

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Triennale in Fisica

STELLE DI NEUTRONI

CANDIDATO:
Alessandro Marani

RELATORE:
Prof. Giovanni Carlo Bonsignori

CORRELATORE:
Dott. Paolo Finelli

SESSIONE II
ANNO ACCADEMICO 2007/2008

INDICE

INTRODUZIONE

Capitolo 1 – STELLE DI NEUTRONI

- I. Introduzione
- II. Esplosione di una supernova
- III. Limite di Chandrasekhar
- IV. Struttura delle stelle di neutroni
- V. Stati esotici della materia
- VI. Materia di quark
- VII. Rotazione
- VIII. Raffreddamento
- IX. Campo gravitazionale

Capitolo 2 – FASI DELLA MATERIA NUCLEARE

- I. Introduzione
- II. Evidenze sperimentali del quark – gluon plasma (QGP)

Capitolo 3 – CALCOLO DELLE EQUAZIONI DI STATO

- I. Introduzione
- II. Equazione di Tolman – Oppenheimer – Volkoff
- III. Modello del gas di Fermi
- IV. Equazione di struttura per una stella politropica
- V. Integrazione numerica di una stella politropica
- VI. Stelle di neutroni pure
 - a. Caso non relativistico: $k_F \ll m_n$
 - b. Caso relativistico: $k_F \gg m_n$
- VII. Limite superiore per la massa
- VIII. Stelle di neutroni con protoni ed elettroni
- IX. Introduzione alle interazioni nucleari
 - a. Materia nucleare non simmetrica
 - b. Materia nucleare simmetrica
 - c. Principio di causalità
- X. Stelle di neutroni impure con interazioni nucleari

Capitolo 4 – CONFRONTO DATI

APPENDICI

- A. Equazione di Tolman – Oppenheimer – Volkoff (TOV)
- B. Codici dei programmi
- C. Formula semiempirica di Weizsäcker

RINGRAZIAMENTI

REFERENZE

INTRODUZIONE

La **stella di neutroni** è sicuramente uno degli oggetti astronomici più affascinanti ed interessanti da studiare dal punto di vista della fisica. Le sue caratteristiche peculiari la rendono un laboratorio ideale per analizzare il comportamento della materia nucleare in condizioni estreme: l'enorme pressione combinata alle temperature elevate, che si sviluppano nel cuore della stella, creano le condizioni ideali affinché si realizzino molteplici transizioni di fase. La struttura interna di una stella di neutroni non è ancora stata compresa del tutto. La conoscenza della sua composizione potrebbe fornire preziose informazioni circa le proprietà della materia.

La mia analisi di questo eccezionale corpo celeste prenderà l'avvio da un'ampia e generale panoramica sulle caratteristiche delle stelle di neutroni: la formazione, il limite superiore della massa, la struttura, la rotazione, il raffreddamento ed il campo gravitazionale. Questi argomenti necessitano di una buona conoscenza in ambito della fisica nucleare e della termodinamica.

Nel successivo capitolo, si espongono le principali transizioni di fase che sono state ipotizzate all'interno della stella di neutroni, nel cui centro è possibile che si realizzi uno stato di **quark – gluon plasma**, eventualmente superconduttivo.

In Natura, le condizioni che hanno permesso la formazione del plasma di quark e gluoni si sono verificate solo per pochi istanti durante il Big Bang. Per tale ragione, una maggiore conoscenza di questa eccezionale classe di stelle darebbe la possibilità di sapere qualcosa di più sulla dinamica dell'origine dell'Universo.

Dopo questa introduzione, si passa all'argomento centrale della tesi che riguarda lo studio di una stella di neutroni nell'ambito di un modello uniforme di materia neutronica. Utilizzeremo allo scopo una semplice ma efficace equazione di stato per la materia nucleare.

Si partirà dalla soluzione delle equazioni di Tolman – Oppenheimer – Volkoff che rappresentano il punto fondamentale per il calcolo delle grandezze pressione e densità di energia di una stella di neutroni. Il modello, elaborato grazie all'ausilio del software Mathematica, permette di studiare:

- l'andamento della pressione p in funzione
 - della densità di energia ε ; $p = p(\varepsilon)$
 - del raggio R ; $p = p(R)$
 - della densità di materia u ; $p = p(u)$
- l'andamento della densità di energia ε in funzione della densità di materia u ; $\varepsilon = \varepsilon(u)$
- l'andamento della distribuzione di massa M in funzione del raggio R ; $M = M(R)$
- il limite superiore per la massa M ; M_{MAX}
- il raggio medio R ; \bar{R}

Per concludere il mio lavoro, ho effettuato una serie di confronti tra i risultati ottenuti in questa approssimazione e quelli della più recente ricerca scientifica, riscontrando accordi e limiti del modello.

1. STELLE DI NEUTRONI

I. Introduzione

Una **stella di neutroni** si forma in seguito al collasso gravitazionale di una stella massiva, il cui momento culminante è l'esplosione della supernova. Essa rappresenta, pertanto, uno dei possibili stadi finali dell'evoluzione stellare. Tali stelle sono quasi interamente composte da neutroni, particelle subatomiche con massa approssimativamente uguale a quella del protone ma con carica elettrica nulla e che sottostanno alla statistica di Fermi – Dirac. L'ulteriore collasso di questa categoria di stelle è impedito dalla *pressione di degenerazione dei neutroni*, garantito dal Principio di esclusione di Pauli. Questo principio esige che due fermioni qualunque non possano mai occupare lo stesso stato quantico contemporaneamente. Le stelle di neutroni furono il primo importante oggetto astronomico ad essere prima predetto teoricamente (1934)ⁱ, due anni appena dopo la scoperta del neutrone per opera di Chadwick (1932)ⁱⁱ, e solo successivamente confermato sperimentalmente (1968).

Riassumiamo nella tabella seguente i principali parametri che caratterizzano questi oggetti esotici:

TABELLA 1.1

Quantità	Unità di misura	Valori
Massa	<i>masse solari</i>	(1.35 ÷ 2.1)
Raggio	<i>km</i>	12
Densità media	<i>kg/m³</i>	$(3.7 \div 5.9) \times 10^{17}$
Densità della crosta	<i>kg/m³</i>	1×10^9
Densità del nucleo	<i>kg/m³</i>	$(6 \div 8) \times 10^{17}$
Campo gravitazionale	<i>campo terrestre</i>	10^{11}
Velocità di fuga	<i>km/s</i>	100.000

Tabella 1.1:

Elenco dei principali parametri caratteristici di una stelle di neutroni.

II. Esplosione di una supernova

Durante la loro storia evolutiva, le stelle brillano per l'energia prodotta al loro interno dalla fusione della materia nucleare. La temperatura che viene raggiunta sviluppa una pressione idrostatica e radiativa che controbilancia la pressione prodotta dalla forza attrattiva della gravitazione. terminate tutte le combustioni nucleari possibili, il nucleo di stelle con massa sufficientemente alta subisce il collasso gravitazionale: su di esso precipitano le parti stellari esterne. I processi che seguono danno luogo ad una spettacolare esplosione che libera enormi quantità d'energia conosciuta con il nome di **supernova**ⁱⁱⁱ.

Le supernovae si distinguono per le caratteristiche fisiche che le loro esplosioni manifestano.

- *Tipo Ia*

Queste supernovae non contengono elio (^4He) ma mostrano delle linee di assorbimento del silicio (^{28}Si). Ad esplodere è stata una **nana bianca** facente parte di un sistema binario con una stella massiccia. Parte della massa della compagna viene trasferita alla nana bianca, fino a quando quest'ultima non raggiunge il limite di Chandrasekhar. La stella nana inizia a collassare, ma la condizione di alta densità dello stato degenerare della materia e l'energia potenziale gravitazionale del collasso innescano una rapida fusione nucleare degli atomi di carbonio e ossigeno, regolata dalla temperatura del plasma coinvolto. L'improvviso rilascio di energia produce una potentissima onda d'urto che accelera i prodotti di fusione oltre la velocità di fuga della stella, la quale viene letteralmente fatta a pezzi. L'aumento di luminosità della stella è conseguenza dell'energia liberata nell'esplosione e, durante il tempo in cui si riduce, la supernova è alimentata dal decadimento degli elementi nichel (^{58}Ni) e cobalto radioattivo (^{58}Co) in ferro (^{56}Fe). Infine, poiché il limite di Chandrasekhar è sempre il medesimo, questa classe di supernovae libera sempre la stessa quantità di energia e presentano, quindi, le stesse luminosità assolute. Pertanto, osservando un'esplosione in una galassia lontana si può risalire alla distanza della stella.

- *Tipo Ib e Ic*

Queste supernovae non mostrano linee dovute al silicio. Si presume che ad esplodere siano stelle alla fine della loro vita, i cui strati esterni erano stati spazzati via o a causa del forte vento stellare o per l'interazione con una stella compagna vicina. Le stelle progenitrici del tipo *Ib* avevano espulso solo idrogeno, mentre quelle del tipo *Ic* sia idrogeno sia elio.

- *Tipo II*

Questa seconda classe di supernovae ha origine quando il nucleo di una stella molto massiccia ha prodotto una notevole quantità di ferro, la cui fusione è endotermica e quindi richiede energia per innescarsi. Nel momento in cui la massa del nucleo di ferro raggiunge il limite di Chandrasekhar, esso decade spontaneamente in neutroni attraverso un processo di fotodisintegrazione e cattura elettronica e, per effetto della sua stessa gravità, implode. La massa di neutroni così formatasi presenta una temperatura stimata dell'ordine dei cento miliardi di kelvin, virtualmente sufficiente a "vaporizzare" l'astro appena formato. I neutroni, in alto stato di eccitazione termica, perdono energia emettendo bosoni Z^0 , i quali decadono in coppie neutrino – antineutrino: questo intenso flusso di neutrini sottrae un'enorme quantità di energia al nucleo della stella per trasferirla agli strati esterni. Quando l'onda d'urto raggiunge la superficie della stella, la sua luminosità aumenta drasticamente e gli strati esterni vengono sparati nello spazio. Il nucleo della stella forma così una **stella di neutroni**. Queste supernovae sono meno luminose, nonostante derivino dal collasso di stelle di massa maggiore, perché l'energia gravitazionale è in parte spesa per compensare un intenso irraggiamento neutrino.

III. Limite di Chandrasekhar

Quando un gas di fermioni si raffredda, essi sono impossibilitati ad occupare tutti lo stato di energia minima, per cui occuperanno stati più energetici, creando una pressione la cui origine è puramente quantomeccanica.

Il limite di Chandrasekhar^{iv}, indicata dal simbolo M_{Ch} , rappresenta il limite superiore per la massa di una stella degenerare stabile.

In condizioni normali, il calore generato da una stella sostiene il peso della sua stessa atmosfera. Quando la stella esaurisce il suo combustibile nucleare, gli strati esterni collassano sul nucleo. Se la stella, tuttavia, possiede una massa minore di M_{Ch} , il collasso è impedito dalla pressione di degenerazione di elettroni o neutroni, per nane bianche e per stelle di neutroni rispettivamente. Il risultato è una stella degenerare stabile.

Se una stella incapace di produrre ulteriore energia ha una massa superiore, la pressione di degenerazione è insufficiente a contrastare la gravità. Poiché i neutroni hanno una massa circa 2000 volte maggiore a quella degli elettroni, essi acquistano energia più lentamente e sopportano una maggiore forza di gravitazione. Il limite di Chandrasekhar deriva dagli effetti della relatività speciale. I neutroni, che sono soggetti alla statistica di Fermi, non possono occupare il medesimo stato quantico.

Le energie in cui si trovano questi neutroni sono significative rispetto la loro massa a riposo e la loro velocità si avvicina a quella della luce, rendendo inadeguato il modello classico, il quale prevede un volume inversamente proporzionale alla massa della stella. Per il modello relativistico, deve esistere un limite alla massa consentita per un corpo a simmetria sferica, autogravitante, e supportato dalla pressione di degenerazione.

L'espressione matematica per il limite di Chandrasekhar è:

$$M_{Ch} \approx \frac{3\sqrt{2\pi}}{8} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \left[\left(\frac{Z}{A}\right) \frac{1}{m_H}\right]^2 \quad (1.1)$$

Questa formula è davvero notevole perché contiene tre costanti fondamentali (\hbar , c e G), le quali rappresentano gli effetti combinati della meccanica quantistica, della relatività e della gravitazione newtoniana sulla struttura della stella degenerata.

Nel caso in cui $Z/A = 0.5$, il limite vale 1.44 masse solari.

IV. Struttura delle stelle di neutroni

Le stelle di neutroni hanno una massa simile a quella del Sole, ma il loro raggio è circa 70.000 volte più piccolo rispetto a quello della nostra stella. La loro densità media è quindi dell'ordine di 10^{14} volte più alta di quella del Sole. Questi valori sono i più alti conosciuti e sono impossibili da riprodurre sperimentalmente. Valori simili si riscontrano solo nei nuclei atomici, tanto che le stelle di neutroni possono essere considerate come nuclei atomici giganti, tenuti insieme dalla forza gravitazionale.

Una stella di neutroni di massa pari a 1.4 masse solari è composta di $1.4 M_S/m_n \approx 10^{57}$ neutroni.^v Per apprezzare la natura esotica del materiale che costituisce una stella di neutroni e le difficoltà che implicano nel calcolo dell'equazione di stato, si immagini la configurazione d'equilibrio di 10^{57} nucleoni (neutroni e protoni), insieme ad un numero sufficiente di elettroni liberi per mantenere nulla la carica elettrica.

Per iniziare, a basse densità, i nucleoni si trovano nei nuclei di ferro, per i quali è massima l'energia di legame per nucleone. Questo è il risultato della condizione di minima energia tra la forza repulsiva coulombiana tra protoni, la forza attrattiva nucleare tra tutti i nucleoni ed il principio di Pauli.

Tuttavia, è importante sottolineare che quando la densità raggiunge il valore di 10^9 kg/m^3 gli elettroni diventano relativistici. Subito dopo, la configurazione d'energia minima di protoni e neutroni cambia perché gli elettroni così energetici possono convertire i protoni dei nuclei di ferro in neutroni, attraverso il processo di cattura elettronico (**processo β inverso**):

$$p^+ + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad (1.2)$$

Dal momento che la massa del neutrone è leggermente maggiore della somma delle masse del protone e dell'elettrone ($m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2 = 0.78 \text{ MeV}$), l'elettrone deve fornire la propria energia cinetica per guadagnare quel divario d'energia. Tuttavia, all'interno delle condizioni di completa degenerazione degli elettroni, non ci sono stati liberi disponibili da occupare per un elettrone emesso, e per tale motivo i neutroni non possono ritornare ad essere protoni.

A densità maggiori, la configurazione più stabile dei nucleoni è quella in cui neutroni e protoni si trovano in un reticolo cristallino formato da neutroni sempre più ricchi in neutroni. Questo processo è noto come **neutronizzazione** e produce una sequenza di nuclei come ${}^{56}_{26}\text{Fe}$, ${}^{62}_{28}\text{Ni}$, ${}^{64}_{28}\text{Ni}$, ${}^{66}_{28}\text{Ni}$, ${}^{86}_{36}\text{Kr}$, ... ${}^{118}_{36}\text{Kr}$.

In condizioni normali, questi nuclei con neutroni in eccesso sarebbero convertiti immediatamente attraverso il decadimento β standard. Solo recentemente alcuni di questi nuclei possono essere prodotti e studiati nei nostri laboratori.

Quando la densità raggiunge il valore di $4 \times 10^{14} \text{ kg/cm}^3$, la configurazione di minima energia è quella in cui alcuni neutroni si trovano all'esterno dei nuclei. La comparsa di tali neutroni liberi è denominata **gocciolamento di neutroni** e segna l'inizio di una miscela a tre componenti: reticolo cristallino di nuclei ricchi di neutroni, neutroni liberi non relativistici, ed elettroni relativistici.

Il fluido di neutroni liberi ha l'impressionante proprietà di non essere viscoso. Questo si spiega con l'avvenuto accoppiamento di due neutroni degeneri, per effetto della componente attrattiva a corto range della forza nucleone – nucleone (**pairing**)^{vi}. La combinazione di due fermioni (come i neutroni, appunto) è un bosone, il quale non è soggetto alle restrizioni del Principio di Pauli.

Dal momento che i bosoni degeneri possono *tutti* occupare lo stato d'energia più basso, il fluido di neutroni accoppiati non può perdere alcuna energia. Esso è un **superfluido** che scorre senza attrito. Qualunque vortice o turbolenza presenti all'interno del fluido continuerà ad esistere per sempre, senza fermarsi.

Al crescere della densità, il numero di neutroni liberi aumenta, mentre quello degli elettroni diminuisce. La pressione di degenerazione dei neutroni supera quella degli elettroni quando la densità è circa a $4 \times 10^{15} \text{ kg/m}^3$. In prossimità del centro della stella, i nuclei si dissolvono e la distinzione tra neutroni interni ed esterni ai nuclei diventa priva di alcun significato: neutroni, protoni ed elettroni sono così liberi.

Anche i protoni si accoppiano, formando un fluido **superconduttivo** con resistenza elettrica nulla. Il rapporto neutroni:protoni:elettroni raggiunge il valore limite di 8:1:1, come si può determinare dal bilanciamento tra il processo di cattura elettronica ed il decadimento β , inibito dalla presenza degli elettroni degeneri.

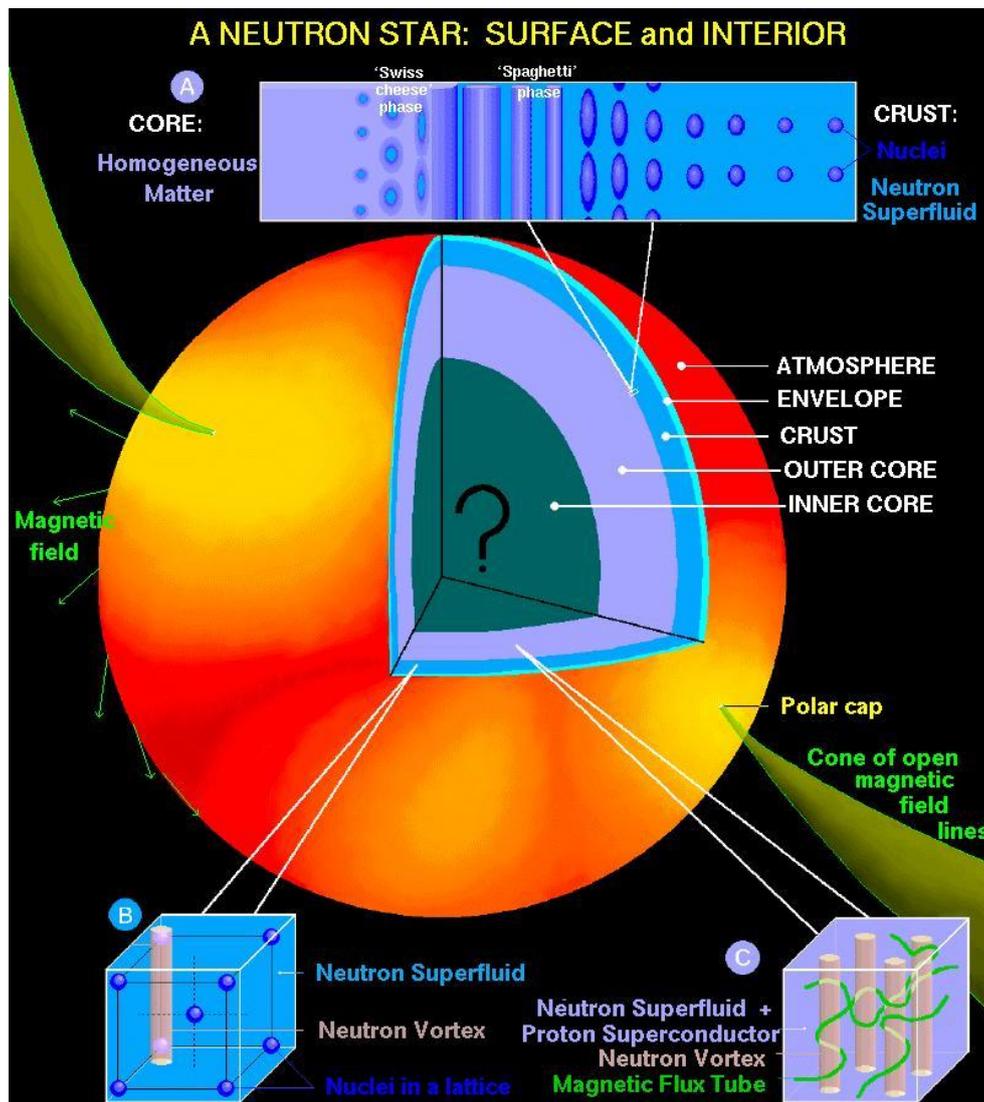


Figura 1.1: Spaccato della struttura interna di una stella di neutroni.

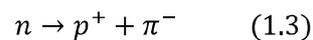
Nella figura sono indicate: l'atmosfera; l'involucro; la crosta; il nucleo esterno; il nucleo interno.

È, inoltre, mostrata la composizione della materia della stella:

- nel riquadro A, i neutroni passano dallo stato superfluido della crosta allo stato di materia omogenea del nucleo;
- nel riquadro B, i neutroni superfluidi della crosta occupano lo spazio lasciato vuoto dai nuclei del reticolo cristallino, innescando dei vortici;
- nel riquadro C, i neutroni superfluidi del nucleo esterno si mescolano ai protoni superconduttivi.

Le proprietà della materia nucleare a densità ancora maggiori è purtroppo poco compresa. Una completa descrizione teorica del comportamento del mare di neutroni, che interagiscono mediante la forza nucleare forte in presenza di elettroni e protoni, non è ancora disponibile e pochi sono anche i dati sperimentali sul comportamento della materia per questi intervalli di densità.

Un'ulteriore complicazione è la comparsa delle particelle elementari esotiche come i pioni (π) prodotte dal decadimento del neutrone in un protone e in un pione con carica elettrica negativa, che avviene spontaneamente per densità maggiori di $2 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$:



Il primo modello quantitativo di una stella di neutroni fu calcolato da J. Robert Oppenheimer e G. M. Volkoff dell'università di Berkeley nel 1939^{vii}. Sebbene i dettagli siano sensibili all'equazione di stato adottata e gli studi attuali prevedano una struttura più complessa, è possibile delineare un modello che mostra alcune caratteristiche tipiche:

1. la **crosta esterna** è composta da nuclei pesanti, in forma sia liquida sia solida, e da elettroni degeneri relativistici. Vicino alla superficie, i nuclei probabilmente sono di ^{56}Fe . A densità e profondità maggiori, si incontrano nuclei a mano a mano sempre più ricchi di neutroni, finché non inizia il processo del gocciolamento dei neutroni;
2. la **crosta interna** è formata da un reticolo cristallino di nuclei, un superfluido di neutroni e da elettroni degeneri relativistici. Essa termina quando la densità raggiunge la densità dei nuclei atomici ed i nuclei si dissolvono;
3. il **nucleo esterno** di una stella di neutroni consiste in primo luogo di neutroni superfluidi, con una piccola frazione di protoni superfluidi e superconduttivi ed elettroni degeneri relativistici;
4. nel **nucleo interno** della stella potrebbero trovarsi pioni o altre particelle elementari, come le particelle strane (Λ , K ,...). È stata inoltre ipotizzata l'esistenza di un plasma di quark e gluoni, con i quark in stato superconduttivo.^{viii}

TABELLA 1.2

Densità di transizione (kg/m ³)	Composizione	Pressione di degenerazione
	nuclei di ferro, elettroni liberi non relativistici	elettroni
$\approx 1 \times 10^9$	GLI ELETTRONI DIVENGONO RELATIVISTICI	
	nuclei di ferro, elettroni liberi relativistici	elettroni
$\approx 1 \times 10^{12}$	NEUTRONIZZAZIONE	
	nuclei ricchi di neutroni, elettroni liberi relativistici	elettroni
$\approx 4 \times 10^{14}$	GOCCIOLAMENTO DI NEUTRONI	
	nuclei ricchi di neutroni, neutroni liberi, elettroni liberi relativistici	elettroni
$\approx 4 \times 10^{15}$	LA PRESSIONE DI DEGENERAZIONE DEI NEUTRONI DIVENTA DOMINANTE	
	nuclei ricchi di neutroni, neutroni liberi superfluidi, elettroni liberi relativistici	neutroni
$\approx 2 \times 10^{17}$	I NUCLEI SI DISSOLVONO	
	neutroni liberi superfluidi, protoni liberi superconduttori, elettroni liberi relativistici	neutroni
$\approx 4 \times 10^{17}$	PRODUZIONE DI PIONI	
	neutroni liberi superfluidi, protoni liberi superconduttori, elettroni liberi relativistici, altre particelle elementari	neutroni

Tabella 1.2: Composizione, densità di transizione e pressione di degenerazione di una stella di neutroni.

V. Stati esotici della materia

Fino a questo punto della discussione, sono stati considerati solo tre particelle fondamentali all'interno di una stella di neutroni (neutroni, protoni ed elettroni) tutti obbedenti alla statistica di Fermi – Dirac. È ragionevole chiedersi se i mesoni come i pioni o i kaoni possano esistere nella materia condensata, ed in caso affermativo aspettarsi delle interessanti conseguenze.

I mesoni π si presentano con carica negativa, positiva o nulla e possiedono una massa a riposo di circa 139.6 MeV. Poiché la materia nucleare ordinaria è in equilibrio beta nel cuore della stella, quando la differenza di energie tra neutroni e protoni supera la massa a riposo di π , il decadimento di un neutrone in protone e pione è energeticamente favorito (1.3).

Tenendo conto delle interazioni di tali mesoni con il mezzo nucleare, questo processo potrebbe avere luogo per densità appena maggiori di quelle nucleari. Ci si aspetta, inoltre, che questi formino un **condensato di Bose – Einstein** (BEC) a temperature sufficientemente basse perché obbediscono alla statistica di Bose e non di Fermi. Una proprietà fondamentale di un gas ideale di bosoni è che al di sotto di una certa temperatura critica si verifica un'occupazione macroscopica dello stato ad energia minimo.

Chiamiamo questa temperatura critica T_0 . Il numero di particelle nello stato fondamentale è fornito dalla seguente espressione:

$$N(0) = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \right] \quad (1.4)$$

Ne consegue che a temperature molto basse, gran parte delle particelle si troveranno nello stato con energia minima, formando il cosiddetto condensato di Bose. Una conseguenza fondamentale di questo stato della materia è che “ammorbidisce” l'equazione di stato perché esso non contribuisce alla pressione.

VI. Materia di quark

A densità dell'ordine di $4 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$, i nuclei si fondono tra di loro e si dissolvono in un fluido continuo di protoni e neutroni. Tuttavia, queste non sono particelle fondamentali ma sono composti dai cosiddetti **quark**^{ix}. Per questa ragione non è sbagliato aspettarsi che quando neutroni e protoni si fondono insieme, la descrizione della composizione della stella più appropriata sia quella che tiene conto, appunto, dei quark.

In linguaggio tecnico, si dice che i quark sono delocalizzati. La spiegazione di questo termine è semplice: non esistono quark liberi perché le forze tra di essi crescono con la distanza, ma per le particolari condizioni riscontrabili all'interno di una stella di neutroni, tali forze possono essere trascurate e i quark considerati come essenzialmente liberi. Particelle pesanti come neutrone e protone contengono al loro interno quark e gluoni (responsabili dell'interazione forte) cosicché essi sono confinati. Ma per elevate scale di temperatura e densità è possibile che la materia consista di un mare di Fermi di quark.

È interessante chiedersi se un simile plasma di quark e gluoni (**quark – gluon plasma**) esista vicino al centro della stella di neutroni. È un questione molto delicata e la risposta è ben lontana dall'essere definitiva. In accordo con le migliori stime disponibili, a bassa densità barionica la transizione di fase da materia barionica al plasma di quark e gluoni dovrebbe avere luogo ad una temperatura prossima ai 10^{12} K. Viceversa, a temperature estremamente basse una tale transizione si verifica per densità comprese tra le 5 e le 10 volte la densità nucleare.

Tali valori di densità probabilmente non sono raggiunte nemmeno nel cuore di una stella di neutroni, ma è bene considerare la questione come irrisolta piuttosto che negare ogni possibilità che questo plasma possa formarsi. Inoltre la materia di quark avrebbe anche una luminosità molto intensa legata al neutrino che potrebbe condurre ad un rapido raffreddamento della stella.

VII. Rotazione

Le stelle di neutroni ruotano molto rapidamente dopo la loro formazione, a causa della conservazione del momento angolare. Una stella appena formatasi può ruotare alcune volte al secondo; quando orbitano con una stella compagna e ricevono materia da essa, possono aumentare il loro periodo di rotazione fino a centinaia di volta al secondo, assumendo una forma oblatata sferoidale nonostante la loro immensa gravità.

Col passar del tempo, le stelle di neutroni rallentano poiché il campo magnetico rotante irradia energia. La velocità con cui rallentano è solitamente costante ed estremamente piccola: il tasso osservato di decelerazione è compreso tra 10^{-10} e 10^{-21} secondi ad ogni rotazione. Questo vuol dire che una stella di neutroni che oggi ruota in 1 secondo, tra un milione di anni ruoterà all'incirca in 1.03 secondi.^x

Talvolta una stella di neutroni può presentare un rapido ed inaspettato aumento della sua velocità di rotazione. Questo fenomeno è conosciuto con il nome di **glitch**. Si suppone che i glitches siano gli effetti di “stelle-moti”: come la stella rallenta la rotazione, la sua forma diventa più sferica. Dal momento che la sua crosta è rigida, essa si frattura per adattarsi alla nuova configurazione sferica. Dopo lo “stella-moto”, la stella avrà un raggio equatoriale minore e, poiché il momento angolare si deve sempre conservare, la velocità rotazionale aumenta.

Recenti studi, tuttavia, riferiscono che una stella moto non sarebbe in grado di rilasciare sufficiente energia per un glitch. È stato così proposto che essi siano causati dalla transizione di vortici nel nucleo superfluido della stella da uno stato energetico metastabile ad uno più basso^{xi}.

Un superfluido può ruotare soltanto formando vortici quantizzati, dove il numero di vortici per un'unità di superficie è proporzionale al tasso di rotazione. Le linee del vortice si muovono dal centro della stella verso l'esterno, riducendo la sua densità e quindi la velocità di rotazione del superfluido.

La coesistenza di superfluido e reticolo cristallino nella crosta comporta delle dinamiche rotazionali ben precise, dal momento che le linee del vortice si fissano ai nuclei del reticolo (**pinning**). Per questo il tasso di rotazione impiega mesi o anni per rilassarsi dopo un glitch. Se l'interno della stella fosse stato formato da materia normale, i processi viscosi avrebbero portato a tempi di rilassamento di gran lunga minori.

Qual è la spiegazione fisica del pinning? Una linea di vortice è una singolarità nella fase della funzione d'onda che governa le particelle del superfluido. La velocità del superfluido circolante in una linea di vortice quantizzata decresce come $1/r$, dove r è la distanza dall'asse del vortice. L'energia cinetica di ciascuna particella decresce come $1/r^2$, mentre l'energia che ogni particella acquista durante la fase superfluida – l'energia di condensazione – è circa Δ^2/E_F , dove Δ è il gap di energia del superfluido e E_F è l'energia di Fermi.

Figura 1.2: Densità, composizione e stratificazione di una stella di neutroni.

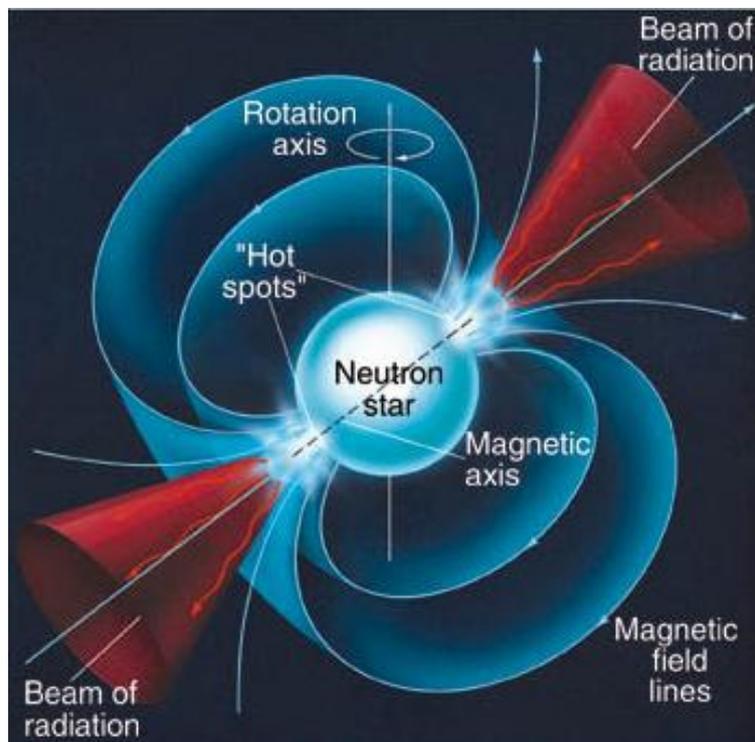
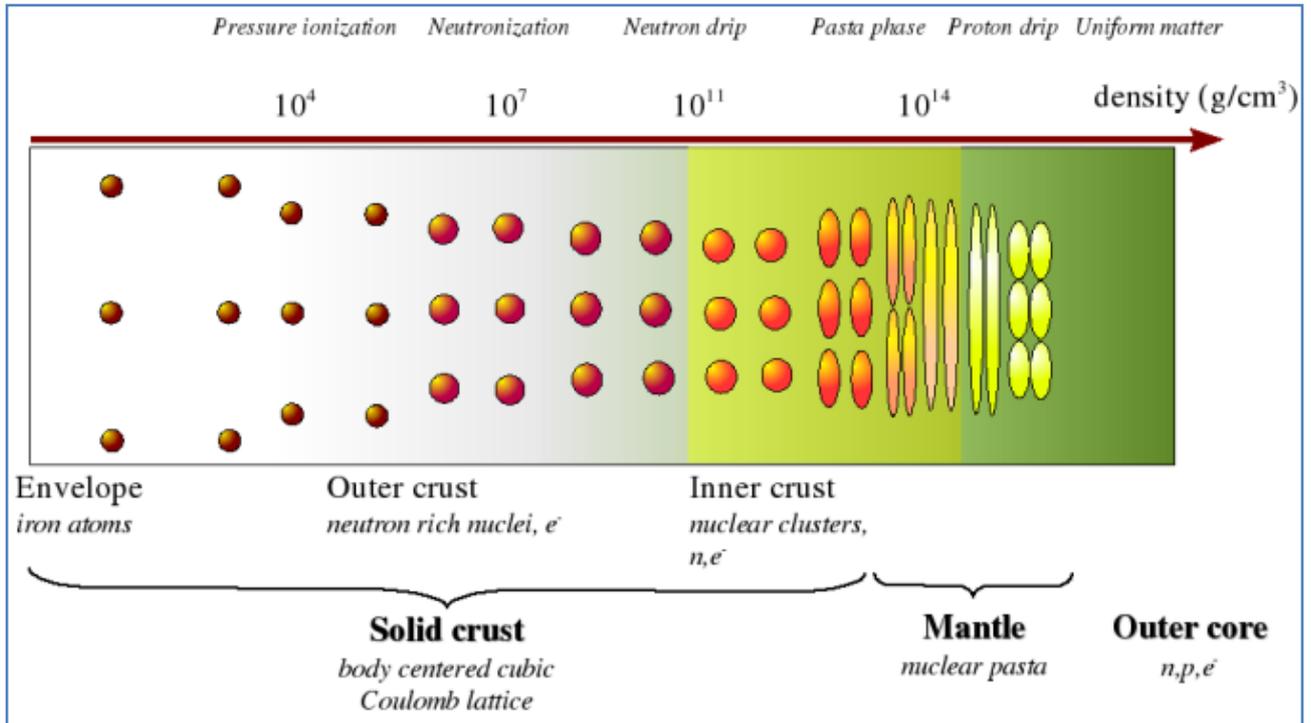


Figura 1.3: Rotazione di una stella di neutroni intorno al proprio asso di rotazione, inclinato rispetto a quello magnetico. Questo è all'origine dell'effetto faro.

Ad una distanza critica, chiamata **lunghezza di coerenza**, ζ , la perdita in energia cinetica supera l'energia di condensazione. A distanze inferiori, la linea di vortice consiste di un "core" cilindrico che circonda la singolarità, entro il quale le particelle sono nello stato normale superfluido. Se l'energia di condensazione varia per lunghezze di scala di ζ , le linee del vortice saranno fissate in certi punti precisi.

Questa appena descritta è la situazione nella crosta di una stella di neutroni, dove la densità e l'energia di condensazione del superfluido hanno differenti valori dentro e fuori i nuclei. La dimensione del nucleo è circa 10 fm, confrontabile con la lunghezza di coerenza, mentre quella del reticolo è di 30 – 50 fm. Le forze di pinning, perciò, tendono a fissare le linee del vortice ai nuclei del reticolo.

La sfida è calcolare e confrontare le energie in due occasioni: quando la linea del vortice attraversa un nucleo e quando non lo fa. Per stimare l'energia di condensazione all'interno di un nucleo, si combinano la densità locale di neutroni superfluidi e il valore di Δ per un superfluido omogeneo di neutroni alla stessa densità.

I risultati suggeriscono che la forza di pinning tra un nucleo e la linea di un vortice è circa 0.5 MeV/fm e pertanto non è in grado di spostare i nuclei dal loro punto d'equilibrio nel reticolo, così la linea di vortice probabilmente si lega solo ai nuclei che si trovano all'interno del proprio "core".

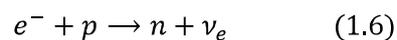
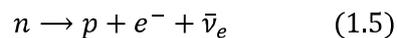
Le stelle di neutroni possono emettere radiazione elettromagnetica pulsata per l'accelerazione di particelle vicina ai poli magnetici, che non sono allineati con l'asse di rotazione della stella. Sebbene il meccanismo non sia del tutto compreso, queste particelle producono fasci coerenti di emissione radio. Gli osservatori esterni vedono questi fasci come pulsazioni di radiazione, con periodo pari al periodo di rotazione della stella, quando il polo magnetico è diretto verso di essi. Questa classe di stelle di neutroni è chiamata **pulsar**^{xii}.

VIII. Raffreddamento

Le misure delle temperature superficiali di una stella di neutroni possono fornirci numerose informazioni riguardanti la struttura e la materia adronica di cui è composta la stella^{xiii}.

Ci si aspetta che al momento della loro formazione in seguito all'esplosione di supernova, le stelle di neutroni raggiungano temperature elevatissime, dell'ordine di 10^{11} K. Com'è possibile allora che la temperatura massima della pulsar del Granchio sia di 10^6 K sebbene la corrispondente supernova sia esplosa solo nel 1054 d.C.? Com'è possibile che la temperatura scenda fino a pochi milioni di gradi in un migliaio di anni? Il meccanismo dominante di raffreddamento è in una calda stella di neutroni è l'emissione del neutrino.

A temperature elevate ($T > 10^9$ K), il procedimento principale per la perdita di energia è il cosiddetto **processo URCA**^{xiv}:



Questo processo è abbastanza importante se la materia non è degenere. Tuttavia, durante il tempo in cui la stella di neutroni si è raffreddata fino a raggiungere i 10^9 K, i nucleoni diventano sempre più degeneri e queste reazioni sono sempre più ridotte. Cerchiamo di capire le ragioni per cui le cose stanno così. Nell'equilibrio beta i potenziali chimici di neutroni, protoni ed elettroni, sono così legati:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad (1.7)$$

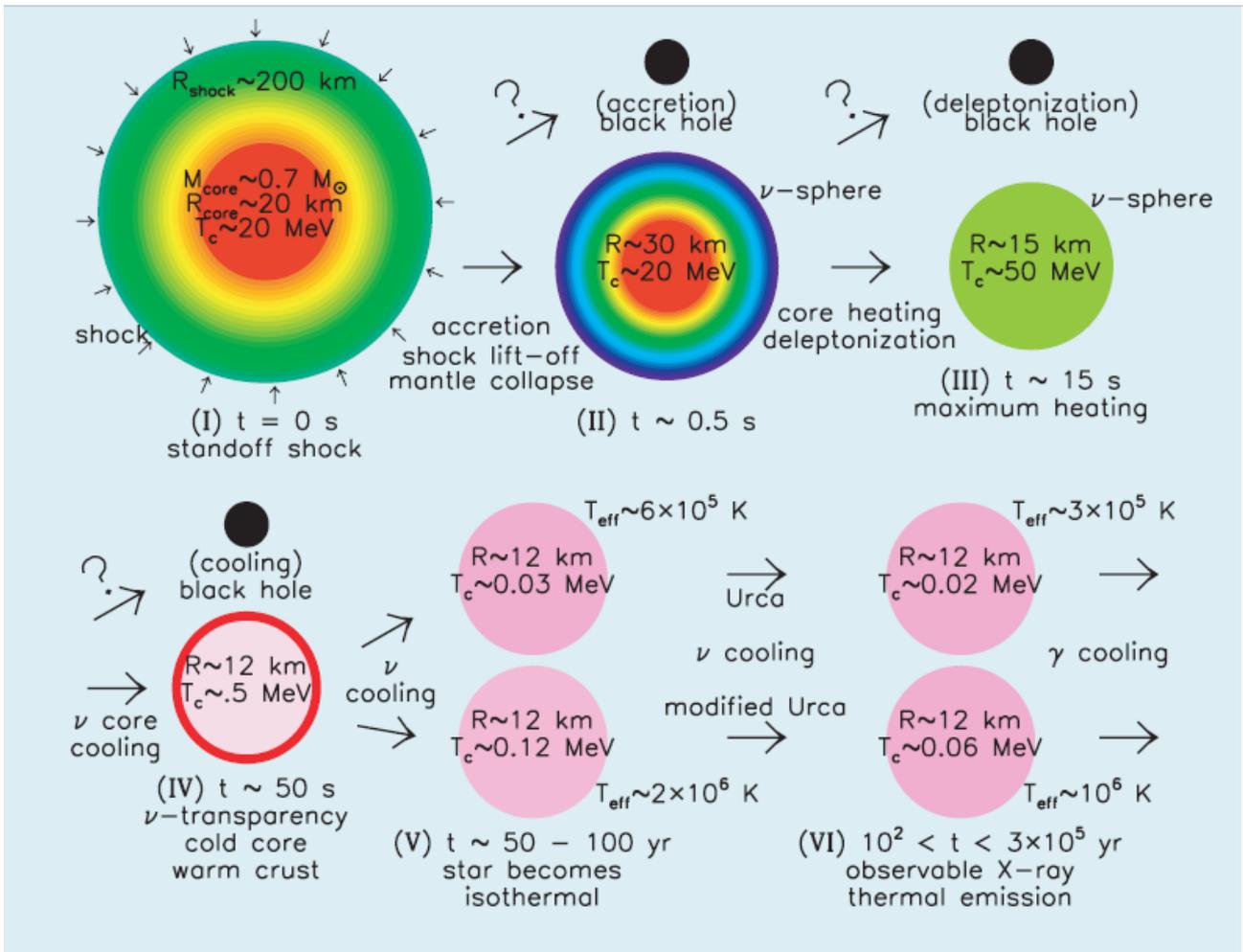


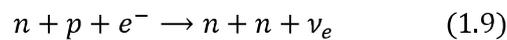
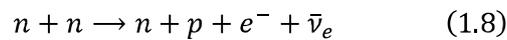
Figura 1.4:

Le principali fasi dell'evoluzione di una stella di neutroni. Ad ogni stadio corrisponde un numero romano. Sono indicati, al passare del tempo, il raggio R e la temperatura centrale T_c per una stella di neutroni e le principali manifestazioni fisiche a noi conosciute.

I soli neutroni che possono decadere sono quelli contenuti nell'intervallo kT attorno alla superficie di Fermi. Per la conservazione dell'energia, anche i protoni ed elettroni finali devono trovarsi entro lo stesso intervallo energetico ed il neutrino non può che avere un'energia prossima a kT .

Inoltre, i momenti di Fermi di protone ed elettrone saranno piccoli rispetto a quello del neutrone a causa della loro minore densità.^{xv} Per cui, un tale decadimento beta del neutrone non può conservare contemporaneamente energia e momento. Affinché il processo URCA funzioni, deve esserci allora qualcosa che assorba il momento in eccesso.

Questo fu fatto notare per la prima volta da Chiu e Salpeter^{xvi} nel 1964, i quali suggerirono delle reazioni URCA modificate come di seguito:



Un tipico risultato della luminosità del neutrino di questi processi è:

$$L_\nu = (4.95 \times 10^{37}) \frac{M}{M_\odot} \left(\frac{\rho_{nuc}}{\rho} \right)^{1/3} T^8 \frac{J}{s} \quad (1.10)$$

La temperatura di una stella di neutroni può essere calcolata come una funzione del tempo. L'energia termica della stella risiede principalmente nei nucleoni degeneri. Trascurando le interazioni tra i nucleoni, la capacità termica di queste particelle è data da:

$$C_v = N c_v = \left. \frac{dU}{dT} \right|_v \quad (1.11)$$

dove c_v è il calore specifico per particella. L'equazione di raffreddamento è:

$$\frac{dU}{dT} = C_v \frac{dT}{dt} = -(L_\nu + L_\gamma) \quad (1.12)$$

dove L_ν è la luminosità totale dei neutrini e L_γ la luminosità dei fotoni. Assumendo un'emissione di corpo nero dalla superficie della stella ad una temperatura effettiva T_e , si ha:

$$L_\gamma = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 = (6.54 \times 10^{34}) \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^2 T_e^4 \frac{J}{s} \quad (1.13)$$

A questo punto si possono inserire le luminosità appropriate dei fotoni e dei neutrini nell'equazione (1.12) ed il suo integrale ci fornisce il tempo che impiega una stella per raffreddarsi da una temperatura iniziale T_i ad una finale T_f .

I calcoli finora esposti considerano neutroni e protoni in condizioni normali e non con comportamenti da superfluidi. La superfluidità ha due effetti sulla curva di raffreddamento:

1. modifica il calore specifico tendendo a diminuire il tasso di raffreddamento subito al di sotto della temperatura di transizione ed aumentarlo a temperature molto più basse;
2. impedisce i processi di formazione del neutrino all'interno della stella.

Inoltre, bisognerebbe tenere conto del campo magnetico prodotto dalla stella, i cui effetti acquistano una notevole importanza perché riduce la capacità termica relativa all'emissione di fotoni sulla superficie dell'astro.

IX. Campo gravitazionale

Il campo gravitazionale superficiale^{xvii} delle stelle di neutroni è circa 10^{11} volte più intenso di quello terrestre, così che la velocità di fuga da una stella di neutroni si aggira sui 100.000 km/s, cioè un terzo della velocità della luce.

Le prime osservazioni di radioemissioni polarizzate di pulsar e, in particolare, la rotazione del piano di polarizzazione degli impulsi, indicavano la presenza di un campo magnetico. La decelerazione osservata corrispondeva ad intensità comprese tra 10^6 e 10^9 tesla (T). Anche se sono campi davvero molto intensi, non è difficile da darne una spiegazione fisica, perché durante il collasso di una stella il campo magnetico è fortemente vincolato al plasma ionizzato dal ben noto processo del **congelamento del flusso magnetico**.

Il teorema di Alfvén^{xviii} afferma che, in un fluido conduttore con resistività nulla, le linee di campo magnetico rimangono congelate in un dato volume del fluido. La sua dimostrazione è abbastanza elementare nel contesto della magnetoidrodinamica ideale. Questo teorema stabilisce che le linee di campo magnetico non sono indipendenti dall'evoluzione della velocità del fluido, ponendo un vincolo assai restrittivo sulla topologia delle linee del campo e ne limita fortemente le possibili configurazioni.

Possiamo capirlo semplicemente pensando ad un fluido conduttore con un campo magnetico solo in direzione \mathbf{y} , $\vec{B} = B_y \hat{y}$, e senza la presenza di un campo elettrico. Supponiamo per assurdo che il fluido riesca a sviluppare una velocità v_x nella direzione \mathbf{x} che si oppone quindi al campo magnetico B_y . Allora, dal momento che:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \quad (1.14)$$

ed il campo elettrico dentro al fluido è nullo, compare una corrente

$$j_z = \frac{v_x B_y}{\eta} \quad (1.15)$$

In corrispondenza a tale corrente, compare una forza di Lorentz nella direzione \mathbf{x} , pari a

$$F_x = -j_z B_y = -\frac{v_x B_y^2}{\eta} \quad (1.16)$$

In sostanza, non appena il fluido sviluppa una velocità che si oppone al campo magnetico, compare una forza che tende ad opporsi a tale forza, la quale diverge per $\eta \rightarrow 0$. Quindi nel fluido si formano continuamente delle correnti che tendono a congelare la topologia del campo magnetico, ad eccezione di regioni in cui il campo magnetico è nullo.

Questo fatto evidenzia l'importanza della resistività: una resistività anche piccola può portare le linee di campo magnetico a rompersi e a riconnettersi in una topologia diversa. Questi fenomeni sono noti come **riconnesione magnetica** e sono un importantissimo fenomeno nei plasmi. Poiché la resistività è quasi ovunque molto piccola, tali fenomeni saranno confinati entro regioni spaziali molto piccole, denominate "strati resistivi", in cui possono formarsi lamine molto sottili di corrente.

In un collasso sferico l'intensità del campo magnetico aumenta secondo la legge $B \propto r^{-2}$; se una stella come il Sole ha un campo magnetico di 10^{-2} T, si potrà avere un valore di 10^8 T quando il raggio iniziale si è ridotto di un fatto 10^{-5} . Le stelle di neutroni sono attraversate da intensi campi magnetici che ne possono influenzare la struttura interna. Si potrebbe pensare che i campi vengano espulsi dalle regioni centrali, per via della presenza del fluido superconduttore di protoni, ma il gas di elettroni relativistici degeneri ne assicura invece la presenza.

Per completare il quadro della stella di neutroni dobbiamo anche considerare la rotazione, alla quale si devono gli impulsi periodici delle pulsar osservati nelle frequenze delle onde radio e dei raggi X. L'effetto è attribuito alla rotazione di un fascio di raggi emesso dai poli magnetici della stella verso l'osservatore (*effetto faro*). La pulsar più veloce osservata a tutt'oggi è PSR J 1748-2446, con una frequenza di rotazione ν di 716 Hz.

È interessante confrontare il periodo di rotazione di una stella di neutroni con la massima energia rotazionale che può avere senza disintegrarsi. Si può stimare approssimativamente tale limite uguagliando l'energia di rotazione all'energia gravitazionale. Per una stella di neutroni di massa pari alla massa solare, il periodo critico è una frazione di millisecondo, molto inferiore ai periodi osservati di qualunque pulsar.

2. FASI DELLA MATERIA NUCLEARE

I. Introduzione

Come lo stato di un insieme di atomi o molecole dipende dalle condizioni di temperatura e pressione in un dato istante, così lo stato di un nucleo dipende dalla temperatura e dalla densità dei suoi costituenti, i nucleoni.

La domanda che ci si può porre è la seguente: qual è l'equazione di stato per la materia nucleare? Nel loro stato normale di minima energia, i nuclei manifestano delle caratteristiche simili a quelle dei liquidi e hanno una densità^{xix} pari a $0.16 \text{ nucleoni}/\text{fm}^3$ o, in unità convenzionali, $2.7 \times 10^{17} \text{ kg}/\text{m}^3$.

In un laboratorio di ricerca, l'unico modo possibile per scaldare i nuclei a temperature significative è attraverso la collisione con altri nuclei. Le temperature che si raggiungono sono dell'ordine di 100 MeV , a cui corrisponde una temperatura di $1.2 \times 10^{12} \text{ K}$.

Scaldando un nucleo alla temperatura di alcuni MeV , parte del suo "liquido" nucleare evaporerà. Conoscendo la forma generale dell'interazione tra nucleoni, sappiamo che il liquido nucleare possiede un proprio calore latente di vaporizzazione e che i nuclei possono essere sottoposti ad una transizione di fase. È previsto anche che la coesistenza di liquido e gas termini ad un punto preciso, il punto critico della materia nucleare.

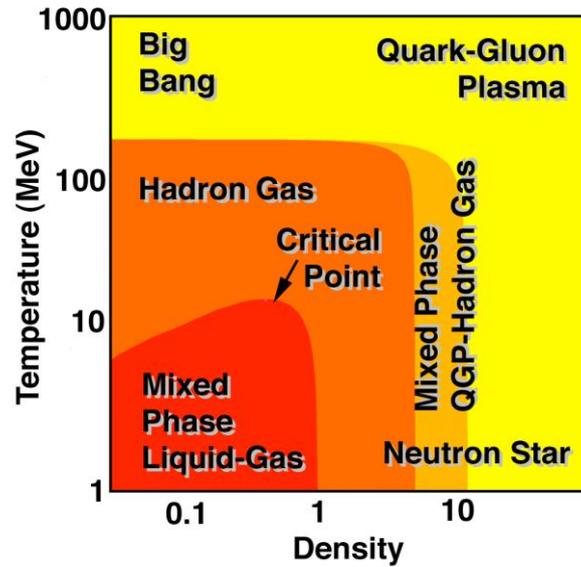


Figura 2.1:

Diagramma di fase della materia nucleare, come predetto teoricamente.

Lungo l'asse delle ascisse è posta la densità di materia $u = n/n_0$ (adimensionale), mentre l'asse verticale mostra la temperatura T (MeV).

Entrambi gli assi sono mostrati in scala logaritmica e la densità è data in multipli della normale densità della materia nucleare.

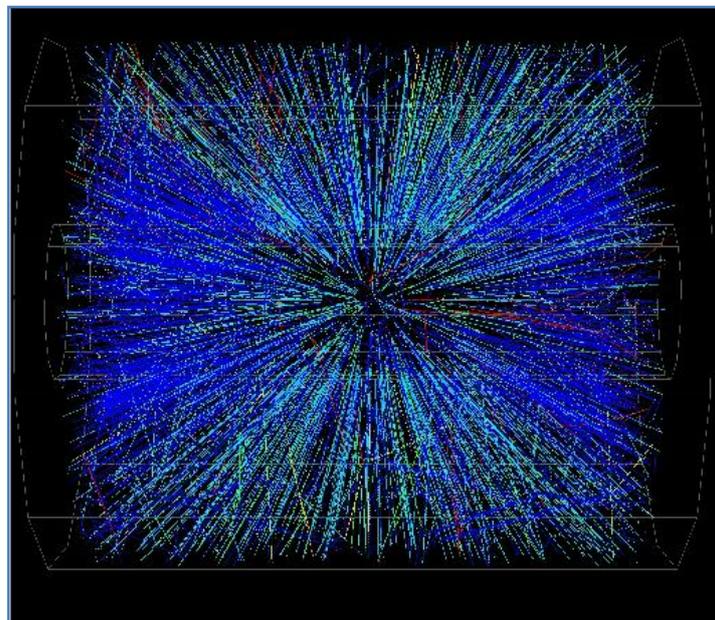


Figura 2.2: Quest'immagine mostra la collisione di due nuclei d'oro.

Ogni linea rappresenta il percorso di una particella prodotta nella collisione. Essa è registrata elettronicamente; la massa ed il momento di ciascuna particella sono assegnati da un sofisticato software.

II. Evidenze sperimentali del quark – gluon plasma (QGP)

I fisici nucleari affrontano le maggiori sfide nel tentativo di esplorare l'equazione di stato della materia nucleare e queste transizioni di fase. Nonostante le numerose difficoltà, abbiamo un chiaro quadro di come le variabili di stato termodinamiche (temperatura, pressione e densità) possano essere misurate durante la collisione con ioni pesanti attraverso altre grandezze, quali:

- l'abbondanza di isotopi;
- la popolazione degli stati nucleari eccitati;
- le forme degli spettri energetici dai residui della collisione nucleare;
- la produzione di particelle come i pioni.

Le informazioni sulle dimensioni dei frammenti prodotti dallo scontro tra ioni pesanti, quando la materia nucleare è vicina al punto critico, forniscono dati essenziali circa l'equazione di stato nucleare. Inoltre, ci sono prove evidenti della coesistenza delle fasi ed è possibile fissare il punto critico sul diagramma di fase.

L'area gialla della Figura 2.1 mostra che la transizione di fase tra il liquido nucleare e il gas di nucleoni non è l'unica transizione di fase che gli scienziati stanno studiando. A temperatura e densità ancora maggiori, i nucleoni stessi possono subire una transizione di fase.

Possiamo interpretare ogni nucleone come un "contenitore" di quark e gluoni. Questi possono muoversi relativamente liberi all'interno del nucleone ma, come prevede la teoria, non possono uscire da esso: sono confinati. Per questa ragione, non si sono mai individuati dei quark o gluoni indipendenti. Tuttavia, se fossimo capaci di produrre un gas di adroni estremamente denso, si arriverebbe alla condizione di sovrapposizione di questi contenitori che permetterebbe ai quark e ai gluoni di spostarsi da un nucleone all'altro per l'intero volume del nucleo atomico.

È questo lo stato di **quark – gluon plasma**.

La sfida estrema per gli scienziati è legata al tempo di vita medio del plasma: 10^{-22} secondi. Dopodiché, la densità e la temperatura raggiunte durante una collisione a ioni pesanti scendono a valori che forzano quark e gluoni a ricombinarsi nuovamente negli adroni (particelle interagenti fortemente, in particolare mesoni π)^{xx}.

Il numero delle particelle prodotte in collisioni relativistiche è impressionante. Per ogni nucleone inizialmente contenuto, ad esempio, in due nuclei d'oro, che collidono con un'energia di 200 GeV/nucleone , possono essere prodotti più di 50 pioni. Il problema principale è, quindi, distinguere tra gli adroni formati dalle ceneri del quark – gluon plasma e quegli adroni creati in un denso gas di soli adroni.

La figura 2.2 mostra una singola collisione di ioni pesanti. Ogni linea rappresenta una particella individuata e misurata dal campo magnetico del detector, con i colori che indicano i differenti impulsi della particelle. L'analisi dei dati è volta a capire se la collisione avvenuta mostra una qualunque prova che ci sia stata formazione di quark – gluon plasma. Le informazioni trasportate dalle particelle energetiche prodotte negli stadi iniziali e finali della collisione devono essere attentamente interpretate per comprendere la fisica del processo di collisione.

Qual è lo scopo dello studio del diagramma di fase della materia nucleare? La risposta è che abbiamo bisogno di queste informazioni per comprendere la storia primordiale del nostro universo e per comprendere degli oggetti ad elevata densità, quali le stelle di neutroni.

In alto a sinistra nella figura 2.1 c'è una regione evidenziata con l'etichetta “*Big Bang*”, mentre nella figura 2.3 c'è scritto “*Early Universe*”. Durante il primo microsecondo dopo il Big Bang, l'intero universo doveva trovarsi nello stato lì indicato. Il Large Hadron Collider (**LHC**) del **CERN**^{xxi} di Ginevra produrrà condizioni del tutto simili a quelle dei primi istanti di vita dell'universo, creando materia ed antimateria in egual quantità.

Dall'esperimento **ALICE** ci si attende di trovare evidenze della transizione di fase al quark – gluon plasma, portando due nuclei di piombo a collidere con una energia nel centro di massa di 5 TeV per coppia di nucleoni.

Sempre nelle stesse figure, c'è una regione evidenziata con “*Stella di neutroni*”. Alcune teorie prevedono che le stelle di neutroni di massa sufficientemente elevata potrebbero raggiungere nel nucleo densità così elevate da produrre uno stato di quark – gluon plasma.

Esaminiamo questo nuovo grafico della figura 2.4 sulla transizione di fase della materia nucleare.

Il grafico si divide in due parti, separate da una fascia di colore verde. La parte inferiore alla curva rappresenta la fase adronica, composta in prevalenza da pioni. Anche la materia ordinaria (il nucleo di un atomo) si trova in questa regione con densità dell'ordine di $\rho_N=10^{14} \text{ g/cm}^3$. La parte superiore, invece, rappresenta la fase del plasma di quark e gluoni (QGP). La formazione di questo stato della materia avviene o quando la densità barionica è 5 volte la densità nucleare oppure quando si raggiungono temperature dell'ordine di 10^{12} K .

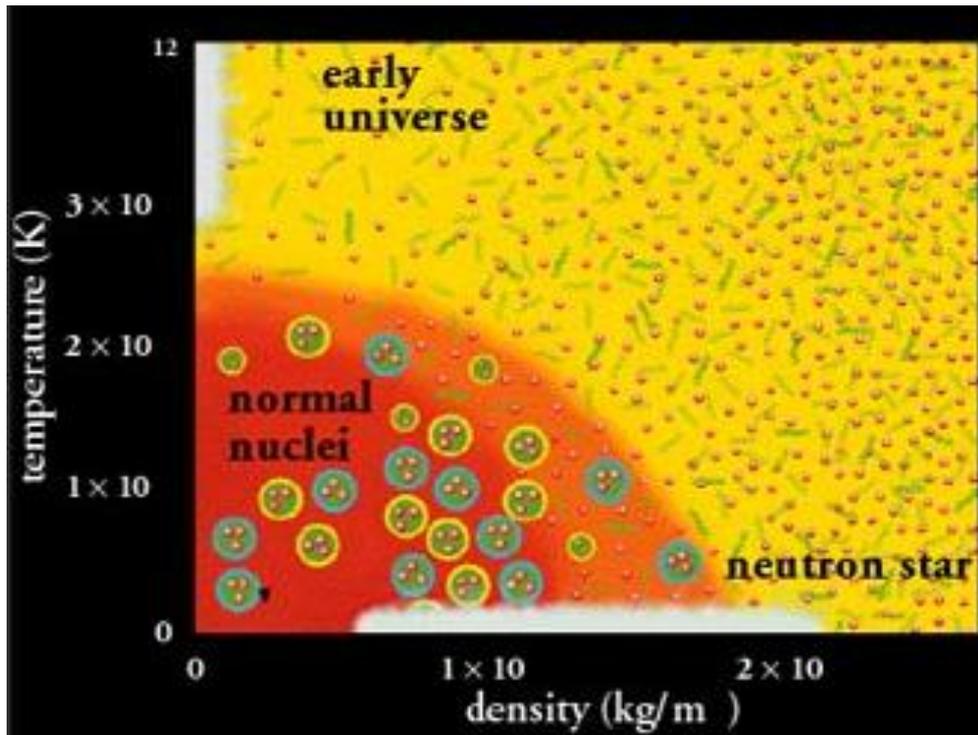


Figura 2.3: Diagramma di fase per la material nucleare simile al precedente.

Nell'area del gas di adroni c'è una rappresentazione artistica dei quark. La regione a fase mista mostra l'esistenza sia di adroni sia di quark e gluoni.

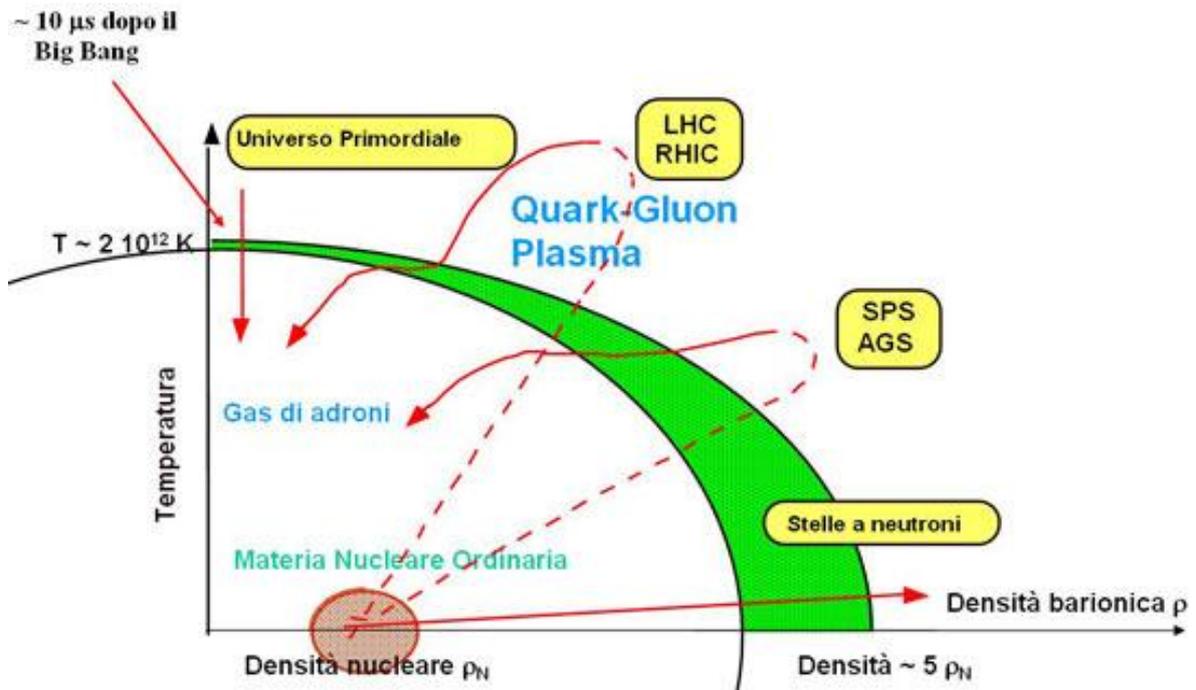


Figura 2.4: Ulteriore diagramma della transizione di fase, in cui è chiaro che la regione del quark – gluon plasma è interessata dall'universo primordiale, dalle stelle di neutroni e anche dagli esperimenti terrestri nei laboratori (RHIC, LHC).

Sono questi dei valori assolutamente eccezionali in natura. È sufficiente considerare che la temperatura al centro del nostro Sole è di circa 10^7 K, ben cinque ordini di grandezza in meno della temperatura necessaria per avere il quark – gluon plasma. In natura, tuttavia, queste condizioni estreme di temperatura sono state raggiunte per pochi istanti (10^{-6} s) durante il Big Bang. Attualmente si ipotizza che possa esistere uno stato di QGP a temperature basse ma a densità barioniche elevatissime ($\rho \approx 10^{14}$ g/cm³) nel nucleo delle stelle di neutroni.

Nel grafico sono riportati anche i nomi dei più importanti esperimenti di fisica (**LHC** e **RHIC**) dai cui risultati sarà possibile avere maggiori informazioni circa le transizioni di fase della materia nucleare. Per produrre in laboratorio lo stato di QGP, bisogna raggiungere condizioni di temperature e densità della materia elevatissime. Per ottenere queste condizioni, si fanno scontrare tra di loro ioni pesanti di altissime energie.

Le tecniche adoperate per far collidere gli ioni pesanti sono due:

1. tecnica del bersaglio fisso: si accelerano gli ioni finché questi non sono dotati di energie cinetiche elevate e poi sono inviati contro dei bersagli immobili composti da lamine di materiale pesante (in generale piombo);
2. tecnica del collider: si accelerano alcuni fasci di ioni in una direzione ed altri in direzione opposta ai primi e si fanno scontrare, l'urto è così frontale e tutta l'energia cinetica dei fasci è disponibile nel centro di massa ed è molto maggiore di quella disponibile nel primo caso.

Negli urti ad energia molto elevata, la zona di interazione tra i due ioni raggiungerà valori di densità della materia incredibili, circa 6000 volte la densità della materia nucleare ordinaria. Si formerà così, in una regione microscopica di circa 100 fm^3 , lo stato di QGP in cui, per un brevissimo lasso di tempo, i quark ed i gluoni saranno liberi. Dopodiché la regione si espanderà, con la conseguente diminuzione della densità di materia e della temperatura, il che forzerà quark e gluoni a tornare confinati negli adroni. Alla fine dell'intero processo saranno emesse circa 20.000 particelle cariche che dovranno essere rivelate e studiate.

Non è purtroppo possibile rivelare sperimentalmente i quark ed i gluoni liberi perché il tempo in cui non sono confinati è troppo piccolo. Lo stato finale degli adroni a seguito dell'interazione tra gli ioni è comunque molto diverso a seconda che si sia formato il quark – gluon plasma oppure no. Quindi dal confronto tra gli urti "tradizionali", in cui sappiamo che non c'è stata formazione di QGP, e gli urti in cui sospettiamo che sia avvenuta la transizione di fase, dobbiamo riscontrare delle differenze. In effetti, i risultati sperimentali degli ultimi anni hanno evidenziato queste differenze, che indicano la formazione del plasma di quark e gluoni. Queste specie di firme che il QGP lascia di sé nello stato finale dell'urto sono chiamate **signature**^{xxii}.

Senza entrare nei dettagli tecnici, forniamo un elenco di alcune di queste signature:

- una particella particolare, chiamata J/ψ e formata da un quark charm (c) ed uno anticharm (\bar{c}), viene prodotta meno frequentemente del normale;
- le particelle che contengono il quark strange (s) sono invece prodotte in abbondanza rispetto al normale;
- infine, la formazione di jet, ossia di gruppi di particelle vicine che viaggiano nella stessa direzione, è ostacolata.
- Per capire se lo stato di plasma ha avuto luogo e per studiarne le proprietà intrinseche, occorre rivelare ed analizzare in dettaglio le caratteristiche delle migliaia di particelle che si sono formate dopo l'urto.

Proponiamo infine una tabella riassuntiva^{xxiii} delle caratteristiche generali delle transizioni di fase per il quark – gluon plasma e per un liquido.

Tabella 2.1

	Quark – Gluon Plasma	Liquido
Soppressione di canali	J/ψ	Risonanza gigante di dipolo
Fenomeno critico	Deconfinamento	Multiframmentazione
Tempo di equilibrio e di rilassamento	$t_{EQ} \approx 1 \text{ fm}/c$	$t_{EQ} \approx 100 \text{ fm}/c$
Parametri critici	<ul style="list-style-type: none"> • Temperatura critica ($T_C \approx 170 \text{ MeV}$) • Esponenti critici 	<ul style="list-style-type: none"> • Temperatura critica ($T_C \approx 5 \text{ MeV}$) • Esponenti critici
Fluttuazioni	Temperatura e molteplicità	Energia (capacità termica negativa)

Tabella 2.1:

Riepilogo delle principali caratteristiche delle transizioni di fase per il quark – gluon plasma e per i liquidi.

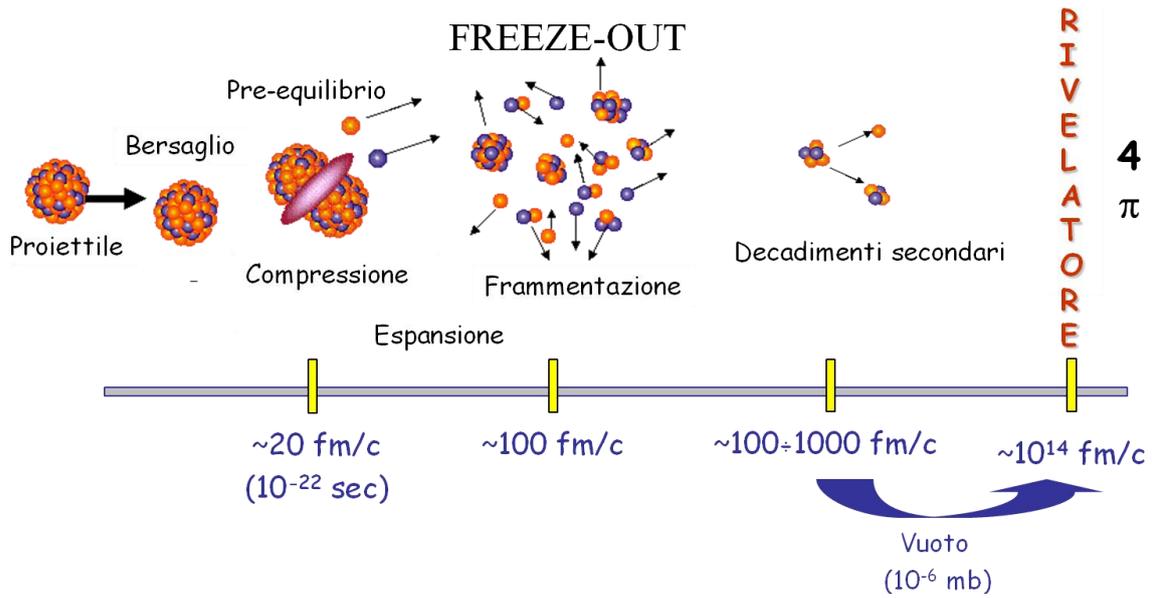


Figura 2.5:

Collisioni tra ioni pesanti ad energie intermedie. Sono rappresentate tutte le fasi successive all'urto: a partire dai nuclei proiettile e bersaglio si giunge ai decadimenti, dopo le fasi di compressione, espansione e frammentazione.

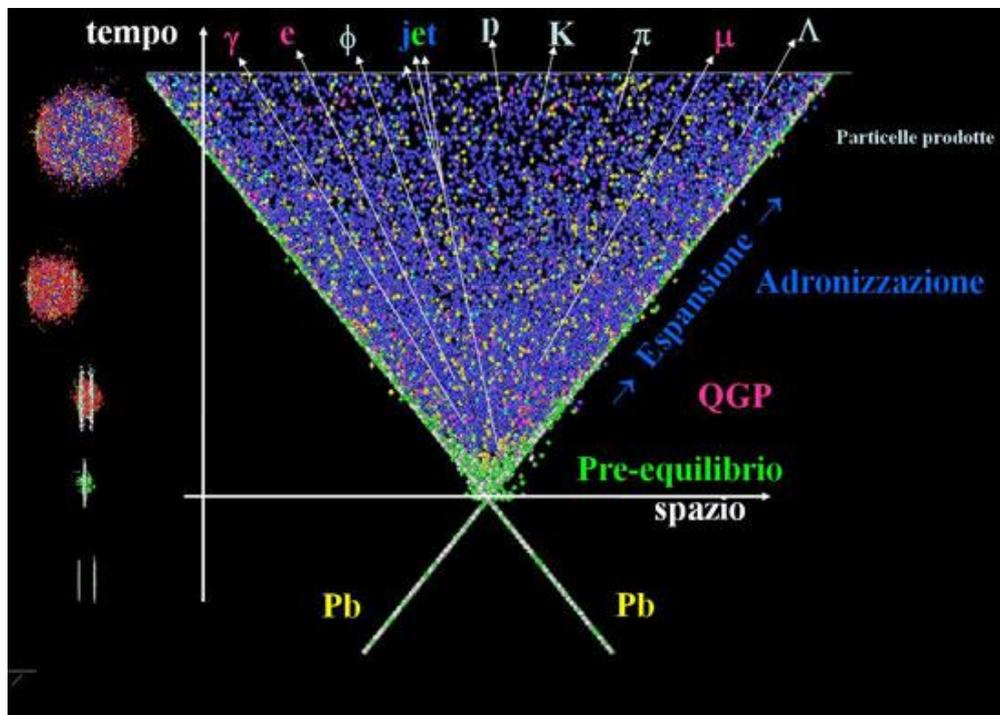


Figura 2.6:

Evoluzione spazio – temporale di un urto Pb – Pb, in seguito al quale si ha la formazione del QGP.

3. CALCOLO DELLE EQUAZIONI DI STATO (EOS)

I. Introduzione

Il calcolo della struttura^{xxiv} di una stella di neutroni coinvolge molteplici aree della fisica, quali, ad esempio, la termodinamica, la fisica nucleare e la meccanica relativistica. Per le mie applicazioni ho adoperato il software *Mathematica*.

Il discorso prenderà le mosse dall'enunciazione delle equazioni di *Tolman – Oppenheimer – Volkov* (TOV) che rappresentano il punto fondamentale del calcolo delle grandezze pressione e densità di energia per una stella di neutroni.

Successivamente, si introdurrà una descrizione del modello del gas di fermioni, ricavando delle espressioni per la pressione e per la densità di energia in funzione del momento k e della massa della particella. Tali espressioni possono poi essere notevolmente semplificate considerando due casi limiti (relativistico e non relativistico) ed introducendo delle grandezze adimensionali.

Dopo questo lavoro di preparazione, le conoscenze acquisite saranno adoperate per calcolare pressione e densità di energia delle stelle di neutroni. In primo luogo, saranno considerate le stelle di neutroni pure, per poi estendere lo studio anche a stelle composte da diversi tipi di particelle. Al fine di rendere ancora più verosimili i nostri risultati, saranno introdotte anche le interazioni nucleari tra i nucleoni, poiché alle densità presenti all'interno di una stella di neutroni, queste non possono essere certo trascurate.

II. Equazioni di Tolman – Oppenheimer – Volkov (TOV)

La formulazione delle equazioni di struttura derivante dalla meccanica classica newtoniana è la seguente:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho(r)\mathcal{M}(r)}{r^2} = -\frac{G\varepsilon(r)\mathcal{M}(r)}{c^2r^2} \quad (3.1)$$

$$\frac{d\mathcal{M}}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) = \frac{4\pi r^2 \varepsilon(r)}{c^2} \quad (3.2)$$

Qui G è la costante gravitazionale di Newton ($6.674 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$), $\rho(r)$ è la densità della massa alla distanza r dal centro (in kg/m^3), $\varepsilon(r)$ è la corrisponde densità di energia (in J/m^3) e $\mathcal{M}(r)$ è la massa totale all'interno di una sfera di raggio r .

È importante notare che, nella seconda parte delle precedenti equazioni, ci si è un po' allontanati dalla fisica di Newton, definendo la densità di energia $\varepsilon(r)$ in termini della densità di massa $\rho(r)$ in accordo con l'equazione di Einstein dalla relatività speciale:

$$\varepsilon(r) = \rho(r)c^2 \quad (3.3)$$

Questo permette di adoperare le precedenti equazioni classiche anche in contesti in cui gli effetti della relatività generale sono importanti.

La formula newtoniana (3.1) funziona correttamente soltanto in regimi in cui la massa della stella non è così elevata da distorcere lo spazio – tempo; cioè, in quei casi in cui gli effetti relativistici non sono rilevanti. L'equazione differenziale per $\mathcal{M}(r)$ rimane valida anche nel caso relativistico. Le correzioni relativistiche diventano rilevanti quando l'energia potenziale gravitazionale assume valori non trascurabili rispetto alla massa a riposo. Questo permette di introdurre un parametro contenente G , che ha le dimensioni di una lunghezza, e attraverso il quale è possibile determinare in quali casi le correzioni relativistiche debbano essere inserite:

$$l = \frac{V}{mc^2} = \frac{GM}{Rc^2} \quad (3.4)$$

Per rendere relativisticamente corretta la formula (3.1) è sufficiente inserire tre fattori adimensionali:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\varepsilon(r)\mathcal{M}(r)}{c^2r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{\mathcal{M}(r)c^2}\right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}(r)}{c^2r}\right]^{-1} \quad (3.5)$$

I primi due fattori dentro le parentesi quadre rappresentano le correzioni della relatività speciale di ordine v^2/c^2 . Questo può essere facilmente compreso considerando che, nel limite non relativistico, la pressione p va come $k_F^2/2m=mv^2/2$ mentre ε e $\mathcal{M}c^2$ vanno come mc^2 . Così, questi fattori si riducono ad 1 nel limite non relativistico. L'ultimo fattore è, invece, una correzione della relatività generale e la grandezza di $G\mathcal{M}/c^2r$ determina la sua importanza.

È importante notare che i fattori di correzione sono tutti definiti positivi: la relatività rafforza la gravità.

La coppia di equazioni (3.1 – 3.2) dovranno essere integrate da $r=0$ per un certo valore iniziale della pressione p_0 fino al punto in cui $p(R)=0$, determinando così la massa della stella $M=\mathcal{M}(R)$ ed il suo raggio R . Queste equazioni comportano un bilanciamento tra le forze gravitazionali e la pressione interna. La pressione è una funzione dell'equazione di stato ed in certe condizioni può non essere sufficiente a contrastare l'attrazione gravitazionale. Pertanto, le equazioni di struttura implicano l'esistenza di un limite superiore per la massa che una stella può sopportare.

III. Modello del gas di Fermi

Per elettroni liberi il numero di stati dn disponibile per momento k nell'unità di volume è:

$$dn = \frac{d^3k}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi\hbar)^3} \quad (3.6)$$

Integrando la precedente relazione si ottiene la densità del numero di elettroni:

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (3.7)$$

Il fattore moltiplicativo 2 inserito nell'equazione (3.7) deriva dal fatto che ci sono due stati di spin per ciascun livello di energia dell'elettrone. In questo caso k_F , l'**energia di Fermi**^{xxv}, è la massima energia permessa agli elettroni all'interno della stella. Questo è un parametro che varia con la massa totale della stella e con la sua storia, ma nei calcoli saremo liberi di fissarlo a nostro piacere.

Trascurando la massa degli elettroni rispetto a quella dei nucleoni, possiamo stimare la densità di massa della stella in questo modo:

$$\rho = nm_N \frac{A}{Z} \quad (3.8)$$

dove A/Z è il numero di nucleoni per elettroni. Si noti che, siccome n è funzione di k_F , lo è anche ρ .

Con l'aiuto di *Mathematica*, si può calcolare^{xxvi} il contributo alla densità di energia da parte degli elettroni, inclusa la loro massa a riposo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{(k^2 c^2 + m_e^2 c^4)} dk = \varepsilon' \int_0^{x=\frac{k_F}{m_e c}} u^2 (u^2 + 1) du = \\ &= \frac{\varepsilon'}{8} \left[x(2x^2 + 1) \sqrt{(x^2 + 1)} - \sinh^{-1}(x) \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dove ε' porta le dimensioni di una densità di energia per volume:

$$\varepsilon' = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} = 1,42 \times 10^{24} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \quad (3.10)$$

La densità di energia totale è allora:

$$\varepsilon = nm_N c^2 \frac{A}{Z} + \varepsilon_e(k_F) \quad (3.11)$$

Per ricavare l'equazione di stato abbiamo bisogno di un'espressione per la pressione. Dalla prima legge della termodinamica sappiamo che $dU=dQ-dL=dQ-pdV$, per cui alla temperatura fissata di $T=0$ (per la quale $dQ=0$) si ha:

$$p = \left[-\frac{\partial U}{\partial V} \right]_{T=0} = n^2 \frac{d\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)}{dn} = n \frac{d\varepsilon}{dn} - \varepsilon = n\mu - \varepsilon \quad (3.12)$$

La densità di energia qui adoperata è quella totale che si ricava dalla equazione (3.11). Le quantità $\mu_i = d\varepsilon/dn_i$ definite nell'ultima uguaglianza sono conosciute con il nome di **potenziali chimici**^{xxvii}. Utilizzando l'equazione (9), lasciando che il software svolga dei calcoli del tutto analoghi ai precedenti, l'equazione (3.12) ci fornisce la pressione:

$$p(k_F) = \frac{8\pi}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{(k^2c^2 + m_e^2c^4)}} dk$$

$$= \frac{\varepsilon'}{24} \left[x(2x^2 - 3)\sqrt{(x^2 + 1)} - 3 \sinh^{-1}(x) \right] \quad (3.13)$$

I risultati degli integrali per la densità di energia e per la pressione sono un po' complicate, data la presenza in entrambe della funzione inversa del seno iperbolico. Tuttavia, è molto utile tracciare il grafico di ε in funzione di p per valori del parametro k ($0 \leq k_F \leq 2m_e$). Il software *Mathematica* presenta anche dei comandi per il disegno di grafici. Questa curva mostra un andamento molto simile a quello della funzione $\varepsilon^{4/3}$ e c'è una buona ragione perché le cose stiano così.

Si consideri ora il caso relativistico, in altre parole quando $k_F \gg m_e$. È possibile allora semplificare notevolmente l'equazione (3.13):

$$p(k_F) = \frac{\varepsilon'}{3} \int_0^{k_F/m_e} u^3 du = \frac{\varepsilon'}{12} \sqrt[3]{\left(\frac{k_F}{m_e c}\right)^4} = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 Z \rho}{Am_N}\right) = K_{rel} \varepsilon^{4/3} \quad (3.14)$$

Dove:

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_N c^2}\right)^{4/3} \quad (3.15)$$

Un'equazione di stato così semplice è detta "**politropa**" e la corrispondente stella prende il nome di politropica. Il vantaggio delle equazioni politrope è che permettono di risolvere numericamente le equazioni di struttura in modo piuttosto facile.

Passiamo ora al caso non relativistico, quando cioè $k_f \ll m_e$. Con un procedimento simile al precedente è possibile calcolare la pressione:

$$p = K_{non\ rel} \epsilon^{5/3} \quad (3.16)$$

$$K_{non\ rel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left(\frac{3\pi^2 Z}{A m_N c^2} \right)^{5/3} \quad (3.17)$$

Dal momento che la pressione e la densità di energia devono essere quantità omogenee, le unità di misure delle due costanti sono: $[erg^{-1}]$ per K_{rel} e $[erg^{-2}]$ per $K_{non\ rel}$.

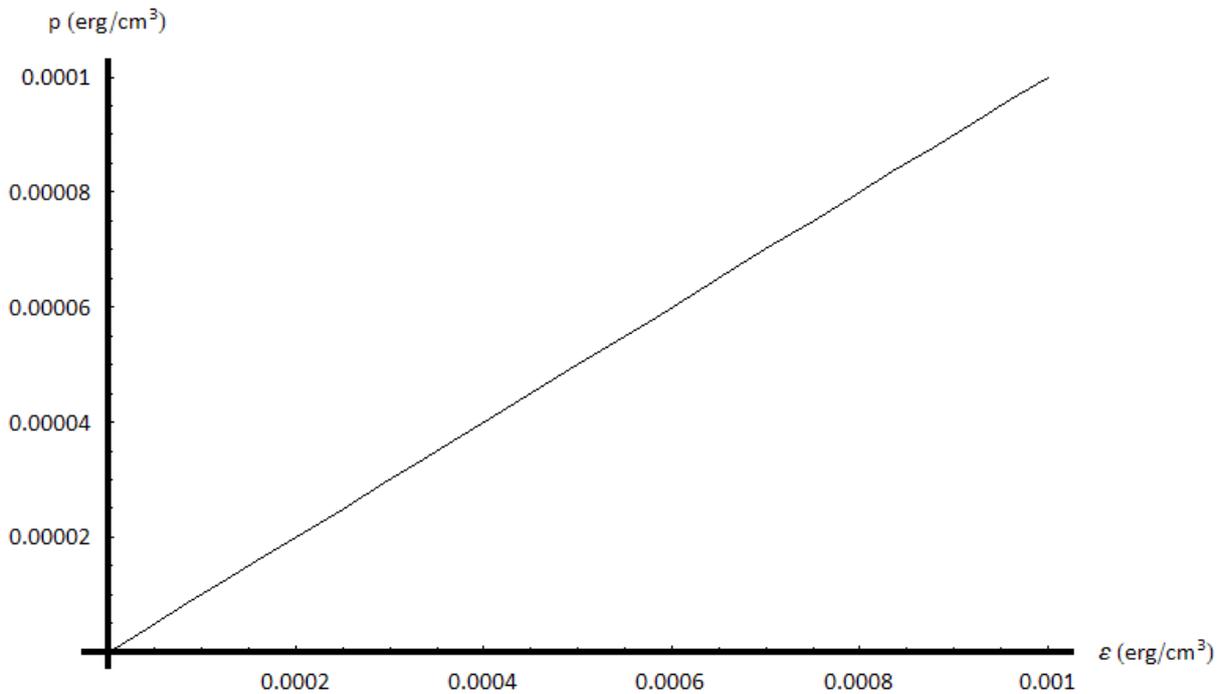


Figura 3.1:

Relazione tra pressione p (erg/cm^3) e densità di energia ϵ (erg/cm^3) nel modello a gas di Fermi, per valori del parametro $0 \leq k_f \leq 2m_e$.

Si noti, in particolare, come la pressione sia molto minore della densità di energia, poiché quest'ultima è dominata dai nucleoni massivi.

IV. Equazione di struttura per una stella politropica

È nostra intenzione, ora, esprimere tutti i risultati in unità di chilometri km e masse solari M_S . Per raggiungere tale scopo è utile definire in modo adimensionale la massa della stella $\mathcal{M}(r)$, la pressione p e la densità d'energia ε .

$$\bar{M}(r) = \frac{\mathcal{M}(r)}{M_S} \quad p = \varepsilon_0 \bar{p} \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \quad (3.18)$$

ε_0 ha le dimensioni di una densità di energia e la scelta del suo valore è del tutto arbitraria. La prima equazione di struttura newtoniana si riscrive così:

$$\frac{dp(r)}{dr} = -R_0 \frac{\varepsilon(r) \bar{M}(r)}{r^2} \quad R_0 = \frac{GM_S}{c^2} = 1.47 km \quad (3.19)$$

Le costanti presenti nella formula sono state riunite nel termine R_0 ; questa grandezza corrisponde a metà del raggio di Schwarzschild^{xxviii} per il nostro Sole. Per una stella politropica^{xxix}, possiamo scrivere:

$$\bar{\varepsilon} = \left(\frac{\bar{p}}{\bar{K}} \right)^{1/\gamma} \quad \bar{K} = K \varepsilon_0^{\gamma-1} \quad (3.20)$$

Ora risolviamo l'equazione (20) rispetto a \bar{p} :

$$\frac{d\bar{p}(r)}{dr} = - \frac{\alpha \bar{p}(r)^{1/\gamma} \bar{M}(r)}{r^2} \quad \alpha = \frac{R_0}{\bar{K}^{1/\gamma}} = \frac{R_0}{(K \varepsilon_0^{\gamma-1})^{1/\gamma}} \quad (3.21)$$

L'equazione (3.21) ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza ($1/km$), dal momento che α è una lunghezza così come R_0 . È possibile scegliere qualunque valore per α poiché ε_0 è ancora libero. Per un dato valore di α , ε_0 così fissata:

$$\varepsilon_0 = \left[\frac{1}{K} \left(\frac{R_0}{\alpha} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (3.22)$$

Ora dobbiamo riscrivere la seconda equazione di struttura newtoniana in funzione dei parametri adimensionali:

$$\frac{d\bar{M}(r)}{dr} = \beta r^2 \bar{p}(r)^{1/\gamma} \qquad \beta = \frac{4\pi\epsilon_0}{M_S c^2 (K\epsilon_0^{\gamma-1})^{1/\gamma}} \qquad (3.23)$$

L'equazione (3.23) ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza ($1/km$), poiché β ha le dimensioni dell'inverso di un volume ($1/km^3$).

V. Integrazione numerica di una stella politropica

Il nostro compito è ora quello di integrare le due equazioni differenziali del primo ordine (3.21 – 3.23), dall'origine ($r=0$) fino al punto R dove la pressione diventa nulla ($\bar{p}(r) = 0$). Per fare questo abbiamo bisogno soltanto di conoscere il valore iniziale di $\bar{p}(0)$, dal momento che il valore di $\bar{M}(0)$ sappiamo già che deve essere 0. Il raggio R della stella e la sua massa totale M varieranno, perciò, in funzione della scelta di $\bar{p}(0)$. Con lo scopo di assicurarci la stabilità numerica delle soluzioni delle due equazioni, vogliamo che α e β non differiscano troppo tra di loro e che, magari, non differiscano troppo dall'unità.

Le equazioni (3.21 – 3.23) sono non lineari: infatti, a causa della presenza del fattore $\bar{p}(r)^{1/\gamma}$, le soluzioni diventeranno complesse quando $\bar{p}(r) < 0$ o, se si preferisce, quando $r > R$. Per questa ragione vogliamo riconoscere quando questo accade.

Il frammento di programma che svolge questa funzione è contenuto all'interno dell'appendice (B.1).

VI. Stelle di neutroni pure

In questo studio della struttura delle stelle di neutroni, useremo il modello del gas di Fermi per una stella di neutroni pura, senza protoni od elettroni. È facile capire come questo modello è irrealistico perché presenta due difetti:

1. una stella di neutroni non è composta di soli neutroni, ma contiene una piccola frazione di protoni ed elettroni (questo per impedire al neutrone di decadere in protone ed elettrone per l'interazione debole);
2. il modello del gas di Fermi ignora del tutto l'interazione forte nucleone – nucleone, il quale contribuisce in modo importante alla densità di energia.

Entrambi i punti saranno trattati successivamente.

A. CASO NON RELATIVISTICO: $k_F \ll m_n$

Per ottenere l'equazione di stato di una stella di neutroni pura si possono adoperare le equazioni precedentemente ricavate, prestando attenzione a sostituire la massa dell'elettrone m_e e la massa del nucleone m_N con la massa del neutrone m_n .

Quando $k_F \ll m_n$ ci si trova ancora dinanzi ad un'equazione politropa, la quale però presenta un esponente pari a $5/3$. Il $K_{non\ rel}$ corrispondente varrà:

$$K_{non\ rel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_n} \left(\frac{3\pi^2 Z}{Am_n c^2} \right)^{5/3} = 6.483 \times 10^{-26} \frac{cm^2}{erg^{2/3}} \quad (3.24)$$

Ponendo a nostro piacimento $\alpha=1 \text{ km}$, si trova che il fattore di scala dell'equazione (3.22) è:

$$\varepsilon_0 = 1.603 \times 10^{38} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} = 0.08969 \frac{M_S c^2}{\text{km}^3} \quad (3.25)$$

E da esso si ricavano:

$$\bar{K} = 1.914 \quad \beta = 0.7637 \text{ km}^{-3} \quad (3.26)$$

Si noti che in questo caso, i valori di α e di β sono di grandezza paragonabile. Stimando la densità d'energia media per una tipica stella di neutroni (massa = M_S e raggio=10km), ci si aspetta che un buon valore di partenza per la pressione centrale $\bar{p}(0)$ sia dell'ordine di 10^{-4} o meno.

Il calcolo dei valori riprende in buona parte quello spiegato per il precedente frammento di programma. Tuttavia, è doveroso fare alcune considerazioni per inserire le correzioni relativistiche nelle equazioni di stato (TOV).

Il frammento di programma è contenuto all'interno dell'appendice (B.2).

Riassumiamo in una tabella i valori trovati per il raggio e la massa di una stella di neutroni con equazioni di stato newtoniane e relativistiche ed in funzione della pressione centrale.

Tabella 3.1

$\bar{p}(0)$	Newton		Relatività generale	
	R (km)	M (M_S)	R (GR)	M (M_S)
10^{-4}	16.5	0.775	15.25	0.603
10^{-5}	20.8	0.388	20.00	0.349
10^{-6}	26.3	0.194	25.75	0.186

Tabella 3.1:

Valori classici e relativistici del raggio e della massa di una stella di neutroni

Si nota facilmente come gli effetti della relatività generale sono piccoli ma non trascurabili. Inoltre, come la massa diminuisce, così l'attrazione gravitazionale diminuisce e la stella si estende per un raggio maggiore.

B. CASO RELATIVISTICO: $k_F \gg m_n$

Anche in questo caso abbiamo un'equazione di stato politropa, ma con coefficiente $\gamma=1$. Infatti, $p=\epsilon/3$ è un ben conosciuto risultato per un gas relativistico. La conversione a quantità adimensionali diventa molto semplice in questo caso, con la relazione $\bar{K}=K=1/3$.

Tuttavia, occorre prestare una maggiore attenzione al procedimento che si esegue. Il programma scritto per la sezione precedente non è più valido, poiché il ciclo su \bar{r} spazza tutto il suo intero dominio, senza che la pressione diventi mai a 0.

Lasciando girare quel programma, sebbene si apportino le correzioni necessarie, esso fornisce a primo sguardo dei raggi di dimensioni enormi, maggiori di 50 km. Si comprende così che l'equazione di stato del gas relativistico è inappropriato per pressioni così basse.

Allo scopo di evitare la trappola del gas relativistico, è necessario trovare un'equazione di stato per il gas di Fermi di neutroni non interagenti che opera con tutti i valori del parametro $x=k_F/m_n c$. Prendendo l'ispirazione dalle due equazioni politrope, si può eseguire un best – fit tra densità di energia e pressione, entrambe date come funzioni trascendenti di k_F , nella forma:

$$\bar{\epsilon} = A_{NR} \bar{p}^{3/5} + A_R \bar{p} \quad (3.27)$$

Per basse pressioni il primo termine non relativistico domina sul secondo. E' sempre utile ricavare un fattore ϵ_0 , che in questo caso è naturale definire come:

$$\epsilon_0 = \frac{m_n^4 c^5}{(3\pi^2 \hbar)^3} = 5.346 \times 10^{36} \frac{erg}{cm^3} = 0.003006 \frac{M_S c^2}{km^3} \quad (3.28)$$

Attraverso il software *Mathematica* si può scrivere in modo semplice un tabella di valori esatti di $\bar{\epsilon}$ e di \bar{p} . I valori adimensionali di A_{NR} e A_R possono essere trovati mediante la funzione preimpostata per il best – fit. Si può trovare il relativo codice all'interno dell'appendice (B.3). L'equazione di best – fit risulta essere:

$$\bar{\epsilon} = 2.20626 \bar{p}^{3/5} + 2.93223 \bar{p} \quad (3.29)$$

Tabella 3.2

pbar [x]	espbar [x]	x
0.000063	0.008095	0.20
0.001941	0.066989	0.40
0.013891	0.238006	0.60
0.054483	0.601197	0.80
0.153738	1.260475	1.00
0.352873	2.346349	1.20
0.703738	4.017218	1.40
1.268370	6.459947	1.60
2.118711	9.890112	1.80
3.336448	14.552096	2.00
5.012934	20.719121	2.20
7.249139	28.693261	2.40
10.155636	38.805435	2.60
13.852583	51.415405	2.80
18.469729	66.911768	3.00
24.146404	85.711950	3.20
31.031526	108.262205	3.40
39.283598	135.037604	3.60
49.070711	166.542038	3.80
60.570549	203.308211	4.00

Tabella 3.2: Grandezze adimensionali della pressione e della densità di energia

Con il valore di ϵ_0 ottenuto nell'equazione (3.28) e scegliendo $\alpha=R_0=1.476km$, otteniamo $\beta=0.03778$. I risultati dei nostri calcoli con un valore di partenza $\bar{p}(0)=0.01$ sono:

Tabella 3.3

		Newton		Relatività Generale	
$\bar{p}(0)$	R (km)	M (M_s)	R (km)	M (M_s)	
10^{-2}	15.0	1.037	13.4	0.717	

Tabella 3.3:

Valori classici e relativistici di raggio e massa di una stella di neutroni

Per stelle così massicce, gli effetti della relatività generale sono significativi, dal momento che la grandezza l assume un valore pari al 10% del raggio. Nel grafico 3.2 è tracciata l'equazione di best – fit; nei due successivi, sono riportati i valori di $\bar{p}(r)$ e di $\bar{M}(r)$ per una stella di neutroni pura con una pressione centrale $\bar{p}(0)=0.01$, usando un fit per le equazioni di struttura del gas di Fermi valido per ogni valore di k_F .

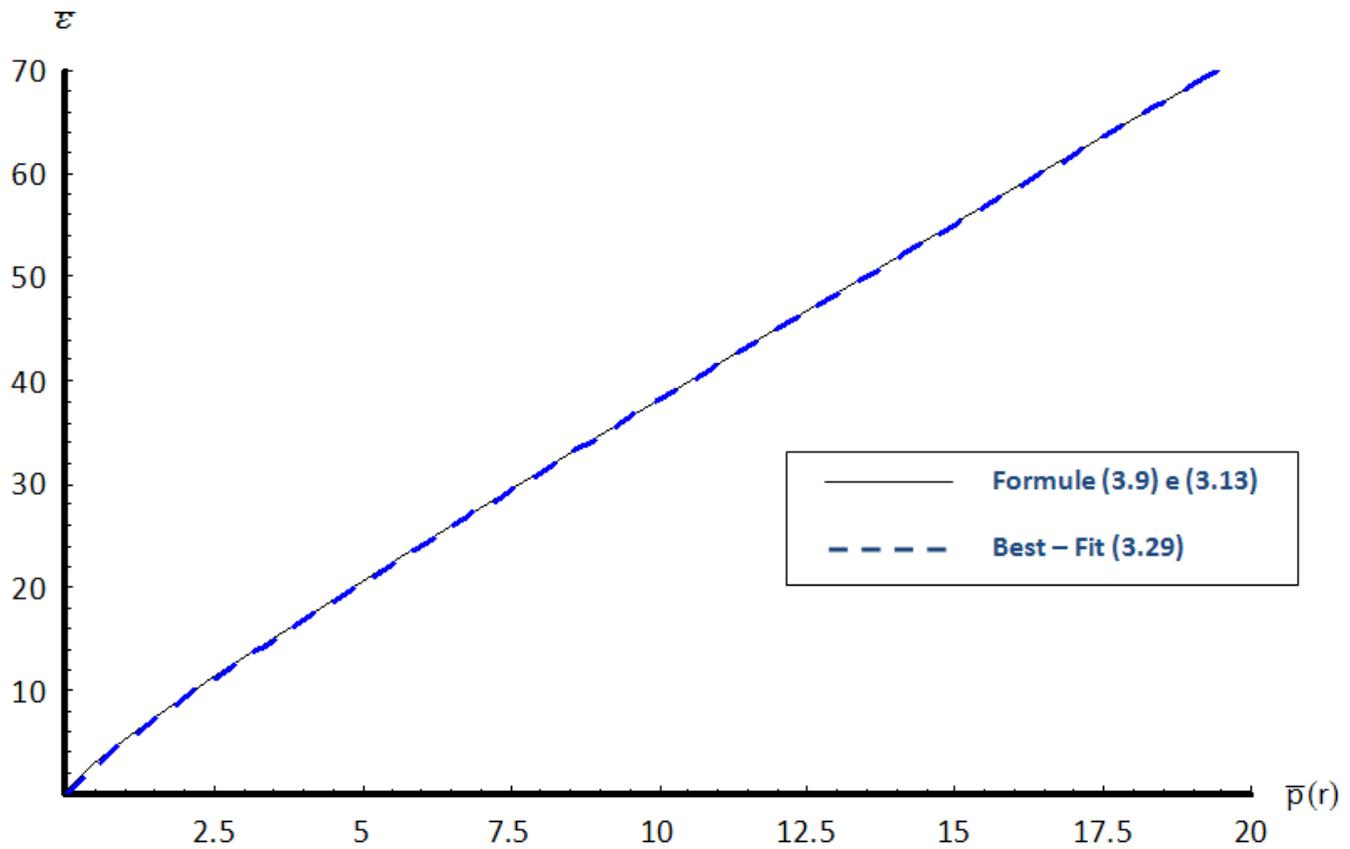


Figura 3.2:

- Con la linea nera continua e sottile, è rappresentata la relazione tra le componenti adimensionali della pressione e della densità di energia per una stella di neutroni espressa dalle formule (3.13) e (3.9) rispettivamente.
- Con la linea blu tratteggiata e spessa, è rappresentato il best – fit della medesima relazione, espressa nella formula (3.29).

Si ricorda che $\bar{p}(r)$ e $\bar{\epsilon}$ sono quantità adimensionali.

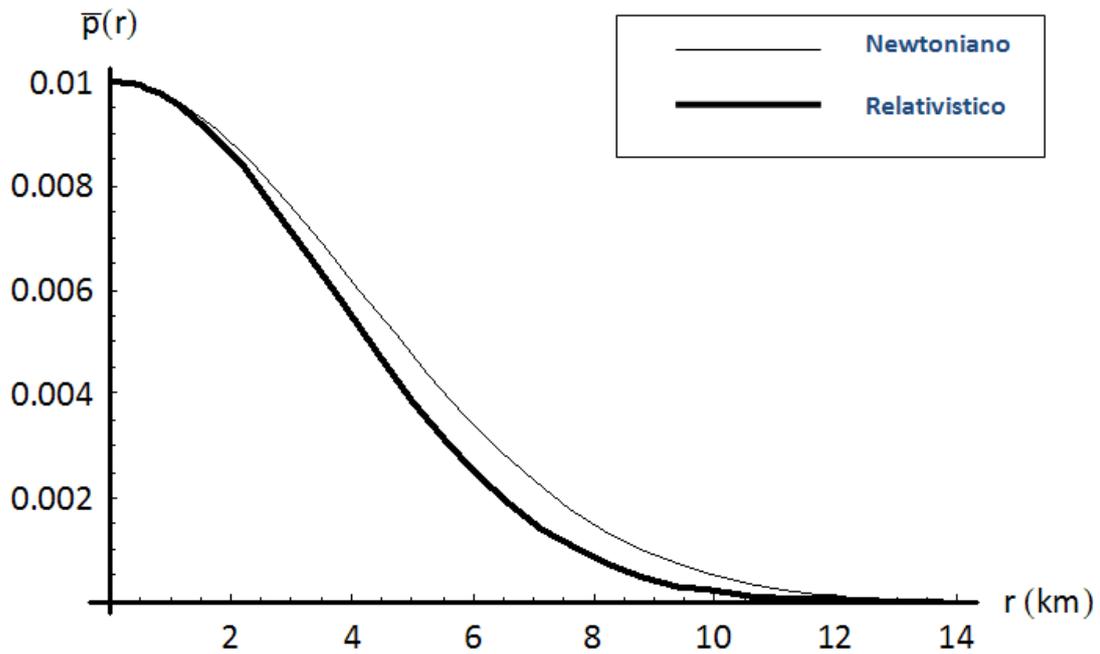


Figura 3.3: il grafico rappresenta l'andamento della pressione p (adimensionale) dal centro della stella di neutroni fino agli strati esterni nei due modelli:

- Newtoniano, linea sottile;
- Relativistico, linea spessa.

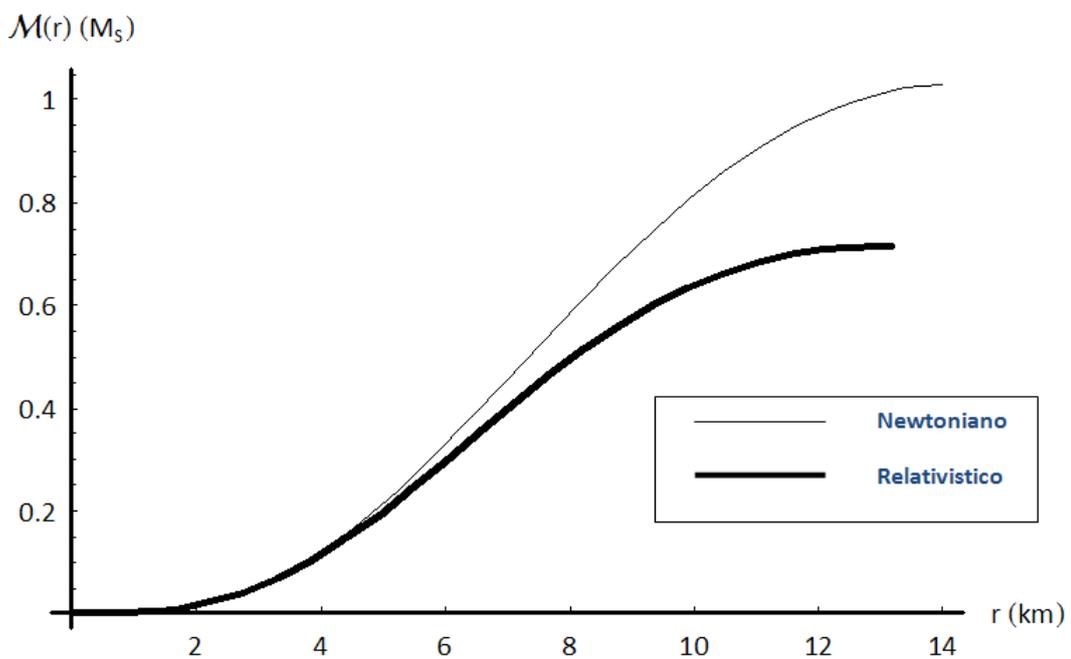


Figura 3.4: il grafico rappresenta l'andamento della distribuzione di massa $M(r)$ (M_\odot) dal centro della stella di neutroni fino agli strati esterni nei due modelli:

- Newtoniano, linea sottile;
- Relativistico, linea spessa.

VII. Limite superiore per la massa

È molto interessante eseguire dei calcoli per un ampio intervallo di valori di $\bar{p}(0)$ e disegnare in un grafico la relazione tra massa M e raggio R della stella in funzione della pressione centrale.

Le stelle di piccola massa e piccolo raggio si posizionano a destra nel grafico e corrispondono a piccoli valori di partenza per la pressione $\bar{p}(0)$. Al crescere della pressione, la massa totale che la stella può sopportare aumenta e, maggiore diviene la sua massa, maggiore diviene anche l'attrazione gravitazionale rendendo così il raggio più piccolo.

Alla pressione di circa $\bar{p}(0) = 0.03$ si arriva il punto più alto della curva, raggiungendo un limite superiore per la massa di $0.8 M_{\odot}$ ed un raggio di 11 km .

Alle soluzioni a sinistra del picco massimo corrispondono stelle instabili^{xxx}: l'effetto della forza gravitazionale non è più controbilanciato dalla pressione interna ed è quindi inevitabile il collasso dell'oggetto in un buco nero.

Esaminiamo ora il motivo per cui eravamo preparati per un grafico del genere.

In termini generali, la componente termica della pressione in stelle fredde è per definizione trascurabile. Per cui le variazioni della densità di energia ε e della pressione p sono causate soltanto dal cambiamento della densità di materia.

Nel caso newtoniano, un incremento nella densità produce un aumento proporzionale nella densità d'energia, il cui effetto è un rafforzamento dell'attrazione gravitazionale. Per bilanciare tutto questo, si richiede che la pressione aumenti sufficientemente.

Tuttavia, il tasso con cui la pressione varia rispetto alla densità di energia è legato alla velocità del suono. Una volta che si accetta questo vincolo, si può tranquillamente concludere che tutti gli oggetti compatti e freddi incorreranno in una situazione in cui qualunque aumento nella densità provocherebbe un'attrazione gravitazionale aggiuntiva che non può essere compensata da un corrispondente aumento di pressione. Questo porta inevitabilmente a fissare un limite superiore per la massa.

Le correzioni relativistiche, dal canto loro, agiscono come "amplificatori" di gravità e ci si aspetta che tale limite per la massa cada ad un valore inferiore.

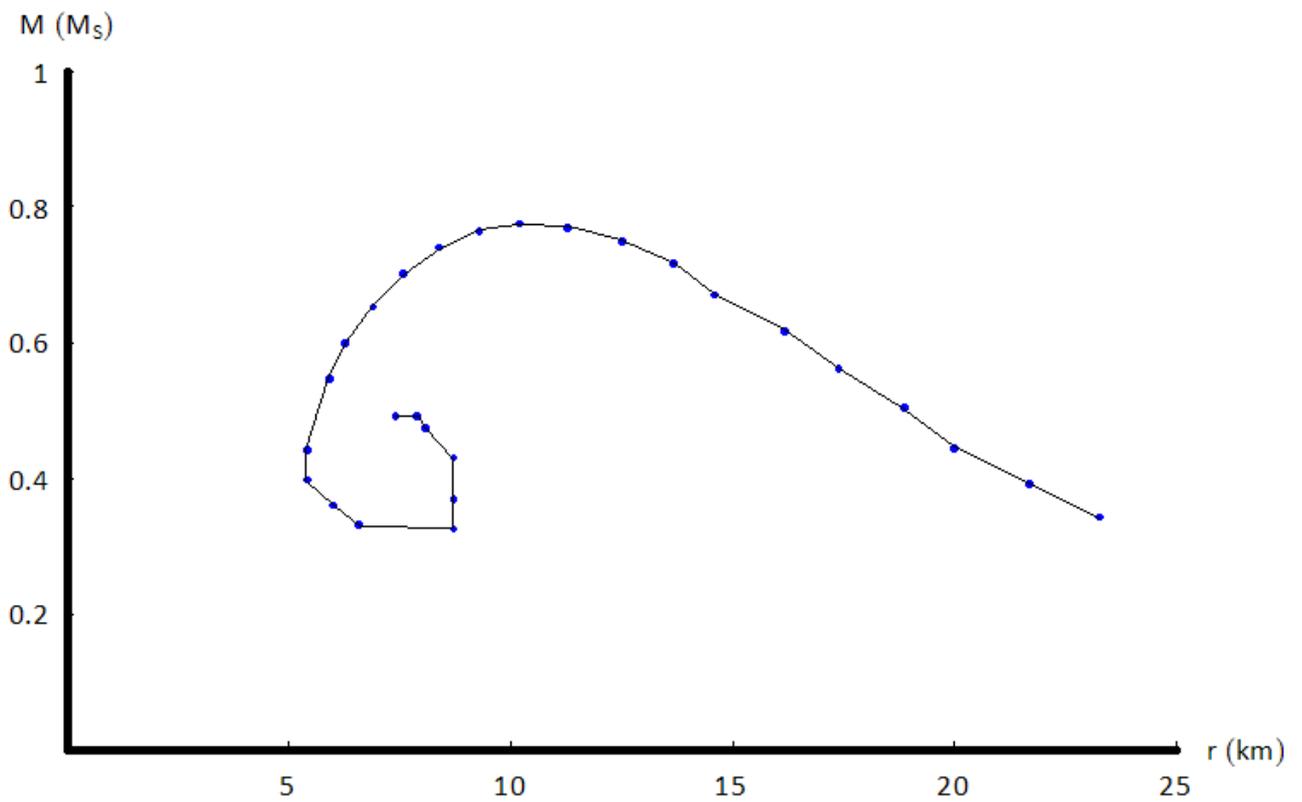


Figura 3.5:

Il grafico mostra l'andamento del limite superiore della massa (M_{\odot}) di una stella di neutroni pura in funzione del raggio (km) della stessa.

L'aspetto importante da notare è che, per valori situati a sinistra del massimo della funzione, le stelle in questione sono instabili e quindi soggette al collasso gravitazionale.

VIII. Stelle di neutroni con protoni ed elettroni

Come già spiegato all'inizio della precedente sezione, le stelle di neutroni non sono esclusivamente composte da neutroni, ma devono esserci delle significative frazioni di protoni ed elettroni. Senza la presenza delle altre due particelle, il neutrone^{xxx} libero decadrebbe per effetto dell'interazione debole ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) nell'arco di circa 800 secondi.

Infatti, proprio l'esistenza delle stelle di neutroni ci conferma la loro impurezza. I prodotti del decadimento hanno basse energie a causa della differenza minima di massa-energia di neutrone e protone e la maggior parte dell'energia è portata via dall'elettrone e dal neutrino. Se tutti i livelli di bassa energia per i protoni sono già occupati, il principio di esclusione di Pauli^{xxxii} acquista importanza ed impedisce che il decadimento avvenga.

Lo stesso ragionamento vale per gli elettroni, ma in ogni caso gli elettroni devono essere presenti per garantire la neutralità della stella, annullando la carica elettrica positiva degli elettroni. Proprio l'ugual numero di elettroni e protoni implica che i loro momenti di Fermi siano uguali:

$$k_{F,p} = k_{F,e} \quad (3.29)$$

Imponiamo anche che l'equilibrio per l'interazione debole sia garantito, cioè che per quanti neutroni decadono, altrettanti vengono creati per la cattura elettronica da parte del neutrone ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$). Questo bilanciamento può essere espresso in forma di potenziali chimici delle tre specie di particelle:

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e \quad (3.30)$$

Ripetiamo per comodità la definizione di potenziale chimico di una particella in unità naturali ($c=1$):

$$\mu_i(k_{F,i}) = \frac{d\varepsilon}{dn} = \sqrt{(k_{F,i}^2 + m_i^2)} \quad i = n, p, e \quad (3.31)$$

Dalle equazioni precedenti possiamo trovare un vincolo per determinare $k_{F,p}$ per un dato $k_{F,n}$:

$$\sqrt{(k_{F,n}^2 + m_n^2)} - \sqrt{(k_{F,p}^2 + m_p^2)} - \sqrt{(k_{F,e}^2 + m_e^2)} = 0 \quad (3.32)$$

$$k_{F,p}(k_{F,n}) = \sqrt{\frac{(k_{F,n}^2 + m_n^2 - m_e^2)^2 - 2m_p^2(k_{F,n}^2 + m_n^2 + m_e^2)^2 + m_p^4}{4(k_{F,n}^2 + m_n^2)}} \quad (3.33)$$

$$\xrightarrow[\frac{k_{F,n}}{m_e} \rightarrow 0]{} \frac{k_{F,n}^2 + m_n^2 - m_p^2}{2\sqrt{(k_{F,n}^2 + m_n^2)}}$$

La densità di energia totale è la somma delle singole densità di energia e lo stesso discorso vale per la pressione totale:

$$\varepsilon_{tot} = \sum_{i=n,p,e} \varepsilon_i = \sum_{i=n,p,e} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_{F,i}} k^2 \sqrt{(k^2 + m_i^2)} dk = \varepsilon_0 \sum_{i=n,p,e} \bar{\varepsilon}_i(x_i, y_i) \quad (3.34)$$

$$p_{tot} = \sum_{i=n,p,e} p_i = \sum_{i=n,p,e} \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{k_{F,i}} \frac{k^4}{\sqrt{(k^2 + m_i^2)}} dk = \varepsilon_0 \sum_{i=n,p,e} \bar{p}_i(x_i, y_i) \quad (3.35)$$

$$x_i = \frac{k_{F,i}}{m_n} \quad y_i = \frac{m_i}{m_n}$$

Anche in questo caso si possono creare delle tabelle di valori di ε_{tot} in funzione di p_{tot} per un appropriato intervallo della variabile $k_{F,n}$ e si può trovare l'equazione di best-fit, i cui coefficienti non sono molto cambiati da quelli trovati per una stella di neutroni pura:

$$\bar{\varepsilon} = 2.5721\bar{p}^{3/5} + 2.8913\bar{p} \quad (3.36)$$

IX. Introduzione alle interazioni nucleari

Le interazioni nucleone – nucleone possono essere incluse nelle equazioni di stato costruendo un semplice modello per il potenziale nucleare che riproduce le caratteristiche generali della materia nucleare.

Indichiamo con Z ed N , rispettivamente, il numero di protoni ed il numero di neutroni di un atomo. Per la materia nucleare simmetrica ($N=Z$), la formula di massa di Weizsäcker^{xxxiii} fornisce un valore di equilibrio per la densità di $n_0=0.16$ nucleoni/ fm^3 .

In unità naturali ($c=1$), a questa densità corrispondono:

1. un **momento di Fermi**^{xxxiv}

$$k_F^0 = \sqrt[3]{\frac{9}{8}\pi} \frac{\hbar}{r_0} = 263 \text{ MeV}$$

(r_0 è il raggio nucleare medio^{xxxv}, il cui valore è di 1.2 fm) il quale è abbastanza piccolo rispetto alla massa dei nucleoni $m_N=939 \text{ MeV}$ per consentire un trattamento non relativistico della normale materia nucleare;

2. un' **energia media di legame per nucleone**, $BE=-16 \text{ MeV}$.

Oltre a queste due quantità fisiche che vogliamo siano rispettate dal nostro potenziale nucleare, ci sono ulteriori parametri da fissare:

3. la **compressibilità nucleare**^{xxxvi} K_0 , il cui valore non è stato ancora ben determinato ma è compreso tra 200 e 400 MeV ;
4. l' **energia di simmetria**, il quale per $Z=0$ contribuisce con circa 30 MeV di energia sopra il minimo di materia simmetrica a n_0 .

A. Materia nucleare simmetrica

Concentriamoci prima sulla materia nucleare per la quale $N=Z$ o, in maniera equivalente, $n_n=n_p$. La densità totale dei nucleoni non è che la somma delle densità di protoni e neutroni.

Abbiamo bisogno di una relazione che leghi le tre quantità n_0 , BE e K_0 , alla densità di energia per materia nucleare simmetrica $\varepsilon(n)$. In questo caso $n=n(k_F)$ è la densità nucleare, dalla quale trascuriamo il contributo degli elettroni. La densità di energia includerà ora il potenziale nucleare $V(n)$ che modelleremo in termini di due semplici funzioni con tre parametri, uno per ciascuna quantità nucleare.

L'energia media per nucleone E/A per la materia nucleare simmetrica è legata alla densità di energia:

$$\frac{E(n)}{A} = \frac{\varepsilon(n)}{n} \quad (3.37)$$

che include la massa a riposo m_N e ha le dimensioni in MeV . Essendo funzione di n , l'energia media per nucleone ha un minimo per $n=n_0$ con una profondità che corrisponde all'energia di legame $BE=-16 MeV$. Allora il primo vincolo per i parametri del potenziale è:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{E(n)}{A} \right)_{n=n_0} = \frac{d}{dn} \left(\frac{\varepsilon(n)}{n} \right)_{n=n_0} = 0 \quad (3.38)$$

Il secondo vincolo è quello imposto dall'energia di legame BE :

$$\left(\frac{\varepsilon(n)}{n} - m_N \right)_{n=n_0} = BE \quad (3.39)$$

La curvatura positiva del minimo è collegata alla compressibilità nucleare K_0 :

$$K(n) = 9 \frac{dp(n)}{dn} = 9 \left[n^2 \frac{d^2}{dn^2} \left(\frac{\varepsilon}{n} \right) + 2n \frac{d}{dn} \left(\frac{\varepsilon}{n} \right) \right] \quad (3.40)$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo fatto uso dell'equazione (3.12) che definisce la pressione in funzione della densità di energia. Per $n=n_0$ questa quantità è uguale a K_0 . Il termine moltiplicativo 9 è un retaggio storico della prima definizione della compressibilità.

A questo punto possiamo scrivere il potenziale per $N=Z$ in funzione della densità di energia:

$$\frac{\varepsilon(n)}{n} = m_N + \frac{3}{5} \frac{k_F^2}{2m_N} + \frac{A}{2} u + \frac{B}{\sigma + 1} u^\sigma \quad (3.41)$$

dove $u=n/n_0$ e σ sono adimensionali e A e B hanno le dimensioni di un'energia espressa in *MeV*. Il primo termine rappresenta la massa a riposo e il secondo l'energia cinetica media per nucleone. Per $k_F(n_0)=k_F^0$ abbreviamo la scrittura del termine di energia cinetica come $\langle E_F^0 \rangle$ il cui valore è 22.1 MeV . A partire dai vincoli del potenziale nucleare e notando che $u=1$ se $n=n_0$, otteniamo tre equazioni per i tre parametri A , B e σ :

$$\begin{cases} \langle E_F^0 \rangle + \frac{A}{2} + \frac{B}{\sigma + 1} = BE \\ \frac{2}{3} \langle E_F^0 \rangle + \frac{A}{2} + \frac{B\sigma}{\sigma + 1} = 0 \\ \frac{10}{9} \langle E_F^0 \rangle + A + B\sigma = \frac{K_0}{9} \end{cases} \quad (3.42)$$

Risolvendo questo sistema:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{K_0 + 2\langle E_F^0 \rangle}{3\langle E_F^0 \rangle - 9BE} \\ B = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} \left[\frac{1}{3} \langle E_F^0 \rangle - BE \right] \\ A = BE - B - \frac{5}{3} \langle E_F^0 \rangle \end{cases} \quad (3.43)$$

Possiamo utilizzare il software *Mathematica* per vedere come variano i parametri A , B e σ al variare di K_0 lungo tutto il suo dominio ($200 < K_0 < 400$).

Si può trovare il relativo codice all'interno dell'appendice (B.4).

Le considerazioni più interessanti riguardano il valore di σ : per qualunque valore di K_0 , il valore di σ risulta sempre essere maggiore di 1. Questo fatto viola un principio della fisica chiamato causalità^{xxxvii}, ma per il momento ignoriamo la questione.

Vediamo ora come l'interpolazione dei termini A e B fornisca il minimo della curva per $n=n_0$.

Il grafico della figura 3.6 mostra l'energia di legame BE in funzione di $u=n/n_0$, usando come parametri A , B , σ per i due valori estremi di K_0 : alla linea spessa corrisponde una compressibilità di 400 MeV , a quella fina una compressibilità di 200 MeV .

Tabella 3.4

$\sigma [K_0]$	$B [K_0]$	$A [K_0]$	K_0
1.161169	313.349113	-366.189280	200
1.208718	247.288028	-300.128194	210
1.256266	205.741269	-258.581436	220
1.303814	177.199025	-230.039192	230
1.351363	156.381769	-209.221935	240
1.398911	140.527152	-193.367318	250
1.446459	128.049597	-180.889764	260
1.494008	117.973977	-170.814144	270
1.541556	109.667625	-162.507792	280
1.589104	102.702133	-155.542300	290
1.636653	96.777075	-149.617241	300
1.684201	91.675537	-144.515703	310
1.731749	87.236984	-140.077151	320
1.779298	83.340062	-136.180229	330
1.826846	79.891331	-132.731497	340
1.874394	76.817673	-129.657840	350
1.921943	74.061058	-126.901225	360
1.969491	71.574837	-124.415004	370
2.017039	69.321087	-122.161253	380
2.064588	67.268657	-120.108824	390
2.112136	65.391727	-118.231894	400

Tabella 3.2:

Valori dei parametri A , B , σ in funzione della compressibilità.

Data l'equazione (3.41), si può ricavare l'espressione della pressione usando la formula (3.12):

$$p(n) = n^2 \frac{d}{dn} \left(\frac{\varepsilon}{n} \right) = n_0 \left[\frac{2}{3} \langle E_F^0 \rangle u^{5/3} + \frac{A}{2} u^2 + \frac{B\sigma}{\sigma+1} u^{\sigma+1} \right] \quad (3.44)$$

Il grafico della figura 3.7 mostra la dipendenza della pressione p da $u=n/n_0$, usando come parametri A , B , σ per i due valori estremi di K_0 : alla linea spessa corrisponde una compressibilità di 400 MeV, a quella fina una compressibilità di 200 MeV.

Il fatto che la pressione sia negativa per u minore di 1 significa semplicemente che la materia nucleare simmetrica a questi valori è instabile. Il materiale formerà bolle di materia nucleare normale con $n=n_0$. Per questa ragione, avrà senso un grafico dell'energia di legame in funzione della pressione solo per valori di u maggiori di 1.

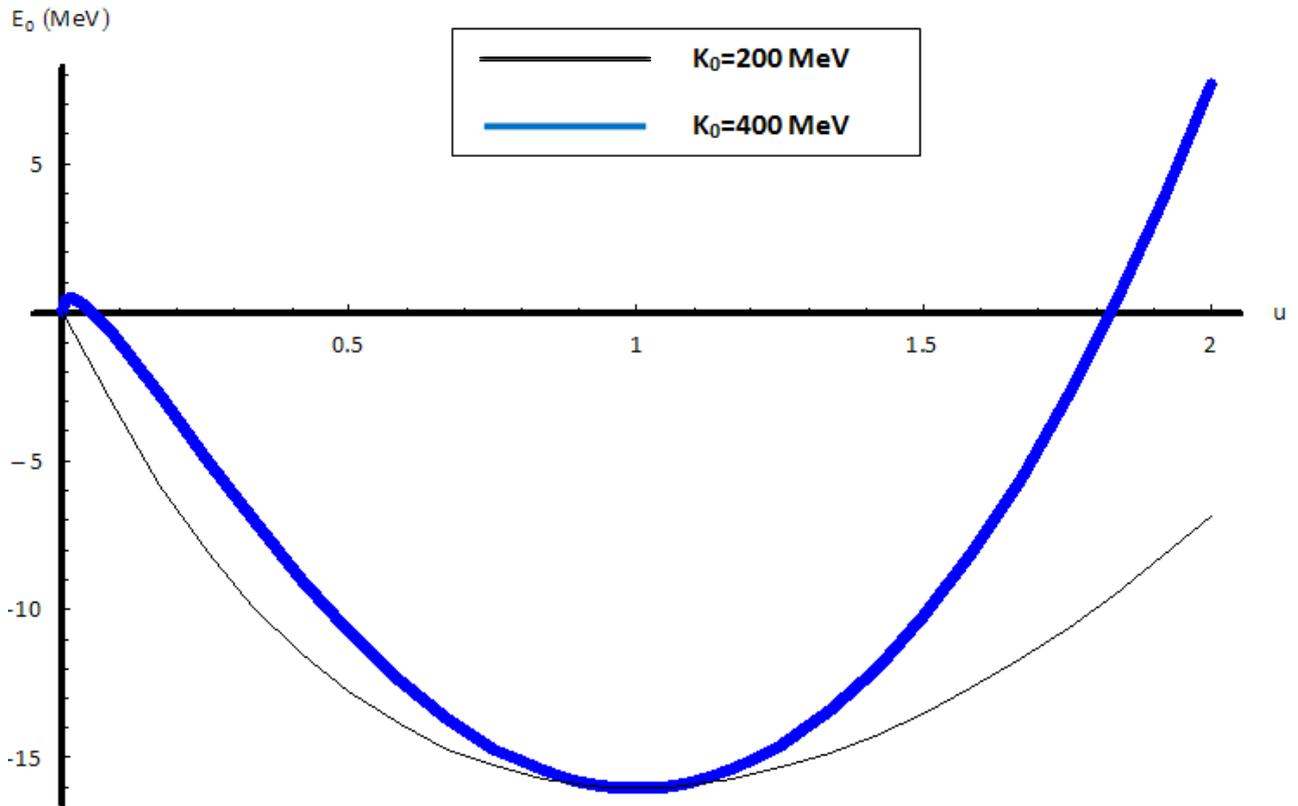


Figura 3.6:

Il grafico mostra l'energia media per nucleone meno la sua massa a riposo $\left(\frac{E}{A} - m_N\right)$, espressa in MeV, come funzione di $u = n/n_0$ (adimensionale), usando come parametri A , B e σ , e facendo variare la compressibilità:

- alla linea nera sottile corrisponde una compressibilità di 200 MeV;
- alla linea blu spessa corrisponde una compressibilità di 400 MeV.

Riassumiamo le caratteristiche del minimo:

- è posizionato a $u=1$, cioè quando $n = n_0 = 0.16$ nucleoni/ fm^3 ;
- la sua profondità corrisponde all'energia di legame $BE = -16$ MeV;
- la derivata seconda (cioè la curvatura) in tale punto corrisponde alla compressibilità nucleare.

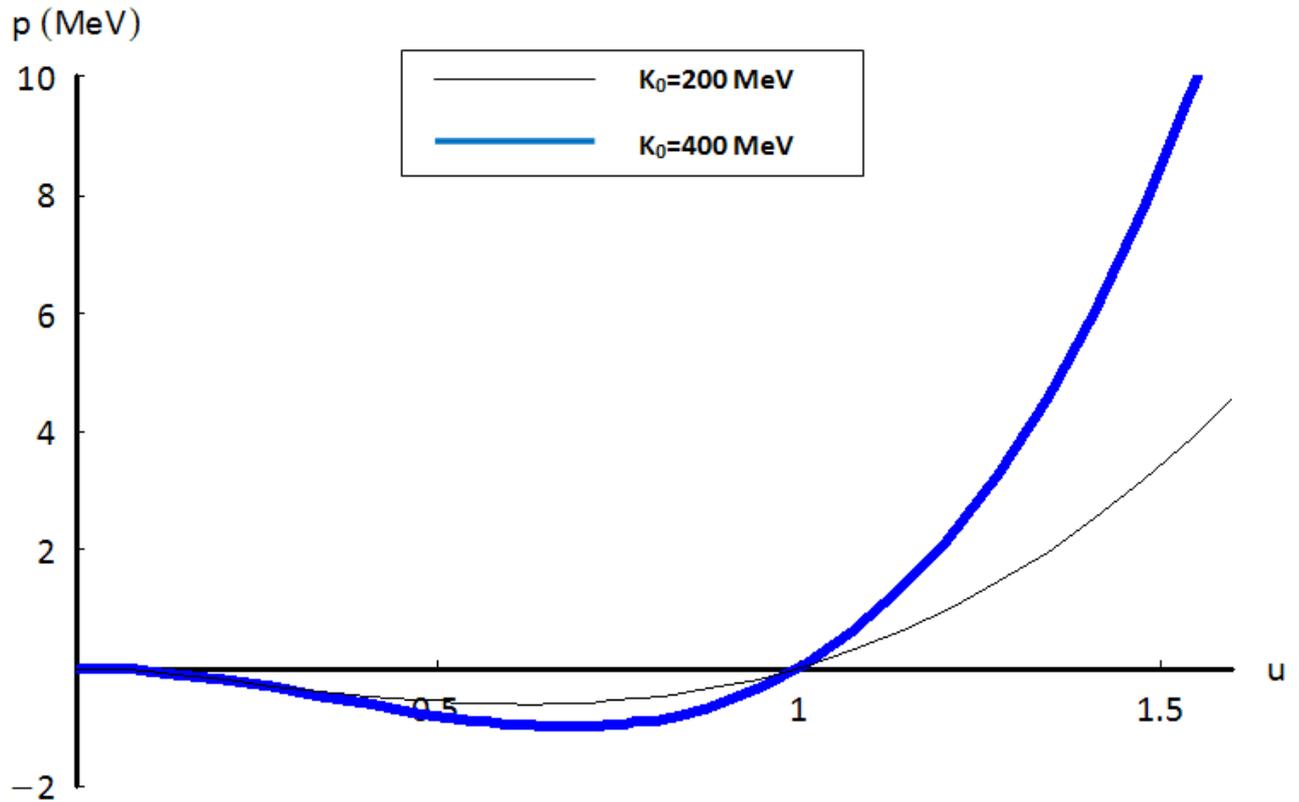


Figura 3.7:

Mostra l'andamento della pressione p (MeV/fm^3) in funzione u (adimensionale) per materia nucleare simmetrica, usando come parametri A , B e σ , e facendo variare la compressibilità:

- Alla linea nera sottile corrisponde una compressibilità di 200 MeV;
- Alla linea blu spessa corrisponde una compressibilità di 400 MeV.

La pressione è:

- nulla quando $u=0$, perché quando non vi è densità nucleare, e quindi massa, non c'è nemmeno la pressione;
- negativa nell'intervallo $0 < u < 1$, perché la materia nucleare è in equilibrio, cioè tende a rimanere unita;
- positiva per valori di u maggiori di 1, perché a densità superiori di quella nucleare i nucleoni tendono a respingersi ed è quindi necessario applicare una pressione esterna affinché la materia resti legata.

B. Materia nucleare non simmetrica

Rappresentiamo la densità di neutroni e protoni in termini di un parametro ν :

$$n_n = \frac{1 + \nu}{2} n \quad n_p = \frac{1 - \nu}{2} n \quad (3.45)$$

Per la materia di neutroni pura $\nu=1$ e si noti che:

$$\nu = \frac{n_n - n_p}{n} = \frac{N - Z}{A} \quad (3.46)$$

$$x = \frac{n_p}{n} = \frac{1 - \nu}{2} \quad (3.47)$$

Ci possiamo così aspettare che l'interazione di rottura di simmetria dell'isospin sia proporzionale a ν (o ad una sua potenza).

Per prima cosa ci sono contributi all'energia cinetica da parte sia dei neutroni sia dei protoni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{KE}(n, \nu) &= \frac{3}{5} \frac{k_{F,n}^2}{2m_N} n_n + \frac{3}{5} \frac{k_{F,p}^2}{2m_N} n_p \\ &= n \langle E_F \rangle \frac{1}{2} [(1 + \nu)^{5/3} + (1 - \nu)^{5/3}] \end{aligned} \quad (3.48)$$

dove $\langle E_F \rangle$ è l'energia cinetica media della materia nucleare simmetrica a densità n . Quando $n=n_0$: $\langle E_F \rangle = \langle E_F^0 \rangle$. Per la materia non simmetrica, $\nu \neq 0$, l'energia cinetica in eccesso è:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{KE}(n, \nu) &= \varepsilon_{KE}(n, \nu) - \varepsilon_{KE}(n, 0) = n \langle E_F \rangle \left\{ \frac{1}{2} [(1 + \nu)^{5/3} + (1 - \nu)^{5/3}] - 1 \right\} \\ &= n \langle E_F \rangle \left\{ 2^{2/3} [(1 - x)^{5/3} + x^{5/3}] - 1 \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Per la materia neutronica pura, $v=1$:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_{KE}(n, v) &= n\langle E_F \rangle (2^{2/3} - 1) = n\langle E_F \rangle \frac{5}{9} v^2 \left(1 + \frac{v^2}{27} + \dots \right) \\ &= nE_F \frac{v^2}{3} \left(1 + \frac{v^2}{27} + \dots \right) \quad (3.50)\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo espanso $\Delta\varepsilon_{KE}(n, v)$ in serie fino al secondo ordine, un'approssimazione sufficiente per i nostri scopi. Per la materia di puri neutroni, l'energia per particella a densità normali è circa 13 MeV, più di un terzo della totale energia di simmetria. Quindi, il contributo dell'energia potenziale deve essere di circa 20 MeV. Assumiamo che un'approssimazione quadratica per v sia in buon accordo con il contributo fornito al potenziale e scriviamo l'energia totale della particella:

$$E(n, v) = E(n, 0) + v^2 S(n) \quad (3.51)$$

La rottura della simmetria dell'isospin è proporzionale a v^2 , il che riflette la natura a coppie delle interazioni nucleari.

Assumiamo, inoltre, che l'energia di simmetria $S(u)$, $u=n/n_0$, è della forma:

$$S(u) = (2^{2/3} - 1)\langle E_F^0 \rangle (u^{2/3} - F(u)) + S_0 F(u) \quad (3.52)$$

Qui $S_0=30$ MeV è il parametro dell'energia di simmetria del "bulk". Sebbene la funzione $F(u)$ debba soddisfare le seguenti due condizioni:

$$\begin{cases} F(1) = 1 & \rightarrow S(1) = S_0 \\ F(0) = 0 & \rightarrow S(0) = 0 \end{cases}$$

restano comunque molte possibilità di scelta.

L'opzione più semplice è una relazione lineare $F(u)=u$, ma si possono adottare molte altre possibilità, come $F(u)=u^{1/2}$ o $F(u)=u^2$. Costruendo un grafico che riporti l'energia di legame BE in funzione di u , si può verificare come esso sia indipendente dalla scelta della funzione $F(u)$.

Il grafico 3.8 riporta l'energia per particella della materia neutronica pura in funzione di u per i parametri A , B e σ e per $S_0=30$ MeV. Le tre linee sono il risultato dell'applicazione di una differente funzione $F(u)$: la linea spessa è associata a $F(u)=u$, la linea sottile a $F(u)=u^{1/2}$, la linea tratteggiata a $F(u)=u^2$.

Le tre curve si intersecano nel punto $u=1$ per un valore di E pari a 14. Ad eccezione della funzione $u^{1/2}$, il valore dell'energia è sempre positivo e la sua curva è monotona crescente.

Il termine dominante a grandi valori di u segue una legge quasi quadratica, come u^σ ($\sigma=2.112$). Tuttavia quello che ci saremmo aspettati era un incremento di tipo lineare. Nelle pagine che seguono, cercheremo di capire il perché di questo andamento inaspettato.

Data la densità di energia, la pressione corrispondente è:

$$\begin{aligned}
 p(n, x) &= u \frac{d}{du} \varepsilon(n, \alpha) - \varepsilon(n, \alpha) = u \frac{d}{du} \varepsilon(n, \alpha) - n_0 u E(n, \alpha) \\
 &= p(n, 0) + n_0 \alpha^2 \left[\frac{2^{2/3} - 1}{3} \langle E_F^0 \rangle (2u^{5/3} - 3u^2) + S_0 u^2 \right] \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Il grafico di figura 3.9 mostra la dipendenza da u della pressione $p(n,1)$ in rosso e dell'energia $\varepsilon(n,1)$ in nero per neutroni puri, al variare da 0 a 10 volte la densità normale della materia nucleare. Entrambe le funzioni cresce lentamente e monotonicamente. Si è mantenuta l'associazione del tipo di linea con il tipo di funzione $F(u)$.

Ora possiamo tornare a considerare l'equazione di stato, cioè la dipendenza di p da ε . Ci limitiamo a considerare il caso in cui la funzione $F(u)$ dipenda linearmente da u , dal momento che abbiamo verificato come le diverse scelte diano risultati prossimi tra di loro.

Dal grafico della figura 3.9 si nota come la pressione sia non negativa e monotonicamente crescente con l'energia. In effetti, essa sembra quasi quadratica in questo intervallo di energie ($0 < u < 5$). Questo suggerisce di provare un fit politropo dai risultati ragionevoli.

Ponendo il valore di γ pari al valore assunto da σ , l'equazione di fit che troviamo è:

$$p(\varepsilon) = 3.612 \times 10^{-4} \varepsilon^{2.1} \quad (3.54)$$

Questo risultato potrebbe essere adoperato per risolvere le equazioni di Tolman – Oppenheimer – Volkov per una stella di neutroni pura con interazioni nucleari.

Tuttavia, prima di fare questo, è preferibile trovare un'equazione di stato che non violi il principio di causalità, un punto fermo della relatività speciale.

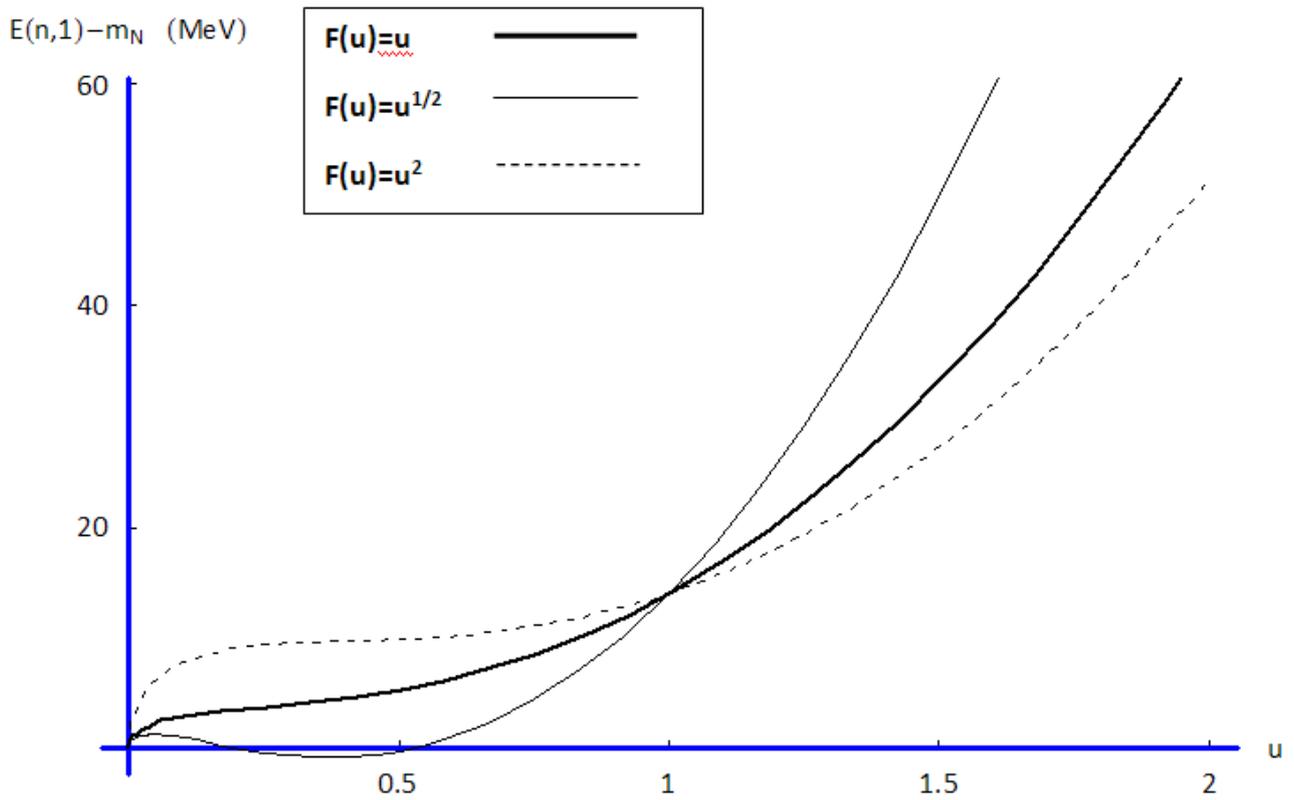


Figura 3.8:

Il grafico mostra l'andamento dell'energia della singola particella $E(n, \nu = 1) - m_N$ (MeV) in funzione di u (adimensionale), per i parametri A , B e σ .

Le diverse curve rappresentano altrettante scelte di funzioni $F(u)$:

- linea spessa $F(u)=u$,
- linea sottile $F(u)=u^{1/2}$,
- linea tratteggiata $F(u)=u^2$

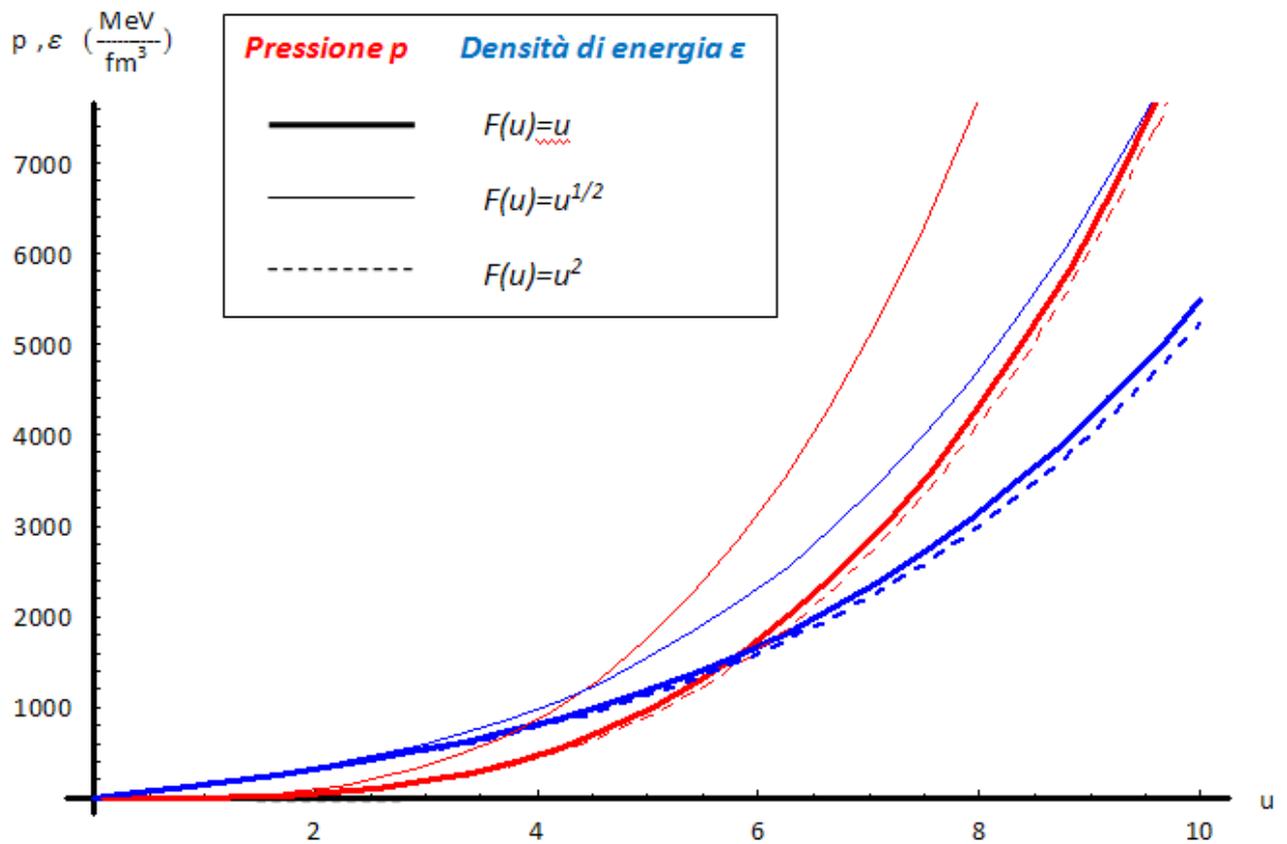


Figura 3.9:

Il grafico mostra, per la materia neutronica pura, la dipendenza da $u = n/n_0$ (adimensionale) della pressione p (rosso) e della densità di energia ε (blu), entrambe in MeV/fm^3 , per le differenti scelte della funzione $F(u)$:

- linee spesse $F(u)=u$
- linee sottili $F(u)=u^{1/2}$
- linee tratteggiate $F(u)=u^2$

I calcoli sono stati svolti ponendo la compressibilità K_0 uguale a 400 MeV.

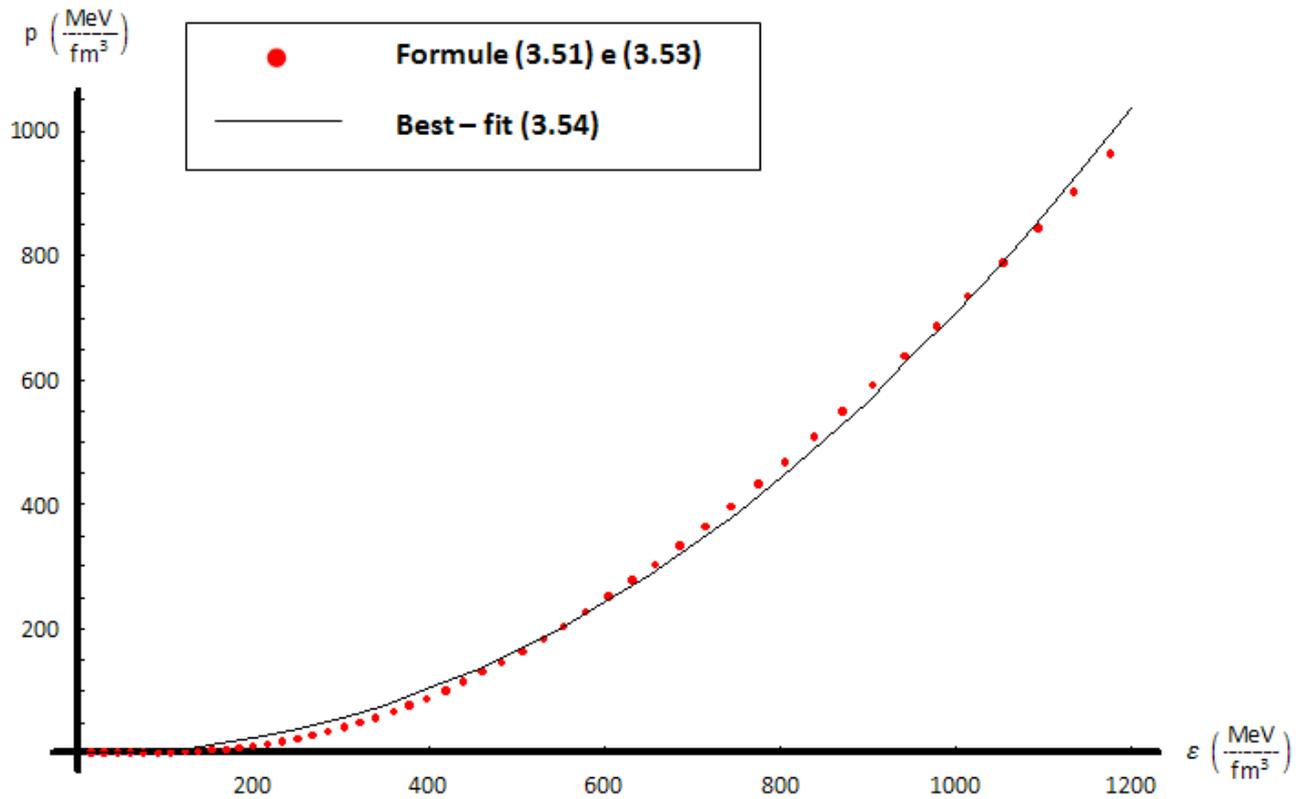


Figura 3.10:

Il grafico rappresenta l'equazione di stato per la materia neutronica pura ($v=1$), cioè la dipendenza della pressione p (MeV/fm^3) in funzione della densità di energia ϵ (MeV/fm^3).

I punti rossi sono i valori calcolati direttamente dall'equazione (3.51) diviso per la densità di materia nucleare n e dall'equazione (3.53).

$$\epsilon = \frac{E(n, \nu)}{n} = \frac{E(n, 0) + \nu^2 S(n)}{n} \quad (3.51)$$

$$p(n, x) = p(n, 0) + n_0 \alpha^2 \left[\frac{2^{2/3} - 1}{3} \langle E_F^0 \rangle (2u^{5/3} - 3u^2) + S_0 u^2 \right] \quad (3.53)$$

La curva continua, invece, rappresenta un best – fit di tali punti che si ricavano dall'equazione (3.54).

$$p(\epsilon) = 3.612 \times 10^{-4} \epsilon^{2.1} \quad (3.54)$$

I calcoli sono stati svolti ponendo la compressibilità K_0 uguale a 400 MeV.

C. Principio di causalità

Il quadrato della velocità del suono nella materia nucleare è legato alla pressione p e alla densità di energia ε nel seguente modo:

$$\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 = \frac{dp}{d\varepsilon} = \frac{dp/dn}{d\varepsilon/dn} \quad (3.55)$$

Per soddisfare il principio relativistico della causalità dobbiamo richiedere che la velocità del suono non superi quella della luce. Questo può accadere quando la densità della materia diventa molto elevata.

Si può salvaguardare questo principio assumendo che sia $p(u)$ sia $\varepsilon(u)$ non crescano più di u^2 . Un semplice modo per avere questo effetto è di modificare il termine B, introducendo un quarto parametro C, con il quale il potenziale nucleare diventa:

$$V(u, 0) = \frac{A}{2}u + \frac{B}{\sigma + 1} \frac{u^\sigma}{Cu^{\sigma-1} + 1} \quad (3.56)$$

La scelta di C è del tutto arbitraria, ma deve tenere conto di due aspetti:

1. gli effetti del denominatore dell'equazione (3.56) devono essere apprezzabili per valori elevati di u ;
2. il valore degli altri parametri, in particolare modo della compressibilità nucleare, non possono cambiare significativamente.

Tabella 3.5

A	-122.2 MeV
B	83.8 MeV
C	0.2
σ	2.37
K₀	362.2 MeV

Tabella 3.3: Valori di A, B, σ, K_0 , ricalcolati per tenere conto della causalità.

Leggendo la tabella 3.5, possiamo concludere che assegnando un valore di $C=0.2$ il cambiamento dei valori dei parametri è minimo e quindi accettabile. Introducendo questo accorgimento, il risultato del fit per l'equazione di stato non cambia in maniera decisiva:

$$p(\varepsilon) = 4.012 \times 10^{-4} \varepsilon^2 \quad (3.57)$$

X. Stelle di neutroni con interazioni nucleari

La soluzione dell'equazione di stato non è molto dissimile dai casi precedenti e per questo ne omettiamo i risultati.

Tuttavia, è presente un aspetto molto interessante per questo nuovo e più accurato modello. Dal grafico 3.11 si può vedere la massa M (M_s) della stella in funzione del suo raggio R (km), come già mostrato nel caso precedente.

L'effetto del potenziale gravitazionale è enorme, confrontandolo con le predizioni del modello a gas di Fermi, mostrato nel grafico di figura 3.5. Il limite superiore della massa questa volta è circa $2.3 M_s$, invece che $0.8 M_s$, ed il raggio massimo è quasi $13.5 km$, appena maggiore di $11 km$.

L'elevato valore della massa M è la conseguenza del grande valore della (in)compressibilità nucleare $K_0=363 MeV$: più un oggetto è incompressibile, più massa può sopportare.

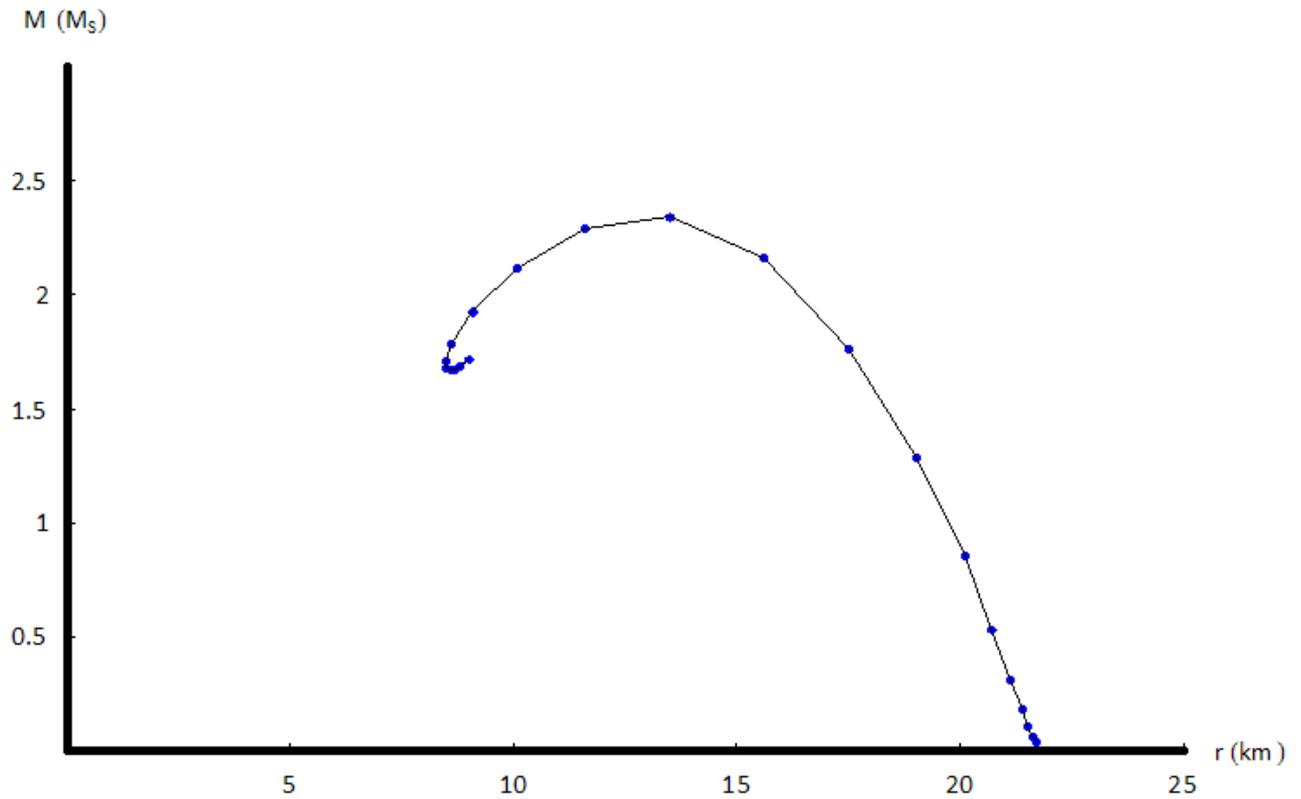


Figura 3.11:

Il grafico mostra l'andamento della massa M (M_{\odot}) della stella in funzione del raggio R (km) per l'attuale modello, più accurato del precedente, che include l'interazione nucleone – nucleone.

Anche in questo caso, per valori del raggio minori di quello che fornisce il valore massimo della massa, la stella è instabile e va incontro al collasso gravitazionale.

4. CONFRONTO DATI

Arrivati a questo punto, è importante effettuare un confronto tra i nostri risultati e la corrente letteratura scientifica. In questo modo si potrà verificare se i modelli sviluppati nella precedente sezione risultino attendibili e adatti a descrivere la struttura di una stella di neutroni.

Nella figura successiva, tratta dall'articolo di Lattimer e Prakash "*The Physics of Neutron Stars*"^{xxxviii}, gli autori mostrano il grafico massa – raggio per una stella di neutroni, evidenziandone due regioni escluse a causa dei seguenti requisiti empirici:

1. stabilità dovuta alla **relatività generale** (in blu),
$$R > 2 \frac{GM}{c^2} \quad (4.1)$$

il raggio della stella di neutroni deve necessariamente essere maggiore del raggio di Schwarzschild, altrimenti l'astro collassa in un buco nero;

2. **pressione finita** (in azzurro),
$$R > \frac{9}{4} \frac{GM}{c^2} \quad (4.2)$$

perché, per quanto possa essere elevata, il valore assunto dalla pressione nel centro della stella deve essere finita;

3. **causalità** (in rosso),
$$R > 2.9 \frac{GM}{c^2} \quad (4.3)$$

la velocità del suono che si propaga nella materia della stella non può superare quella della luce, che è la velocità massima raggiungibile;

4. **rotazione** (in verde), perché un periodo di rotazione molto piccolo può innescare delle forze centrifughe così intense da distruggere la stella.

Sono tracciate anche le curve per il raggio di radiazione $R_\infty = \frac{R}{\sqrt{1-2GM/Rc^2}}$ (in arancione), quantità legata allo spostamento doppler^{xxxix} verso il rosso della luminosità e della temperatura di una stella di neutroni ($z = \frac{1}{\sqrt{1-2GM/Rc^2}} - 1$). Infine sono rappresentate delle stime del raggio limite di alcune pulsar della costellazione della Vela, effettuate a partire dai glitches^{xi} analizzati (linea tratteggiata).

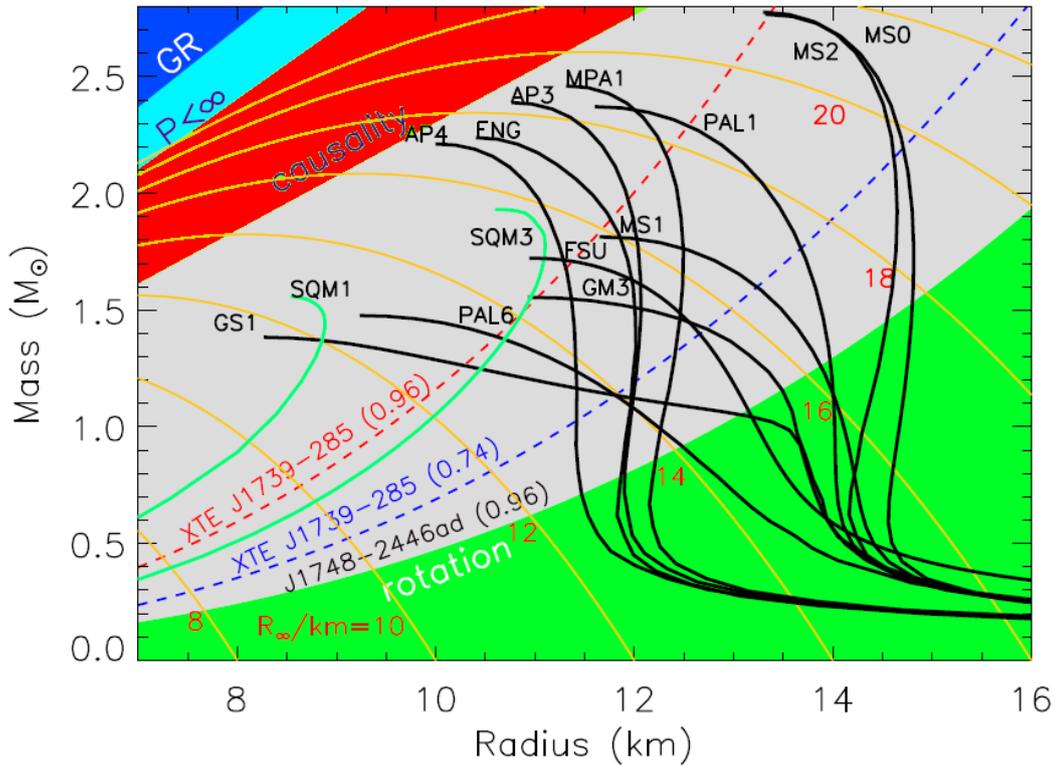


Figura 4.1: Diagramma massa (M_{\odot}) – raggio (km) per una stella di neutroni per differenti equazioni di stato, in cui sono ben delimitate le regioni proibite a causa di differenti fenomeni fisici:

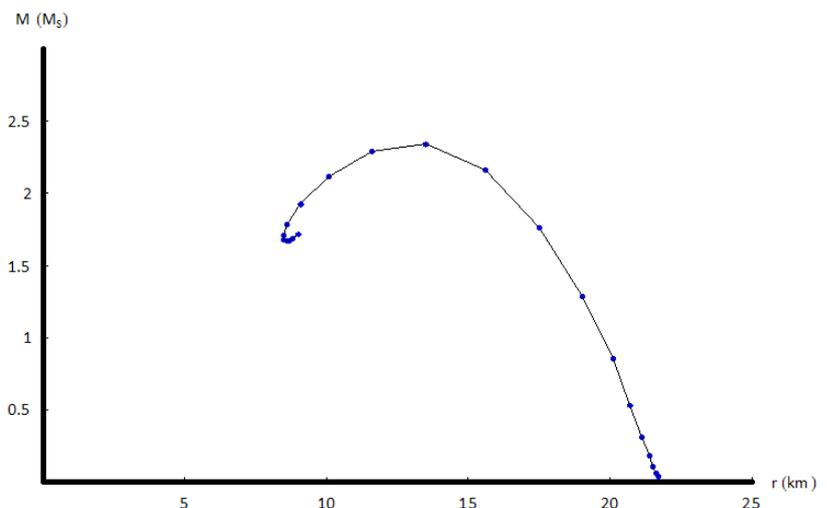
1. relatività generale (blu): $R > 2GM/c^2$
2. pressione finita (azzurro): $R > 9GM/4c^2$
3. causalità (rosso): $R > 2.9GM/c^2$
4. rotazione (verde).

Le curve in verde (SQM1 e SQM3) rappresentano stelle composte da quark. Le curve in nero, invece, rappresentano delle equazioni di stato per stelle composte da materia neutronica.

In basso a destra è riportato il grafico 3.11 che rappresenta il frutto dei nostri calcoli sulla relazione massa – raggio.

Si noti che:

1. il picco massimo si raggiunge intorno ai 12 km di raggio, risultato analogo alla figura 4.1;
2. il grafico copre valori del raggio oltre i 20 km, mentre questa possibilità è esclusa dalla figura 4.1.



Confrontando l'immagine di figura 4.1 con il grafico di figura 3.11, è possibile notare che l'andamento qualitativo della relazione massa $M (M_{\odot})$ – raggio R (km) è simile nei due casi.

Tutti i differenti grafici raggiungono il massimo per la massa della stella nell'intorno di $R=12$ km; per valori minori di questo, la stella di neutroni è instabile ed è destinata al collasso gravitazionale che la renderà un buco nero; per valori maggiori, invece, la stella di neutroni è stabile.

La differenza più rilevante riguarda la modalità con cui le due curve si avvicinano allo zero a destra del picco massimo. I grafici riportati nell'articolo tendono molto rapidamente a zero, non appena è stato raggiunto il limite superiore della massa; il grafico da noi prodotto, invece, si approssima molto più lentamente a zero, annullandosi solo in corrispondenza dei 20 km.

La causa del discordante andamento della curva risiede nel valore scelto per la compressibilità nucleare. Nei nostri calcoli, abbiamo posto che la compressibilità K_0 fosse pari a 363 MeV. Questa scelta è da considerarsi inesatta perché esso è un valore sicuramente elevato, più grande di quanto sia in realtà.

Alla luce di questo si spiega il perché della notevole differenza tra i due grafici: poiché i nuclei sono poco comprimibili, essi sono capaci di sostenere pressioni molto elevate e quindi anche una massa maggiore.

Al contrario, prendendo un valore della compressibilità più realistico, i nuclei non potrebbero sopportare grandi pressioni, superiori a quelle coincidenti con il limite superiore per la massa della stella di neutroni.

Da queste considerazioni, si può dedurre che il procedimento da noi adottato è piuttosto preciso e fedele nel determinare il valore massimo della massa di una stella di neutroni, ma è poco affidabile nel definire con precisione quale sia il valore massimo per il raggio di una stella di neutroni.

Riportiamo ora in tabella 4.1 alcune equazioni di stato presentate dalla letteratura scientifica, ponendo in rilievo il tipo di approccio adottato per affrontare la questione e la composizione ipotizzata per la stella di neutroni.

Queste equazioni di stato sono anche alla base dei grafici della figura 4.1.

Tabella 4.1

Simbolo	Autori ^{articolo}	Approccio	Composizione
AP	Akmal & Pandharipande ^{xli}	Variazionale	n p
MPA	Müther, Prakash, & Ainsworth ^{xlii}	Dirac – Brueckner HF	n p
MS	Müller & Serot ^{xliii}	Campo medio	n p
WFF	Wiringa, Fiks & Fabrocine ^{xliv}	Variazionale	n p
FP	Friedman & Pandharipande	Variazionale	n p
PS	Pandharipande & Smith	Potenziale fenomenologico	n π^0
ENG	Engvik et al.	Dirac – Brueckner HF	n p
PAL	Prakash et al.	Potenziale fenomenologico	n p
GM	Glendenning & Moszkowski ^{xlv}	Campo medio	n p H
GS	Glendenning & Schaffner – Bielich ^{xlvi}	Campo medio	n p K
ALF	Alford et al. ^{xlvii}	Materia di quark	n p Q
PCL	Prakash, Cooke, & Lattimer ^{xlviii}	Campo medio	n p H Q
SQM	Prakash et al.	Materia di quark	Q (u,s,d)

Tabella 4.1:

Riepilogo delle equazioni di stato più comuni.

La linea orizzontale separa le equazioni di stato con materia normale da quelle con materia esotica. Con il termine “Approccio” si intende quali sono le basi teoriche sulle quali il modello si fonda. La “Composizione” è caratterizzata da:

- n – neutroni;
- p – protoni;
- Q – quark;
- π^0 – pioni;
- H – iperoni;
- K – kaoni;
- u – quark up;
- s – quark strange;
- d – quark down.

Nell'articolo "The Self – Gravity of Pressure in Neutron Stars"^{xlix}, gli autori Schwab, Hughes e Rappaport studiano la struttura della stella di neutroni, tenendo in particolare considerazione le conseguenze prodotte della relatività generale, in particolare sulla pressione interna.

Per verificare gli effetti della relatività, essi modificano l'equazione di stato di Tolman – Oppenheimer – Volkoff inserendo una costante χ ($0 \leq \chi \leq 1$), la quale parametrizza il comportamento della pressione:

- $\chi=1$ contributo di natura esclusivamente relativistica;
- $\chi=0$ contributo di natura puramente classica.

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{G[m(r) + 4\pi r^3 p \chi]}{r^2 \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right]} \quad (4.4)$$

In figura 4.2 e 4.3 sono riportati i grafici presenti nel testo originale.

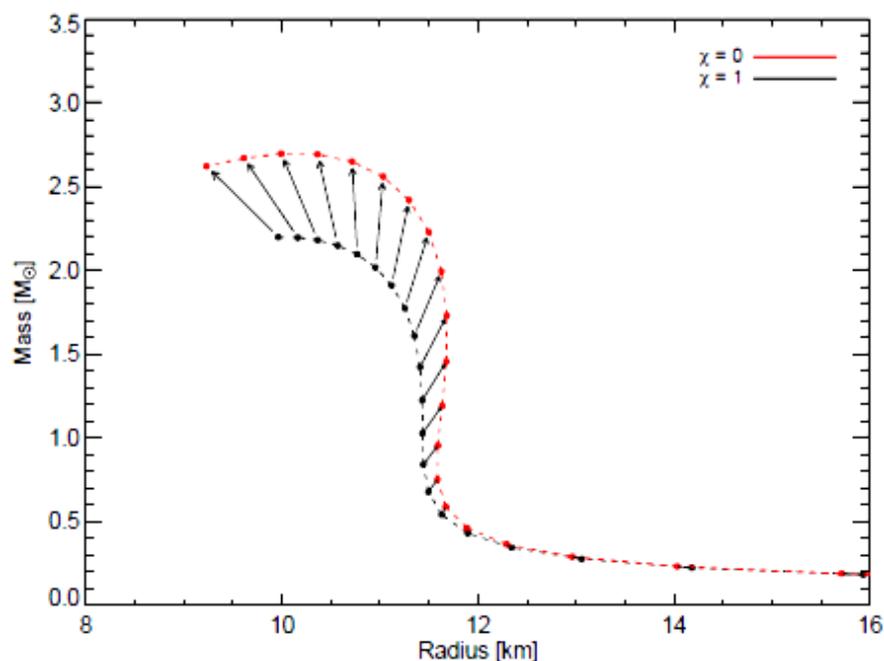


Figura 4.2:

Relazione massa (M_s) – raggio (km) per una particolare equazione di stato (AP4), nel caso della relatività generale (nero) e della fisica newtoniana (rosso).

Le frecce connettono i punti delle due curve che presentano i medesimi valori iniziali di pressione nel centro della stella di neutroni.

In particolare, si noti che le due ultime frecce a sinistra collegano modelli $\chi=1$ stabili con modelli $\chi=0$ instabili. Gli ultimi due punti della curva rossa sono instabili perché lì la derivata diventa positiva, cioè la curva scende dopo aver raggiunto il massimo.

Nel grafico di figura 4.2, le frecce tra le due curve collegano i punti dei due modelli che presentano le medesime condizioni iniziali di pressione centrale. È importante notare che le ultime due frecce sul lato sinistro del grafico puntano da modelli $\chi=1$ stabili a modelli $\chi=0$ instabili.

Un altro dato importante è che non esistono modelli in cui il raggio cambi più del 5% tra i due casi. La massa, al contrario, subisce delle variazioni fino al 25% del proprio valore: questa differenza è così grande da superare persino le incertezze dovute ad una differente scelta delle equazioni di stato da adoperare.

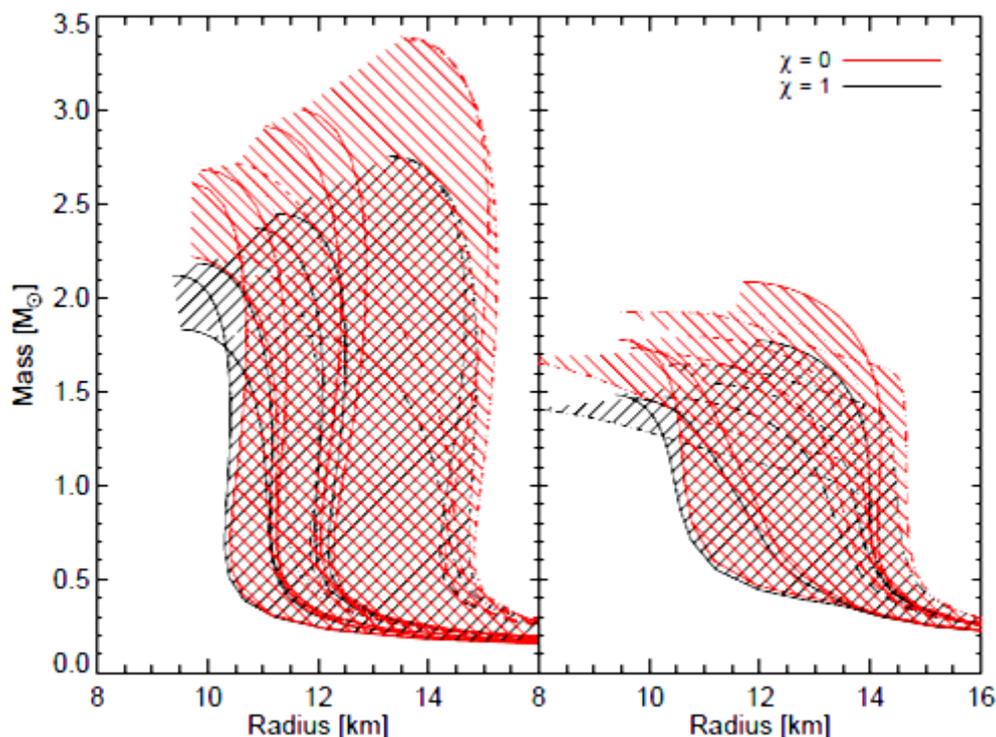


Figura 4.3:

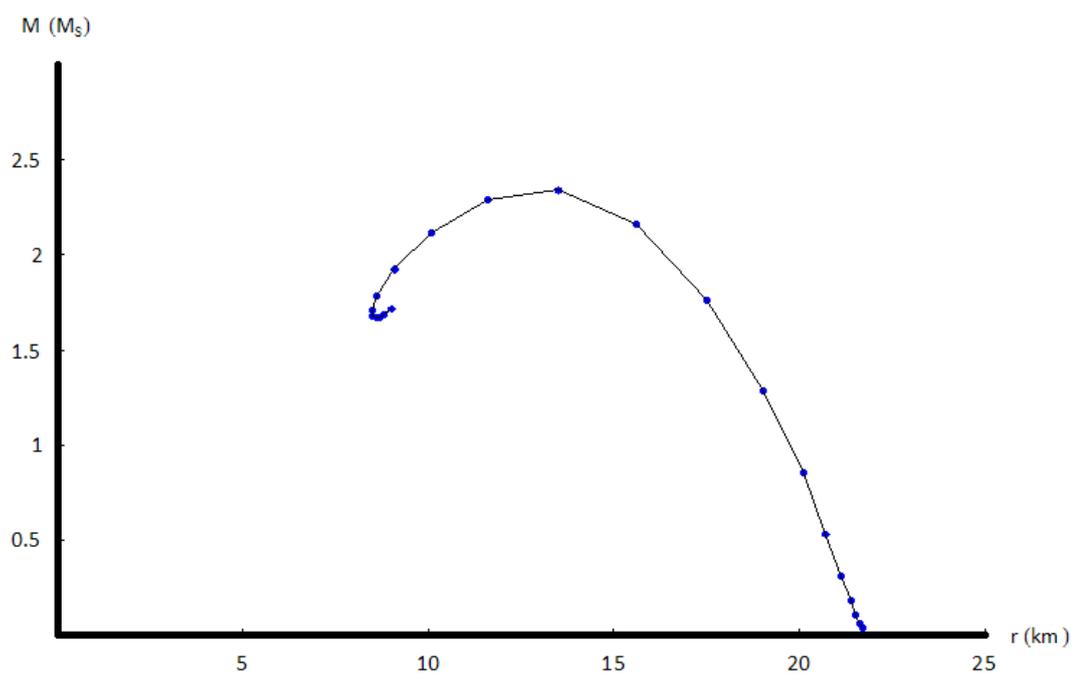
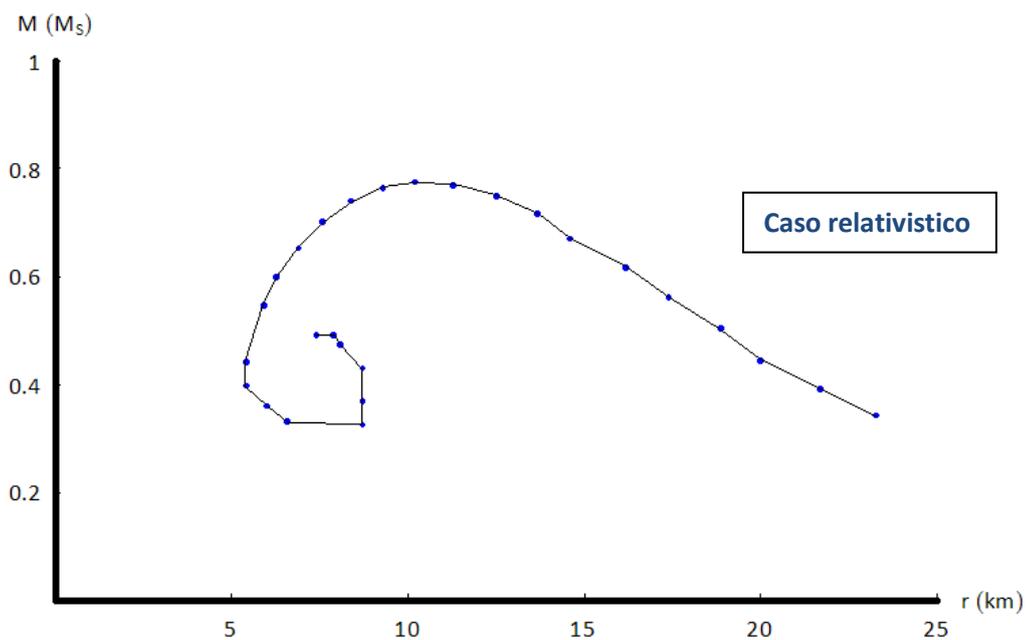
Relazione massa (M_s) – raggio (km) per uno spettro di equazioni di stato, raccolte nella tabella 4.1:

- A sinistra, equazioni di stato con materia neutronica;
- A destra, equazioni di stato con materia esotica.

L'area tratteggiata copre la regione compresa tra le curve $M(r)$ estreme. In nero, sono mostrati i risultati che includono la relatività generale; in rosso, sono riportati i risultati puramente classici.

Nei due grafici di figura 4.3 è riportata la relazione massa – raggio per una gamma di equazioni di stato. In entrambe si può notare chiaramente:

1. la distribuzione di massa delle stelle di neutroni diminuisce molto rapidamente quando il valore del raggio si attesta tra i 10 e i 14 km;
2. l'intervallo di valori più probabili per la massa è tra 1.5 e 2.2 masse solari M_s .



I grafici sovrastanti illustrano i nostri risultati per la relazione massa (M_{\odot}) – raggio (km) di una stella di neutroni nel caso classico (sopra, grafico 3.5) e nel caso relativistico (sotto, grafico 3.11).

Si presti attenzione al fatto che il valore della massa tende a zero solo per un valore del raggio maggiore di 20 km, mentre il grafico 4.3 mostra come questo accade per un valore del raggio più piccolo, intorno ai 14 km, prossimo a quello per il quale si ha il picco massimo della massa.

Confrontando i grafici della figura 4.3 con i grafici sovrastanti, che illustrano i risultati da noi elaborati per la relazione massa – raggio, è possibile notare come ci sia un riscontro favorevole per i valori dei raggi medi (10 – 14 km) ed il limite superiore della massa delle stelle di neutroni (1.5 – 2.2 M_S).

Purtroppo, l'esito è ancora una volta negativo per l'andamento della curva alla destra del picco massimo: le curve di figura 4.3 scendono molto rapidamente a zero subito dopo aver raggiunto il picco (14 km); le curve di figura 3.5 e 3.11, invece, raggiungono lo zero per un valore del raggio molto più grande di quello legato al picco massimo (oltre i 20 km).

Nell'articolo "*Structure and cooling of compact stars*"¹, Grigorian discute l'argomento dell'equazione di stato per la materia adronica di una stella di neutroni. Egli scrive l'energia di legame E per una singola particella come somma di due contributi: il primo è fornito dall'energia di legame per la materia simmetrica E_0 ; il secondo è apportato dall'energia di (a)simmetria E_S .

$$E(n, \beta) = E_0(n) + \beta^2 E_S(n) \qquad \beta = \frac{n_n - n_p}{n} = \frac{N - Z}{A} \qquad (4.5)$$

Si confronti questa definizione di energia di legame con quella da noi adoperata (3.51)

$$E(n, \nu) = E(n, 0) + \nu^2 S(n) \qquad \nu = \frac{n_n - n_p}{n} = \frac{N - Z}{A} \qquad (3.51)$$

Al di là delle differenze strettamente formali, le due formule coincidono.

Nel grafico di figura 4.4 è riportato l'andamento delle tre forme di energia in funzione dei differenti approcci utilizzati per determinare l'equazione di stato più appropriata.

Forniamo una breve e semplificata spiegazione delle sigle usate:

- **NL** e **NLp** indicano un modello di equazioni di stato fenomenologico, basato su una descrizione di campo medio relativistico della materia nucleare con i nucleoni ed i mesoni che rappresentano i gradi di libertà e le cui interazione sono non – lineari;

- **DD, D³C, DD-F** sono anch'essi modelli basati su un campo medio relativistico, ma includono anche una dipendenza dalla densità;
- **DBHF (Bonn A)** indica un modello microscopico, costruito a partire da un'interazione nucleone – nucleone realistica, ovvero che riporta i dati della diffusione elastica di nucleoni e le proprietà del deuterio;
- **KVR e KVOR** sono invece dei modelli ibridi, in cui i parametri fenomenologici del campo medio relativistico sono posti in relazione con i risultati microscopici.

Analizzando i tre grafici, risulta chiaro che l'andamento delle tre forme di energia sia meglio compreso per bassi valori della densità nucleare, dove le curve si sovrappongono, mentre le incertezze presenti per densità elevate riflettono la scarsa conoscenza della materia nucleare in quelle condizioni, dove invece le curve si aprono e si discostano tra loro.

Con i risultati dei nostri calcoli eravamo giunti alla stessa conclusione, mostrando nei grafici 3.6 e 3.8 che l'energia di legame presenta un ampio intervallo di valori possibili già per densità pari al doppio della densità nucleare $n_0=0.16 \text{ nucleoni}/\text{fm}^3$. Questo ha ripercussioni sull'energia totale per nucleone: la indeterminazione sul valore dell'energia E è già notevole per $n=0.5 \text{ nucleoni}/\text{fm}^3$.

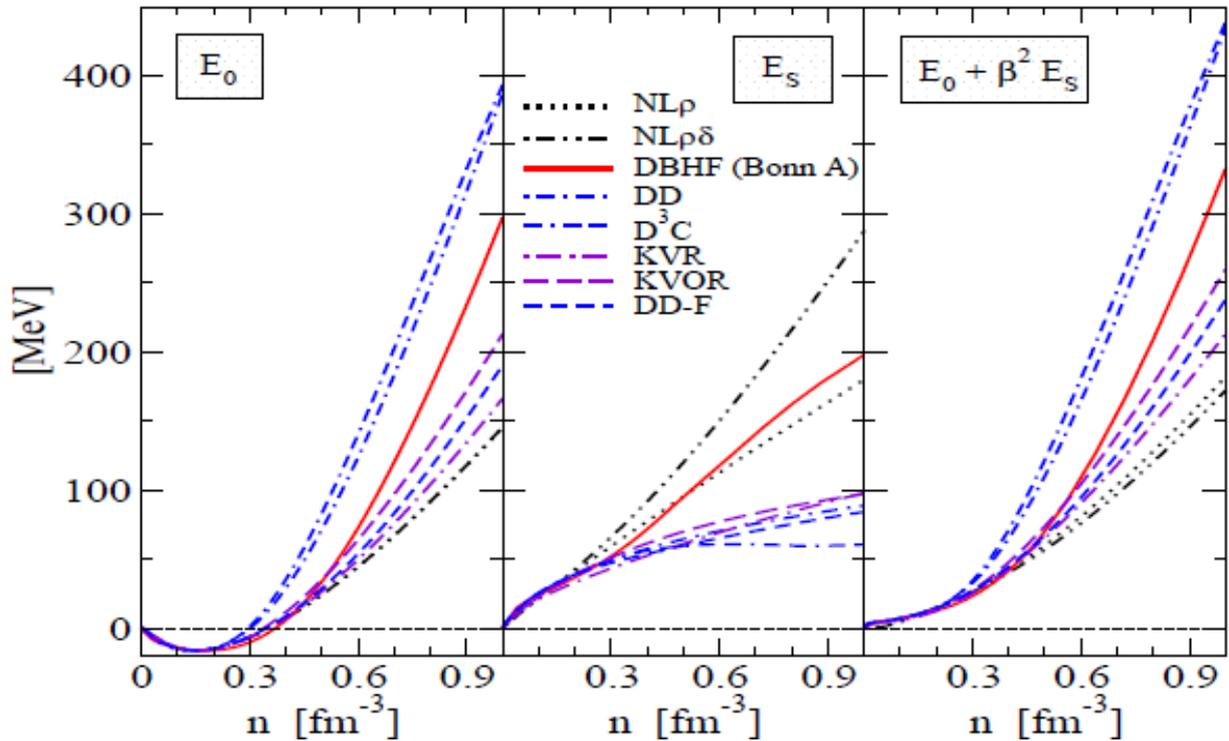
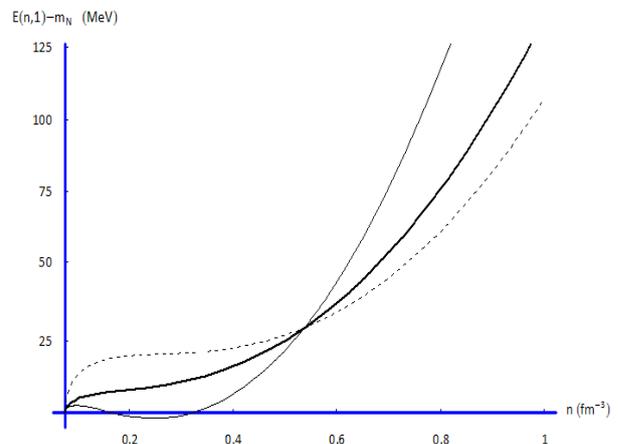
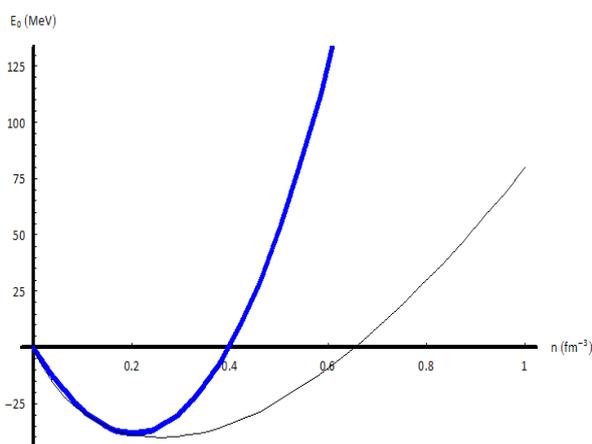


Figura 4.4:

- a sinistra, l'energia per nucleone E_0 (MeV) nella materia nucleare simmetrica in funzione della densità nucleare n (nucleone/ fm^3);
- al centro, l'energia di (a)simmetria E_s (MeV) in funzione della densità nucleare n (nucleoni/ fm^3);
- a destra, l'energia per nucleone E (MeV) nella materia della stella di neutroni (in equilibrio β e carica totale nulla) $E_0 + \beta^2 E_s$ in funzione della densità nucleare n (nucleoni/ fm^3).

Sotto sono riportati i grafici 3.6 (sinistra) e 3.8 (destra). Essi rappresentano rispettivamente:

- l'andamento della energia per nucleone (MeV) in funzione di n (il minimo dell'energia per nucleone si raggiunge per $n=n_0=0.16$ nucleoni/ fm^3);
- l'andamento dell'energia per nucleone (MeV) nella materia della stella di neutroni sempre in funzione di n .



L'articolo "The equation of state for the nuclear matter and the properties of the neutron star"^{li} di Chang-Geng Liu e Bao-Xi Sun affronta l'argomento della causalità nello studio della struttura della stella di neutroni. Ricordiamo che con il termine "causalità"^{lii} si intende che la velocità del suono nella materia non possa superare quella della luce nella medesima materia: questo è conseguenza del postulato della relatività.

Per tenere presente questo fenomeno fisico, gli autori inseriscono dei termini aggiuntivi nella formula dell'energia potenziale nucleare: procedimento identico a quello che avevamo seguito nel nostro studio.

$$V(n, 0) = \frac{A}{2}u + \frac{B}{\sigma + 1} \frac{u^\sigma}{Cu^{\sigma-1} + 1} \quad (4.6)$$

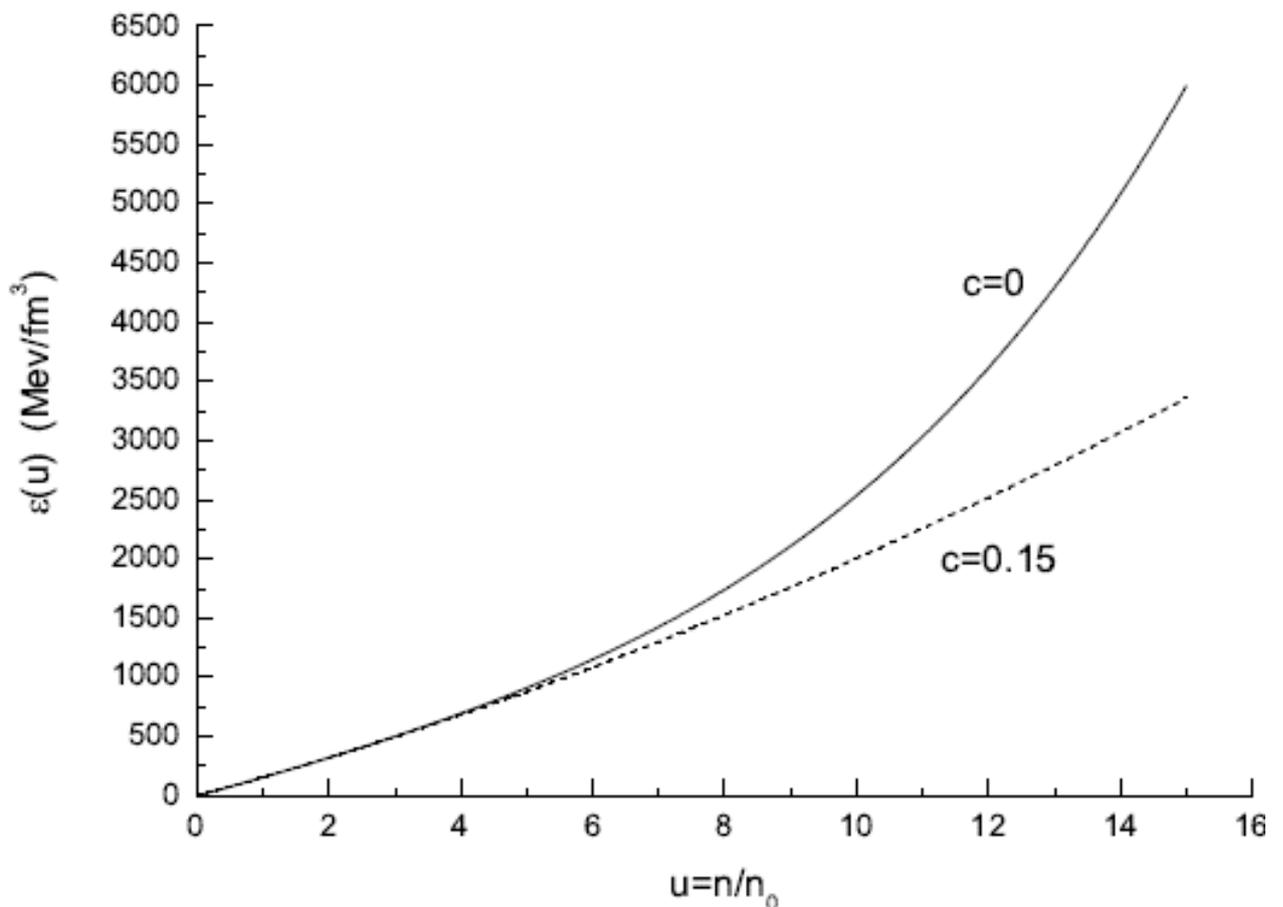


Figura 4.5:

Densità di energia ϵ della materia nucleare stabile in funzione della densità relativa u , sia ignorando la causalità ($C=0$, linea continua), sia rispettandola ($C=0.15$, linea tratteggiata).

Nel grafico di figura 4.5 è riportato l'andamento della densità di energia della materia nucleare in funzione della densità relativa $u=n/n_0$ in due condizioni:

- ignorando la causalità ($c=0$);
- considerando la causalità ($c=0.15$).

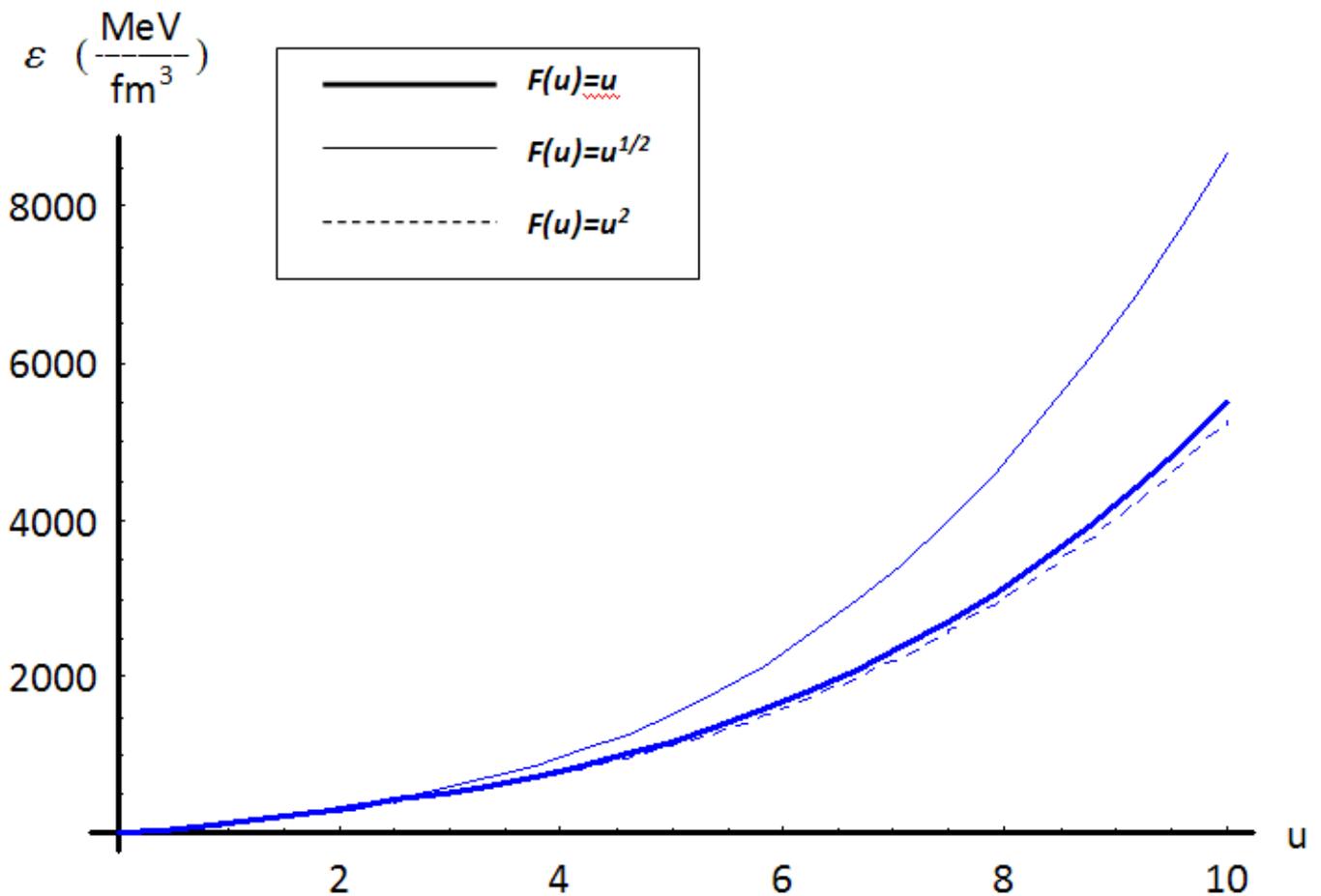


Figura 3.9:

Il grafico mostra la dipendenza da $u=n/n_0$ (adimensionale) dell'energia ε (nero), espressa in (MeV/fm^3) , per le differenti scelte della funzione $F(u)$:

- la linea spessa è associata a $F(u)=u$,
- la linea sottile è associata a $F(u)=u^{1/2}$,
- la linea tratteggiata è associata a $F(u)=u^2$

Confrontando la figura 4.5 con il grafico 3.9 è possibile constatare come l'andamento della densità di energia ϵ in funzione della densità relativa di materia u sia del tutto analogo nei due casi. Per esempio, per un valore di $u=n/n_0=6$, i nostri calcoli producono un risultato di circa 1400 MeV/fm^3 per la densità di energia ϵ , confrontabile con il risultato dell'articolo di circa 1200 MeV/fm^3 .

E' possibile, inoltre, compiere un secondo confronto diretto, analizzando i valori dei parametri in gioco nella formula dell'energia potenziale nucleare.

Dalla tabella 4.2 emerge in modo inequivocabile che i valori di fit per i parametri sono in ottimo accordo tra loro. La differenza maggiore si riscontra nel valore di C che varia del 33% da un caso all'altro. Tuttavia, è importante sottolineare che il valore di questo parametro è frutto di una scelta arbitraria, che andrà poi sottoposta a verifiche in base ai risultati ottenuti.

Tabella 4.2

Parametri	Articolo	Tesi	Variazione percentuale
A	-119.47 MeV	-122.2 MeV	2.28%
B	80.56 MeV	83.8 MeV	4.01%
C	0.15	0.2	33.33%
σ	2.25	2.37	5.52%
K_0	360 MeV	362.2 MeV	0.61%

Tabella 4.2:

Confronto tra i valori dei parametri A, B, C, σ e K_0 proposti dall'articolo "The equation of state for the nuclear matter and the properties of the neutron star" e quelli da noi calcolati.

A questo punto possiamo concludere che il nostro modello è, in generale, in buon accordo con i risultati ottenuti dalla letteratura scientifica.

Nonostante il nostro procedimento presenti delle caratteristiche molto generiche e semplificate di una stella di neutroni, l'andamento qualitativo delle grandezze in gioco (massa $M (M_s)$, raggio $R (km)$, pressione $p (MeV/fm^3)$, densità di energia $\epsilon (MeV/fm^3)$, compressibilità $K_0 (MeV)$) è del tutto assimilabile a quello risultante da lavori molto più raffinati.

Il punto debole della nostra trattazione riguarda l'andamento della curva che rappresenta la relazione massa – raggio della stella di neutroni. Nei nostri grafici tale curva raggiunge lo zero solo per valori del

raggio superiori ai 20 km, mentre la letteratura scientifica propone dei modelli in cui la stessa curva va a zero già intorno ai 12 – 14 km, immediatamente dopo aver raggiunto il limite massimo per la massa.

Calcoli più complessi ed una maggiore attenzione ai dettagli costitutivi della stella di neutroni fornirebbero forse delle sfumature significative a questo misterioso oggetto astronomico e garantirebbero una maggiore precisione nei risultati.

Un importante aspetto da non sottovalutare è il seguente: nella nostra trattazione non abbiamo preso in considerazione l'ipotesi che la materia presente nelle stelle di neutroni sia di tipo strano. La possibilità che nel nucleo di tali stelle siano presenti fasi della materia differenti da quelle ordinarie implica che le grandezze da noi analizzate potrebbero subire interessanti variazioni.

APPENDICE “A”

Equazione di Tolman – Oppenheimer – Volkov (TOV)

In astrofisica, l'equazione di Tolman – Oppenheimer – Volkov (TOV)^{liii} fissano la struttura di un corpo a simmetria sferica, costituito da un materiale isotropico ed in equilibrio gravitazionale statico, modellato dalla relatività generale.

L'equazione può essere scritta:

$$\frac{dp(r)}{dr} = - \frac{G \left(\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2} \right) \left(M(r) + 4\pi \frac{p(r)r^3}{c^2} \right)}{r^2 \left(1 - \frac{2GM(r)}{rc^2} \right)} \quad (A.1)$$

Dove r è la coordinata radiale, $\rho(r_0)$ e $P(r_0)$ sono rispettivamente la densità e la pressione del materiale per $r=r_0$ e $M(r_0)$ è la massa totale all'interno del raggio $r=r_0$, calcolato a partire dal campo gravitazionale avvertito da un osservatore a grande distanza. Inoltre si ha:

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2 \quad (A.2)$$

L'equazione si ricava risolvendo le equazioni di campo di Einstein (EFE) per una metrica generale, invariante nel tempo e sfericamente simmetrica.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (A.3)$$

Dove $R_{\mu\nu}$ è il tensore curvatura di Ricci, R è la curvatura scalare, $g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, Λ è la costante cosmologica, G è la costante gravitazionale, c è la velocità della luce ed infine $T_{\mu\nu}$ è il tensore stress – energia.

Per essere soluzione dell'equazione (A.1), la metrica deve assumere la forma:

$$ds^2 = e^{v(r)}c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM(r)}{rc^2}} - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta d\phi^2 \quad (A.4)$$

In cui $v(r)$ è determinata dal vincolo:

$$v(r) = -\frac{2}{p(r) + \rho(r)c^2} \frac{dp(r)}{dr} \quad (A.5)$$

Quando si associa un'equazione di stato $F(\rho,p)=0$, che lega la densità alla pressione, l'equazione di *Tolman – Oppenheimer – Volkov* determina completamente la struttura del corpo. Se i termini di ordine $1/c^2$ sono trascurati, tale equazione diventa l'equazione idrostatica newtoniana, valida nei casi in cui le correzioni della relatività generale non sono importanti.

Se l'equazione è adoperata per una sfera di materia nel vuoto, bisogna imporre le condizioni al contorno di pressione nulla $P(r)=0$, $e^{v(r)}=1-2GM(r)/rc^2$ ed anche che la metrica sia continua con l'unica soluzione sfericamente simmetrica rispetto alle equazioni di campo del vuoto (metrica di Schwarzschild):

$$ds^2 = \frac{1 - 2GM_0}{r} dt^2 - \frac{rc^2}{1 - 2GM_0} dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta d\phi^2 \quad (A.6)$$

APPENDICE “B”

Codici dei programmi

M*athematica*^{lv} possiede già al suo interno delle funzioni adatte a risolvere le equazioni differenziali di primo grado. È possibile, comunque, scrivere un breve programma per tale scopo, facendo uso di un piccolo ciclo do rispetto ad una variabile \bar{r} , in un intervallo in cui ci si aspetta che cada il valore di R.

Dentro al ciclo, si chiama la funzione per risolvere le equazioni differenziali (NDSolve), integrandole da $r=0$ a \bar{r} . Quando la routine termina, si controlla il segno della parte reale dell'ultimo valore di $\bar{p}(\bar{r})$: se essa è negativa, si interrompe il ciclo e si pone $R=\bar{r}$; altrimenti, si prende il successivo intervallo più grande e si richiama la funzione.

1.

```
alpha = Rschw/(bigK*eps0^(gamma-1))^(1/gamma)
beta = 4*Pi*eps0sunkm/Kbar^(1/gamma)
```

```
Arhs[r_] := -alpha*pbar[r]^(1/gamma)*curlyMbar[r]/r^2
Brhs[r_] := beta*r^2*pbar[r]^(1/gamma)
```

```
RMlist = {};
Do[{pzero = 10.0^(-i),
  Do[{
    s1 = NDSolve[{pbar'[r] == Arhs[r],
                 curlyMbar'[r] == Brhs[r],
                 pbar[rstart] == pzero, curlyMbar[rstart] == 0.0},
                 {pbar, curlyMbar},{r,rstart,x},
                 MaxSteps->20000];
    y = Re[pbar[x]/.s1];
    z = Re[curlyMbar[x]/.s1];
```

```

        If[y[[1]] < 0, Break[], {capR = x, capM = z[[1]]}]
    },
    {x,1000.0,50000.0,10.0}];
    Rmlist = Append[Rmlist,{pzero, capR, capM}];
    },
    {i,15,16}]
Rmlist;

```

2.

Il calcolo dei valori riprende in buona parte quello spiegato per il precedente frammento di programma. Tuttavia, è doveroso fare alcune considerazioni per inserire le correzioni relativistiche nelle equazioni di stato (TOV). All'interno del blocco NDSolve si includono i fattori addizionali relativistici che sono tutti e tre funzioni di r.

```

factorpbyeps = 1 + p/epsilon = 1 + pbar/epsbar
factorpbyM = 1 + (4 Pi/c^2) r^3 p/curlyM = 1 + (4 Pi eps0/(Msun c^2)) r^3
pbar/curlyMbar
factorgravity = 1 - 2 bigG curlyM/r = 1 - 2 Rschw curlyMbar/r

```

La variabile factorpbyM presenta un punto singolare per $r=0$, perché $\text{curlyMbar}(0)=0$. Tuttavia, il fattore r^3 al numeratore elimina questa singolarità dal momento che $\text{curlyMbar}(r)$ in un intorno di $r=0$ è approssimativamente $4 \text{ Pi } r^3 \text{ epsbar}(0) / 3$. Per questo motivo, possiamo risolvere il problema ponendo:

```

factorpbyM = 1 + (3 eps0/(Msun c^2)) pbar(r)/epsbar(0)

```

quando $r < 0.1 \text{ km}$ ad esempio, e negli altri casi:

```

factorpbyM = 1 + (4 Pi eps0/(Msun c^2)) r^3 pbar(r)/curlyMbar(r)

```

Per fare questo usiamo la funzione If[...]:

```

If[r] > 0.1, (1 + (4 Pi eps0/(Msun c^2)) r^3 pbar(r)/curlyMbar(r)), (1+(3 eps0/(Msun
c^2)) pbar(r)/epsbar(0))]

```

Vediamo ora il programma completo:

```

RMListGR = {};

Do[{pzero = 10.0^(-i),
  epsbarzero = a1*pzero^(3/5) + a2*pzero,
  Do[{
    sGR = NDSolve[{pbar'[r] == Arhs[r]*
      (1 + pbar[r]/epsbar[r]) /
      (1 - 2 Rschw curlyMbar[r]/r),
      If[r] > 0.1, (pbar'[r]==pbar'[r] (1 + (4 Pi eps0/(Msun
c^2)) r^3 pbar(r)/curlyMbar(r)),
      pbar'[r]==pbar'[r] (1+ (3 eps0/(Msun c^2))
pbar(r)/epsbar(0))],
      curlyMbar'[r] == Brhs[r],
      pbar[rstart] == pzero, curlyMbar[rstart] == 0.0},
      {pbar, curlyMbar},{r,rstart,x},
      MaxSteps->20000];
    y = Re[pbar[x]/.sGR]; z = Re[curlyMbar[x]/.sGR];
    If[y[[1]] < 0, Break[], {capR = x, capM = z[[1]]}]
    }, {x,1.0,50.0,0.25}];
RMListGR = Append[RMListGR,{pzero, capR, capM}];
}, {i,1,4}] RMListGR;

```

3.

Attraverso il software Mathematica si può creare in modo semplice un tabella di valori esatti di $\bar{\epsilon}$ e di \bar{p} . È sufficiente impostare le due funzioni che dovranno calcolare le due grandezze, ricorrendo ai risultati dei rispettivi integrali già svolti, e chiedere quindi al software di impostare la tabella.

```

pbar[x_] := (1/8)*((-3*x + 2*x^3)*(1 + x^2)^(1/2) + 3*ArcSinh[x])
epsbar[x_] := (3/8)*((x + 2*x^3)*(1 + x^2)^(1/2) - ArcSinh[x])

Print["   pbar[x]           espbar[x]           x"]
Print[" "]

Do[Print[PaddedForm[pbar[x],{10,6}],
  PaddedForm[epsbar[x],{15,6}],
  PaddedForm[x,{10,2}]],{x,0.2,5.0,0.2}]

```

pbar [x]	epsbar [x]	x
0.000063	0.008095	0.20
0.001941	0.066989	0.40
0.013891	0.238006	0.60
0.054483	0.601197	0.80
0.153738	1.260475	1.00
0.352873	2.346349	1.20
0.703738	4.017218	1.40
1.268370	6.459947	1.60
2.118711	9.890112	1.80
3.336448	14.552096	2.00
5.012934	20.719121	2.20
7.249139	28.693261	2.40
10.155636	38.805435	2.60
13.852583	51.415405	2.80
18.469729	66.911768	3.00
24.146404	85.711950	3.20
31.031526	108.262205	3.40
39.283598	135.037604	3.60
49.070711	166.542038	3.80
60.570549	203.308211	4.00
73.970382	245.897640	4.20
89.467076	294.900652	4.40
107.267087	350.936382	4.60
127.586467	414.652774	4.80
150.650863	486.726577	5.00

I valori adimensionali di A_{NR} e A_R possono essere trovati mediante la funzione preimpostata nel software per il best-fit. È sufficiente fornire alla funzione Fit i dati dai quali deve ricavare l'equazione di best-fit, impostando anche le variabili che ci interessano.

```
data = Table[{pbar[x],epsbar[x]},{x,0,5,0.2}]
```

```
{{0,0}, {0.0000631065, 0.00809532}, {0.00194083, 0.0669893},
{0.0138908, 0.238006}, {0.0544831,0.601197}, {0.153738, 1.26048},
{0.352873, 2.34635}, {0.703738, 4.01722}, {1.26837,6.45995}, {2.11871,
9.89011}, {3.33645, 14.5521}, {5.01293, 20.7191}, {7.24914, 28.6933},
{10.1556, 38.8054}, {13.8526, 51.4154}, {18.4697, 66.9118} {24.146404,
85.711950}, {31.031526, 108.262205}, {49.070711, 166.542038},
{60.570549, 203.308211}, {73.970382, 245.897640}, { 89.467076,
294.900652}, {107.267087, 350.936382}, {127.586467, 414.652774},
{150.650863, 486.726577}}
```

```
f1 = Fit[data,{p^(3/5),p},p]
```

```
2.20625 p3/5 + 2.93223 p
```

4.

Possiamo utilizzare il software Mathematica per vedere come variano i parametri A, B e σ al variare di K_0 lungo tutto il suo dominio ($200 < K_0 < 400$):

```
 $\sigma[K_] := (k+2e)/(3e-9be)$   
 $B[K_] := (\sigma[k]+1) * (e/3-be) / (\sigma[k]-1) 3ww$   
 $A[K_] := be-5e/3-B[k]$   
  
Print["           $\sigma[K]$           B[K]          A[K]K"]  
  
Do[ Print[  
  PaddedForm[ $\sigma[K]$ , {10,6}],  
  PaddedForm[B[K], {15,6}],  
  PaddedForm[A[K], {15,6}],  
  PaddedForm[K, {15,0}]],  
  {K,200,400,10}]
```

APPENDICE “C”

Formula semiempirica di Weizsäcker

La formula semiempirica di massa costituisce un tentativo di comprendere la curva dell'energia di legame BE per nucleoni per nuclei stabili in funzione del numero di massa A attraverso alcuni parametri.

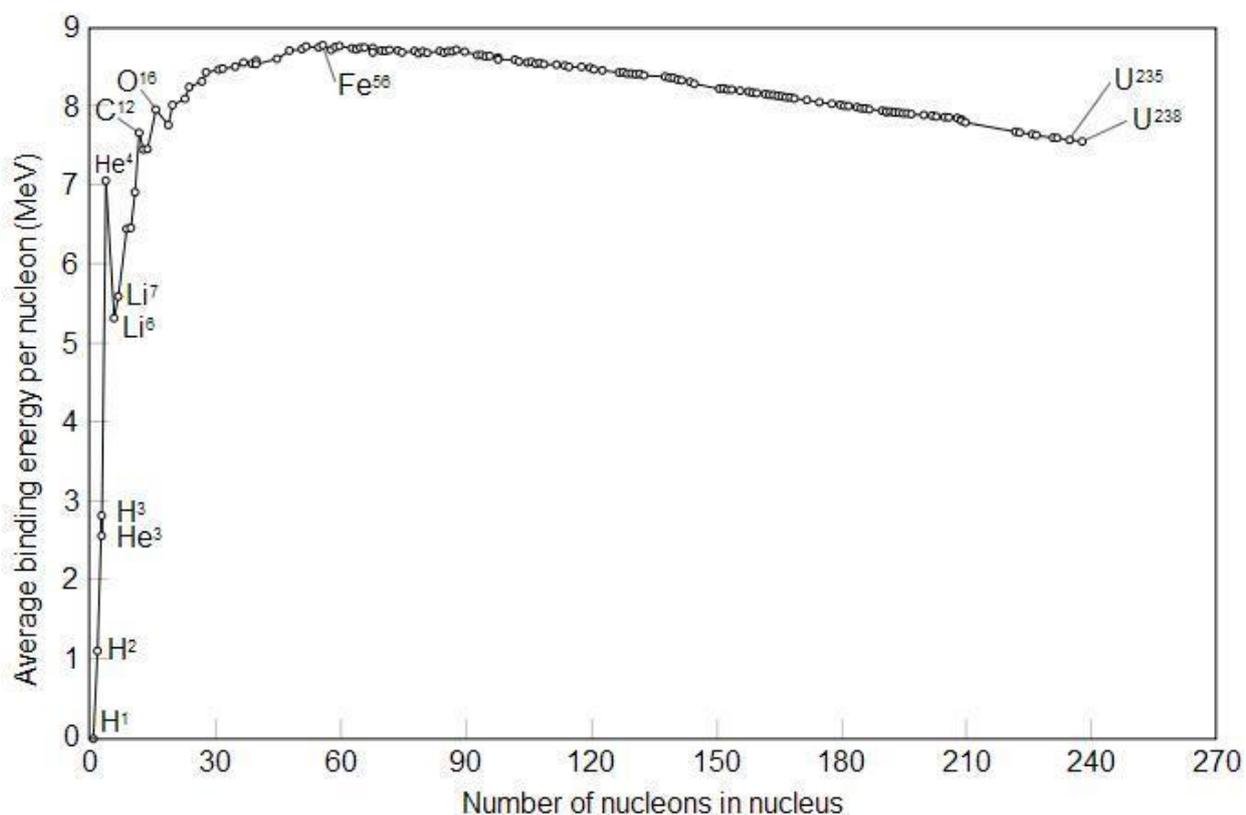


Figura C.1:

Il grafico mostra l'energia di legame medio per nucleone per nuclei stabili.

Da un'analisi della figura, si possono compiere alcune considerazioni interessanti. Prima di tutto, la curva è pressoché costante, ad eccezione dei nuclei molto leggeri, e l'energia di legame media per nucleone si attesta sugli 8 MeV. Seconda cosa, la curva raggiunge il suo picco massimo per l'elemento ⁵⁶Fe, per il quale si ha il nucleo più strettamente legato. Questo spiega, inoltre, il guadagno energetico che deriva dalla fissione e dalla fusione nucleare.

È possibile spiegare in modo piuttosto semplice l'andamento dell'energia di legame, prendendo in considerazione le caratteristiche dell'nucleo.

La formula di Weizsäcker è la seguente:

$$BE = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A} + \delta \quad (C.1)$$

Dove:

- a_v è il termine di volume, il cui valore è di circa 15.75 MeV. Sebbene questo coefficiente sia il più ovvio, l'aspetto sorprendente risiede nella dipendenza lineare di BE da A, il quale ci fornisce la prima informazione sulla forze nucleare. Se ogni nucleone di un nucleo attraesse gli altri, allora l'energia di legame sarebbe proporzionale a A(A-1), quindi ad A²; ma la dipendenza lineare suggerisce che ogni nucleone attrae esclusivamente i nucleoni più vicini.
- a_s è il termine di superficie, il cui valore è di circa 17.80 MeV. La precedente argomentazione non è esatta per i nucleoni posizionati lungo la superficie esterna del nucleo, i quali sono circondati da un numero di minore di nucleoni e per questo sono meno legati di quelli nella regione centrale. approssimando il nucleo ad una sfera, la sua superficie è proporzionale a R² e quindi ad A^{2/3}.
- a_c è il termine coulombiano, il cui valore è di 0.71 MeV. I protoni del nucleo sono soggetti ad una forza coulombiana di tipo repulsivo, la quale rende il nucleo meno legato. Poiché ogni protone respinge tutti gli altri, questo termine è proporzionale a Z(Z-1) ed inversamente proporzionale a R e quindi a A^{1/3}
- a_{sym} è il termine di simmetria, il cui valore è 23.69 MeV. Analizzando la distribuzione degli isotopi stabili e radioattivi, si deduce che i nuclei stabili hanno Z≈A/2. Questo termine assume una grande importanza per i nuclei leggeri, per i quali tale uguaglianza è strettamente osservata.
- δ è il termine di pairing. I nucleoni hanno la tendenza di formare delle coppie per rendere ancor più stabile la configurazione. Quando sia Z sia N sono dispari, convertire un protone in un neutrone (o viceversa) è energeticamente conveniente perché è disponibile una nuova coppia. Solitamente l'energia di pairing si esprime con:

$$\delta = \begin{cases} +33.6 A^{-3/4} & Z \text{ e } N \text{ pari} \\ -33.6 A^{-3/4} & Z \text{ e } N \text{ dispari} \\ 0 & A \text{ dispari} \end{cases}$$

RINGRAZIAMENTI

Innanzitutto voglio ringraziare il Prof. Bonsignori ed il Dott. Finelli i quali mi hanno aiutato e guidato nella stesura della tesi con grande disponibilità, cordialità e professionalità. In particolare voglio esprimere la mia stima e gratitudine nei confronti del primo, perché mi ha permesso di svolgere la tesi riguardante un argomento di mio interesse nonostante non fosse quello il suo campo, e la mia riconoscenza verso il secondo per avermi spronato a compiere un buon lavoro.

Un grazie speciale è dedicato ai miei genitori, che mi hanno sostenuto ed appoggiato sempre, dimostrandosi fieri ed orgogliosi dei miei traguardi raggiunti. Grazie a mia madre perché è sempre stata pronta ad ascoltarmi anche quando le parlavo di nozioni di fisica per lei incomprensibili. Grazie a mio padre per aver sempre mostrato grande interesse nelle cose che faccio.

Un grazie particolare ad Enrico, che mi spinge ad essere un buon modello di fratello maggiore per lui.

Grazie ancora a tutta la mia famiglia, che mi ha sempre dimostrato il suo affetto incondizionato. Grazie a mia nonna Annamaria per essere la persona più entusiasta nel vedermi crescere e realizzare. Grazie a nonno Armando, che sebbene non sia più con noi, è stato una figura fondamentale nella mia vita. Grazie a zia Sabrina (Zibi) per lo spirito sempre allegro e gioviale.

Grazie anche a tutti i miei amici che hanno reso indimenticabili questi anni di studio, ma soprattutto di spensieratezza. Ricordando che l'ordine seguito è puramente casuale, grazie a Luca per aver condiviso tre bellissimi anni (e due ancora da venire) di convivenza. Grazie ad Ilaria per il suo accento londinese e per le sue acute osservazioni. Grazie a Caterina per la sua spontaneità e per le sue magnifiche foto. Grazie a Daniele (Staffo) per la sua affidabilità e per il suo talento da bassista. Grazie a Maria per i suoi saggi consigli e per la birra fatta in casa. Grazie ad Eleonora per il suo spirito intraprendente e per la sua passione per i gruppi emergenti. Grazie a Letizia per la sua determinazione ed il suo appoggio. Grazie a Bruno per la sua calma e per le sue previsioni sempre azzeccate. Grazie a Céline e ad Hugo per la loro calorosa ospitalità. Grazie a Bia per le ore passate a chiacchierare e per il suo spirito combattivo. Grazie a Davide perché mi ricorda che la fisica è anche teorica. Grazie a Gloria per la sua incredibile bellezza e per la sua intelligenza. Grazie a Riccardo per l'allegria e la gioia che mi trasmette.

Un grazie di cuore a tutti coloro che, sebbene non li abbia menzionati esplicitamente, meritano la mia riconoscenza.

Grazie a me stesso per avercela fatta.

REFERENZE

- ⁱ W. Baade, F. Zwicky. “*On Super-Novae*”, Proc. Nat. Acad. Sci. **20**, 1934, 254.
- ⁱⁱ J. Chadwick. “*The Existence of A Neutron*”, Proc. Roy. Soc. A, **126**, 1932, 692.
- ⁱⁱⁱ J. M. Lattimer, M. Prakash. “*The Physics of Neutron Star*”. Lect. Notes Phys. **578** (2001) 364-423
- ^{iv} S. Chandrasekhar. Mont. Not. Roy. Astr. Soc., Vol. **91**, 1931, 456.
- ^v B. W. Carroll, D. A. Ostlie. “*The Degenerate Remnants of Stars*”. Chap. 15.
- ^{vi} D. J. Dean, M. Hjorth-Jensen. “*Pairing in nuclear systems: from neutron stars to finite nuclei*”. Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 607-656
- ^{vii} J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff. “*On Massive Neutron Cores*”, Phys. Rev. **55**, 1939.
- ^{viii} http://en.wikipedia.org/wiki/Strange_matter
- ^{ix} [http://it.wikipedia.org/wiki/Quark_\(particella\)](http://it.wikipedia.org/wiki/Quark_(particella))
- ^x <http://arxiv.org/abs/astro-ph/0601337v1>
- ^{xi} F. V. De Blasio, G. Lazzari. “*Pinning mechanism and vortex trap region in neutron star crusts*”. Z. Phys. A, **335**, 1996.
- ^{xii} http://en.wikipedia.org/wiki/Pulsar#cite_ref-3
- ^{xiii} J. M. Lattimer, M. Prakash. “*Neutron Star Observations: Prognosis for Equation of State Constraints*.”
<http://arXiv:astro-ph/0612440v1>
- ^{xiv} G. Gamow, M. Schoenberg. “*Neutrino Theory of Stellar Collapse*”. Phys. Rev. **59**, 539-547 (1941).
- ^{xv} J. M. Lattimer, M. Prakash. SCIENCE VOL **304** 23 APRIL 2004
www.sciencemag.org
- ^{xvi} H. Y. Chiu, E. E. Salpeter. “*Surface X-ray emission from neutron stars*”. Phys. Rev. Lett., **12**, 413-415 (1964).
- ^{xvii} J. M. Lattimer, M. Prakash. “*Neutron Star Observations: Prognosis for Equation of State Constraints*”.

<http://arXiv:astro-ph/0612440v1>

^{xviii} J. P. Freidberg, *“Ideal Magnetohydrodynamics”*. Plenum Press, New York, p.50 (1987).

^{xix} J. M. Lattimer, M. Prakash. *“The Physics of Neutron Star”*. Lect. Notes Phys. **578** (2001) 364-423.

^{xx} Nuclear Science – A Guide to the Nuclear Science Will Chart. © Contemporary Physics Education Project.

^{xxi} <http://public.web.cern.ch/public/>

^{xxii} E. Quercigh. *“A Strange Quark Plasma”*.
<http://physicsworld.com/cws/article/print/443>

^{xxiii} M. Bruno, F. Cannata, M. D’Agostino. *“L’ebollizione dei nuclei: termodinamica dei sistemi nucleari”*.

^{xxiv} R. R. Silbar, S. Reddy. *“Neutron Stars for Undergraduates”*. Am. J. Phys. **72** (2004) 892-905; Erratum – ibid. **73** (2005) 286.

^{xxv} http://www.int.washington.edu/PHYS554/2005/chapter7_07.pdf

^{xxvi} J. P. W. Diener. *“Relativistic Mean – Field Theory Applied to the Study of Neutron Star Properties”*.
[http://arXiv:0808.0747v1 \[nucl-th\]](http://arXiv:0808.0747v1 [nucl-th])

^{xxvii} http://www.physics.rutgers.edu/ugrad/351/chemical_potential.pdf

^{xxviii} K. Schwarzschild, *“Uber das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie”*, Sitzungsberichte Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse fur Mathematik, Physik und Technik (1916) p 189.

^{xxix} S. Chandrasekhar. *“An Introduction to the Study of Stellar Structure”*. [1939] (1958).

^{xxx} J. M. Lattimer, M. Prakash. *“Neutron Star Observations: Prognosis for Equation of State Constraints.”*
<http://arXiv:astro-ph/0612440>

^{xxxi} <http://en.wikipedia.org/wiki/Neutron>

^{xxxii} http://it.wikipedia.org/wiki/Principio_di_esclusione_di_Pauli

^{xxxiii} K. S. Krane. *“Introductory Nuclear Physics”* Chap. 10

^{xxxiv} http://www.ge.infn.it/~corvi/doc/didattica/radioattivita/dispense/pdf/08_shell.pdf

^{xxxv} K. S. Krane. *“Introductory Nuclear Physics”* Chap. 3

^{xxxvi} K. V. Subba Rao, A. A. Kamal. *“Nuclear compressibility and its effect on nuclear binding energies from the study of muonic atoms”*.

-
- ^{xxxvii} http://en.wikipedia.org/wiki/Special_relativity
- ^{xxxviii} J. M. Lattimer, M. Prakash. “*The Physics of Neutron Stars*”.
<http://www.sciencemag.org/cgi/content/abstract/304/5670/536>
- ^{xxxix} <http://it.wikipedia.org/wiki/Doppler>
- ^{xl} [http://en.wikipedia.org/wiki/Glitch_\(astronomy\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Glitch_(astronomy))
- ^{xli} A. Akmal, V. R. Pandharipande, Phys. Rev. C **56**, 2261 (1997).
<http://arXiv:nucl-th/9705013>
- ^{xlii} H. Mütter, M. Prakash, T. L. Ainsworth, Phys. Lett. B **199**, 469 (1987).
- ^{xliii} H. Müller, B. D. Serot. Nuc. Phys. A **606**, 508 (1996).
<http://arXiv:nucl-th/9603037>.
- ^{xliv} R. B. Wiringa, V. Fiks, A. Fabrocini. Phys. Rev. C **38**, 1010 (1988).
- ^{xlv} N. K. Glendenning, S. A. Moszkowski. Phys. Rev. Lett. **67**, 2414 (1991).
- ^{xlvi} N. K. Glendenning, J. Schaffner – Bielich. Phys. Rev. C **60**, 025803 (1999).
<http://arXiv:astro-ph/9810290>.
- ^{xlvii} M. Alford, M. Braby, M. Paris, S. Reddy. Astrophys. J. **629**, 969 (2005).
<http://arXiv:nucl-th/0411016>
- ^{xlviii} M. Prakash, J. R. Cooke, J. M. Lattimer. Phys. Rev. D **52**, 661 (1995).
- ^{xlix} J. Schwab, S. A. Hughes, S. Rappaport. “*The Self-Gravity of Pressure in Neutron Stars*”
http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0806/0806.0798v1.pdf
- ^l H. Grigorian. “*Structure and cooling of compact stars*”.
http://arxiv.org/PS_cache/astro-ph/pdf/0702/0702235v1.pdf
- ^{li} Chang-Geng Liu, Bao-Xi Sun. “*The equation of state for the nuclear matter and the properties of the neutron star*” http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0707/0707.3864v2.pdf
- ^{lii} G. F. R. Ellis, R. Maartens, M. A. H. MacCallum. “*Causality and the Speed of Sound*”
http://arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/0703/0703121v2.pdf
- ^{liii} <http://bh0.physics.ubc.ca/People/benjamin/projects/nr/report1/node10.html>
- ^{liv} <http://www.wolfram.com/>