

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

L'ATTEGGIAMENTO DEI
RAGAZZI NEI CONFRONTI
DELLA MATEMATICA:
IL CASO DELLA
TRIGONOMETRIA

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Riccardo Villani

Sessione III
Anno Accademico 2011/'12

*Ai miei genitori,
per avermi permesso di arrivare fin qui ...*

*... ed alla Prof.ssa Angela Saccone,
per avermi trasmesso l'amore verso la matematica*

Introduzione

Sempre più frequentemente si sente parlare degli atteggiamenti negativi che i ragazzi hanno nei confronti della matematica, atteggiamenti ed emozioni che contribuiscono a generare difficoltà negli apprendimenti. La situazione è a dir poco allarmante se si considera il fatto che per quasi la metà dei ragazzi che riporta debiti scolastici alle scuole superiori, uno è in matematica. Questa tesi si pone l'obiettivo di analizzare il legame tra il rendimento scolastico e le emozioni provate dagli studenti nell'affrontare consegne di matematica, e più in generale gli atteggiamenti nei confronti della disciplina: si vuole cioè comprendere in che modo il senso di gradimento (positivo o negativo) verso la materia ed i sentimenti che essa genera negli studenti possano avere a che fare con la possibilità di raggiungere il successo scolastico. L'atteggiamento, fulcro di questo lavoro, può essere inteso proprio come l'insieme delle relazioni tra le componenti emotive e l'apprendimento: comprende tutti quei fattori che in qualche modo si intrecciano con tali relazioni. Si vuole analizzare e valutare l'atteggiamento di alcuni studenti nei confronti della matematica, ed in particolare nei confronti della trigonometria. A questo scopo si affronterà e studierà una sperimentazione condotta in una classe IV di un liceo scientifico.

Più nello specifico, nel primo capitolo ripercorreremo alcune ricerche per presentare il concetto di atteggiamento. Si tenterà per prima cosa di fornire una definizione adeguata di esso, per sopperire alla frequente mancanza di chiarezza teorica a suo riguardo. In seguito si analizzeranno alcuni considerevoli lavori svolti in passato per valutare l'atteggiamento degli studenti

verso la matematica: da questa analisi si evinceranno importanti connessioni tra differenti ambiti legati all'atteggiamento, ed elaboreremo un modello di atteggiamento che si mostrerà utile nel terzo capitolo. Si cercherà di comprendere come valutare l'atteggiamento degli studenti sia attraverso la definizione proposta, sia attraverso il modello, e saranno proposti alcuni studi passati finalizzati alla valutazione dell'atteggiamento e, più in generale, del rapporto che gli studenti hanno con la matematica. Il capitolo si concluderà riportando alcuni metodi utili per migliorare l'atteggiamento degli allievi.

Nel secondo capitolo verrà ripercorsa brevemente la storia dei programmi scolastici italiani, ponendo particolare attenzione alle indicazioni riguardanti la trigonometria.

Nel terzo capitolo sarà proposta ed analizzata la sperimentazione condotta per la valutazione dell'atteggiamento di un gruppo scolastico di ragazzi verso la matematica e verso la trigonometria. Verranno ampiamente trattati i risultati ottenuti in diversi ambiti, tenendo conto della definizione ed anche del modello di atteggiamento elaborato nel primo capitolo. L'analisi dei risultati metterà in evidenza sia l'atteggiamento in generale, sia diversi fattori che singolarmente costituiscono o fanno parte di esso. Saranno proposti anche risultati riassuntivi e generali riguardanti l'atteggiamento verso la matematica e verso la trigonometria, confronti tra gli elementi ottenuti, e riflessioni ritenute importanti.

Infine, nel quarto ed ultimo capitolo, saranno riportate delle conclusioni per mettere in relazione gli elementi teorici elaborati nel primo capitolo e l'analisi storica effettuata nel secondo, con quanto acquisito dagli esiti della sperimentazione, dando spazio sia ai risultati riguardanti l'atteggiamento verso la matematica, sia a quelli riguardanti l'atteggiamento verso la trigonometria.

Indice

Introduzione	i
1 L'atteggiamento degli studenti verso la matematica	1
1.1 L'emergenza in matematica	1
1.2 Definizione di atteggiamento	2
1.2.1 L'atteggiamento secondo gli insegnanti	2
1.2.2 Difficoltà nel definire l'atteggiamento	3
1.2.3 Molteplici definizioni	4
1.3 Gli studi sull'atteggiamento	5
1.4 Precisazioni sulla definizione	6
1.4.1 Precisazioni sul successo	7
1.5 Analisi qualitativa dell'atteggiamento degli studenti verso la matematica: un progetto italiano	8
1.5.1 Diverse visioni della matematica	9
1.5.2 Legame tra visione della matematica ed emozioni	10
1.5.3 Legame tra emozioni e senso di auto-efficacia	12
1.5.4 Legame tra visione della matematica e senso di auto- efficacia	14
1.5.5 Il modello di atteggiamento	14
1.6 Valutazione dell'atteggiamento	15
1.6.1 Un'assunzione errata	16
1.6.2 Valutazione sensata	17
1.6.3 Il modello di atteggiamento come mezzo di valutazione	19

1.7	Analisi quantitativa sull'atteggiamento degli studenti verso la matematica	22
1.7.1	Alcune dovute precisazioni	22
1.7.2	Il contesto	23
1.7.3	I risultati	23
1.7.4	Risultati sull'evoluzione dell'atteggiamento	25
1.8	Metodi per il miglioramento dell'atteggiamento negativo . . .	27
1.8.1	Metodi sbagliati	27
1.8.2	Metodi corretti	29
2	L'insegnamento in Italia: analisi storica dei programmi di trigonometria	33
2.1	Alcune precisazioni	34
2.2	Il programma del 1860	35
2.3	I primi anni del '900	36
2.4	La riforma Gentile	37
2.5	L'indirizzo sperimentale P.N.I.	38
2.6	La riforma del 2010	40
2.6.1	Aspetti negativi dell'Istruzione precedente	40
2.6.2	Descrizione della nuova riforma	41
2.7	I cambiamenti di orario	43
3	La sperimentazione condotta per valutare l'atteggiamento	45
3.1	Il contesto	45
3.2	Tipologia ed obiettivi della sperimentazione	46
3.2.1	Primo questionario	48
3.2.2	Secondo questionario	54
3.3	I risultati della sperimentazione	56
3.3.1	Alcune premesse	56
3.3.2	Analisi delle risposte	58
3.3.3	Valutazione dell'atteggiamento	68
3.3.4	Confronto dei risultati	73

3.3.5	Riflessioni sul modello di atteggiamento	75
4	Conclusioni	77
	Bibliografia	81
	Siti Web consultati	85
	Ringraziamenti	87

Capitolo 1

L'atteggiamento degli studenti verso la matematica

1.1 L'emergenza in matematica

La matematica è probabilmente la disciplina scolastica che più evoca, anche in persone ormai adulte, emozioni negative (Di Martino & Zan, 2010, B), che portano al rifiuto di questa disciplina. Di recente in Italia il problema delle difficoltà in matematica degli studenti ha assunto ampia rilevanza: pochi anni fa (2007) il Ministero della Pubblica Istruzione ha pubblicato una allarmante relazione dal titolo “Matematica, è emergenza formativa”, in cui veniva sottolineato il fatto che quasi la metà degli studenti di scuola superiore che avevano riportato un debito per l'ammissione all'anno successivo avevano il debito in matematica (Di Martino, 2007). Questo problema ha assunto anche carattere sociale, in quanto si è notato che tali difficoltà precludono l'iscrizione a Corsi di Laurea di tipo scientifico a molti studenti che temono di non riuscire in questo tipo di studi. Per venire incontro a tale questione sono stati finanziati progetti per la prevenzione ed il monitoraggio del fenomeno, per l'orientamento ai Corsi di Laurea scientifica (Progetto Lauree Scientifiche) (con buoni risultati), ma non solo: si è deciso di dare importanza all'obiettivo di far riscoprire l'interesse per la matematica (Di Martino,

2007). A tale scopo si sono diffusi importanti studi e ricerche sull'atteggiamento degli studenti (ma anche degli insegnanti e degli adulti in generale) nei confronti della matematica, come il progetto italiano finanziato dal MIUR dal titolo "L'atteggiamento negativo nei confronti della matematica: analisi di un fenomeno allarmante per la cultura del nuovo millennio".

1.2 Definizione di atteggiamento

Cerchiamo di dare una definizione al costrutto di atteggiamento.

1.2.1 L'atteggiamento secondo gli insegnanti

Innanzitutto individuiamo le definizioni di atteggiamento negativo alle quali si riferiscono alcuni insegnanti della scuola dell'obbligo (tratte dal progetto "L'atteggiamento negativo nei confronti della matematica: analisi di un fenomeno allarmante per la cultura del nuovo millennio", evidenziate da Di Martino, 2007). Ricordiamo prima che la percentuale di insegnanti che dichiarano di aver attribuito almeno una volta nella loro carriera ad un atteggiamento negativo la causa di problemi in matematica è molto elevata (circa l'85% del campione di insegnanti analizzati negli studi ai quali ci rifacciamo), mentre circa il 50% affermano di utilizzare di frequente tale diagnosi. Negli studi condotti si è riscontrato che gli insegnanti, nel caratterizzare e riconoscere l'atteggiamento negativo, si riferiscono ad aspetti differenti. Alcuni l'osservano quando uno studente ritiene che la matematica sia inutile, difficile, fatta di regole meccaniche: si tratta cioè di convinzioni dello studente sulla matematica che fanno sì che egli se ne disinteressi. Altri, quando uno studente crede di non essere in grado di capire o, più in generale, di essere inadeguato: si tratta di convinzioni che lo studente ha sulle proprie capacità matematiche, che lo portano a ritenere impossibile il recupero. Altri ancora definiscono l'atteggiamento negativo come un insieme di emozioni che lo studente associa alla materia, che lo portano a comportamenti inefficienti o addirittura ad evitare il confronto stesso con la materia. Alcuni infine la ri-

scontrano nell'applicazione di regole meccaniche o in caratteristiche specifiche degli alunni come la mancanza di volontà o addirittura la scarsa capacità di intuire. Se cercassimo le corrispondenti definizioni di atteggiamento positivo, o in generale di atteggiamento, ci basterebbe invertire (cioè rendere positiva) o eliminare la negatività presente in queste "definizioni". Notiamo comunque in tutti i casi che l'atteggiamento negativo è l'attribuzione causale, da parte dell'insegnante, del fallimento dello studente, visto come elemento incontrollabile, come il giudizio finale di una serie di azioni didattiche senza successo. A dire il vero spesso per l'insegnante il riscontro di atteggiamento negativo, secondo la loro personale interpretazione, è una totale dichiarazione di resa di fronte alle difficoltà di uno studente che appaiono non superabili perché dipendenti da fattori che l'insegnante ritiene non modificabili; in altre parole l'insegnante arriva a pensare che per quello studente non ci sia più niente da fare. La diagnosi di atteggiamento negativo è quindi purtroppo vista come un punto di arrivo, dal quale è impossibile tornare indietro cercando il superamento della difficoltà. Tutto ciò avrebbe ripercussioni fallimentari non solo sulla didattica con conseguenze quali ad esempio l'abbandono dello studente al suo destino, ma anche sulla ricerca. Infatti con una tale visione fatalista dell'atteggiamento negativo qualsiasi tipo di studio risulterebbe prettamente teorico e fine a se stesso, dato che verrebbe a mancare la possibilità di una ricerca atta a proporre soluzioni didattiche significative per il superamento del problema. Vedremo più avanti che, fortunatamente, la visione degli insegnanti non è la sola possibile, e soprattutto la si può definire sbagliata, senza voler assolutamente colpevolizzare il corpo docente che senza dubbio è formato e competente, ma in alcuni casi andrebbe forse affiancato, informato o semplicemente considerato dai ricercatori, per poter rendere la ricerca stessa utile alla didattica.

1.2.2 Difficoltà nel definire l'atteggiamento

Nel voler definire esattamente il concetto di atteggiamento incontriamo non poche difficoltà, benché non sia un argomento di recente trattazione: le

sue origini risalgono agli anni 30 del secolo scorso (con Allport, 1935), con un concetto di atteggiamento legato alla psicologia sociale, mentre a partire dagli anni 70 prese posto tra gli studi riguardanti l'educazione e la didattica matematica; in realtà, soltanto un paio di decenni dopo, lo studio dell'atteggiamento verso la matematica intraprese la direzione della correlazione tra atteggiamento e successo o insuccesso, direzione che oggi riveste maggiore importanza tra i ricercatori. La difficoltà nel definire l'atteggiamento deriva da una mancanza di chiarezza teorica nelle ricerche in questo campo. Spesso tali ricerche sono state giudicate particolarmente contraddittorie e confuse per il fatto che si è data maggiore enfasi alla creazione di strumenti di misurazione piuttosto che alla elaborazione di strutture teoriche (Kulm, 1980): di fatto le ricerche che ci offrono maggiori informazioni, sia a livello quantitativo che qualitativo, riguardano la descrizione di differenze tra gruppi di persone, variando al più la tipologia delle classi (in base ad età, genere (Fennema, 1989), contesti sociali, ecc.). Analizzando molte ricerche sull'atteggiamento si nota che queste non forniscono una chiara definizione di essa, ma è di solito ricavata a posteriori grazie agli strumenti di misurazione che sono stati impiegati, o è addirittura implicita (Daskalogianni & Simpson, 2000).

1.2.3 Molteplici definizioni

Solitamente quando ci si riferisce all'atteggiamento si utilizza, esplicitamente o implicitamente, una delle tre seguenti definizioni (Di Martino & Zan, 2007):

1. Una definizione semplice di atteggiamento, descritta come un livello positivo o negativo di disposizioni emozionali associate ad una determinata materia (McLoed, 1992; Haladyna, Shaughnessy J. & Shaughnessy M., 1983).
2. Una definizione bi-dimensionale secondo la quale l'atteggiamento è un modello di reazioni emozionali e credenze riguardanti una determinata materia (Daskalogianni & Simpson, 2000).

3. Una definizione tri o multi-dimensionale in cui le componenti dell'atteggiamento sono le reazioni emozionali, le credenze sulla materia e il comportamento associato alla materia (Hart, 1989).

Osserviamo che, secondo le ultime due definizioni, l'atteggiamento attraverso la matematica è introdotto in maniera più complessa dato che la conoscenza di uno solo degli elementi che compaiono non è sufficiente per determinare un atteggiamento positivo o negativo, come è ovvio che sia nel primo caso; è necessario quindi avere un appropriato metodo di misurazione che metta in correlazione le componenti presenti.

Come fare per scegliere la definizione maggiormente adatta di atteggiamento verso la matematica? È forse impossibile trovare la risposta a questa domanda; potremmo dire che ognuna di queste definizioni è la più adatta se consideriamo la differenza tra gli studi che vengono condotti: possiamo però anche dire che qualunque tipo di ricerca sull'atteggiamento venga condotto, una delle tre sarà quella appropriata. Si potrebbe forse fornire una definizione che sia più generale di queste e che quindi consenta il proprio utilizzo indistintamente in ogni studio, ma proprio per la sua generalità sarebbe molto probabilmente inutilizzabile (Kulm, 1980).

1.3 Gli studi sull'atteggiamento

Importanti e recenti studi hanno riguardato la ricerca della connessione tra atteggiamento e successo scolastico, connessione che molti da tempo ipotizzano esplicitamente o implicitamente, assumendo l'esistenza di una relazione tra atteggiamento e apprendimento, apprendimento che si manifesta solitamente proprio con il successo. Tali studi sono però risultati negativi, se non fallimentari, nel senso che hanno rilevato che la connessione cercata non è in realtà statisticamente significativa (Ma & Kishor, 1997), o addirittura in alcuni casi le conclusioni di studi in questo senso si sono mostrati discordanti tra loro (Di Martino & Zan, 2005). Due sono le principali cause attribuite a questo fallimento. In primo luogo la scarsa efficienza degli stru-

menti di misura (Ma & Kishor, 1997), come i questionari, che non erano in grado di mostrare molti elementi che rimanevano nascosti. La seconda causa è la già citata mancanza di un quadro teorico di riferimento (Di Martino & Zan, 2007). Questi due fattori sono in realtà tra loro legati: infatti l'impiego di questionari inefficaci veniva suggerito, o perlomeno non smentito, da una idea di atteggiamento non esplicitamente fondata, ma che si andava a cercare a posteriori, quindi le domande poste non rispecchiavano una struttura o un modello teorico che si voleva confermare, ma nascevano con l'obiettivo di fornire esse stesse un quadro scientifico.

In contrasto con questi studi negativi, nel senso che non sono stati utili nella ricerca della connessione tra atteggiamento e successo, si è svolto di recente lo studio italiano finanziato dal MIUR: "L'atteggiamento negativo nei confronti della matematica: analisi di un fenomeno allarmante per la cultura del nuovo millennio". Questo ci fornisce un modello qualitativo di atteggiamento di notevole importanza, ampiamente motivato dai risultati ottenuti. Inoltre è consistito in un metodo di ricerca innovativo in questo settore, che precedentemente non aveva grande impiego: si tratta del metodo di misurazione impiegato per conoscere l'atteggiamento dei ragazzi, non solo questionari, ma anche un tema dal titolo "Io e la matematica: il mio rapporto con la matematica (dalle elementari ad oggi)", assegnato a più di 900 studenti di classi comprese tra le elementari e le superiori, in cui veniva lasciata al ragazzo piena libertà di scrittura. Di seguito analizzeremo proprio i risultati di questo studio.

1.4 Precisazioni sulla definizione

Tenendo conto della definizione tridimensionale di atteggiamento, vediamo cosa si intende per atteggiamento positivo e negativo riferito ad ogni singola componente (prendendo spunto da Di Martino & Zan, 2007):

1. per quanto riguarda le reazioni emozionali possiamo dire che queste sono positive se la matematica è percepita come piacevole; saranno

negative se suscita nello studente un senso di ansietà;

2. le credenze degli allievi possono essere giudicate positivamente se sono le stesse condivise dagli esperti nel settore della matematica, negativamente se si tratta di idee in contrasto con queste ultime;
3. riguardo al comportamento associato alla materia un giudizio positivo sarà dato in caso di successo, negativo in caso di insuccesso.

1.4.1 Precisazioni sul successo

C'è da aprire qui una breve parentesi: cosa si intende per successo e insuccesso? Si può senza dubbio affermare che il primo è legato ad un buon risultato ed il secondo ad un risultato negativo, ad un fallimento. Sorge allora spontanea la domanda “cos'è un buon risultato?”. Per poter rispondere a questa domanda siamo costretti a differenziare il buon risultato (o il successo) in base al soggetto: insegnante, alunno, società, ecc.. Analizzeremo soltanto i primi due, sia perché assumiamo come simili gli interessi dell'insegnante e della società, ed anche perché sono quelli che didatticamente ci riguardano più da vicino. Per quanto riguarda un buon risultato dello studente, secondo l'insegnante, possiamo dire che questo consiste direttamente nell'aver compreso a fondo l'argomento studiato, nel saperlo adoperare e nel saper operare con esso, e indirettamente nel far corrispondere a ciò buoni voti, come mezzo di valutazione e non come obiettivo vero e proprio. Per quanto riguarda l'opinione degli studenti, la situazione è più delicata e ci limiteremo ad accennare ad essa (prendendo spunto da Middleton & Spanias, 1999). Il risultato è direttamente correlato alla motivazione dell'individuo, che possiamo classificare in due modi: motivazione intrinseca e motivazione estrinseca. La motivazione intrinseca è il desiderio dello studente di impegnarsi per interesse proprio, tipica degli allievi che ritengono importante imparare (un determinato argomento oppure in generale riferito al sapere) per l'immagine che hanno di loro stessi. Gli studenti estrinsecamente motivati invece sono quelli che si impegnano soltanto per poi essere premiati

(ad esempio con buoni voti o con elogi) o per evitare punizioni (come note, brutti voti o rimproveri): in questo caso l'allievo non è realmente interessato ad apprendere, di conseguenza i metodi per raggiungere il proprio obiettivo potranno essere differenti da quelli utilizzati da allievi intrinsecamente motivati, e tenderanno pertanto ad applicarsi il meno possibile per raggiungere il massimo risultato (ad esempio copiando).

1.5 Analisi qualitativa dell'atteggiamento degli studenti verso la matematica: un progetto italiano

Ricordando che questa analisi (riferita al progetto "l'atteggiamento negativo nei confronti della matematica: analisi di un fenomeno allarmante per la cultura del nuovo millennio") è stata condotta attraverso un tema che i ragazzi erano tenuti a svolgere, l'assunzione migliore, riguardo a quanto detto da poco, è senza dubbio quella di considerare come soggetto lo studente, tra le possibili differenziazioni di successo o di buon risultato. Per quanto riguarda invece le differenze motivazionali non sarà fatta a priori alcuna ipotesi, ma si cercherà di comprendere dalle parole dei ragazzi il loro riferimento a motivazioni di tipo intrinseco o estrinseco. Attraverso la lettura dei temi, in realtà, raramente si evince il riferimento ad una sola delle due: nella gran parte dei casi i ragazzi alludono ad entrambe le motivazioni, rispecchiando quasi sempre nel voto ottenuto la qualità e/o la quantità di preparazione, tenendo anche presente l'influenza che il carattere emozionale ha sull'esito di una prova scritta o orale che sia; il considerare questa influenza da parte degli studenti non determina variazioni negative sullo studio effettuato (non ne falsa i risultati), anzi è di grande aiuto per esso, dato che il suo scopo è quello di riscontrare connessioni tra l'atteggiamento e la realizzazione, il successo dei ragazzi, e proprio le emozioni costituiscono (per la definizione che si sta considerando) una componente fondamentale e si vuole quindi evidenziare,

nel caso ne sia stata verificata l'esistenza, il legame tra reazioni emozionali e realizzazione scolastica. Di fatto, nei temi, oltre al frequente riferimento ai voti ottenuti come conseguenza della propria preparazione e/o delle reazioni emozionali che scaturiscono nell'aver a che fare con la matematica, è presente un ampio utilizzo del verbo "capire", usato in realtà con diverse accezioni (Di Martino & Zan, 2005), molto spesso legate alla visione della matematica e alla visione dell'"apprendere la matematica".

1.5.1 Diverse visioni della matematica

Proprio il verbo capire (ma non solo questo) ci permette di distinguere due visioni della matematica: *"il capire del primo tema fa riferimento ad un meccanismo da ricordare, a regole da memorizzare e da applicare, (...) ad obiettivi di immediata spendibilità, a tempi brevi. Nel secondo tema la stessa parola capire è associata alle parole ragionamenti, teoria, richiama esplicitamente tempi lunghi"* (Di Martino & Zan, 2005). Si ritrova cioè una matematica strumentale nel primo caso, e relazionale nel secondo (definizioni fornite da Skemp, 1976): nella prima la matematica è un insieme di formule da applicare e da memorizzare, nella seconda la matematica è invece caratterizzata da relazioni, e la stessa applicazione di formule non è una prova di memorizzazione ma prevede la comprensione del motivo per il quale queste regole funzionano. Molti ricercatori in didattica della matematica, tra i quali lo stesso Skemp, Di Martino e Zan, sono apertamente schierati verso la visione relazionale, che, se pur di difficile gestione in tempi brevi, permette di ottenere risultati più duraturi nel tempo, dato che il ruolo occupato dalla memoria in questo approccio è minore di quello che si ha con un approccio strumentale, che permette però di raggiungere i risultati desiderati quando si ha a che fare con tempi brevi.

1.5.2 Legame tra visione della matematica ed emozioni

Dagli elaborati dei ragazzi si deduce un forte legame tra la visione della matematica e il provare piacere (oppure no) nel fare matematica, seppur complesso: non si tratta di un rapporto causa effetto (Di Martino, 2007), nel senso che si è riscontrato che ragazzi con la stessa visione della matematica abbiano però diverse reazioni emozionali, e che diverse visioni della matematica siano associate a reazioni emozionali dello stesso tipo; semplicemente molti ragazzi hanno giustificato le loro emozioni nei confronti della matematica, positive o negative, con la visione che di essa hanno, ognuno a modo proprio, senza una precisa e ripetuta associazione. È importante notare due aspetti. Da una parte la visione della matematica non è legata solo al gradimento della matematica (mi piace/non mi piace), ma da essa ne conseguono vere e proprie emozioni, odio, paura, ansia, gioia, felicità, emozioni che grazie alla metodologia di misurazione scelta (il tema) sono spesso non solo dichiarate, ma anche specificate nella loro intensità (Di Martino, 2007). Esemplicative sono a questo scopo le frasi di alcuni dei ragazzi: *“Il rapporto che ho vissuto con questa materia è stato molto odioso(...). In quei momenti avrei voluto scomparire e andare in un mondo dove la matematica non c’era. (...) Se avessi potuto per quella materia non sarei più andato a scuola”* o ancora *“ed io avrei voglia di strappare il quaderno”*. In secondo luogo la visione della matematica che i ragazzi hanno è composta di vari elementi, non solo da “cosa è” e da “come si studia”, ma anche ad esempio dall’utilità che ha nella vita quotidiana e dalle caratteristiche proprie della materia: *“la matematica è un sistema logico numerico che, magari senza accorgerci usiamo ogni giorno: (...) la matematica è indispensabile per far girare il mondo; serve un po’ a tutto”* oppure, in contrapposizione a quanto appena citato *“Oltre a questo credo che nella vita non serva a parte le cose più importanti come le operazioni e i problemi delle elementari, per il resto non penso che una persona vada in giro a costruire quadrati sui cateti o fare espressioni con le x o con le y e compagnia bella”*; è interessante inoltre la differenza di pensiero tra *“Mi affascina perché non è un’opinione, è una materia razionale*

che non ha bisogno di interpretazioni; è così” e “Per risolvere un’equazione, non hai di certo bisogno di creatività, non serve la tua interpretazione, oppure dire quello che senti; la matematica è priva di sentimento, basta pensare al famoso detto: “la matematica non è un’opinione”. Proprio in quella frase è racchiusa la mia ripugnanza nei confronti di essa, non è come un tema nel quale si può avere interpretazioni diverse, c’è un solo modo di riuscire, un unico metodo”.

Abbiamo osservato che, anche se gli studenti tendono a legare la visione della matematica in qualche modo al proprio gradimento e alle proprie emozioni, non è però presente un preciso rapporto di causa effetto. Questo viene in realtà smentito nel caso in cui la visione della matematica provenga, seppur inconsciamente nei ragazzi, dal tipo di approccio impiegato dall’allievo, strumentale o relazionale, e non da altre caratteristiche della materia. Va detto, per chiarezza, che i temi evidenziano come gli studenti che si riferiscono ad un tipo di approccio, escludono l’esistenza dell’altro, nel senso che un ragazzo, che ammette a modo suo di avere una visione strumentale della matematica, non riconosce possibile un approccio di tipo diverso da quello che consiste nell’imparare a memoria, come pure uno studente che caratterizza la matematica come un insieme di relazioni (approccio relazionale) non è a conoscenza di uno studio di tipo strumentale messo in pratica probabilmente da molti compagni della sua classe. In tal senso i due approcci si escludono a vicenda. Ciò detto, analizzando gli elaborati dei ragazzi, è palese un legame di implicazione tra la visione della matematica e l’indice di gradimento. In particolare la visione strumentale della matematica è causa di non gradimento, mentre l’approccio relazionale permette, ai ragazzi che lo adottano, maggiore piacere e gusto nello studiare ed apprendere la matematica (Di Martino & Zan, 2007). Ciò non esclude il fatto che alcuni studenti gradiscono la materia pur avendo una visione strumentale ed altri provano emozioni negative nell’approcciarsi alla matematica nonostante abbiano una visione di tipo relazionale.

1.5.3 Legame tra emozioni e senso di auto-efficacia

Oltre a questo legame tra le disposizioni emozionali e la visione della matematica, si ritrovano nei temi degli allievi altre associazioni; tra queste è molto diffuso un forte legame tra il gradimento della matematica con il grado di successo che si ha, o meglio, con la percezione di controllabilità del successo oppure, per dirlo in altro modo, il legame tra il gradimento e il senso di auto-efficacia che consiste nella “*conseguenza del bilancio di teorie del successo in matematica di una persona che individuano delle caratteristiche essenziali per fare bene in matematica (per esempio: intelligenza, rapporto con il docente, memoria, impegno, capacità di concentrazione, metodo di studio, basi solide,...)*” (Di Martino, 2007): si tratta cioè di idee che lo studente ha di se stesso riguardo a tali caratteristiche e alla possibilità di modificarle. Le associazioni frequenti a tal proposito sono del tipo: mi piace perché riesco (o perché posso, nel senso che ho la possibilità di riuscire), non mi piace perché non riesco (o perché non posso). Ad esempio tra i temi spicca la frase “*adesso sento che mi piace [la matematica] forse anche perché ho iniziato a prendere bei voti*”. A questa connessione è anche riconducibile il fatto che molti studenti abbiano della matematica l’idea di una materia difficile. Pur essendo questa una visione della matematica, è opportuno citarla ora, e non quando si parlava appunto di visione della materia, dato che il concetto di materia difficile, per gli studenti, non deriva direttamente dalle caratteristiche della materia, bensì solitamente dal ripetuto insuccesso da parte dello studente e dall’idea di non poter riuscire in alcun modo: in altri termini il legame tra difficoltà e gradimento è riconducibile al legame tra l’auto-efficacia e il gradimento. Riprendendo quanto detto a tal proposito è importante notare che la casualità presente nelle affermazioni “mi piace perché riesco (posso)” e “non mi piace perché non riesco (non posso)” non è di tipo logico, ma di tipo narrativo (Di Martino & Zan, 2005): il fatto che la matematica piaccia o non piaccia non è causa diretta dell’aver possibilità di successo in matematica, ma racchiude al suo interno molteplici gradi di implicazione diretta. Ad esempio una frase del tipo “non mi piace perché non riesco” può voler

dire in realtà “non mi piace perché non riuscendo ho sviluppato un'avversità a questa materia che mi ha portato a provare per essa disgusto”; o ancora la frase “non mi piace perché non ho possibilità di riuscire” può significare probabilmente “non mi piace perché anche se mi impegnassi di più avrei gli stessi risultati negativi, e questo provoca in me un senso di depressione e tristezza”. Ovviamente per una corretta interpretazione è opportuno leggere ed analizzare l'intero testo che presenta questo tipo di connessione. In alcuni casi, tra gli elaborati del progetto, si riscontra anche una implicazione inversa, cioè del tipo “posso riuscire in matematica perché essa mi piace” oppure “non posso riuscire perché non mi piace”. *“La relazione espressa fra le due categorie (piacere e riuscire) rimanda a personali teorie dell'apprendimento, che in mancanza di ulteriori motivazioni sembrano riflettere piuttosto teorie della psicologia popolare (“se una materia piace allora riesce”)*” (Di Martino & Zan, 2005). In generale, tra gli elementi dell'auto-efficacia, quelli che dall'analisi dei temi sembrano essere le principali cause del successo o dell'insuccesso sono lo studio e l'impegno. Non manca però chi ritiene la matematica una materia per pochi privilegiati, dando così come motivazione del proprio insuccesso le scarse capacità cognitive. Altri attribuiscono invece all'insegnante, o al rapporto con egli instaurato, la causa del fallimento scolastico: c'è chi ha della matematica una visione differente da quella dell'insegnante, chi riterrebbe opportuno un diverso metodo di giudizio, chi non si sente compreso e si ritiene vittima di ingiustizie (anche se non volute) o addirittura chi è in conflitto con l'insegnante e per questo si rifiuta pragmaticamente di apprendere. Quest'ultimo caso, il rifiuto di apprendere, è in alcuni casi presente, e motivato in modo diverso: per qualcuno, come detto, la causa è il conflitto con l'insegnante, per altri la causa viene dalla visione della materia (ad esempio nel ritenere inutile studiare una materia della quale non si conosce l'utilità), da una pessima disposizione emozionale nei confronti della matematica, una sorta di odio (le cui cause vanno cercate all'interno della carriera matematica fatta dallo studente, fallimenti, contrasti con l'insegnante), oppure da ripetuti fallimenti che hanno portato lo studente

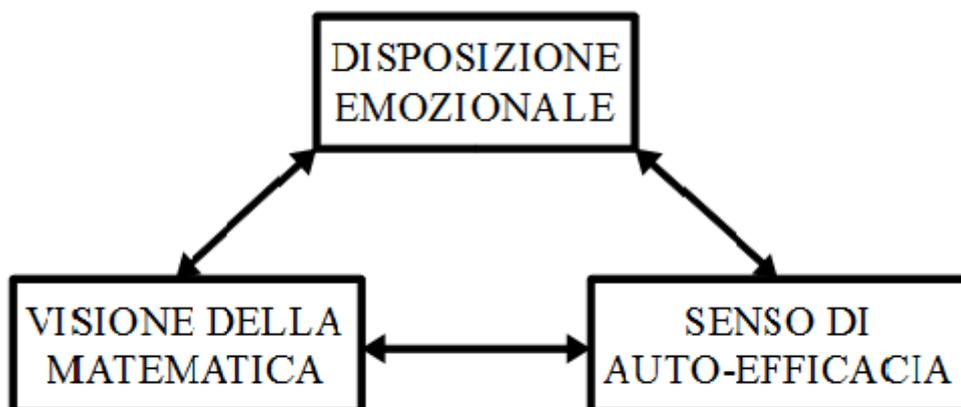
a smettere di cercare di far bene.

1.5.4 Legame tra visione della matematica e senso di auto-efficacia

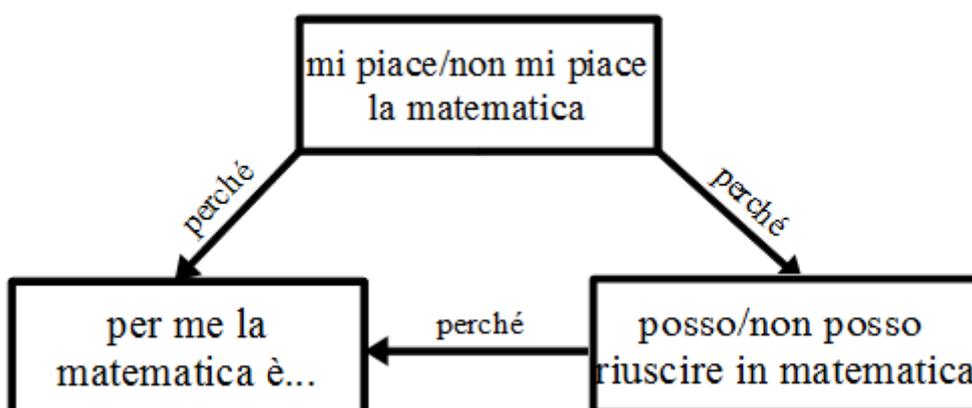
Ultima interessante connessione tra diversi fattori è la relazione presente tra la possibilità di riuscire, l'auto-efficacia, e la visione della matematica. In tal caso la visione della matematica è la causa del primo fattore. Si tratta più precisamente di quella che Weiner (1974) chiama attribuzione causale per successo e insuccesso: si riscontra quando, ad esempio, uno studente non comprende il senso generale della matematica che studia (caso dell'insuccesso), oppure quando al contrario uno studente afferma che, citando una frase di uno dei temi, *“ho sempre capito la ragione che c'è dietro”* (caso del successo); in questi due esempi entrano chiaramente in gioco altri fattori oltre a quelli direttamente legati (visione e auto-efficacia), uno fra tutti le emozioni verso la materia, e si genera così un circolo di consequenzialità tra questi tre elementi.

1.5.5 Il modello di atteggiamento

Per concludere questa sezione elaboriamo un modello dell'atteggiamento verso la matematica considerando le relazioni che abbiamo analizzato e prendendo spunto da quello presentato da Di Martino (2007):



Per chiarire meglio questo schema, presentiamo anche un modello che esplicita le affermazioni basilari che rimandano ai tre elementi presenti in esso, e che permettono una migliore comprensione delle relazioni tra essi presenti (si prende spunto questa volta da Di Martino & Zan, 2007):



1.6 Valutazione dell'atteggiamento

Riprendiamo a questo punto un discorso al quale si è accennato in precedenza: come valutare l'atteggiamento. Abbiamo osservato che se si prende in considerazione la definizione bidimensionale o quella tridimensionale è com-

plesso valutare un atteggiamento positivo o negativo perché ci sono in gioco più variabili, quindi non basta verificare che una sola di queste sia negativa, cosa che succede nel caso della definizione semplice.

1.6.1 Un'assunzione errata

Per sopperire a questa difficoltà, considerando ad esempio la definizione multi-dimensionale, in molti studi sull'atteggiamento che utilizzavano i questionari, si assumeva una relazione di causa effetto implicita tra credenze, emozioni e comportamento. Il rapporto causa/effetto tra credenze e comportamento era spesso dedotto dalla transitività della catena:

$$\textit{“credenze} \rightarrow \textit{emozioni} \rightarrow \textit{comportamento”}$$

(Di Martino & Zan, 2010, A). L'ipotesi consisteva, ad esempio, nel supporre noto il comportamento nei confronti della matematica da parte di un allievo una volta valutate le sue credenze: se le sue credenze fossero state negative sarebbe stato negativo anche il suo comportamento, mentre sarebbe positivo quando le sue credenze fossero state positive. (In Di Martino & Zan, 2010, A) questa ipotesi viene però messa in discussione; analizziamo brevemente le prove a sostegno della sfiducia della relazione citata poco fa. In diversi lavori (tra i quali Di Martino & Zan, 2002, 2003, 2010 A) Di Martino e Zan hanno analizzato un particolare studio condotto su un numero significativo di studenti (circa 200) di età compresa tra i 14 e i 18 anni. A questi veniva fornito un questionario che presentava, tra i diversi quesiti, la richiesta di scegliere l'opzione più vicina alla propria credenza riguardo ad una particolare caratteristica della matematica e in seguito di scegliere la disposizione emozionale che tale caratteristica suscitava in essi. In particolare, le scelte possibili per la prima domanda erano *“in matematica c'è sempre una ragione per ogni cosa”* e *“non è vero che in matematica c'è sempre una ragione per ogni cosa”*, mentre quelle per la seconda erano *“mi piace”*, *“non mi piace”* e *“trovo indifferente”*, riferite alla caratteristica presentata nella prima domanda. Per comodità indicheremo queste risposte rispettivamente con “a”,

“b”, “ α ”, “ β ” e “ γ ”. Si assumeva per la prima domanda, ragionevolmente, come risposta decisamente più vicina a quella condivisa dagli esperti la risposta “a”, quindi si riteneva che, riguardo a questa questione, un ragazzo avesse una credenza positiva se avesse scelto la risposta “in matematica c'è sempre una ragione per ogni cosa”, negativa in caso contrario. Rispettando la relazione determinata dalla catena di cui abbiamo parlato in precedenza, ci si sarebbe aspettati di riscontrare sostanzialmente due filoni di risposte: la coppia $[a, \alpha]$, quella cioè dove le scelte dei ragazzi erano “a” per la prima domanda e “ α ” per la seconda, e la coppia $[b, \beta]$; veniva dato poco peso, ai fini preposti, alle coppie di risposte del tipo $[a, \gamma]$ e $[b, \gamma]$. Se così fosse stato, si avrebbe confermato il fatto che credenze negative portano ad emozioni negative e che credenze positive portano ad emozioni positive: in altre parole, per distinguere l'atteggiamento negativo da quello positivo, nel caso di supporre come definizione corretta di atteggiamento quella bidimensionale o quella tridimensionale, basterebbe riconoscere soltanto una delle due o tre (in base alla definizione scelta) componenti come negativa o positiva, fidandosi del fatto che anche le altre componenti fossero dello stesso tipo. In realtà le risposte non hanno rispettato le attese: quasi un quinto del campione di studenti analizzato aveva dato risposte discordi, cioè del tipo $[a, \beta]$ e $[b, \alpha]$. Se si considera anche il fatto che circa 60 rispondenti avevano risposto alla seconda domanda con “ γ ”, e quindi non sono rilevanti ai fini di questo studio, si ottiene che le risposte discordi sono circa la metà di quelle concordi, del tipo $[a, \alpha]$, $[b, \beta]$.

I dati appena proposti non individuano l'andamento dell'atteggiamento degli studenti verso la matematica, ma rivestono importanza perché smentiscono la catena *credenze* \rightarrow *emozioni* \rightarrow *comportamento*.

1.6.2 Valutazione sensata

Ciò detto, resta il problema di come valutare e distinguere l'atteggiamento negativo da quello positivo secondo le definizioni bi e tri-dimensionali che rivestono probabilmente maggiore importanza. Alcuni affermati ricercatori,

tra i quali gli stessi autori dello studio appena analizzato, Di Martino e Zan, concordano sullo stesso modo di giudicare l'atteggiamento degli studenti verso la matematica: proprio come è stato fatto per l'ultima analisi, si definisce l'atteggiamento bidimensionale con la struttura [credenze,emozioni] e l'atteggiamento tridimensionale con [credenze,emozioni,comportamento], rispettivamente alla seconda e alla terza definizione di atteggiamento date; si dirà allora che l'atteggiamento di uno studente è positivo secondo la definizione bidimensionale quando tutte le componenti dalla struttura bidimensionale, riferita allo studente in questione, sono positive, altrimenti, cioè se almeno una delle due è negativa, si dirà che lo studente ha atteggiamento negativo. Nel caso tridimensionale la definizione è analoga, con l'unica differenza che l'atteggiamento positivo è così definito se e soltanto se le tre componenti sono positive, e non più soltanto due. Quindi, ad esempio, se un allievo prova emozioni negative (paura, ansia, ecc.) nell'affrontare la matematica, ha credenze e convinzioni sulla materia simili a quelle possedute dai professionisti della matematica (ricercatori, professori, ecc.) e fondamentalmente è caratterizzato da una situazione di successo (raggiunge i suoi scopi in matematica), allora affermeremo che il suo atteggiamento nei confronti della matematica è negativo. Questa definizione è in realtà un'ottima soluzione al problema che ci eravamo posti. Infatti è giusto credere che se uno studente presenta, in almeno una delle tre componenti (due se ci riferiamo alla definizione bidimensionale), una situazione negativa, questi necessita aiuto per poter affrontare al meglio la matematica, e quindi non si può ritenere che il suo atteggiamento nei confronti della matematica sia positivo; se fosse così, per buon senso, non dovrebbe avere problemi riguardanti le componenti in questione, e non dovrebbe tanto meno aver bisogno di sostegno per superare tali difficoltà: risulta allora molto sensata anche la definizione nel caso positivo. Naturalmente fornendo questa definizione avremo più gradi di negatività dell'atteggiamento: è ovviamente più preoccupante un caso di atteggiamento negativo determinato quando entra in gioco un maggior numero di componenti, rispetto ad un caso che presenta meno elementi negativi; non per questo è da sottovalutare chi, ad

esempio, si accerta avere solo uno dei tre fattori negativo, bensì è opportuno intervenire anche in casi di questo tipo. È forse giusto pensare semplicemente che casi come l'ultimo richiedano uno sforzo minore da parte dell'insegnante (o di colui che si impegna per allontanare dallo studente le cause del proprio atteggiamento negativo nei confronti della matematica), rispetto a casi più complessi e problematici in cui hanno carattere negativo due o addirittura tutte le tre componenti, credenze, emozioni e comportamento.

In base alle proprie opinioni, ciascuno riterrà più grave la negatività di uno dei caratteri, e meno drammatica quella di altri. Oppure, in termini didattici e accademici, potremmo affermare che alcuni aspetti negativi dell'atteggiamento siano potenzialmente affrontabili e superabili più facilmente di altri, che richiedono invece interventi più lunghi e complessi. Riprenderemo in seguito (nel paragrafo "profili di atteggiamento") questo argomento riportando un esempio.

1.6.3 Il modello di atteggiamento come mezzo di valutazione

Vogliamo ora invece trattare l'applicabilità del modello disposizione emozionale - senso di auto efficacia - visione della matematica che in precedenza abbiamo argomentato. Se si vuole utilizzare questo schema per valutare l'atteggiamento degli allievi, il discorso da fare è analogo a quanto detto in precedenza: giudicare negativo un atteggiamento che risulti negativo in una delle tre caratteristiche personali che compaiono nel modello, e positivo uno che presenti esclusivamente tratti positivi. Quel che può essere utile in questo caso è l'insieme delle relazioni presenti nello schema, e che sono state analizzate precedentemente. Non si può di certo credere che dalla negatività di una delle componenti ne consegua la negatività delle altre: abbiamo infatti accennato alla presenza di studenti che nei loro temi smentiscono questa ipotesi. D'altronde le connessioni tra le tre possono essere d'aiuto in parte per giudicare l'atteggiamento come positivo o negativo, e soprattutto nel tentativo di porre rimedio a casi di studenti che presentano atteggiamento negativo:

infatti la conoscenza di rapporti di causa ed effetto suggerisce l'intervento in uno dei tre ambiti oppure a partire da uno di essi, dopo aver riconosciuto le motivazioni che hanno spinto uno studente verso un atteggiamento negativo. Praticamente, se si è riscontrato un atteggiamento negativo di uno studente, ed in particolare tutte le componenti che entrano in gioco sono negative, conoscendo le relazioni tra le tre, si può intervenire su una di esse qualora si supponga che sia la causa anche delle altre due: in particolare, ricordano il secondo grafico presentato nell'esposizione del modello trovato, si interverrà cercando di modificare la visione della matematica che l'allievo ha, dato che è l'ultimo elemento (in ordine causale) dello schema. Nel caso in cui invece non tutte le componenti del modello risultino negative, ma soltanto alcune di esse, si terrà comunque esso presente, cercando di osservare nello studente quante e quali delle connessioni studiate siano riscontrabili nel caso particolare del singolo allievo, per poi applicare il più possibile le conseguenze dello schema, come detto nel caso precedente.

Differenze tra valutazione tramite modello e tramite definizione

Apriamo ora una breve parentesi di confronto tra la definizione (le definizioni) fornite e il modello elaborato. Quel che è appena stato detto (riguardo all'applicabilità del modello) vale soltanto nel caso si tenga conto di un modello così fatto, che presenti cioè delle relazioni causali al suo interno. Nel caso si consideri semplicemente la definizione (ci riferiamo a quelle bi e tri-dimensionali) non esistono, o quantomeno non sono state esplicitate né confermate, relazioni tra i diversi ambiti introdotti, credenze, emozioni e comportamento, pertanto non è perseguibile un percorso simile a quello che può essere intrapreso basandosi sul modello per migliorare la situazione che caratterizza uno studente con scarso atteggiamento verso la matematica. In altre parole, quando si valuta l'atteggiamento e quando lo si tenta di migliorare, affidandosi soltanto alla definizione, si dovranno analizzare e trattare separatamente le diverse componenti che caratterizzano proprio la definizione: ciò ha l'effetto di rendere più difficili e lunghi i processi di analisi

e di miglioramento dell'atteggiamento. Proprio in questo si riconosce l'importanza fondamentale del modello analizzato, importanza teorica ma anche e soprattutto pratica, nel riconoscere l'atteggiamento e nel tentativo di porre rimedio ad un diagnosticato caso di atteggiamento negativo.

Profili di atteggiamento

Riprendendo il discorso lasciato aperto, è utile supportare quanto detto modellizzando anche le diverse alternative di ciascun fattore dello schema. Prendendo spunto da Di Martino & Zan (2010, A) diremo allora che:

- classificheremo la disposizione emozionale in positiva quando è contraddistinta da piacere o in generale da emozioni positive, in negativa quando si lega la matematica ad emozioni negative, come odio, ansia, ecc.;
- la visione della matematica può essere sostanzialmente di due tipi (considerando esclusivamente le caratteristiche interessanti per l'analisi dell'atteggiamento di uno studente), relazionale e strumentale, entrambi trattati precedentemente;
- il senso di auto-efficacia sarà considerato alto quando lo studente ritiene di avere le possibilità che portano al successo, basso in caso contrario.

Di Martino (2007) suggerisce di parlare, piuttosto che di un generico atteggiamento positivo o negativo, di profili di atteggiamento, strutture simili a quelle già proposte del tipo [credenze,emozioni] oppure [credenze,emozioni, comportamento], dove però le componenti sono quelle presenti nel modello. Lo scienziato riporta un esempio interessante (il caso [visione relazionale,alta auto-efficacia,disposizione emozionale negativa]): *“un profilo caratterizzato da una visione relazionale della matematica, un alto senso di auto-efficacia ma una disposizione emozionale negativa (“la matematica non mi piace”) è probabilmente quello che potremmo chiamare atteggiamento negativo genuino”* (Di Martino, 2007) dato che non è determinato da altri fattori, ma al

più si dovrà intervenire proponendo argomenti più interessanti e piacevoli di quelli solitamente trattati in ambito didattico.

1.7 Analisi quantitativa sull'atteggiamento degli studenti verso la matematica

Analizzeremo ora alcuni risultati, per osservare l'andamento dell'atteggiamento su un campione significativo di allievi.

1.7.1 Alcune dovute precisazioni

Quanto vedremo non rispecchia sicuramente la media esatta degli atteggiamenti di ragazzi verso la matematica, ma può essere utile per avere un'idea quantitativa di questo tipo di misurazioni. La limitatezza di quanto sarà esposto deriva da vari motivi: il basso numero di ragazzi analizzati come campione, la quasi totale assenza di lavori di questo tipo (vista la modernità della teoria sull'atteggiamento verso la matematica sviluppata nella direzione che più ci interessa, quella che tiene cioè conto delle definizioni multidimensionali e di modelli di atteggiamento), il fatto che stiamo considerando studi che si prefiggevano altri obiettivi e quindi i dati considerati non sono esplicitamente stati elaborati; un'ultima questione deriva dal fatto che stiamo analizzando i risultati presentati da Di Martino & Zan (2002, 2003) e le due domande riportate possono non rispecchiare l'idea generale che gli studenti hanno sulla matematica e le emozioni che provano solitamente nel fare matematica. Entrando nello specifico, sono state analizzate le opzioni scelte dagli allievi tra “in matematica c'è sempre una ragione per ogni cosa” e “non è vero che in matematica c'è sempre una ragione per ogni cosa” e tra “mi piace”, “non mi piace” e “trovo indifferente” riferite alla caratteristica della domanda precedente. Esplicitiamo meglio l'ultima questione posta poco fa: non è detto che la prima domanda possa esprimere le credenze dell'allievo, cioè se anche uno studente pensasse che “non è vero che in matematica c'è sempre una ragione

per ogni cosa”, egli potrebbe in realtà avere idee sulla matematica che rispecchiano quelle degli esperti, cioè potrebbe avere delle credenze positive, come pure un allievo che crede che “in matematica c’è sempre una ragione per ogni cosa” potrebbe avere per molte altri aspetti della matematica credenze negative; inoltre le emozioni (intese come gradimento, “mi piace”/“non mi piace”) espresse con la scelta della seconda domanda si riferiscono soltanto alla problematica aperta nella prima domanda, e potrebbero contrastare con le emozioni che solitamente un allievo prova quando si ritrova ad affrontare o a trattare con la matematica. Queste premesse non costituiscono assolutamente una critica agli autori degli articoli, infatti, come detto, è palese che lo studio da loro condotto aveva altri scopi, per i quali erano adatti gli studi riportati; semplicemente quanto detto vuole mettere in guardia dal confondere i risultati che mostreremo con la realtà didattica che, proprio per queste problematiche, non sarà di certo la stessa.

1.7.2 Il contesto

Fatte queste dovute precisazioni ricordiamo che l’analisi è stata condotta su un campione di 211 ragazzi di età compresa tra i 14 ed i 18 anni, frequentanti la scuola superiore. Terremo inoltre conto della definizione bidimensionale, quella secondo la quale l’atteggiamento è un modello di credenze sulla materia e reazioni emozionali.

1.7.3 I risultati

I ragazzi che hanno risposto alla prima domanda scegliendo l’opzione “in matematica c’è sempre una ragione per ogni cosa”, mostrando credenze positive riguardo alla matematica, sono stati 160 mentre i restanti 51, quasi un quarto del campione, hanno negato questa affermazione. Per quanto riguarda la seconda domanda a risposta multipla, 112 allievi hanno mostrato gradimento verso la caratteristica della matematica, 43 hanno affermato di non gradirla, e 58 si sono espressi con l’indifferenza: se non consideriamo questi

ultimi, più di un quarto del campione ha mostrato disposizioni emozionali negative verso la proprietà della matematica di essere sensata. È stato detto precedentemente che per valutare l'atteggiamento non è sufficiente analizzare separatamente le diverse componenti, bensì abbiamo definito l'atteggiamento positivo come un profilo in cui tutte le componenti sono positive, e l'atteggiamento negativo come quello in cui almeno una componente risulta negativa: ci interessa conoscere quindi i profili del tipo [credenze, disposizioni emozionali]. Nel caso in non sia stato espresso indice di gradimento ("trovo indifferente questa caratteristica della matematica") si è ritenuto opportuno valutare negativamente l'atteggiamento in cui la credenza riscontrata sia negativa, e non valutare affatto i casi di credenze positive (di fatto in quest'ultimo caso è impossibile, senza ulteriori informazioni, valutare l'atteggiamento secondo la definizione bidimensionale): quindi il campione studiato si riduce a 173 individui. Di questi solamente 95 hanno mostrato atteggiamento positivo verso la matematica, mentre i restanti 78 (quasi il 40%) risultano avere atteggiamento negativo. Tra questi, 14 hanno riportato entrambe le componenti negative, mentre per 64 è negativa solo una delle due: non vuol dire che per questi ultimi l'atteggiamento non sia negativo, ma al più che la diagnosi è meno grave, o equivalentemente che il superamento delle difficoltà, grazie ad una qualche attività finalizzata al miglioramento dell'atteggiamento, potrebbe risultare più agevole.

I risultati sono in linea con i dati ufficiali riguardanti le difficoltà in matematica forniti dal Ministero della Pubblica Istruzione, che sottolineava che "*il 44% degli studenti di scuola superiore ammessi con debito all'anno scolastico successivo avesse il debito in matematica*" (Di Martino, 2007). Con questo non si sta affermando uno stretto legame tra atteggiamento e successo in matematica, si sta però supponendo che un nesso tra le due cose esista e che sia pertanto fondamentale tentare di porre rimedio all'atteggiamento negativo di molti studenti.

La percentuale dei ragazzi con profilo di atteggiamento tenderebbe addirittura ad aumentare (è ragionevole supporre che debba superare la soglia del

44%) se si tenesse conto della definizione tridimensionale, dato che al 40% di ragazzi per i quali risulta negativa almeno una tra credenza e disposizione emozionale, si aggiungerebbe chi, pur avendo emozioni e credenze positive, assume un comportamento associato alla matematica di tipo negativo, manifestando insuccesso.

1.7.4 Risultati sull'evoluzione dell'atteggiamento

Oltre ai risultati sull'atteggiamento in senso stretto, quelli che mostrano cioè quantitativamente il numero di ragazzi con atteggiamento positivo e negativo, è interessante conoscere come si sviluppa l'atteggiamento, e in generale il rapporto con la matematica, durante gli anni. Saranno prese alcune informazioni da Di Martino (2007) e da Di Martino & Zan (2005, 2010, A) che hanno sviluppato sintesi di idee e pensieri dei ragazzi campione del progetto nazionale "l'atteggiamento negativo nei confronti della matematica: analisi di un fenomeno allarmante per la cultura del nuovo millennio" finanziato dal MIUR.

I risultati

Innanzitutto quel che si evince è che raramente l'atteggiamento nei confronti della matematica è costante nel tempo. Molto frequentemente esso deteriora nel corso degli anni, *"con un periodo particolarmente problematico durante gli anni della scuola media"* (Di Martino, 2007). Infatti, analizzando i temi dei ragazzi delle scuole elementari, emerge la netta prevalenza di coloro che dichiarano di apprezzare la matematica; percentuale che diminuisce notevolmente passando al livello scolastico superiore (Di Martino & Zan, 2005). Ancora Di Martino & Zan (2005) individuano cinque categorie principali che sintetizzano l'evoluzione nel tempo del rapporto con la matematica:

1. rapporto costantemente alto;
2. rapporto costantemente basso;

3. rapporto di alti e bassi;
4. in calando;
5. in crescendo.

I ragazzi principalmente (63%) dichiarano di avere un rapporto negativo con la matematica: tra questi il 28% si ritrova nella quarta categoria, quasi il 10% nella terza e addirittura il 29% ammette di avere con la matematica un rapporto costantemente basso.

I punti di svolta

Si osserva inoltre che, per quanto riguarda la terza e la quarta categoria, i cambi del rapporto non sono gradualmente e lenti, bensì gli allievi descrivono, a modo loro, dei punti di svolta (Di Martino & Zan, 2005), intesi come momenti necessari e sufficienti perché il rapporto cambi carattere, abbia un'inversione, o un repentino peggioramento: si tratta di quelli che Bruner (1990) chiama *turning points*.

Attribuzione di responsabilità

Altro elemento che colpisce è l'attribuzione di responsabilità che i ragazzi fanno della costruzione del proprio rapporto con la matematica: per molti di loro l'insegnante è visto come vero e proprio artefice di esso, "*come il fattore mediatore più significativo della formazione del proprio atteggiamento*" (Di Martino, 2007). Ciò fa pensare a quanto sia importante il ruolo e la qualità dell'insegnante. Sempre Di Martino (2007) attribuisce all'insegnante, basandosi sulle informazioni raccolte nei temi dei ragazzi, ruoli cruciali in diversi ambiti della formazione dell'atteggiamento e del rapporto con la matematica:

- nella visione e nel concetto di matematica che gli allievi costruiscono;
- nel dare senso all'attività che viene svolta in classe;
- nel modo in cui viene gestito l'errore dell'allievo;

- nella formazione dell'idea di successo da parte dello studente;
- nel rapporto stesso che si costruisce con la matematica;
- in quelli che abbiamo chiamato punti di svolta, nei casi in cui l'atteggiamento verso la matematica abbia dei cambiamenti in positivo.

1.8 Metodi per il miglioramento dell'atteggiamento negativo

Il fatto che molti studenti abbiano un atteggiamento negativo verso la matematica, unitamente al fatto che per buona parte di essi l'evoluzione dell'atteggiamento sia di tipo peggiorativo, fa capire quanto sia fondamentale la ricerca e l'utilizzo di metodi per il superamento dell'atteggiamento negativo da parte degli allievi. Abbiamo inoltre visto come molti ragazzi attribuiscono la formazione del rapporto con la matematica (che spesso è negativo) all'insegnante: ciò ci fa capire quanto sia significativo per gli studenti il ruolo dell'insegnante, ritenuto non una semplice guida, ma visto come il principale fattore della formazione delle idee sulla matematica.

1.8.1 Metodi sbagliati

Sappiamo che spesso le difficoltà in matematica generano negli allievi un atteggiamento negativo, che in alcuni casi può sfociare nel rifiuto di confrontarsi con la materia (Di Martino & Zan, 2010, B). Come prevenzione di questa situazione alcuni insegnanti tendono a far avere all'allievo esperienze di successo, credendo, giustamente, che in tal modo migliorino le disposizioni emozionali dell'allievo stesso nell'affrontare la matematica. A tal fine gli insegnanti si ritrovano ad attuare processi di semplificazione delle domande, ad esempio proponendo domande a risposta multipla, e a privilegiare gli esercizi di tipo ripetitivo e meccanico. Così facendo si ottengono in realtà diversi aspetti negativi: in primo luogo si valorizzano le risposte e si toglie peso ai

procedimenti, così che procedimenti parzialmente o in linea generale corretti vengono penalizzati, mentre vengono premiate risposte giuste ottenute in alcuni casi con metodi sbagliati o scorretti matematicamente e/o logicamente; inoltre in questo modo (prendendo spunto da Gardner, 1991) insegnanti e studenti si ritrovano nel credere che l'obiettivo della scuola sia il successo inteso come risposta corretta, e non come apprensione dei processi che sono alla base della matematica; ancora, Di Martino & Zan (2010, B) ricordano come perseguendo questa strada si arrivi alla “*demonizzazione*” dell'errore, visto come ostacolo al successo e non come occasione di apprendimento, e anche che perseguendo questa strada si possano avere ripercussioni negative sull'aspetto emozionale, fino a portare in alcuni casi estremi alla “*rinuncia consapevole a pensare*”. In secondo luogo l'impiego di domande a risposta multipla, o in generale il centrare le richieste sui prodotti piuttosto che sui procedimenti, porta gradualmente alla convinzione che un problema che non venga capito immediatamente, difficilmente possa essere in seguito compreso, e si declassa quindi l'idea che il ragionamento possa avere effetti positivi. Terzo aspetto risulta dal rendere ripetitivi gli esercizi, dall'applicare meccanicamente, e senza bisogno di un particolare ragionamento, alcune regole: si sviluppa quella che abbiamo chiamato (prendendo spunto da Skemp, 1976) visione strumentale della matematica, che molti, come già detto, ritengono epistemologicamente scorretta, rispetto a quella relazionale; in questo modo gli insegnanti, nel tentativo di accrescere un atteggiamento di tipo positivo verso la matematica negli studenti, ottengono il risultato contrario: paradossalmente fanno sì che gli allievi sviluppino l'idea di una materia “*arida, schematica, poco creativa*” (Di Martino & Zan, 2010, B), e conseguentemente anche un'avversione emozionale verso essa causata da una visione negativa della matematica. In più, quando si tende a far predominare l'idea di una materia strumentale, se inizialmente i risultati possono essere positivi, almeno in termini di risoluzione di esercizi meccanici ed anche di voti, successivamente si riscontrano notevoli difficoltà nel dover imparare e memorizzare regole sempre più complesse e numerose, e quindi anche nell'applicarle: anche in

questa direzione il risultato, paradossalmente, è opposto a quello sperato, infatti all'iniziale successo ne consegue facilmente un insuccesso duraturo. Infine, nel terminare questo drammatico elenco, ma non come fattore meno importante tra quelli menzionati, va osservato un altro aspetto negativo dell'impiego delle risposte "a crocetta": l'insegnante che si trova di fronte un ragazzo con numerose difficoltà tende a semplificare, per aiutarlo, la domanda, o a rendere più riconoscibile la risposta; ma allora, qualora un allievo si ritrovi ancora in una situazione di difficoltà che lo porta all'errore, egli si convincerà, a causa del ripetuto fallimento, di non essere in grado di affrontare la materia, o, detto in altro modo, crollerà il suo senso di auto-efficacia, e prevarrà un senso di frustrazione, una reazione emozionale negativa associata alla matematica.

In definitiva abbiamo analizzato alcuni aspetti che di frequente gli insegnanti assumono nel tentativo di migliorare il rapporto che i propri studenti hanno con la matematica: in alcuni casi, questi, che in generale possono essere riassunti, o quantomeno ritenuti connessi, con il dare più peso ai risultati che ai processi, o ancora con il ritenere più importante il pensiero riproduttivo che quello produttivo (Di Martino & Zan, 2010, B), vanno nella direzione opposta rispetto a quella sperata, peggiorando l'atteggiamento che alcuni studenti hanno verso la matematica. Questo discorso riveste importanza ancora maggiore se teniamo conto di quanto l'insegnante sia in grado di influenzare negli studenti le opinioni e i sentimenti che essi formano riguardo alla matematica.

1.8.2 Metodi corretti

É pertanto importante riflettere sul ruolo che gli insegnanti hanno nel costruire l'atteggiamento verso la matematica degli studenti e, di conseguenza, riflettere su quella che è la visione della matematica che gli insegnanti hanno e sulle loro teorie di successo, e, più in generale, sull'atteggiamento degli insegnanti verso la matematica e sull'insegnamento stesso (Di Martino & Zan, 2010, A). Va detto anche che la diagnosi di atteggiamento negativo deve rappresentare negli insegnanti non un punto d'arrivo, un fallimento senza solu-

zione, ma un punto di partenza, dal quale operare interventi atti a modificare le componenti dell'atteggiamento che sono state valutate negativamente (Di Martino & Zan, 2007). Va in tal senso promosso un atteggiamento effettivamente positivo verso la matematica che agganci “*saldamente il piacere di far matematica ad un adeguato senso di autoefficacia e ad una visione corretta della disciplina*” (Di Martino & Zan, 2010, B). In tale direzione è necessario che si valorizzi l'idea di successo legata ai processi, non ai prodotti, d'accordo con le Indicazioni per il curriculum di Matematica elaborate nel 2007 (riportate in Di Martino & Zan, 2010, B). “*Di estrema importanza è lo sviluppo di un atteggiamento corretto verso la matematica, inteso anche come una adeguata visione della disciplina, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per esplorare e percepire affascinanti relazioni e strutture che si trovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo*”. L'insegnante per primo è tenuto, per il bene dei propri allievi, a far propria una visione relazionale e non strumentale della matematica, centrata come già detto sui processi e non sui prodotti (Di Martino & Zan, 2010, B), per far sì che l'allievo sviluppi un senso di autoefficacia positivo, associato alla visione relazionale.

Il problem solving

Quali metodi possono essere allora utilizzati in classe quando si è diagnosticato in alcuni studenti atteggiamento negativo? Secondo Zan (2006) il metodo maggiormente utile è rappresentato dal problem solving, “*attività del pensiero messa in atto per raggiungere una condizione desiderata a partire da una condizione data, o, più propriamente, l'insieme dei processi atti ad analizzare, affrontare e risolvere positivamente situazioni problematiche*” (http://it.wikipedia.org/wiki/Problem_solving). Affinché questo tipo di attività sia ottimizzata, è importante che i problemi proposti siano abbastanza complessi, di non immediata soluzione, e che non sia sufficiente applicare alcune regole. Gli allievi che si trovano ad affrontare il problema devono

comprendere la non necessaria unicità della soluzione, la possibilità che le soluzioni siano molteplici o non ce ne siano affatto (Di Martino & Zan, 2010, B), e che ognuno di essi metta in atto i processi che ritengono più adeguati, lasciando libera scelta di approccio. È importante anche la scelta delle modalità con cui viene affrontato il problema, perché siano il più congeniali possibile per l'argomentazione, l'analisi delle proprie e delle interpretazioni altrui, e la motivazione delle proprie scelte, ed è inoltre fondamentale che i ragazzi abbiano a loro disposizione tutto il tempo a loro necessario (Di Martino & Zan, 2010, B), per evitare che qualcuno non riesca a trattarlo sufficientemente e che venga magari discriminato.

Il laboratorio di matematica

Un'altra strategia utile nello sviluppo da parte degli studenti di un atteggiamento positivo, secondo Di Martino, Zan ed altri studiosi, consiste nel laboratorio di matematica che, prendendo spunto dal documento dal nome "MATEMATICA 2003" (Unione Matematica Italiana, 2003), si presenta come una serie di indicazioni metodologiche trasversali, basate certamente sull'uso di strumenti, finalizzate principalmente alla costruzione di significati matematici; non si tratta di un luogo fisico preciso, ma di un insieme di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici.

L'utilizzo del tema

Si ritiene inoltre utile, se non indispensabile, nel voler conoscere, analizzare e valutare l'atteggiamento dei propri studenti verso la matematica, che gli insegnanti utilizzino, affianco ad eventuali questionari, dei veri e propri temi, come successo nel progetto italiano finanziato dal MIUR già più volte citato, in modo da lasciar libero sfogo alle idee dei ragazzi, così che si possa infine ottenere una diagnosi accurata, che tenga conto dell'interpretazione dell'insegnante, ma anche e soprattutto dei contenuti scritti dagli allievi stessi.

Capitolo 2

L'insegnamento in Italia: analisi storica dei programmi di trigonometria

Nel corso degli anni l'istruzione italiana è stata sottoposta a numerose modifiche, sotto diversi punti di vista, nel tentativo di formare al meglio la popolazione del nostro Paese, venendo incontro ad esigenze di carattere storico, sociale e culturale. Il fine comune ad ogni modifica apportata era quello di preparare i cittadini alla vita lavorativa ed universitaria, di aumentare l'alfabetizzazione, e in generale di fornire maggiori conoscenze e capacità. A questo scopo tutte le materie hanno incontrato dei cambiamenti, quelle umanistiche e quelle scientifiche. I temi maggiormente trattati sono stati la preparazione degli insegnanti, le modalità ed i tempi di insegnamento, i programmi scolastici e gli argomenti di carattere normativo, come l'obbligo scolastico e la sua graduale estensione.

Quel che affronteremo riguarderà esclusivamente la matematica e in particolare la trigonometria, ed analizzeremo il cambiamento dei programmi di questo settore della matematica nel corso della storia: cercheremo di capire il peso che si dava negli anni passati e quello che si dà oggi alla trigonometria, tentando di focalizzare la nostra attenzione sugli argomenti propri della

trigonometria, e su quelli ad essa connessi, che nel corso della storia hanno avuto maggiore interesse, a volte motivando tali scelte. Ricercheremo inoltre le modalità ed i tempi di insegnamento di questa materia, per comprendere l'importanza e la direzione che si è scelto di dare alla trigonometria. Tutti questi elementi ci saranno utili per confrontare le scelte istituzionali fatte nel corso degli anni, con il rapporto che gli studenti hanno con la matematica, ed in particolare con la trigonometria, che analizzeremo nel capitolo successivo presentando una sperimentazione da poco condotta: comprenderemo così se le modifiche apportate all'istruzione e all'insegnamento vanno incontro alle richieste, implicite o esplicite, degli studenti, nel senso di suscitare in essi un atteggiamento positivo, oppure, semplicemente, meno negativo.

2.1 Alcune precisazioni

Prima di iniziare il nostro percorso conviene fare una precisazione. Risulta di fatto impossibile fare un confronto preciso e dettagliato dei programmi, o in generale delle modifiche apportate all'istruzione: questo deriva dal fatto che riforme, decreti, o cambiamenti ed innovazioni ai quali ci riferiremo, sono tra di loro diversamente strutturati, nel senso che non presentano le stesse caratteristiche; perciò non è sufficiente paragonare gli elementi presenti nei programmi o altri fattori, ma utilizzeremo, quando necessario, delle derivazioni non esplicitamente dichiarate, che però si ritiene possano rispecchiare i fatti. Ad esempio, per meglio comprendere quanto appena detto, a differenza delle ultime indicazioni nazionali, in cui sono riportati i programmi di ogni anno scolastico del secondo ciclo, con la riforma Gentile non sono stati elaborati dei piani annuali, ma è stato fornito semplicemente l'insieme delle conoscenze che l'allievo è tenuto a sapere a conclusione della propria carriera scolastica, sotto forma di argomenti da possedere per il superamento dell'esame di Stato.

Premettiamo inoltre che l'analisi sarà condotta prendendo in considerazione il liceo scientifico, per due diversi motivi: innanzitutto il liceo scientifico è

senza dubbio una tra le scuole del secondo ciclo che presenta il numero di ore destinato alla matematica più elevato, quindi è normale che vi si possa affrontare ampiamente la trigonometria, in modo che siamo in grado di confrontare la sua trattazione anche nei casi in cui i cambiamenti normativi sono stati più forti; in secondo luogo il liceo scientifico è tra le scuole con una storia più lunga, nato prima della maggioranza delle scuole superiori, sia di tipo tecnico che liceale, di conseguenza ad esso sono stati apportati un elevato numero di cambiamenti, che costituiscono proprio ciò che vogliamo valutare.

Infine, prima di iniziare l'analisi delle modifiche apportate al liceo scientifico che riguardano la trigonometria, osserviamo anche che non sarà analizzata la totalità dei cambiamenti, ma soltanto quelli ritenuti, per motivi di programma scolastico, più importanti e radicali.

2.2 Il programma del 1860

Il primo vero programma della Scuola superiore italiana risale al 1860, sotto il ministro Mamiani, ed è riferito al corso liceale, allora unico. Considerando il “Programma per gli esami finali del corso liceale approvati con decreto luogotenenziale 17 novembre 1860 n. 4463” (<http://www.subalpinamathesis.unito.it/storiains/it/doc/1.pdf>), notiamo un programma in cui la trigonometria è trattata (in quanto alla forma del testo) come una principale sezione della matematica, al pari della geometria e dell'algebra; notiamo inoltre che non si tratta di un programma inteso come piano da seguire, ma non è altro che un elenco di ciò che l'allievo è tenuto a sapere per poter superare la prova finale. Se inizialmente non si riscontrano stranezze (eccezione fatta per particolari nomi usati per descrivere alcuni argomenti), cioè si ritrovano argomenti conosciuti e studiati regolarmente da molto tempo ormai, si nota, seguitando a leggere il programma, alcune stranezze, tra le quali spicca senza dubbio “*tavole dei logaritmi delle funzioni circolari*” e relativo impiego; o anche, ancora più avanti, tra lo studio e la risoluzione dei triangoli,

la voce probabilmente a molti ignota “*operazioni del terreno*”. Ci limitiamo ad analizzare brevemente soltanto il primo elemento evidenziato: si tratta di tavole che raccolgono il logaritmo di particolari (e numerosi) angoli; se da un lato la conoscenza di queste può essere utile in alcune occasioni pratiche, e per la risoluzione di alcuni problemi non elementari, si può certamente dire che veniva data notevole importanza all'imparare formule o regole della matematica a memoria, più che alla loro applicazione, alla loro derivazione e a prescindere dalla loro reale utilità. Questa tesi si evince anche da altri elementi presenti nel programma, come le tavole logaritmiche e le tavole esponenziali, che assumono però importanza se si fa presente che più di 150 anni fa, e anche per molto tempo dopo, non esistevano le calcolatrici oggi ampiamente diffuse, quindi poteva tornare comoda la conoscenza di queste tavole.

2.3 I primi anni del '900

Fino ai primi anni del 1900 lo studio della trigonometria nei licei è limitato al terzo anno se ci riferiamo al modello attuale di scuola superiore, primo se ci riferiamo alla struttura di quel periodo, in cui il liceo aveva la durata di tre anni, e le scuole medie erano prolungate con il IV e V ginnasio. Nel 1904 si ebbe una parziale svolta con la legge Orlando (http://it.wikipedia.org/wiki/Storia_dell'istruzione_in_Italia), nel senso che da quell'anno, fino ad una data non comune per tutti, scelta autonomamente delle singole scuole, la trigonometria venne studiata negli ultimi tre anni di liceo, distribuendo così la sua trattazione in un periodo più lungo (Vita, 1986): avendo più tempo a disposizione per lo studio di questo settore, si decise (senza una precisa normativa) di trattare anche la trigonometria sferica e le formule fondamentali a riguardo.

2.4 La riforma Gentile

Nel 1923 venne approvata la riforma Gentile, che prendeva il nome dall'allora Ministro della Pubblica Istruzione Giovanni Gentile. Anche se per molti versi con tale riforma, *“in sostanza, si voleva fare della scuola un canale di trasmissione delle idee e dei principi del fascismo”* (Patergnani, 2006), per altre caratteristiche essa fu positivamente rivoluzionaria: tra le modifiche più significative ricordiamo l'estensione dell'obbligo di istruzione fino a 14 anni di età e l'introduzione del liceo scientifico, della durata di quattro anni, e di altri indirizzi superiori. Per accorgersi dell'importanza di questa riforma basta notare che di fatto, fino a pochi anni fa, i programmi di matematica seguiti nei licei scientifici erano proprio quelli proposti da Gentile, sebbene le modalità e le ore di insegnamento siano state nel corso del tempo sottoposte a cambiamenti, ed i programmi stessi abbiano avuto delle rivisitazioni da parte delle scuole stesse, delle regioni o di altri enti, ma non direttamente con interventi ministeriali statali, eccezione fatta per l'abolizione di alcuni argomenti e l'inserimento di altri, come la teoria degli insiemi (http://it.wikipedia.org/wiki/Storia_dell'istruzione_in_Italia). In realtà si è già accennato precedentemente al fatto che quando ci riferiamo ai programmi della riforma Gentile stiamo intendendo un elenco di requisiti che l'allievo è tenuto a conoscere per poter superare la prova finale (esame di Stato) di matematica: in molti casi le regioni o le scuole hanno riadattato questo elenco ad un effettivo piano didattico che suddivide la totalità degli elementi da trattare per classi, suddivisione che precedentemente era lasciata a discrezione degli insegnanti. Per quanto riguarda il programma di trigonometria, si individuano (Ministero dell'Istruzione Pubblica, 1923) i seguenti argomenti: goniometria, trigonometria rettilinea, principali formule di trigonometria sferica e cenni sulla risoluzione dei triangoli sferici; si può facilmente osservare, analizzando i programmi seguiti dalle scuole da numerosi decenni ad oggi, che tra questi, lo studio della trigonometria sferica è stato abbandonato (per direttiva ministeriale). Ciò che fino a pochi anni fa veniva trattato di trigonometria, solitamente nella classe IV, si può sintetizzare (basandosi sui programmi propo-

sti da <http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/scientifico.html#MATEMATICA>) in “*Funzioni geometriche. Curve dei seni e delle tangenti. Formule per l’addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli argomenti. Qualche semplice equazione goniometrica. Risoluzione dei triangoli rettilinei*”.

2.5 L’indirizzo sperimentale P.N.I.

Col passare degli anni è aumentata sempre più la richiesta di studenti formati in ambito informatico. Per venire incontro a questa esigenza culturale, sociale, lavorativa ed universitaria, è stato fondato il piano nazionale per l’informatica, in breve chiamato P.N.I., introdotto per la prima volta nell’anno scolastico 1991-1992. Si tratta di fatto di un indirizzo sperimentale che andava di fatto ad affiancare o sostituire gli indirizzi, sia liceali che tecnici, precedentemente esistenti. Per quanto riguarda più nello specifico i licei scientifici, molte scuole hanno adottato tale indirizzo per alcune sezioni, o in alcuni casi, le sperimentazioni P.N.I. hanno preso il posto degli indirizzi di tipo scientifico, per intenderci, quelli regolamentati dalla riforma Gentile. Se l’introduzione di questo piano scolastico è giustificato ufficialmente dal voler introdurre lo studio dell’informatica, di fatto ha apportato numerosi cambiamenti ai sistemi scolastici in cui veniva introdotto: si riscontrano differenze in ambito di orari, di programmi, e di strumenti utilizzati nella quasi totalità delle materie; senza dubbio, tra le modifiche più rilevanti, è presente l’aumento del numero di ore destinate alla matematica e/o alla fisica, in base al tipo di indirizzo P.N.I. adottato, e di conseguenza anche l’ampliamento del programma, degli argomenti affrontati, e dell’approfondimento ad essi riservato.

Considerando quanto scritto nella Circolare Ministeriale del 6 febbraio 1991, n. 24, con oggetto il “Piano Nazionale per l’introduzione dell’Informatica nelle scuole secondarie superiori - Innovazione dei programmi di Matematica e Fisica nei bienni e nei trienni - Anno scolastico 1991-92” (<http://www>.

edscuola.it/archivio/norme/circolari/cm024_91.html), analizziamo le modifiche al programma di trigonometria che il liceo scientifico P.N.I. apporta rispetto a quello precedentemente in atto. Per prima cosa lo studio della trigonometria è intrapreso nel biennio, non più nel quarto anno; sono infatti presenti le voci “*coseno e seno degli angoli convessi. Relazione fra lati ed angoli nei triangoli rettangoli*”, ed è esplicitamente dichiarato il fatto che tali argomenti sono introdotti perché utili in altre materie scientifiche, gli alunni necessitano pertanto la loro conoscenza prima del quarto anno, inoltre l'approfondimento degli elementi citati è rimandato agli anni successivi. In secondo luogo, analizzando i contenuti proposti per il triennio, sotto la voce “*funzioni ed equazioni*”, compaiono le funzioni circolari, le formule di addizione e principali conseguenze, equazioni e disequazioni goniometriche, teorema del coseno e teorema dei seni, risoluzione dei triangoli. Nei commenti ai contenuti troviamo poi le frasi “*Per la determinazione dei valori delle funzioni goniometriche ci si avvarrà di strumenti automatici di calcolo. Nella risoluzione dei triangoli si farà esclusivamente ricorso al teorema del coseno ed al teorema dei seni*”; da queste affermazioni concludiamo che all'imparare a memoria valori o enunciati matematici non fondamentali a livello scientifico, si predilige lo sviluppo dei procedimenti mentali dello studente e l'impiego di strumenti elettronici per sopperire alla mancata memorizzazione di alcuni calcoli ed operazioni.

Mettendo momentaneamente da parte la trigonometria, ritroviamo la conclusione appena fatta anche in altri elementi: riportiamo a tale proposito una frase emblematica, che rappresenta probabilmente una svolta nei confronti del sistema scolastico messo in atto con la riforma Gentile: “*Riguardo alle equazioni algebriche di grado superiore al secondo si sottolinea l'opportunità di non insistere nella complessità e particolarità delle equazioni stesse, dovendosi privilegiare sempre, più che la risoluzione fine a se stessa, la comprensione delle loro caratteristiche e delle procedure da seguire*”. È evidente inoltre il desiderio di fornire all'allievo un numero elevato di nozioni fondamentali e conoscenze generali, evitando possibilmente casistiche inutili: si

vuole cioè fare in modo che i ragazzi siano preparati e pronti al ragionamento, e non alla memorizzazione priva di comprensione. Potremmo riassumere questa volontà espressa dalle indicazioni elaborate per gli indirizzi P.N.I. con il voler trasmettere ai ragazzi una visione relazionale della matematica, e non strumentale.

Altro elemento fortemente presente in tali indicazioni è la trattazione di argomenti che per molto tempo hanno rivestito scarso interesse in ambito scolastico, quasi nullo: ci riferiamo ad esempio alla probabilità ed alla statistica, ed agli elementi di informatica. Infine è presente il riferimento esplicito a metodologie d'apprendimento non solitamente diffuse: tra tutte spiccano il laboratorio di matematica e l'impiego di apparecchi elettronici e dell'informatica; ricordiamo che il primo metodo, il laboratorio di matematica, è considerato dagli esperti del settore, uno degli elementi più utili per affrontare e superare l'atteggiamento negativo degli studenti verso la matematica.

2.6 La riforma del 2010

2.6.1 Aspetti negativi dell'Istruzione precedente

Sebbene la sperimentazione P.N.I. abbia portato notevoli benefici alla Scuola Italiana, le sue metodologie, i suoi programmi e i suoi orari, non sono, secondo il parere di numerosi esperti, del tutto compatibili con gli obiettivi che la Scuola si prefigge: come esempio motivazionale a supporto di questa tesi ci limitiamo ad osservare che, mentre le materie scientifiche, soprattutto la matematica e la fisica, vengono in tale indirizzo studiate e trattate scrupolosamente, altre materie risentono dell'effetto contrario, cioè gli insegnanti di materie umanistiche in particolare, hanno a disposizione meno ore per le materie da loro affrontate; la conseguenza di questo discorso è l'impossibilità di ampliare a tutti i licei scientifici il piano nazionale dell'informatica, escludendo i piani precedentemente in vigore, notando che anche l'insegnamento di materie umanistiche ha notevole importanza per la formazione degli studenti e che la preparazione fornita da un liceo deve essere di carattere generale.

Osserviamo inoltre, che l'istituzione delle sperimentazioni, P.N.I. ed altre, ha contribuito a formare in Italia più modelli scolastici, riferendoci anche alla stessa tipologia di scuola: ad esempio, per quanto riguarda il liceo scientifico, è evidente la presenza di quelli che si rifanno alla riforma Gentile e di quelli sperimentali, e quindi anche la presenza di studenti con formazione differente pur avendo frequentato la stessa scuola. Bolondi (2010) mette in evidenza altri elementi negativi dell'Istruzione italiana di tipo gentiliana: *“D'altra parte, la cornice della riforma Gentile prevedeva un ruolo subalterno (e solo funzionalistico) agli insegnamenti delle discipline scientifiche, negandone di fatto il valore formativo: questo imprinting ha fatto sì che si sviluppasse una tradizione di insegnamento centrata spesso su tecnicismi ripetitivi, che ignorava i grandi nuclei concettuali e al tempo stesso non permetteva ai ragazzi di comprendere la centralità della matematica e dei suoi metodi nella moderna visione scientifica del mondo”,* e *“Buona parte del lavoro fatto in matematica da insegnanti e studenti, va detto, rischia di essere senza scopo e senza utilità”*. Per questi ed altri motivi si è deciso di attuare una nuova riforma dell'Istruzione, sotto forma di decreto del Presidente della Repubblica, entrato ufficialmente in vigore il 15 marzo 2010, preparata dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, in collaborazione con il Ministero dell'Economia e delle Finanze.

2.6.2 Descrizione della nuova riforma

Analizzeremo di seguito tale decreto, per mostrare le modifiche principali che apporta al precedente programma elaborato da Gentile nel 1923, di cui abbiamo parlato precedentemente, ed in particolar modo al programma di trigonometria del liceo scientifico. Prima però va fatta una precisazione: *“Nelle Indicazioni non si è voluto scrivere elenchi, sia pure suddivisi in conoscenze e abilità. Un elenco non sarebbe stato efficace, perché non è aggiungendo qualche voce a un elenco che si poteva rinnovare efficacemente il curriculum; inadeguato perché il collegamento tra conoscenze, abilità e competenze attese in uscita, in matematica, è qualcosa di molto articolato che*

una logica elencatoria non può rendere; e scorretto perché in matematica, a questo livello di approfondimento, queste distinzioni sono spesso artificiose, forzate, e non corrette da un punto di vista epistemologico" (Bolondi, 2010). Nel decreto è evidente la volontà di dare alla matematica un peso ed un impiego particolare: si fa riferimento ad una *"visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico"*, ad un *"processo di matematizzazione del mondo fisico"* e ad un *"nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche)"* (MIUR & MEF, 2010); Potremmo grossolanamente interpretare questi passaggi con il desiderio di contestualizzare la matematica, di renderla utile per materie diverse dalla matematica stessa.

Per quanto riguarda la trigonometria, ci limitiamo ad analizzare una sola questione, che per le sue caratteristiche è però molto importante e senza alcun dubbio dalle numerose conseguenze: lo studio della trigonometria, secondo le indicazioni dell'ultima e recente riforma, è limitato al solo biennio; verrà ripreso parzialmente nel triennio conclusivo soltanto per affrontare i numeri complessi e lo studio di funzioni. Richiamiamo le espressioni proprie del decreto: *"Saranno inoltre studiate le funzioni circolari e le loro proprietà e relazioni elementari, i teoremi che permettono la risoluzione dei triangoli e il loro uso nell'ambito di altre discipline, in particolare nella fisica"* (MIUR & MEF, 2010). In altre parole, si è deciso di affrontare la trigonometria in modo da renderla utile ed applicabile per altri scopi, fisici o matematici, ma in contesti diversi da quelli della trigonometria pura. Questa situazione conferma quanto detto in precedenza, conferma cioè il processo di matematizzazione che investe nuovi campi e una nuova visione dei rapporti tra la matematica e il mondo scientifico in generale. L'intenzione è quella di spogliare la matematica degli elementi inutili e in grado di togliere tempo prezioso all'apprendimento di conoscenze scientifiche generali. Sorprende anche la totale assenza della risoluzione di equazioni, disequazioni e sistemi di equazioni e disequazioni goniometriche, soprattutto se ricordiamo che nel

precedente sistema scolastico queste rappresentavano gran parte dello studio di trigonometria che veniva affrontato. Quasi sempre tali studi erano fini a se stessi, e non venivano impiegati in alcun altro settore scientifico.

Tutti questi elementi mettono in evidenza un aspetto più volte affrontato in questa tesi: l'importanza di far cogliere agli studenti una visione della matematica che mira alle relazioni e ai ragionamenti e non alla memorizzazione di formule e regole da applicare senza un chiaro motivo, l'importanza cioè di una visione relazionale della matematica; equivalentemente possiamo affermare che con questa riforma viene espressa l'esigenza di abbandonare una visione strumentale della matematica. Si tende anche a valorizzare l'idea di una matematica profonda ed utile. Abbiamo appreso nel capitolo precedente che tutti questi elementi sono fondamentali perché gli allievi sviluppino un atteggiamento sempre più positivo verso la matematica.

2.7 I cambiamenti di orario

Concludiamo questa analisi storica riportando le variazioni dei tempi scolastici destinati alla matematica, a partire da quelli proposti dalla riforma Gentile. Abbiamo già detto che il liceo scientifico è stato fondato nel 1923 con una durata di quattro anni. Più tardi però, successive riforme, hanno prorogato di un anno i suoi tempi, giungendo a quelli attuali. Per un confronto sensato ci riferiremo agli orari settimanali destinati alla matematica a partire da queste riforme. Per quanto riguarda la Scuola istituita da Gentile, e soltanto in parte modificata, durante il primo anno le ore di matematica settimanali erano cinque; diventavano quattro nel secondo e diminuivano fino a tre nel terzo, quarto e quinto anno. Per quanto riguarda invece la sperimentazione P.N.I., le ore destinate settimanalmente alla matematica erano cinque per ciascuno dei cinque anni di liceo; è però importante notare che nel primo biennio due di queste ore erano destinate allo studio dell'informatica, seppur affrontando questioni, temi o operazioni matematiche, quindi di fatto nel primo e nel secondo anno le ore prettamente di matematica erano sol-

tanto tre. Infine secondo la riforma attualmente in vigore, le ore settimanali da dedicare alla matematica sono cinque nel biennio e quattro nel triennio (MIUR, 2010).

Capitolo 3

La sperimentazione condotta per valutare l'atteggiamento

In questo capitolo analizzeremo i risultati di una sperimentazione condotta in una classe di un liceo scientifico, il cui scopo era di valutare l'atteggiamento degli studenti verso la matematica in generale ed anche verso la trigonometria. Ha avuto luogo nel mese di Febbraio del 2013.

3.1 Il contesto

L'attività di valutazione ha riguardato la classe IV, sezione G, indirizzo P.N.I., del liceo Scientifico A. Romita di Campobasso, Molise. La scelta è ricaduta su una classe IV perché, nel periodo in cui si è svolta l'analisi, stava trattando proprio la trigonometria: da diversi mesi gli alunni avevano a che fare con numerosi elementi trigonometrici (definizioni, teoremi, equazioni, problemi sui triangoli, ecc.), pertanto la parte di trigonometria della sperimentazione è stata affrontata agevolmente dagli studenti che avevano freschi ricordi e idee di tale argomento. La scelta della IV G è dovuta al fatto che l'autore di questa analisi (e di questa tesi) è stato alunno dell'insegnante di matematica di tale classe, la Professoressa Angela Saccone, ed ha con lei anche svolto l'attività di tirocinio precedentemente. La Professoressa Saccone

è stata disponibile ed interessata a questo tipo di attività, ed ha fatto sì che i ragazzi rispondessero al meglio alle richieste del lavoro proposto. Per meglio conoscere il contesto di questa classe l'appena citata Professoressa ha messo a disposizione il piano di lavoro da lei elaborato durante l'anno, di cui di seguito riportiamo la presentazione della classe (Saccone, 2013):

“La classe IV G è costituita da trentuno alunni, di cui venti maschi e undici femmine. Il gruppo classe è coeso ed il clima, per il momento corretto e sereno. In questo primo periodo di attività didattica si è potuto constatare come, nel complesso, l'attenzione sia costante e la partecipazione adeguatamente attiva. Dalle verifiche effettuate nel primo periodo dell'anno scolastico è risultata una situazione eterogenea. È presente un primo gruppo costituito da alunni che posseggono una preparazione di base discreta, capacità di comprendere la terminologia scientifica, capacità di applicare conoscenze per risolvere problemi, di utilizzare un linguaggio chiaro, appropriato, avvalendosi anche di simboli con un discreto impegno ed attenzione. C'è poi un secondo gruppo che, per le minori capacità o uno studio meno assiduo, ottiene risultati inferiori.”

3.2 Tipologia ed obiettivi della sperimentazione

La sperimentazione svolta è composta di due questionari, uno riguardante la matematica, ed uno riguardante la trigonometria. I questionari sono anonimi e si è scelto di non distinguere gli allievi in base al genere (maschile e femminile) e di conseguenza neanche i risultati, a causa del basso numero del campione di ragazzi considerato: le differenze riscontrate in tal modo non sarebbero state statisticamente rilevanti, soprattutto se si tiene conto del fatto che i ragazzi in classe sono in numero doppio rispetto alle ragazze (l'analisi di queste ultime in particolar modo sarebbe stata numericamente irrilevante). Quando i questionari sono stati proposti erano assenti due studenti, quindi il

campione analizzato è composto da 29 alunni. Di seguito sono riportati i due questionari ed alcuni commenti utili per comprendere e motivare le domande presenti.

3.2.1 Primo questionario

1. Et :
2. Elenca i voti ottenuti alla fine degli anni I, II e III:
3. Mediamente qual   il tuo voto di quest'anno (cio  quello che ti aspetteresti di ricevere dal tuo insegnante)?
4. Quanto ti piace la matematica in una scala tra 0 e 10? Se vuoi argomenta brevemente la tua risposta.
5. Quando affronti la matematica quali emozioni provi (odio, ansia, paura, timore, tristezza, piacere, gioia, ecc.)? E in quali contesti (a casa nel fare i compiti, durante la verifica, quando l'insegnante spiega, ecc.)?
6. Cosa pensi delle seguenti affermazioni? Secondo te sono vere o false? Se vuoi motiva la tua risposta.
 - La matematica sviluppa la logica.
 - Nella vita pratica la matematica   inutile.
 - Non user  mai gran parte degli argomenti studiati in matematica nella mia vita.
 - In matematica c'  un senso per ogni cosa.

- In un problema di matematica vanno usati tutti i dati presenti.

 - Dato un numero positivo, la moltiplicazione per un altro numero positivo lo accresce, la divisione lo diminuisce.
7. Quale visione della matematica è più vicina alla tua tra quelle proposte?
- La matematica è un insieme di formule e regole da applicare e di meccanismi utili per la risoluzione di alcuni problemi, matematici e non solo
 - La matematica è caratterizzata da relazioni, l'applicazione delle sue regole prevede la comprensione del motivo per il quale esse funzionano
8. La matematica è utile? Motiva la tua risposta.
9. La matematica è difficile? Motiva la tua risposta.
10. Cosa intendi per successo scolastico in matematica?
11. In base a quanto risposto in precedenza, in una scala da 0 a 10 come quantifichi il tuo successo?
12. Ritieni che modificando il tuo comportamento potresti avere più successo in matematica?
Sì No
13. Da cosa dipende il successo in matematica? Rispondi scrivendo di fianco ad ogni caratteristica elencata uno tra “molto”, “abbastanza”, “poco”, “per niente”:

- intelligenza
- impegno
- difficoltà della materia
- fortuna
- rapporto con l'insegnante
- richieste dell'insegnante
- metodo di studio
- basi solide
- fattori emotivi
- memoria
- capacità di concentrazione
- altro (specificare cosa)

14. Pensi che ci sia un legame tra le tue opinioni sulla matematica, le emozioni che provi nel farla e il successo o l'insuccesso in matematica? Se sì, in che modo?

15. Pensa al rapporto tra te e la matematica da quando hai intrapreso la carriera scolastica ad oggi. Come potresti riassumerlo (scegliendo tra uno dei seguenti)?

- costantemente alto
- costantemente basso
- alti e bassi
- in calando
- in crescendo

16. Qualora ci siano stati cambiamenti in negativo nel rapporto tra te e la matematica, questi sono stati gradualmente o ci sono stati dei “punti di svolta” decisivi che lo hanno peggiorato?

17. Se all’ultima domanda hai risposto con “punti di svolta”, a cosa o chi ne attribuisce la causa? Riesci a riportare un esempio di tale esperienza?

Analisi del questionario

Le domande riguardanti la definizione di atteggiamento Come detto, la finalità del questionario appena riportato è di valutare l’atteggiamento degli studenti verso la matematica, ed il rapporto che hanno con essa. Nel primo capitolo abbiamo analizzato ampiamente l’atteggiamento: abbiamo dato, con non poche difficoltà, diverse definizioni, e tra queste quella multidimensionale, che aveva come componenti le reazioni emozionali, le credenze sulla materia e il comportamento associato ad essa; abbiamo detto anche che la definizione forse più sensata di atteggiamento negativo considera come tale l’atteggiamento per il quale almeno una delle componenti sia negativa, in caso contrario esso sarà positivo. Per questo motivo un primo obiettivo del questionario è di valutare singolarmente questi tre fattori, così da poter dare un giudizio totale sull’atteggiamento.

In particolare, le domande 4 e 5 mirano alla conoscenza delle disposizioni emozionali dei ragazzi (prima componente della definizione). La sesta domanda presenta diverse idee sulla matematica, e si vuole da queste giudicare le credenze (altra componente della definizione tridimensionale) riguardanti la matematica: si è scelto a tal fine di far giudicare agli studenti se le frasi proposte sono vere o false; la scelta delle frasi riportate in questa domanda è stata fatta tra le credenze principalmente diffuse e ritenute più importanti (alcune in realtà, più che credenze, sono misconcezioni abbastanza diffuse). Ricordando che il comportamento associato alla matematica (ultima componente della definizione) è valutato positivamente in caso di successo, negativamente in caso di insuccesso, la domanda 11 è posta proprio per poter

dare un giudizio su di esso. La domanda precedente invece, numero 10, ha lo scopo di conoscere l'idea che gli studenti singolarmente hanno di successo: abbiamo infatti distinto, sempre nel primo capitolo, diversi tipi di successo, a seconda di motivazioni estrinseche o intrinseche dell'allievo. Anche le domande 2 e 3 si pongono l'obiettivo di valutare il successo dei ragazzi, ma nell'ottica dell'insegnante, e non dello studente stesso, assumendo implicitamente che i voti che l'insegnante attribuisce agli alunni corrispondano al livello di successo in matematica che l'allievo ha secondo il docente.

Le domande riguardanti il modello di atteggiamento Nel primo capitolo abbiamo anche elaborato un modello per l'atteggiamento, in cui le componenti presenti sono le disposizioni emozionali nel fare matematica, il senso di auto-efficacia degli studenti nei confronti di questa materia, e la visione degli allievi riguardo ad essa: ricordiamo che tale modello è stato creato in base all'analisi delle relazioni tra le componenti appena citate. Come fatto per l'atteggiamento valutato attraverso la definizione, allo stesso modo si sono introdotti i profili di atteggiamento di tipo negativo e positivo, nei casi in cui rispettivamente almeno una componente è valutata negativamente e tutte le componenti sono di carattere positivo. Anche questa volta si è scelto di analizzare separatamente ogni fattore attraverso domande diverse.

Per quanto riguarda le reazioni emozionali, le domande atte a valutarle sono di nuovo la numero 4 e la numero 5. Le domande 7, 8 e 9 hanno lo scopo di valutare la visione che gli studenti hanno della matematica: la prima di queste richiede la scelta tra una visione strumentale ed una relazionale, anche se non esplicitamente, mentre le altre due suggeriscono aspetti della matematica rilevanti, quali l'utilità e la difficoltà. Le domande 12 e 13 riguardano il senso di auto-efficacia. La numero 12 vuole far esplicitare all'allievo a cui è posta la convinzione che ha di poter migliorare il proprio rendimento; quella successiva ha l'obiettivo di far comprendere quali siano, secondo lo studente, i fattori che maggiormente influenzano il successo in matematica. La domanda numero 14 conclude lo studio sull'atteggiamento dello studente verso la

matematica condotto attraverso il modello: l'intenzione è quella di avere una idea costruita dall'allievo riguardo al modello stesso, infatti viene proposto di riflettere brevemente sulle connessioni tra le tre componenti (emozioni, visione della matematica e senso di auto-efficacia), seppur riportate in modo molto semplificato.

Le domande riguardanti l'evoluzione del rapporto con la matematica Infine, nel primo questionario, sono presenti tre domande (le ultime) con lo scopo di rendere noto lo sviluppo dell'atteggiamento della matematica durante gli anni di scuola dell'obbligo. Di fatto la numero 15 era preposta alla conoscenza dell'andamento del rapporto con la matematica nel tempo; la numero 16 chiede di che tipo siano stati gli eventuali cambiamenti peggiorativi avvenuti; la numero 17 ha l'obiettivo di far conoscere la causa di tali peggioramenti.

3.2.2 Secondo questionario

1. Et :
2. Qual   mediamente il tuo voto ottenuto in compiti ed interrogazioni (o altri metodi di valutazione utilizzati) sulla trigonometria (quello che ti aspetteresti di ricevere dall'insegnante per giudicare le tue capacit  in trigonometria)?
3. Quanto ti piace la trigonometria in una scala tra 0 e 10? Se vuoi argomenta brevemente la tua risposta.
4. Quando affronti la trigonometria quali emozioni provi? E in quali contesti?
5. Quale delle due visioni della trigonometria di seguito riportate senti pi  tua?
 - La trigonometria   un insieme di formule e regole da applicare e di meccanismi utili per la risoluzione di alcuni problemi, matematici e non solo \square
 - La trigonometria   caratterizzata da relazioni, l'applicazione delle sue regole prevede la comprensione del motivo per il quale esse funzionano \square
6. Motiva con esempi, oppure argomentando, l'ultima risposta.
7. La trigonometria   utile? Motiva la tua risposta.

8. La trigonometria è difficile? Motiva la tua risposta.
9. Ritieni che modificando il tuo comportamento potresti avere più successo nella trigonometria?
Sì No
10. Da cosa dipende il successo in trigonometria? rispondi scrivendo di fianco ad ogni caratteristica elencata uno tra “molto”, “abbastanza”, “poco”, “per niente”:
- intelligenza
 - impegno
 - difficoltà della materia
 - fortuna
 - rapporto con l’insegnante
 - richieste dell’insegnante
 - metodo di studio
 - basi solide
 - fattori emotivi
 - memoria
 - capacità di concentrazione
 - altro (specificare cosa)
11. Pensi che ci sia un legame tra le tue opinioni sulla trigonometria, le emozioni che provi nel farla e il successo o l’insuccesso in trigonometria?
Se sì, in che modo?

Analisi del questionario

Il secondo questionario è strutturato in modo simile al primo, ma, come detto in precedenza, riguarda esclusivamente l’atteggiamento dei ragazzi

verso la trigonometria. Una delle poche differenze strutturali sta nel fatto che sono assenti le domande riguardanti le componenti della definizione tri-dimensionale dell'atteggiamento. Si è deciso cioè di valutare l'atteggiamento verso la trigonometria esclusivamente attraverso il modello che abbiamo elaborato. La causa principale di questa scelta deriva dall'assenza di credenze rilevanti sulla trigonometria studiata dai ragazzi, eccezione fatta per questioni trigonometriche fondamentali per le quali si ritiene che i ragazzi abbiano sviluppato idee corrette.

Questa volta la seconda domanda è stata posta esclusivamente per misurare le capacità degli allievi e non il successo come componente dell'atteggiamento. Le domande 3 e 4 misurano le reazioni emozionali. Le domande numero 5, 7 e 8 servono ancora per valutare la visione, questa volta non della matematica, ma della trigonometria. La domanda numero 6, unica non presente nel primo questionario, è stata proposta con l'obiettivo di far comprendere la motivazione della visione che gli studenti hanno della trigonometria. Le domande seguenti, numero 9 e 10, presenti anche nel questionario precedente, vogliono valutare il senso di auto-efficacia rispetto alla trigonometria e il peso che diversi fattori hanno nel successo. L'ultima domanda, la numero 11, è stata posta, anche in questo caso, per comprendere se e come gli studenti riscontrano verità nel modello di atteggiamento (verso la trigonometria) elaborato nel primo capitolo.

3.3 I risultati della sperimentazione

3.3.1 Alcune premesse

Come si può facilmente notare leggendo le domande, agli studenti è stato richiesto di rispondere a molte domande, spesso chiuse, commentando le proprie risposte: abbiamo parlato infatti di come sia importante, per comprendere nei ragionamenti degli studenti, non limitarsi a porre domande a scelta multipla, ma lasciare loro la libertà di parlare apertamente; non è stata scelta la modalità tema perché difficilmente gli studenti avrebbero trattato,

pur scegliendo opportunamente la traccia, tutti gli argomenti ai quali siamo interessati in questo lavoro. I commenti e le motivazioni ottenute lasciando discutere gli allievi meritano delle osservazioni.

Un fattore rilevante che contraddistingue numerosi questionari svolti dai ragazzi è costituito dalla loro voglia di esprimersi. Tale desiderio per alcuni versi deriva dal voler chiarire le proprie posizioni espresse attraverso le risposte secche proposte nei questionari, quindi si trovano sia motivazioni a supporto della risposta, ma anche argomentazioni che collocano spesso le idee degli studenti in posizioni trasversali rispetto a quelle più drastiche: ad esempio, quando la domanda prevedeva risposte del tipo “sì” e “no”, in alcuni casi gli studenti si sono espressi a metà tra le due possibilità, scrivendo “più o meno”, “un po’ e un po’ ” o risposte simili concettualmente a queste. Per altri versi è evidente il desiderio di alcuni studenti di far conoscere le proprie opinioni e posizioni ad altri, di far capire le cause del loro modo di affrontare la matematica, e di raccontare fatti accaduti o la propria visione della matematica o della scuola in generale, intesa come istituzione e non come luogo fisico. Se da un lato questo desiderio fa sì che il lettore possa venire a conoscenza di molte informazioni utili, non esplicitamente richieste, dall’altro si ritrovano numerosi racconti e frasi non pertinenti con lo scopo dell’attività, sebbene possano essere utili per altri tipi di studi. Inoltre non sono rari i casi nei quali gli studenti, nel tentativo di chiarire ed esprimere meglio la propria posizione, finiscono per creare confusione a quanto scritto, creando un mix di informazioni non collegate tra loro, o addirittura contrastanti: è evidente il voler scrivere frettolosamente per inserire il maggior numero di dati che passano per la testa nell’affrontare una determinata questione sollevata dalla domanda alla quale si sta rispondendo. In contrasto con quest’ultima situazione sono le risposte che presentano cancellature o correzioni: viene spontaneo motivare questi casi con l’attenzione posta alla domanda da parte dello studente e con la riflessione accurata che lo porta a mettere in dubbio le idee precedentemente scritte.

Questi ed altri motivi hanno reso difficile l’analisi delle risposte. Per poter

rendere confrontabili le differenti risposte date si è spesso stati costretti ad associare a risposte complesse altre di forme più brevi e semplificate, ricercando connessioni concettuali spesso non ovvie. Per questo motivo l'autore di questa tesi ha riscontrato notevoli difficoltà nell'interpretare le singole risposte, ed ha utilizzato a volte delle assunzioni e delle relazioni causali non direttamente espresse dagli studenti. Per comprendere meglio quanto appena detto riportiamo, a titolo esemplificativo, una espressione tratta da una risposta alla domanda numero 5 (sulle emozioni) data da un allievo: “*durante i compiti in classe però sono presa dalla fretta di svolgere esercizi e mi perdo*”; per catalogare questa risposta tra le diverse emozioni, si è deciso di associare tale situazione all'ansia che si ha nello svolgere le verifiche; tale assunzione deriva dal ritenere la fretta conseguenza dell'ansia, e anche l'espressione “mi perdo” la si ritiene direttamente causata da uno stato mentale non caratterizzato da calma e tranquillità, che permetterebbe altrimenti una analisi ben ponderata del problema e una migliore riuscita. Le difficoltà di interpretazione avute sono derivate anche da scelte linguistiche non sempre ottimali da parte degli studenti: più che sulla forma e sul linguaggio, si sono concentrati sui contenuti.

Infine precisiamo che si è tenuto conto soltanto delle informazioni pertinenti con il tema di questa tesi, escludendo completamente affermazioni non connesse ad essa.

3.3.2 Analisi delle risposte

Riporteremo in questa sezione esclusivamente l'analisi delle risposte date dai ragazzi ai questionari, omettendo, per il momento, i risultati generali sull'atteggiamento e le connessioni tra le diverse risposte.

Primo questionario

Il primo questionario è stato svolto da 29 studenti di età compresa tra i 17 (23 studenti) e i 18 (i restanti) anni. Tra questi, la media tra i voti degli anni precedenti al quarto è circa 7: sono presenti molti studenti con media

6 oppure 7, soltanto sei con media 8 e due con media rispettivamente 5 e 9. Per quanto riguarda i voti ottenuti nel corrente anno scolastico, la tendenza è simile a quella degli anni precedenti, con un lieve calo tra i ragazzi che avevano 7 e un aumento equivalente dei ragazzi con voto medio attuale 9.

Disposizioni emozionali Quasi tutti i ragazzi hanno affermato di provare piacere nei confronti della matematica, assegnando alla domanda numero 4 un numero tra il 7 e il 10 (tra questi sei 9 e due 10), mentre soltanto due allievi hanno espresso gradimento non elevato (6) ed uno si è espresso negativamente (4). Le emozioni degli studenti sono state raccolte quantitativamente nella seguente tabella a doppia entrata. In essa le celle vuote indicano che nessuno studente si è riferito a quel particolare contesto con quella particolare emozione. Il numero totale delle emozioni presenti supera il numero di studenti, in quanto molti hanno espresso più di una emozione in differenti contesti. Si nota facilmente che l'ansia nello svolgere le verifiche e durante le interrogazioni è l'emozione condivisa da più studenti (quasi la metà del campione).

		EMOZIONE							
		Tranquillità	Interesse	Piacere	Gioia	Noia	Ansia	Paura	Odio
CONTESTO	Verifica			1			13	4	
	Interrogazione						6	2	1
	Compiti a casa	4		4	4				
	Spiegazioni		1	1	4	1	1		
	Nuovo argomento						1		
	Di solito	3		2					
	Sempre			1					

Credenze Riguardo alle credenze tutti gli studenti ritengono che la matematica sviluppi la logica; soltanto cinque ritengono che la matematica sia inutile nella vita pratica al contrario dei restanti 24; circa la metà degli della

classe (15 alunni) crede che non si ritroverà mai ad usare gran parte degli argomenti studiati in matematica nella propria vita a differenza dell'altra metà del gruppo; soltanto due allievi non ritengono che in matematica ci sia senso per ogni cosa; 10 ragazzi credono che nei problemi di matematica vadano usati tutti i dati presenti; infine 7 hanno affermato erroneamente che il prodotto accresca e la divisione diminuisca.

Visione della matematica Analizzando i risultati sulla visione della matematica degli studenti, sebbene soltanto 8 studenti ammettano di avere una visione di tipo strumentale, in diversi casi, tra quelli che hanno scelto la visione relazionale, si nota da risposte ad altre domande come, secondo loro, l'unica cosa importante in matematica sia l'applicazione delle regole memorizzate. Altri invece sottolineano quanto sia indispensabile cogliere le motivazioni delle formule studiate.

La matematica è inoltre ritenuta utile dalla gran parte degli studenti della classe, per la precisione 26 su 29: tra questi, alcuni ritengono sia utile per sviluppare la logica, altri per ambiti economici ed altri ancora per affrontare qualsiasi carriera universitaria; pochi però fanno riferimento alla sua utilità nella vita quotidiana. Colpisce in particolare la frase *“la matematica fa ruotare il mondo, come potrebbe non essere utile?”*, scritta da un ragazzo con voti non alti, solitamente intorno al 6.

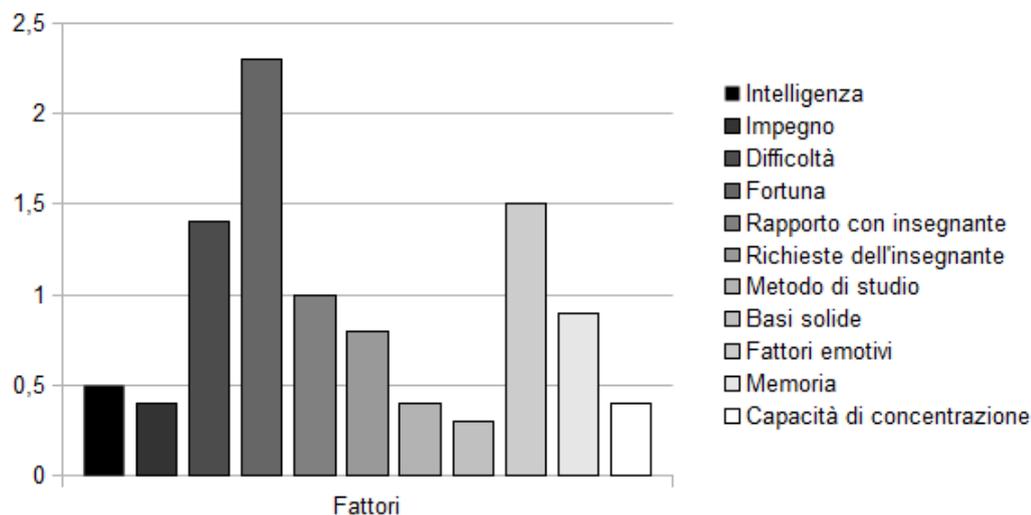
Per quel che riguarda la difficoltà della matematica la classe è quasi perfettamente spaccata a metà (14 sì e 15 no). Tra coloro che hanno risposto “no” è però diffusa l'idea che la matematica studiata a livello universitario in facoltà scientifiche sia di gran lunga più difficile di quella della scuola dell'obbligo: viene vista quasi come uno scoglio insuperabile.

Successo Nell'analisi del tipo di successo (domanda 10) la situazione è analoga a quella riferita alla domanda precedente: 14 ragazzi hanno una motivazione di tipo intrinseco, 15 di tipo estrinseco. Tra i primi viene spesso esplicitata la chiara indipendenza tra successo e voto ottenuto (troviamo ad esempio *“riuscire a capire e a sviluppare le proprie capacità e a sfruttarle*

al massimo indipendentemente dal voto"); a volte inoltre è evidente che il successo sia legato alla capacità di utilizzare la matematica nella vita quotidiana per trarne beneficio (*"riuscire a comprendere la matematica e saperla utilizzare nella vita quotidiana per i nostri vantaggi"*).

Nonostante il successo sembri per molti legato ad una visione relazionale, esso viene quantificato da molti con i voti ottenuti: si ritrova in numerosi questionari la corrispondenza tra i voti ottenuti negli ultimi anni o quest'anno ed il livello di successo quantificato dai ragazzi stessi.

Senso di auto-efficacia Il senso di auto-efficacia è positivo per la stragrande maggioranza di alunni che hanno svolto il campione: soltanto 7 di essi (meno del 25%) ritengono di non poter far nulla per migliorare il proprio rendimento, e tra questi alcuni hanno risposto in questo modo perché ottengono già ottimi risultati (in termini di successo) ed è inesistente un livello di successo superiore di quello che ritengono avere. Per poter comprendere quali fattori, secondo gli studenti, influenzano maggiormente il successo, cioè quelli che rivestono più importanza nell'auto-efficacia, si è pensato di elaborare un grafico in cui sull'ascissa ci sono i diversi fattori, e sull'ordinata è espressa l'importanza data: tale importanza è calcolata, su una scala tra 0 e 3, attraverso la media dei giudizi di tutti gli allievi. L'importanza è tanto maggiore quanto più l'altezza dei rettangoli è vicina a 0, quindi i rettangoli più alti esprimono, per il fattore corrispondente, scarsa importanza attribuita a tale fattore nell'influire sul successo.



Osservando il grafico si nota che i fattori ritenuti la causa del successo e dell'insuccesso sono principalmente, in ordine di importanza, l'aver basi solide, l'impegno, il metodo di studio, la capacità di concentrazione e l'intelligenza: colpisce quest'ultimo in particolar modo perché, indirettamente, gli studenti ritengono che la matematica sia una materia destinata a poche persone, quelle che sono dotate di una intelligenza spiccata, seppure di tipo esclusivamente matematico; in altre parole, chi ha successo ritiene di avere una dote particolare, mentre chi è solito ad avere insuccessi in matematica ritiene di non essere portato per questa materia, e ciò può avere conseguenze drammatiche come il rifiuto dell'apprendimento oppure un blocco emotivo. Tra i fattori ritenuti invece meno importanti per poter raggiungere il successo spicca la fortuna, considerata poco o per nulla decisiva dal 90% degli studenti rispondenti.

Relazioni tra le componenti del modello Per quanto riguarda la domanda numero 14 sull'esistenza di relazioni tra le disposizioni emozionali, il senso di auto-efficacia e la visione della matematica, si pensava a priori di non ottenere risposte affermative da parte degli studenti per la complessità della questione. In realtà si evince il contrario: più della metà degli studenti (20 su 29) hanno appoggiato l'esistenza di legami. Molti hanno espresso e

giustificato una relazione causale tra il gradimento della matematica e la possibilità di riuscita; altri hanno ipotizzato l'esistenza della relazione inversa ed altri ancora hanno evidenziato come la visione della matematica influisce sulle capacità di influenzare il rendimento. È forse utile citare a tal proposito alcuni concetti elaborati dai ragazzi: *“se fossi insoddisfatta del mio rendimento probabilmente non mi accosterei allo studio di questa disciplina con interesse e voglia di apprendere”*, *“quando provo piacere studiando un argomento mi riesce sempre meglio fare un compito o una interrogazione al contrario di quando un argomento mi fa provare ansia e paura”*, *“se si studia la matematica con gioia e passione e si è convinti che sarà molto utile nella vita, ci si impegnerà al massimo per raggiungere ottimi risultati e ottimo successo”*.

L'evoluzione del rapporto con la matematica Analizziamo ora la parte conclusiva del primo questionario, quella riguardante l'evoluzione del rapporto con la matematica. La tabella seguente indica la frequenza dei tipi diversi di evoluzione del rapporto con la materia scelti dai ragazzi.

Tipo di rapporto				
Costantemente alto	Costantemente basso	Alti e bassi	In calando	In crescendo
6	1	14	3	5

Sicuramente positiva è la scarsa frequenza delle risposte del tipo “costantemente basso”, anche se deve far riflettere il fatto che soltanto 11 alunni abbiano un rapporto costantemente alto o in crescendo con la matematica. Tra i ragazzi che hanno avuto nel corso della loro carriera scolastica dei peggioramenti in questo ambito, dieci hanno affermato che tali cambiamenti sono stati causati da singoli eventi, e non sono stati gradualmente nel tempo. Per i ragazzi, gli artefici del peggioramento sono quasi sempre gli insegnanti; non manca però chi ne attribuisce la causa al proprio impegno, alla mancanza di metodo di studio, all'ansia o ad altre emozioni negative (lo si evince ad esempio leggendo *“per alcuni periodi di tempo non sopportavo il fatto di non comprendere alcune nozioni”*).

Secondo questionario

Il secondo questionario è stato svolto dagli stessi allievi che hanno svolto il primo, quindi le età dei ragazzi sono identiche. Molti studenti (6 per la precisione) non hanno riportato alcun voto nella prima domanda in quanto non sono stati valutati né attraverso verifiche, né attraverso interrogazioni o altro. Gli altri invece hanno espresso un rendimento (in termini di voto) leggermente superiore rispetto agli anni precedenti: una sola insufficienza, dodici tra 6 e 7, cinque 8 e ben cinque 9.

Disposizioni emozionali Il gradimento della trigonometria è altalenante, pochi studenti si sono espressi con mezze misure: si ritrovano nelle risposte alla terza domanda otto 9, dieci 8, quattro insufficienze anche gravi e solamente sette valutazioni comprese tra il 6 e il 7. Rispetto al gradimento espresso per la matematica si notano numerosi cambiamenti drastici, con uno scarto di almeno due voti, di tipo peggiorativo e migliorativo quasi nelle stesse quantità. Anche questa volta si è scelto di riassumere le emozioni che provano gli studenti nell'affrontare la trigonometria in una tabella:

		EMOZIONE							
		Tranquillità	Interesse	Piacere	Gioia	Noia	Ansia	Rabbia	Odio
CONTESTO	Verifica						5		
	Interrogazione								
	Compiti a casa	2	3	1	2			2	1
	Spiegazioni		4		1	1			
	Di solito			2	1				
	Sempre		2	3	3				

Tra i fattori manca il nuovo argomento, dato che nessuno studente si è espresso riguardo ad esso, forse perché molti considerano ragionevolmente la trigonometria stessa un argomento nuovo della matematica quindi questa voce avrebbe poco senso. Tra le emozioni, rispetto alla tabella analoga proposta nell'analisi del primo questionario, è stata sostituita la colonna riferita alla

paura (nessun ragazzo l'ha nominata) con la colonna della rabbia citata più volte. È sicuramente sorprendente la diminuzione dell'ansia da compito o interrogazione rispetto ai dati riguardanti la matematica, e anche l'aumento di interesse, piacere e gioia in diversi ambiti didattici: potremmo riassumere brevemente tali dati raccolti con l'aumento dell'indice di gradimento e del numero di reazioni emozionali positive, a discapito di quelle negative. Adirittura, anche se non riportato in tabella, uno studente ha ammesso di provare un senso di amore nell'affrontare i compiti a casa e nel seguire la spiegazione. In conclusione all'analisi delle disposizioni emozionali, tra le varie risposte, due allievi hanno confessato di provare un senso di sfida nell'affrontare la trigonometria, sfida verso se stessi e verso gli altri, soprattutto nello svolgere i compiti a casa e durante la verifica: conveniamo nel ritenere ottimo questo fattore nel favorire l'impegno, ma pericoloso nell'ottica di una matematica indispensabile in più ambiti non scolastici, in quanto si rischia di indirizzare lo studio verso la riuscita e l'esito delle prove svolte, e non verso la profondità, l'importanza e l'utilità dell'apprendimento.

Visione della trigonometria Per quanto riguarda la domanda numero 5, soltanto nove ragazzi associano la loro visione a quella di tipo strumentale, e 20 (più di un terzo del campione di ragazzi) a quella di tipo relazionale. In realtà, anche in questo caso, da argomentazioni riportate in altre domande risulta evidente l'idea che molti allievi hanno di una trigonometria intesa come un insieme di formule da imparare a memoria e da applicare per la risoluzione degli esercizi, soprattutto quando si parla di equazioni goniometriche; questa idea trova conferma nell'analisi dei fattori che influiscono sull'auto-efficacia: per molti ragazzi, quasi la metà dell'intera classe, la memoria riveste in trigonometria un ruolo fondamentale, di primaria importanza, ancor più che nella matematica in generale.

Tra le motivazioni date dai ragazzi a proposito della risposta data alla domanda appena analizzata, riscontriamo diversi particolari degni di nota. Innanzitutto, tra i ragazzi più vicini ad una visione strumentale della trigonometria,

è molto diffusa l'idea che di fatto la trigonometria consista nell'applicazione delle formule imparate: ritengono non solo che esse costituiscano la base necessaria per la risoluzione di problemi ed esercizi, ma anche che le questioni alle quali si applica nella vita non didattica la trigonometria si riconducano alla semplice applicazione di formule note. Invece, tra coloro che hanno sottolineato l'idea di una visione relazionale della trigonometria, sono diffusi i pensieri *“qualunque argomento venga affrontato deve essere capito, appreso non in maniera meccanica”*, oppure *“se non capisci perché una determinata regola funziona non comprenderai bene la trigonometria”* (tratti da due dei questionari svolti); altri ancora ritengono che la semplice memorizzazione e applicazione delle formule sia inutile ed anche più difficile, ai fini del loro impiego, della loro comprensione: tra le risposte più significative in tali ambiti è presente la frase *“bisogna capire le relazioni tra gli elementi per non farne un uso sterile”*.

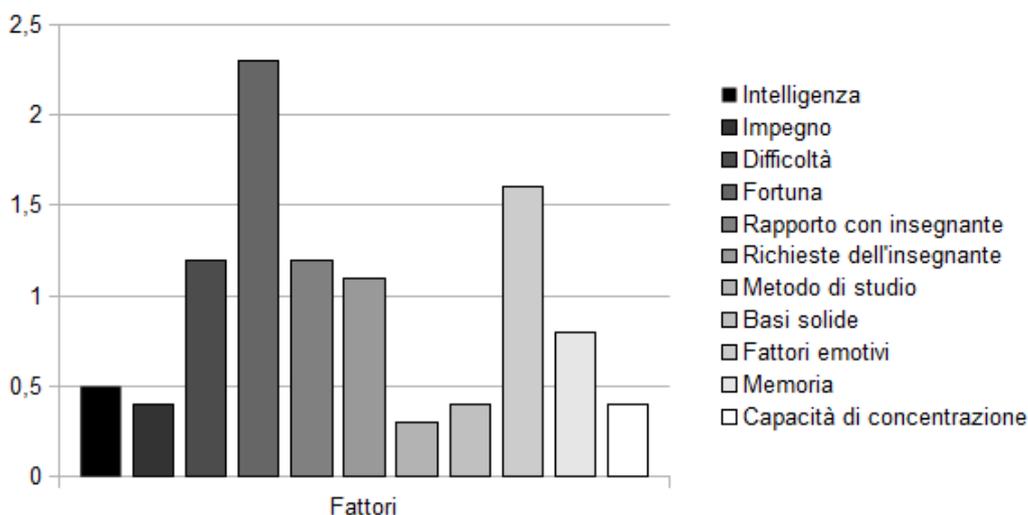
La trigonometria è ritenuta utile da circa i due terzi degli alunni della classe, anche se facendo attenzione alle risposte date si osserva tra questi chi si riferisce ad una utilità prettamente scolastica o accademica per particolari indirizzi universitari.

La classe si divide a metà nel giudicare la difficoltà della trigonometria. Tra chi si schiera verso la scarsa difficoltà di tale argomento alcuni ritengono che l'importante sia conoscere e riuscire ad applicare le formule giuste.

Senso di auto-efficacia Nel rispondere alla domanda numero 9, meno del 25% dei ragazzi ritiene di non avere le possibilità di aumentare il proprio successo: come detto per la domanda analoga posta nel primo questionario, tra questi studenti contraddistinti da apparente senso di auto-efficacia negativo si collocano coloro i quali hanno già raggiunto l'apice del successo in trigonometria e non esiste quindi per essi la possibilità materiale di migliorare; precisiamo però che altri che hanno risposto negativamente a questa domanda hanno riportato valutazioni fortemente negative.

Proponiamo anche questa volta un grafico per esprimere il peso medio che

gli allievi attribuiscono ai fattori proposti nella domanda 10, ricordando che l'avvicinarsi a 0 dell'altezza dei rettangoli indica il considerare il corrispondente fattore molto importante; i valori variano nell'intervallo compreso tra 0 e 3.



Si osserva dal grafico che, anche in questo caso, i fattori determinanti il successo o l'insuccesso, secondo i ragazzi, sono il metodo di studio, la capacità di concentrazione, l'aver basi solide, l'impegno e l'intelligenza, mentre quello di gran lunga meno rilevante è la fortuna. Come già detto precedentemente, è importante notare il lieve aumento dell'importanza della memoria, soprattutto nell'ottica della visione della trigonometria, propria degli allievi, più indirizzata verso quella strumentale rispetto a quella associata alla matematica.

Relazioni tra le componenti del modello Riguardo all'ultima domanda proposta, la risposta privilegiata è stata quella affermativa, seppur con poco scarto. Dalle risposte date successivamente alla stessa domanda si riscontra quasi sempre una relazione causale tra le disposizioni emozionali e il senso di auto-efficacia del tipo "riesco perché mi piace", ma è presente anche l'implicazione contraria. Soltanto un allievo ha evidenziato il legame tra il gradimento e la visione della matematica del tipo "mi piace per quel che la trigonometria è per me".

3.3.3 Valutazione dell'atteggiamento

Cercheremo ora di valutare l'atteggiamento degli studenti verso la matematica e verso la trigonometria, analizzando complessivamente i risultati dei questionari. Per quanto riguarda l'atteggiamento verso la matematica, esso sarà studiato in due modi: tenendo conto della definizione tridimensionale di atteggiamento data nel primo capitolo di questa tesi, e in seguito tenendo conto del modello elaborato nello stesso capitolo. L'atteggiamento verso la trigonometria sarà invece valutato esclusivamente attraverso lo studio delle componenti del modello.

L'atteggiamento verso la matematica secondo la definizione

Ricordiamo che si è scelto di valutare negativamente l'atteggiamento nel caso in cui almeno una delle tre componenti che compaiono nella definizione (disposizioni emozionali, credenze, comportamento) sia di tipo negativo. Quindi cercheremo di distinguere gli studenti caratterizzati da emozioni, credenze e comportamento verso la matematica positivi, con quelli per i quali almeno uno dei tre fattori risulta negativo.

Per quanto riguarda le disposizioni emozionali, esse saranno ritenute positive nei casi in cui gli studenti abbiano risposto alla quarta domanda con un voto non inferiore a 6 e non abbiano espresso, nel rispondere alla domanda successiva, una frequente emozione negativa (ansia, paura, odio, rabbia, ecc.) nell'affrontare la matematica, mentre le riterremo negative in caso di voti insufficienti assegnati all'indice di gradimento o (almeno una delle due situazioni) abbiano fatto intendere di provare costantemente o molto spesso emozioni negative.

Per giudicare le credenze degli alunni che si sono sottoposti al questionario riterremo che il rispondente abbia delle credenze negative riguardanti la matematica quando almeno due delle sei affermazioni proposte siano discordanti rispetto alle opinioni condivise dagli esperti, di seguito riportate: la matematica sviluppa la logica, nella vita quotidiana la matematica è utile, gran parte degli argomenti studiati in matematica vengono utilizzati nell'af-

frontare questioni di vita non scolastica, in matematica c'è un senso per ogni cosa, in un problema di matematica non vanno utilizzati necessariamente tutti i dati presenti, è sbagliato credere che la moltiplicazione abbia funzione di accrescimento e la divisione di diminuzione (basta considerare prodotti o rapporti con numeri compresi tra 0 e 1); si è optato per questo tipo di valutazione perché alcune risposte “errate” potrebbero essere state date per fretta, lettura superficiale, o non profonda comprensione delle affermazioni e quindi si è ritenuto troppo restrittivo valutare negativamente le credenze soltanto in base ad una affermazione non condivisa dagli esperti. È importante notare che le sei affermazioni sono condizione sufficiente ma non necessaria per poter giudicare negativamente le credenze degli allievi, e, soprattutto (ai fini del nostro studio), che esse sono condizione necessaria ma non sufficiente per poterle valutare positivamente: esistono altre importanti idee condivise dagli esperti che gli studenti potrebbero considerare sbagliate, quelle riportate nel primo questionario ne costituiscono soltanto degli esempi. Ciò significa che il numero di ragazzi che posseggono credenze negative è potenzialmente maggiore di quello che risulterà da questa sperimentazione.

Ricordiamo che il comportamento degli studenti nei confronti della matematica è da valutare positivamente nel caso essi abbiano ottenuto successi, negativamente in caso di insuccessi. Per individuare il successo o l'insuccesso dei singoli allievi tra le informazioni raccolte nei questionari svolti ci baseremo sulle risposte date alle domande numero 2 (considerando la media dei tre voti riportati) e 3, e anche alla numero 11, dove è richiesto di esprimere con un numero compreso tra 0 e 10 il proprio successo, secondo la definizione personale di successo data subito prima: se le risposte a queste tre domande sono simili, cioè i valori espressi si discostano poco tra loro, ne sarà fatta una media e si giudicherà positivo un comportamento espresso da questa media con un valore non inferiore di 6, negativo nel caso che tale valore sia insufficiente; se invece le risposte alle domande 2, 3 e 11 sono ben diverse, si affronterà la questione del successo analizzando tutto il questionario cercando di riscontrare risposte importanti a tale proposito, dando comunque

un peso elevato soprattutto alla quantificazione personale del successo, che tiene conti degli obiettivi propri dei ragazzi, anche se a volte discutibili.

Risultati In base a quanto detto precedentemente si nota che sei allievi hanno delle reazioni emozionali nei confronti della matematica di tipo negativo: tra questi uno solo ha quantificato negativamente il piacere, e altri cinque hanno mostrato di provare emozioni negative (soprattutto ansia, odio e rabbia) in più occasioni didattiche (soprattutto durante le verifiche, le interrogazioni e le spiegazioni). Analizzando il giudizio dato alle affermazioni della domanda posta con l'intento di scoprire quali credenze possedano gli studenti, si riscontrano ben 10 ragazzi con delle credenze negative: tra questi, quattro appartengono anche al gruppo di coloro che provano emozioni negative nell'affrontare la matematica. Infine, i ragazzi giudicati assumere un comportamento negativo nei confronti della matematica (considerando i voti riportati negli anni precedenti e in quello attualmente in corso ed il valore riportato alla domanda numero 11) sono soltanto 4, tutti già valutati negativamente in almeno un'altra componente della definizione, ad eccezione di un allievo.

Sintesi dei risultati Riassumendo ed esprimendo meglio i risultati, ben 13 ragazzi su 29 (circa il 45% del campione) mostra avere un atteggiamento negativo verso la matematica secondo la definizione multi-dimensionale data nel capitolo 1. Tra questi allievi, due presentano la situazione peggiore, dato che sia le disposizioni emozionali, sia le credenze, sia il comportamento sono stati valutati negativamente. Due ragazzi hanno credenze ed emozioni negative e comportamento positivo, uno solo è caratterizzato da insuccesso ed emozioni negative nell'affrontare questa materia pur avendo credenze corrette, ed i restanti 8 necessitano un intervento meno impegnativo per raggiungere un atteggiamento positivo verso la matematica, dato che presentano solo uno dei fattori, facenti parte della definizione, di tipo negativo: per quasi tutti (6 su 8) l'eventuale intervento va indirizzato a migliorare le credenze che hanno a proposito della matematica.

L'atteggiamento verso la matematica secondo il modello

Nel primo capitolo abbiamo detto, dopo aver introdotto i profili di atteggiamento, che, seguendo l'idea di atteggiamento costruita con il modello "disposizione emozionale-senso di autoefficacia-visione della matematica", è conveniente valutare negativamente l'atteggiamento di uno studente nel caso in cui almeno una delle componenti appena elencate, nel caso specifico di tale studente, sia ritenuta negativa.

Abbiamo già visto come valutare le disposizioni emozionali basandoci sulle risposte nel questionario. Per giudicare il senso di auto-efficacia invece verranno considerate le risposte date alla domanda numero 12: lo riterremo positivo nel caso in cui gli studenti abbiano risposto "sì", negative in caso contrario. Inoltre, per quanto riguarda la visione della matematica, si ritiene opportuno considerare errata la visione strumentale della matematica, e corretta la visione relazionale, espresse rispettivamente dalla prima e dalla seconda possibilità fornite nella domanda numero 7 del questionario.

Risultati Risulta (come per l'analisi fatta precedentemente attraverso lo studio delle componenti della definizione tridimensionale data) che sei ragazzi sono contraddistinti da emozioni prevalentemente negative nell'affrontare la matematica. Il senso di auto-efficacia è da giudicare negativo per sette allievi: due di questi fanno anche parte del gruppo di ragazzi con disposizioni emozionali negative. Infine otto studenti della classe, tra quelli che hanno svolto il primo questionario, hanno evidenziato avere una visione strumentale della matematica (anche se, come già detto, altri, pur avendo optato per la seconda scelta tra le possibili presenti nella settima domanda, hanno mostrato nei loro discorsi di avere la stessa caratteristica; non verranno però posti nella stessa "categoria" per fiducia nei ragazzi e nelle risposte da loro date); cinque tra questi sono stati giudicati negativamente anche nel campo delle emozioni o in quello dell'autoefficacia.

Sintesi dei risultati In conclusione, ben 14 allievi, in base allo studio che stiamo trattando, ed in particolare tenendo conto del modello elaborato nel primo capitolo di questa tesi, hanno un atteggiamento negativo verso la matematica: si tratta del 48% abbondante del campione. Due di questi provano emozioni negative nel fare matematica, hanno uno scarso senso di auto-efficacia, ed hanno una visione strumentale della matematica, hanno cioè il peggior profilo di atteggiamento tra quelli possibili. Altri due sono caratterizzati da visione strumentale, emozioni negative, e senso di auto-efficacia positivo. Un altro condivide la visione negativa della matematica e non ritiene di avere la possibilità di raggiungere il successo, pur provando emozioni positive nell'affrontare la matematica. Tutti gli altri (9 ragazzi) hanno un atteggiamento negativo di tipo "meno grave", nel senso che l'intervento atto al miglioramento dell'atteggiamento è da indirizzare su un solo fattore dei tre presenti nel modello che stiamo prendendo in considerazione: a 2, 4 e 3 ragazzi è attribuito rispettivamente il provare emozioni negative facendo matematica, l'aver uno scarso senso di auto-efficacia, ed il possedere una visione strumentale della matematica.

L'atteggiamento verso la trigonometria

Per valutare l'atteggiamento degli studenti verso la trigonometria, utilizzando il modello di atteggiamento analizzato nel capitolo 1, considereremo i risultati del secondo questionario proposto. In particolare valuteremo le disposizioni emozionali come fatto per valutare l'atteggiamento verso la matematica, osservando questa volta le risposte date alle domande numero 3 e numero 4 del secondo questionario, conosceremo il senso di auto-efficacia grazie alle risposte date alla nona domanda, e giudicheremo la visione che gli studenti hanno della matematica in base alla scelta della visione strumentale o relazionale fatta dagli allievi.

Risultati Risulta che cinque ragazzi della classe, tra i 29 che hanno svolto il questionario, non gradiscono emotivamente la trigonometria. Sette invece non ritengono di essere avere la possibilità di raggiungere il successo o perlo-

meno un miglioramento (anche questa volta alcuni si sono così espressi perché ottengono già ottimi risultati), due dei quali sono tra i cinque appartenenti alla categoria di ragazzi che non provano emozioni positive nell'affrontare la trigonometria. Infine nove ragazzi hanno una visione strumentale della trigonometria: tra questi soltanto tre non condividono alcun altro aspetto del modello in maniera negativa.

In sintesi, tra i 29 ragazzi ai quali è stato sottoposto il questionario, 13 (cioè quasi il 45%) possiedono un atteggiamento negativo verso la trigonometria. Soltanto un ragazzo tra questi ha un profilo caratterizzato negativamente in tutte le componenti (disposizioni emozionali, senso di auto-efficacia, visione). Un altro possiede uno scarso senso di auto-efficacia, emozioni negative verso la trigonometria ed una corretta visione di essa. Un altro ancora ha una visione strumentale dell'argomento matematico, reazioni emozionali negative e ritiene di avere le possibilità per raggiungere il successo. Quattro ragazzi invece, pur provando emozioni positive nell'affrontare la trigonometria, hanno uno scarso senso di auto-efficacia ed una visione negativa (quella strumentale) dell'argomento. I restanti sei allievi caratterizzati da profili di atteggiamento negativi presentano una sola componente di questo tipo: in particolare 2, 1 e 3 allievi si sono espressi rispettivamente verso emozioni negative, verso scarsa autoefficacia, e verso una visione strumentale della trigonometria.

3.3.4 Confronto dei risultati

Confrontiamo i risultati ottenuti e da poco esposti riguardo all'atteggiamento verso la matematica e verso la trigonometria, considerando i diversi metodi di valutazione utilizzati.

L'atteggiamento verso la matematica valutato in due modi

Per prima cosa osserviamo che i numeri di ragazzi per i quali è stato valutato negativamente l'atteggiamento verso la matematica utilizzando prima la definizione e poi il modello sono quasi uguali (13 e 14 rispettivamente). Ricordiamo che il numero di ragazzi con credenze negative è potenzialmente

maggiore di quello da noi ottenuto, dato che non è stata riportata la lista completa di tutte le idee condivise dagli esperti (perché troppo lunga per essere espressa). Teniamo presente anche il fatto che alcuni studenti (in particolare ne è evidente uno) si sono espressi negativamente verso l'autoefficacia perché hanno già raggiunto voti più che soddisfacenti e centrato i propri obiettivi: uno dei ragazzi ha riportato la media del 9 negli anni precedenti al quarto, la stessa media nell'anno in corso ed anche nel modulo di trigonometria ed ha ammesso ragionevolmente di non poter migliorare il proprio rendimento; in tal caso è sbagliato ritenere negativo il senso di auto-efficacia. Per questi motivi è evidente come la percentuale dei ragazzi con atteggiamento negativo nella classe considerata in questo studio sia sostanzialmente la stessa se valutata attraverso le componenti della definizione tridimensionale o attraverso le componenti del modello analizzato nel primo capitolo; si osserva anche che quasi tutti gli studenti che hanno evidenziato un tipo di atteggiamento (positivo o negativo) verso la matematica utilizzando la definizione, hanno mostrato la stessa caratteristica anche con l'utilizzo del modello "disposizioni emozionali-senso di autoefficacia-visione della matematica": questo dà valore al modello considerato.

L'atteggiamento verso la matematica e verso la trigonometria

In secondo luogo, confrontando i risultati del primo e del secondo questionario, si nota che gli atteggiamenti verso la matematica e verso la trigonometria sono quasi esattamente quantitativamente uguali. Ciononostante, gli allievi con profili di atteggiamento negativi verso la matematica non sono esattamente gli stessi con profili dello stesso tipo verso la trigonometria: grazie allo studio condotto attraverso il modello di atteggiamento, tra i 14 studenti con atteggiamento negativo verso la matematica ed i 13 con atteggiamento negativo verso la trigonometria, otteniamo che 10 ragazzi appartengono ad entrambe le categorie; gli altri (4 e 3 rispettivamente), in base alla valutazione effettuata, sono stati giudicati negativamente soltanto in uno dei due atteggiamenti (matematica e trigonometria). Comunque, sostanzialmen-

te, la maggior parte dei ragazzi con atteggiamento negativo, possiede questa caratteristica sia nei confronti della matematica che nei confronti della trigonometria. Considerazione analoga vale per i ragazzi con atteggiamento positivo.

3.3.5 Riflessioni sul modello di atteggiamento

Facciamo ora alcune riflessioni riguardanti il modello di atteggiamento proposto nel primo capitolo considerando le risposte fornite dai ragazzi. Quando non specificato, ci si riferirà alle valutazioni sull'atteggiamento svolte considerando il modello.

Per più di un terzo dei ragazzi che hanno mostrato avere un atteggiamento negativo verso la matematica, e per più della metà di coloro che hanno mostrato la stessa situazione però nei confronti della trigonometria, i profili di atteggiamento sono caratterizzati dalla negatività di almeno due delle componenti. Inoltre, ben venti allievi hanno affermato di credere nell'esistenza di legami tra i tre fattori del modello per quanto riguarda la matematica, 15 riguardo alla trigonometria. I legami maggiormente citati sono proprio quelli mostrati nel capitolo 1 di questa tesi, ma ne sono presenti anche altri:

- sono frequenti le affermazioni del tipo “mi piace perché riesco” (con riferimento al piacere nell'aver ricevuto un buon voto) o “mi piace perché posso riuscire” (con riferimento al fatto che il successo dipende dal proprio impegno o dalla propria attenzione).
- più rare sono invece le connessioni tra senso di auto-efficacia e visione (intesa come strumentale o relazionale) della matematica, mentre più spesso si è riscontrato un legame tra la visione, intesa come utilità, della matematica (più che della trigonometria) e l'auto-efficacia, come ad esempio nella frase “*se si è convinti che sarà molto utile nella vita, ci si impegnerà al massimo per raggiungere ottimi risultati e un ottimo successo*” (tratta da uno dei questionari);

- molto spesso i ragazzi hanno sottolineato la relazione tra il piacere verso la matematica e verso la trigonometria, e la visione della matematica, intesa anche questa volta frequentemente con l'accezione di utilità della materia nella vita quotidiana, ma quasi altrettanto frequentemente con l'idea di matematica come materia razionale ed oggettiva;
- in altri (numerosi) casi si è riscontrata la relazione tra gradimento ed autoefficacia del tipo “riesco perché mi piace” o “mi impegno perché mi piace”.

Capitolo 4

Conclusioni

I risultati dalla sperimentazione condotta, riportati ed analizzati nel capitolo precedente, sollevano importanti questioni riguardanti l'atteggiamento, sotto differenti punti di vista: si tratta soprattutto di conferme di studi precedenti, di confronti, di accorgimenti. Premettiamo e ricordiamo che l'analisi svolta in questa tesi è stata concentrata più su un livello qualitativo che quantitativo dei fatti, pertanto gli esiti evidenziati (sia precedentemente che di seguito) non sono statisticamente rilevanti, ma risultano utili nella conoscenza e nello sviluppo della base teorica dell'atteggiamento degli studenti. Ciò detto, qui ci limiteremo ad evidenziare e sintetizzare le questioni più significative tra quelle alle quali si è da poco fatto riferimento:

- sebbene la classe sottoposta agli studi sia composta principalmente da ragazzi senza problemi in matematica, si è riscontrato una elevata percentuale (intorno al 45%) di allievi caratterizzati da atteggiamento negativo verso la matematica e verso la trigonometria in particolare; si sono notate delle carenze di questi, non tanto in fase di rendimento e valutazione, ma nel rapporto che hanno con la materia, che spesso costituiscono la causa di difficoltà nell'approccio, nello studio, nell'apprendimento o nel rendimento in matematica;
- nell'analizzare l'atteggiamento degli studenti verso la matematica (e verso la trigonometria), si è riscontrata la forte utilizzabilità del modello

“disposizioni emozionali-senso di autoefficacia-visione”: i risultati dei questionari fanno evincere che la valutazione dell’atteggiamento tramite la definizione tridimensionale (quella ritenuta, dall’autore di questa tesi, la più corretta) combacia quasi perfettamente, in base al numero di studenti caratterizzati da atteggiamento negativo verso la matematica (e verso la trigonometria), con la valutazione fatta attraverso il modello introdotto nel primo capitolo e appena richiamato;

- si è verificata l’attendibilità delle connessioni tra le diverse componenti del modello: nelle risposte dei ragazzi si ritrovano le relazioni di causa effetto “mi piace perché posso riuscire”, “mi piace perché la matematica è...” e “posso riuscire perché la matematica è...”; discorso analogo vale per la trigonometria. In più gli studenti che hanno svolto i questionari hanno spesso sottolineato il legame tra reazioni emozionali e senso di auto-efficacia contrario a quello espresso, cioè quello del tipo “posso riuscire perché mi piace”;
- gli atteggiamenti degli studenti verso la matematica e verso la trigonometria sono risultati molto simili: quasi l’80% dei ragazzi con atteggiamento negativo verso la matematica ha riportato la stessa caratteristica anche nei confronti della trigonometria; la situazione risulta essere sostanzialmente la stessa nei casi di studenti con atteggiamento positivo dato che circa l’82% degli allievi con atteggiamento positivo verso la matematica ha lo stesso tipo di atteggiamento anche verso la trigonometria;
- le indicazioni nazionali della riforma scolastica del 2010 (che non hanno riguardato la classe in cui si è svolta la sperimentazione, per la quale era già in atto la normativa riguardante gli indirizzi P.N.I.) sono in grado, se ben interpretate, di apportare miglioramenti all’atteggiamento degli studenti che si sono da poco iscritti, o si iscriveranno negli anni futuri, ad un liceo scientifico: l’intenzione di far apprendere agli allievi argomenti matematici, e trigonometrici in particolare, utili in altri

contesti, e non finalizzati a se stessi, unitamente alla volontà di mettere a conoscenza dei ragazzi esclusivamente i concetti principali della trigonometria (e della matematica in generale), senza ricadere in una eccessiva memorizzazione di regole e formule non fondamentali, espresse nel secondo capitolo di questa tesi, nella trattazione della riforma del 2010, indirizzano gli studenti verso una corretta visione della matematica, verso la formazione di idee coerenti con quelle condivise dagli esperti e verso emozioni positive nell'affrontare questioni più scientificamente significative, utili, interessanti, e meno ripetitive e noiose di molte di quelle affrontate fino a pochi anni fa, o, in alcuni casi, ancora oggi. Tutti questi aspetti fanno comprendere l'effettiva capacità di queste indicazioni di apportare miglioramenti all'atteggiamento degli studenti, o, perlomeno, a particolari sue componenti (visione, credenze, aspetti emotivi);

- la sperimentazione condotta conferma l'idea che il metodo migliore per poter riconoscere l'atteggiamento degli studenti verso la matematica sia quello di lasciar loro ampia libertà di scrivere o parlare: molti dei concetti più importanti che risultano dall'analisi dei questionari si sono ritrovati nelle risposte aperte. In alcuni casi l'analisi delle risposte chiuse si è rivelata insufficiente o incompleta per la descrizione di alcuni aspetti, idee o pensieri degli studenti.

Bibliografia

- [1] Allport G. W. (1935). *Attitudes*. In C. A. Murchinson (Ed.), A handbook of social psychology, 798-844. Worcester, MA: Clark University Press.
- [2] Bolondi G. (2010). *É questa la riforma della matematica che manda in pensione Gentile*. <http://www.ilsussidiario.net/News/Educazione/2010/3/25/SCUOLA-Bolondi-e-questa-la-riforma-della-matematica-che-manda-in-pensione-Gentile/75062/> (ultima consultazione 7 marzo 2013).
- [3] Bruner J. (1990). *Acts of Meaning*. Cambridge: Harvard University Press (traduzione italiana La ricerca del significato. Per una psicologia culturale. Torino Bollati Boringhieri, 1992).
- [4] Daskalogianni K. & Simpson A. (2000). *Toward a definition of attitude: the relationship between the affective and the cognitive in pre-university students*. Proceedings of PME 24 (Hiroshima, Japan), vol. 2, 217-224.
- [5] Di Martino P. (2007). *L'atteggiamento verso la matematica: alcune riflessioni sul tema*. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 30A-B (6), 651-666.
- [6] Di Martino P. & Zan R. (2002). *An attempt to describe a "negative" attitude toward mathematics*. In P. Di Martino (Ed.), Proceedings of the MAVI-XI European Workshop, 22-29.
- [7] Di Martino P. & Zan R. (2003). *What does "positive" attitude really mean?*. In N. A. Pateman, B. J. Doherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings

- of the 27th conference of the international group for the psychology of mathematics education, vol. 4, 451-458. Honolulu, Hawai'i: PME.
- [8] Di Martino P. & Zan R. (2005). *Raccontare il contare: l'incontro scontro con la matematica nei resoconti degli allievi*. In Gisfredi P. (a cura di), *Itinerari tra storie e cambiamento. Momenti e processi formativi*, 105-124. Bologna: CLUEB.
- [9] Di Martino P. & Zan R. (2007). *Attitude toward mathematics: overcoming the positive/negative dichotomy*. *The Montana mathematics enthusiast*, vol. 3, 157-168.
- [10] Di Martino P. & Zan R. (2010, A). *"Me and maths" Toward a definition of attitude grounded on students' narratives*. *Journal of mathematics teacher education*, vol. 13 (1), 27-74.
- [11] Di Martino P. & Zan R. (2010, B). *Sviluppare un atteggiamento positivo verso la matematica: dalle buone intenzioni alle buone pratiche*. *Scienze dell'educazione. La scuola primaria*, 115-130. Pisa: ETS.
- [12] Fennema E. (1989). *The Study of Affect and Mathematics: a Proposed Generic Model for Research*. In Mc Loed, Adams (Eds.), *Affect and Mathematica Problem Solving*, 204-219, Springer Verlag.
- [13] Gardner H. (1991). *The Unschooled Mind: How children think and how school should teach*. New York: Basic Books (tr. id. *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Milano: Feltrinelli, 1993).
- [14] Haladyna T., Shaughnessy J. & Shaughnessy M. (1983). *A causal analysis of attitude toward Mathematics*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14 (1), 19-29.
- [15] Hart L. (1989). *Describing the Affective Domain. Saying What We Mean*. In Mc Load, Adams (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving*, 37-45. Springer Verlag.

- [16] Kulm G. (1980). *Research on Mathematics Attitude*. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in mathematics education*, 356-387. Reston, VA, NCTM.
- [17] Ma X. & Kishor N. (1997). *Assessing the Relationship Between Attitude Toward Mathematics and Achievement in Mathematics: A meta-Analysis*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), 26-47.
- [18] Mc Load D. (1992). *Research on affect in mathematics education: a reconceptualization*. In D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 575-596. McMillan Publishing Company.
- [19] Middleton J.A. & Spanias P.A. (1999). *Motivation for Achievement in Mathematics: Findings, Generalizations, and Criticism of the Research*. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 30, 65-88.
- [20] Ministero dell'Istruzione Pubblica (1923). *Estratto dal R. D. del 14 ottobre 1923, n. 2345, Approvazione degli orari e dei programmi per le Regie Scuole medie*. *Bollettino Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica*, 50, Roma 17 novembre 1923, Numero Straordinario, Orari e programmi per le Regie Scuole medie (consultabile all'indirizzo <http://www.subalpinamathesis.unito.it/storiains/it/doc/rifgent.pdf>, ultima consultazione 7 marzo 2013), 4413-4510.
- [21] MIUR (2010). *Il Regolamento dei Licei. Quadri orari*. Consultabile all'indirizzo http://archivio.pubblica.istruzione.it/riforma_superiori/nuovesuperiori/doc/04_Allegati_BCDEFG_Quadri_orari_definitivo_refuso_design.pdf (ultima consultazione 2 marzo 2013).
- [22] MIUR & MEF (2010). *Schema di regolamento recante Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'art. 10, comma 3, del*

- d.P.R. 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento.* Consultabile all'indirizzo http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010///indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf (ultima consultazione 7 marzo 2013).
- [23] Patergnani E. (2006). *La riforma Gentile e l'insegnamento della matematica.* Tesi di Laurea triennale in Matematica (Estratto consultabile all'indirizzo Web.unife.it/progetti/matematicainsieme/riforma_gentile/index.html, ultima consultazione 7 marzo 2013). Università di Ferrara, A.A. 2005-2006, Relatore L. Pepe.
- [24] Saccone A. (2013). *Piano di Lavoro, Matematica, classe IV, sezione G.* Liceo Scientifico A. Romita, Campobasso.
- [25] Skemp R. (1976). *Relational understanding and instrumental understanding.* Mathematics Teaching, 77.
- [26] Unione Matematica Italiana (2003). *MATEMATICA 2003.* http://umi.dm.unibo.it/area_download-37.html (ultima consultazione 7 marzo 2013).
- [27] Vita V. (1986). *I Programmi di Matematica per le Scuole Secondarie dall'Unità d'Italia al 1986: Rilettura Storico-critica.* pp. 168. Bologna: Pitagora.
- [28] Weiner B. (1974). *Achievement motivation and attribution theory.* Mirrstown, NJ: General Learning Press.
- [29] Zan R. (2006). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* pp. 306. Milano: Springer.

Siti Web consultati

- [1] <http://www.subalpinamathesis.unito.it/storiains/it/doc/1.pdf>, ultima consultazione 7 marzo 2013.
- [2] http://it.wikipedia.org/wiki/Problem_solving, ultima consultazione 7 marzo 2013.
- [3] http://it.wikipedia.org/wiki/Storia_dell'istruzione_in_Italia, ultima consultazione 7 marzo 2013.
- [4] <http://www.edscuola.it/archivio/norme/programmi/scientifico.html#MATEMATICA>, ultima consultazione 7 marzo 2013.
- [5] http://www.edscuola.it/archivio/norme/circolari/cm024_91.html, ultima consultazione 7 marzo 2013.

Ringraziamenti

Desidero innanzitutto ringraziare il Professor Bolondi per la costante disponibilità mostrata e per avermi permesso ed aiutato nello svolgere questo lavoro.

Ringrazio di cuore la Professoressa Saccone per il modo in cui svolge il suo lavoro: soltanto grazie a lei ho scelto questo indirizzo universitario ed il suo esempio mi ha sempre spinto a fare il massimo. La ringrazio anche per il tempo dedicatomi durante l'ultimo anno accademico.

Ringrazio i Professori Zan e Di Martino per la gentilezza nell'avermi fatto prontamente avere il materiale richiesto, fondamentale per l'elaborazione di questa tesi.

Ringrazio i miei genitori più di chiunque altro: mi hanno sempre sostenuto moralmente e dato la massima fiducia, hanno reso agevole e comoda la mia permanenza a Bologna e possibile il mio studio, spesso sacrificando i loro principali desideri. Li ringrazio per aver sempre espresso un bene immenso nei miei confronti. Sono felice di potermi dire orgoglioso di mia madre e di mio padre, i migliori genitori del mondo.

Ringrazio infinitamente Martina per l'amore che mi dimostra ormai da tre anni, per la sua costante vicinanza, morale ancor più che fisica, per la sua dolcezza che sempre mi riempie di gioia e perché sempre mi dona allegria e felicità, nonostante le avversità che mi si presentano. La ringrazio infine per avermi sopportato, aiutato e sostenuto in questo periodo, sebbene sia stata da me spesso o quasi sempre trascurata. La ringrazio per essere sempre perfetta e perché mi sta facendo vivere un sogno.

Un particolare ringraziamento va a Clemente che mi ha sempre regalato bei momenti, anche nella situazione più semplice ed abituale, sostenuto quando necessario, ed aiutato quando ero in difficoltà.

Ringrazio infine tutti i miei amici e tutti i miei parenti, single, fidanzati, sposati, ecc. Ho preferito non nominare nessuno, ma ci tengo ad esprimere la massima riconoscenza verso tutti voi che mi avete fatto passare momenti magnifici, che mi avete consolato quando necessario e non mi avete mai fatto sentire solo.

Ringrazio il Signore per avermi donato la possibilità di raggiungere questo e numerosi altri traguardi.