

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**EQUILIBRIO DEI FILI
E
DEI SISTEMI ARTICOLATI**

Tesi di Laurea in Fisica matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
EMANUELA CALICETI

Presentata da:
LUCIA SCARFO'

III Sessione
Anno Accademico 2011/12

Introduzione

Scopo di questa tesi è la trattazione di un importante problema nell'ambito della statica dei sistemi meccanici, e cioè la determinazione delle condizioni di equilibrio dei fili flessibili e inestensibili e dei sistemi articolati. Fonti indispensabili alla stesura del presente trattato, il quale si articola in tre capitoli, sono il testo [1], per la composizione dei capitoli 1 e 2 e il testo [2] per il capitolo 3. A questi testi il lettore è rimandato per ulteriori approfondimenti sul tema trattato e per gli eventuali dettagli omessi nell'esposizione per esigenze di sintesi.

Il primo capitolo è un'introduzione alla statica e fornisce le nozioni base indispensabili al conseguimento degli obiettivi stabiliti. Vengono determinate in primo luogo le condizioni di equilibrio di un punto materiale soggetto ad un sistema di forze; successivamente quelle riguardanti un generico sistema meccanico. Il secondo capitolo, il principale della tesi, è dedicato allo studio dell'equilibrio dei fili. Definito il concetto di tensione, si passa alla determinazione delle condizioni di equilibrio, le quali in seguito vengono applicate ad alcune situazioni significative. Analizzando un filo soggetto a forze parallele si ottiene una curva detta catenaria la quale gode dell'importante proprietà di avere in ogni suo punto una distribuzione uniforme del suo peso totale e perciò è spesso utilizzata per la realizzazione di strutture architettoniche come ponti e cupole. Il capitolo si conclude con l'analisi di un filo poggiato su una superficie e in particolare, di un filo avvolto secondo un'elica su un cilindro. Il terzo capitolo riguarda i sistemi articolati. Dopo aver ottenuto risultati di carattere generale, viene approfondito il problema della ricerca delle condizioni di equilibrio dei sistemi articolati semplicemente connessi. Il lavoro si conclude con l'analisi di un sistema articolato avente estremi fissati e soggetto a forze parallele.

Indice

1	Equilibrio dei sistemi meccanici	7
1.1	Generalità	7
1.2	Equilibrio di un punto materiale	8
1.3	Equilibrio di un sistema meccanico	9
2	Fili flessibili e inestensibili	13
2.1	Condizioni per l'equilibrio	13
2.2	Problemi fondamentali	15
2.2.1	Problema 1	16
2.2.2	Problema 2	17
2.2.3	Problema 3	17
2.3	Filo soggetto a forze parallele	18
2.3.1	Caso omogeneo	19
2.3.2	Caso non omogeneo	21
2.4	Filo adagiato su una superficie	22
3	Sistemi articolati	25
3.1	Generalità	25
3.2	Sistemi articolati semplicemente connessi	26
3.2.1	Sistema con un estremo fissato	28
3.2.2	Sistema con estremi fissati: forze parallele	29
	Bibliografia	31

Capitolo 1

Equilibrio dei sistemi meccanici

1.1 Generalità

Per determinare le condizioni di equilibrio dei sistemi meccanici, premettiamo alcune definizioni e postulati utili.

Definizione 1.1. *Dal punto di vista fisico una **forza** è un ente in grado di determinare una variazione del moto di un punto, ovvero di produrre un'accelerazione. Dal punto di vista matematico una **forza** è un vettore applicato (\vec{F}, P) . \vec{F} è il vettore della forza, P il punto di applicazione.*

Postulato 1.2. (Postulato delle reazioni vincolari) *Dato un sistema vincolato è sempre possibile renderlo libero introducendo un opportuno sistema di forze dette reazioni vincolari.*

Distinguiamo quindi le forze in due tipologie:

- le **reazioni vincolari**, che traducono le reazioni dei vincoli;
- le **forze attive**, tutte le altre.

Definizione 1.3. *La linea d'azione di una forza (\vec{F}, P) è la retta passante per P e parallela a \vec{F} .*

Postulato 1.4. (Principio di azione e reazione) *Dati due punti A, B , se su A agisce una forza di vettore \vec{F} dovuta a B , allora su B agisce una forza di vettore $-\vec{F}$ dovuta ad A , avente la stessa linea d'azione.*

Consideriamo un sistema di forze $(\vec{F}_1, P_1), (\vec{F}_2, P_2), \dots, (\vec{F}_N, P_N)$:

Definizione 1.5. *Si chiama vettore risultante la somma dei vettori delle N forze: $\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s$*

Definizione 1.6. Data una forza (\vec{F}, P) e un polo $O \in \mathbb{R}^3$, si chiama momento della forza rispetto ad O il vettore

$$\vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - P).$$

Nel caso di un sistema di N forze il momento risultante è la somma dei momenti delle singole forze:

$$\vec{\Omega}(O) = \sum_{s=1}^n \vec{\Omega}_s(O) = \sum_{s=1}^n \vec{F}_s \times (O - P_s).$$

Definizione 1.7. Sia Q un punto materiale di massa m . Il **Peso** del punto Q è la forza (\vec{P}, Q) di vettore $\vec{P} = m\vec{g}$, dove \vec{g} è il vettore accelerazione di gravità.

Definizione 1.8. Due sistemi di forze $(\vec{F}_1, A_1), \dots, (\vec{F}_N, A_N)$ e $(\vec{F}'_1, A'_1), \dots, (\vec{F}'_N, A'_N)$ di vettori risultanti \vec{R} e \vec{R}' e momenti risultanti $\vec{\Omega}(O)$ e $\vec{\Omega}'(O)$ rispettivamente, si dicono equivalenti se hanno lo stesso vettore risultante e lo stesso momento risultante rispetto a qualunque polo:

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}' \\ \vec{\Omega}(O) = \vec{\Omega}'(O) \end{cases}$$

$$\forall O \in \mathbb{R}^3$$

Per un sistema meccanico costituito da N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N rispettivamente, è facile dimostrare che il sistema delle loro forze peso $(m_1\vec{g}, P_1), \dots, (m_N\vec{g}, P_N)$ è equivalente ad un'unica forza di vettore $M\vec{g}$ dove $M = \sum_{s=1}^N m_s$ è la massa totale del sistema e punto di applicazione il baricentro G del sistema di punti. A questo proposito ricordiamo che se $O \in \mathbb{R}^3$ è l'origine di un sistema di riferimento cartesiano, la posizione del baricentro G è data da

$$G - O = \frac{\sum_{s=1}^N m_s(P - O)}{M}$$

1.2 Equilibrio di un punto materiale

Definizione 1.9. Sia P un punto materiale. Una configurazione $P_0 \in \mathbb{R}^3$ si dice di equilibrio per P se posto P in P_0 all'istante iniziale con velocità nulla, ivi resta ad ogni istante successivo.

E' immediato verificare che P_0 è una configurazione di equilibrio se e solo se la funzione costante $P(t) = P_0, \forall t \geq t_0$ è soluzione dell'equazione del moto

$$m\vec{a} = \vec{R}$$

con condizioni iniziali $P(t_0) = P_0, \vec{v}(t_0) = 0$. Qui \vec{R} è il vettore risultante di tutte le forze (attive e vincolari) che agiscono su P . In generale il vettore \vec{F} di una forza (\vec{F}, P) dipende dalla posizione di P , dalla velocità \vec{v} e dal tempo t :

$$\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t).$$

La forza si dice *posizionale* se \vec{F} non dipende da \vec{v} e t ma solo dalla posizione P

$$\vec{F} = \vec{F}(P).$$

Nel caso in cui su P agiscono forze posizionali è facile verificare il seguente

Teorema 1.10. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una configurazione P_0 sia di equilibrio per un punto P è che si annulli il vettore risultante delle forze che agiscono su P :*

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{\Phi} = 0 \tag{1.1}$$

dove \vec{F} e $\vec{\Phi}$ rappresentano i vettori risultanti delle forze attive e delle reazioni vincolari, rispettivamente.

Per la dimostrazione si veda [1]

1.3 Equilibrio di un sistema meccanico

Definizione 1.11. *Una configurazione si dice di equilibrio per un sistema meccanico se è configurazione di equilibrio per ciascuno dei punti del sistema.*

Teorema 1.12. *Condizione necessaria per l'equilibrio di un corpo, è che siano nulle la somma tra la risultante delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne e la somma dei momenti risultanti delle forze attive esterne e delle reazioni vincolari esterne rispetto a qualunque polo*

$$\vec{F}_e + \vec{\Phi}_e = 0 \tag{1.2}$$

$$\vec{\Omega}_e(O) + \vec{\Psi}_e(O) = 0 \tag{1.3}$$

$\forall O \in \mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Consideriamo un corpo costituito da N punti materiali A_1, \dots, A_N . Indichiamo con \vec{F}_s e $\vec{\Phi}_s$ rispettivamente il vettore risultante delle forze attive e il vettore risultante delle reazioni vincolari agenti su A_s , $\forall s = 1, \dots, N$. Da (1.1) sappiamo che per ogni punto vale:

$$\vec{F}_s + \vec{\Phi}_s = 0$$

Ora separiamo le forze agenti su ogni punto in interne ed esterne; interne, quelle dovute ai punti interni del corpo ed esterne le altre. Quindi indichiamo con $\vec{F}_{es}, \vec{F}_{is}, \vec{\Phi}_{es}, \vec{\Phi}_{is}$ rispettivamente la risultante delle forze attive esterne, delle forze attive interne, delle reazioni vincolari esterne e delle reazioni vincolari interne agenti in A_s .

Allora la (1.1) diventa:

$$\vec{F}_{es} + \vec{F}_{is} + \vec{\Phi}_{es} + \vec{\Phi}_{is} = 0. \quad (1.4)$$

Poichè questa equazione vale per tutti i punti del sistema, possiamo sommare rispetto ad s ottenendo

$$\sum_{s=1}^N \vec{F}_{es} + \sum_{s=1}^N \vec{F}_{is} + \sum_{s=1}^N \vec{\Phi}_{es} + \sum_{s=1}^N \vec{\Phi}_{is} = 0 \quad (1.5)$$

e indicando con $\vec{F}_e, \vec{F}_i, \vec{\Phi}_e, \vec{\Phi}_i$ le quattro sommatorie in (1.5) ordinatamente si ha

$$\vec{F}_e + \vec{F}_i + \vec{\Phi}_e + \vec{\Phi}_i = 0. \quad (1.6)$$

Per il principio di azione e reazione, le forze attive interne e le reazioni vincolari interne compaiono a coppie di forze con vettori uguali ed opposti, per cui i loro vettori risultanti sono nulli: $\vec{F}_i = 0, \vec{\Phi}_i = 0$. Allora dalla (1.6) segue immediatamente la (1.2). Per dimostrare la seconda condizione necessaria, consideriamo un polo

$O \in \mathbb{R}^3$ e moltiplicando vettorialmente per $(O - P_s)$ la (1.4) e sommando su s si ha:

$$\vec{\Omega}_e(O) + \vec{\Omega}_i(O) + \vec{\Psi}_e(O) + \vec{\Psi}_i(O) = 0 \quad (1.7)$$

dove $\vec{\Omega}_e(O), \vec{\Omega}_i(O), \vec{\Psi}_e(O), \vec{\Psi}_i(O)$ indicano i momenti risultanti delle forze attive esterne, interne e delle reazioni vincolari esterne e interne rispettivamente. Ancora per il principio di azione e reazione, i momenti risultanti delle forze attive interne e delle reazioni vincolari interne, sono nulli, per cui le (1.7) da subito la (1.3). \square

E' possibile dimostrare che per un corpo rigido le (1.2), (1.3) sono anche condizioni sufficienti. Si ha dunque questo importante risultato

Teorema 1.13. *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo rigido è che siano soddisfatte le seguenti condizioni*

$$\begin{cases} \vec{F}_e + \vec{\Phi}_e = 0 \\ \vec{\Omega}_e(O) + \vec{\Psi}_e(O) = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

$\forall O \in \mathbb{R}^3$ dette *equazioni cardinali della statica del corpo rigido*.

Capitolo 2

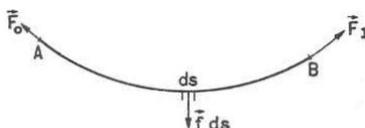
Fili flessibili e inestensibili

2.1 Condizioni per l'equilibrio

Definizione 2.1. Con fili *flessebili* e *inestensibili* si intendono sistemi materiali tali che:

- sia possibile, esercitando opportune forze, disporre il filo secondo una linea geometrica qualsiasi;
- presi due punti qualsiasi sul filo, l'arco fra essi compreso conservi in ogni possibile configurazione la stessa lunghezza.

Tratteremo i fili schematizzandoli mediante delle curve. Supponiamo che le forze agenti sul filo siano distribuite, cioè che su ogni elemento infinitesimo ds del filo agisca una forza $\vec{f}ds$ proporzionale alla lunghezza dell'elemento. Inoltre ipotizziamo che gli estremi del filo siano soggetti a forze finite (\vec{F}_0, A) , (\vec{F}_1, B) . Infine introduciamo un sistema di riferimento intrinseco $M = M(s)$ che ad ogni punto M del filo faccia corrispondere la lunghezza s del tratto di filo compreso tra A e M .

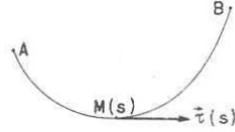


Per ricercare le condizioni necessarie per l'equilibrio ammettiamo il seguente

Postulato 2.2. Ad ogni $M = M(s)$ del filo corrisponde uno e un solo vettore $\vec{\tau}(s)$ tale che, se il filo è in equilibrio e viene tagliato in M , applicando in M $\vec{\tau}(s)$ il tratto AM rimane in equilibrio.

Definizione 2.3. $\vec{\tau}(s)$ è la *tensione* del filo nel punto $M(s)$.

Osservazione 2.4. La tensione, rappresenta l'azione del tratto MB del filo sul tratto AM .



Se il filo è in equilibrio, anche i tratti AM e MB lo saranno; quindi applicando l'equazione cardinale della statica (1.2) ad AM e a MB e assumendo che la lunghezza del filo sia l , si ha:

$$\vec{F}_0 + \int_0^s \vec{f} ds + \vec{\tau}(s) = 0 \quad (2.1)$$

$$\vec{F}_1 + \int_s^l \vec{f} ds + \vec{\tau}'(s) = 0, \quad (2.2)$$

$\forall s \in [0, l]$. Applicando le (2.1) e (2.2) a $s = 0$ e $s = l$ si ottengono le **condizioni ai limiti**:

$$\vec{F}_0 + \vec{\tau}(0) = 0 \quad \vec{F}_1 + \vec{\tau}'(l) = 0 \quad (2.3)$$

Osservazione 2.5. In accordo con il principio di azione e reazione, vale

$$\vec{\tau}(s) = -\vec{\tau}'(s)$$

come si vede facilmente sommando (2.1) e (2.2) e osservando che la risultante delle forze agenti sul filo deve essere nulla per l'ipotesi di equilibrio.

Derivando la (2.1) rispetto ad s , otteniamo l'**equazione indefinita dell'equilibrio**:

$$\vec{f} + \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \quad \forall s \in [0, l]. \quad (2.4)$$

Consideriamo adesso il momento risultante delle forze applicate al tratto AM :

$$\vec{F}_0 \times (O - A) + \int_0^s \vec{f} \times (O - P) ds + \vec{\tau}(s) \times (O - M) = 0$$

dove P rappresenta un generico punto del tratto AM di filo. Derivando rispetto ad s otteniamo

$$\vec{f} \times (O - M) + \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times (O - M) + \vec{\tau}(s) \times \frac{dM}{ds} = 0,$$

e utilizzando la (2.4) si ha

$$\vec{\tau}(s) \times \frac{dM}{ds} = 0. \quad (2.5)$$

Essendo $\frac{dM}{ds} = \vec{t}$ il versore tangente al filo nel punto M , la (2.5) implica che $\vec{\tau}(s)$ è parallelo a \vec{t} , per cui si avrà

$$\vec{\tau}(s) = \tau(s)\vec{t}$$

cioè la tensione è sempre parallela alla tangente al filo in M .

In particolare ammetteremo come postulato che $\vec{\tau}(s)$ abbia il verso degli archi crescenti, cioè

$$\tau(s) > 0. \quad (2.6)$$

Ciò è giustificato dal fatto che se fosse $\tau(s) < 0$, la tensione sarebbe orientata verso l'interno del tratto di filo, comprimendolo e non consentendo l'equilibrio. Per maggiori dettagli si veda [1].

Osservazione 2.6. Le condizioni (2.3), (2.4), (2.6) sono necessarie per l'equilibrio, ma poichè assicurano che se un filo è inizialmente in quiete mantiene tale configurazione, sono anche sufficienti.

Possiamo quindi riassumere quanto ottenuto nel seguente

Teorema 2.7. *Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio del filo è che siano soddisfatte le seguenti condizioni*

$$\begin{cases} \vec{F}_0 + \vec{\tau}(0) = 0 \\ \vec{F}_1 + \vec{\tau}(l) = 0 \\ \vec{f} + \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 & \forall s \in [0, l] \\ \tau(s) > 0, & \forall s \in [0, l] \end{cases} \quad (2.7)$$

2.2 Problemi fondamentali

Nello studio dell'equilibrio dei fili riscontriamo tre problemi principali:

1. data la forma assunta dal filo ed il sistema di forze ad esso applicato, stabilire se il filo è in equilibrio;
2. nota la configurazione di un filo, determinare le forze che lo mantengono in equilibrio;
3. date le forze che agiscono sul filo, determinare la configurazione di equilibrio.

2.2.1 Problema 1

Per analizzare il *primo* tra questi, consideriamo un punto M e i versori \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} rispettivamente tangente, normale e binormale al filo nel punto considerato. Derivando $\vec{\tau}(s) = \tau(s)\vec{t}$, si ottiene:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d(\tau\vec{t})}{ds} = \frac{d\tau}{ds}\vec{t} + \tau\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\tau}{ds}\vec{t} + \frac{\tau}{\rho}\vec{n}$$

con ρ raggio di curvatura del filo in M.

Allora se f_t, f_n, f_b sono le componenti lungo le direzioni definite dal triedro $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ della forza distribuita applicata in M, dalla (2.4) ricaviamo le **equazioni intrinseche dell'equilibrio dei fili**:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} + f_t = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} + f_n = 0 \\ f_b = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

L'ultima equazione ci dice che per l'equilibrio è necessario che la forza distribuita giaccia sul piano osculatore al filo in M. Ricavando τ dalla seconda equazione, si ha:

$$\tau = -\rho f_n$$

e sostituendolo nella prima, otteniamo

$$-\frac{d(\rho f_n)}{ds} + f_t = 0,$$

la quale deve essere soddisfatta affinché sia verificata l'equazione indefinita dell'equilibrio.

Osservazione 2.8. Dovendo essere $\tau > 0$, da $\tau = -\rho f_n$ segue che f_n deve avere orientazione opposta rispetto al centro di curvatura.

2.2.2 Problema 2

Se α è l'angolo formato dalla forza \vec{f} con \vec{t} , allora

$$f_t = f \cos \alpha$$

$$f_n = -f \sin \alpha$$

e le prime due equazioni in (2.8) divengono

$$\frac{d\tau}{ds} + f \cos \alpha = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\tau}{\rho} - f \sin \alpha = 0 \quad (2.10)$$

Ricavando τ da (2.10) e sostituendo in (2.9), otteniamo l'equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{d}{ds}(\rho f \sin \alpha) + f \cos \alpha = 0$$

la cui soluzione fornisce

$$f = \frac{e^{-\int \frac{\cot \alpha}{\rho} ds + C}}{\rho \sin \alpha}$$

e conseguentemente τ dalla relazione

$$\tau = \rho f \sin \alpha$$

Infine utilizziamo le condizioni ai limiti per ricavare \vec{F}_0 e \vec{F}_l .

2.2.3 Problema 3

Per discutere il *terzo problema*, introduciamo un riferimento cartesiano O, x, y, z . Siano

$$\vec{f} = (X, Y, Z), \quad \vec{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right)$$

e infine siano

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

le equazioni parametriche incognite della curva.

Proiettando l'equazione indefinita dell'equilibrio sugli assi, si ottiene

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}(\tau \frac{dx}{ds}) + X = 0 \\ \frac{d}{ds}(\tau \frac{dy}{ds}) + Y = 0 \\ \frac{d}{ds}(\tau \frac{dz}{ds}) + Z = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

e osservando che \vec{t} è un versore, si ha l'ulteriore condizione

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1. \quad (2.12)$$

La risoluzione del problema in questione, si riduce quindi a quella del sistema costituito dalle quattro equazioni appena trovate. In particolare si tratta di quattro equazioni differenziali nelle quattro incognite $x(s), y(s), z(s), \tau(s)$. L'integrale generale di tale sistema dipende da sei costanti arbitrarie, le quali saranno determinate mediante opportune sostituzioni, in base alla conoscenza delle coordinate degli estremi del filo A e B , qualora questi siano fissati, oppure in termini delle forze \vec{F}_0, \vec{F}_1 ad essi applicate.

2.3 Filo soggetto a forze parallele

Analizziamo il comportamento di un filo soggetto a forze distribuite parallele tra loro. Supponendo tali forze parallele all'asse z , le prime due equazioni in (2.11) diventano

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dy}{ds} \right) = 0 \quad (2.13)$$

da cui integrando

$$\tau \frac{dx}{ds} = C_1 \quad \tau \frac{dy}{ds} = C_2 \quad (2.14)$$

con C_1, C_2 costanti.

Il coefficiente angolare della proiezione sul piano xy della curva che rappresenta il filo, risulta quindi costante

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_2}{C_1}.$$

Questo ci permette di concludere che la proiezione consiste in una retta e in particolare che la curva è piana essendo interamente contenuta in un piano normale a xy . Tale situazione si verifica, ad esempio, se la forza distribuita di cui sopra, è il peso del filo.

Vogliamo determinare la configurazione di equilibrio in questo caso particolare.

2.3.1 Caso omogeneo

Consideriamo dapprima il caso in cui il filo sia omogeneo.

Si ha:

$$\vec{f}ds = -\mu\vec{k}ds$$

con μ peso specifico del filo, e \vec{k} versore diretto come l'asse z . Se scegliamo per semplicità xz come il piano sul quale giace la curva, la (2.13) si riduce a

$$\tau \frac{dx}{ds} = C_1$$

essendo $\frac{dy}{ds} = 0$.

Osservazione 2.9. Orientando opportunamente il sistema di riferimento è possibile assumere la costante C_1 positiva.

Raccogliendo i risultati ottenuti fino ad ora, si ha

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = \mu > 0 \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1. \quad (2.16)$$

Riscrivendo la (2.15) sostituendo τ , si ottiene

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dz}{dx} \right) = \frac{\mu}{C_1} := \frac{1}{b} \quad (2.17)$$

mentre ricavando ds da (2.16), si ha

$$ds = dx\sqrt{1+z'^2} \quad (2.18)$$

con $z' = \frac{dz}{dx}$. Quindi combinando (2.17) e (2.18) si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} \frac{dz'}{dx} = \frac{1}{b}$$

ossia

$$\frac{dz'}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{1}{b} dx. \quad (2.19)$$

Integrando quest'ultima equazione si ottiene

$$\ln(\sqrt{1+z'^2} + z') = \frac{x}{b} + \ln k$$

con k costante, da cui

$$\sqrt{1 + z'^2} + z' = ke^{\frac{x}{b}}$$

ed elevando al quadrato

$$z' = \frac{1}{2} \left(ke^{\frac{x}{b}} - \frac{1}{k} e^{-\frac{x}{b}} \right). \quad (2.20)$$

Prendiamo l'origine delle coordinate nel punto di minimo della curva $z = z(x)$, imponiamo cioè che per $x = 0$ si abbia $z' = 0$ e $z'' > 0$. Si ottiene allora

$$0 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{1}{k} \right),$$

ossia

$$k^2 = 1$$

cioè

$$k = \pm 1.$$

Per $k = -1$ si ha $z''(0) < 0$. Quindi deve essere $k = 1$. La (2.20) diventa allora

$$z' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}} \right)$$

che integrata fornisce

$$z(x) = \frac{b}{2} \left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) + k_1.$$

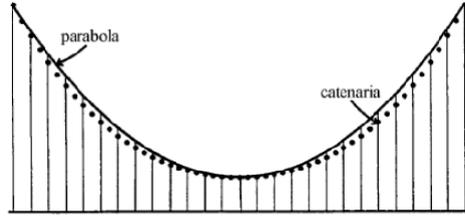
Prendendo $z(0) = 0$ si ottiene $k_1 = -b$, e quindi

$$z(x) = \frac{b}{2} \left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}} \right) - b$$

Questa curva, determinata per la prima volta da Huyghens, è detta **catenaria omogenea**.

Per x positivo e sufficientemente grande rispetto a b , il termine $e^{-\frac{x}{b}}$ risulta trascurabile rispetto a $e^{\frac{x}{b}}$, quindi la catenaria approssima un esponenziale crescente; per x negativo e grande in valore assoluto rispetto a b , il termine $e^{\frac{x}{b}}$ risulta trascurabile rispetto a $e^{-\frac{x}{b}}$, quindi la catenaria approssima un esponenziale decrescente; infine per x piccolo rispetto a b , ovvero per valori di x prossimi al minimo della curva, la catenaria approssima una parabola; infatti sviluppando in serie di Taylor si ha:

$$z = \frac{b}{2} \left(1 + \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} + \frac{x^3}{6b^3} + \dots + 1 - \frac{x}{b} + \frac{x^2}{2b^2} - \frac{x^3}{6b^3} + \dots \right) - b = \frac{x^2}{2b} \cong \frac{x^2}{2b}.$$



2.3.2 Caso non omogeneo

Supponiamo adesso il filo non omogeneo e in particolare tale che la densità di un suo elemento infinitesimo sia proporzionale alla sua proiezione orizzontale dx invece che alla lunghezza ds dell'elemento stesso. Se p è una costante si ha

$$\vec{f}ds = -pdx\vec{k}$$

da cui

$$Z = -p\frac{dx}{ds}.$$

La terza di (2.11) diventa

$$\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dz}{ds}\right) = p\frac{dx}{ds}$$

e integrando ambo i membri

$$\tau\frac{dz}{ds} = px + C_0, \quad (2.21)$$

con C_0 costante arbitraria.

A questo punto, procedendo similmente a quanto fatto nel caso omogeneo, sostituiamo nella (2.21) il valore di τ , ottenuto dalla relazione nota $\tau\frac{dx}{ds} = C_1$. Abbiamo quindi

$$C_1\frac{dz}{dx} = px + C_0.$$

Integrando otteniamo la seguente parabola

$$z = \frac{p}{2C_1}x^2 + \frac{C_0}{C_1}x + C_2,$$

detta **catenaria dei ponti pensili**.

2.4 Filo adagiato su una superficie



Fino ad ora abbiamo ricercato le condizioni di equilibrio di fili non soggetti a vincoli. Il nuovo obiettivo sarà quello di determinare tali condizioni nel caso in cui il filo sia poggiato su una superficie di equazione nota $\varphi(x, y, z) = 0$. Se $\vec{w}'ds$ è la reazione vincolare dell'appoggio su un elemento generico del filo, per il *postulato sulle reazioni vincolari*, potremo considerare libero il filo, modificando l'equazione indefinita dell'equilibrio, la quale diventa

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} + \vec{f} + \vec{w}' = 0. \quad (2.22)$$

Analizzeremo di seguito il caso interessante di un filo non soggetto a forze distribuite. La nuova equazione indefinita dell'equilibrio si riduce quindi a

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} + \vec{w}' = 0.$$

Se assumiamo che vi sia attrito, \vec{w}' avrà rispetto alla superficie due componenti:

-la componente tangente w_t in verso opposto a \vec{t} (se si suppone l'eventuale moto del filo nel verso degli archi crescenti);

-la componente normale w orientata dalla superficie verso il filo;

Inoltre, posto ε il coefficiente di attrito, se $|w_t|$ massima, per le leggi dell'attrito (si veda [1] per approfondimenti a tale proposito), risulta $|w_t| = \varepsilon w$. Indicando con α, β, γ gli angoli tra la normale \vec{v} alla superficie e il triedro $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$, dall'equazione indefinita dell'equilibrio, si ha

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} - \varepsilon w = 0 \\ \frac{\tau}{\rho} + w \cos \beta = 0 \\ w \cos \gamma = 0 \end{cases}$$

Per $w = 0$, dalla seconda equazione segue che deve essere $\frac{\tau}{\rho} = 0$ e deduciamo che il filo si dispone lungo una retta. Per $w \neq 0$ invece, la terza equazione è soddisfatta solo se $\cos \gamma = 0$, cioè se $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Questo ci dice che affinché sia soddisfatta, la binormale deve essere tangente alla superficie, o ancora, il piano osculatore al filo, normale alla superficie; tale proprietà è soddisfatta

dalle **geodetiche**. Ad esempio nella sfera le geodetiche corrispondono ai cerchi massimi, nel cilindro alle eliche.

Esempio 1. Consideriamo il caso del cilindro, cioè un filo avvolto secondo un'elica.

In questo caso l'angolo tra \vec{n} e \vec{v} è $\beta = \pi$, quindi risulta

$$\frac{d\tau}{ds} = \varepsilon \frac{\tau}{\rho}. \quad (2.23)$$

A questo punto, se $d\theta$ è l'angolo tra due tangenti infinitamente vicine, possiamo esprimere il raggio di curvatura come $\rho = \frac{ds}{d\theta}$, che sostituito nella relazione precedente ci dà

$$\frac{d\tau}{ds} - \varepsilon \tau \frac{d\theta}{ds} = 0.$$

Integrando opportunamente risulta

$$\log \tau = \varepsilon \theta + \log c$$

con c costante arbitraria e infine

$$\tau = ce^{\varepsilon\theta}$$

Per determinare c , basta confrontare tale risultato con le condizioni ai limiti. Infatti per $\theta = 0$ si ha $s = 0$ e τ si riduce a $\tau(0)$ che coincide con il modulo della forza applicata in A. Quindi $c = F_0$. Se poi α è l'angolo di cui deve ruotare la tangente in A per raggiungere B, ponendo α in θ , τ assume il valore $\tau(l)$ ossia il modulo della forza applicata in B. Quindi sarà

$$F_1 = F_0 e^{\varepsilon\alpha}.$$

La formula appena ricavata, sottolinea che i moduli delle forze applicate agli estremi non sono uguali e in particolare essendo $e^{\varepsilon\alpha} > 1$, risulta $F_1 > F_0$.

Se la corda è avvolta in n spire sul cilindro, allora $\alpha = 2\pi n$ e di conseguenza risulta

$$F_1 = F_0 e^{2\pi n \varepsilon}.$$

Le tensioni che determinano l'equilibrio possono essere molto diverse; il loro rapporto deve essere inferiore a un coefficiente che cresce esponenzialmente con l'aumentare delle spire attorno al cilindro. Dunque basta un numero di spire relativamente piccolo attorno al cilindro, per equilibrare una grande tensione F_1 applicata a un estremo del filo, con una piccola tensione all'altro estremo. Questo ci fa capire ad esempio, perchè sia possibile ormeggiare con facilità una nave di notevoli dimensioni, utilizzando una fune sufficientemente robusta e avvolta un numero adeguato di volte.

Eliminando l'ipotesi di attrito, quindi assumendo liscia la superficie di appoggio, τ risulta costante, cioè $\tau(0) = \tau(l)$ e dal confronto con le condizioni ai limiti ne deriva l'uguaglianza tra i moduli delle forze applicate agli estremi del filo.

Capitolo 3

Sistemi articolati

3.1 Generalità

Definizione 3.1. *Si chiama **sistema articolato** ogni sistema di aste rigide collegate tra loro agli estremi mediante cerniere dette nodi.*

Tratteremo tali sistemi, assimilando le aste a segmenti rettilinei e i nodi a punti materiali.

Definizione 3.2. *Si definiscono sistemi semplicemente connessi quei sistemi la cui configurazione è data da una poligonale semplice aperta, tale che non sia possibile sopprimere un'asta mantenendo la connessione del sistema.*

Definizione 3.3. *Si definiscono sistemi moltiplicemente connessi quei sistemi nei quali è possibile sopprimere almeno un'asta mantenendo la connessione; la configurazione è rappresentata quindi da un poligono semplice.*

Per stabilire le condizioni di equilibrio di un sistema articolato, è necessario determinare:

- le condizioni che garantiscono l'equilibrio di ogni asta AB soggetta a forze esterne ad essa applicate e alle due reazioni $\vec{\Phi}_A, \vec{\Phi}_B$ (*sforzi*) provenienti dal collegamento con i nodi A e B;
- le condizioni secondo le quali la risultante delle forze direttamente applicate ad ogni nodo A e delle azioni $\vec{\Psi}_{BA}, \vec{\Psi}_{CA} \dots$ che il nodo risente dalle varie aste, è nulla.

Fra le possibili sollecitazioni esterne di un sistema articolato, consideriamo quelle in cui le forze attive sono esclusivamente applicate ai nodi.

Osservazione 3.4. In questo caso ogni singola asta AB è soggetta solo all'azione dei due sforzi che essa subisce agli estremi dai nodi A e B, quindi le condizioni di equilibrio che riguardano le singole aste esprimono semplicemente che i due sforzi, dovendosi equilibrare, devono essere opposti.

Definizione 3.5. *Se gli sforzi sono entrambi diretti verso l'interno di un'asta essi vengono detti pressioni, e l'asta che deve resistere a una compressione è nota come puntone. In caso contrario, gli sforzi si dicono tensioni, mentre l'asta che deve resistere alla trazione è detta tirante.*

L'importanza delle sollecitazioni puramente nodali è legata alle applicazioni concrete. Infatti, anche se le aste sono sempre soggette al proprio peso, questo in molte situazioni risulta trascurabile se confrontato con le forze direttamente applicate ai nodi.

A tale proposito consideriamo il seguente

Teorema 3.6. *Per ogni sollecitazione Σ di un sistema articolato, si può sempre definire una sollecitazione puramente nodale Σ^* , tale che le condizioni di equilibrio del sistema soggetto alla sollecitazione Σ^* , coincidano con quelle dello stesso sistema soggetto a Σ .*

3.2 Sistemi articolati semplicemente connessi

Definizione 3.7. *Si chiama poligono funicolare, la configurazione di equilibrio dei sistemi articolati.*

Tra i diversi sistemi articolati, analizzeremo quelli semplicemente connessi, con l'obiettivo di determinare le equazioni dell'equilibrio, quindi il poligono funicolare. In particolare opereremo in modo analogo a quanto fatto nel caso dei fili flessibili e inestensibili. Per quanto si è detto, possiamo limitarci a considerare sollecitazioni puramente nodali. Siano allora P_1, P_2, \dots, P_n i nodi del sistema e $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ le rispettive forze applicate. Inoltre semplifichiamo la notazione precedentemente adottata, riferita agli sforzi: indicando con $\vec{\Phi}_{i+1,i}$ e $\vec{\Phi}_{i,i+1}$ gli sforzi che una generica asta $P_i P_{i+1}$ risente rispettivamente negli estremi P_i e P_{i+1} , si ottiene

$$\vec{\Phi}_{i+1,i} = -\vec{\Phi}_{i,i+1}.$$

Poichè su ciascun nodo intermedio $P_i, \forall i = 2, \dots, n-1$, agiscono tre forze, ossia quella direttamente applicata \vec{F}_i e $\vec{\Phi}_{i,i-1} = -\vec{\Phi}_{i-1,i}$ e $\vec{\Phi}_{i,i+1}$, dovute alle due aste ad esso collegate, si hanno le **equazioni indefinite dell'equilibrio**:

$$\vec{F}_i - \vec{\Phi}_{i-1,i} + \vec{\Phi}_{i,i+1} = 0 \quad (3.1)$$

Invece per $i = 1, n - 1$, cioè per i nodi estremi, si deve avere:

$$\vec{F}_1 + \vec{\Phi}_{1,2} = 0 \quad , \quad \vec{F}_n - \vec{\Phi}_{n-1,n} = 0 \quad (3.2)$$

Sono proprio queste ultime le **condizioni ai limiti** relative ai sistemi articolati.

Osservazione 3.8. Le (3.1),(3.2) rappresentano le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

E' chiaro che affinché l'equilibrio del sistema sia possibile, le *equazioni cardinali della statica* devono essere soddisfatte; quindi la risultante delle forze applicate deve essere nulla. Sommando (3.1) e (3.2) e tenendo conto della relazione che caratterizza gli sforzi, si ottiene:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0.$$

Più precisamente vale il seguente

Teorema 3.9. *Perchè un sistema articolato semplicemente connesso sia in equilibrio è necessario e sufficiente che la risultante delle forze esterne applicate sia nulla e che inoltre sia nullo, per ogni singolo nodo, il momento risultante delle forze applicate.*

La condizione che la risultante delle forze sia nulla, si traduce nel fatto che se a partire da un generico punto Q_1 , si prendono n vettori applicati consecutivi ed equipollenti ad $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ si ottiene un poligono chiuso Q_1, Q_2, \dots, Q_n noto come *poligono delle forze* o *del Varignon*. In altri termini se partendo da un punto fissato Q_1 , si prendono $n - 1$ punti Q_2, \dots, Q_n definiti come:

$$Q_2 - Q_1 = \vec{F}_1, \dots, Q_n - Q_{n-1} = \vec{F}_{n-1}$$

allora vale

$$Q_1 - Q_n = \vec{F}_n.$$

La proposizione che segue esprime un'importante proprietà.

Proposizione 3.10. *Nel poligono delle forze Q_1, Q_2, \dots, Q_n associato ad un poligono funicolare P_1, P_2, \dots, P_n , i lati e le diagonali Q_2Q_1, \dots, Q_nQ_1 orientati verso Q_1 sono ordinatamente equipollenti agli sforzi $\Phi_{1,2}, \dots, \Phi_{n-1,n}$.*

Dimostrazione. Consideriamo dapprima Q_2Q_1 . Per la costruzione del poligono delle forze, $Q_2Q_1 = -Q_1Q_2$ è equipollente a $-\vec{F}_1$. Inoltre, da (3.2) segue $-\vec{F}_1 = \Phi_{1,2}$. Facciamo vedere che la proposizione è vera anche per Q_3Q_1 . Consideriamo (3.1) per $i = 2$, cioè

$$\vec{F}_2 = -\Phi_{1,2} + \Phi_{2,3} = 0$$

e riscriviamola considerando la costruzione del poligono delle forze. Otteniamo

$$(Q_3 - Q_2) - (Q_1 - Q_2) + \Phi_{2,3} = 0$$

cioè

$$\Phi_{2,3} = Q_1 - Q_3.$$

Procedendo in modo analogo per tutti gli altri Q_iQ_1 si ha la tesi. \square

In particolare vale anche il viceversa.

Proposizione 3.11. *Se ad una poligonale P_1, P_2, \dots, P_n si può associare un poligono chiuso $Q_1Q_2\dots Q_n$ tale che le rette Q_2Q_1, \dots, Q_nQ_1 dei lati e delle diagonali in Q_1 risultino ordinatamente parallele a $P_1P_2\dots P_{n-1}P_n$, allora P_1, P_2, \dots, P_n è un poligono funicolare di cui Q_1, Q_2, \dots, Q_n è il poligono delle forze.*

Per la dimostrazione si veda [2].

Vediamo adesso come applicare le proprietà appena enunciate.

3.2.1 Sistema con un estremo fissato

Consideriamo un sistema articolato $P_1P_2\dots P_n$ tale che l'estremo P_1 sia fissato e avente gli $n - 1$ nodi rimanenti liberi e soggetti alle forze $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$.

Vogliamo determinare il poligono funicolare e la reazione di attacco nell'estremo P_1 .

Costruiamo il poligono delle forze, conducendo a partire da un punto Q_2 i vettori applicati Q_2Q_3, \dots, Q_nQ_1 .

Il vettore di chiusura Q_nQ_1 rappresenta la reazione di attacco \vec{F}_1 . Dalle proposizioni precedenti sappiamo che i lati del poligono funicolare devono risultare paralleli a Q_2Q_1, \dots, Q_nQ_1 . Quindi basta dirigere, partendo da P_1 fisso per ipotesi, la prima asta P_1P_2 parallelamente a Q_2Q_1 determinando così P_2 . A questo punto si procede in modo analogo per tutte le aste fino ad ottenere la posizione dell'ultimo nodo libero, cioè dell'estremo P_n del sistema.

3.2.2 Sistema con estremi fissati: forze parallele

Premettiamo la seguente

Proposizione 3.12. *Indipendentemente dalla condizione che gli estremi siano fissati, quando le forze direttamente applicate ai nodi sono parallele, il poligono funicolare è piano.*

Dimostrazione. Basta osservare che in tal caso i lati del poligono delle forze seguono disponendosi lungo una retta; questo fa sì che qualunque sia la posizione di Q_1 , i vettori applicati Q_2Q_1, \dots, Q_nQ_1 risultano complanari, e tali saranno i lati del poligono funicolare dovendo essere paralleli ad essi. \square

Supponiamo fissati gli estremi P_1, P_n del sistema e siano $\vec{F}_2, \dots, \vec{F}_{n-1}$ forze parallele applicate agli $n - 2$ nodi rimanenti. Anche in questo caso l'obiettivo è quello di determinare il poligono funicolare. Come nel caso dei fili flessibili e inestensibili assumiamo che le forze parallele prese in esame siano i pesi, e indichiamo con p_2, p_3, \dots, p_{n-1} le loro intensità. Per la proposizione (3.12), possiamo considerare il piano passante per P_1 e P_2 su cui giace il poligono funicolare. Qui, poniamo un sistema di riferimento Oxy e indichiamo con $(x_1, y_1), (x_n, y_n)$ le coordinate di P_1, P_n e con l_1, l_2, \dots, l_{n-1} le lunghezze delle aste.

Per determinare le condizioni di equilibrio del sistema dobbiamo innanzitutto determinare gli angoli $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ che le aste formano con l'asse x . Consideriamo quindi la (3.1) che, nel caso considerato, consiste di $2(n - 2)$ equazioni scalari tra le componenti orizzontali e verticali. Ma poichè le componenti orizzontali delle forze applicate sono nulle, proiettando sull'asse x si deduce che i vari sforzi $\vec{\Phi}_{1,2}, \dots, \vec{\Phi}_{n-1,n}$, hanno tutti la stessa componente orizzontale che indicheremo con φ . Alle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ si aggiunge quindi il valore di φ .

Illustriamo ora il procedimento per determinare tali incognite. Possiamo considerare $\varphi \neq 0$ perchè se uno degli sforzi si annulla, viene meno la connessione nel nodo corrispondente mantenendo tuttavia l'equilibrio. Quindi il problema riguarderebbe sistemi moltiplicemente connessi.

A questo punto possiamo esprimere le componenti verticali delle forze in funzione di φ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ come segue:

$$\varphi \tan \alpha_1, \varphi \tan \alpha_2, \dots, \varphi \tan \alpha_{n-1}.$$

Dalla (3.1) si ha:

$$p_i + \varphi \tan \alpha_{i-1} - \varphi \tan \alpha_i = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n - 1. \quad (3.3)$$

Inoltre proiettando il poligono funicolare sui due assi coordinanti, si ottiene:

$$\begin{cases} x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i \cos \alpha_i \\ y_n = y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} l_i \sin \alpha_i \end{cases} \quad (3.4)$$

Le (3.3),(3.4) costituiscono un sistema di n equazioni nelle n incognite $\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$. Per risolverlo poniamo

$$\tan \alpha_1 = \frac{\phi}{\varphi},$$

il che è certamente lecito avendo supposto $\varphi \neq 0$. Con ciò si ha dalle (3.3) (sommando dall'indice 2 fino ad un indice generico i e sopprimendo i termini comuni ad ambo i membri)

$$\tan \alpha_i = \frac{\phi + \sum_j p_j}{\varphi} \quad \forall i = 2, \dots, n-1. \quad (3.5)$$

La tangente di ogni α_i , avendo posto $\tan \alpha_1 = \frac{\phi}{\varphi}$, e per le (3.5), si trova espressa per ϕ e φ . Ricavando $\cos \alpha_i, \sin \alpha_i$ e sostituendo nelle (3.4), si hanno due equazioni algebriche fra ϕ e φ atte a determinarle. Resta così determinato il procedimento per la determinazione delle incognite $\varphi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ e quindi delle condizioni per l'equilibrio del sistema.

Osservazione 3.13. Tuttavia si deve avvertire che l'effettiva determinazione di ϕ e φ secondo la procedura illustrata, risulta in generale piuttosto complicata. Per $n = 3$, la posizione di P_2 rimane individuata essendo date le lunghezze P_1P_2, P_3P_2 ; ma già per $n = 4$ le equazioni in ϕ e φ presentano un grado discretamente elevato.

Bibliografia

[1] D. Graffi *Elementi di meccanica razionale* Patron 1982

[2] T.L Civita - U. Amaldi *Lezioni di meccanica razionale (Vol. I)*. Zanichelli
1923

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il mio relatore, la professoressa Emanuela Caliceti per la grande disponibilità mostrata nei miei confronti. La sua passione e la sua dedizione sono stati elementi indispensabili nel percorso di realizzazione di questo lavoro di tesi.

Ringrazio i miei genitori, i quali sostenendomi da sempre economicamente e moralmente, mi hanno garantito l'opportunità di raggiungere un obiettivo così importante per la mia crescita culturale e per la mia formazione professionale.

Un ringraziamento particolare va al mio ragazzo, Nunzio De Grandis, la persona che più di chiunque altra mi è rimasta accanto negli ultimi tre anni. Mi ha incoraggiata e motivata nei momenti più difficili condividendo con me le ansie e le preoccupazioni che hanno preceduto ogni esame. Mi ha sostenuta non solo moralmente ma anche trascorrendo numerosi pomeriggi "subendo la matematica". Grazie di cuore!