

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**SERIE DI FOURIER
E
APPLICAZIONI**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Ermanno Lanconelli**

Presentata da:
Gabriele Pasini

Sessione III
Anno Accademico 2011/2012

*Alla mia famiglia,
Patrizio, Pierina, Cristina e Marco,
e a tutti coloro
che posso chiamare fratelli.*

*Io sono la porta:
se uno entra attraverso di me sarà salvo;
entrerà e uscirà e troverà pascolo.*

Giovanni 10,9

Introduzione

Questa tesi vuole presentare le serie di Fourier e alcune loro prime applicazioni. Nel primo capitolo sono studiate le serie di Fourier reali.

Sono quindi date le prime definizioni, enunciati e dimostrati i primi teoremi di base, e considerati un paio di esempi semplici ma particolarmente significativi. Vengono poi studiati i teoremi di convergenza puntuale e uniforme: il Teorema di Dini, il criterio di Hölder e il Teorema di Jordan . Si arriva poi ad analizzare l'integrabilità e la derivabilità termine a termine introducendo il concetto di funzione assolutamente continua (concetto che avrebbe bisogno di un capitolo a parte per uno sviluppo adeguato). Si arriva ad analizzare dunque il problema della sviluppabilità in serie di Fourier nel senso classico e nel senso di Abel, con annesso studio del Nucleo di Poisson. Il capitolo si conclude con un breve paragrafo sulle serie di Fourier complesse.

Nel secondo capitolo si mostra come viene applicato lo studio delle serie di Fourier per alcuni problemi relativi alle equazioni alle derivate parziali. Si inizia con una breve presentazione dell'operatore laplaciano e del suo significato fisico/intuitivo. La prima applicazione analizzata è il classico problema di Dirichlet per il disco unitario. Si passa quindi all'equazione del calore, all'equazione della corda vibrante, fino alla formulazione più generale dell'equazione delle onde uno-dimensionali. In tutti i casi si può notare come le serie di Fourier siano uno strumento estremamente efficace ed elegante per la soluzione di problemi di questo tipo.

Indice

Introduzione	i
1 Serie di Fourier	1
1.1 Polinomi trigonometrici reali	1
1.2 Polinomi di Fourier	3
1.3 Serie di Fourier reali e loro convergenza puntuale	8
1.4 Integrazione termine a termine delle serie di Fourier	12
1.5 Un criterio di convergenza uniforme per le serie di Fourier	17
1.6 Convergenza secondo Abel delle serie di Fourier. Integrale di Poisson	18
1.7 Serie di Fourier complesse	25
2 Applicazioni	27
2.1 L'operatore laplaciano	27
2.2 Il problema di Dirichlet	28
2.3 L'equazione del calore	31
2.4 L'equazione della corda vibrante	33
2.5 L'equazione delle onde uno-dimensionale	35
A Appendice	39
A.1 Teorema di Lebesgue	39
Bibliografia	40

Capitolo 1

Serie di Fourier

1.1 Polinomi trigonometrici reali

Definizione 1.1 (Polinomio trigonometrico reale). Chiamiamo *polinomio trigonometrico reale* ogni funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che possa scriversi nella maniera seguente

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.1)$$

con $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, a_1, \dots, b_1, \dots, b_n$ costanti reali.

Esempio 1. Le funzioni

$$\sin^2 t, \quad \cos^2 t, \quad \sin t \cos t$$

sono polinomi trigonometrici di grado 2. Infatti

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}, \quad \sin t \cos t = \frac{\sin 2t}{2}. \quad (1.2)$$

Più in generale, qualunque siano $h, k \in \mathbb{N}$, sono polinomi di grado $h + k$ le funzioni $\cos ht \cos kt, \sin ht \cos kt, \sin ht \sin kt \forall h, k \in \mathbb{N}$. Infatti

$$\begin{cases} \cos ht \cos kt = \frac{1}{2}(\cos(h - k)t + \cos(h + k)t) \\ \sin ht \cos kt = \frac{1}{2}(\sin(h + k)t + \sin(h - k)t) \\ \sin ht \sin kt = \frac{1}{2}(\cos(h - k)t - \cos(h + k)t) \end{cases} \quad (1.3)$$

Utilizzando le formule (1.3) si dimostra facilmente che il prodotto di due polinomi trigonometrici è ancora un polinomio trigonometrico. Più precisamente, se $p \in T_n$ e $q \in T_m$ allora $p \cdot q \in T_{n+m}$. In particolare, se $p \in T_n$ e $\alpha \in \mathbb{N}$ allora $p^\alpha \in T_{n\alpha}$.

Esempio 2. Scriviamo esplicitamente gli sviluppi in polinomi trigonometrici di alcune potenze delle funzioni seno e coseno.

$$\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t). \quad (1.4)$$

Infatti, per la prima delle (1.2) e per la seconda delle (1.3),

$$\begin{aligned} \sin^3 t &= \sin t \sin^2 t = \frac{1}{2} \sin t (1 - \cos 2t) \\ &= \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{4}(\sin 3t - \sin t) = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t). \end{aligned}$$

Infatti utilizzando ancora le (1.2) e le (1.3),

$$\begin{aligned} \cos^3 t &= \cos t \cos^2 t = \frac{1}{2} \cos t (1 + \cos 2t) \\ &= \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4}(\cos t + \cos 3t) = \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos 3t). \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \sin^4 t &= \sin t \sin^3 t = \frac{1}{4} \sin t (3 \sin t - \sin 3t) \\ &= \frac{1}{8}(3 - 3 \cos 2t - \cos 2t + \cos 4t) \\ &= \frac{1}{8}(3 - 4 \cos 2t + \cos 4t). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ogni polinomio trigonometrico reale di grado n si può scrivere in un solo modo nella forma (1.1). Questo si deduce direttamente dal teorema seguente.

Teorema 1.1.1. *Se $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

è un polinomio trigonometrico reale di grado $\leq n$ allora

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos kt \, dt \quad \forall k \geq 0 \quad (1.6)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \sin kt \, dt \quad \forall k \geq 1 \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Integrando p sull'intervallo $[-\pi, \pi]$ e ricordando che le funzioni $\cos kt$ e $\sin kt$, qualunque sia $k \geq 1$, hanno integrale nullo sullo stesso intervallo, si ottiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} p(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dt = \pi a_0. \quad (1.8)$$

Moltiplichiamo ora $p(t)$ per $\cos ht$, con $1 \leq h \leq n$, e integriamo ancora su $[-\pi, \pi]$. Otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} p(t) \cos ht \, dt &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos ht \, dt \\ &+ \sum_{k=1}^n \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos ht \, dt + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos ht \, dt \right) \\ &= \pi a_h \end{aligned} \quad (1.9)$$

in quanto, come si riconosce facilmente utilizzando le (1.3),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \cos ht \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \\ \pi & \text{se } k = h \end{cases}$$

mentre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cos ht \, dt = 0 \quad \forall k, h \in \mathbb{N}.$$

(1.8) e (1.9) provano (1.6). In modo analogo, moltiplicando $p(t)$ per $\sin ht$, con $1 \leq h \leq n$, e integrando su $[-\pi, \pi]$, si ottiene (1.7).

Corollario 1.1.2. *Se risulta*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora

$$a_k = \alpha_k \quad \forall k \geq 0 \quad e \quad b_k = \beta_k \quad k \geq 1.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente da (1.6) e da (1.7). \square

Corollario 1.1.3. T_n è uno spazio vettoriale di dimensione $2n + 1$.

Dimostrazione. T_n è il sottospazio vettoriale di $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ generato dalle $2n + 1$ funzioni

$$1, \cos t, \cos 2t, \dots, \cos nt, \sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt. \quad (1.10)$$

Dimostriamo che queste sono linearmente indipendenti. Ciò proverà il corollario.

Siano dunque $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ e tali che

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per il teorema 1.1.1 ciò implica $a_0 = a_k = b_k = 0$ per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$ e questo prova la lineare indipendenza delle funzioni in (1.10). \square

1.2 Polinomi di Fourier

Definizione 1.2 (Polinomio di Fourier). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. Si chiama *polinomio di Fourier di grado n di f* il seguente polinomio trigonometrico reale:

$$S_n(f)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.11)$$

ove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos ks \, ds \quad \text{per } k \geq 0 \quad (1.12)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin ks \, ds \quad \text{per } k \geq 1. \quad (1.13)$$

I numeri reali a_k e b_k in (1.12) e (1.13) sono chiamati *coefficienti di Fourier di f* .

Osservazione 1. Per il Teorema 1.1.1 ogni polinomio trigonometrico di grado n è il polinomio di Fourier di grado n di sé stesso.

Osservazione 2. Se f^2 è sommabile su $[-\pi, \pi[$, $S_n(f)$ è il polinomio trigonometrico dei minimi quadrati per f . Precisamente per ogni polinomio trigonometrico $p \in T_n$ risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - p)^2 \, dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n(f))^2 \, dt.$$

Se f è 2π -periodica ed è sommabile su $[-\pi, \pi[$ allora f è sommabile su ogni intervallo di lunghezza 2π e risulta

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Definizione 1.3 (Nucleo di Dirichlet). Si chiama *nucleo di Dirichlet di grado n* , $n \in \mathbb{N}$, il seguente polinomio trigonometrico

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.15)$$

D_n è una funzione 2π -periodica. Inoltre, poichè

$$\int_0^{\pi} \cos kt \, dt = 0 \quad \forall k \geq 1,$$

risulta

$$\int_0^{\pi} D_n(t) \, dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \, dt = \frac{\pi}{2}. \quad (1.16)$$

Sull'intervallo $]0, \pi[$ il nucleo D_n si può scrivere in forma chiusa nel modo seguente:

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{per } 0 < t < \pi \quad (1.17)$$

Tutto ciò premesso dimostriamo ora il seguente teorema.

Teorema 1.2.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. Allora

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds \quad (1.18)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Sostituendo (1.12) e (1.13) in (1.11) si ottiene

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \pi f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n n(\cos ks \cos kt + \sin ks \sin kt) \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(s) D_n(t-s) ds \end{aligned}$$

ponendo $s-t = \sigma$ e osservando che $D_n(-\sigma) = D_n(\sigma)$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-t}^{\pi-t} f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma$$

applicando (1.14) alla funzione 2π -periodica $\sigma \mapsto f(t+\sigma) D_n(\sigma)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^\pi \right) f(t+\sigma) D_n(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t-s) D_n(-s) + f(t+s) D_n(s)) ds \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \frac{f(t-s) + f(t+s)}{2} D_n(s) ds. \end{aligned}$$

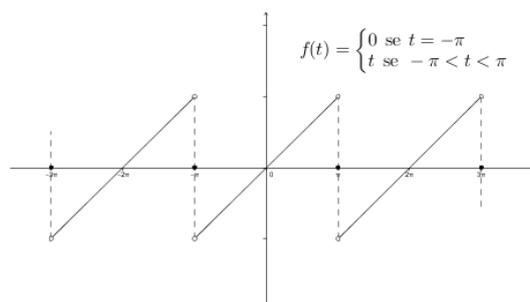
Questo dimostra la (1.18). \square

Esempio 3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita su $[-\pi, \pi[$ nel modo seguente

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = -\pi \\ t & \text{se } -\pi < t < \pi \end{cases}$$

Poichè f è dispari ($f(-t) = -f(t)$) i suoi coefficienti di Fourier $a_k, k \geq 0$, sono tutti nulli. Per ogni $k \geq 1$ risulta poi

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi f(t) \sin kt dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin kt dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-t \frac{\cos kt}{k} \right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^\pi \frac{\cos kt}{k} dt \right) = (-1)^{k-1} \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Figura 1.1: grafico di $f(t)$

Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kt \\ &= 2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \sin nt \right) \end{aligned}$$

Esempio 4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica così definita sull'intervallo $[-\pi, \pi[$:

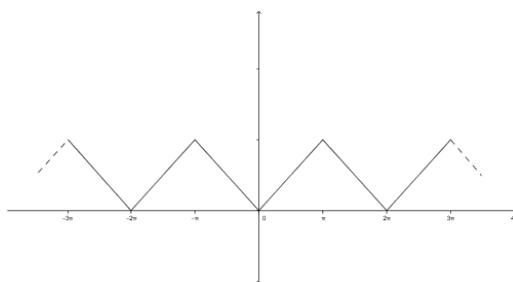
$$f(t) = |t|$$

La funzione f è pari, e quindi i suoi coefficienti di Fourier b_k sono tutti nulli. Calcoliamo gli a_k . Se $k = 0$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \pi,$$

mentre, se $k \geq 1$,

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt dt = \frac{2}{\pi k^2} ((-1)^k - 1).$$

Figura 1.2: grafico di $f(t) = |t|$

Quindi

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari, } k \geq 2 \\ \frac{-4}{\pi k^2} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

In definitiva, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha:

$$S_{2n+1}(f) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{\cos 3t}{3^2} + \dots + \frac{\cos(2n+1)t}{(2n+1)^2} \right) \quad (1.19)$$

Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione 2π -periodica, misurabile e di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$, allora f è sommabile su $[-\pi, \pi[$.

Infatti

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f| dt &= \int_{\{|f| \leq 1\}} |f| dt + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f| dt \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} dt + \int_{\{|f| \geq 1\}} |f|^2 dt \leq 2\pi + \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dt. \end{aligned}$$

Si può definire il polinomio di Fourier $S_n(f)$ per ogni funzione 2π -periodica, di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$.

Teorema 1.2.2. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, misurabile e di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$. Allora*

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f - p)^2 dt \geq \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n(f))^2 dt \quad \forall p \in T_n.$$

Dimostrazione. Per brevità di notazione indichiamo con

$$u_0, u_1, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n}$$

la sequenza di funzioni

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}.$$

Risulta

$$\int_{-\pi}^{\pi} u_k u_h dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq h \\ 1 & \text{se } k = h \end{cases}$$

Inoltre

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k u_k$$

ove

$$\hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} f u_k dt.$$

Se p è un qualunque polinomio trigonometrico di grado $\leq n$, esistono c_0, c_1, \dots, c_{2n} in \mathbb{R} tali che $p = \sum_{k=0}^{2n} c_k u_k$.

Allora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} (f - p)^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt + \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \hat{f}_k \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt + \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \hat{f}_k)^2 - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k \\ &\geq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k u_k \right)^2 dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n(f))^2 dt. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.2.3 (Disuguaglianza di Bessel). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, misurabile e di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi[$. Allora*

$$\sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.20)$$

Dimostrazione. Basta osservare che

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f - S_n)^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dt - \sum_{k=0}^{2n} \hat{f}_k^2.$$

□

Indicando con a_k e b_k i coefficienti di Fourier di f , risulta $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}_0$ e, per $1 \leq k \leq n$, $a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{f}_k$, $b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \hat{f}_{n+k}$. La disuguaglianza di Bessel (1.20) si può quindi scrivere anche così:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.21)$$

1.3 Serie di Fourier reali e loro convergenza puntuale

Definizione 1.4 (Serie di Fourier). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$. La serie trigonometrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.22)$$

si chiama *serie di Fourier di f* se

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt \quad \text{per } k \geq 0 \quad (1.23)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt \quad \text{per } k \geq 1 \quad (1.24)$$

I numeri reali a_k e b_k sono in (1.23) e (1.24) vengono chiamati *coefficienti di Fourier di f* .

Si dice che f è *svilupabile in serie di Fourier nel punto t* ($\text{in } \mathbb{R}$) se la sua serie di Fourier converge nel punto t ed ha somma uguale a $f(t)$.

In questo caso quindi,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.25)$$

se gli a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di f .

La somma parziale n -esima della serie al secondo membro di (1.25) è il polinomio di Fourier di grado n di f . Pertanto, la funzione f è svilupabile in serie di Fourier nel punto t se, e solo se,

(i) la successione $(S_n(f)(t))_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f(t)$.

Osservazione 3. Modificando f nei punti di un insieme di misura nulla i suoi coefficienti di Fourier non cambiano. Può quindi accadere che si verifichi la condizione (i) senza che valga (ii). Per questo motivo si preferisce studiare il problema della svilupabilità in serie di Fourier ricercando dapprima condizioni sufficienti per la convergenza di $(S_n(f)(t))$ che consentano anche di determinare l'eventuale valore di λ . La funzione f sarà poi svilupabile nel punto t se $f(t)$ coincide con λ .

Teorema 1.3.1 (di Dini). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi]$. Se nel punto $t \in \mathbb{R}$ esiste finito*

$$f^*(t) := \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \quad (1.26)$$

e se la funzione

$$s \mapsto \frac{f(t+s) + f(t-s) - 2f^*(t)}{s} \quad (1.27)$$

è sommabile su $]0, c[$ per un opportuno $c \in]0, \pi[$, allora la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è $f^*(t)$.

Osservazione 4. Se f è continua in t allora $f^*(t) = f(t)$ e quindi se la condizione di Dini è soddisfatta, f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto t .

Una semplice condizione che garantisce l'esistenza del limite (1.26) e la sommabilità della funzione (1.27) è contenuta nel corollario seguente.

Corollario 1.3.2 (criterio di Hölder). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile sull'intervallo $[-\pi, \pi[$, e sia $t \in \mathbb{R}$. Se esistono $\alpha \in]0, 1]$, M e $c > 0$ tali che*

$$|f(s) - f(\tau)| \leq M|s - \tau|^\alpha \quad (1.28)$$

per ogni $s, \tau \in]t, t + c[$ e per ogni $s, \tau \in]t - c, t[$, allora:

(i) esistono, in \mathbb{R}

$$f(t+) := \lim_{s \rightarrow t+} f(s), \quad f(t-) := \lim_{s \rightarrow t-} f(s); \quad (1.29)$$

(ii) la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} \quad (1.30)$$

Corollario 1.3.3. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi[$. Sia poi $t \in \mathbb{R}$ supponiamo che per un opportuno $c > 0$ f risulti derivabile, con derivata limitata, in $]t - c, t + c[\setminus \{t\}$. Allora:*

(i) esistono, in \mathbb{R} , $f(t+)$ e $f(t-)$

(ii) la serie di Fourier di f converge nel punto t e la sua somma è

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}$$

Dimostrazione. Per il teorema del valor medio, qualunque siano $s, \tau \in]t, t + c[$ esiste $\sigma \in]s, t[$ tale che

$$|f(s) - f(\tau)| = |f'(\sigma)||s - \tau|.$$

D'altra parte, poiché f' è limitata per ipotesi, esiste una costante $M > 0$, tale che $|f'(\sigma)| \leq M$ per ogni $\sigma \in]t - c, t + c[\setminus \{t\}$. Allora

$$|f(s) - f(\tau)| \leq M|t - \tau| \quad (1.31)$$

per ogni $s, \tau \in]t, t + c[$.

In modo analogo si prova che vale la disuguaglianza (1.31) per ogni coppia di punti $s, \tau \in]t - c, t[$. La condizione (1.28) risulta quindi soddisfatta con $\alpha = 1$. Le affermazioni (i) e (ii) seguono, di conseguenza, dal corollario 1.3.2 \square

Esempio 5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione 2π -periodica definita su $[-\pi, \pi[$ nel modo seguente

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t = -\pi \\ t & \text{se } -\pi < t < \pi \end{cases}$$

Per quanto mostrato nell'esempio 3 la serie di Fourier di f p la seguente

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kt.$$

La funzione f , inoltre, è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ con derivata uguale a 1 e quindi, ovviamente, limitata. In ogni punto $t \in \mathbb{R}$ risulta poi

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Allora, per il corollario 1.3.3,

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In particolare

$$\frac{t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sin kt \quad \forall t \in]-\pi, \pi[. \quad (1.32)$$

Esempio 6. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica e tale che $f(t) = |t|$, per $-\pi \leq t < \pi$ è continua in ogni punto e verifica le ipotesi del corollario 1.3.3. Essa è infatti quindi sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto $t \in \mathbb{R}$. Allora utilizzando i risultati dell'esempio 4,

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

. In particolare, poiché $f(t) = |t|$ per ogni $t \in [-\pi, \pi]$,

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} \quad \forall t \in [-\pi, \pi]. \quad (1.33)$$

Da questa, per $t = 0$, si ottiene

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Enunciamo senza dimostrare il seguente teorema.

Teorema 1.3.4 (di Jordan). *Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione 2π -periodica e a variazione totale limitata in $[-\pi, \pi]$ allora la sua serie di Fourier converge in ogni punto $t \in \mathbb{R}$ con somma uguale a*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

Osservazione 5. Ricordiamo che ogni funzione a variazione limitata è differenza di due funzioni monotone crescenti. Pertanto, il limite $f(t+)$ esiste in ogni punto $t \in [-\pi, \pi[$. Analogamente, il limite $f(t-)$ esiste in ogni punto $t \in]-\pi, \pi]$. La 2π -periodicità di f assicura poi l'esistenza di $f(t+)$ e di $f(t-)$ in ogni punto $t \in \mathbb{R}$.

Ricordando poi che le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann e che ogni funzione Riemann integrabile su un intervallo compatto è sommabile nel senso di Lebesgue la funzione f dell'enunciato è sommabile su $[-\pi, \pi]$.

1.4 Integrazione termine a termine delle serie di Fourier

In questo paragrafo dimostreremo che una qualunque serie di Fourier può essere integrata termine a termine su ogni intervallo compatto della retta reale.

Teorema 1.4.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile su $[-\pi, \pi[$, e sia*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.34)$$

la sua serie di Fourier. Sia poi

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt$$

la funzione integrale di f nulla in $-\pi$. Allora:

- (i) *F è continua in \mathbb{R} ed ha variazione totale limitata in $[-\pi, \pi]$;*
- (ii) *la funzione*

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x) = F(x) - \frac{a_0}{2}(x + \pi) = \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt$$

è 2π -periodica e la sua serie di Fourier è la seguente

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \quad (1.35)$$

ove

$$\frac{A_0}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k}. \quad (1.36)$$

Osservazione 6. Poiché G è continua in ogni punto ed ha variazione totale limitata in $[-\pi, \pi]$, per il teorema 1.3.4 risulta

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Da questa, dalla definizione di G e dalla (1.36) si ottiene

$$F(x) = \frac{a_0}{2}(x + \pi) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k \sin kx + b_k((-1)^k - \cos kx)) \quad (1.37)$$

Notiamo che la serie al secondo membro si ottiene integrando termine a termine la (1.4.1), la serie di Fourier di f , sull'intervallo $[-\pi, x]$.

Osservazione 7. La (1.36) contiene la seguente notevole informazione: se f è una funzione 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi[$ e se

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt,$$

allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{b_k}{k}$$

è convergente.

Dimostrazione. (i) Una semplice applicazione del teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata consente di verificare che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F(x + h_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{x+h_n} f(t) \, dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^x f(t) \, dt = F(x) \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni successione (h_n) convergente a zero in \mathbb{R} . La funzione F è quindi continua in ogni punto. Scomponendo poi f nel modo seguente

$$f = f^+ - f^-, \quad \text{con } f^+ = \max\{0, f\} \quad \text{e} \quad f^- = \max\{0, -f\},$$

risulta

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f^+(t) \, dt - \int_{-\pi}^x f^-(t) \, dt =: \varphi(x) - \psi(x).$$

Le funzioni φ e ψ sono monotone crescenti poiché f^+ e f^- sono ≥ 0 . Questo dimostra che F ha variazione totale limitata su ogni intervallo compatto di

\mathbb{R} , in particolare su $[-\pi, \pi]$.

(ii) G è 2π -periodica in quanto, per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$G(x + 2\pi) = \int_{-\pi}^{x+2\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = G(x) + \int_x^{x+2\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt$$

per la 2π -periodicità di f

$$= G(x) + \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = G(x) + \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - \pi a_0 = G(x).$$

Siano ora

$$A_k := \int_{-\pi}^{\pi} G(y) \cos ky \, dy \quad \text{per } k \geq 0$$

e

$$B_k := \int_{-\pi}^{\pi} G(y) \sin ky \, dy \quad \text{per } k \geq 1$$

i coefficienti di Fourier di G . Sostituendo nel primo integrale la definizione di $G(y)$, qualunque sia $k \geq 1$ si ottiene

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^y \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) ds \right) \cos ky \, dy$$

cambiando l'ordine di integrazione

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) \left(\int_s^{\pi} \cos ky \, dy \right) ds \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) \frac{\sin ks}{k} ds = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{\sin ks}{k} ds \end{aligned}$$

e quindi

$$A_k = -\frac{1}{k} b_k. \quad (1.38)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) \left(\int_s^{\pi} \sin ky \, dy \right) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(s) - \frac{a_0}{2} \right) \frac{1}{\pi} (\cos ks - (-1)^k) ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{\cos ks}{k} ds - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k}{k} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds - \pi a_0 \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{\cos ks}{k} ds, \end{aligned}$$

e quindi

$$B_k = \frac{1}{k} a_k. \quad (1.39)$$

Ora, poiché $G(x) = F(x) - \frac{a_0}{2}(x + \pi)$, per quanto già mostrato in (i) la funzione G è continua in ogni punto ed è a variazione totale limitata in $[-\pi, \pi]$. Per il teorema 1.3.4 essa è quindi sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto. Pertanto, tenuto conto delle (1.38) e (1.39),

$$G(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} (a_k \sin kx - b_k \cos kx) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nel punto $x = -\pi$ questo sviluppo diventa

$$G(-\pi) = \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} (-1)^k.$$

Ciò dimostra la (1.36) poiché $G(-\pi) = 0$. □

Del teorema precedente si può dare una formulazione duale. Per far questo premettiamo la seguente definizione.

Definizione 1.5 (Funzione assolutamente continua). Una funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* se:

- (i) F è derivabile quasi dappertutto in $[a, b]$;
- (ii) la funzione derivata F' (prolungata con zero nei punti in cui F non è derivabile) è sommabile su $[a, b]$ e risulta

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t) dt \quad x \in [a, b].$$

Osservazione 8. Un importante teorema, dovuto a Lebesgue, afferma che tutte le funzioni integrali di funzioni sommabili sono assolutamente continue.

Teorema 1.4.2. *Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, assolutamente continua in $[-\pi, \pi]$. Allora F è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto di \mathbb{R} . Inoltre la serie di Fourier di F' si ottiene derivando termine a termine quella di F .*

Dimostrazione. Denotiamo con f la funzione derivata di F , convenendo al solito di porre $f = 0$ nei punti in cui F non è derivabile. Per le ipotesi fatte su F, f risulta 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi]$. Inoltre

$$F(x) - F(-\pi) = \int_{-\pi}^x f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sia ora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \tag{1.40}$$

la serie di Fourier di f . Risulta

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} (F(\pi) - F(-\pi)) = 0$$

perché F è 2π -periodica. Allora, per il teorema 1.4.1, la funzione

$$\begin{aligned} x \mapsto G(x) &= \int_{-\pi}^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \int_{-\pi}^x f(t) dt \\ &= F(x) - F(-\pi) \end{aligned}$$

è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto di \mathbb{R} . Tale risulta, di conseguenza, anche la funzione F . Poiché F e G differiscono per una costante, i loro coefficienti di Fourier A_k e B_k , con $k \geq 1$, coincidono. Per (1.37) e (1.38) risulta quindi

$$A_k = -\frac{1}{k} b_k, \quad B_k = \frac{1}{k} a_k \quad \forall k \geq 1$$

e la serie di Fourier di F è

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx) \quad (1.41)$$

con $A_0 = (1/\pi) \int_{-\pi}^{\pi} F(y) dy$. Derivando (1.41) termine a termine si ottiene (1.40), e questo completa la dimostrazione. \square

Dal teorema 1.4.1 si ottiene l'integrabilità termine a termine della serie di Fourier.

Teorema 1.4.3. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sommabile su $[-\pi, \pi]$ e sia*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

la sua serie di Fourier. Allora

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) dt \quad (1.42)$$

per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Dimostrazione. Poiché $\int_{\alpha}^{\beta} = \int_{-\pi}^{\beta} - \int_{-\pi}^{\alpha}$ basta dimostrare la (1.42) per gli intervalli del tipo $[-\pi, x]$. D'altra parte per $\alpha = -\pi$ e $\beta = x$, (1.42) coincide con (1.37). \square

1.5 Un criterio di convergenza uniforme per le serie di Fourier

Dalla disuguaglianza di Bessel (1.2.3) e dal teorema 1.4.2 si deduce il seguente

Teorema 1.5.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, assolutamente continua su $[-\pi, \pi]$. Supponiamo inoltre f' di quadrato sommabile su $[-\pi, \pi]$. Allora f è sviluppabile in serie di Fourier in ogni punto e la sua serie di Fourier converge uniformemente su \mathbb{R}*

Dimostrazione. La prima parte del teorema è contenuta nel teorema 1.4.2. Dimostriamo la seconda. Sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.43)$$

la serie di Fourier di f . Per il teorema 1.4.2

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin kt + kb_k \cos kt)$$

è la serie di Fourier di f' . Per la disuguaglianza di Bessel essendo f' quadrato sommabile su $[-\pi, \pi]$, si ha

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} ((ka_k)^2 + (kb_k)^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(t))^2 dt =: C_0 < \infty. \quad (1.44)$$

D'altra parte utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (k|a_k| + k|b_k|) \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n ((ka_k)^2 + (kb_k)^2) \right)^{1/2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Posto $C_1 := \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ da questa e dalla (1.44) si trae

$$\sum_{k=1}^n (|a_k| + |b_k|) \leq \sqrt{C_0 C_1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |a_k \cos kt + b_k \sin kt| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty. \quad (1.45)$$

Questo dimostra la convergenza totale, e quindi uniforme, della serie (1.43)

□

Corollario 1.5.2. *La serie di Fourier di una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica, continua e C^1 a tratti è uniformemente convergente su \mathbb{R}*

Osservazione 9. Le ipotesi del teorema 1.5.1 e del corollario 1.5.2, garantiscono la convergenza totale delle serie di Fourier. Questo segue dalla dimostrazione del teorema 1.5.1

1.6 Convergenza secondo Abel delle serie di Fourier. Integrale di Poisson

Definizione 1.6 (Convergenza secondo Abel). Una serie numerica, a termini reali o complessi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \tag{1.46}$$

si dice *convergente nel senso di Abel*, se la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k \tag{1.47}$$

converge per $0 < r < 1$ e se esiste finito

$$S := \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k.$$

In questo caso si scrive

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k =_A S.$$

Osservazione 10. Se la serie (1.46) converge nel senso di Cauchy con somma S , cioè se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = S \tag{1.48}$$

allora (1.46) converge secondo Abel e

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k =_A S.$$

Dimostrazione. Infatti, se vale (1.48), la serie di potenze (1.47) converge uniformemente sull'intervallo chiuso $[0, 1]$ e quindi

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{r \rightarrow 1^-} \alpha_k r^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k.$$

□

Osservazione 11. In generale non vale il viceversa: una serie può convergere nel senso di bel e non convergere secondo Cauchy.

Esempio 7. La serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

non converge nel senso di Cauchy, mentre

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k =_A \frac{1}{2}.$$

Infatti, per $0 < r < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^k =_A \frac{1}{1+r}.$$

e quindi

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k r^k =_A \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+r} = \frac{1}{2}.$$

Esempio 8. La serie

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt, \quad 0 < t < \pi \tag{1.49}$$

non converge in senso ordinario. La sua somma parziale n -esima, infatti è il nucleo di Dirchlet $D_n(t)$, che si esprime, in forma chiusa, nel modo seguente

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

e la successione $\left(\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)_{n \in \mathbb{N}}$ non ha limite.

Nel senso di Abel, invece, (1.49) converge. Moltiplicando per $r^k, k \geq 0$, il termine k -esimo di (1.49), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt &= (\text{ponendo } z = re^{it}) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z^k \right) \\ &= (\text{se } |z| < 1) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{2|1-z|^2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt = \frac{1 - r^2}{2(1 + r^2 - 2r \cos t)} \tag{1.50}$$

per $0 < r < 1$ e $t \in \mathbb{R}$.

Per $r \rightarrow 1^-$ il secondo membro tende a zero qualunque sia $t \in]0, \pi]$. Allora, per la definizione di convergenza nel senso di Abel,

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos kt =_A 0 \quad \forall t \in]0, \pi].$$

Definizione 1.7 (Nucleo di Poisson). La funzione reale

$$P_r(t) := \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt \right), \quad 0 < r < 1, t \in \mathbb{R} \quad (1.51)$$

viene chiamata *nucleo di Poisson*. Per (1.50)

$$P_r(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos t}. \quad (1.52)$$

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

la sua serie di Fourier. Per il lemma di Riemann-Lebesgue, i coefficiente a_k e b_k tendono a zero per $k \rightarrow \infty$. Come conseguenza, la serie di potenze

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

converge per $0 < r < 1$. Definiamo

$$f_r(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.53)$$

per $0 < r < 1$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$. Sostituendo in (1.53) le espressioni di a_k e b_k in termini di f si ottiene

$$\begin{aligned} f_r(t) &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) ds + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \int_{-\pi}^{\pi} f(s) (\cos ks \cos kt + \sin ks \sin kt) ds \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(s)}{2} ds + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(s) (\cos k(t-s) ds) \right) \right) \end{aligned}$$

poichè $\sum_{k=1}^{\infty} r^k < +\infty$ si può integrare termine a termine,

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(t-s) \right) ds$$

e quindi, per (1.51) e per (1.14), e poiché $P(s) = P(-s)$,

$$f_r(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)P_r(t-s)ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s)P(s)ds. \quad (1.54)$$

Questa è nota come *formula integrale di Poisson*.

Teorema 1.6.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, sommabile su $[-\pi, \pi]$, e sia*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.55)$$

la sua serie di Fourier. Allora

$$f(t) =_A \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.56)$$

in ogni punto di Lebesgue (definizione in appendice A.1) di f .

In altre parole, ogni funzione 2π -periodica e localmente sommabile è sviluppabile in serie di Fourier nel senso di Abel in ogni suo punto di Lebesgue.

Premettiamo alcune proprietà del nucleo di Poisson.

Lemma 1.6.2. *Qualunque sia $r \in]0, 1[$ la funzione P_r ha le seguenti proprietà:*

- (i) $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds = 1$;
- (ii) $P_r(t) \geq 0$ e $P_r(t) = P_r(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;
- (iii) $P_r(t) \leq P_r(s)$ per $0 < s \leq t < \pi$;
- (iv) $P_r(\theta t) \leq (2/\theta^2)P_r(t)$ per $0 < \theta < 1$ e $0 < t < \pi/6$;
- (v) $P_r(t) \leq 1/(1 - \cos h)$ per $-\pi < t < \pi$, $|t| \geq h, 0 < h < \pi$.

Dimostrazione. (i) Prendendo $f \equiv 1$ nella (1.53) si ottiene

$$f_r(t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt = 1$$

in quanto, in questo caso, $a_k = b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$. Allora, per la (1.54)

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s)ds.$$

(ii) E' immediata.

(iii) Segue dalla (1.52) e dalla monotonia decrescente della funzione coseno

sull'intervallo $]0, \pi[$.

(iv) Osserviamo preliminarmente che, essendo

$$\frac{t^2}{4} \leq 1 - \cos t \leq \frac{t^2}{2} \quad \text{per } 0 < t < \pi/6,$$

per la (1.52) risulta

$$Q_r(t) \leq P_r(t) \leq 2Q_r(t)$$

ove

$$Q_r(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + rt^2}.$$

Allora, per $0 < \theta < 1$ e $0 < t < \theta/6$,

$$P_r(\theta t) \leq 2Q_r(\theta t) \leq \frac{2}{\theta^2} Q_r(t) \leq \frac{2}{\theta^2} P_r(t),$$

e la (iv) è dimostrata.

(v) Se $0 < h < \pi$, $-\pi < t < \pi$ e $|t| \geq h$, ancora per la (1.52) si ha

$$\begin{aligned} P_r(t) &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 2r(1 - \cos h)} \leq \frac{1}{1 - \cos h} \frac{1}{(1 - r)^2 + 2r} \\ &= \frac{1}{1 - \cos h} \frac{1}{1 + r^2} \leq \frac{1}{1 - \cos h} \end{aligned}$$

Con questo il lemma è completamente dimostrato. \square

Dimostrazione del teorema 1.6.1. Sia $t \in \mathbb{R}$ un punto di Lebesgue di f . Ricordando (1.53) e la definizione di convergenza secondo Abel, occorre e basta dimostrare che $f_r(t) \rightarrow f(t)$ per $r \rightarrow 1-$, e questa, per (1.54), è equivalente alla seguente

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(s) ds = f(t). \quad (1.57)$$

Poichè t è un punto di Lebesgue di f , qualunque sia $\varepsilon > 0$ esiste $h = h(\varepsilon) > 0$ tale che

$$\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} |f(t+s) - f(t)| ds \leq 2\varepsilon\alpha \quad \forall \alpha \in]0, h[. \quad (1.58)$$

Non è restrittivo supporre, come faremo sempre nel seguito, $0 < h < \pi/6$.

Ora

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1-} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(s) ds - f(t) &= (\text{per la (i) del Lemma 1.6.2}) \\ &\int_{-\pi}^{\pi} (f(t+s) - f(t)) P_r(s) ds \\ &\int_{|t-s| \leq h} (f(t+s) - f(t)) P_r(s) ds + \int_{|t-s| \geq h} (f(t+s) - f(t)) P_r(s) ds := I_r + J_r. \end{aligned}$$

Studiamo dapprima J_r . Posto per brevità

$$g_r(s) := (f(t+s) - f(t))P_r(s),$$

se $|s-t| \geq h$ risulta

$$g_r(s) \rightarrow 0 \quad \text{per } r \rightarrow 1-;$$

inoltre, per la (v) del lemma 1.6.2,

$$|g_r(s)| \leq \frac{|f(t+s) - f(t)|}{1 - \cos h} =: g(s).$$

La funzione g è sommabile su $[-\pi, \pi]$ perché tale risulta f . Possiamo quindi utilizzare il teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata per concludere che

$$\lim_{r \rightarrow 1-} J_r = \int_{|s| \geq h} \lim_{r \rightarrow 1-} g_r(s) ds = 0.$$

Esiste allora $\bar{r} = \bar{r}(\varepsilon, h) \equiv \bar{r}(\varepsilon)$, $\bar{r} < 1$, tale che

$$|J_r| < \varepsilon \quad r \in]\bar{r}, 1[. \quad (1.59)$$

La stima di I_r è più delicata. Fissato $\lambda \in]0, 1[$, utilizziamo il teorema di completa additività dell'integrale e scriviamo I_r nel modo seguente:

$$I_r = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{C_p} (f(t+s) - f(t))P_r(s) ds$$

ove, per ogni $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 0$,

$$C_p = \left\{ s \in [pi, \pi] \mid \lambda^{p+1} < \frac{|s|}{h} \leq \lambda^p \right\}.$$

Sull'insieme C_p risulta

$$P_r(\lambda^p h) \leq P_r(s) \leq P_r(\lambda^{p+1} h).$$

Qui abbiamo utilizzato la (ii) e la (iii) del lemma 1.6.2. Per la (1.58) abbiamo poi

$$\begin{aligned} \int_{C_p} |f(t+s) - f(t)| ds &\leq \int_{|s| \leq \lambda^p h} |f(t+s) - f(t)| ds \\ &\leq 2\lambda^p h \varepsilon = \frac{\varepsilon}{1-\lambda} \int_{C_p} ds. \end{aligned}$$

Qualunque sia $r \in]0, 1[$ possiamo quindi stimare I_r nel modo seguente:

$$I_r \leq \frac{\varepsilon}{1-\lambda} \sum_{p=0}^{\infty} P_r(\lambda^{p+1} h) \int_{C_p} ds$$

per la (iv) del lemma 1.6.2

$$\leq \frac{2\varepsilon}{\lambda^2(1-\lambda)} \sum_{h=0}^{\infty} \int_{C_p} P_r(s) ds = \frac{2\varepsilon}{\lambda^2(1-\lambda)} \int_{|s-t| \leq h} P_r(s) ds$$

per la (i) del lemma 1.6.2

$$\leq \frac{2\varepsilon}{\lambda^2(1-\lambda)}.$$

Da questa stima e dalla (1.59) otteniamo

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s) P_r(s) ds - f(t) \right| \leq \varepsilon \left(\frac{2}{\lambda^2(1-\lambda)} + 1 \right)$$

per ogni $r \in]\bar{r}, 1[$. Questo dimostra (1.56), e quindi il teorema. \square

Corollario 1.6.3. *Ogni funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e 2π -periodica è sviluppabile in serie di Fourier nel senso di Abel in ogni punto di \mathbb{R} .*

Dimostrazione. Basta ricordare che ogni punto di continuità è punto di Lebesgue, e poi utilizzare il teorema 1.6.1

Osservazione 12. Due funzioni aventi gli stessi coefficienti di Fourier sono uguali quasi dappertutto.

Dimostrazione. Infatti, siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sommabili su $[-\pi, \pi]$ e 2π -periodiche, e supponiamo che abbiano gli stessi coefficienti di Fourier. Allora, per (1.53),

$$f_r(t) = g_r(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall r \in]0, 1[.$$

Se $t \in \mathbb{R}$ è punto di Lebesgue tanto di f quanto di g , per il teorema 1.6.1 si ha

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} f_r(t) = \lim_{r \rightarrow 1^-} g_r(t) = g(t).$$

Questo dimostra che $f = g$ q.d. poichè l'insieme

$$\{t \in \mathbb{R} | t \text{ non è punto di Lebesgue di } f\} \cup \{t \in \mathbb{R} | t \text{ non è punto di Lebesgue di } g\}$$

ha misura nulla \square

Osservazione 13. La formula integrale di Poisson (1.54) viene anche scritta nel modo seguente

$$u_\varphi(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(0,1)} \varphi(y) \frac{1-|x|^2}{|x-y|^2} dH_1(y) \quad (1.60)$$

ove, se $x = re^{it}$ e $y = e^{is}$, con $t, s \in [-\pi, \pi[$,

$$u_\varphi(x) = f_r(t) \quad \text{e} \quad \varphi(y) = f(s)$$

Dimostrazione. Per verificare che (1.60) coincide con (1.54) osserviamo preliminarmente che

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y \rangle \\ &= |x|^2 + 1 - 2|x| \cos(t - s) \end{aligned}$$

e scriviamo l'integrale al secondo membro di (1.60) utilizzando la parametrizzazione $y = e^{ix}$, $-\pi < s < \pi$. Si ottiene

$$\begin{aligned} u_\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{ix}) \frac{1 - |x|^2}{1 + |x|^2 - 2|x| \cos(t - s)} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(t - s)} ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_r(t - s) = f_r(t). \end{aligned}$$

□

1.7 Serie di Fourier complesse

La teoria sviluppata nei paragrafi precedenti si estende banalmente alle funzioni a valori in \mathbb{C} . Nel caso complesso, tuttavia, le serie di Fourier si possono scrivere in una forma più compatta di quella del caso reale.

In questo paragrafo ci limiteremo soltanto a dedurre, da quella reale, la forma complessa delle serie di Fourier.

Sia dunque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione 2π -periodica, sommabile su $[-\pi, \pi]$. Come nel caso reale,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1.61)$$

si chiama serie di Fourier di f se

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt \quad \forall k \geq 0 \quad (1.62)$$

e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt \quad \forall k \geq 1. \quad (1.63)$$

Scrivendo $\cos kt$ e $\sin kt$ con le formule Eulero, si ottiene

$$\begin{aligned} a_k \cos t + b_k \sin kt &= a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt} \end{aligned}$$

e quindi, posto

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{per } k \in \mathbb{Z}, k \geq 1, \\ \frac{a_0}{2} & \text{per } k = 0, \\ \frac{a_{-k} + ib_{-k}}{2} & \text{per } k \in \mathbb{Z}, k \leq -1, \end{cases}$$

la serie (1.61) può scriversi così

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k e^{ikt}. \quad (1.64)$$

Inoltre, per (1.62) e (1.63),

$$\alpha_k = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos kt - i \sin kt}{2} dt, & \text{per } k \geq 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \pi f(t) \frac{\cos(-kt) + i \sin(-kt)}{2} dt, & \text{per } k < 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ikt} dt \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.65)$$

Capitolo 2

Applicazioni

2.1 L'operatore laplaciano

Diamo ora un significato, per lo più intuitivo, dell'operatore laplaciano, e del suo utilizzo per il calcolo di alcune leggi fisiche.

Definizione 2.1. Si chiama *operatore laplaciano* Δ l'operatore differenziale definito nel seguente modo

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.1)$$

Se f è una funzione di 3 variabili x, y, z , $\Delta f(x, y, z)$ denota il valore di

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

nel punto (x, y, z) . Così se pensiamo che $f(x, y, z)$ corrisponde alla temperatura nel punto (x, y, z) nello spazio, $\Delta f(x, y, z)$ è un numero che ci dice qualcosa sul comportamento della temperatura nelle vicinanze di (x, y, z) . Quindi, se Δf è positivo in un punto, significa che la temperatura nella vicinanza di quel punto è, in media, più elevata che la temperatura nel punto stesso. In particolare, se la temperatura ha un minimo in un determinato punto dello spazio, è ragionevole pensare che Δf sia non negativo in quel punto. A tale riguardo l'operatore laplaciano può essere visto come una sorta di generalizzazione tridimensionale dell'operatore d^2/dx^2 , solitamente usato nei calcoli dei punti estremali.

Se Δf è identicamente nullo, ci suggerisce che il valor medio di f in tutta una qualsiasi sfera sarà esattamente uguale al valore di f al centro della sfera.

Supponiamo che (x, y, z) sia un punto fissato nello spazio, e sia \bar{f} il valor medio di f calcolato su tutto l'interno della sfera di centro (x, y, z) . Se la sfera è sufficientemente piccola, abbiamo (approssimativamente)

$$\bar{f} - f(x, y, z) = K \Delta f(x, y, z) \quad (2.3)$$

dove K è una costante che dipende soltanto dalla dimensione della sfera. La relazione (2.3) è effettivamente corretta solo nel caso particolare in cui Δf è una costante, indipendente da x , y e z . L'approssimazione, comunque, è abbastanza corretta se la sfera è sufficientemente piccola.

Per esempio, vediamo l'equazione alle derivate parziali soddisfatta da f in un materiale omogeneo isotropico. Se t denota il tempo, e $k = K/s\rho$ dove K è la conduttività del materiale, s il suo calore specifico, e ρ la sua densità, l'equazione è

$$\Delta f = \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial t} \quad (k > 0). \quad (2.4)$$

Il nostro scopo non è dedurre (2.4) ma semplicemente interpretarla usando (2.3).

Supponiamo che Δf sia positivo in un punto. Quindi per (2.3) il suo valor medio nelle vicinanze di quel punto deve essere più grande del valore nel punto stesso. Visto che c'è differenza di temperatura, il calore deve spostarsi verso il punto in questione, aumentando la sua temperatura. Finché la temperatura sale $\partial f/\partial t$ è positivo. Questo suggerisce che $\partial f/\partial t$ possa essere proporzionale a Δf . Con un'attenta analisi si può ricavare (2.4) con un ragionamento di questo tipo.

L'equazione (2.4) è chiamata *equazione di diffusione del calore*.

Se la temperatura è allo stato stazionario, cioè indipendente dal tempo la (2.4) si riduce all'*equazione di Laplace*:

$$\Delta f = 0. \quad (2.5)$$

Consideriamo adesso le vibrazioni di un materiale elastico. Sia f la funzione che denota lo spostamento, in un istante di tempo, delle particelle, nel materiale in questione. In questo caso da (2.3) ricaviamo che un valore positivo di Δf sta a significare che le particelle sono quantitativamente maggiori, in media, che nel punto. Le forze elastiche produrranno quindi un accelerazione positiva della particella. Questo suggerisce che Δf sia proporzionale a $\partial^2 f/\partial t^2$. Otteniamo

$$\Delta f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Questa equazione alle derivate parziali è chiamata *equazione delle onde*.

Teniamo conto che tutte le derivazioni presenti in questa sezione sono state fatte solamente in termini intuitivi.

2.2 Il problema di Dirichlet

Utilizzando alcuni risultati della teoria delle funzioni olomorfe si dimostra che la formula integrale di Poisson (1.60) fornisce la soluzione del *problema di Dirichlet* per il disco $D(0,1)$.

Se Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^2 e se $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$, il problema di Dirichlet relativo a Ω e a φ si indica

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \omega \\ u/\partial\Omega = \varphi \end{cases}$$

e consiste nel determinare una funzione $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ tale che

$$\Delta u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow y} u(x) = \varphi(y) \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Ove

$$\Delta := \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$$

indica l'operatore di Laplace in \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.2.1. *Se $\varphi \in C(\partial D(0, 1), \mathbb{R})$ la funzione*

$$u : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = \int_{\partial D(0,1)} \varphi(y) P(x, y) dH_1(y),$$

ove

$$P(x, y) := \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^2},$$

risolve il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D := D(0, 1) \\ u/\partial D = \varphi. \end{cases}$$

Dimostrazione. Per l'osservazione 13, e per la (i) del lemma 1.6.2,

$$\int_{\partial D} P(x, y) dH_1(y) = 1 \quad \forall x \in D. \quad (2.7)$$

Inoltre, posto $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(s) = \varphi(e^{is})$,

$$u(x) = f_r(t) \quad \text{se } x = re^{it} \quad \text{e} \quad -\pi \leq t < \pi$$

Identificando il punto di \mathbb{R}^2 $x = (x_1, x_2)$ col numero complesso $x_1 + ix_2$.

Allora, se

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

è la serie di Fourier di f ,

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

poichè $r^k \cos kt + ir^k \sin kt = r^k e^{ikt} = x^k$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right) + \operatorname{Im} \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k \right).$$

Poichè $a_k, b_k \rightarrow 0$ per $k \rightarrow \infty$, le due serie di potenze all'ultimo membro hanno raggio di convergenza $\rho \geq 1$. La loro somma è quindi una funzione olomorfa in $D(0, 1)$. Poichè le funzioni olomorfe sono di classe $C^\infty(D, \mathbb{R})$ e

$$\Delta u(x) = 0 \quad x \in D.$$

Verifichiamo ora che u assume i valori di φ sul bordo di D . Fissiamo $z \in \partial D$ e valutiamo la differenza $u(x) - \varphi(z)$. Per la (2.7)

$$u(x) - \varphi(z) = \int_{\partial D} (\varphi(y) - \varphi(z)) P(x, y) dH_1(y),$$

e quindi, per ogni fissato $h \geq 0$,

$$|u(x) - \varphi(z)| = \left| \int_{|y-z| \leq h} (\varphi(y) - \varphi(z)) P(x, y) dH_1(y) \right| + \left| \int_{|y-z| \geq h} (\varphi(y) - \varphi(z)) P(x, y) dH_1(y) \right|.$$

Ora

$$\begin{aligned} \left| \int_{|y-z| \leq h} (\varphi(y) - \varphi(z)) P(x, y) dH_1(y) \right| &\leq \sup_{|y-z| \leq h} |\varphi(y) - \varphi(z)| \int_{\partial D} P(x, y) dH_1(y) \\ &= \sup_{|y-z| \leq h} |\varphi(y) - \varphi(z)|. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \left| \int_{|y-z| \geq h} (\varphi(y) - \varphi(z)) P(x, y) dH_1(y) \right| &\leq 2 \sup_{\partial D} |\varphi| \int_{|y-z| \geq h} \frac{1 - |x|^2}{2\pi h^2} dH_1(y) \\ &\leq 2 \sup |\varphi| \frac{1 - |x|^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Raccogliendo:

$$|u(x) - \varphi(z)| \leq \sup_{|y-z| \leq h} |\varphi(y) - \varphi(z)| + \frac{2 \sup |\varphi|}{h^2} (1 - |x|^2)$$

per ogni $h > 0$ e per ogni $x \in D$. Da questa si trae

$$\limsup_{x \rightarrow z} |u(x) - \varphi(z)| \leq \sup_{|y-z| \leq h} |\varphi(y) - \varphi(z)|$$

e quindi, data l'arbitrarietà di h e la continuità φ ,

$$\limsup_{x \rightarrow z} |u(x) - \varphi(z)| = 0 \quad (2.8)$$

D'altra parte, in generale,

$$0 \leq \liminf_{x \rightarrow z} |u(x) - \varphi(z)| \leq \limsup_{x \rightarrow z} |u(x) - \varphi(z)|$$

Queste disuguaglianze e la (2.8) implicano

$$\lim_{x \rightarrow z} u(x) = \varphi(z).$$

La dimostrazione del teorema è completa in quanto z è un arbitrario punto di ∂D . \square

2.3 L'equazione del calore

Consideriamo la distribuzione di temperatura in un muro isolante di spessore L . Immaginiamo che il muro sia costruito con un materiale omogeneo, e assumiamo che le sue faccie siano piatte, una faccia nel piano $x = 0$ e l'altra nel piano $x = L$. Immaginiamo si estenda sufficientemente lontano nelle direzioni y e z così che, nelle regione d'interesse, possiamo del tutto ignorare le variazioni con y e z .

La distribuzione di temperatura di regime nel muro è in questo caso banale. Se per esempio, la temperatura sulla faccia $x = 0$ è $T = 0$, e a $x = L$ è $T = 100$, la temperatura di regime è $T = 100x/L$. Vediamo che l'equazione di Laplace $\Delta T = 0$ in questo caso diventa $d^2T/dx^2 = 0$, con soluzioni della forma $T = a + bx$; i coefficienti a e b sono facilmente determinati dai valori in $x = 0$ e $x = L$.

Consideriamo ora il seguente problema. Immaginiamo che il muro abbia inizialmente temperatura $T = 0^\circ$ dappertutto, e supponiamo che, al tempo $t = 0$ la temperatura sulla faccia in $x = L$ improvvisamente salga a $T = 100^\circ$. Noi cerchiamo una espressione che ci dia la temperatura $T(x, t)$ come funzione di x e t all'interno del muro. Assumiamo che la temperatura, per valori positivi di t sia fissa a

$$T(0, t) = 0^\circ \quad T(L, 0) = 100^\circ \quad (2.9)$$

In linea di principio, possiamo risolverlo nella stessa maniera di prima. Separiamo le variabili nell'equazione del calore, che in questo caso prende la semplice forma

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.10)$$

e cerchiamo di combinare le soluzioni così ottenute in una serie che soddisfi le condizioni al contorno (2.9).

Una leggera complicazione compare adesso. La somma di due funzioni che soddisfano tali condizioni al contorno soddisfa il problema, in condizioni del tutto diverse, $T(0, t) = 0^\circ$, $T(L, t) = 200^\circ$. A questa situazione sia fa rimedio scrivendo la soluzione desiderata come somma della soluzione di regime e un'altra soluzione, chiamata soluzione transitoria, che soddisfa le condizioni al contorno omogenee. Abbiamo

$$T(x, t) = 100x/L + T_1(x, t) \quad (2.11)$$

e cerchiamo una soluzione $T_1(x, t)$ che soddisfi le condizioni omogenee

$$T_1(0, t) = 0, \quad T_1(L, t) = 0. \quad (2.12)$$

La soluzione finale del problema è ottenuta da (2.11).

La situazione generale è molto simile. Se in generale stiamo cercando la soluzione di un'equazione del calore

$$\Delta T = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.13)$$

che soddisfi condizioni al contorno non omogenee, il primo tentativo è quello di trovare una soluzione di regime che soddisfi queste soluzioni, e poi di trovare una soluzione dipendente dal tempo che soddisfi la condizione di omogeneità.

Separiamo in (2.13) la dipendenza dal tempo, con il metodo di separazione di variabili o semplicemente assumendo una soluzione nella forma

$$T(x, y, z) = u(x, y, z)e^{kt} \quad (2.14)$$

che sostituita in (2.13) diventa $(\Delta u)e^{kt} = kue^{kt}/\alpha^2$, che siccome e^{kt} non è mai zero, è equivalente a

$$\Delta u = \frac{k}{\alpha^2} u. \quad (2.15)$$

Nel problema particolare che stiamo considerando, (2.15) si riduce a

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{k}{\alpha^2} u. \quad (2.16)$$

Per ciascuna particolare soluzione u_k di (2.16) che soddisfi $u_k(0) = 0$ e $u_k(L) = 0$ avremo una soluzione di (2.10) nella forma

$$T_k(x, t) = u_k(x)e^{kt} \quad (2.17)$$

dove $T_k(0, t) = 0, T_k(L, t) = 0$.

A questo punto cerchiamo di determinare i coefficienti B_k così che

$$T(x, t) = \frac{100x}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k u_k(x) e^{kt} \quad (t > 0) \quad (2.18)$$

soddisfi le condizioni scritte prima. Dal momento che non è possibile soddisfare quelle condizioni con k positivo, scriviamo $k/\alpha^2 = -s^2$ e le soluzioni di (2.16) sono della forma $A \cos sx + B \sin sx$, che sono zero in $x = 0$ solamente se $A = 0$. In più dobbiamo avere $\sin sx = 0$ in $x = L$, così $s = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Segue che $k = -\alpha^2 s^2 = -\alpha^2 n^2 \pi^2 / L^2$ e (2.18) diventa

$$T(x, t) = \frac{100x}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{n^2 \alpha^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.19)$$

I coefficienti B_n sono determinati dalla richiesta che in $t = 0$ (2.19) sia 0 per $0 \leq x < L$ cosicché

$$-\frac{100x}{L} = \sum_{k=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.20)$$

Che è una serie di Fourier. I coefficienti sono dunque

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L -\frac{100x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{200(-1)^n}{n\pi} \quad (2.21)$$

e la soluzione formale del problema è data da

$$T(x, t) = \frac{100x}{L} + \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n^2 \alpha^2 \pi^2 t / L^2}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (2.22)$$

2.4 L'equazione della corda vibrante

Analizziamo adesso una corda elastica. Assumiamo che la tensione della corda sia sufficientemente grande che possiamo ignorare gli effetti della resistenza dell'aria e della forza di gravità. Assumiamo che la corda si muova su un piano e che le vibrazioni siano trasversali, cioè, che i punti della corda si muovano su linee perpendicolari alla linea di equilibrio della corda. Assumiamo che le vibrazioni siano sufficientemente piccole, così che la tensione della corda non dipenda dallo scostamento dall'equilibrio. Assumiamo anche che le vibrazioni siano piccole, così che l'angolo tra la corda e la linea di equilibrio si possa, in ogni istante, approssimare alla sua tangente o al suo coseno.

Sia x l'asse di equilibrio. In virtù delle assunzioni fatte, possiamo prendere $y(x, t)$ come lo scostamento dall'equilibrio, al tempo t , di un punto della corda, ove la posizione di equilibrio è il punto $(x, 0)$ nel piano xy . In altre parole, in ciascun punto t , questa particella si trova nel punto $(x, y(x, t))$.

L'equazione differenziale soddisfatta da $y(x, t)$ è

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

dove T è la tensione della corda e ρ è la densità della corda.

Ci concentriamo nel caso particolare in cui la tensione T è una costante, indipendente dalla posizione. Per cui l'equazione diventa

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2.24)$$

che possiamo riscrivere nella forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

in cui $v = \sqrt{T/\rho}$ corrisponde, fisicamente, alla velocità delle onde, trasmessa dalla corda.

L'equazione (2.25) è chiamata *l'equazione delle onde uno-dimensionale*.

Procediamo considerando le vibrazioni di una corda fissata in due punti, $x = 0$ e $x = L$, dove L sta a indicare la lunghezza della corda. Supponiamo di avere gli scostamenti e le velocità iniziali dei punti della corda

$$y(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x, 0) = h(x), \quad (2.26)$$

e cerchiamo di determinare lo scostamento $y(x, t)$ per $t > 0$, soggetto alle condizioni

$$y(0, t) = 0, \quad y(L, t) = 0 \quad (2.27)$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t}(L, t) = 0, \quad (2.28)$$

che sono conseguenza delle assunzioni che la corda sia inchiodata in $x = 0$ e $x = L$.

Iniziamo cercando soluzioni nella forma

$$y(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.29)$$

Sostituendo (2.29) in (2.25), otteniamo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (2.30)$$

e, visto che, la parte sinistra dell'equazione è dipendente dalla sola x e la parte destra della sola t , possiamo concludere che entrambi debbano essere costanti. Abbiamo adesso 3 possibilità, che la costante sia della forma k^2 , 0 o $-k^2$. Otteniamo rispettivamente

$$y(x, t) = (A \sinh kx + B \cosh kx)(C \sinh kvt + D \cosh kvt), \quad (2.31)$$

$$y(x, t) = (A + Bx) + (C + Dt), \quad (2.32)$$

$$y(x, t) = (A \sin kx + B \cos kx)(C \sin kvt + D \cos kvt). \quad (2.33)$$

Scartiamo le soluzioni nella forma (2.31) e (2.32), perché per soddisfare le condizioni al contorno (2.27) e (2.28) dobbiamo per forza avere i coefficienti A, B, C, D uguali a 0, dandoci una soluzione banale. Per soddisfare queste condizioni, ciascuna soluzione nella forma (2.33) deve per forza avere $B = 0$ e $k = n\pi/L$ per n interi. Otteniamo così infinite soluzioni di (2.25) che soddisfino le condizioni richieste; queste soluzioni sono della forma

$$y_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \sin \frac{n\pi vt}{L} + D_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \right) \quad (2.34)$$

ove abbiamo ommesso la costante davanti a $\sin(n\pi x/L)$ perché l'abbiamo combinata con le altre due costanti nella parentesi.

Adesso cerchiamo di trovare una soluzione che soddisfi le condizioni iniziali (2.26) in forma di serie infinita

$$y_n(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \sin \frac{n\pi vt}{L} + D_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \right). \quad (2.35)$$

Per soddisfare (2.26) dobbiamo avere

$$y(x, 0) = g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.36)$$

ottenuta prendendo $t = 0$ in (2.35), e

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.37)$$

ottenuta formalmente differenziando (2.35) termine a termine rispetto a t , e ponendo poi $t = 0$.

(2.36) e (2.37) sono valide se determiniamo i coefficienti D_n e C_n da

$$D_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (2.38)$$

$$\frac{n\pi x}{L} C_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (2.39)$$

Con questi coefficienti, (2.35) costituisce una soluzione formale del problema.

2.5 L'equazione delle onde uno-dimensionale

Continuiamo ad analizzare le vibrazioni di una corda di densità di massa costante ρ sotto una tensione costante T . Supponiamo che la corda in questo

caso sia infinitamente lunga, con la linea di equilibrio sull'asse x .

Quindi abbiamo

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial y}{\partial t}, \quad v^2 = \frac{T}{\rho} \quad (2.40)$$

come prima. Supponiamo di conoscere lo scostamento iniziale $g(x)$ e la velocità iniziale $h(x)$, così che $y(x, t)$ debba soddisfare le condizioni iniziali

$$y(x, 0) = g(x), \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = h(x). \quad (2.42)$$

Vogliamo determinare $y(x, t)$ per $t > 0$.

Assumiamo che le funzioni g e h abbiano le seguenti proprietà

$$g \text{ è differenziabile continuamente due volte} \quad (2.43)$$

$$h \text{ è differenziabile continuamente} \quad (2.44)$$

per semplicità, anche se queste sono più rigorose del necessario per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione.

Nella sezione precedente abbiamo dato a v la dimensione della velocità. Intuitivamente se inseriamo un disturbo nella corda, avremo onde che viaggiano lontano dall'origine del disturbo in entrambe le direzioni. Questo suggerisce di introdurre due nuove variabili

$$\alpha = x + vt \quad \beta = x - vt. \quad (2.45)$$

Con le nuove variabili, (2.40) diventa

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad (2.46)$$

dalla quale segue che

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = u(\beta) \quad (2.47)$$

e quindi

$$y(\alpha, \beta) = \int u(\beta) d\beta + q(\alpha) = p(\beta) + q(\alpha). \quad (2.48)$$

In termini delle variabili originali, segue che

$$y(x, t) = p(x - vt) + q(x + vt). \quad (2.49)$$

Da (2.41) otteniamo, ponendo $t = 0$ in (2.49),

$$g(x) = p(x) + q(x) \quad (2.50)$$

e da (2.42),

$$h(x) = -vp'(x) + vq'(x) \quad (2.51)$$

o, equivalentemente,

$$-p(x) + q(x) = \frac{1}{v} \int_0^x h(s) ds + C. \quad (2.52)$$

Risolvendo in contemporanea (2.50) e (2.52), otteniamo

$$q(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2v} \int_0^x h(s) ds + \frac{C}{2} \quad (2.53)$$

e

$$p(x) = \frac{1}{2}g(x) - \frac{1}{2v} \int_0^x h(s) ds - \frac{C}{2} \quad (2.54)$$

o

$$p(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2v} \int_x^0 h(s) ds - \frac{C}{2} \quad (2.55)$$

e pertanto (2.49) diventa

$$y(x, t) = \frac{g(x - vt) + g(x + vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} h(s) ds. \quad (2.56)$$

La (2.56) è chiamata *formula di D'Alambert*.

Analizziamo adesso le vibrazioni di una corda di lunghezza infinita, con vibrazioni periodiche di periodo $2L$, per i quali gli scostamenti e la velocità sono zero in $x = 0$ e $x = L$ (e quindi zero per ogni multiplo intero di L).

Le oscillazioni della forma

$$y_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \sin \frac{n\pi vt}{L} + D_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \right) \quad (2.57)$$

sono chiamate *onde stazionarie*. Il nome è particolarmente indicato perché queste onde non sembrano viaggiare lungo la corda. Tuttavia, se (2.49) è effettivamente la soluzione generale, allora dev'essere possibile scrivere (2.57) come sovrapposizione di due onde, una viaggiante verso destra e l'altra verso sinistra, come infatti succede. Usando le identità viste in (1.3) possiamo scrivere (2.57) nella forma

$$y_n(x, t) = \frac{1}{2} \left(D_n \sin \frac{n\pi(x + vt)}{L} + D_n \sin \frac{n\pi(x - vt)}{L} \right) + \frac{1}{2} \left(C_n \cos \frac{n\pi(x - vt)}{L} - C_n \cos \frac{n\pi(x + vt)}{L} \right),$$

che mostra che ogni onda stazionaria è sovrapposizione di onde in movimento. Sotto le ipotesi che g sia una funzione dispari continuamente differenziabile due volte di periodo $2L$, la sua serie di Fourier

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.58)$$

converge uniformemente e assolutamente a $g(x)$.

Se $h(x)$ è una funzione dispari continuamente differenziabile di periodo $2L$, allora

$$-\frac{1}{v} \int_0^x h(s) ds$$

è una funzione continuamente differenziabile due volte, ed è zero in $x = 0$, così che la sua serie di Fourier

$$-\frac{1}{v} \int_0^x h(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (2.59)$$

converge uniformemente e assolutamente, e può essere differenziata termine a termine,

$$\frac{h(x)}{v} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{L} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.60)$$

per produrre una serie che anch'essa converge uniformemente e assolutamente. Segue quindi che la serie (2.35) della sezione precedente è la somma di quattro serie convergenti:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{L} \left(C_n \sin \frac{n\pi vt}{L} + D_n \cos \frac{n\pi vt}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi(x+vt)}{L} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi(x-vt)}{L} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi(x-vt)}{L} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \frac{n\pi(x+vt)}{L} \\ &= \frac{1}{2} g(x+vt) + \frac{1}{2} g(x-vt) - \frac{1}{2v} \int_0^{x-vt} h(s) ds + \frac{1}{2v} \int_0^{x+vt} h(s) ds \\ &\quad \frac{g(x+vt)+g(x-vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} h(s) ds. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Abbiamo mostrato che sotto le ipotesi date su g e h , le serie soluzione (2.35) convergono a (2.56) e quindi costituiscono una soluzione del problema. Si verifica facilmente che sono soddisfatte le condizioni al contorno.

Appendice A

Appendice

A.1 Teorema di Lebesgue

Definizione A.1 (Punto di Lebesgue). Un punto $t \in \mathbb{R}$ si dice di Lebesgue per f se risulta

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(t+s) - f(t)| ds = 0. \quad (\text{A.1})$$

Teorema A.1.1. *Ogni punto di continuità è punto di Lebesgue.*

Infatti, se f è continua in t , per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\bar{h} > 0$ tale che $|f(s) - f(t)| < \varepsilon$ per ogni $s \in]t - \bar{h}, t + \bar{h}[$ e quindi

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h |f(t+s) - f(t)| ds \leq \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} \varepsilon ds = \varepsilon$$

per ogni $h \in]0, \bar{h}[$.

Teorema A.1.2. *Non tutti i punti di Lebesgue sono punti di continuità.*

Teorema A.1.3. *Per ogni funzione f localmente sommabile su \mathbb{R} , l'insieme $\{t \in \mathbb{R} | t \text{ non è punto di Lebesgue di } f\}$ ha misura nulla.*

In altre parole: quasi tutti i punti di \mathbb{R} sono punti di Lebesgue di f .

Per le dimostrazioni di questi teoremi rimandiamo a [3]

Bibliografia

- [1] «*Lezioni di analisi matematica 2» 2 / Ermanno Lanconelli. - Bologna : Pitagora, [1997]. - VI, 211 p. ; 24 cm.
- [2] Fourier series and orthogonal functions / Harry F. Davis. - Boston : Allyn and Bacon, c1963. - XII, 403 p. : ill. ; 23 cm
- [3] Terzo Corso di Analisi Matematica vol.1: Operatori lineari negli spazi L_p / B. Pini. - Bologna : Cooperativa Libreria Universitaria Editrice, stampa 1977. - 348, III p. ; 24 cm