ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO: COMPOSIZIONE DI STATI CINETICI E TEOREMA DI MOZZI

Tesi di laurea in Fisica Matematica

Presentata da:
SHARON CANGIALEONI

Relatore:
Prof. CHIAR.MO PROF.
EMANUELA CALICETI

ANNO ACCADEMICO 2012–2013
SESSIONE III

"Per tre cose vale la pena di vivere: la matematica, la musica e l' amore."
Renato Caccioppoli (1904-1959)

Indice

Introduzione

Scopo di questa tesi è la trattazione della cinematica del corpo rigido, a partire dalla determinazione della formula fondamentale della cinematica rigida per passare all' analisi degli stati cinetici fondamentali, la traslazione, la rotazione e la rototraslazione. Il tema centrale che viene sviluppato è quello della composizione degli stati cinetici per arrivare a dimostrare il teorema di Mozzi in base al quale gli stati cinetici fondamentali costituiscono un gruppo. Infine viene introdotto l' invariante che, a partire dai due elementi indispensabili per lo studio del moto di un corpo rigido, e cioè la velocità angolare e la velocità di un punto scelto arbitrariamente del corpo, consente di individuarne istante per istante lo stato cinetico.

La tesi è strutturata in tre capitoli, nel primo dei quali si parte dalla definizione di corpo rigido per dimostrare che si tratta di un sistema meccanico a sei gradi di libertà e, passando per le formule di Poisson, si perviene alla formula fondamentale della cinematica del corpo rigido che ne rappresenta il generico stato cinetico.

Nel secondo capitolo vengono caratterizzati i tre stati cinetici fondamentali e nel terzo si definisce e si analizza la composizione degli stati cinetici. Vengono trattati in dettaglio tutti i possibili casi di composizione di stati cinetici fondamentali e da qui si perviene al teorema di Mozzi, cioè al risultato che componendo un qualunque sistema di stati cinetici, si ottiene sempre uno stato cinetico elicoidale che al massimo può ridursi a uno stato di traslazione o di rotazione. Infine per riconoscere lo stato cinetico di un corpo rigido a partire dalla velocità angolare $\vec{w}$ e dalla velocità di un punto qualunque del corpo O_1, viene definito l' invariante $I = \vec{w} \cdot \vec{v}(O_1)$ che funge da discriminante nella determinazione dello stato cinetico di un corpo rigido.

Per la stesura di questa tesi si è fatto sopratutto riferimento al trattato

[2], al quale si rimanda il lettore per ogni ulteriore approfondimento sui dettagli che, per ragioni di sintesi, in alcuni casi sono stati omessi. Di utile consultazione sono risultate anche le referenze [1, 3].

Capitolo 1

Il Corpo Rigido

1.1 Premesse sulla notazione: i vettori della meccanica razionale

In questa tesi per i vettori dello spazio vettoriale euclideo reale $\mathbb{R}^3$ useremo la notazione tradizionale adottata da alcuni testi classici (si veda ad esempio [2]). Più precisamente un vettore di $\mathbb{R}^3$ verrà indicato con una lettera sormontata da una freccia, $\vec{a}$, e sarà rappresentata da una terna ordinata di numeri reali $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Introducendo un sistema di riferimento cartesiano con origine in un punto O, identificato con la terna $(0, 0, 0)$, si procederà alla consueta identificazione del vettore $\vec{a}$ con il punto P di coordinate (a_x, a_y, a_z) e con la classe di equivalenza dei segmenti orientati $\vec{OP} \equiv P - O$, rappresentata dal segmento orientato avente origine in O e secondo estremo in P (come in figura 1.1); caratterizzato da un modulo (lunghezza del segmento OP), una direzione (della retta OP) e da un verso (quello della freccia, che da O va verso P). Due segmenti orientati $\vec{AB}$ e $\vec{CD}$ sono equivalenti se hanno lo stesso modulo (lunghezza), la stessa direzione (sono paralleli) e lo stesso verso. In qesta identificazione scriveremo $\vec{a} = P - O = \vec{OP}$ o anche $\vec{a} = \vec{AB} = B - A$ se $\vec{AB}$ è un segmento orientato equivalente ad OP. Il modulo del vettore $\vec{a}$, denotato $|\vec{a}|$, sarà il modulo di un qualunque segmento orientato che lo rappresenta. Analogamente si definiscono la direzione e il verso di $\vec{a}$. In particolare

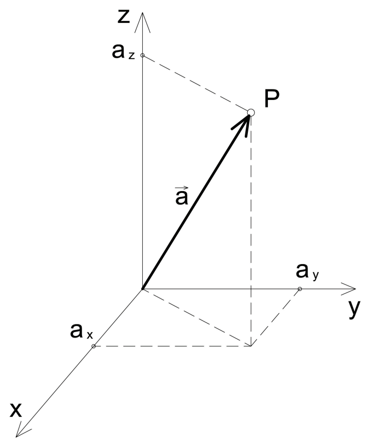

Figura 1.1: vettore $\vec{a}$

si ha

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Ricordiamo le definizioni di prodotto scalare e prodotto vettoriale di vettori di $\mathbb{R}^3$.

Definizione 1.1. *Siano dati due vettori* $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$.

a) Il prodotto scalare di $\vec{a}$ per $\vec{b}$ è dato dal numero reale

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

b) Il prodotto vettoriale di $\vec{a}$ per $\vec{b}$ è il vettore denotato $\vec{a} \times \vec{b}$ il cui modulo è dato da $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \alpha$, essendo α l' angolo individuato dalla coppia di vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$. La direzione di $\vec{a} \times \vec{b}$ è quella ortogonale al piano individuato dai due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e il verso è tale che $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ definisce una terna destra.

Se indichiamo con $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ dei versori orientati come gli assi coordinati x, y, z rispettivamente, ovvero $\vec{i} =$

$(1,0,0), \vec{j} = (0,1,0), \vec{k} = (0,0,1)$, per il vettore $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ avremo la rappresentazione cartesiana

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (\vec{a} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{a} \cdot \vec{k})\vec{k}.$$

1.2 Generalità del corpo rigido

Iniziamo con la definizione di corpo rigido

Definizione 1.2. *Un sistema meccanico costituisce un corpo rigido se la distanza tra due punti qualsiasi del corpo si mantiene indefinitamente costante nel tempo. In formule si ha*

$$|P - Q| = \textit{costante} \quad \forall P, Q \in \mathscr{C} \tag{1.1}$$

È immediato verificare la seguente

Proposizione 1.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché un corpo si comporti come rigido consiste nell' uguaglianza della componente della velocità di due punti qualsiasi del corpo lungo la loro congiungente.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\mathscr{C}$ sia un corpo rigido. Dalla (1.1) si ha

$$|P - Q|^2 = (P - Q) \cdot (P - Q) = \text{costante} \quad \forall P, Q \in \mathscr{C}. \tag{1.2}$$

Derivando rispetto al tempo la (1.2) otteniamo

$$2(P - Q) \cdot \frac{d(P - Q)}{dt} = 0$$

da cui

$$(P - Q) \cdot \frac{dP}{dt} = (P - Q) \cdot \frac{dQ}{dt} \tag{1.3}$$

dove $\frac{dP}{dt} = \vec{v}(P)$ e $\frac{dQ}{dt} = \vec{v}(Q)$ rappresentano per definizione la velocità di due generici punti P e Q di $\mathscr{C}$, rispettivamente. Dunque la (1.3) rappresenta l' uguaglianza della componente velocità dei due punti P e Q lungo la loro congiungente. Svolgendo il ragionamento in senso inverso si prova la condizione sufficiente. □

In generale, il moto di un sistema di punti è conosciuto quando è noto il moto di ogni suo punto quindi, analogamente, conoscere il moto di un corpo rigido $\mathscr{C}$ significa conoscere l'equazione vettoriale del moto

$$P = P(t) \tag{1.4}$$

per ogni punto $P \in \mathscr{C}$. Conoscendo (1.4) è nota la configurazione del corpo $\mathscr{C}$ in ogni istante. Nel caso del corpo rigido bisogna prendere in considerazione anche la condizione di rigidità e le sue conseguenze. Infatti per un corpo rigido vale il seguente

Teorema 1.4. *Per conoscere la configurazione di un corpo rigido $\mathscr{C}$ è sufficiente conoscere la sua configurazione all' istante iniziale $t_0 \in \mathbb{R}$ e la posizione di tre suoi punti non allineati in ogni istante.*

Dimostrazione. Denotiamo tre punti non allineati di cui si conosce il moto A, B, C. Sia P un generico punto di $\mathscr{C}$ di cui si vuole conoscere la posizione al generico istante $t \geq t_0$. Le configurazioni iniziali A_0, B_0, C_0 e P_0 di questi quattro punti costituiscono i vertici di un tetraedo rigido. Sovrapponendo la base di vertici A_0, B_0, C_0 al triangolo di vertici $A(t), B(t), C(t)$ che individuano la configurazione nota dei punti A, B, C all'istante t, la nuova posizione assunta dal quarto vertice del tetraedo (inizialmente in P_0), rappresenta la posizione $P(t)$ di P al tempo t. □

Dunque per conoscere l' evoluzione temporale di $\mathscr{C}$ a priori è sufficiente conoscere le tre equazioni vettoriali

$$\begin{cases} A = A(t) \\ B = B(t) \\ C = C(t) \end{cases}$$

equivalenti a nove equazioni scalari che forniscono in ogni istante le nove coordinate dei tre punti rispetto ad un prefissato sistema di riferimento. Questi nove parametri tuttavia sono sovrabbondanti, non essendo tra loro indipendenti. Infatti le coordinate dei tre punti devono soddisfare le tre condizioni di rigidità:

$$\begin{cases} |A(t) - B(t)| = \text{costante} \\ |B(t) - C(t)| = \text{costante} \\ |A(t) - C(t)| = \text{costante} \end{cases}$$

Quindi tre dei nove parametri si possono esprimere in funzione dei restanti sei. Dunque in generale solo sei dei nove parametri assunti per determinare la configurazione del corpo $\mathscr{C}$ sono indipendenti. Perciò per determinare il moto di un corpo rigido bastano sei parametri indipendenti. In questo senso si dice che un corpo rigido è un sistema meccanico a sei gradi di libertà. I sei parametri che di volta in volta vengono scelti per rappresentare il moto del corpo vengono detti *parametri Lagrangiani.*

1.3 Gli assi solidali con un corpo rigido

Se consideriamo per ogni coppia di punti distinti del corpo rigido, la retta passante per i due punti, possiamo immaginare di estendere il vincolo di rigidità a tutti i punti di questa retta. Una retta di questo genere viene chiamata *retta solidale* con il corpo rigido. Quest' ultima contiene ovviamente anche punti che non appartengono al corpo rigido fisico, dal momento che si estende all' infinito, mentre un corpo fisico occupa sempre una regione limitata dello spazio. Tuttavia i suoi punti mantengono sempre una distanza invariabile dai punti del corpo, per cui, dal punto di vista geometrico e cinematico, una retta solidale forma un tutto unico con il corpo rigido. Perciò possiamo dire che una una retta solidale si comporta come se fosse parte integrante del corpo rigido.
Per studiare il moto di un corpo rigido conviene considerare un sistema di assi (O, x, y, z) a cui viene riferito il moto e che chiameremo *sistema fisso* e un sistema di assi (O_1, x_1, y_1, z_1) solidale con il corpo che chiameremo *sistema mobile.* Infatti dato che esistono infinite rette solidali ad un corpo rigido, per l' arbitrarietà delle coppie di punti che si possono scegliere per identificarle, possiamo scegliere una terna di rette solidali, fra loro ortogonali, aventi un punto di intersezione comune, cioè l' origine O_1 in un punto del corpo, e orientamento degli assi fatti con altri punti del corpo stesso.

Conviene inoltre introdurre due basi ortonormali, cioè di versori a due a due ortogonali:

- $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispettivamente paralleli e con lo stesso verso degli assi x, y, z;
- $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ rispettivamente paralleli e con lo stesso verso degli assi x_1, y_1, z_1.

Ogni punto P del corpo avrà quindi coordinate (x_1, y_1, z_1) rispetto al sistema mobile invariabili col tempo, e coordinate (x, y, z) variabili, rispetto al sistema fisso che possiamo determinare mediante una trasformazione di coordinate, nota in ogni istante la posizione del sistema solidale col corpo rispetto al sistema fisso. A tale fine occorre conoscere, in ogni istante, le coordinate del punto $O_1 = (a, b, c)$ rispetto al sistema fisso e i coseni direttori delle rette O_1x_1, O_1y_1, O_1z_1 che chiameremo nell' ordine: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Ma questi sono rispettivamente le componenti di $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ sugli assi (x, y, z) che essendo ortogonali a due a due risulta:

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = 0 \tag{1.5}$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \\ \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3 = 0 \\ \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

e avendo norma unitaria:

$$\vec{i}_1 \cdot \vec{i}_1 = \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_1 = 1 \tag{1.6}$$

cioè

$$\begin{cases} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{cases}$$

Perciò i nove coseni direttori si possono esprimere in funzione di tre parametri indipendenti. Quindi per determinare la configurazione del sistema solidale col corpo rigido occorrono le tre coordiante dell' origine e i tre parametri per i coseni direttori, cioè sei parametri. Basta ora fare una trasformazione di coordinate cartesiane per trovare le coordiante (x, y, z) di un punto generico P del corpo di coordinate (x_1, y_1, z_1). A questo scopo, utilizzando l'identità vettoriale

$$P - O = (P - O_1) + (O_1 - O) \tag{1.7}$$

immaginando ora di conoscere le coordinate (x_1, y_1, z_1) di un generico punto P di $\mathscr{C}$ rispetto al sistema solidale, ossia

$$P - O_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1, \tag{1.8}$$

le coordiante (a, b, c) di O_1 rispetto al sistema fisso, ossia

$$O_1 - O = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}, \tag{1.9}$$

e indicando con (x, y, z) le coordinate di P rispetto al sistema fisso, ossia

$$P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.10}$$

dalla (1.7) si ottiene

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 + a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}. \tag{1.11}$$

Moltiplicando scalarmente quest' ultima equazione per $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ successivamente troviamo:

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 z_1 \\ y = b + \alpha_2 x_1 + \beta_2 y_1 + \gamma_2 z_1 \\ z = c + \alpha_3 x_1 + \beta_3 y_1 + \gamma_3 z_1 \end{cases} \tag{1.12}$$

che sono le equazioni che ci permettono di conoscere come variano le coordinate del punto P rispetto al sistema fisso, al trascorrere del tempo, ossia le equazioni del moto di P.

1.4 Formule di Poisson e Formula Fondamentale della Cinematica Rigida

Dato il sistema fisso (O, x, y, z) e il sistema mobile (O_1, x_1, y_1, z_1), analizziamo ora la velocità $\vec{v}(P)$ di un qualsiasi punto P appartenente al corpo rigido, ricordando che, per definizione, $\vec{v}(P) = \frac{dP(t)}{dt} = \frac{d(P-O)}{dt}$. Dalla (1.7) si ha

$$\vec{v}(P) = \frac{d(P-O)}{dt} = \frac{d(P-O_1)}{dt} + \frac{d(O_1-O)}{dt}. \tag{1.13}$$

Utilizzando ora la (1.8) e ricordando che x_1, y_1, z_1 sono costanti, otteniamo

$$\frac{d(P-O_1)}{dt} = x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}. \tag{1.14}$$

Per sviluppare le derivate dei versori $\vec{i}_1, \vec{j}_1$ e $\vec{k}_1$ ricordiamo che la derivata di un vettore con modulo costante è ortogonale al vettore stesso. Ne segue quindi che

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} \perp \vec{i}_1, \qquad \frac{d\vec{j}_1}{dt} \perp \vec{j}_1, \qquad \frac{d\vec{k}_1}{dt} \perp \vec{k}_1. \tag{1.15}$$

Per procedere sarà utile la seguente

Proposizione 1.5. *Siano $\vec{a}$ e $\vec{b}$ due vettori ortogonali, cioè tali che $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$. Allora esistono infiniti vettori $\vec{c}$ tali che sia*

$$\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}.$$

Dimostrazione. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane O, x, y, z con gli assi x e y rispettivamente paralleli e nello stesso verso di $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Sará allora $\vec{a} = a\vec{i}$ e $\vec{b} = b\vec{j}$ con $a = |\vec{a}|$ e $b = |\vec{b}|$. Posto $\vec{c}_0 = \frac{b}{a}\vec{k}$ si ottiene

$$\vec{c}_0 \times \vec{a} = \frac{b}{a}\vec{k} \times a\vec{i} = b\vec{k} \times \vec{i} = b\vec{j} = \vec{b}.$$

Sia ora $\vec{c} = \vec{c}_0 + h\vec{a}, \quad \forall h \in \mathbb{R}$; si ha

$$\vec{c} \times \vec{a} = \vec{c}_0 \times \vec{a} + h\vec{a} \times \vec{a} = \vec{c}_0 \times \vec{a} = \vec{b}. \quad \square$$

In virtù della (1.15) e della Proposizione 1.5 si potranno scegliere, con un certo grado di arbitrarietà, tre vettori $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ tali che

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{w}_1 \times \vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{w}_2 \times \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{w}_3 \times \vec{k}_1. \tag{1.16}$$

È possibile scegliere quest' ultime tre componenti in modo che coincidano, cioè vogliamo trovare un $\vec{w}$ tale che

$$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{w}_3 = \vec{w} \tag{1.17}$$

Derivando le (1.5) che mi esprimono la ortogonalitá dei vettori $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = -\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 \\ \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 = -\frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 \\ \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} \cdot \vec{i}_1 = -\frac{d\vec{i}_1}{dt} \cdot \vec{k}_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

Dato che le componenti di $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ lungo $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ sono arbitrarie, possiamo scegliere la componente di $\vec{w}_1$ lungo l' asse x_1 uguale alla componente di $\vec{w}_2$ lungo lo stesso asse; e la componente di $\vec{w}_2$ lungo l' asse y_1 uguale alla componente di $\vec{w}_1$ lungo y_1. Sostituendo le prime due equazioni della (1.16) nella prima della (1.18) e scambiando successivamente il prodotto scalare con quello vettoriale troviamo

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{i}_1 \times \vec{j}_1 = -\vec{w}_2 \cdot \vec{j}_1 \times \vec{i}_1 = \vec{w}_2 \cdot \vec{i}_1 \times \vec{j}_1$$

cioè

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{w}_2 \cdot \vec{k}_1$$

quindi i due vettori $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, avendo le tre componenti lungo x_1, y_1 e z_1 uguali, coincidono e possiamo scrivere

$$\vec{w}_1 = \vec{w}_2 = \vec{w}.$$

Essendo anche la componente di $\vec{w}_3$ lungo l' asse z_1 ugualmente arbitraria, possiamo sceglierla uguale all' analoga componente di $\vec{w}$. Sostituendo le (1.16) nella seconda e terza della (1.18) si ha:

$$\vec{w} \times \vec{j}_1 \cdot \vec{k}_1 = -\vec{w}_3 \times \vec{k}_1 \cdot \vec{j}_1 = \vec{w}_3 \cdot \vec{j}_1 \times \vec{k}_1,$$

$$\vec{w}_3 \times \vec{k}_1 \cdot \vec{i}_1 = -\vec{w} \times \vec{i}_1 \cdot \vec{k}_1 = \vec{w} \cdot \vec{k}_1 \times \vec{i}_1$$

cioè

$$\vec{w} \cdot \vec{i}_1 = \vec{w}_3 \cdot \vec{i}_1 \qquad \vec{w} \cdot \vec{j}_1 = \vec{w}_3 \cdot \vec{j}_1.$$

Perciò $\vec{w}$ e $\vec{w}_3$, avendo uguali componenti sugli assi x_1, y_1, z_1, risultano uguali.
Resta così dimostrata la prima parte del seguente

Teorema 1.6. *Esiste un vettore $\vec{w}$ tale che*

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{w} \times \vec{i}_1 \\ \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{w} \times \vec{j}_1 \\ \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{w} \times \vec{k}_1 \end{cases} \tag{1.19}$$

Il vettore $\vec{w}$ è unico.

Le equazioni (1.19) sono le note **formule di Poisson** che esprimono le derivate dei tre vettori fondamentali di un sistema di assi collegato ad un corpo rigido.

Dimostrazione. Per quanto già visto è sufficiente dimostrare l' unicità di $\vec{w}$. Supponiamo per assurdo che esista un vettore $\vec{w}'$ tale che

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{w}' \times \vec{i}_1 \\ \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{w}' \times \vec{j}_1 \\ \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{w}' \times \vec{k}_1 \end{cases}$$

Confrontando queste con le (1.19) otteniamo $\vec{w} \times \vec{i}_1 = \vec{w}' \times \vec{i}_1$ cioè $(\vec{w} - \vec{w}') \times \vec{i}_1 = 0$. Ma $\vec{i}_1 \neq 0$ e $\vec{w} \neq \vec{w}'$ quindi dovrà essere $\vec{w} - \vec{w}'$ parallelo a $\vec{i}_1$.
Analogamente troviamo che $(\vec{w} - \vec{w}')$ deve essere parallelo anche a $\vec{j}_1$ e $\vec{k}_1$, cioè deve essere parallelo a vettori fra loro ortogonali. Il che è ovviamente assurdo. Quindi $\vec{w} = \vec{w}'$, cioè $\vec{w}$ è unico. □

Definizione 1.7. *Il vettore $\vec{w}$ è detto **il vettore di Poisson** o **velocità angolare** del sistema (O_1, x_1, y_1, z_1) rispetto al sistema (O, x, y, z).*

Ritornando al discorso iniziale, utilizzando le (1.19) e la (1.8), possiamo così scrivere la (1.14):

$$\frac{d(P-O_1)}{dt} = x_1\vec{w}\times\vec{i}_1 + y_1\vec{w}\times\vec{j}_1 + z_1\vec{w}\times\vec{k}_1 =$$

$$= \vec{w}\times(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) = \vec{w}\times(P-O_1).$$

Ricordando ora la (1.13) otteniamo la seguente espressione per $\vec{v}(P)$

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{w}\times(P-O_1) \quad \forall P \in \mathscr{C} \tag{1.20}$$

che esprime la velocità dei punti di un corpo rigido, in un certo istante, nota, in quell' istante, la velocità di uno qualunque di essi, O_1, e il vettore $\vec{w}$. Questa è la **formula fondamentale della cinematica rigida o del corpo rigido**. Essa è valida con lo stesso valore di $\vec{w}$ anche cambiando O_1 in un altro punto O_2 di $\mathscr{C}$. Infatti, come si è visto, il vettore $\vec{w}$ mette in relazione le derivate dei versori $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$, con gli stessi vettori, indipendentemente dalla scelta dell' origine del sistema solidale.

Capitolo 2

Moti e Stati Cinetici del Corpo Rigido

Classifichaimo ora alcune importanti tipologie di moto rigido.

2.1 Moto Traslatorio

Un corpo rigido passa da una posizione S_0, all' istante iniziale t_0, ad una posizione S, raggiunta all' istante t, attraverso una *traslazione semplice*, quando tutti i punti del corpo subiscono nel passaggio da S_0 a S uguale spostamento, cioè per ogni punto P del corpo si ha:

$$P(t) - P(t_0) = \vec{\tau}$$

Dove il vettore $\vec{\tau}$ è chiamato *traslazione del corpo*.

Definizione 2.1. *Un corpo rigido si muove di* ***moto continuo di traslazione*** *quando passa da una posizione S_0, assunta all' istante iniziale t_0, ad una qualunque altra posizione S, all' istante t, mediante una traslazione semplice, cioè se gli spostamenti dei punti del corpo a partire dalla posizione iniziale sono, in ogni istante, uguali per tutti i punti del corpo:*

$$P(t) - P(t_0) = Q(t) - Q(t_0) \quad \forall P, Q \in \mathscr{C}. \tag{2.1}$$

È facile verificare che la seguente è una definizione equivalente di moto di traslazione.

Definizione 2.2. *Se in un intervallo di tempo* $[t_0, t_1]$ *tutti i punti del corpo rigido* $\mathscr{C}$ *hanno la stessa velocità cioè*

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) \quad \forall P, Q \in \mathscr{C} \tag{2.2}$$

si dice che il corpo si muove di ***moto di traslazione****.*

Dimostrazione. Supponiamo che tutti i punti di $\mathscr{C}$ abbiano la stessa velocità, cioè che valga la (2.2). Allora si ha

$$\frac{d(P-Q)}{dt} = \frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

quindi il vettore $P(t) - Q(t)$ è costante nell' intervallo $[t_0, t_1]$ ed è uguale al suo valore iniziale cioè

$$P(t) - Q(t) = P(t_0) - Q(t_0),$$

da cui si ha

$$P(t) - P(t_0) = Q(t) - Q(t_0).$$

Viceversa se vale la(2.1) si ha

$$P(t) - P(t_0) = Q(t) - Q(t_0) = \text{costante},$$

da cui

$$\frac{d(P(t) - Q(t))}{dt} = 0$$

ossia

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) \quad \forall P, Q \in \mathscr{C}$$

□

La formula fondamentale della cinematica rigida consente di verificare facilmente la seguente

Proposizione 2.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinché il moto sia di traslazione è che*

$$\vec{w}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{2.3}$$

Dimostrazione. La condizione è banalmente sufficiente, infatti se $\vec{w}(t) = 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$ dalla (1.20) si ha immediatamente

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) \quad \forall P \in \mathscr{C} \tag{2.4}$$

Viceversa se vale la (2.4) dalla (1.20) segue che

$$\vec{w} \times (P - O_1) = 0, \forall P \in \mathscr{C}. \tag{2.5}$$

Scegliendo P in modo tale che $(P - O_1)$ non sia parallelo a $\vec{w}$ la (2.4) implica che $\vec{w} = 0$. □

Osservazione 2.4. Nel caso del moto traslatorio la velocità comune a tutti i punti del corpo, viene detta **velocità del corpo** ed è l' unico caso in cui si può parlare di **velocità di un corpo rigido**, dato che in generale i punti del corpo hanno velocità differenti tra loro.

Dalle (1.19) segue che, nel caso di moto traslatorio, i versori $\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1$ sono costanti anche in direzione e verso, quindi possono essere scelti paralleli a $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ rispettivamente (sistema fisso). Quindi il sistema solidale con il corpo (O_1, x_1, y_1, z_1) risulta parallelo al sistema fisso e le equazioni (1.12) si riducono a

$$\begin{cases} x = a + x_1 \\ y = b + y_1 \\ z = c + z_1 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cartesiane del moto di traslazione con a, b, c in funzione del tempo. Se i punti del corpo sono dotati di comune velocità costante nel tempo il moto del corpo si dice di *traslazione uniforme*.

Definizione 2.5. *Se solo in un istante preciso di tempo t vale $\vec{w}(t) = 0$ o equivalentemente $\vec{v}(P) = \vec{v}(Q) \quad \forall P, Q \in \mathscr{C}$, si dice che il corpo rigido $\mathscr{C}$ passa per uno* ***stato cinetico di traslazione****.*

È facile verificare che se $\mathscr{C}$ passa per uno stato cinetico di traslazione tutti i punti del corpo compiono in quell' istante lo stesso spostamento infinitesimo.

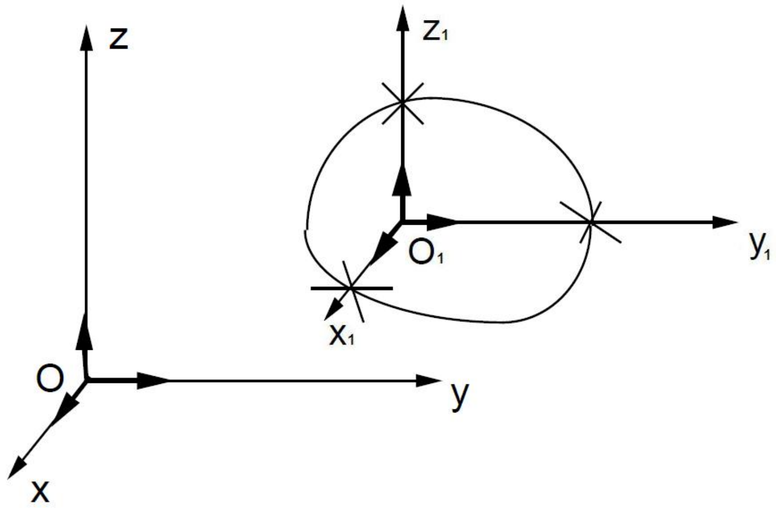

Figura 2.1: Moto Traslatorio

2.2 Moto Rotatorio

Un corpo rigido passa da una posizione S_0, all' istante iniziale, ad una posizione S, raggiunta all' istante t, attraverso una rotazione attorno all' asse AB, quando, durante il moto i punti A e B rimangono fissi. Perciò anche tutta la retta AB sarà fissa per il vincolo di rigidità e prende il nome di *asse di rotazione*. Infatti in questo caso l' unica possibilità che ha il corpo di muoversi è quella di ruotare. L' angolo di cui ruota il corpo si chiama *ampiezza di rotazione* ed è positivo o negativo a seconda del verso di rotazione. Precisiamo questi concetti nella seguente

Definizione 2.6. *Un corpo si muove di* ***moto continuo di rotazione*** *intorno alla retta AB, quando i punti A e B restano fissi durante il moto.*

Osservazione 2.7. Ogni punto P del corpo, mantendo sempre la stessa distanza dall' asse, percorrerà una circonferenza di centro H_p e raggio PH_p, essendo H_p la proiezione di P sull' asse di rotazione.

Proposizione 2.8. *Sia P un punto del corpo e siano P_0 e $P(t)$ la sua posizione iniziale e all' istante t rispettivamente. L' angolo θ di cui è ruotato il punto P nel tempo t, cioè l' angolo $\widehat{P_0 H_p P(t)}$ è uguale per tutti i punti del corpo.*

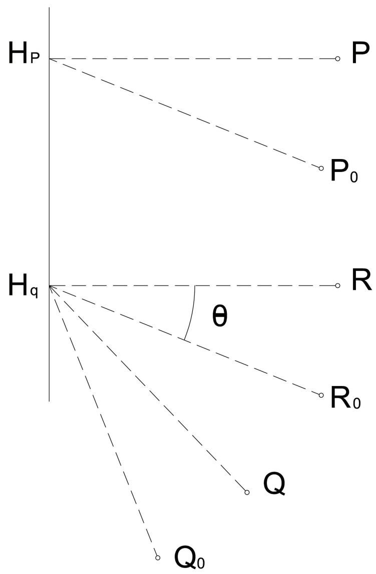

Figura 2.2: Uguaglianza dell' angolo formato in un tempo t da tutti i punti del corpo

Dimostrazione. Sia Q un altro punto del corpo, $Q(t)$ la sua posizione all' istante t, Q_0 la sua posizione iniziale, H_q la sua proiezione sull' asse(Fig. 2.2). Costruiamo la retta parallela alla retta $H_pP(t)$ passante per H_q all' istante t; e sia $R(t)$ un punto del corpo rigido appartenente a questa retta(retta $H_qR(t)$). Sia R_0 la configurazione all' istante iniziale del punto $R(t)$. Poiché le due rette, $H_pP(t)$ e $H_qR(t)$, sono sempre parallele durante il moto, sarà anche H_qR_0 parallela a H_pP_0, quindi

$$\theta = \widehat{P_0 H_p P(t)} = \widehat{R_0 H_q R(t)}.$$

Ora, poiché $R(\widehat{t)H_qQ}(t)$ è uguale a $\widehat{R_0H_qQ_0}$, poiché l'angolo fra due rette del corpo non varia, si avrà, sottraendo $Q\widehat{(t)H_q}R_0$ a questi due angoli,

$$Q_0\widehat{H_qQ}(t) = R_0\widehat{H_qR}(t) = \theta.$$

$\square$

L' angolo θ di cui ruotano tutti i punti del corpo rigido nello stesso tempo si chiama *angolo di rotazione del corpo all' istante t*. Dato che un moto rigido si dice rotatorio quando esiste una retta solidale con il corpo $\mathscr{C}$ i cui punti hanno velocità nulla, se considero O_1 appartenente all' asse di rotazione, otteniamo dalla (1.20)

$$\vec{v}(P) = \vec{w} \times (P - O_1), \quad \forall P \in C$$

e preso un qualunque punto M appartente all' asse di rotazione abbiamo:

$$\vec{v}(M) = \vec{w} \times (M - O_1) = 0,$$

dove $\vec{w} \neq 0$ per ipotesi, M e O_1 appartengono all' asse di rotazione e sono diversi fra loro. Perciò $\vec{w}$ risulterà parallelo a $(M - O_1)$ cioè $\vec{w}$ risulta diretto come l' asse di rotazione. Possiamo allora dimostrare la seguente

Proposizione 2.9. *Il corpo rigido si muove di moto di rotazione se e solo se esiste un punto $O_1 \in \mathscr{C}$ tale che*

$$\vec{v}(P) = \vec{w} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathscr{C}. \tag{2.6}$$

L' asse di rotazione è la retta passante per O_1 e parallela ad $\vec{w}$.

Dimostrazione. Avendo già dimostrato la condizione necessaria basta dimostrare la condizione sufficiente. Dimostriamo cioè che se vale la (2.6) il moto è di rotazione, facendo vedere che la retta passante per O_1 e parallela a $\vec{w}$ è asse di rotazione. Sia dunque P un punto di questa retta. Dalla (2.6) si ha

$$\vec{v}(P) = \vec{w} \times (P - O_1)$$

ma per costruzione $(P - O_1)$ è parallelo a $\vec{w}$ perciò risulta

$$\vec{v}(P) = 0, \quad \forall P \in \text{all'asse}.$$

$\square$

Come per il moto di traslazione esaminiamo il caso in cui la rotazione si verifichi ad uno specifico istante di tempo, anziché in un intervallo temporale finito.

Definizione 2.10. *Se in un istante di tempo t, esiste una retta o equivalentemente esiste un punto $O_1 \in \mathscr{C}$ tale che*

$$\vec{v}(P) = \vec{w} \times (P - O_1), \quad \forall P \in \mathscr{C},$$

si dice che il corpo $\mathscr{C}$ passa per uno ***stato cinetico di rotazione*** *e la retta passante per O_1 e parallela a $\vec{w}$ viene chiamata* ***asse istantaneo di rotazione****.*

Definizione 2.11. *Un corpo compie una rotazione infinitesima di ampiezza $d\theta$, intorno all' asse di rotazione, quando ruota di un angolo infinitesimo $d\theta$, in un intervallo di tempo $(t, t + dt)$.*

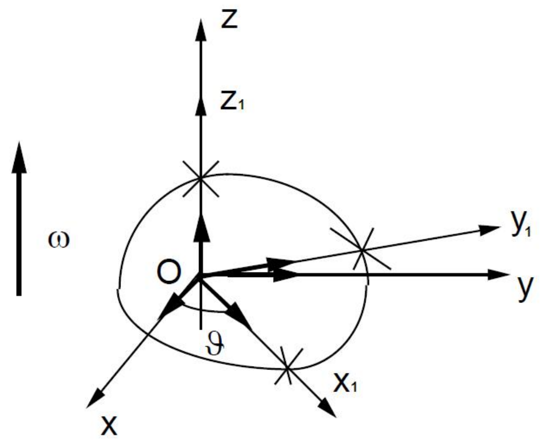

Figura 2.3: Moto Rotatorio

2.3 Moto Rototraslatorio ed Elicoidale

Abbiamo visto come i moti di traslazione e di rotazione rappresentino dei particolari moti del corpo rigido e parallelamente la formula fondamentale (1.20)

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{w} \times (P - O_1) \quad \forall P \in \mathscr{C}$$

si specializzi in $\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1), \forall P \in \mathscr{C}$ nel caso di moto di traslazione e in $\vec{v}(P) = \vec{w} \times (P - O_1), \forall P \in \mathscr{C}$ nel caso della rotazione. In altre parole in questi due casi particolari uno dei due addendi del membro di destra della (1.20) si annulla e solo l' altro sopravvive. Adesso andiamo ad esaminare il caso più generale in cui entrambi i termini sono non nulli, dando luogo al moto di rototraslazione.

Definizione 2.12. *Un corpo passa da una posizione S_0, all' istante iniziale, ad una posizione S, all' istante t, mediante una **rototraslazione**, se una retta r solidale col corpo si sposta solo scorrendo su una retta fissa dello spazio r_1, cioè quando esiste almeno una retta solidale al corpo che, durante il moto, scorre su se stessa. Chiameremo questa retta asse di rotatraslazione.*

Proposizione 2.13. *Un moto di rototraslazione si ottiene facendo subire al corpo prima una traslazione, poi una rotazione.*

Dimostrazione. Consideriamo un punto P sulla retta r del corpo. Attraverso una traslazione, determinata dal vettore $\vec{\tau}$, parallelo a r_1, la retta fissa nello spazio, possiamo portare il punto P dalla sua posizione iniziale P_0 alla sua posizione finale P_1. Ovviamente, per la condizione di rigidità tutti i punti della retta r raggiungeranno la loro posizione finale. Infine per portare tutto il corpo dalla posizione S_0 alla posizione S bisognerà far compiere un movimento di rotazione, di ampiezza $d\theta$, in cui r rimane fissa. Quindi possiamo scrivere

$$P' - P_0 = \vec{\tau} + \vec{r}$$

dove P' è la posizione finale di P dopo la rotazione e $\vec{r}$ è lo spostamento dovuto alla rotazione. □

Quindi una rototraslazione è composta da una traslazione semplice seguita da una rotazione semplice. Ma possiamo anche dimostrare il seguente risultato

Proposizione 2.14. *Nelle ipotesi precedenti, invertendo lo spostamento di rotazione con quello di traslazione, lo spostamento complessivo rimane invariato.*

Dimostrazione. Consideriamo la figura 2.4. Nel caso precedente il punto P passava dalla posizione P_0, all' istante iniziale, alla posizione P_1, mediante la traslazione $\vec{\tau}$ e poi attraverso la rotazione dell' angolo θ da P_1 a P'.

Ora immaginiamo prima di far ruotare il corpo di un angolo θ, in modo che P_0 si sposti in P_2 (ovviamente anche P_1 si sposterà in P'). Applicando poi la traslazione $\vec{\tau}$ il punto P_2 arriverà alla posizione finale P'. Perciò la spostamento finale rimane invariato. Inoltre per la condizione di rigidità avró $P_0P_1 = P_2P'$ e dato che le rette P_0P_1 e P_2P' sono entrambe parallele all' asse r_1, risulteranno parallele fra

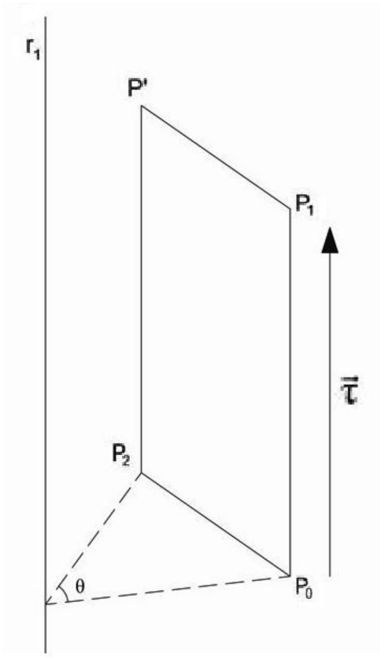

Figura 2.4: Moto rototraslatorio come combinazione di una rotazione e di una traslazione o viceversa

loro perciò $P_0P_1P'P_2$ è un parallelogramma e

$$\vec{r} = P' - P_1 = P_2 - P_0$$

cioè il valore di $\vec{r}$ non dipende da $\vec{\tau}$ ma solo da θ. □

Quindi possiamo dire che la rotazione e la traslazione commutano.

Definizione 2.15. *Un corpo si muove di* ***moto continuo di rototraslazione*** *quando durante il moto una retta del corpo r scorre su una retta fissa r_1. La retta r si dice asse di rototraslazione.*

Abbiamo già visto che lo spostamento di un punto del corpo P, dalla posizione iniziale P_0, alla posizione finale all' istante t, si ottiene sommando uno spostamento di traslazione $\vec{\tau}(t)$ parallelo a r_1, con uno spostamento di rotazione $\vec{r}(t)$. Essendo questi ultimi variabili col tempo abbiamo

$$P(t) - P_0 = \vec{\tau}(t) + \vec{r}(t)$$

e derivando otteniamo

$$\vec{v} = \frac{dP}{dQ} = \vec{v}_0 + \vec{w} \times (P - O_1)$$

dove $\vec{v}_0$ è, come $\vec{w}$, parallelo all' asse di rototraslazione. Perciò possiamo enunciare la seguente

Proposizione 2.16. *Nel moto di rototraslazione la velocità di un punto P del corpo è la somma di una velocità di un moto di traslazione $\vec{v}_0$ con una velocità di un moto di rotazione con velocità angolare $\vec{w}$ parallela a $\vec{v}_0$.*

Si può fare questo discorso anche a livello infinitesimo, anziché in un intervallo temporale finito.

Definizione 2.17. *In un intervallo di tempo infinitesimo (t, t + dt), il corpo compie una rototraslazione infinitesima, sommando una traslazione infinitesima con una rotazione infinitesima.*

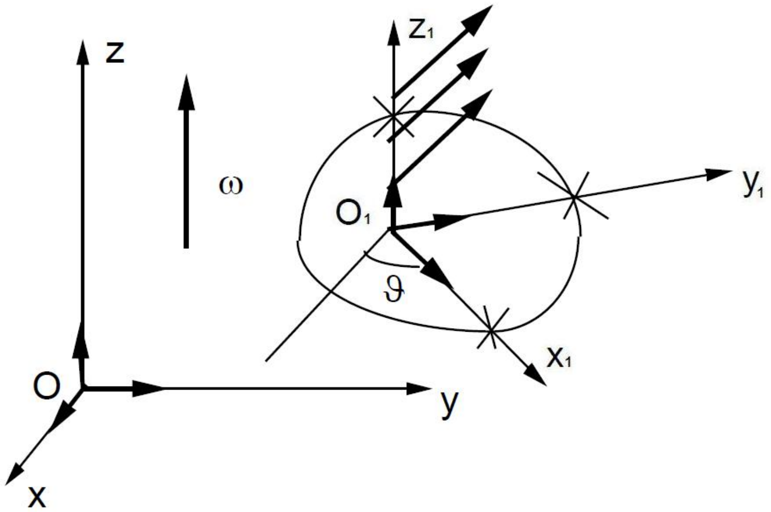

Figura 2.5: Moto Rototraslatorio

Un caso particolare di moto rototraslatorio è il *moto elicoidale*.

Definizione 2.18. *Se in un moto continuo di rototraslazione l'ampiezza di rotazione $\theta(t)$ è in ogni istante proporzionale al modulo della traslazione nello stesso istante, cioè $\tau = h\theta$, il moto del corpo si dice* ***elicoidale****.*

Proposizione 2.19. *Se il moto di un corpo rigido è elicoidale, qualsiasi punto del corpo si muove di moto elicoidale.*

Dimostrazione. Ricordiamo che un punto si muove di moto elicoidale se le sue equazioni del moto sono date da

$$x = R\cos\theta \quad y = R\sin\theta \quad z = h\theta$$

dove R e h sono costanti e θ è una funzione nota del tempo.
Si consideri un punto generico P del corpo rigido (vedi Figura 2.6) e si pongano gli assi di riferimento x, y, z in modo che l' asse z coincida con l' asse di rototraslazione, mentre la posizione iniziale P_0 di P cada sull' asse x e sia R la distanza dall' origine. Per ottenere la

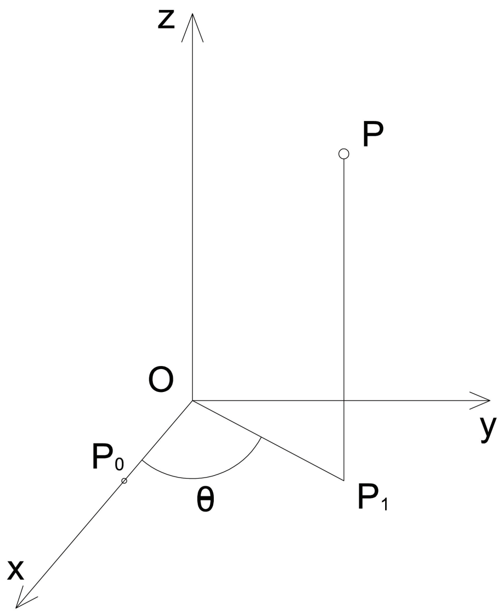

Figura 2.6: Moto elicoidale dei punti di un corpo rigido

posizione finale di P all' istante t, occorre anzitutto far subire alla retta OP_0 una rotazione di ampiezza θ, sicché P_0 si porterà in un punto P_1 del piano x, y con coordinate $R\cos\theta, R\sin\theta$. Poi il punto subirà uno spostamento parallelo all' asse di rototraslazione per cui la z varierà di $h\theta$ senza cambiare le altre coordinate. In definitiva all' istante t le coordinate di P saranno

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta, \quad z = h\theta,$$

cioè il moto di P è elicoidale. □

Definizione 2.20. *Se l' angolo θ di cui ruota il corpo è funzione lineare del tempo, il moto si dice **elicoidale uniforme**.*

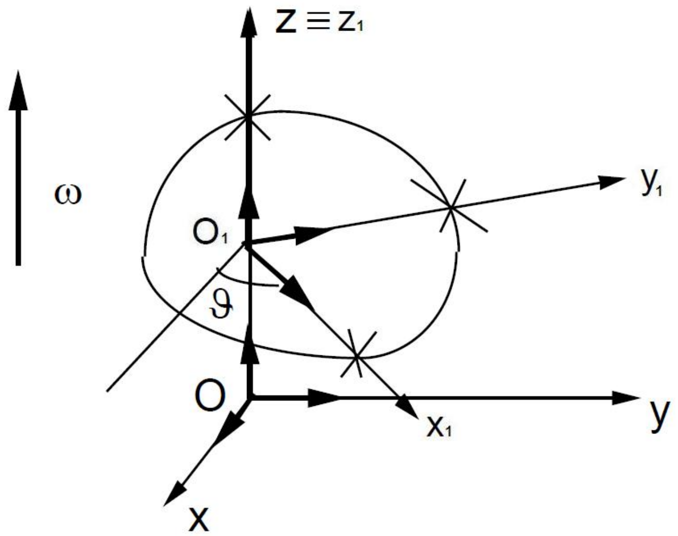

Figura 2.7: Moto Elicoidale

Definizione 2.21. *Un corpo passa, in un certo istante, per uno stato cinetico rototraslatorio, quando la velocità dei punti del corpo è la somma di due termini: uno rappresenta uno stato cinetico di traslazione in quanto è uguale per tutti i punti del corpo; l' altro rappresenta uno stato cinetico di rotazione.*

Osservazione 2.22. In virtù delle (1.20) lo stato cinetico di rototraslazione rappresenta lo stato più generale in cui può trovarsi un corpo rigido quando lo stato non è né traslatorio né rotatorio.

Definizione 2.23. *Nel caso in cui l' asse istantaneo di rototraslazione sia parallelo alla velocità di traslazione lo stato cinetico si dice elicoidale.*

In uno stato cinetico elicoidale la velocità del punto generico P è data dunque dall' espressione

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{w} \times (P - O_1)$$

dove $\vec{v}_0$ e $\vec{w}$ sono due vettori fra loro paralleli e uguali per tutti i punti del corpo e l' asse istantaneo elicoidale, cioè l' asse di questo moto, contiene il vettore $\vec{w}$ posto con l' origine in O_1.

Osservazione 2.24. Dimostreremo nel capitolo 3 che lo stato cinetico di rototraslazione e quello elicoidale sono equivalenti, nel senso che è sempre possibile determinare un punto $O_1 \in \mathscr{C}$ tale che $\vec{v}(O_1)$ sia parallelo ad $\vec{w}$.

Per completezza è opportuno inserire fra i moti fondamentali del corpo rigido quello più banale, quello cioè in cui il corpo resta fermo nella sua configurazione iniziale.

Definizione 2.25. *Nel caso in cui in un intervallo finito di tempo sia la componente traslatoria che quella rotatoria siano nulle, e dunque* $\vec{v}(P) = 0 \quad \forall P \in \mathscr{C}$*, il moto si dice* ***moto nullo****. Se tutti i punti del corpo hanno velocità nulla in un istante di tempo* t*, si parla di* ***stato cinetico nullo****.*

Capitolo 3

Composizione di Stati Cinetici e Teorema di Mozzi

3.1 Composizione degli Stati Cinetici

Per quanto detto nel capitolo precedente, dato un punto generico P, con velocità $\vec{v}(P)$, di un corpo rigido, se $\vec{v}(P)$ è uguale per ogni punto del corpo, o $\vec{v}(P) = \vec{w} \times (P - O_1)$ o $\vec{v}(P) = \vec{v}_0 + \vec{w} \times (P - O_1)$ il corpo passa, all' istante t, per uno stato cinetico, rispettivamente di traslazione, di rotazione o elicoidale.

Definizione 3.1. *Se lo stato cinetico $\vec{v}(P)$ si può rappresentare come somma di due stati cinetici $\vec{v}_1(P)$ e $\vec{v}_2(P)$, cioè $\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P)$, $\vec{v}(P)$ si chiamerà **stato cinetico risultante** o **composto dagli stati cinetici** $\vec{v}_1(P)$ **e** $\vec{v}_2(P)$ che a loro volta si chiameranno **stati cinetici componenti**.*

Ovviamente se gli stati cinetici componenti sono compatibili con la condizione di rigidità del corpo, lo è anche lo stato cinetico risultante.

Definizione 3.2. *Il passaggio dagli stati cinetici componenti allo stato cinetico risultante si chiama **composizione degli stati cinetici**.*

Lavorando su intervalli di tempo infinitesimo si possono comporre moti infinitesimi secondo la seguente definizione

Definizione 3.3. *Il moto per cui un punto generico P subisce nell' intervallo $(t, t+dt)$ uno spostamento infinitesimo, ottenuto sommando* *gli spostamenti dovuti a due moti infinitesimi si chiama moto infinitesimo risultante o composto dai due moti infinitesimi corrispondenti a* $\vec{v}_1(P)$ *e* $\vec{v}_2(P)$.

Esaminiamo in dettaglio alcuni esempi di composizione di stati cinetici.

Teorema 3.4. *Due stati cinetici di traslazione si compongono in uno stato cinetico pure di traslazione, cioè due traslazioni infinitesime si compongono in una traslazione infinitesima.*

Dimostrazione. Consideriamo due stati cinetici di traslazione $\vec{v}_1(P)$ e $\vec{v}_2(P)$. Essi sono indipendenti da P, perciò anche lo stato cinetico risultante $\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P)$ sarà indipendente da P e quindi rappresenterà uno stato cinetico di traslazione. □

Teorema 3.5. *Due stati cinetici di rotazione di ugual asse istantaneo e velocità angolare opposta, si compongono in uno stato cinetico ovunque nullo.*

Dimostrazione. Dalla Proposizione 2.11 possiamo rappresentare i due stati cinetici di rotazione $\vec{v}_1(P)$ e $\vec{v}_2(P)$ nella forma

$$\vec{v}_1(P) = \vec{w}_1 \times (P - O_1)$$

$$\vec{v}_2(P) = \vec{w}_2 \times (P - O_1) = -\vec{w}_1 \times (P - O_1)$$

con O_1 appartenente all' asse comune di rotazione. Segue allora immediatamente che $\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P) = 0$. □

Teorema 3.6. *Due stati cinetici di rotazione con assi istantanei paralleli e velocità angolari uguali e di senso opposto, si compongono in uno stato cinetico di traslazione in direzione normale al piano degli assi; cioè due rotazioni infinitesime di ugual ampiezza, di verso opposto e intorno a due assi paralleli si compongono in una traslazione infinitesima normale al piano dei due assi.*

Dimostrazione. Poniamo le due velocità angolari

$$\vec{w}_1 = \vec{w} \quad \vec{w}_2 = -\vec{w}$$

e siano O_1 e O_2 due punti appartenenti agli assi di rotazione degli stati cinetici $\vec{v}_1(P)$ e $\vec{v}_2(P)$ rispettivamente. Inoltre O_1 e O_2 siano scelti in modo che la retta O_1O_2 sia perpendicolare ai due assi di rotazione. Si ha allora

$$\vec{v}_1(P) = \vec{w} \times (P - O_1) \quad \vec{v}_2(P) = -\vec{w} \times (P - O_2),$$

da cui

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P) = \vec{w} \times (P - O_1) - \vec{w} \times (P - O_2) = \vec{w} \times (O_2 - O_1)$$

Perciò dato che $\vec{v}(P)$ non dipende da P, esso risulta uno stato cinetico di traslazione. La direzione della traslazione è normale ai due assi, essendo normale alla velocità angolare $\vec{w}$. □

Teorema 3.7. *Due stati cinetici, uno di traslazione, l'altro di rotazione con asse istantaneo normale alla traslazione, si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo parallelo all' asse della rotazione data; cioè una traslazione infinitesima e una rotazione infinitesima, con asse normale alla traslazione si compongono in una rotazione infinitesima.*

Dimostrazione. Definiamo lo stato cinetico di rotazione, $\vec{v}_1(P)$, attraverso il vettore applicato $(\vec{w}, O_2)$, cioè

$$\vec{v}_1(P) = \vec{w} \times (P - O_2),$$

essendo $\vec{w}$ la velocità angolare e O_2 un punto sull' asse di rotazione. Essendo lo stato cinetico di traslazione $\vec{v}_2(P)$ ortogonale a $\vec{w}$, esiste un vettore $\vec{c}$ tale che $\vec{v}_2(P) = \vec{c} \times \vec{w}$. Il vettore $\vec{c}$ può essere rappresentato da un segmento orientato con origine in O_2, ovvero si può scrivere $\vec{c} = O_1 - O_2$. Si ha quindi

$$\vec{v}_2(P) = (O_1 - O_2) \times \vec{w} = \vec{w} \times (O_2 - O_1).$$

Lo stato cinetico risultante sarà quindi

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P) = \vec{w} \times (P - O_2) + \vec{w} \times (O_2 - O_1) = \vec{w} \times (P - O_1)$$

che è uno stato cinetico di rotazione con la stessa velocità angolare del precedente, con asse istantaneo parallelo, ma spostato dato che passa per O_1 invece che per O_2. □

Teorema 3.8. *Due stati cinetici di rotazione intorno ad assi istantanei concorrenti si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo concorrente con gli assi degli stati componenti; cioè due rotazioni infinitesime concorrenti si compongono in una rotazione infinitesima.*

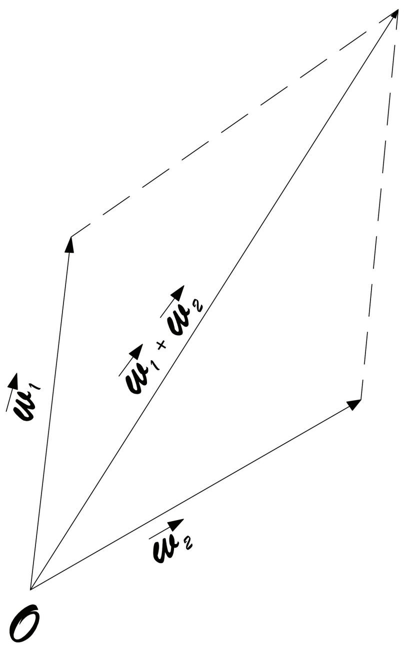

Figura 3.1: Composizione di stati cinetici di rotazione con assi concorrenti

Dimostrazione. Consideriamo la figura 3.1. Possiamo pensare al punto di intersezione dei due assi, O, come l'origine delle velocità angolari, $\vec{w}_1$ e $\vec{w}_2$, dei due moti. Si avrà quindi

$$\vec{v}_1(P) = \vec{w}_1 \times (P - O), \quad \vec{v}_2(P) = \vec{w}_2 \times (P - O).$$

Perciò

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P) = (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \times (P - O)$$

cioè lo stato cinetico risultante è uno stato cinetico di rotazione, di velocità angolare $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$, con asse istantaneo passante per O e contenente $\vec{w}_1 + \vec{w}_2$. □

Teorema 3.9. *Uno stato cinetico di traslazione e uno stato cinetico di rotazione si compongono sempre in uno stato cinetico elicoidale, cioè rototraslatorio con asse di rototraslazione parallelo alla traslazione.*

Dimostrazione. Lo stato cinetico di rotazione $\vec{v}_1(P)$ sia definito dal vettore applicato $(\vec{w}, O_1)$, lo stato cinetico di traslazione $\vec{v}_2(P)$ si decomponga in due, uno $\vec{v}_2`(P)$ parallelo a $\vec{w}$, l' altro $\vec{v}_2``(P)$ normale a $\vec{w}$. Si ha allora

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_2(P) = \vec{w} \times (P - O_1) + \vec{v}_2`(P) + \vec{v}_2``(P) =$$

$$= \vec{v}_2``(P) + \vec{w} \times (P - O_1) + \vec{v}_2`(P)$$

dove i primi due termini dell' ultimo membro sono due stati cinetici di traslazione e di rotazione, con la traslazione normale all' asse di rotazione. Essi, per il Teorema 3.7, si compongono in uno stato cinetico di rotazione con asse istantaneo passante per un punto O' diverso da O_1. Si ha allora

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_2`(P) + \vec{w} \times (P - O')$$

che rappresenta, essendo $\vec{v}_2`(P)$ parallelo a $\vec{w}$, uno stato cinetico elicoidale. □

Esaminiamo infine un ultimo caso di composizione di stati cinetici.

Teorema 3.10. *Due stati cinetici di rotazione intorno a due assi istantanei sghembi si compongono in uno stato cinetico elicoidale; cioè due rotazioni infinitesime intorno ad assi sghembi si compongono in un moto rototraslatorio infinitesimo.*

Dimostrazione. Definiamo i due stati cinetici di rotazione attraverso i vettori applicati $(\vec{w}_1, O_1)$ e $(\vec{w}_2, O_2)$. Si ha

$$\vec{v}_1(P) = \vec{w}_1 \times (P - O_1) \quad \vec{v}_2(P) = \vec{w}_2 \times (P - O_2).$$

Perciò possiamo scrivere

$$\vec{v}(P) = \vec{w}_1 \times (P - O_1) + \vec{w}_2 \times (P - O_2) + \vec{w}_1 \times (P - O_2) - \vec{w}_1 \times (P - O_2) =$$

$$= (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \times (P - O_2) + \vec{w}_1 \times (O_2 - O_1)$$

dove il primo termine rappresenta uno stato cinetico di rotazione, mentre il secondo uno stato cinetico di traslazione. Perciò in virtù del Teorema 3.9 lo stato cinetico risultante è elicoidale. □

3.2 Il Teorema di Mozzi

Ricordando la (1.20):

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{w} \times (P - O_1)$$

che esprime la velocità dei punti del corpo rigido, si può trarre subito la conclusione che un corpo rigido passa, in ogni istante, per uno stato cinetico di rototraslazione, in quanto il primo termine al secondo membro non dipende da P e rappresenta perciò uno stato cinetico di traslazione, il secondo uno stato cinetico di rotazione(si veda Osservazione 2.24). Lo stato cinetico risultante sarà quindi elicoidale, per il Teorema 3.9.
Con questa osservazione, tenendo conto dei risultati del paragrafo precedente, resta dimostrato il seguente **Teorema di Mozzi**.

Teorema 3.11. *Componendo un qualunque sistema di stati cinetici, si ottiene sempre uno stato cinetico elicoidale, che può ridursi a uno stato cinetico di traslazione quando $\vec{w} = 0$, cioè quando manca la rotazione oppure ad uno stato cinetico di rotazione, quando la velocità del punto O_1 è nulla, o perpendicolare a $\vec{w}$.*

Questo significa che *l'atto di moto rigido più generale è un atto di moto elicoidale.*

Definizione 3.12. *La retta dello spazio i cui punti hanno velocità parallela alla velocità angolare prende il nome di* ***asse di Mozzi****. Nel caso in cui il moto degeneri a rotatorio, l' asse di Mozzi, i cui punti hanno velocità nulla, prende il nome di* ***asse di istantanea rotazione****.*

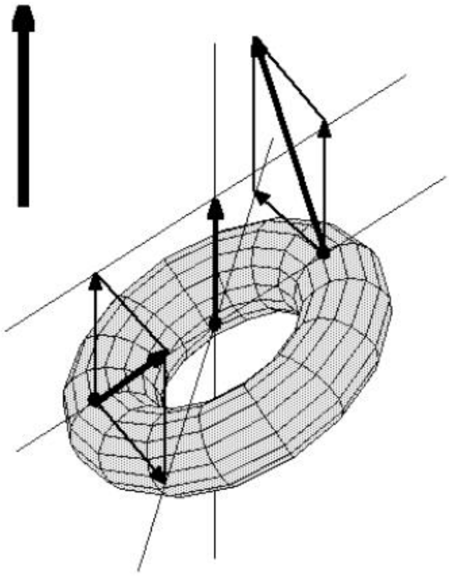

Figura 3.2: asse di Mozzi

3.3 Invariante

Dalla formula fondamentale della cinematica rigida (1.20) per conoscere lo stato cinetico di un corpo rigido è sufficiente conoscere la velocità angolare $\vec{w}$ e la velocità (O_1) di un punto qualunque del corpo. Ci chiediamo come sia possibile riconoscere lo stato cinetico del corpo a partire da questi dati, sapere cioè se si tratta di una traslazione, di una rotazione o di uno stato elicoidale. A questo scopo lo strumento utile per risolvere il problema è l' *invariante.*

Definizione 3.13. *Si chiama invariante del corpo rigido il seguente prodotto scalare*

$$I = \vec{w} \cdot \vec{v}(O_1).$$

Il nome del termine I è giustificato dal fatto che non dipende dal punto $O_1 \in \mathscr{C}$. Infatti, sia O_2 un altro punto di $\mathscr{C}$. Si ha allora

$$\vec{v}(O_2) = \vec{v}(O_1) + \vec{w} \times (O_2 - O_1).$$

Se calcoliamo I utilizzando il punto O_2 otteniamo

$$I = \vec{w} \cdot \vec{v}(O_2) = \vec{w} \cdot \vec{v}(O_1) + \vec{w} \cdot \vec{w} \times (O_2 - O_1) = \vec{w} \cdot \vec{v}(O_1),$$

cioè I non dipende dalla scelta del punto $O_1 \in \mathscr{C}$.
L' invariante I serve da discriminante nella determinazione dello stato cinetico di $\mathscr{C}$. Si ha infatti il seguente risultato.

Teorema 3.14. *Se $I = 0$ lo stato cinetico è una traslazione se $\vec{w} = 0$, ed è una rotazione se $\vec{w} \neq 0$.*
Se $I \neq 0$ lo stato cinetico è elicoidale.

Dimostrazione. Sia $I = \vec{w} \cdot \vec{v}(O_1) = 0$. Se $\vec{w} = 0$ allora lo stato cinetico si riduce ad una traslazione di cui lo stato cinetico nullo rappresenta un caso particolare che si ha quando anche $\vec{v}(O_1) = 0$.
Se $\vec{w} \neq 0$ e $\vec{v}(O_1) = 0$ si ha una rotazione. Se $\vec{v}(O_1) \neq 0$ allora $\vec{w}$ è ortogonale a $\vec{v}(O_1)$ e per il Teorema 3.7 lo stato cinetico ottenuto componendo una rotazione con una traslazione normale all' asse di rotazione è una rotazione.
Infine, se $I \neq 0$, si compone una rotazione con una traslzione con componente parallela ad $\vec{w}$ non nulla. Il risultato sarà dunque uno stato cinetico elicoidale. $\square$

Bibliografia

[1] A. Strumia - *Meccanica Razionale* - *Parte I* - Nautilus, Bologna 1996

[2] D. Graffi - *Elementi di Meccanica Razionale* - Patron, Bologna 1973

[3] S. Graffi, Appunti dalle lezioni di Fisica Matematica II - http://www.dm.unibo.it/fismat/didattica/html.

Ringraziamenti

Prima di tutto parto col ringraziare la professoressa Caliceti per essere stata sempre molto chiara e disponibile.
Poi vorrei ringraziare i miei genitori, la mia nonna e tutta la mia schiera di amici straordinari che mi hanno sostenuta e hanno sempre cerduto in me. In questi tre anni e mezzo ho passato i momenti più belli e purtroppo anche i più brutti della mia vita, ma è grazie a queste persone che posso dire che la frase "*ciò che non ti uccide, ti fortifica* ", mi calzi a pennello.
Per ultimo ma non per importanza vorrei fare un ringraziamento speciale a coloro che, non so in che modo, mi hanno sopportata prima di ogni esame, cioè al mio moroso Mirko, a mia sorella Fiore e a due dei mie migliori amici Clarissa e Dennis.