Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Sistemi ortonormali negli spazi di Hilbert

Tesi di Laurea in Istituzioni di Analisi Superiore

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Presentata da:
Lucia Collinelli

III Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Indice

Introduzione

Questo elaborato si pone come obiettivo lo studio sistemi ortonormali negli spazi di Hilbert.
Dopo la definizione di sistema ortonormale corredata da alcuni esempi e la dimostrazione di alcune semplici proprietà, passerò alla definizione di coefficienti di Fourier e sistema ortonormale massimale e alla dimostrazione di alcuni importanti teoremi: la disuguaglianza di Bessel e il teorema di Riesz-Fischer. Quest'ultimo insieme alla identità di Parceval porterà alla dimostrazione dell'isomorfismo fra H spazio di Hilbert e ℓ^2. E' inoltre interessante notare come nel corso della dimostrazione si utilizzi il teorema di massimalità di Hausdorff, un teorema di fatto equivalente all'assioma della scelta.
Il secondo capitolo presenta un esempio concreto di sistema ortonormale massimale : il cosiddetto sistema trigonometrico. Di questo si dimostrerà la massimalità o completezza e si riformuleranno concretamente la definizione di coefficienti di Fourier e sopratutto il teorema di Riesz-Fischer e l'identità di Parceval.

Capitolo 1

Insiemi ortonormali

1.1 Richiami

Definizione 1.1. Sia V spazio vettoriale complesso. Un *prodotto interno* su H è un'applicazione

$$\langle . \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$$

tale che:

1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

2. $\langle x, x \rangle \geq 0 \forall x \ \in V$ e $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $x \to \langle x, y \rangle$ lineare $\forall y \in V$, cioè $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ con $x, y \in V$ e α scalare e $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$ con $x, y, z \in V$.

Elenchiamo alcune conseguenze della definizione:

- La 3. implica che $\langle 0, y \rangle = 0$ per tutti gli $y \in V$.

- La 1. e la 3. implicano che $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$ e $\langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle$.

Definizione 1.2. Sia H uno spazio vettoriale complesso con prodotto interno. Si definisce la norma $\|x\|$ nel seguente modo

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Definizione 1.3. Sia V uno spazio vettoriale con prodotto interno $\langle , \rangle$. Due vettori $x, y \in V$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$. Si scrive $x \perp y (y \perp x)$.

Osservazioni.
Ovviamente $x \perp 0 \ \forall \ x \in V$.
Se $x \perp y$ allora vale

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle y,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definizione 1.4. Sia H spazio vettoriale, sia definito su H un prodotto interno; H si dice *spazio di Hilbert* se è completo rispetto alla norma definita da tale prodotto interno.

Esempi.

1. Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare euclideo
$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$$
con $a = (a_1, a_2, ...a_n), b = (b_1, b_2, ...b_n) \in \mathbb{R}^n$

2. Lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ è uno spazio di Hilbert con la forma hermitiana standard
$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \overline{b_j}$$
con $a = (a_1, a_2, ...a_n), b = (b_1, b_2, ...b_n) \in \mathbb{C}^n$

3. Sia (X, S, μ) uno spazio di misura. $L^2(X, \mu)$ è uno spazio di Hilbert dove il prodotto interno è dato da
$$\langle x, y \rangle = \int_X f \overline{g} d\mu$$
.

4. $\ell^2 = \left\{ (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto interno
$$\langle a_n, b_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

Teorema 1.1.1. *Sia M un sottospazio chiuso di H spazio di Hilbert. Esiste una e una sola coppia di applicazioni P e Q tali che P applichi H in M, Q applichi H in $M^{\perp}$ e $x = Px + Qx$ per ogni $x \in H$. Queste applicazioni hanno inoltre le seguenti proprietà:*

- *Se* $x \in M$, *risulta* $Px = x, Qx = 0$; *se* $x \in M^{\perp}$ *è* $Px = 0, Qx = x$
- $\|x - Px\| = inf\{\|x-y\| : y \in M\}$
- $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$
- P *e* Q *sono applicazioni lineari*

1.2 Insiemi ortonormali

Definizione 1.5. Sia H spazio di Hilbert e sia $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ insieme di vettori in H. L'insieme $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ è detto *ortonormale* se vale che $\langle u_\alpha, u_{\alpha'}\rangle = 0$ per ogni $\alpha, \alpha' \in A$ con $\alpha \neq \alpha'$ e $\|u_\alpha\| = 1$ per ogni $\alpha \in A$. Equivalentemente u_α è ortonormale se

$$\langle u_\alpha, u_{\alpha'}\rangle = \begin{cases} 1 \text{ se } \alpha = \alpha' \\ 0 \text{ se } \alpha \neq \alpha' \end{cases}$$

Esempi.

1. In $\mathbb{R}^n$ o in $\mathbb{C}^n$ un sistema ortonormale è $\{e_1, ..., e_n\}$ con $e_k = \overset{1,...k-1,k,k+1,...n}{(0, ...0, 1, 0, ...0)}$.
2. In ℓ^2 un sistema ortonormale è $\{e_1, ..., e_n, ...\}$ con $e_k = \left(\xi_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\xi_n^{(k)} = 0$ per ogni $n \neq k$ e $\xi_k^{(k)} = 1$.
3. Considero $L^2([0, 2\pi])$ col prodotto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$

L'insieme $\{f_0, f_1, ..., f_k, ...\}$ tale che

$$f_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$
$$f_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\, kt \;\; k = 1, 2, ... \;\forall t \in [0, 2\pi]$$

è un sistema ortonormale. Infatti

$$\langle f_m, f_n\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\, mt \cos\, nt\; dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\,(m+n)\,t\; dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\,(m-n)\,t\; dt$$

Se $m = n$ vale $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1$.
Se invece $m \neq n$ vale

$$\frac{1}{2\pi\,(m+n)}\left[\mathrm{sen}\,(m+n)\,t\right]_{t=0}^{t=2\pi} + \frac{1}{2\pi\,(m-n)}\left[\mathrm{sen}\,(m-n)\,t\right]_{t=0}^{t=2\pi} = 0$$

Teorema 1.2.1 (procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)**.** *Sia H uno spazio di Hilbert e $Y = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ un insieme finito o numerabile di vettori linearmente indipendenti. Allora esiste un sistema ortonormale E che ha la stessa cardinalità di Y e tale che i sottospazi generati da Y e da E coincidono.*

Dimostrazione. Anzitutto si ha $x_1 \neq 0$ altrimenti i vettori di Y non sarebbero linearmente indipendenti. Poniamo $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$, successivamente

$$e_2 = \frac{x_2 - \langle x_2, e_1\rangle\, e_1}{\|x_2 - \langle x_2, e_1\rangle\, e_1\|}$$

Si noti che poichè x_1 e x_2 sono linearmente indipendenti lo sono anche e_1 e x_2 per come ho definito e_1 e quindi è $\|x_2 - \langle x_2, e_1\rangle\, e_1\| \neq 0$.Continuo analogamente definendo $e_3, e_4, ...$ In generale sarà

$$e_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle x_{n+1}, e_k\rangle\, e_k}{\|x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}\langle x_{n+1}, e_k\rangle\, e_k\|}$$

E' chiaro che se Y è finito e costituito da n elementi, con questo procedimento si costruisce un insieme ortonormale E finito e costituito da n elementi e se Y è numerabile anche E è numerabile. Inoltre e_n è combinazione lineare di $x_1, x_2, ..., x_n$ e x_n è combinazione lineare di $e_1, e_2, ..., e_n$. Perciò i sottospazi generati da Y e da E coincidono e viceversa. □

Esempio.
Consideriamo lo spazio $L^2\left([-1,1]\right)$ con il prodotto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Sia $f_n = t^n\ \forall\, t \in [-1,1]\,, n = 0,1,2,....$ I vettoti $\{f_0, f_1, ..., f_n, ...\}$ sono linearmente indipendenti. Il sistema ortonormale che da esso si ricava attraverso il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt è $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ con

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ e_2(t) = \frac{t - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tau d\tau}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left[t - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\tau d\tau\right]^2 dt}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t, ... \qquad t \in [-1,1]$$

Le funzioni e_n si dicono polinomi di Legendre.

Teorema 1.2.2. *Siano* $u_1, ..., u_k$ *un insieme finito di vettori ortonormali in* H *spazio di Hilbert e sia* $x \in H$ *tale che* $x = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$ *allora*

$$c_i = \langle x, u_i \rangle \,, \ \textit{per } 1 \leq i \leq k$$

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2$$

Dimostrazione. Si ha per ipotesi che $x = c_1 u_1 + ... + c_i u_i + ... + c_k u_k$; considero $\langle x, u_i \rangle = \langle c_1 u_1 + ... + c_i u_i + ... + c_k u_k, u_i \rangle = c_1 \langle u_1, u_i \rangle + ... + c_i \langle u_i, u_i \rangle + ... + c_k \langle u_k, u_i \rangle$. Ora poichè $u_1, ..., u_k$ è un insieme ortonormale vale $\langle u_j, u_i \rangle = 0$ con $1 \leq j \leq k, j \neq i$ e $\langle u_i, u_i \rangle = 1$ quindi $c_1 \langle u_1, u_i \rangle + ... + c_i \langle u_i, u_i \rangle + ... + c_k \langle u_k, u_i \rangle = c_i$
Ora considero $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x, c_1 u_1 + ... + c_k u_k \rangle = \overline{c_1} \langle x, u_1 \rangle + ... + \overline{c_k} \langle x, u_k \rangle$ e per la prima parte del teorema ho $\overline{c_1} \langle x, u_1 \rangle + ... + \overline{c_k} \langle x, u_k \rangle = \overline{c_1} c_1 + ... + \overline{c_k} c_k = |c_1|^2 + ... + |c_k|^2 = \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2$ □

Corollario 1.2.3. *Ogni insieme ortonormale è indipendente.*

Dimostrazione. Sia $x = x = c_1 u_1 + ... + c_i u_i + ... + c_k u_k$. Si ha $x = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} |c_i|^2 = 0 \Leftrightarrow c_1, ...c_k = 0$ □

Definizione 1.6. Sia $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ insieme ortonormale in H spazio di Hilbert. Considero per ogni $x \in H$ la funzione

$$\begin{aligned} \widehat{x} : \quad & A \to \mathbb{C} \\ & \alpha \mapsto \langle x, u_\alpha \rangle \end{aligned}$$

I numeri $\widehat{x}(\alpha)$ si dicono *coefficienti di Fourier* di x relativi all'insieme $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$.

1.2.1 Un problema di approssimazione

Siano $v_1, ..., v_k$ insieme di vettori indipendenti in H spazio di Hilbert e sia $x \in H$. Il problema che si vuole affrontare consiste nel trovare un metodo per calcolare il valore minimo

$$\delta = \left\| x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \right\| \tag{1.2}$$

al variare degli scalari $c_1, ..., c_k$, e di trovare i valori corrispondenti di questi ultimi.
Sia M il sottospazio sotteso da $v_1, ..., v_k$. Se mostriamo che M è chiuso

possiamo applicare il teorema 1.1.1 e dedurre l'esistenza di un unico elemento minimizzante $x_0 = Px$, ove

$$x_0 = \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \tag{1.3}$$

Inoltre si avrebbe che $x - x_0 \in M^{\perp}$ e da queste considerazioni possiamo ricavare informazioni sui coefficienti $c_1, ..., c_k$.

Proposizione 1.2.4. *Siano $v_1, ..., v_k$ insieme di vettori indipendenti in H spazio di Hilbert e sia M il sottospazio sotteso da $v_1, ..., v_k$. Si ha che M è chiuso.*

Premetto alla dimostrazione il seguente lemma:

Lemma 1.2.5. *Se V è un sottospazio chiuso di H, $y \in H$, $y \notin V$ e V^* lo spazio sotteso da V e y allora V^* è chiuso.*

Dimostrazione lemma. Consideriamo una successione $x_n + \lambda_n y$ in V^* dove $x_n \in V$ e i λ_n sono scalari. Sia

$$z = \lim_{n\to\infty} (x_n + \lambda_n y)$$

Ora poichè le successioni convergenti negli spazio metrici sono limitate, $\exists\, \eta < \infty$ tale che $\|x_n + \lambda_n y\| < \eta$
Se fosse $|\lambda_n| \to \infty$, avremmo $\|\lambda_n^{-1} x_n - y\| < \frac{\eta}{|\lambda_n|} \to 0$ cosicchè sarebbe $-y \in V$ in quanto V chiuso. Ma $y \notin V$; dunque $\{\lambda_n\}$ è limitata e quindi contiene una sottosuccessione di Cauchy $\{\lambda_{n_i}\}$ convergente ad un certo λ, e così x_n essendo differenza di due successioni di Cauchy è successione di Cauchy in H spazio di Hilbert quindi convergente a $x \in V$ perchè V è un sottospazio chiuso. Quindi è $z = x + \lambda y$ e quindi appartenente a V^* □

Dimostrazione proposizione. La dimostrazione è fatta per induzione sull'insieme dei vettori $v_1, ..., v_k$.
Ho che $\{0\}$ è certamente chiuso. Sia M' il sottospazio generato da $v_1, ..., v_{k-1}$ chiuso per ipotesi induttiva; provando che il sottospazio M generato da M' e v_k è chiuso avrò concluso la dimostrazione; per provarlo applico direttamente il lemma. □

Tornando ora al problema considerato, poniamo

$$a_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle\,, \quad b_i = \langle x, v_i \rangle \tag{1.4}$$

Se x_0, dato dalla 1.3, è l'elemento minimizzante deve essere

$$\langle x - x_0, v_i \rangle = 0$$

per $i = 1, ..., k$ poichè, come considerato precedentemente $x - x_0 \in M^\perp$; il che conduce ad un sistema di k equazioni lineari nelle incognite $c_1, ..., c_k$:

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} c_j = b_i \quad 1 \leq i \leq k \tag{1.5}$$

Dal teorema 1.1.1 sappiamo che x_0 esiste ed è unico, quindi il determinante dela matrice $A = (a_{ij})$ è non nullo, e le c_j possono essere determinate dalla 1.5
Ora poichè vale $\langle x - x_0, v_i \rangle = 0$ è anche $\langle x - x_0, x_0 \rangle = 0$ perchè $x_0 = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i$; quindi

$$\delta^2 = \|x - x_0\|^2 = \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = \langle x, x - x_0 \rangle = \left\langle x, x - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j \right\rangle =$$

$$= \langle x, x \rangle - \sum_{j=1}^{k} \overline{c_j} \langle x, v_j \rangle$$

cosicché per la 1.4

$$\delta^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} \overline{c_j} b_j \tag{1.6}$$

e questo risolve il problema in funzione delle quantità 1.4. Ora se consideriamo come $v_1, ..., v_k$ un insieme ortonormale $u_1, ..., u_k$ risulta $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ cosicché per la 1.5, $c_i = b_i$ e la 1.6 diventa

$$\delta^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |b_j|^2 . \tag{1.7}$$

Questo risultato si riassume nel seguente teorema.

Teorema 1.2.6. *Sia $u_1, ..., u_k$ un insieme ortonormale in H, e sia $x \in H$. Risulta allora*

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{k} \langle x, u_j \rangle u_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j u_j \right\| \tag{1.8}$$

per ogni scalare $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *e vale l'uguaglianza se e solo se* $\lambda_j = \langle x, u_j \rangle$ *per* $1 \leq j \leq k$. *Il vettore* $\sum_{j=1}^{k} \langle x, u_j \rangle u_j$ *è la proiezione di* x *nel sottospazio* $[u_1, ..., u_k]$ *e se* δ *è la distanza fra* x *e questo sottospazio, si ha*

$$\sum_{j=1}^{k} |\langle x, u_j \rangle|^2 = \|x\|^2 - \delta^2 \tag{1.9}$$

Corollario 1.2.7 (disuguaglianza di Bessel)**.** *Se* $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ *è un qualsiasi insieme ortonormale in* H *e se* $x \in H$, *posto* $\widehat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$, *risulta*

$$\sum_{\alpha \in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Nel caso in cui A sia un insieme di indici finito la dimostrazione segue direttamente dalla 1.9. Se A è un insieme di indici numerabile si ha che $\sum_{j=1}^{\infty} |\widehat{x}(\alpha_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, \alpha_j \rangle|^2$ è convergente perchè le sue somme parziali per la 1.9 sono maggiorate da $\|x\|^2$ e che anche la sua somma è maggiorata da $\|x\|^2$. Osserviamo però che nell'enunciato del corollario l'insieme A è un qualsiasi insieme di indici anche non numerabile e non ordinato in alcun modo. In questo caso seguendo la dimostrazione del Rudin è necessario precisare il significato della somma a primo membro della 1.10. Se $0 \leq \varphi(\alpha) \leq \infty$ per ogni $\alpha \in A$ indico con $\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha)$ l'estremo superiore dell'insieme di tutte le somme finite $\varphi(\alpha_1) + ... + \varphi(\alpha_k)$ con $\alpha_1, ..., \alpha_k$ elementi distinti di A. Cioè

$$\sum_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} \varphi(\alpha_j) : \alpha_j \in A \text{ per } j = 1, ..., k; k \in \mathbb{N} \right\}$$

Tornando quindi al nostro caso avrò che

$$\sum_{\alpha \in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\widehat{x}(\alpha_j)|^2 : \alpha_j \in A \text{ per } j = 1, ..., k; k \in \mathbb{N} \right\}$$

Ora ogni $\sum_{j=1}^{k} |\widehat{x}(\alpha_j)|^2$ con $\alpha_j \in A$ per $j = 1, ..., k$ e $k \in \mathbb{N}$ è maggiorato per la 1.9 da $\|x\|^2$ quindi lo è anche il $\sup \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\widehat{x}(\alpha_j)|^2 : \alpha_j \in A \text{ per } j = 1, ..., k; k \in \mathbb{N} \right\} = \sum_{\alpha \in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2$. Ho così provato la disuguaglianza di Bessel. □

Un'immediata conseguenza è espressa nella seguente proposizione:

Proposizione 1.2.8. *Sia* H *uno spazio di Hilbert. Per ogni* $x \in H$ *e per ogni insieme ortonormale* $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ *in* H, *l'insieme* $A_x = \{\alpha \in A : \langle x, u_\alpha \rangle = \widehat{x}(\alpha) \neq 0\}$ *è al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $x \in H$ e fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Il numero dei vettori di A_x per cui $|\langle x, u_\alpha \rangle| \geq \frac{1}{n}$ non può superare $n^2 \|x\|^2$. Infatti posto

$$A_n = \left\{ \alpha \in A : |\langle x, u_\alpha \rangle| = |\widehat{x}(\alpha)|^2 \geq \frac{1}{n} \right\}$$

e posto $N = \operatorname{card}(A_n)$ ho che

$$N \frac{1}{n^2} \leq \sum_{\alpha \in A_n} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

da cui $N \leq n^2 \|x\|^2$.
Ma per ogni $\alpha \in A_x$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $|\langle x, \alpha \rangle| \geq \frac{1}{n}$. Dunque l'insieme dei vettori di A_x è unione numerabile di insiemi finiti o vuoti e quindi è un insieme finito o numerabile. $\square$

Definizione 1.7. Uno spazio di Hilbert H si dice *separabile* se contiene un sottoinsieme numerabile e denso.

Teorema 1.2.9. *Sia H uno spazio di Hilbert. Se esso è separabile allora ogni insieme ortonormale E è finito o numerabile.*

Dimostrazione. Se $x \perp y$ allora si ha $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ per quanto visto in 1.1. Inoltre se $\|x\| = \|y\| = 1$ si ha che $\|x - y\| = \sqrt{2}$. Sia ora Z un insieme numerabile (o finito) denso in H che esiste in quanto ho supposto H separabile. Fissato $\delta < \frac{\sqrt{2}}{3}$, per ogni $e \in E$ esiste un $z \in Z$ tale che $\|e - z\| < \delta$. Se $e_1, e_2 \in E$ siano z_1 e z_2 punti di Z per cui $\|e_1 - z_1\| < \delta$ e $\|e_2 - z_2\| < \delta$, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \|e_1 - e_2\| = \|(e_1 - z_1) + (z_1 - z_2) + (z_2 - e_2)\| \leq \\ &\leq \|e_1 - z_1\| + \|z_1 - z_2\| + \|z_2 - e_2\| < 2\delta + \|z_1 - z_2\| < \frac{2\sqrt{2}}{3} + \|z_1 - z_2\| \end{aligned}$$

Quindi $\|z_1 - z_2\| > \frac{\sqrt{2}}{3}$, perciò $z_1 \neq z_2$ e quindi esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti di E e i punti di un sottoinsieme di Z. Dunque E è finito o numerabile. $\square$

1.2.2 Isomorfismo fra spazi di Hilbert e ℓ^2

Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un insieme ortonormale in H. Si consideri l'applicazione F che ad $x \in H$ associa la funzione $\widehat{x}$ su A. Per ogni $\alpha \in A$ $x \to \widehat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle$ è un funzionale lineare. Questo fatto deriva

direttamente dalle proprietà del prodotto interno di H infatti fissato $\alpha \in A$, siano $x, y \in H$ si ha $F(x+y) = \langle x + y, u_\alpha \rangle = \langle x, u_\alpha \rangle + \langle y, u_\alpha \rangle = F(x) + F(y)$ e se λ è uno scalare si ha $F(\lambda x) = \langle \lambda x, u_\alpha \rangle = \lambda \langle x, u_\alpha \rangle = \lambda F(x)$.
Inoltre la disuguaglianza di Bessel mostra che $\widehat{x} \in \ell^2$ in quanto $\|\widehat{x}\|_{\ell^2} = \left(\sum_{\alpha \in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x\|$.
Quindi

$$\begin{aligned} F :& H \to \ell^2(A) \\ & x \mapsto \widehat{x} \end{aligned}$$

è un'applicazione di H in $\ell^2(A)$. Si proverà ora tramite il seguente teorema di Riesz-Fisher la suriettività di F. Successivamente il teorema 1.2.11 mostrerà sotto quali condizioni sull'insieme ortonormale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ la F sia un'isometria. Questi due fatti porteranno a concludere che la F è sarà naturalmente biunivoca.

Teorema 1.2.10 (di Riesz-Fischer)**.** *Sia $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ un insieme ortonormale in H. Se $\varphi \in \ell^2(A)$ risulta $\varphi = \widehat{x}$ per qualche $x \in H$*

Dimostrazione. Per $n = 1, 2, 3, ...$ sia $A_n = \left\{\alpha \in A : \left|\varphi(\alpha) > \frac{1}{n}\right|\right\}$; si ha che ogni A_n è un insieme finito, infatti può avere al massimo $n^2 \|\varphi\|_2^2$ per un discorso analogo a quanto fatto nella dimostrazione del teorema 1.2.8. Si pone

$$x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha \qquad\qquad n = 1, 2, 3...$$

In base a questa definizione si ha $\widehat{x}_n = \varphi \chi_{A_n}$, cosicchè $\widehat{x}_n(\alpha) \to \varphi(\alpha)$ per ogni $\alpha \in A$ e $|\varphi - \widehat{x}_n|^2 \leq |\varphi|^2$. Per il teorema della convergenza dominata si ha quindi che $\|\varphi - \widehat{x}_n\|_2 \to 0$. Ne segue che $\{\widehat{x}_n\}$ è una successione di Cauchy in $\ell^2(A)$. Poichè gli insiemi A_n sono finiti, il teorema 1.2.2 mostra che $\|x_n - x_m\| = \|\widehat{x}_n - \widehat{x}_m\|_2$. Dunque $\{\widehat{x}_n\}$ è una successione di Cauchy in H spazio di Hilbert, quindi esiste $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ in H. Per ogni $\alpha \in A$ si ha pertanto

$$\widehat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, u_\alpha \rangle = \lim_{n\to\infty} \widehat{x}_n(\alpha) = \varphi(\alpha)$$

e ciò completa la dimostrazione.

□

Definizione 1.8. Un insieme ortonormale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ si dice *massimale* se $\nexists\ x \in H, x \neq 0$ e $\langle x, u_\alpha \rangle = 0\ \forall \alpha \in A$

Teorema 1.2.11. *Sia* $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ *un insieme ortonormale in* H*. Le quattro condizioni seguenti sono equivalenti:*

1. $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ *è un insieme ortonormale massimale in* H
2. *L'insieme* S *di tutte le combinazioni lineari finite di elementi di* $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ *è denso in* H
3. *Per ogni* $x \in H$*, risulta* $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2$
4. *Per ogni* $x, y \in H$*, risulta* $\langle x, y\rangle = \sum_{\alpha\in A} \widehat{x}(\alpha)\overline{\widehat{y}(\alpha)}$

L'ultimo punto è noto come *identità di Parseval.* E' importante osservare che $\widehat{x}, \widehat{y} \in \ell^2(A)$ quindi $\widehat{x}\overline{\widehat{y}} \in \ell^1(A)$ e così la sommatoria in 4) è ben definita. Inoltre la 3) è un caso particolare di 4) con $x = y$. Gli insiemi ortonormali massimali vengono spesso chiamati *insiemi ortonormali completi* o *basi ortonormali.*

Dimostrazione. La dimostrazione procederà dimostrando che 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).
1) $\Rightarrow$ 2) Sia M la chiusura di S. Poichè S è un sottospazio, anche M lo è : infatti se x_ne y_n sono successioni in S convergenti si ha $x_n \to x \in M$ e $y_n \to y \in M$ ora $x_n + y_n \to x + y$ che quindi apparterrà a M e analogamenete $\lambda x_n \to \lambda x$. Per assurdo supponiamo S non denso in H, così $M \neq H$ cosicchè per il teorema 1.1.1, $M^\perp$ contiene un vettore non nullo che quindi sarà ortogonale per definizione ad ogni u_α $\forall\ \alpha \in A$. Dunque $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ non è massimale e questo contraddice l'ipotesi.
2) $\Rightarrow$ 3) Sia $x \in H$ e sia $\epsilon > 0$. Per ipotesi, essendo S denso in H, esisterà un insieme finito di vettori $u_{\alpha_1}, ..., u_{\alpha_n}$ tale che una sua combinazione lineare dista da x meno di ϵ cioè $\left\|x - \sum_{j=1}^n c_j u_{\alpha_j}\right\| < \epsilon$. Dal teorema 1.2.6 si ha che $\left\|x - \sum_{j=1}^n \widehat{x}(\alpha_j) u_{\alpha_j}\right\| \leq \left\|x - \sum_{j=1}^n c_j u_{\alpha_j}\right\| < \epsilon$.
Così se $z = \widehat{x}(\alpha_1)u_{\alpha_1} + ... + \widehat{x}(\alpha_n)u_{\alpha_n}$ risulta $\|x - z\| < \epsilon$, quindi per la disuguaglianza triangolare $\|x\| < \|z\| + \epsilon$ e dal teorema 1.2.2

$$(\|x\| - \epsilon)^2 < \|z\|^2 = \sum_{j=1}^n |\widehat{x}(\alpha_j)|^2 \leq \sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2$$

Per $\epsilon \to 0$ avrò $\|x\|^2 \leq \sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2$; d'altronde per la disuguaglianza di Bessel è $\sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$ quindi $\|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2$
3) $\Rightarrow$ 4) Si osservi che l'equazione in 3) si può scrivere anche nella forma

$$\langle x, x\rangle = \langle \widehat{x}, \widehat{x}\rangle \tag{1.11}$$

dove il secondo prodotto interno è quello definito in $\ell^2(A)$. Fissiamo x e y in H; se vale 3) si ha

$$\langle x+\lambda y, x+\lambda y\rangle = \langle \widehat{x}+\lambda\widehat{y}, \widehat{x}+\lambda\widehat{y}\rangle$$

per la 1.11; e dunque

$$\overline{\lambda}\langle x,y\rangle + \lambda\langle y,x\rangle = \overline{\lambda}\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle + \lambda\langle \widehat{y},\widehat{x}\rangle$$

per ogni scalare λ. Ponendo $\lambda = 1$ ottengo $\langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle = \langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle + \langle \widehat{y},\widehat{x}\rangle$ e per le proprietà del prodotto inteno $\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle} = \langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle + \overline{\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle}$ da cui $\Re(\langle x,y\rangle) = \Re(\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle)$. Ponendo $\lambda = i$ ottengo $-i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle = -i\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle + i\langle \widehat{y},\widehat{x}\rangle$ e raccogliendo e applicando le propriatà del prodotto interno $i\left(-\langle x,y\rangle + \overline{\langle x,y\rangle}\right) = i\left(-\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle + \overline{\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle}\right)$ da cui $\Im(\langle x,y\rangle) = \Im(\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle)$. Ho mostrato quindi che i due complessi $\langle x,y\rangle$ e $\langle \widehat{x},\widehat{y}\rangle$ sono uguali ed ho esattemente la 4).
4) $\Rightarrow$ 1) Supponiamo $\{u_\alpha : \alpha\in A\}$ non massimale, esisterà quindi un $u \neq 0$ in H tale che $\langle u, u_\alpha\rangle = 0$ $\forall\alpha\in A$. Sia $x = y = u$ risulta $\langle x,y\rangle = \langle u,u\rangle = \|u\|^2 \neq 0$ ma $|\widehat{u}(\alpha)| = 0$ $\forall\alpha\in A$ e $\sum_{\alpha\in A}\widehat{x}(\alpha)\overline{\widehat{y}(\alpha)} = \sum_{\alpha\in A}|\widehat{u}(\alpha)|^2 = 0$ e ciò contraddice la 4) $\square$

Definizione 1.9. Un *isomorfismo fra due spazi di Hilbert* H_1 e H_2 è una applicazione lineare Λ di H_1 su H_2 invertibile, tale che conservi anche i prodotti interni ossia $\langle x,y\rangle = \langle \Lambda x, \Lambda y\rangle$ per ogni x, y in H_1.

In base a questa definizione i teoremi 1.2.10 e 1.2.11 implicano la seguente

Proposizione 1.2.12. *Se $\{u_\alpha : \alpha\in A\}$ è un insieme ortonormale massimale in uno spazio di Hilbert H, e se $\widehat{x}(\alpha) = \langle x, u_\alpha\rangle$ con $x\in H$, l'applicazione*

$$\begin{aligned}\Lambda : & H \to \ell^2(A)\\ & x \mapsto \widehat{x}\end{aligned}$$

è un isomorfismo fra gli spazi di Hilbert H e $\ell^2(A)$.

Si vuole arrivare ora a dimostrare un risultato notevole, che è la summa dei discorsi fatti in precedenza. Questo risultato è formulato nel seguente teorema:

Teorema 1.2.13. *Sia H uno spazio di Hilbert non banale; allora H è isomorfo a qualche $\ell^2(A)$ con A opportuno.*

Per dimostrare questo teorema è necessario premettere le seguenti definizioni e teoremi:

Definizione 1.10. Un insieme P si dice parzialmente ordnato da una relazione binaria $\leq$ se:

1. $a \leq b$ e $b \leq c$ implica $a \leq c$
2. $a \leq a$ per ogni $a \in P$
3. $a \leq b$ e $b \leq a$ implica $a = b$

Un sottoinsieme Q di un insieme parzialmente ordinato P è detto *totalmente ordinato* se ogni coppia $a, b \in Q$ soddisfa una delle due condizioni $a \leq b$ o $b \leq a$.
Un sottoinsieme totalmente ordinato Q di un insieme parzialmente ordinato P è *massimale* quando aggiungendo a Q un qualsiasi elemento di P non contenuto in Q la famiglia di insiemi che ne risulta non è più totalmente ordinata.

Teorema 1.2.14 (di massimalità di Hausdorff)**.** *Ogni insieme non vuoto parzialmente ordinato contiene un sottoinsieme totalmente ordinato massimale.*

Questo teorema è una conseguenza dell'assioma della scelta ed è, di fatto, equivalente a questo. Di questo ometteremo la dimostrazione.

Teorema 1.2.15. *Ogni insieme B ortonormale in uno spazio di Hilbert H è contenuto in un insieme ortonormale massimale in H.*

Dimostrazione. Sia P la classe di tutti gli insiemi ortonormali in H che contengono il dato insieme B. Sia P ordinata parzialmente tramite l'inclusione di insiemi. Poichè $B \in P$ è $P \neq \varnothing$. Quindi per il teorema di massimalità di Hausdorff, P contiene una classe totalmente ordinata massimale Ω; sia S l'unione di tutti gli elementi di Ω. Si ha che $B \in S$. Vogliamo mostrare che S è un insieme ortonormale massimale.
Vediamo che S è ortonormale. Se u_1 e $u_2 \in S$, sarà $u_1 \in A_1$ e $u_2 \in A_2$ per certi A_1 e A_2 appartenenti a Ω. Essendo Ω totalmente ordinato sarà $A_1 \subset A_2$ (oppure $A_2 \subset A_1$), quindi anche $u_1 \in A_2$. Poichè A_2 ortonotmale $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$ se $u_1 \neq u_2$ e $\langle u_1, u_2 \rangle = 1$ se $u_1 = u_2$.
Per assurdo supponiamo ora che S non sia massimale. In tal caso S è un sottoinsieme proprio di un insieme ortonormale S^*. Chiaramente $S^* \notin \Omega$ ed S^* contiene ogni elemento di Ω quindi possiamo aggiungere S^* a Ω e avere ancora un ordine totale. Questo contraddice però l'ipotesi di massimalità di Ω $\square$

La dimostrazione del teorema 1.2.13 diviene ora semplice.

Dimostrazione. Poichè H è non banale considero $x \neq 0, x \in H$; l'insieme $\left\{\frac{x}{\|x\|}\right\}$ è un sistema ortonormale. Quindi esistono sistemi ortonormali in H. Considero l'insieme ortonormale $\{v_\beta : \beta \in B\}$. Per il teorema 1.2.15 esiste un insieme ortonormale massimale $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ che contiene $\{v_\beta : \beta \in B\}$. Quindi l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \Lambda : &H \to \ell^2(A) \\ &x \mapsto \widehat{x} \end{aligned}$$

è un isomorfismo fra spazi di Hilbert per la proposizione 1.2.12 e quindi H è isomorfo a $\ell^2(A)$ □

Capitolo 2

Serie trigonometriche

Consideriamo la circonferenza unitaria nel piano complesso $S^{'}$, ossia l'insieme $S^{'} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$. Se F è una qualsiasi funzione su $S^{'}$ e f è una funzione definita su $\mathbb{R}$ mediante la

$$f(t) = F(e^{it}) \tag{2.1}$$

allora f è una funzione periodica di periodo 2π ossia $f(t) = f(t+2\pi)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Vale anche la proposizione inversa cioè se f è una funzione su $\mathbb{R}$ con periodo 2π esiste una funzione F definita su $S^{'}$ tale che soddisfi l'equazione 2.1. Possiamo allora identificare le funzioni su $S^{'}$ con le funzioni periodiche di periodo 2π su $\mathbb{R}$; nelle trattazioni successive utilizzeremo spesso $f(t)$ in luogo di $f(e^{it})$ anche se consideriamo la f definita su $S^{'}$ Fissate queste convenzioni procediamo con l'enunciare alcune definizioni.

Definizione 2.1. Sia $p \in \mathbb{R}$ tale che $1 \leq p < \infty$. Definisco

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$L^p(S^{'}) = \left\{ f : S^{'} \to \mathbb{C} : \text{misurabile e } \|f\|_p < \infty \right\}$$

Ciò che facciamo è prendere in considerazione $L^p(\mu)$ dove μ è la misura di Lebesque su $S^{'}$ divisa per 2π. Sia $f : S^{'} \to \mathbb{C}$ misurabile,$f \geq 0$. Si dice *estremo superiore essenziale* di f e si indica $supess\,|f|$ il valore

$$supess\,|f| = inf\,\{M \in \mathbb{C} : |f(x)| \leq M \text{ q.d.}\}$$

$L^\infty\left(S^{'}\right) = \{f : supess\,|f| < \infty\}$ cioè $L^\infty\left(S^{'}\right)$ è costituito dalle funzioni essenzialmente limitate. La norma in $L^\infty\left(S^{'}\right)$ è data da

$$\|f\|_{L^\infty} := supess\,|f|$$

Inoltre indico con $C(S^{'})$ lo spazio delle funzioni complesse continue su $S^{'}$ con la norma $\|f\|_{\infty} = \sup_t |f(t)|$.

Definizione 2.2. Un *polinomio trigonometrico* è una somma finita della forma

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos\, nt + b_n \sin\, nt) \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

dove $a_0, a_1, ..., a_N$ e $b_1, ..., b_N$ sono numeri reali.
Sostituendo nella 2.2 le formule di Eulero per cui

$$\cos\, nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \text{ e } \sin\, nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$$

ottengo

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} + b_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} - ib_n \frac{e^{int} - e^{-int}}{2})$$

svolgendo le moltiplicazioni e raccogliendo gli esponenziali ho

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} e^{-int}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right) + e^{int}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)$$

da cui posto $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ e $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ e $c_0 = a_0$ ho che

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos\, nt + b_n \sin\, nt) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}$$

dove i $c_1, c_2, ..., c_N$ sono complessi tali che $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Pongo $u_n(t) = e^{int}$ con $n \in \mathbb{Z}$

Definizione 2.3. Definiamo ora in $L^2(S^{'})$ il prodotto interno

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

da cui si nota subito che la norma indotta da questo prodotto interno su $L^2(S^{'})$ è esattamente quella definita nella definizione 2.1 in quanto $\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\, dt = \|f\|_2^2$

Si ha che

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = \begin{cases} 1 \text{ se } n = m \\ 0 \text{ se } n \neq m \end{cases}$$

Infatti se $n = m$ ho

$$\langle u_n, u_n \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-n)t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1dt = \frac{1}{2\pi}2\pi = 1$$

Se invece $n \neq m$ sia $n - m = k$; si ha

$$\langle u_n, u_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{1(n-m)t}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \frac{1}{2\pi ki}\left[e^{ikt}\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi ki}\left[\cos kt + i\sin kt\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{1}{2\pi ki}\left(\cos k\pi + i\sin k\pi - \cos(-k\pi) - i\sin(-k\pi)\right)$$

da cui per semplici formule trigonometriche segue

$$\frac{1}{2\pi ki}\left(\cos k\pi + i\sin k\pi - \cos(-k\pi) - i\sin(-k\pi)\right) = \frac{1}{2\pi ki}\left(\cos k\pi - \cos k\pi\right) = 0$$

Questo mostra che $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ è un insieme ortonormale in $L^2(S')$.Tale sistema è abitualmente chiamato *sistema trigonometrico*. Si proverà che questo insieme è massimale e vedremo delle versioni concrete dei teoremi generali enunciati nel Capitolo 1.

2.1 Completezza del sistema trigonometrico

Si vuole mostrare ora la completezza del sistema trigonometrico. Dal teorema 1.2.11 del Capito 1 per dimostrare la massimalità o completezza del sistema trigonometrico basterà provare che l'insieme di tutti i polinomi trigonometrici è denso in $L^2(S')$. Per procedere nella dimostrazione è necessario ricordare un teorema noto:

Teorema 2.1.1. *Per* $1 \leq p < \infty, C_c(X)$ *è denso in* $L^p(\mu)$

Dove $C_c(X)$ indica lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto su X.

Nel caso considerato si ha quindi che $C(S')$ è denso in $L^2(S')$ in quanto S' è compatto; basta così mostrare che per ogni $f \in C(S')$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio trigonometrico P tale che $\|f - P\|_2 < \epsilon$. Si ha che se $g \in C(S')$ allora $\|g\|_2 \leq \|g\|_\infty$, quindi mostrando che $\|f - P\|_\infty < \epsilon$ avremo anche che $\|f - p\|_2 < \epsilon$ che è ciò che vogliamo mostrare.

Teorema 2.1.2. *Sia $f \in C(S')$ e sia $\epsilon > 0$, allora esiste un polinomio trigonometrico P tale che*

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon \tag{2.3}$$

per ogni t reale.

Dimostrazione. Mostreremo che $\|f - P\|_\infty < \epsilon$ e poichè per definizione $|f(t) - P(t)| \leq \|f - P\|_\infty \ \forall\, t \in \mathbb{R}$ si avrà $|f(t) - P(t)| < \epsilon \ \forall\, t \in \mathbb{R}$.
Consideriamo i polinomi trigonometrici $Q_1, Q_2, Q_3, ...$ che soddisfino le seguenti condizioni:

1. $Q_k(t) \geq 0$ per $t \in \mathbb{R}$
2. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)dt = 1$
3. Se $\eta_k(\delta) = \sup\{Q_k(t) : \delta \leq |t| \leq \pi\}$ risulta
$$\lim_{k\to\infty} \eta_k(\delta) = 0$$
Equivalentemente $Q_k \overset{k\to\infty}{\to} 0$ uniformemente su $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$

Per ogni $f \in C(S')$ definisco

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)ds \text{ con } k = 1, 2, 3... \tag{2.4}$$

Sostituendo a s prima $-s$ e successivamente $s-t$ ho che il valore dell'integrale non cambia. Quindi è anche

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)Q_k(t-s)ds \ \ k = 1, 2, 3... \tag{2.5}$$

Poichè Q_k è un polinomio trigonometrico esso è del tipo

$$Q_k = \sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}e^{int} \tag{2.6}$$

Ponendo $t - s$ in luogo di t nella 2.6 e sostituendo nella 2.5, si vede come ciascun P_k sia un polinomio trigonometrico. Infatti

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)Q_k(t-s)ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}e^{in(t-s)}ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\sum_{n=-N_k}^{N_k} a_{n,k}e^{int}e^{-ins}ds = \sum_{n=-N_k}^{N_k}\left(\frac{1}{2\pi}a_{n,k}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}ds\right)e^{int}$$

e posto $b_{n,k} = \frac{1}{2\pi} a_{n,k} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds$ ho che

$$P_k(t) = \sum_{n=-N_k}^{N_k} b_{n,k} e^{int}.$$

Sia $\epsilon > 0$, poichè f è continua su $S^{'}$ compatto, per il teorema di Heine-Cantor, la f è uniformemente continua su $S^{'}$, sia $\delta > 0$ tale che $|f(t) - f(s)| < \epsilon$ per $|t - s| < \delta$.
Per il punto 2. si ha

$$P_K(t) - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t-s) - f(t)\} Q_k(s) ds$$

infatti

$$\begin{aligned} P_K(t) - f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds - f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s) Q_k(s) ds - f(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(t-s) - f(t)\} Q_k(s) ds \end{aligned}$$

Per ogni t la 1. implica

$$|P_K(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds = A_1 + A_2$$

dove con A_1 indico l'integrale su $[-\delta, \delta]$ e con A_2 l'integrale su $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ In A_1 per le osservazioni fatte in precedenza sulla continuità uniforme, $|f(t-s) - f(t)| Q_k(s) < \epsilon Q_k(s)$ quindi

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)| Q_k(s) ds < \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \epsilon Q_k(s) ds = \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} Q_k(s) ds = \epsilon$$

In A_2 si ha che $Q_k(s) \leq \eta_k(\delta)$ per il punto 3 $A_2 \leq 2\eta_k(\delta) \|f\|_\infty < \epsilon$ per k sufficientemente grande.
Le maggiorazioni fatte sotto indipendenti da t quindi ho

$$\lim_{k \to \infty} \|f - P_k\|_\infty = 0$$

Rimane solamente da costruire i Q_k e ciò può essere fatto in vari modi; poniamo

$$Q_k(t) = c_k \left(\frac{1 + \mathrm{cost}}{2} \right)^k$$

dove i c_k sono scelti in modo che sussista la condizione 2. Per esempio per $k = 1$ ho $Q_1(t) = c_1 \frac{1+\cos t}{2}$ affinchè sussista la 2. deve essere $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} c_1 \frac{1+\cos t}{2} dt = 1$ quindi $\frac{1}{4\pi}\left[t + \operatorname{sen} t\right]_{t=-\pi}^{t=\pi} = \frac{1}{c_1}$ e $\frac{1}{4\pi}2\pi = \frac{1}{c_1}$ e risulta $c_1 = 2$ Poichè 1. è chiaramente soddisfatta, rimane da provare la 3. Essendo la Q_k pari per la condizione 2. vale

$$1 = \frac{c_k}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt > \frac{c_k}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \operatorname{sen} t dt = -\frac{2c_k}{(k+1)\pi}\left[\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^{k+1}\right]_{t=0}^{t=\pi}$$
$$= \frac{2c_k}{\pi(k+1)}$$

Poichè Q_k è decrescente su $[0,\pi]$, ne consegue che

$$Q_k(t) \leq Q_k(\delta) \leq \frac{\pi(k+1)}{2c_k}Q_k(\delta) = \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \text{ per } 0 < \delta \leq |t| \leq \pi$$

e ciò implica la 3. in quanto $1 + \cos\delta < 2$ per $0 < \delta \leq \pi$ □

2.2 Serie di Fourier

Sia $f \in L^1(S')$ i *coefficienti di Fourier* di f relativi al sistema trigonometrico risultano essere i seguenti

$$\widehat{f}(n) = \langle f, u_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \tag{2.7}$$

Abbiamo associato quindi ad ogni $f \in L^1(S')$ una funzione $\widehat{f}$ definita su $\mathbb{Z}$. La *serie di Fourier* di f è

$$\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{int}$$

e le sue somme parziali sono

$$s_N(t) = \int_{-N}^{N}\widehat{f}(n)e^{int} \text{ con } N = 0, 1, 2, ...$$

Poichè $L^2(S') \subset L^1(S')$ possiamo scrivere i coefficienti di Fourier come in 2.7 per ogni $f \in L^2(S')$. Il teorema di Riesz-Fischer asserisce che se $\{c_n\}$ è una successione di numeri complessi tali che $\sum_{=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 < \infty$, esiste una $f \in L^2(S')$ per la quale si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt \text{ con } n \in \mathbb{Z}.$$

L'identità di Parseval implica che

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} = \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

Bibliografia

[1] RUDIN W., 1974. *Analisi reale e complessa*. Torino: Boringhieri.

[2] PINI B., 1972. *Secondo corso di Analisi Matematica*. Bologna: coperativa libreria universitaria.

Ringraziamenti

Desidero porgere un sentito ringraziamento al Prof. Bruno Franchi per la grande disponibilità e cortesia dimostrata, nonché per l'aiuto fornito nella stesura della presente tesi.