Figura 2.5(b).

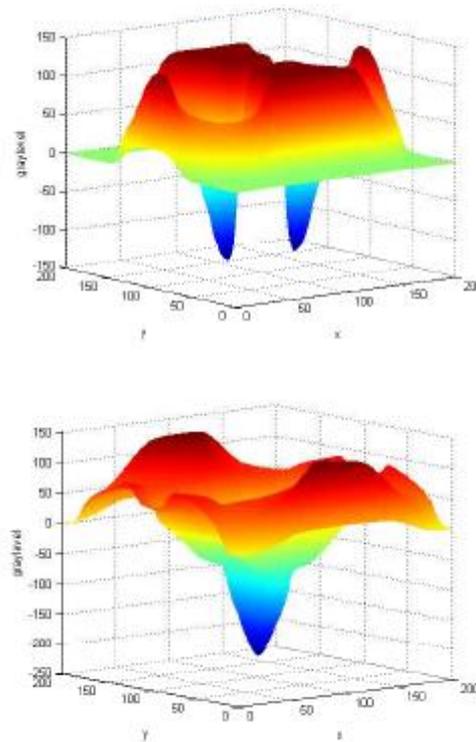


Fig. 2.6. Soluzione ai tempi in cui si formano i punti salienti sulle bisettrici (sopra) e nel centro (sotto) del rettangolo iniziale.

In questo capitolo illustriamo brevemente il funzionamento del detector proposto in [1].

A titolo di esempio, consideriamo un oggetto circolare, con un fronte d'onda che si propaga dal contorno del cerchio fino al centro, punto estremante da individuare. I contributi forniti dai pixel del contorno della figura geometrica analizzata hanno la massima interferenza costruttiva nei centri ad elevata simmetria: nel caso del cerchio, ne abbiamo uno solo e si trova nel centro del cerchio. Per il triangolo equilatero, avremo interferenza costruttiva nel baricentro.

Per il rettangolo, nelle intersezioni tra le bisettrici degli angoli e delle diagonali. Nel caso particolare del quadrato, invece, nella sola intersezione delle diagonali, in cui concide anche quella delle bisettrici degli angoli.

Durante la propagazione dell'onda i contributi associati ai punti appartenenti al contorno circolare dell'oggetto convergono verso il centro, generando un estremante locale di intensità luminosa. Per individuare i centri, in [11] è stato proposto un algoritmo per la ricerca degli estremanti spazio-temporali.

Come è spiegato in [11], oggetti circolari possono essere trovati in immagini a livelli di grigio, anche con basso contrasto, considerando i valori dell'intensità luminosa dei pixel come i valori iniziali di un fenomeno fisico che evolve nel tempo secondo l'equazione delle onde.

È importante che l'algoritmo scelto faccia una discriminazione efficiente in modo da scartare i vari estremanti individuati dalle componenti rumorose.

2.1 Algoritmo per la selezione di punti salienti

Consideriamo un'immagine in cui c'è un oggetto circolare centrato nelle coordinate (x_0, y_0) di raggio r .

Applicando l'equazione delle onde con smooting gaussiano iniziale, come descritto nel capitolo 2. Dopo varie iterazioni, quando i vari contributi del fronte d'onda arrivano (tutti insieme nel caso del cerchio) nel centro, vi si verrà a creare un estremante locale di intensità luminosa (x_0, y_0) al tempo t . La relazione che lega il tempo t al raggio r è la seguente:

$$r = \frac{t * c_1}{\Delta x} = \frac{\overline{numiter} * \Delta t * c_1}{\Delta x}$$

Quindi, fissati i passi temporali e spaziali e la velocità dell'onda, troviamo una relazione che lega il raggio del cerchio al numero di iterazioni necessarie affinché i contributi dei fronti d'onda arrivino nel centro.

Per discriminare gli estremanti relativi al tempo t , è stata presa come condizione sufficiente che:

$$u_{i_k j_k n_k} = \max[|u_{ijn}|, i_k - 1 \leq i \leq i_k + 1, j_k - 1 \leq j \leq j_k + 1, n_k - 1 \leq n \leq n_k + 1]$$

Nel caso del quadrato, invece, scelta la velocità dell'onda e il passo temporali entrambi con modulo pari a $\sqrt{2}/2$, avremo che ogni due iterazioni l'onda si sposterà di un pixel in ogni direzione. Pertanto, considerato un intorno:

$$u_{i_k j_k n_k} = \max[|u_{ijn}|, i_k - 1 \leq i \leq i_k + 1, j_k - 1 \leq j \leq j_k + 1, n_k - 2 \leq n \leq n_k + 2]$$

si otterrà un solo estremante nel centro del quadrato, discriminando tutti gli altri appartenenti alle diagonali.

Classificazione di figure geometriche tramite l'equazione delle onde

In questo capitolo illustriamo l'approccio proposto per descrivere punti salienti tramite l'equazione delle onde. In particolare, supponiamo di rilevare i punti salienti tramite il detector proposto in [1] e descritto nel precedente capitolo.

L'idea, che sarà illustrata nel dettaglio in seguito, è semplicemente quella di caratterizzare i punti salienti tramite la serie temporale dei valori assunti dalla soluzione dell'equazione delle onde in corrispondenza dei punti salienti stessi.

La bontà di questa idea, ossia la capacità discriminativa di questo descrittore, sarà valutata nel caso particolare di figure geometriche. Si spera, sulla base del descrittore, di riuscire a classificare le diverse figure geometriche in maniera robusta rispetto ad un insieme di distorsioni geometriche e fotometriche, quali roto-traslazioni, variazioni di scala, variazioni di contrasto, sfocamento e rumore.

Per fornire una prima idea intuitiva del descrittore proposto, riportiamo in Figura 3.1 e nelle figure 3.2, 3.3, 3.4, rispettivamente, un'immagine iniziale sintetica contenente tre figure geometriche bianche su sfondo nero e i tre descrittori relativi, ossia le serie temporali dei valori assunti dalla soluzione dell'equazione delle onde in corrispondenza dei tre "centri", indicati con croci di differente colore, che corrispondono ai punti salienti trovati dal detector.

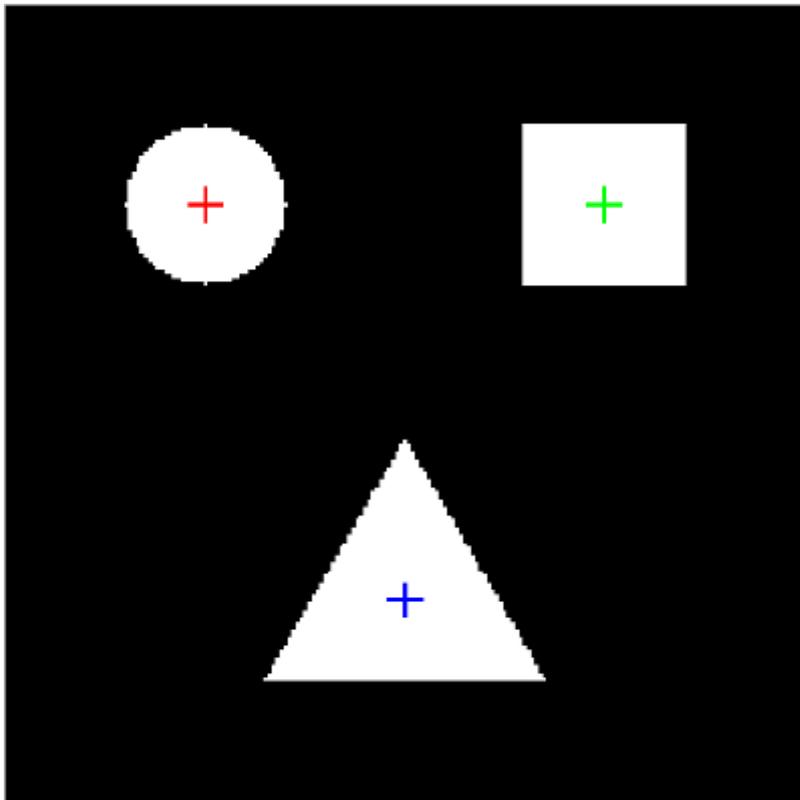


Figura 3.1. Immagine sintetica iniziale

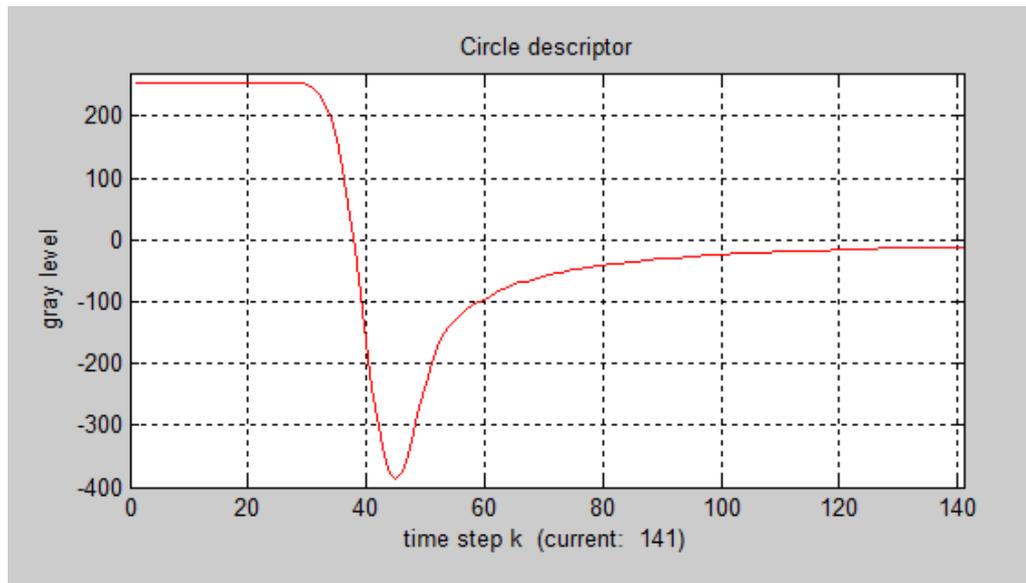


Figura 3.2. Descrittore del cerchio.

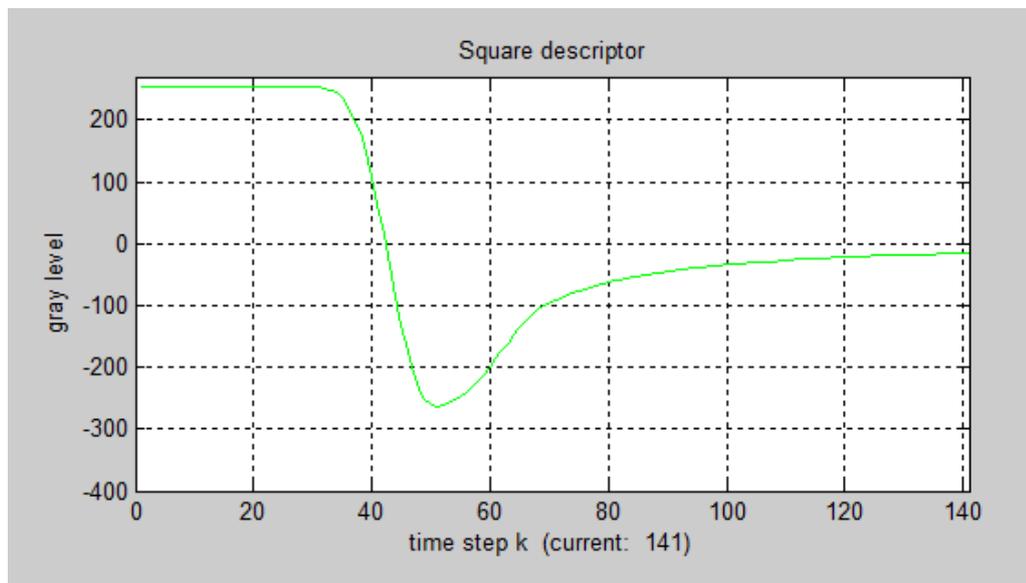


Figura 3.3. Descrittore del quadrato.

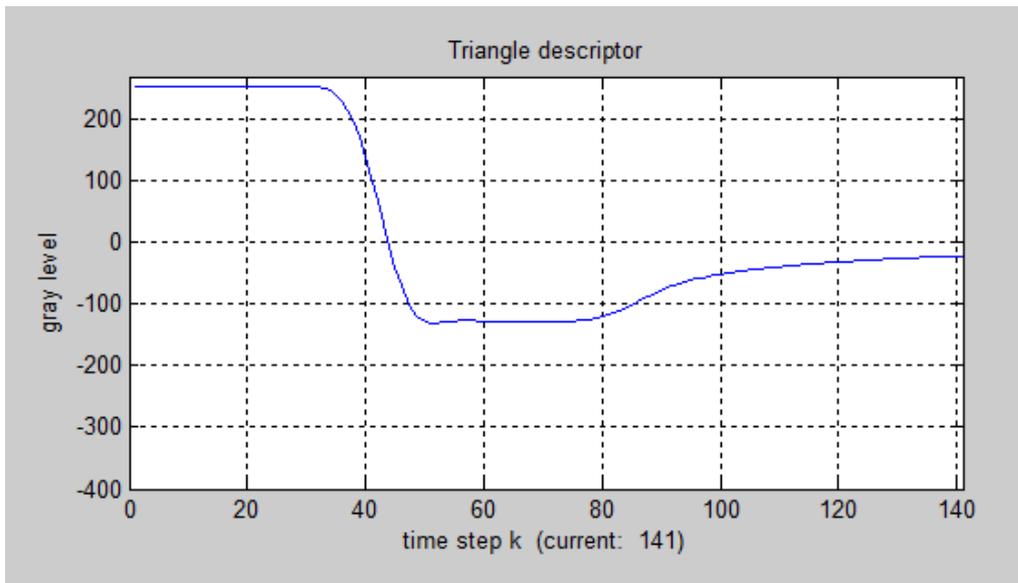


Figura 3.4. Descrittore del triangolo equilatero.

Il descrittore del cerchio riportato in Figura 3.2 presenta un picco (negativo) più accentuato rispetto agli altri; ciò è dovuto al fatto che i contributi dell'onda provenienti dal bordo del cerchio iniziale arrivano tutti nel centro nello stesso istante, per via della simmetria radiale del cerchio.

Il descrittore del quadrato in Figura 3.3 presenta un picco meno accentuato rispetto al cerchio.

Il descrittore del triangolo equilatero in Figura 3.4 presenta addirittura un plateau, per via del fatto che prima arrivano i contributi dei punti medi dei tre lati; successivamente arrivano anche tutti gli altri contributi dei punti dei lati via via più vicini ai vertici: quindi tali contributi prococano una lenta risalita dei valori del descrittore.

Possiamo dedurre che all'aumentare dei lati di una figura geometrica regolare i contributi dei contorni delle figure arrivano sempre più in maniera simultanea, provocando un aumento di intensità (in valore assoluto) del picco e una diminuzione della sua "rilassatezza" (cioè un aumento della velocità di risalita della curva caratteristica). Ovviamente, ci aspettiamo che per figure

regolari con molti lati il descrittore somigli sempre di più a quello del cerchio.

Ciò che si è pensato di sfruttare per la classificazione delle forme geometriche è proprio la diversa caratterizzazione delle forme d'onda 1-D che descrivono l'andamento delle intensità di grigio in corrispondenza dei punti salienti.

3.1 Descrittore al variare dei fattori di disturbo

Allo scopo di valutare la robustezza del descrittore proposto, nei paragrafi seguenti andremo ad analizzare come le forme d'onda 1-D che costituiscono il descrittore stesso variano in seguito a roto-traslazione, variazione di scala, rumore e contrasto.

3.1.1 Roto-traslazione

Dal punto di vista analitico, risulta immediato dimostrare la perfetta invarianza del descrittore proposto rispetto a roto-traslazioni dell'immagine iniziale.

Dal punto di vista numerico, mentre l'invarianza a traslazione continua ad essere valida, l'invarianza alla rotazione dipende dallo schema numerico utilizzato: il laplaciano discretizzato in un modo o nell'altro può essere più o meno invariante. Pertanto, eseguiamo di seguito uno studio qualitativo.

Scartando il caso banale del cerchio (invariante a rotazione), nelle figure 3.5 e 3.6 riportiamo i descrittori del quadrato e del triangolo equilatero, rispettivamente, ottenuti per diversi angoli di rotazione.

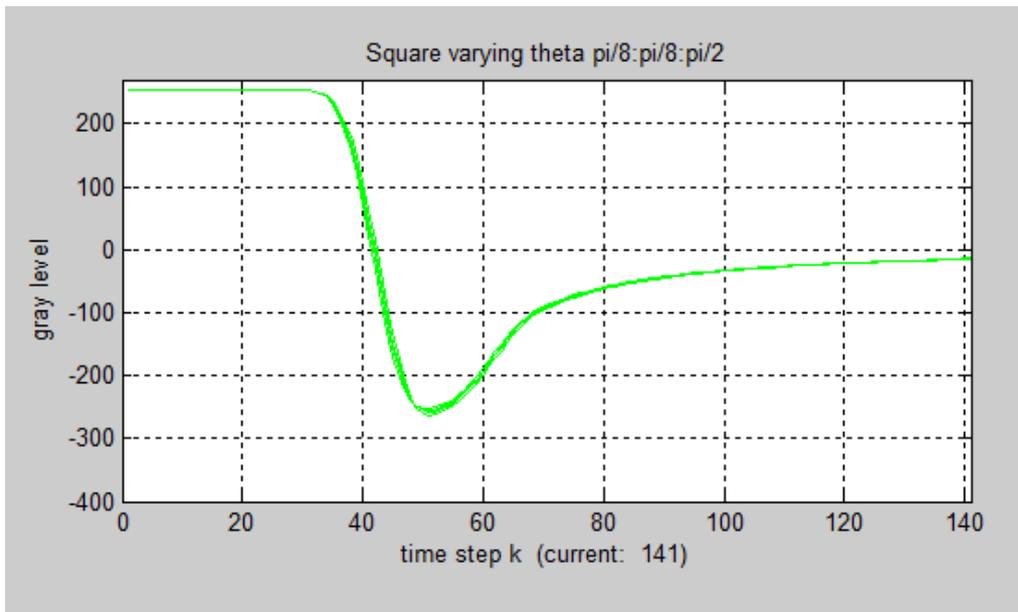


Figura 3.5. Descrittori del quadrato al variare dell'angolo di rotazione.

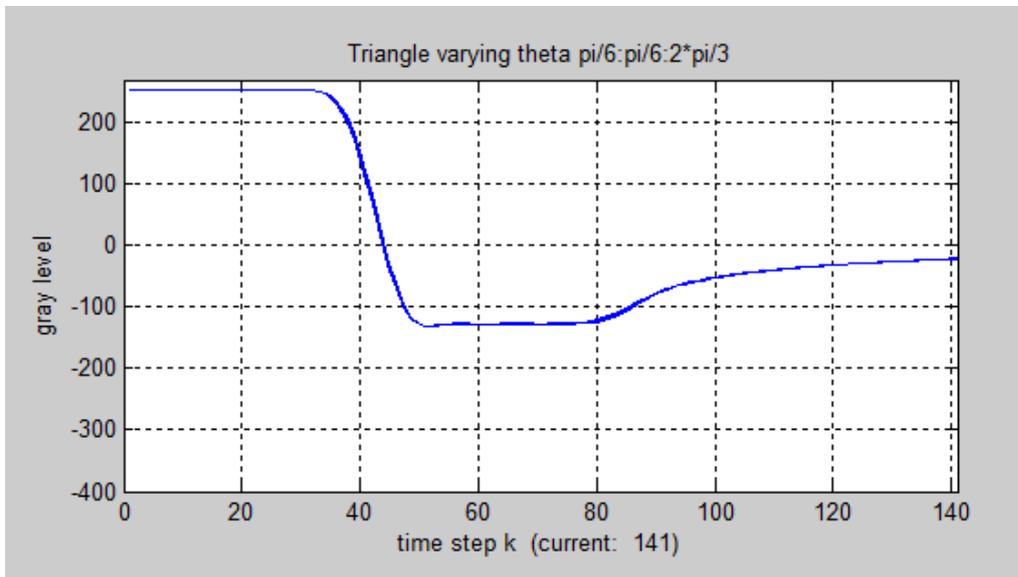


Figura 3.6. Descrittori del triangolo equilatero al variare dell'angolo di rotazione.

Si può notare una pressochè completa sovrapposizione dei descrittori ottenuti variando l'angolo di rotazione, sia per il quadrato che per il cerchio; possiamo quindi affermare che il

descrittore proposto risulta invariante alla rotazione anche dal punto di vista numerico.

3.1.2 Variazione di scala

In Figura 3.7, 3.8 e 3.9 riportiamo i descrittori del cerchio, del quadrato e del triangolo equilatero, rispettivamente, al variare del loro “raggio” (raggio del cerchio e distanza dei punti medi dei lati delle figure dal punto saliente).

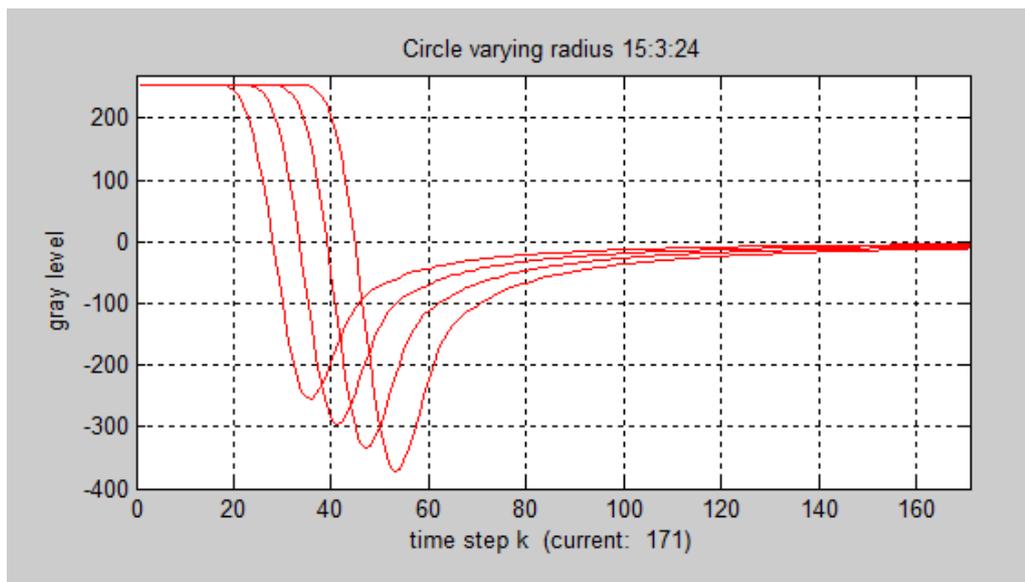


Figura 3.7. Descrittori del cerchio al variare del raggio.

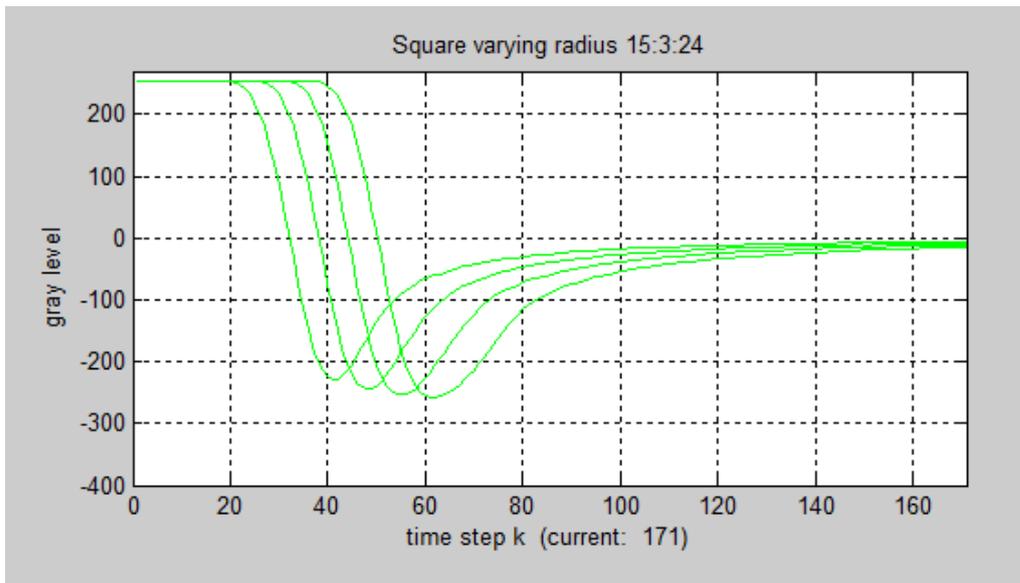


Figura 3.8. Descrittori del quadrato al variare del “raggio”.

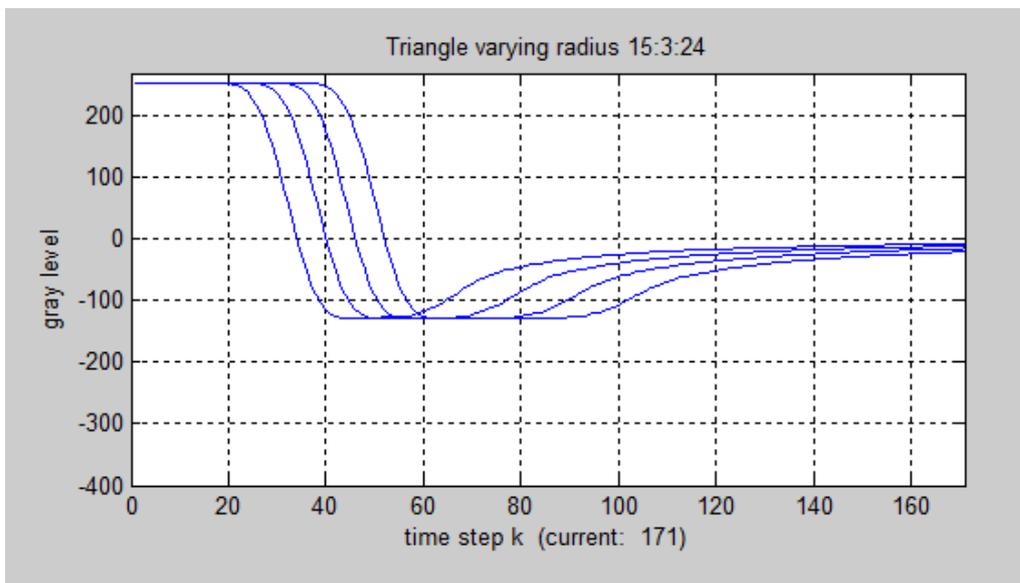


Figura 3.9. Descrittori del triangolo equilatero al variare del “raggio”.

Dalle Figure, si nota come per tutte e tre le figure geometriche la posizione del picco trasli nel tempo alla stessa maniera, ossia in

maniera lineare rispetto al “raggio” iniziale della figura geometrica. In particolare, ciò si nota in modo evidente dai “fronti di discesa” verso il picco.

Inoltre, notiamo che nel cerchio l’ampiezza del picco aumenta all’aumentare del raggio; nel quadrato, invece, si ha un minore aumento in valore assoluto del picco, compensato da un aumento della sua “rilassatezza”; nel triangolo, non si ha nessun incremento del valore del plateau, ma solo un più marcato aumento della rilassatezza.

3.1.3 Variazione di contrasto

In Figura 3.10, 3.11, 3.12 riportiamo i descrittori al variare del contrasto tra le figure e lo sfondo. In particolare, per ciascuna figura geometrica visualizziamo i quattro descrittori corrispondenti alle seguenti coppie di valori sfondo-figura: (0,50), (0,100), (100,150), (100, 200).

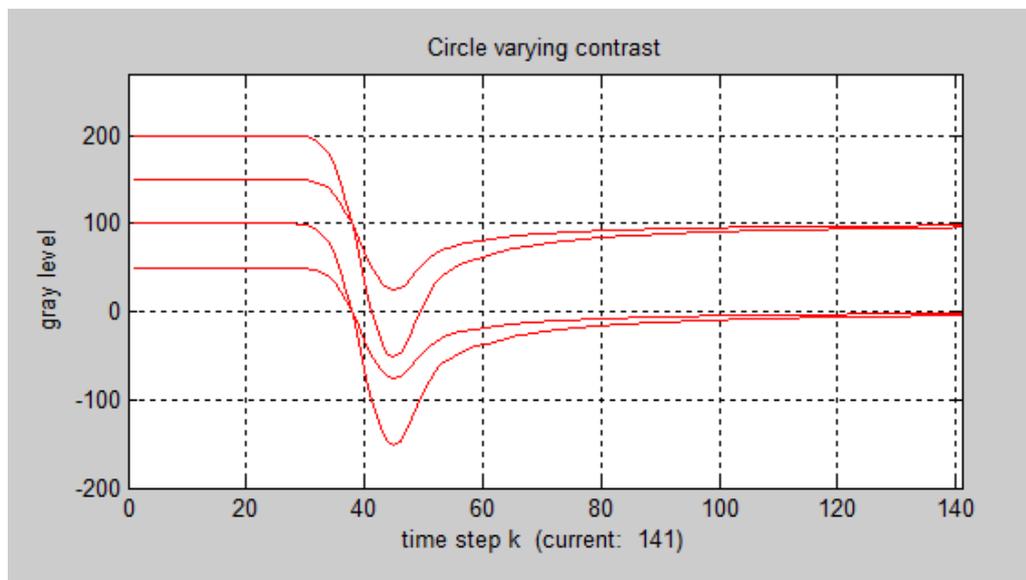


Figura 3.10. Descrittori del cerchio al variare del contrasto

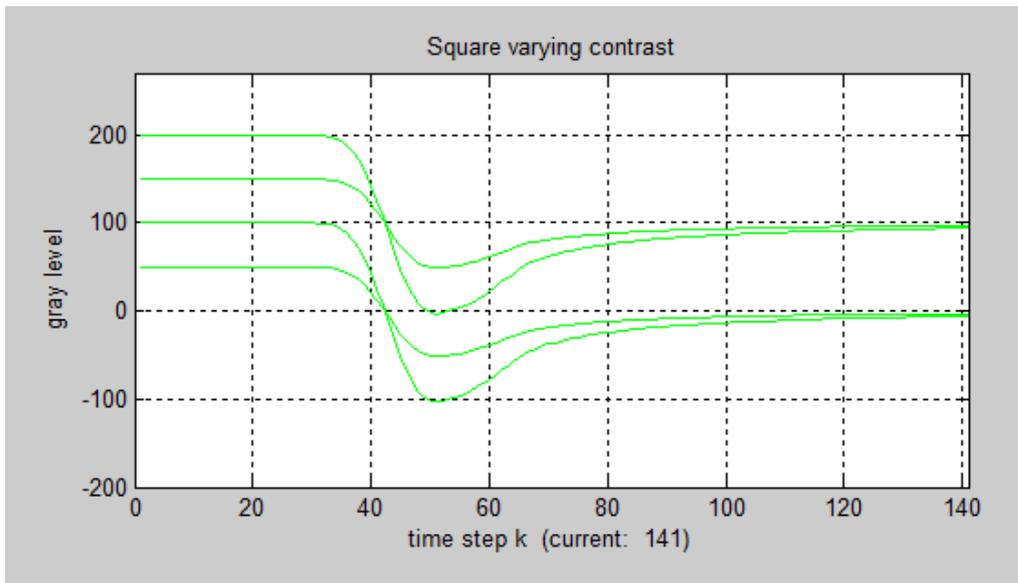


Figura 3.11. Descrittori del quadrato al variare del contrasto.

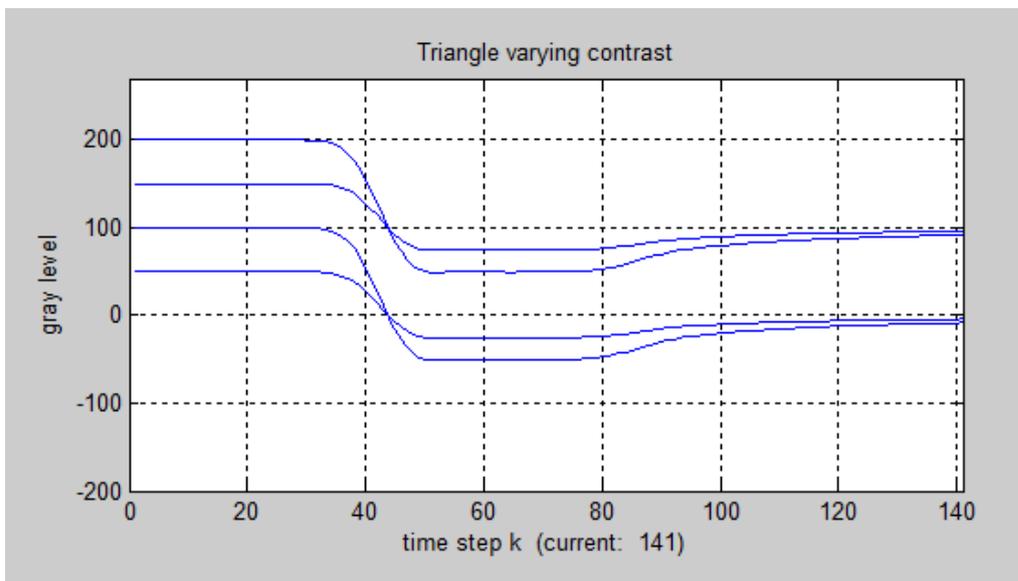


Figura 3.12. Descrittori del triangolo al variare del contrasto.

Dalle Figure si nota chiaramente come all'aumentare del contrasto si ha un picco (o un plateau nel caso del triangolo) sempre più elevato in modulo, localizzato sempre al medesimo istante temporale.

3.1.4 Rumore

Abbiamo applicato alle figure geometriche iniziali un rumore additivo gaussiano bianco a media nulla.

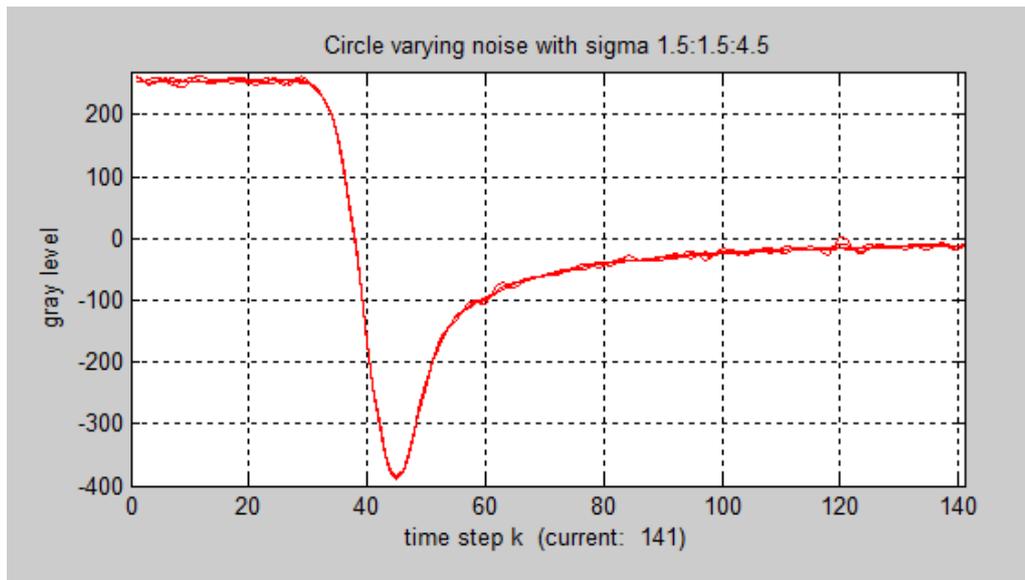


Figura. 3.13. Descrittori del cerchio al variare del livello di rumore.

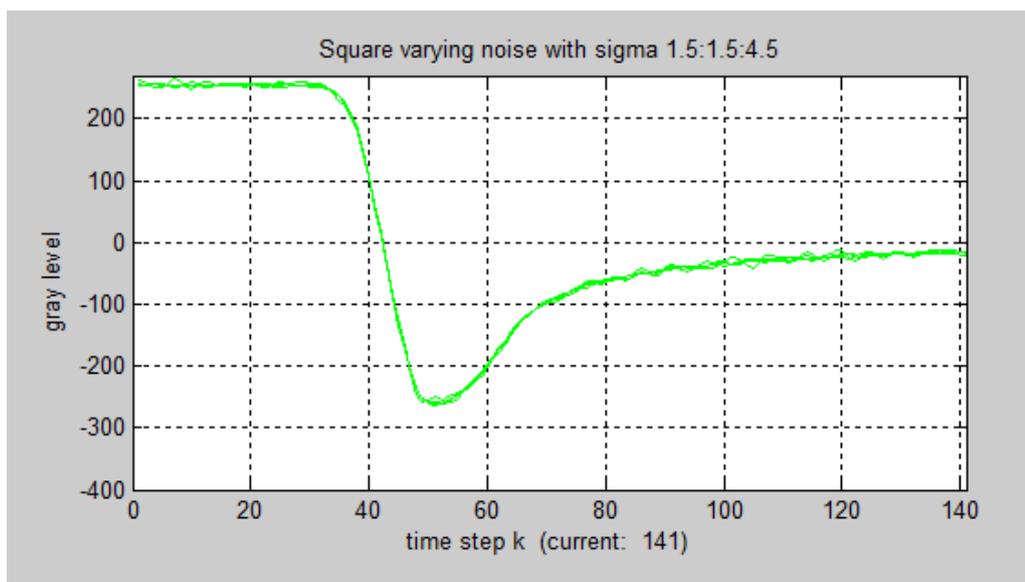


Figura. 3.14. Descrittori del quadrato al variare del livello di rumore.

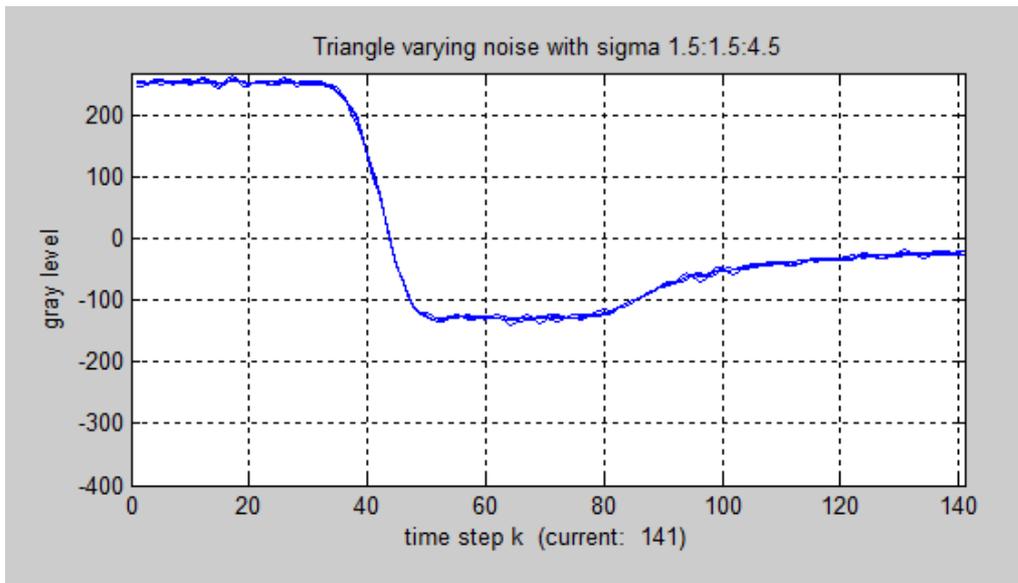


Figura. 3.15. Descrittori del triangolo equilatero al variare del livello di rumore.

In Figura 3.13, 3.14, 3.15 riportiamo i descrittori ottenuti per diversi valori della deviazione standard del rumore aggiunto. Possiamo notare che all'aumentare del livello rumore si vengono a creare delle oscillazioni spurie nel descrittore, ma che se manteniamo il rumore a dei livelli ragionevoli le perturbazioni sul descrittore sono abbastanza contenute.

3.1.5 Sfocamento

Abbiamo applicato alle figure geometriche iniziali uno sfocamento sintetico, con kernel simmetrico gaussiano. In Figura 3.16, 3.17, 3.18 riportiamo i descrittori ottenuti per diversi valori della deviazione standard del kernel gaussiano.

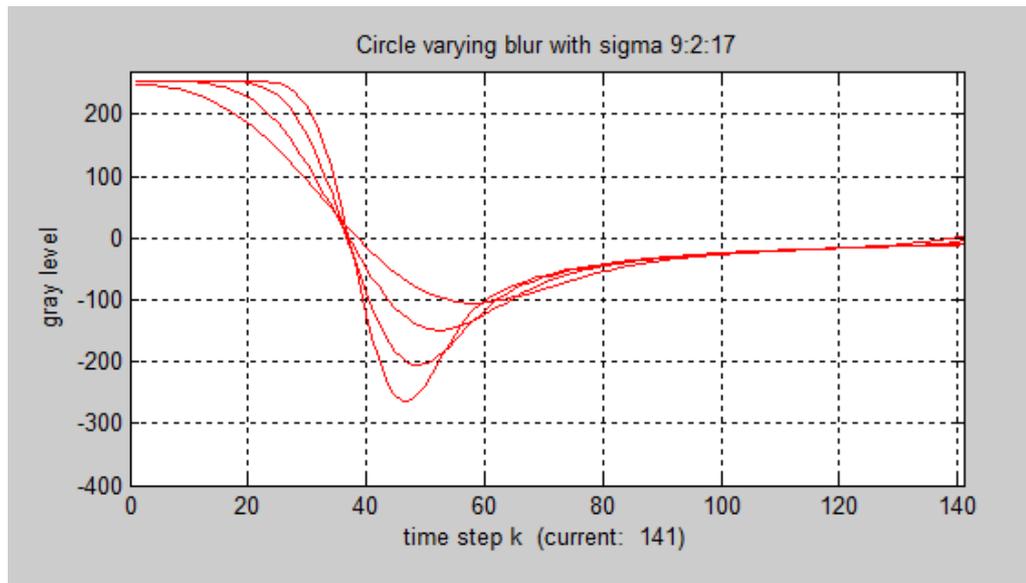


Figura. 3.16. Descrittori del cerchio al variare del grado di sfocamento.

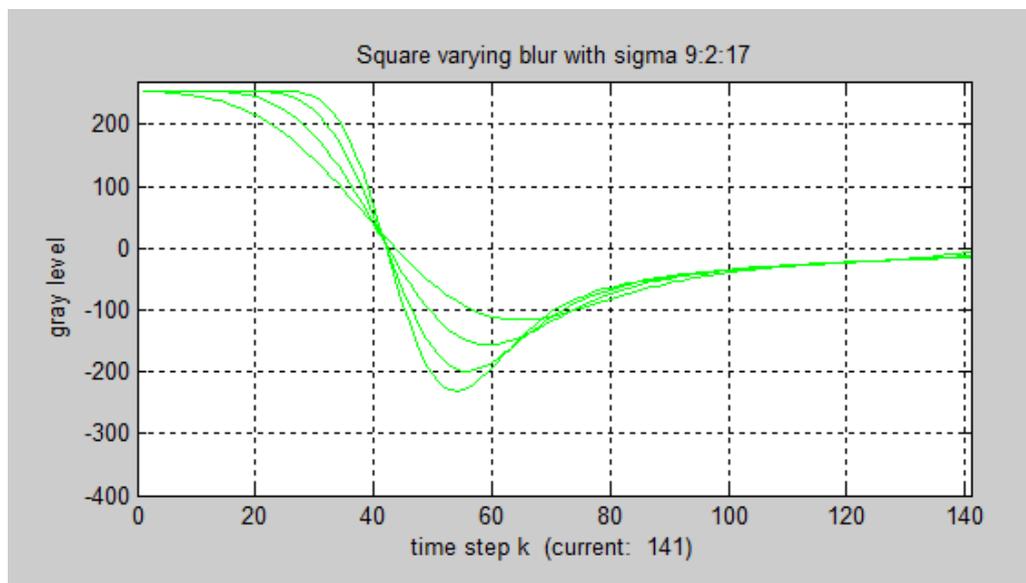


Figura. 3.17. Descrittori del quadrato al variare del grado di sfocamento.

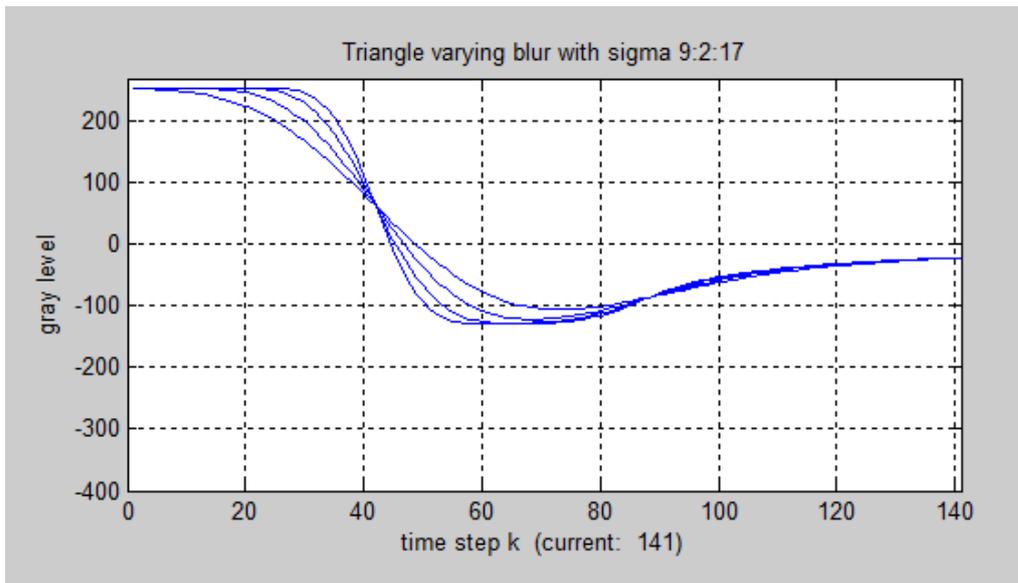


Figura. 3.18. Descrittori del triangolo al variare del grado di sfocamento.

Dalle figure notiamo che all'aumentare dello sfocamento diminuisce la ripidità di discesa del picco del descrittore. Nel caso del cerchio e del quadrato, si nota anche uno spostamento lungo l'asse del tempo della posizione dell'estremante e una maggiore rilassatezza del picco. Nel caso del triangolo, invece, questo si traduce in uno spostamento verso destra dell'estremo sinistro del plateau e in un restringimento del plateau stesso.

3.2 Classificazione delle figure geometriche tramite *matching* dei descrittori

Alla luce dello studio illustrato nel paragrafo precedente circa la variabilità del descrittore di una figura geometrica a fronte delle possibili distorsioni geometriche e fotometriche, in questo paragrafo proponiamo una semplice misura di *matching* fra descrittori robusta a tali distorsioni.

Immaginiamo quindi di avere una prima immagine di una figura geometrica che si vuole classificare, e di aver estratto il descrittore relativo, ossia la serie temporale dei valori assunti dalla soluzione dell'equazione delle onde in corrispondenza del punto saliente:

$$\mathbf{f}^{(1)} = (f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \dots, f_{s^{(1)}}^{(1)}, \dots, f_{n^{(1)}}^{(1)}),$$

dove $s^{(1)}$ rappresenta la scala del punto saliente, ossia l'iterazione in corrispondenza della quale si ha il punto saliente, ed $n^{(1)}$ è un multiplo fissato, maggiore di 1, di $s^{(1)}$ (negli esperimenti useremo $n^{(1)} = 1.5 s^{(1)}$).

Immaginiamo di avere una seconda immagine della figura geometrica, possibilmente affetta dalle distorsioni considerate nel paragrafo precedente, e di estrarre il descrittore relativo al punto saliente:

$$\mathbf{f}^{(2)} = (f_0^{(2)}, f_1^{(2)}, \dots, f_{s^{(2)}}^{(2)}, \dots, f_{n^{(2)}}^{(2)}),$$

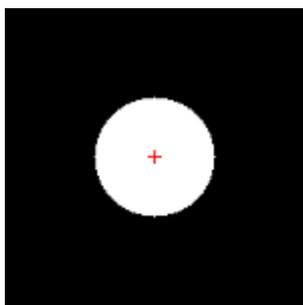
Come misura di matching fra i due descrittori, o meglio come "distanza" fra i due descrittori, consideriamo la seguente:

$$d(\mathbf{f}^{(1)}, \mathbf{f}^{(2)}) = \|\mathbf{f}^{(1)} - \mathbf{g}^{(2)}\|_2$$

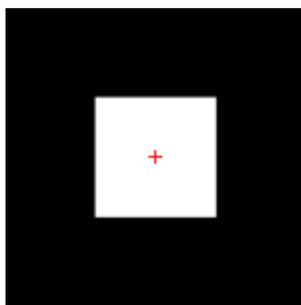
Ossia, la distanza è data dalla distanza euclidea fra il primo descrittore ed il secondo normalizzato: il secondo descrittore viene normalizzato sia lungo l'asse degli indici (tramite interpolazione, si fa in modo che il numero di elementi del secondo descrittore sia uguale a quello del primo descrittore), sia lungo l'asse dei valori (i valori del secondo descrittore vengono scalati in maniera affine in modo che il minimo ed il massimo coincidano con quelli del primo descrittore).

Esperimenti

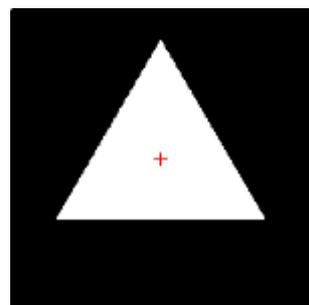
In questo capitolo presentiamo alcuni risultati di esperimenti volti alla validazione del metodo proposto e illustrato nel capitolo precedente per la classificazione di figure geometriche. In particolare, considereremo le sei figure contenute nelle altrettante immagini di riferimento riportate in Figura 4.1, ossia il cerchio, il quadrato, il triangolo equilatero, il triangolo isoscele, il semicerchio e la corona circolare.



(a) Cerchio



(b) Quadrato



(c) Triangolo
Equilatero

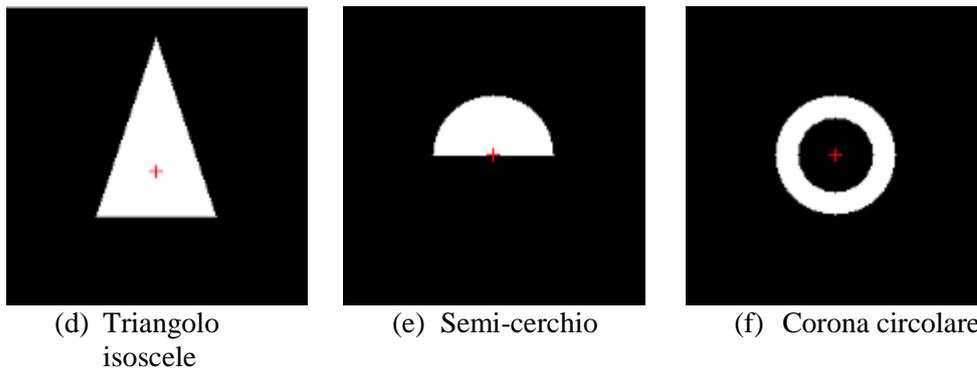


Figura 4.1. Immagini di riferimento delle figure geometriche utilizzate per la validazione sperimentale dell'algoritmo di classificazione proposto.

Alle immagini di riferimento, abbiamo innanzitutto applicato l'algoritmo per il rilevamento di punti salienti proposto in [1], ed abbiamo notato come, coerentemente con i risultati illustrati in [1], il rilevamento sia della posizione che della scala (ossia, del raggio) dei punti salienti risulta piuttosto accurato. Come prova di ciò, in Figura 4.2 mostriamo il punto saliente trovato per il caso del cerchio. La croce rossa indica la posizione del punto saliente mentre la circonferenza rossa, con centro nel punto saliente, ha raggio uguale alla scala individuata. Più in dettaglio, abbiamo notato come la posizione del punto trovato corrisponde perfettamente con il centro del cerchio, mentre vi è una leggera sovrastima del raggio.

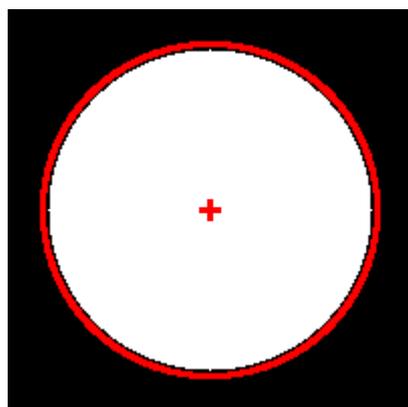


Figura 4.2. Punto saliente individuato tramite l'algoritmo proposto in [1] applicato all'immagine di un cerchio bianco su sfondo nero.

Allo scopo di valutare l'accuratezza del descrittore proposto, e quindi del classificatore di figure geometriche, il più indipendentemente possibile da quella dell'estrattore presentato in [1], si è quindi scelto di utilizzare la posizione esatta dei punti salienti, nota grazie alla particolarità delle figure geometriche considerate. Così, per esempio, nel caso del cerchio di Figura 4.2, la posizione del punto saliente è quella del centro del cerchio. Le croci rosse in Figura 4.1 indicano la posizione esatta dei punti salienti per le nove figure geometriche considerate.

Per estrarre una volta per tutte i descrittori delle figure geometriche che vogliamo classificare, a ciascuna delle immagini di riferimento riportate in Figura 4.1 abbiamo applicato l'equazione delle onde e, come spiegato nel capitolo precedente, abbiamo salvato la serie temporale dei valori assunti dalla soluzione dell'equazione in corrispondenza della posizione esatta dei punti salienti.

Per testare l'accuratezza e la robustezza del metodo proposto illustrato nel capitolo precedente, ossia la sua abilità nel riconoscere le figure geometriche in immagini affette dalle distorsioni geometriche e fotometriche di interesse, si è proceduto come segue. Per ciascuna delle distorsioni separatamente, si sono generate 100 immagini, ciascuna contenente le sei figure geometriche, e ciascuna affetta da una distorsione di intensità estratta in maniera pseudo-casuale con distribuzione uniforme tra zero ed un massimo fissato. Per ciascuna immagine così generata, si sono estratti i sei descrittori delle figure distorte, quindi si sono classificate le sei figure confrontando questi descrittori con quelli di riferimento estratti in precedenza, ed assegnando come classe la figura per cui la distanza fra i descrittori, calcolata come illustrato nel capitolo precedente, è minima. Per ciascuna figura, si è quindi calcolata la probabilità di corretta classificazione come il rapporto tra il numero di immagini distorte in cui la figura è stata classificata correttamente ed il numero totale di immagini distorte considerate (cento).

Nelle seguenti figure, riportiamo i risultati così ottenuti.

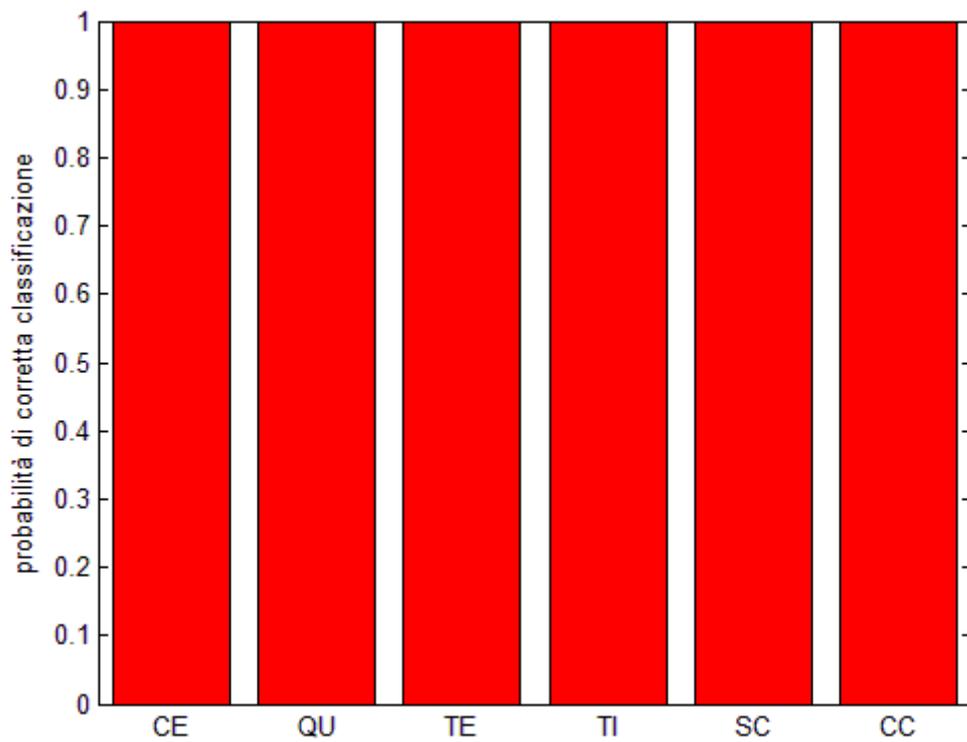


Figura 4.3. Probabilità di corretta classificazione per rotazioni, con angolo di rotazione tra 0° e 360° .

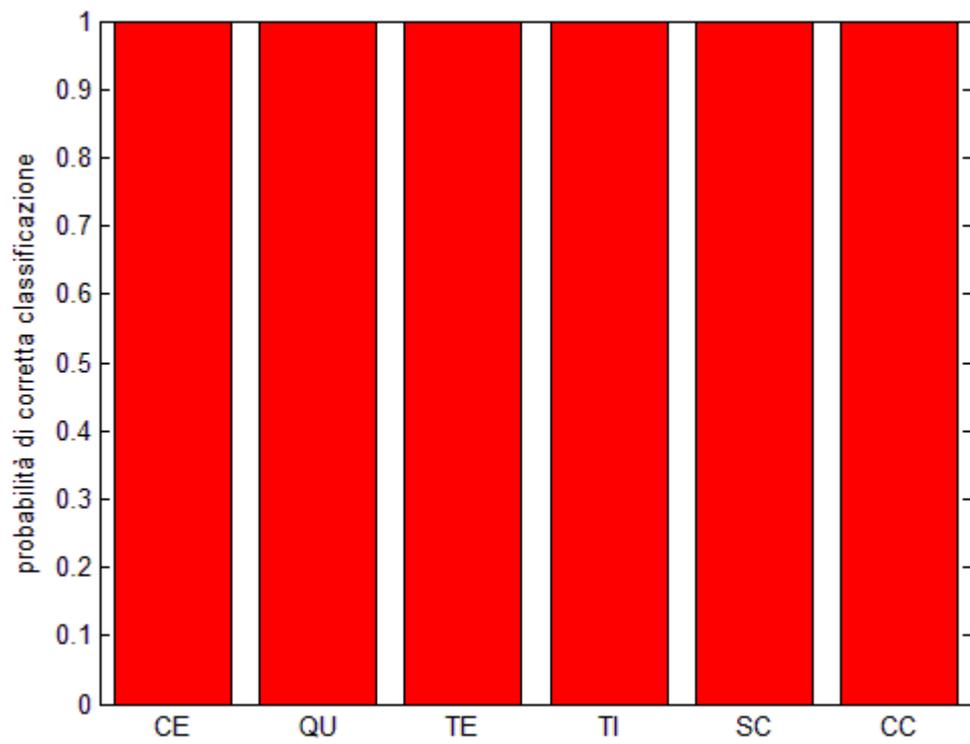


Figura 4.4. Probabilità di corretta classificazione per variazioni di scala, con *fattore di scala* tra 0.5 e 2.

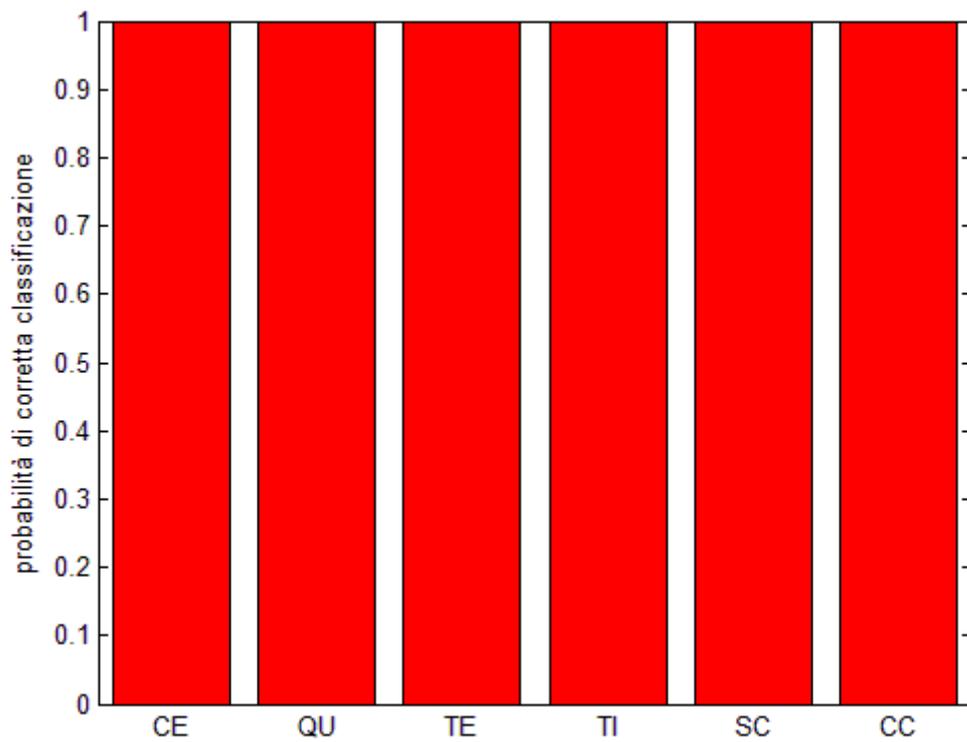


Figura 4.5. Probabilità di corretta classificazione per variazioni di contrasto, con *fattore di contrasto* tra 0.25 e 2.

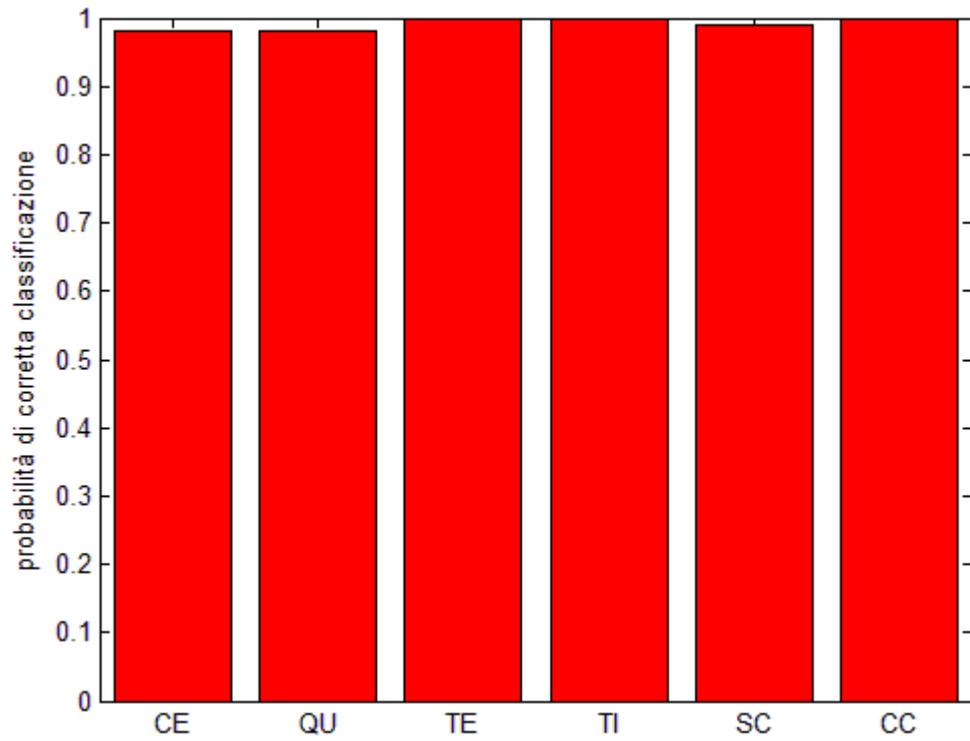


Figura 4.6. Probabilità di corretta classificazione per rumore (gaussiano additivo bianco a media nulla), con deviazione standard tra 0 e 10.

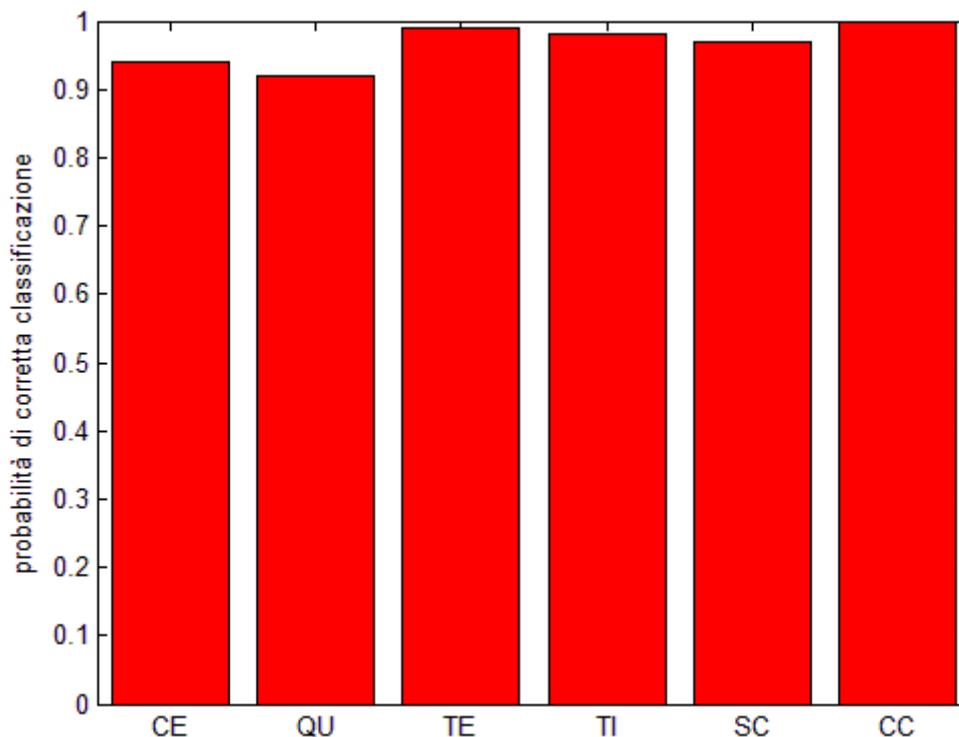


Figura 4.7. Probabilità di corretta classificazione per sfocamento (kernel gaussiano a simmetria radiale) con deviazione standard tra 0 e 10.

Si nota come la classificazione sia esatta per le distorsioni geometriche considerate (rotazioni e variazioni di scala) oltrechè per le variazioni di contrasto. Per il rumore e lo sfocamento, la classificazione non è esatta ma comunque molto buona. Si tenga conto infatti che i livelli di rumore e sfocamento considerati sono piuttosto alti in relazione a possibili situazioni reali.

Riportiamo infine nella seguente figura la probabilità di corretta classificazione per figure affette da tutte le distorsioni contemporaneamente.

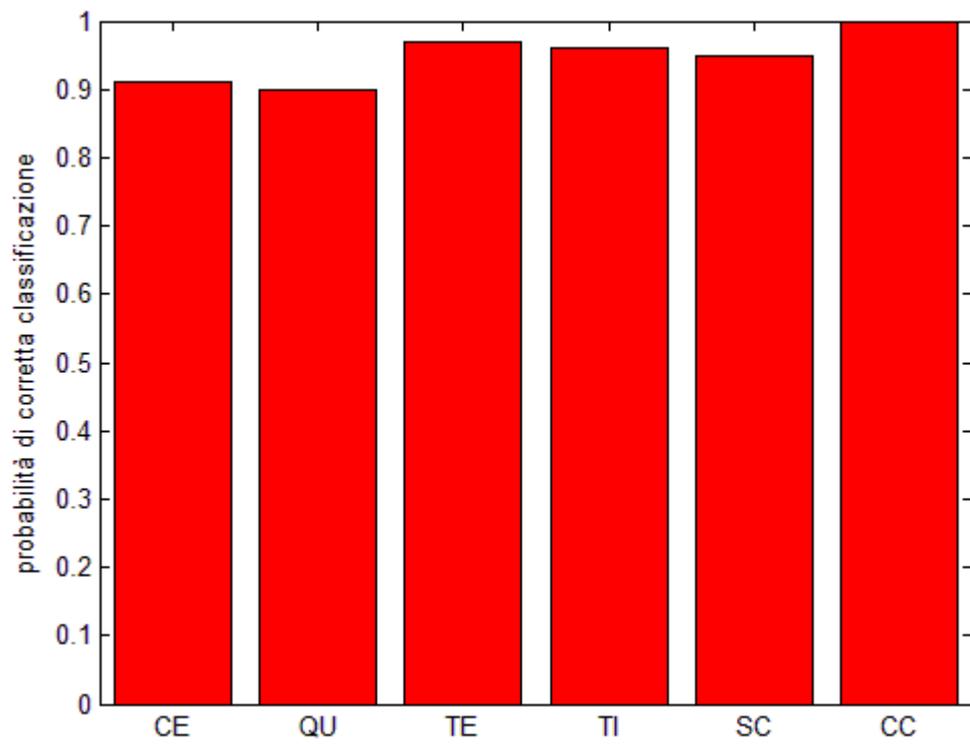


Figura 4.8. Probabilità di corretta classificazione per tutte le distorsioni.

Conclusioni

In questo lavoro di tesi abbiamo presentato un algoritmo per la classificazione automatica di figure geometriche in immagini 2-D. In particolare, nelle intenzioni il riconoscimento si proponeva di essere robusto ad un ben definito insieme di possibili distorsioni geometriche e fotometriche delle figure stesse, quali roto-traslazioni, variazioni di scala, variazioni di contrasto, sfocamento e rumore. L'algoritmo proposto si basa sull'applicazione dell'equazione delle onde all'immagine contenente le figure. Tramite l'approccio proposto in un precedente lavoro di tesi [1] si estraggono punti salienti ad elevata simmetria caratterizzanti le figure considerate. Quindi, tramite il metodo presentato in questa tesi si descrive ciascuno di questi punti salienti per mezzo, appunto, di un descrittore costituito dalla serie temporale dei valori assunti dalla soluzione dell'equazione delle onde in corrispondenza del punto saliente stesso. Il riconoscimento delle figure geometriche avviene tramite il confronto fra i descrittori estratti nell'immagine considerata ed un insieme di descrittori preventivamente calcolati da immagini di riferimento delle figure da classificare.

Si è innanzitutto investigata la variabilità del descrittore proposto in funzione delle distorsioni geometriche e fotometriche rispetto a cui ci si proponeva di essere robusti, quindi, sulla base dei risultati, si è proposta una semplice normalizzazione del descrittore stesso così che la classificazione delle figure può essere eseguita

semplicemente sulla base della distanza euclidea tra i descrittori delle figure.

I risultati sperimentali hanno evidenziato una buona capacità discriminativa dei descrittori proposti e una buona accuratezza della classificazione delle semplici figure geometriche considerate, anche a fronte delle distorsioni geometriche e fotometriche di interesse.

Il lavoro presentato si configura come uno studio preliminare volto ad una validazione preventiva del descrittore proposto su casi di studio sintetici e semplici quali le figure geometriche considerate. Chiaramente, la concreta applicabilità del metodo nel campo del riconoscimento di oggetti reali in immagini andrà valutata su casi molto più complessi, ossia su immagini realmente acquisite di oggetti generici contenenti, in generale, centinaia o addirittura migliaia di punti salienti caratterizzati da descrittori di gran lunga meno prevedibili. Tale studio sarà argomento di futura investigazione.

Dal punto di vista numerico, si prevede di sostituire il semplice metodo numerico proposto per la soluzione dell'equazione delle onde con approcci più sofisticati allo stato dell'arte, così da poter valutare gli effetti che la maggiore accuratezza della soluzione numerica può avere sulla qualità del riconoscimento.

Bibliografia

- [1] J. Cuculo: Individuazione di punti salienti in immagini mediante equazioni alle derivate parziali. *Università di Bologna 2012*.
- [2] S. Salti, A. Lanza, L. di Stefano: Keypoints from Symmetries by Wave Propagation. *Proceeding of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), Portland, OR, Giugno 2013*.
- [3] B. Engquist and A. Majda: Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of wave. *Math. computing, pages 629–651, 1997*.
- [4] Scott, Turner, and A. Zisserman. Using a mixed wave/diffusion process to elicit the symmetry set. *University of Oxford, 2000*.
- [5] D.G. Lowe, “Distinctive image features from scale invariant keypoints”, *International Journal of Computer Vision (IJCV)*, 60:91-110, 2004.
- [6] H. Bay, A. Ess, T. Tuytelaars, and L. V. Gool, “Surf: Speeded up robust features,” *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 110, no. 3, pp. 346–359, 2008.
- [7] M. Walstijn, K Kowalczyk “On the Numerical Solution of the 2D Wave Equation with Compact FDTD Schemes“, *Proc. of the 11th Int. Conference on Digital Audio Effects (DAFx-08)*, Espoo, Finland, September 1-4, 2008

- [8] C.S. Chua, R. Jarvis, "Point signatures: A new representation for 3D object recognition", *International Journal of Computer Vision (IJCV)* 25(1):63-85, 1997
- [9] A. Frome, D. Huber, R. Kolluri, T. Bulow, J. Malik, "Recognizing objects in range data using regional point descriptors", *Proc. of the European Conference on Computer Vision (ECCV)*, vol 3, pp 224-237, 2004
- [9] F. Tombari, S. Salti, L. Di Stefano, "Unique signatures of histograms for local surface description", *Proc. of the 11th European Conference on Computer Vision (ECCV)*, 2010
- [10] P. Bariya and K. Nishino, "Scale-Hierarchical 3D Object Recognition in Cluttered Scenes", in *Proc. of IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 2010
- [11] F. Tombari, S. Salti, L. Di Stefano, "RGB-D object recognition and localization with clutter and occlusions", *RGB-D Workshop on 3D Perception in Robotics*, euRobotics Forum, April 8, 2011, Vasteras, Sweden
- [12] F. Tombari and L. Di Stefano, "Object recognition in 3d scenes with occlusions and clutter by Hough voting", *proc. 4th Pacific-Rim Symp. on Image and Video Technology (PSIVT)*, 2010
- [13] O. Woodford, M.T. Pham, A. Maki, F. Perbet, B. Stenger, "Demisting the Hough Transform for 3D Shape Recognition and Registration", *Proc. British Conf. on Machine Vision (BMVC)*, 2011
- [14] B. K. P. Horn, "Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions", *Journal of the Optical Society of America A*, Vol, 4, page 629, 1987
- [15] K. S Arun, T.S. Huang, S.D. Blostein S. D "Least- Squares Fitting of Two 3-D Point Sets". *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*, 9(5), 698–700, 1987.
- [16] P. J. Besl and H. D. McKay, "A method for registration of 3-d shapes", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* vol. 14, no. 2, pp. 239–256, 1992.
- [17] S. Salti, F. Tombari, L. Di Stefano, "A Performance Evaluation of 3D Keypoint Detectors", *Proc. of the 1st International Conference on 3D Imaging, Modeling, Processing*,

Visualization and Transmission, Hangzhou, China, May 16-19, 2011. (Runner Up Paper Award)

[18] A. Petrelli, L. Di Stefano, “On the repeatability of the local reference frame for partial shape matching”, Proc. of the 13th International Conference on Computer Vision (ICCV), Barcelona, Spain, 6-13 November 2011

[19] Johnson A, Hebert M, “Using spin images for efficient object recognition in cluttered 3D scenes”, Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI) 21(5):433{449

[20] A.S. Mian, M. Bennamoun, R.A. Owens, “On the repeatability and quality of keypoints for local feature based 3D object retrieval from cluttered scenes”, International Journal of Computer Vision (IJCV) 89(2-3):348-361, 2010

[21] A. Zaharescu, E. Boyer, K. Varanasi, R.P. Horaud, “Surface feature detection and description with applications to mesh matching”, Proc. of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), pp. 373-380, 2009

