

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITA' DI BOLOGNA
SECONDA FACOLTA' DI INGEGNERIA
CON SEDE A CESENA

CORSO DI LAUREA
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE
Classe LM-20 INGEGNERIA AEROSPAZIALE E ASTRONAUTICA
Sede di Forlì

TESI DI LAUREA
In SISTEMI PROPULSIVI AVANZATI LM

IMPLEMENTAZIONE DI UNA NUOVA METODOLOGIA
PER LA SIMULAZIONE DI UN MOTORE
SOVRALIMENTATO AD ALTE PRESTAZIONI

CANDIDATO
Tonietto Stefano

RELATORE
Ch.mo Prof. Fabrizio Ponti

Anno Accademico 2011/2012
Sessione III

A mio padre,

*per quello che
mi ha dato,
mi dà,
e mi darà,
sempre.*

ABSTRACT

In questo lavoro verrà analizzato lo sviluppo di una nuova modellazione matematica per la simulazione della dinamica del flusso all'interno del sistema di aspirazione per motori sovralimentati. Tale modellazione si basa sulla risoluzione numerica mediante la formulazione proposta da Courant, Isaacson e Rees (CIR) nel 1952 per il set delle equazioni non conservative di Eulero per il caso monodimensionale. L'applicazione attraverso il software *Matlab-Simulink* di tali discretizzazioni numeriche garantisce la possibilità di calcolare la dinamica del flusso all'interno del condotto. L'innovazione proposta da questo lavoro consiste nel considerare l'intero stato da iterare come un vettore, permettendo di gestire parte delle operazioni da compiere con delle matrici. Questo approccio è stato adottato sia per una maggior velocità di calcolo, sia per rendere più agevole la modifica della geometria, ad esempio in fase di progettazione. La routine di lancio del nuovo modello, infatti, gestirà autonomamente la scrittura delle matrici, a partire dai pochi parametri necessari per la definizione della geometria all'interno del codice.

Si andranno quindi a presentare i passaggi più importanti che hanno portato alla scrittura del codice, con particolare attenzione poi alla fase di validazione del modello. Essa sarà basata sia su un altro codice presente in letteratura, modellato anch'esso attraverso risoluzione CIR, sia mediante dati sperimentali utilizzati per la validazione di tale implementazione. Seguirà infine un'analisi dettagliata sui fattori che influenzano, positivamente e negativamente, l'esito delle simulazioni realizzate, come la discretizzazione spaziale e quella temporale, prestando sempre particolare attenzione alla stabilità del metodo.

The aim of this dissertation is to analyse the development of a new mathematical model for the simulation of flow dynamics in the intake system of a supercharged engine. This model is based on the numerical solution according to the method proposed by Courant, Isaacson and Rees (CIR) in 1952 for the non-conservative one-dimensional Euler equations. Thanks to the application of such numerical discretisations using Matlab-Simulink software it is possible to calculate the flow dynamics inside the duct. This study is innovative, as it considers the entire iteration of state variables as a vector, thus

managing some of the operations through matrices. This method ensures both faster calculations and a simpler geometry definition, for example during the design stage. Starting from the few parameters necessary for the geometry definition, the launch procedure of the new model will autonomously manage the matrices writing.

The first part of this dissertation presents the fundamental stages of the script writing, taking into consideration also the validation of the model. The validation is based both on another model found in the bibliography and on experimental data used for the validation of this implementation. The final part analyses in detail all the factors that influence, either in a positive or in a negative way, the simulation results, such as the spatial and temporal discretisations. Particular attention is paid to the model stability.

INDICE

ABSTRACT	3
INDICE	5
1. INTRODUZIONE	7
1.1. COS'È LA SOVRALIMENTAZIONE	8
2. TRATTAZIONE MATEMATICA	11
2.1. FLUSSO NON VISCOSO IN CONDOTTO MONODIMENSIONALE	11
2.1.1. <i>Continuità</i>	11
2.1.2. <i>Quantità di moto</i>	12
2.1.3. <i>Equazione dell'energia</i>	14
2.2. EQUAZIONI IN FORMA NON CONSERVATIVA	14
2.3. EQUAZIONI DEL METODO DELLE CARATTERISTICHE PER UN GAS IDEALE	16
2.4. SOLUZIONE NUMERICA: IL <i>CIR METHOD</i>	18
2.5. APPLICAZIONE DEL <i>CIR METHOD</i>	21
3. LA MODELLAZIONE	25
3.1. INTRODUZIONE	25
3.2. IL MODELLO CIR DI CONFRONTO	25
3.3. PRIMA MODELLAZIONE: SOLUZIONE NUMERICA DI 5 ELEMENTI RETTILINEI	26
3.3.1. <i>Definizione delle condizioni iniziali</i>	26
3.3.2. <i>La modellazione</i>	28
3.3.3. <i>Risultati della simulazione</i>	32
3.3.4. <i>Giunzione a Y in forma numerica</i>	33
3.4. SECONDA MODELLAZIONE: SOLUZIONE MATRICIALE DI 5 ELEMENTI RETTILINEI	36
3.4.1. <i>Modellazione matriciale con aumento dello stato</i>	37
3.4.2. <i>Inserimento delle condizioni al contorno</i>	41
3.4.3. <i>Risultati</i>	43
3.5. TERZA MODELLAZIONE: GIUNZIONE A Y MATRICIALE	47
3.5.1. <i>Modellazione della Y mediante un singolo nodo</i>	47
3.5.2. <i>Risultati</i>	51
3.6. QUARTA MODELLAZIONE: BOUNDARY CONDITIONS COME INPUT ESTERNI	52
3.6.1. <i>Modellazione di 5 elementi rettilinei</i>	53
3.6.2. <i>Modellazione della farfalla</i>	58
3.6.3. <i>Modellazione delle valvole</i>	67
3.7. MODELLAZIONE FM E HM	68
4. LA SIMULAZIONE	71
4.1. INTRODUZIONE	71

4.2. MODELLO DEL CONDOTTO COMPLETO CON DISCRETIZZAZIONE FISSA	71
4.2.1. <i>La procedura di lancio della simulazione</i>	72
4.2.2. <i>La simulazione</i>	75
4.3. MODELLO A DISCRETIZZAZIONE VARIABILE	78
4.3.1. <i>La funzione Geometria</i>	79
4.3.2. <i>Stabilità del metodo</i>	84
4.4. INFLUENZA DEL NUMERO DI ELEMENTI SULLA PRECISIONE DEL MODELLO.....	85
4.4.1. <i>Confronto tra 50 elementi manuali e 50 elementi Geometria</i>	85
4.4.2. <i>Confronto tra 50 e 27 elementi Geometria</i>	90
4.4.3. <i>Confronto tra 50 e 19 elementi Geometria</i>	94
4.4.4. <i>Analisi dei risultati ottenuti</i>	98
4.5. INFLUENZA DELLA DISCRETIZZAZIONE TEMPORALE.....	98
4.6. VARIAZIONE DEL PUNTO DI FUNZIONAMENTO.....	100
5. CONSIDERAZIONI FINALI E CONCLUSIONI.....	103
5.1. CONSIDERAZIONI E SVILUPPI FUTURI	103
5.2. CONCLUSIONI	104
6. BIBLIOGRAFIA	105
7. RINGRAZIAMENTI	107

1. INTRODUZIONE

Questa tesi analizzerà la realizzazione di una nuova tipologia di modelli matematici che permetta di valutare, in maniera più efficiente, la quantità d'aria che attraversa i condotti di aspirazione e scarico di un propulsore. La quantità di carburante da iniettare nella camera di combustione, o nei *runner* d'aspirazione, è calcolata in base al rapporto stechiometrico proprio a partire dalla valutazione sulla massa d'aria aspirata. Conoscere tale quantità nella maniera più precisa possibile significa ovviamente aumentare il rendimento del propulsore e, nelle applicazioni ad alte prestazioni, ottenere dal motore la massima potenza disponibile in quelle specifiche condizioni. Un'ulteriore difficoltà, rispetto ai sistemi di aspirazione tradizionali, è data dalla sovralimentazione. La presenza della turbina e del compressore, che comportano ovviamente pressioni molto più elevate di quelle dei motori aspirati, fa sì che la presenza di onde d'urto nei canali e nei collettori abbia un ruolo fondamentale nella dinamica della pressione e delle velocità nei condotti. Per questo motivo si è voluta creare una nuova tipologia di modello simulativo, che permetta di validare l'apparato di aspirazione in fase di progettazione, ma soprattutto che garantisca un'ottima velocità di calcolo, mantenendo al tempo stesso una buona precisione in quanto riesce a considerare anche i fenomeni di compressione ed espansione a seguito della propagazione delle onde.

Il lavoro svolto in questa tesi prevede innanzitutto una trattazione matematica della risoluzione numerica, mediante metodologia CIR, delle equazioni non conservative della dinamica dei fluidi. Parte di tale trattazione era già stata esposta nella relazione di preparazione a questo lavoro, ma si è ritenuto opportuno riportarla nuovamente per una più completa comprensione della parte di modellazione. Si passerà poi ad applicare questo metodo risolutivo ad elementi con complessità sempre maggiore, fino a simulare il comportamento di condotti di aspirazione completi di tutti i componenti caratteristici, quali farfalla, giunzioni e valvole.

Si cercherà poi di ottimizzare i parametri necessari alla simulazione. La prestazione del metodo, infatti, è fortemente influenzata dalla griglia di soluzione usata, sia per quanto riguarda la discretizzazione spaziale, sia per quella temporale. Si proverà quindi a far variare tali parametri per cercare di ottenere un buon grado di affidabilità della simulazione, ma con un ridotto tempo per la stessa.

1.1. Cos'è la sovralimentazione

Innanzitutto verrà data una panoramica generale sulla tipologia di motori che si andrà a considerare. Si definiscono motori sovralimentati tutti i propulsori che aumentano, mediante un compressore, la densità dell'aria nel collettore di aspirazione. Il principale scopo è quello di introdurre nel cilindro una quantità di carica fresca superiore a quella corrispondente all'aspirazione che avverrebbe naturalmente a seguito del movimento del pistone. Questo permette di ottenere una maggior potenza a parità di cilindrata visto che, a parità di volume della camera di combustione, è contenuta una maggior quantità di aria. Avendo quindi a disposizione più massa d'aria all'interno del cilindro, si andrà ad introdurre anche una quantità maggiore di combustibile, fino al limite stechiometrico, ottenendo perciò una quantità maggiore di lavoro utile.

Spesso può succedere che la struttura del motore non possa reggere una sovrappressione nella camera di combustione, obbligando quindi ad aumentare le dimensioni del propulsore e quindi ad un maggior peso ed ingombro. Un altro problema legato alla sovrappressione portata dalla sovralimentazione è l'aumento del rischio di detonazione, ovvero la combustione esplosiva di parte della miscela aria-combustibile prima che venga completamente investita dal fronte di fiamma. Si è visto però che anche riducendo la pressione massima, aggiustando opportunamente il rapporto di compressione e il volume della camera di combustione, si ottiene comunque un ciclo che fornisce un lavoro utile maggiore rispetto a quello per aspirazione naturale. Questo processo di riprogettazione del propulsore viene chiamato *downsizing*, in quanto, grazie ad un compressore accoppiato, è possibile, a parità di prestazioni, ottenere un motore di dimensioni e pesi più contenuti rispetto all'originale. Un'altra metodologia di riprogettazione che interessa i motori sovralimentati è il *downspeeding*, utilizzato specialmente nei motori Diesel, in maniera tale da ridurre il numero di giri di rotazione ed evitare quindi i problemi che evidenziano tali propulsori ad alti regimi.

In generale comunque si può affermare che un motore sovralimentato presenta una riduzione di ingombro e di cilindrata a parità di potenza sviluppata, con un netto miglioramento del rendimento dovuto ad un processo di combustione migliore. Tali propulsori presentano però anche alcuni svantaggi, primo tra tutti l'aumento dello stress termico e meccanico sugli organi del motore, legato anche alla probabilità più elevata di fenomeni detonanti nei motori ad accensione comandata, e inoltre, se sprovvisti di

particolari accorgimenti, possono presentare tempi di risposta molto lunghi legati al fenomeno di *turbo lag*.

Passiamo ora alla classificazione delle tipologie dei turbopropulsori. Questa viene fatta in base alla modalità con cui il turbocompressore viene trascinato. In particolare, può essere mosso mediante un accoppiamento meccanico all'albero motore (in questo caso si parla di sovralimentazione meccanica) o mediante una turbina posta in rotazione dai gas di scarico (turbosovralimentazione a pressione costante o ad impulsi) oppure un accoppiamento dei due metodi (motore turbo composito).

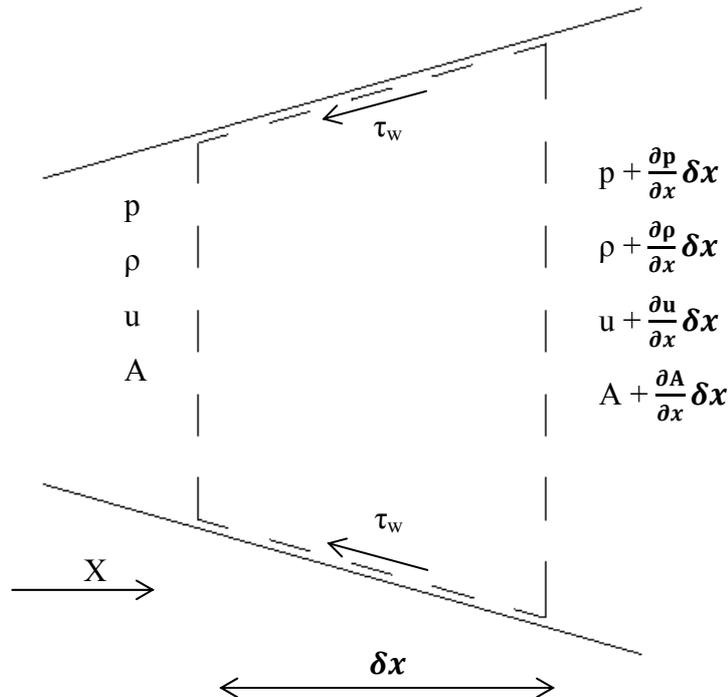
Il caso più frequente è quello della turbo sovralimentazione, in cui l'accoppiamento tra il propulsore e il turbocompressore è solo di tipo fluidodinamico, mediante lo scarico dei gas combusti dai cilindri che pongono in rotazione la turbina. Questo permette di recuperare parte dell'energia posseduta dai gas di scarico dovuta al troncamento di espansione nel cilindro pari al volume iniziale del ciclo.

2. TRATTAZIONE MATEMATICA

Presentiamo ora la trattazione matematica che ha portato all'implementazione della nuova metodologia.

2.1. Flusso non viscoso in condotto monodimensionale

Consideriamo il flusso di un fluido comprimibile attraverso una sezione infinitesima di un condotto, dove le variazioni di sezione sono perpendicolari alla direzione del flusso. Nell'ipotesi che tali variazioni siano graduali (cioè non presentino discontinuità) possiamo allora considerare che le caratteristiche del fluido siano costanti lungo la generica sezione del canale. Con queste ipotesi le leggi della dinamica del fluido all'interno del volume di controllo possono essere scritte in funzione solo di x e di t . Per questo si parla di *quasi-one-dimensional flow*.



Ricaviamo ora le equazioni di continuità e di conservazione del momento e dell'energia.

2.1.1. Continuità

Secondo la legge di conservazione, la variazione della massa all'interno del volume di controllo mostrato in figura è uguale al netto tra il flusso entrante e il flusso uscente dalle superfici del volume:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_{in} - \dot{m}_{out}$$

Sostituendo in termini di velocità u , sezione A , pressione p e densità ρ , si ottiene:

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} = \rho u A - [(\rho + d\rho)(u + du)(A + dA)]$$

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

2.1.2. Quantità di moto

L'equazione della quantità di moto prevede che la somma delle forze di pressione e degli attriti presenti con le pareti lungo il volume di controllo sia pari alla variazione della Q.d.M. all'interno del sistema.

Quindi:

$$\frac{\partial m}{\partial t} \cdot u + \dot{m}_{out} \cdot (u + du) - \dot{m}_{in} \cdot u = \sum (F_{pressione} + F_{attrito})$$

Valutiamo inizialmente il termine delle forze di pressione e degli attriti, considerando come verso positivo la direzione x . Il bilancio delle pressioni sarà:

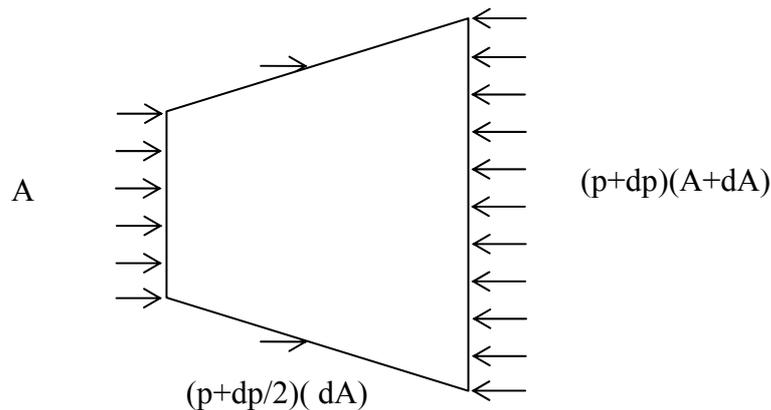


Fig. 1 - Elemento di discretizzazione di un condotto cilindrico

Dove il termine $(p + \frac{dp}{2}) dA$ rappresenta il contributo di pressione lungo le pareti inclinate del condotto. Risulta quindi:

$$pA - (p + dp)(A + dA) + \left(p + \frac{dp}{2}\right) dA = pA - pA - Adp - pdA + pdA + \frac{dp \cdot dA}{2}$$

$$= -Adp$$

che, tenendo conto che $d(pA) = pdA + Adp$, può essere riscritto come $-Adp = pdA - d(pA)$

Passiamo ora ad analizzare il termine dovuto all'attrito del fluido sulle pareti del condotto. Le forze possono essere modellate semplicemente come forze di taglio τ_w , che si oppongono al movimento del fluido. Nel volume infinitesimale le forze di superficie saranno $-\pi D \tau_w dx$, dove D è il diametro equivalente del condotto. Si può pertanto esprimere la forza τ_w in funzione del coefficiente di attrito delle pareti del condotto f , perciò: $\tau_w = \frac{1}{2} \rho u^2 f$. Sostituiamo quindi nella formula scritta in precedenza e otteniamo:

$$-\frac{1}{2} \rho u^2 f \pi D dx$$

Ricaviamo ora il primo termine dell'equazione di bilancio della quantità di moto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial t} \cdot u + \dot{m}_{out} \cdot (u + du) - \dot{m}_{in} \cdot u \\ = \frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} + (\rho + d\rho)(u + du)(A + dA)(u + du) - \rho u^2 A \end{aligned}$$

Espandiamo le equazioni, eliminando direttamente tutti i termini infinitesimi di ordine superiore al primo, essendo essi trascurabili.

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} \cdot u + \rho u^2 dA + u^2 A d\rho + 2\rho u A du$$

Possiamo quindi riarrangiare i termini e ottenere:

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} + d(\rho u^2 A)$$

Raggruppando quindi tutti i termini dell'equazione di bilancio della quantità di moto, otteniamo:

$$\frac{\partial(\rho u A dx)}{\partial t} + d(\rho u^2 A) = p dA - d(pA) - \frac{1}{2} \rho u^2 f \pi D dx$$

Possiamo dunque far uscire dal segno di derivata temporale il dx ed usarlo per dividere il resto dell'equazione, ottenendo la formula finale dell'equazione di conservazione del momento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 A)}{\partial x} = \frac{p \partial A}{\partial x} - \frac{\partial(pA)}{\partial x} - \frac{1}{2} \rho u^2 f \pi D \\ \frac{\partial(\rho u A)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 A + pA) - \frac{p \partial A}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho u^2 f \pi D = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

2.1.3. Equazione dell'energia

L'equazione dell'energia può essere ricavata applicando il primo principio della termodinamica al volume di controllo nel tratto infinitesimo del condotto.

$$\dot{Q} - \dot{L}_s = \frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{\partial H_0}{\partial x} dx$$

Dove \dot{Q} e \dot{L}_s sono i flussi netti di calore e lavoro scambiati dal volume di controllo con l'esterno e E_0 e H_0 sono rispettivamente l'energia interna totale di ristagno e l'entalpia totale di ristagno.

Analizziamo prima il termine a destra dell'equazione di bilancio, e riscriviamo energia interna e entalpia totali in termini specifici:

$$\frac{\partial(e_0 \rho A dx)}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 \rho A u)}{\partial x} dx$$

dove $e_0 = e + \frac{1}{2}u^2$ e $h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho}$.

Passiamo ora ai termini di calore e lavoro. Indichiamo con q il flusso di calore per unità di massa, quindi il flusso totale dovuto al volume di controllo sarà pari a qm . Considerando per convenzione che il flusso sia positivo se entrante nel volume di controllo, possiamo scrivere $q\rho A dx$. Il lavoro scambiato dal sistema, cioè \dot{L}_s , è sempre nullo per un elemento di condotto di un motore a combustione interna. Quindi, ri assemblando i termini, si ottiene:

$$q\rho A dx = \frac{\partial(e_0 \rho A dx)}{\partial t} + \frac{\partial(h_0 \rho A u)}{\partial x} dx$$
$$\frac{\partial(\rho e_0 A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h_0 A)}{\partial x} - q\rho A = 0 \quad (3)$$

2.2. Equazioni in forma non conservativa

Il metodo delle caratteristiche è basato sullo sviluppo non conservativo del set delle tre equazioni appena sviluppate. Sono di facile derivazione le prime due equazioni, quella della continuità e quella della conservazione del momento. Per quanto riguarda la terza, invece, si svilupperà innanzitutto la forma conservativa, che sarà poi espansa e combinata con le prime due per ottenere la forma non conservativa della stessa.

L'equazione di continuità è di banale derivazione:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u A)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} = 0$$

Espandiamo le derivate e otteniamo l'equazione di continuità in forma non conservativa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} = 0$$

Passiamo ora alla seconda, l'equazione del momento, che riscriviamo innanzitutto espandendo alcuni termini:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u A)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 A + p A) - \frac{p \partial A}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho u^2 f \pi D &= 0 \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\rho u^2}{A} \frac{dA}{dx} + \rho G &= 0 \end{aligned}$$

dove $G = \frac{1}{2} u |u| f \frac{4}{D}$ è il termine legato all'attrito del fluido lungo il condotto (il termine $u |u|$ viene usato per assicurarsi che la direzione della forza di attrito risulti sempre contraria alla direzione del flusso).

Procediamo con i passaggi successivi: partiamo con lo sviluppare le derivate dell'equazione del bilancio della quantità di moto, dividendo poi per u , in maniera tale da ottenere il primo termine che compare nell'equazione di continuità ottenuta in precedenza e poi sostituirla:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\rho}{u} \frac{\partial u^2}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{\rho}{u} G &= 0 \\ \frac{\rho}{u} \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} + 2\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{u} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} + \frac{\rho}{u} G &= 0 \end{aligned}$$

Semplificando i termini uguali, si può moltiplicare per u/ρ ottenendo così la forma non conservativa dell'equazione del momento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G = 0$$

Passiamo quindi all'equazione dell'energia. Come detto in precedenza, sviluppiamo inizialmente l'equazione in forma conservativa e utilizziamo poi le altre due relazioni appena ricavate per sviluppare i termini:

$$\frac{\partial(\rho e_0)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u h_0)}{\partial x} + \frac{\rho u h_0}{A} \frac{dA}{dx} - q\rho = 0$$

Riscriviamo innanzitutto $e_0 = e + \frac{1}{2} u^2$ e $h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho} = e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \right] + \frac{\rho u}{A} \left(e + \frac{1}{2} u^2 + \frac{p}{\rho} \right) \frac{dA}{dx} - q\rho = 0$$

Sviluppiamo quindi le derivate:

$$\begin{aligned} \left(e + \frac{1}{2}u^2\right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial t}\right) + u \left(e + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left(e + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \rho u \left[\frac{\partial e}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}\right] + \frac{\rho u}{A} \left(e + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) \frac{dA}{dx} - q\rho = 0 \end{aligned}$$

Sostituiamo ora ai termini i valori trovati nelle prime due equazioni e sviluppiamo le moltiplicazioni, semplificando successivamente l'equazione:

$$\begin{aligned} \left(e + \frac{1}{2}u^2\right) \left(-u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx}\right) + \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u \left(-u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - G\right)\right) \\ + u \left(e + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left(e + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + \rho u \left[\frac{\partial e}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}\right] + \frac{\rho u}{A} \left(e + \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{\rho}\right) \frac{dA}{dx} - q\rho = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial e}{\partial t} + u(-G)\right) + u \left(\frac{p}{\rho}\right) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \left(\frac{p}{\rho}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \rho u \left[\frac{\partial e}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}\right] + \frac{\rho u}{A} \left(\frac{p}{\rho}\right) \frac{dA}{dx} - q\rho = 0 \end{aligned}$$

Dividiamo tutto per ρ e sviluppiamo le moltiplicazioni:

$$\frac{\partial e}{\partial t} - uG + \frac{p}{\rho^2} u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{up}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{u}{A} \left(\frac{p}{\rho}\right) \frac{dA}{dx} - q = 0$$

Possiamo quindi raccogliere $\frac{p}{\rho^2}$:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{p}{\rho^2} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx}\right) - \frac{p}{\rho^2} u \frac{\partial \rho}{\partial x} + -(q + uG) = 0$$

È possibile sostituire nuovamente il termine raccolto tra parentesi con l'equazione di continuità e ottenere dunque $-\frac{\partial \rho}{\partial t}$, ottenendo infine l'equazione dell'energia in termini non conservativi:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) - (q + uG) = 0$$

2.3. Equazioni del Metodo delle Caratteristiche per un gas ideale

Possiamo ora sviluppare il Metodo delle Caratteristiche per un gas ideale. Partiamo innanzitutto ricordando la legge di un gas ideale $pV = RT$, inoltre è noto che per tale modello $e = e(T)$.

Possiamo quindi differenziare tali relazioni rispetto a t e a x :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial e}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \frac{\partial e}{\partial x} = \frac{\partial e}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Dove, per definizione $c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_v$, quindi:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \qquad \frac{\partial e}{\partial x} = c_v \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$$

Inoltre, differenziando anche la legge dei gas ideali:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{T}{R} \frac{\partial R}{\partial t} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{T}{R} \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Andiamo quindi a sostituire le relazioni appena scritte nell'equazione dell'energia in forma non conservativa. Moltiplichiamo poi per $\frac{\rho R}{c_v}$, così da isolare i termini $\frac{\partial p}{\partial t}$ e $\frac{\partial p}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} c_v \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial t} - c_v \frac{T}{R} \frac{\partial R}{\partial t} - c_v \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u c_v \frac{1}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial x} - u c_v \frac{T}{R} \frac{\partial R}{\partial x} - u c_v \frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\ - (q + uG) = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - RT \frac{\partial \rho}{\partial t} - uRT \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{pR}{\rho c_v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \rho T \frac{\partial R}{\partial t} - u \rho T \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\rho R}{c_v} (q + uG) \\ = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - \left(RT + \frac{pR}{\rho c_v} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \rho T \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \frac{\rho R}{c_v} (q + uG) = 0 \end{aligned}$$

Sapendo che $c_v = c_p - R = \frac{R}{k-1}$ e $c_p = \frac{kR}{k-1}$ e inoltre $\frac{p}{\rho} = RT$ sostituendo nei coefficienti dell'equazione trovata otteniamo:

$$\begin{aligned} RT + \frac{pR}{\rho c_v} &= RT + \frac{pR}{\rho R} (k-1) = kRT = a^2 \\ \frac{\rho R}{c_v} &= \frac{\rho R}{R} (k-1) = \rho(k-1) \end{aligned}$$

Cioè otteniamo l'equazione:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \rho T \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) - \rho(k-1)(q + uG) = 0$$

Ipotizzando che lungo il condotto non ci siano reazioni chimiche, possiamo considerare che la composizione dei gas rimanga costante, per questo motivo è possibile porre il termine $\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} = 0$.

Otteniamo quindi il set di tre equazioni:

$$\begin{aligned} (I) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} &= 0 \\ (II) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G &= 0 \\ (III) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \rho(k-1)(q + uG) &= 0 \end{aligned}$$

2.4. Soluzione numerica: il *CIR Method*

Il set di equazioni differenziali appena ricavato non presenta nessuna forma di soluzione chiusa, è necessario perciò utilizzare una soluzione numerica. In letteratura sono presenti notevoli esempi di soluzioni approssimate applicate alla discretizzazione di queste equazioni differenziali, ma nel nostro caso si è scelto di utilizzare il *CIR Method*, che prende il nome dagli autori Courant, Isaacson e Rees. Tale soluzione numerica è strettamente legata al Metodo delle Caratteristiche (MOC), ma è sicuramente di più semplice implementazione. Il CIR presenta un'accuratezza del primo ordine, perciò ha alcune problematiche nelle discontinuità del campo di moto, ma ha sicuramente il pregio di essere molto stabile e rapido negli step di calcolo.

Procediamo innanzitutto con un riarrangiamento delle relazioni descritte precedentemente, in maniera tale da trasformare queste equazioni differenziali alle derivate parziali in equazioni ordinarie rispetto al tempo. Questo si otterrà considerando un particolare percorso definito nel piano tempo-spazio.

Partiamo applicando tale manipolazione:

$$\text{equazione (III)} + a^2 \cdot \text{equazione (I)} + \rho a \cdot \text{equazione (II)}$$

Iniziamo con il sostituire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \rho(k-1)(q + uG) + a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} \right] \\ + \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G \right] = 0 \end{aligned}$$

Per semplicità di lettura scriviamo $\Delta_1 = -\rho(k-1)(q + uG)$, $\Delta_2 = a^2 \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx}$, $\Delta_3 = \rho a G$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \Delta_1 + a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_2 \\ + \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \Delta_3 = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + a \frac{\partial p}{\partial x} + a^2 \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \end{aligned}$$

Analogamente si procede per la seconda manipolazione:

$$\text{equazione (III)} + a^2 \cdot \text{equazione (I)} - \rho a \cdot \text{equazione (II)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) - \rho(k-1)(q+uG) + a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} \right] \\ - \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + G \right] = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \Delta_1 + a^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_2 \\ - \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \Delta_3 = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = 0 \end{aligned}$$

Otteniamo quindi il set di equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \Delta_1 = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo ora la descrizione dei percorsi proposti dal metodo CIR: viene definita una griglia ortogonale nel piano spazio-tempo dove la coordinata i rappresenta la posizione spaziale, mentre la coordinata n rappresenta quella temporale. Le equazioni, quindi, vengono risolte per ogni nodo di tale griglia. Lo scopo del metodo CIR è quello della valutazione delle proprietà del fluido (pressione, velocità e densità) nel punto $[i, n+1]$ partendo dalla conoscenza delle caratteristiche del fluido nel punto stesso e in quelli ad esso adiacenti all'istante di tempo precedente, cioè $[i-1, n]$, $[i, n]$ e $[i+1, n]$.

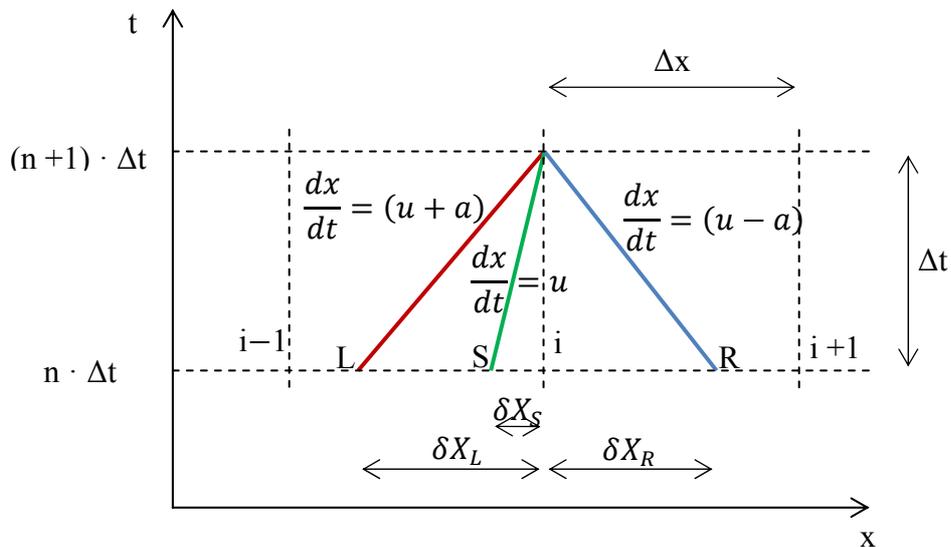


Fig. 2 - Schema rappresentativo della soluzione CIR

Iniziamo con la prima equazione, i differenziali della pressione p e della velocità u , possono essere espressi come :

$$dp = \frac{\partial p}{\partial t} dt + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

Andiamo a considerare il percorso definito dall'equazione $dx = (u + a)dt$ che corrisponde al cammino di una onda d'urto progressiva che si propaga con velocità locale di $u+a$, spesso chiamata onda di Mach o linea caratteristica (*line characteristic*) e causa della variazione di pressione, densità, temperatura e velocità del fluido. Allora le due relazioni appena scritte diventano:

$$dp = \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} (u + a) \right] dt$$

$$du = \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} (u + a) \right] dt$$

Possiamo quindi sostituire nell'equazione di partenza e ottenere:

$$\frac{dp}{dt} + \rho a \frac{du}{dt} + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0$$

che rappresenta la relazione tra la variazione di pressione e di velocità nel tempo lungo la caratteristica dell'onda progressiva.

Analogamente si può procedere per la seconda equazione, considerando però la caratteristica di un'onda regressiva $dx = (u - a)dt$:

$$dp = \left[\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x} (u - a) \right] dt$$

$$du = \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} (u - a) \right] dt$$

Sostituendo tali termini nell'equazione:

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{du}{dt} + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = 0$$

Infine valutiamo il comportamento lungo il percorso caratteristico (*pathline characteristic*) che rappresenta la propagazione di un disturbo, con velocità locale u , che trasporta la maggior parte dell'energia del fluido. La sua forma è:

$$\frac{dx}{dt} = u$$

Quindi i termini differenziali di pressione e densità diventano per tale percorso:

$$dp = \left[\frac{\partial p}{\partial t} - u \frac{\partial p}{\partial x} \right] dt$$

$$d\rho = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] dt$$

che vanno sostituiti nella terza equazione, definendo quindi una relazione tra pressione e velocità in funzione del tempo lungo la *pathline characteristic*:

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} + \Delta_1 = 0$$

2.5. Applicazione del CIR Method

Ottenute quindi le tre equazioni generali del CIR, si può procedere ora con la loro discretizzazione diretta. Procediamo quindi con il ricavare le relazioni che legano le varie proprietà del fluido nei punti costruttivi del metodo.

Possiamo discretizzare la prima relazione, per il punto L, in maniera diretta, in modo da ottenere l'equazione che lega le grandezze del nodo i all'istante $n+1$ con quelle dell'onda che procede di velocità $u+a$.

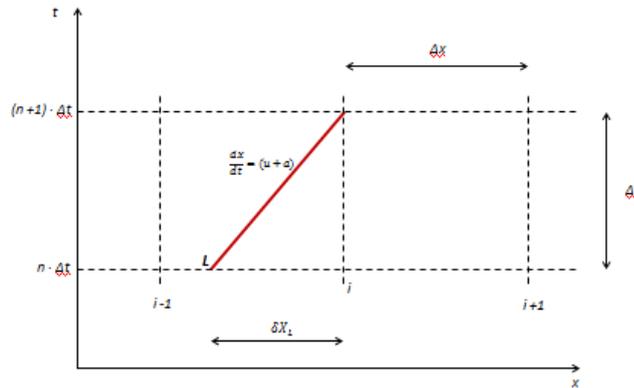


Fig. 3 - La condizione L della soluzione CIR

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{du}{dt} + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = 0$$

$$\frac{(p_i^{n+1} - p_L^n)}{\Delta t} + \frac{\rho_L^n a_L^n (u_i^{n+1} - u_L^n)}{\Delta t} + [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] = 0$$

dove l'apice rappresenta l'istante di tempo in cui viene calcolata la proprietà del fluido, mentre il pedice rappresenta il punto spaziale in cui questa viene calcolata.

Riarrangiando tale relazione in una forma più adatta all'implementazione diventa:

$$\frac{p_i^{n+1} - p_L^n}{\rho_L^n a_L^n} + u_i^{n+1} - u_L^n + \frac{[\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t}{\rho_L^n a_L^n} = 0$$

In maniera del tutto analoga si possono ricavare anche le relazioni per il punto R e per il punto S:

$$\frac{p_i^{n+1} - p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} - u_i^{n+1} + u_R^n + \frac{[\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t}{\rho_R^n a_R^n} = 0$$

$$p_i^{n+1} - p_S^n - a_S^{n2} \rho_i^{n+1} + a_S^{n2} \rho_S^n + [\Delta_{1S}^n] \Delta t = 0$$

Essendo le variabili all'istante di tempo n note (l'intero modello infatti si sviluppa a partire da uno stato iniziale conosciuto) le prime due equazioni scritte descrivono un sistema algebrico in cui le uniche due incognite sono appunto u_i^{n+1} e p_i^{n+1} . Una volta calcolate queste è possibile, sostituendo nella terza, ricavare anche la densità ρ_i^{n+1} . La tecnica usata per interpolare le caratteristiche del gas nei punti L, R e S si basa sul metodo usato da Riemann per la valutazione della *mesh* nel Metodo delle Caratteristiche.

Per chiarire la procedura, vediamo un esempio con il punto L. La pressione potrà essere ricavata come:

$$p_L^n = p_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (p_i^n - p_{i-1}^n)$$

dove però il termine $\frac{\delta x_L}{\Delta x}$ risulta essere incognito. Per valutare tale termine è necessario conoscere la velocità u_L^n e la propagazione dell'onda a_L^n , infatti:

$$\frac{\delta x_L}{\Delta t} = u_L^n + a_L^n$$

Tali grandezze si possono ricavare in maniera analoga rispetto alla pressione, cioè mediante una interpolazione, ottenendo quindi le relazioni:

$$u_L^n = u_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$a_L^n = a_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (a_i^n - a_{i-1}^n)$$

Andando ora a sostituire queste ultime due relazioni in quella precedente si ottiene:

$$\frac{\delta x_L}{\Delta t} = u_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) - a_i^n + \frac{\delta x_L}{\Delta x} (a_i^n - a_{i-1}^n)$$

$$\frac{\delta x_L}{\Delta x} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} + (u_i^n - u_{i-1}^n) + (a_i^n - a_{i-1}^n) \right) = u_i^n + a_i^n$$

$$\frac{\delta x_L}{\Delta x} = \frac{u_i^n + a_i^n}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (u_i^n - u_{i-1}^n) + (a_i^n - a_{i-1}^n)}$$

In maniera del tutto analoga si ricavano anche le relazioni per il punto R ed S. Si ottengono quindi le seguenti relazioni:

$$p_L^n = p_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (p_i^n - p_{i-1}^n)$$

$$u_L^n = u_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$\rho_L^n = \rho_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)$$

$$a_L^n = a_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (a_i^n - a_{i-1}^n)$$

$$p_R^n = p_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (p_{i+1}^n - p_i^n)$$

$$u_R^n = u_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

$$\rho_R^n = \rho_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (\rho_{i+1}^n - \rho_i^n)$$

$$a_R^n = a_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (a_{i+1}^n - a_i^n)$$

$$p_S^n = p_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (p_i^n - p_{i-1}^n)$$

$$u_S^n = u_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n)$$

$$\rho_S^n = \rho_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (\rho_i^n - \rho_{i-1}^n)$$

$$a_S^n = a_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (a_i^n - a_{i-1}^n)$$

dove i termini $\frac{\delta x_L}{\Delta x}$, $\frac{\delta x_R}{\Delta x}$ e $\frac{\delta x_S}{\Delta x}$ sono valutati come mostrato in precedenza e valgono:

$$\frac{\delta x_L}{\Delta x} = \frac{u_i^n + a_i^n}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (u_i^n - u_{i-1}^n) + (a_i^n - a_{i-1}^n)}$$

$$\frac{\delta x_R}{\Delta x} = \frac{u_i^n - a_i^n}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (u_{i+1}^n - u_i^n) - (a_{i+1}^n - a_i^n)}$$

$$\frac{\delta x_S}{\Delta x} = \frac{u_i^n}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (u_i^n - u_{i-1}^n)}$$

In questo modo si riesce a costruire una procedura iterativa che aggiorna le condizioni dinamiche del flusso per ogni istante di iterazione su ogni punto della griglia, a partire dalle condizioni iniziali note.

Si possono infatti implementare le seguenti relazioni:

$$(I) \quad \frac{p_i^{n+1} - p_L^n}{\rho_L^n a_L^n} + u_i^{n+1} - u_L^n + \frac{[\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t}{\rho_L^n a_L^n} = 0$$

$$(II) \quad \frac{p_i^{n+1} - p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} - u_i^{n+1} + u_R^n + \frac{[\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t}{\rho_R^n a_R^n} = 0$$

$$(III) \quad p_i^{n+1} - p_S^n - a_S^{n2} \rho_i^{n+1} + a_S^{n2} \rho_S^n + [\Delta_{1S}^n] \Delta t = 0$$

Dall'equazione (II) isoliamo la u_i^{n+1} , da sostituire così nella (I) e ottenere una relazione in cui l'unica variabile sia p_i^{n+1} :

$$u_i^{n+1} = \frac{p_i^{n+1} - p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} + u_R^n + \frac{[\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t}{\rho_R^n a_R^n}$$

$$p_i^{n+1} = \frac{\frac{p_L^n}{\rho_L^n a_L^n} + \frac{p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} + u_L^n - u_R^n - \left[\frac{\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n}{\rho_R^n a_R^n} + \frac{\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n}{\rho_L^n a_L^n} \right] \Delta t}{\left(\frac{1}{\rho_L^n a_L^n} + \frac{1}{\rho_R^n a_R^n} \right)}$$

Possiamo applicare la stessa procedura per ricavare questa volta la relazione di iterazione di u_i^{n+1} :

$$p_i^{n+1} = p_L^n - \rho_L^n a_L^n u_i^{n+1} + \rho_L^n a_L^n u_L^n - [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t$$

$$u_i^{n+1} = \frac{p_L^n - p_R^n + \rho_L^n a_L^n u_L^n + \rho_R^n a_R^n u_R^n + [\Delta_{1R}^n - \Delta_{1L}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{2L}^n - \Delta_{3R}^n - \Delta_{3L}^n] \Delta t}{\rho_R^n a_R^n + \rho_L^n a_L^n}$$

Infine, conoscendo la pressione p_i^{n+1} , avendola calcolata precedentemente, è possibile dalla (III) ricavare anche la densità all'istante successivo:

$$\rho_i^{n+1} = \frac{p_i^{n+1} - p_S^n + a_S^{n2} \rho_S^n + [\Delta_{1S}^n] \Delta t}{a_S^{n2}}$$

3. LA MODELLAZIONE

3.1. Introduzione

Dopo aver ricavato le equazioni che governano l'evoluzione della dinamica dei gas attraverso un sistema di aspirazione, si può ora passare alla creazione di un modello matematico per la risoluzione di tali sistemi al computer. L'intero lavoro di modellazione dei sistemi è stato svolto in ambiente *Matlab-Simulink*.

Lo sviluppo delle varie versioni è sempre partito dalla simulazione delle sezioni più semplici, come tratti rettilinei, e si è validato passo passo, confrontando i risultati ottenuti per ogni sezione con un modello di confronto già validato presente in letteratura. Questo iter ha quindi permesso di semplificare la progettazione dei singoli elementi che influiscono in un sistema di aspirazione, andando pertanto ad assemblare il tutto nella versione finale del modello.

3.2. Il modello CIR di confronto

Per la realizzazione del nuovo codice di simulazione ci si è basati su un modello, implementato e risolto anch'esso attraverso risoluzione CIR, realizzato dall'Università di Bologna nel 2009. Esso permetteva di descrivere il funzionamento del motore e la dinamica di un intero veicolo, ed era pensato principalmente per lo studio di nuove strategie di controllo. L'obiettivo del progetto era infatti fornire uno strumento di simulazione abbastanza flessibile, che potesse essere usato sia off-line (*Software In the Loop - SIL*), sia come test on-line (*Hardware In the Loop - HIL*).

La novità introdotta da questo modello risulta comunque essere la simulazione 1-D del condotto di aspirazione, realizzata appunto mediante la risoluzione CIR delle equazioni non conservative del moto in un condotto. La *pipeline* di scarico, invece, viene simulata più tradizionalmente con un modello zero-dimensionale. L'implementazione CIR in questo modello fu ottenuta discretizzando il condotto di aspirazione in una serie di elementi e realizzando per ogni tipologia di elemento presente un blocchetto *Simulink* che ne simulasse il comportamento. Collegando infine tutti i blocchetti si riesce a costruire un *loop* di iterazione che permette di simulare il comportamento del condotto di aspirazione.

Tale modello, essendo stato validato dopo la sua realizzazione, rappresenta quindi per il nostro codice in fase di realizzazione un'ottima fonte di confronto. Per questo motivo nella prima fase di modellazione ci si baserà esclusivamente sulla discretizzazione e sui risultati ottenuti mediante questo modello. In particolare, le simulazioni lanciate si riferiscono ad un particolare punto di funzionamento del motore: 10000 giri/minuto con apertura della farfalla al 100%. Lanciando quindi la simulazione sul modello validato, sono state di volta in volta salvate le condizioni di ingresso e di uscita degli elementi di interesse, in maniera tale da poter utilizzare tali grandezze per simulare la nuova implementazione.

3.3. Prima modellazione: Soluzione numerica di 5 elementi rettilinei

La motivazione che ha spinto a una riscrittura del modello già esistente è legata soprattutto alla scarsissima flessibilità sulla geometria che può analizzare tale implementazione. Un cambiamento della geometria porta infatti ad una intensa riscrittura e revisione del modello, cambiando il numero e la posizione dei blocchi presenti, e soprattutto costringendo, di volta in volta, a modificare i dati presenti all'interno di ogni singola funzione. La geometria della discretizzazione, infatti, viene definita all'interno della *Embedded MATLAB Function* che permette l'iterazione dello stato. La struttura a cascata implica inoltre una soluzione consequenziale poco efficace. Il nostro obiettivo è infatti realizzare un modello di "forma matriciale generale", dove la geometria viene appunto definita dalle matrici date in ingresso al solutore e che permetta di aggiornare lo stato in un unico passo di calcolo.

3.3.1. Definizione delle condizioni iniziali

Le condizioni iniziali e tutti i dati necessari per la simulazione vengono inizialmente definiti mediante un file codice *Matlab*. Alcuni dei parametri di simulazione sono estratti direttamente dal modello di confronto, come il passo di simulazione e il dt usato nelle equazioni, che per il momento vengono semplicemente definiti come costanti. Per generare gli altri parametri è necessario creare una routine. L'intera geometria viene definita sotto forma di vettori, attraverso l'inserimento dei diametri dei singoli elementi, i dx in avanti e indietro e i rapporti incrementali sulle sezioni. In questa maniera abbiamo una serie di vettori colonna, nei quali la posizione dei dati è legata al numero dell'elemento a cui quel dato fa riferimento. Questo

passaggio risulta fondamentale diverso da quanto visto nel modello utilizzato come confronto, e caratterizza la totale generalità della nuova implementazione in fase di realizzazione. Una variazione della geometria, o anche solo della sua discretizzazione, ora significa una semplice riscrittura dei vettori in ingresso al solutore. Infine, come ultimi dati da configurare rimangono le condizioni iniziali in ogni singolo elemento, che, come visto nella trattazione matematica, sono di rilevante importanza per la risoluzione del metodo, ed i segnali di ingresso e uscita ricavati dal modello di confronto.

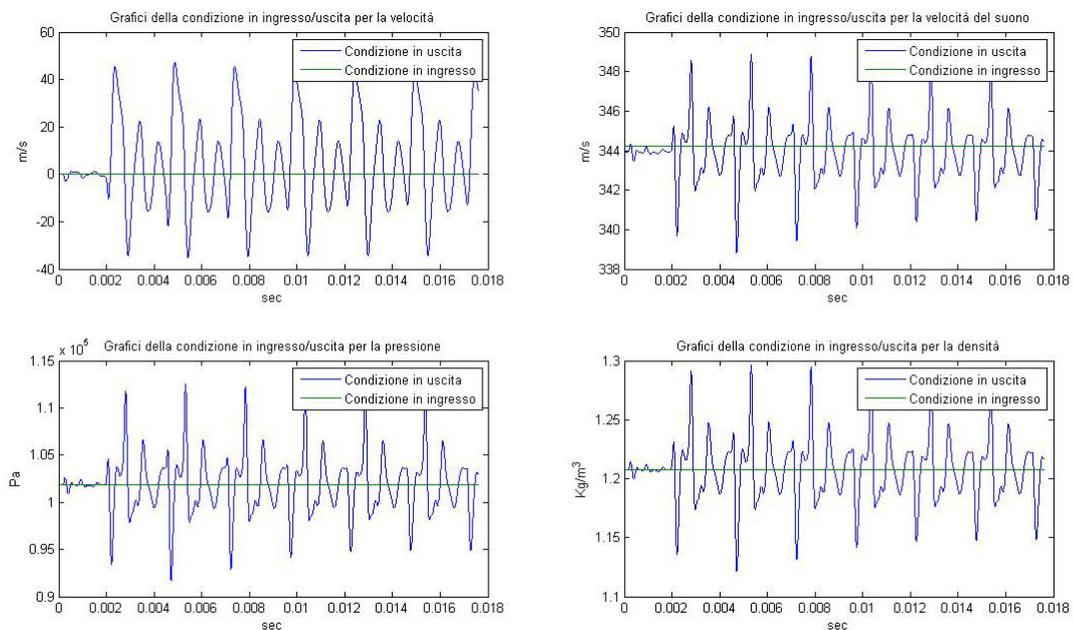


Fig. 4 - Grafici dei segnali in ingresso e uscita delle quattro grandezze termodinamiche

La prima versione implementata comprende la prima sezione del condotto di riferimento, che include 5 elementi, a partire dalle condizioni ambiente.

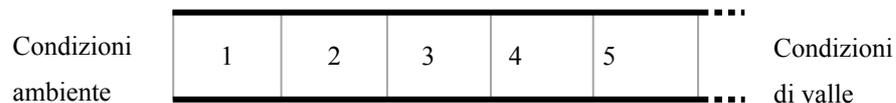


Fig. 5 - - Schema della prima discretizzazione

Riportiamo le caratteristiche geometriche della prima versione del condotto.

N° elemento	D [m]	A [m ²]	dx meno [m]	dx più [m]	$\frac{dA}{dx}$ meno	$\frac{dA}{dx}$ più
1	0,049	0,00188	0	0,015	0	0
2	0,049	0,00188	0,015	0,015	0	0
3	0,049	0,00188	0,015	0,018	0	-0,00423
4	0,048	0,00180	0,018	0,018	-0,00423	-0,00423
5	0,047	0,00173	0,018	0,018	-0,00423	-0,00423

3.3.2. La modellazione

La prima modellazione effettuata non è completamente a livello matriciale, infatti gli stati di iterazione sono sì vettori, ma le operazioni che devono essere compiute per il calcolo dello stato all'istante successivo sono state modellate per via numerica. Si è proceduto in questa maniera per la maggior semplicità e velocità di scrittura, esclusivamente con l'intento di validare la procedura di calcolo con l'intero stato.

Il modello è strutturato in tre macroblocchi: il primo, che permette di calcolare le condizioni nei punti L, R ed S, il secondo che permette di calcolare l'iterazione dello stato e infine il terzo che prepara i vettori per l'inizio del nuovo ciclo.

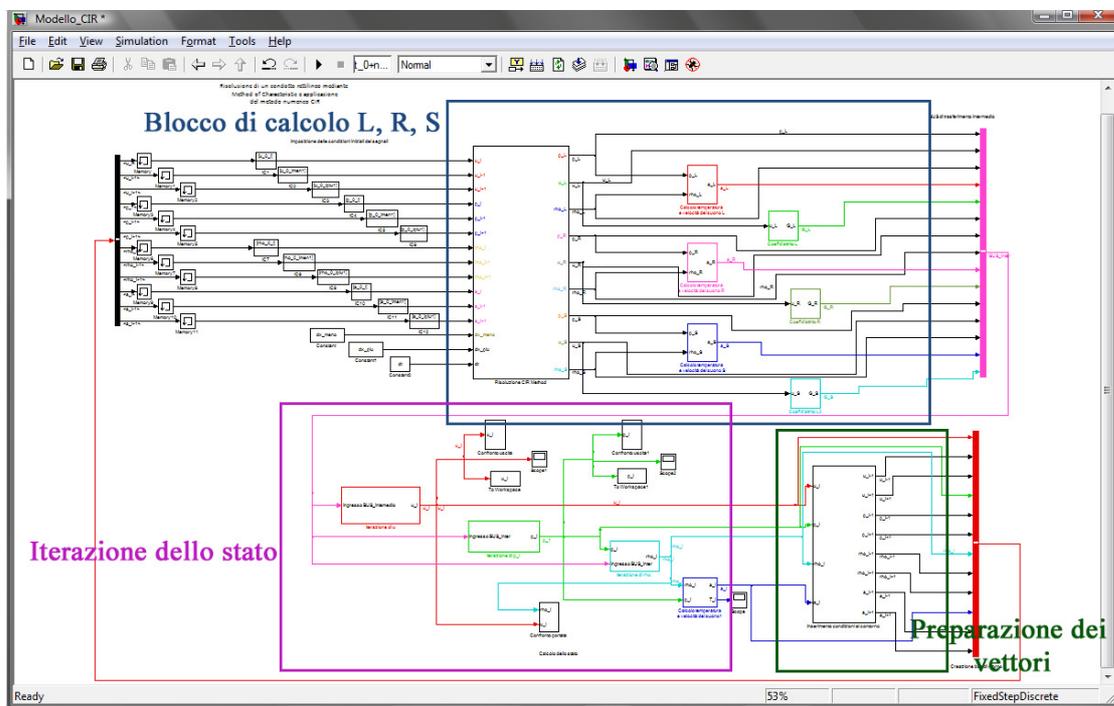


Fig. 6 - Schermata principale del modello

Iniziamo con l'analizzare la parte di calcolo delle grandezze in L , R ed S . I dati in ingresso sono quindi: le quattro condizioni (pressione, densità, velocità e velocità del suono) calcolate allo stato precedente nelle posizioni i , $i + 1$ e $i - 1$ e le caratteristiche della discretizzazione e della soluzione (dx_meno , $dx_più$ e dt).

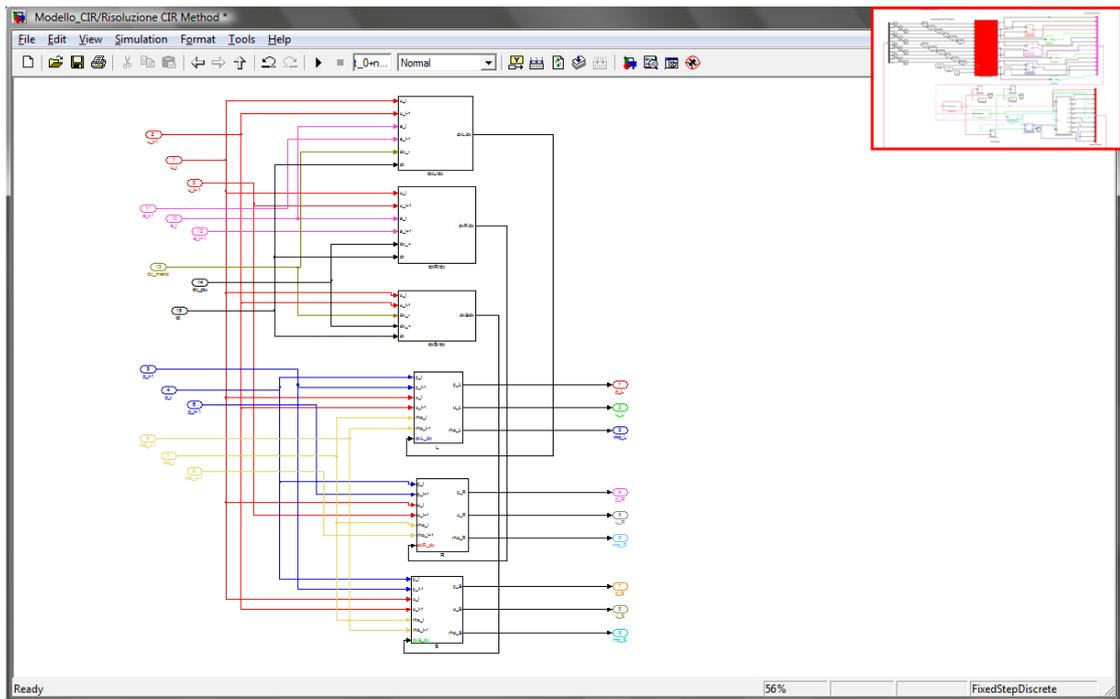


Fig. 7 - Blocco di calcolo delle condizioni CIR

La prima operazione da compiere è la valutazione dei $\frac{\delta x_L}{\Delta x}$, $\frac{\delta x_R}{\Delta x}$ e $\frac{\delta x_S}{\Delta x}$, grandezze fondamentali per il calcolo delle proprietà negli stati di calcolo, che vengono quindi subito riutilizzate per le dodici relazioni fondamentali del metodo CIR.

Lo stadio successivo prevede la stima dei coefficienti di attrito competenti alle rispettive condizioni, utilizzando quanto appena calcolato. Una volta effettuato ciò, si hanno a disposizione tutte le variabili necessarie per la valutazione dello stato successivo, e quindi i segnali, attraverso un *bus* chiamato "*Bus_intermedio*", passano al macroblocco successivo.

L'iterazione dello stato è suddivisa in tre blocchi: calcolo della velocità, calcolo della pressione e calcolo della densità. Le operazioni di velocità e pressione vengono effettuate contemporaneamente, visto che possono lavorare in parallelo, mentre l'iterazione della densità avviene successivamente perché è necessario conoscere già la pressione all'istante successivo, in quanto la densità è presente esclusivamente nella relazione dello stato *S*.

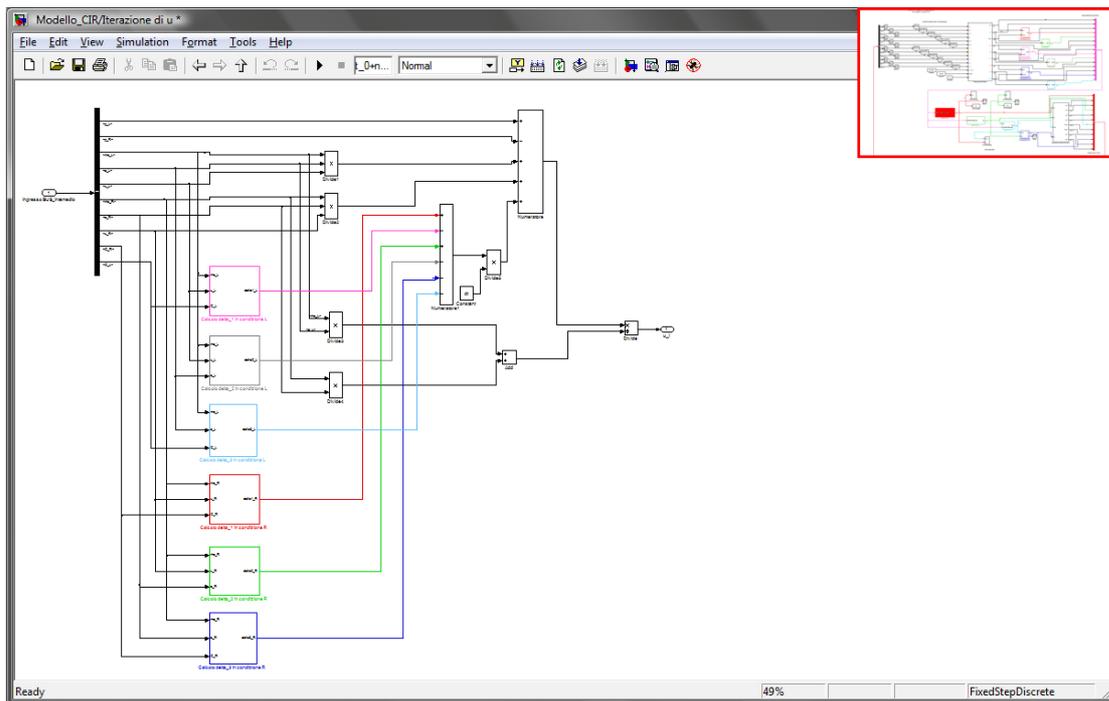


Fig. 8 - Iterazione della velocità

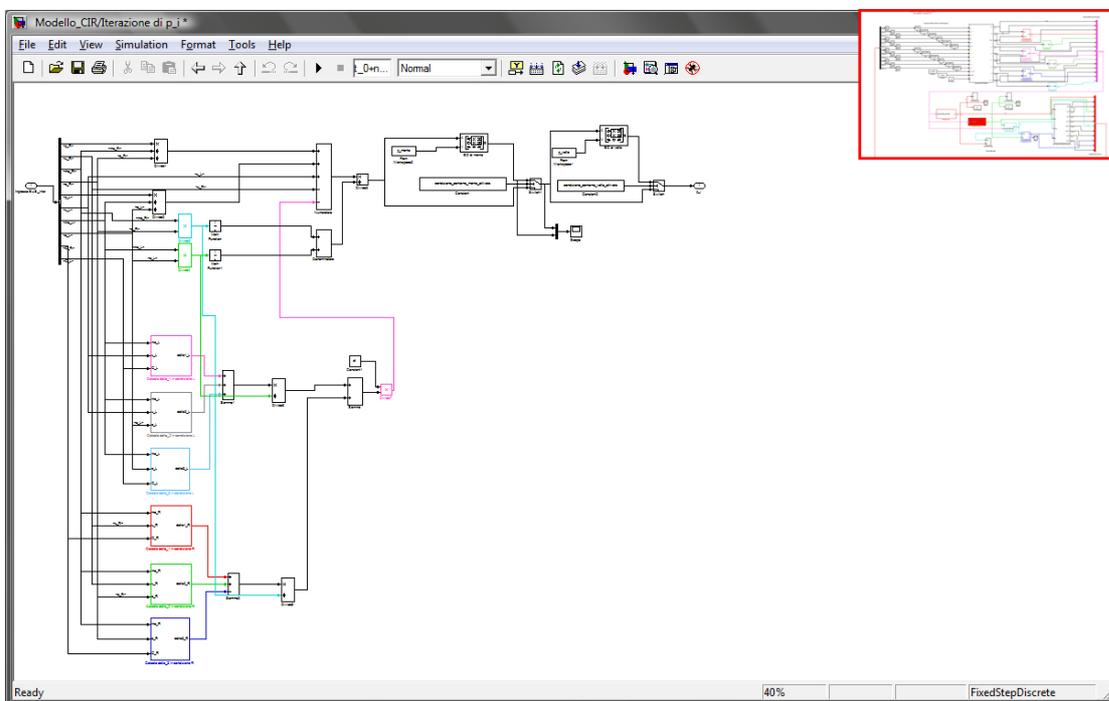


Fig. 9 - Iterazione della pressione

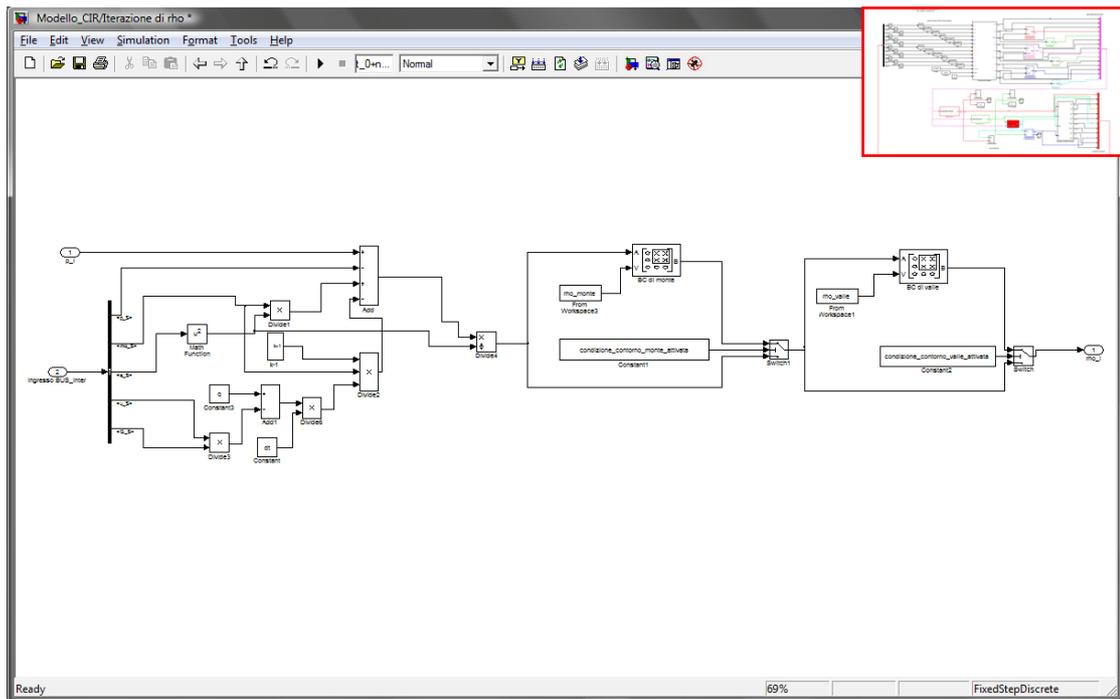


Fig. 10 - Iterazione della densità

Infine, l'ultimo macroblocco consiste nella preparazione dei vettori necessari per l'iterazione successiva. In questa sezione vengono inserite anche le condizioni al contorno, in quanto nella realizzazione dei vettori con le caratteristiche nelle posizioni $i - 1$ e $i + 1$ in prima e ultima posizione vengono inserite, rispettivamente, le condizioni di monte e quelle di valle. In questa maniera nei calcoli del primo elemento verrà considerata come condizione $i - 1$ la condizione a monte del condotto e, analogamente, l'ultimo elemento vedrà come punto ad esso successivo la condizione imposta di valle. In particolare, facendo questa considerazione, è necessario pensare di introdurre dei nodi fittizi alle estremità del condotto, nodi che assumono appunto il ruolo di *Boundary Condition* e che quindi saranno imposti a distanza nulla (cioè dx_meno del nodo 1 $dx_più$ dell'ultimo elemento saranno 0). Nel caso dei cinque elementi sarà comunque necessario introdurre il nodo fittizio esclusivamente nella condizione a monte, in quanto il segnale di valle è stato campionato in uscita dal sesto elemento, e quindi per il modello è come se effettivamente il condotto continuasse. Questo si può verificare anche dal fatto che il $dx_più$ del quinto elemento è pari a 0,018 m. A questo proposito, in fase di caricamento del modello sono state create due condizioni di attivazione e disattivazione dei nodi fittizi a monte e a valle del sistema, legate appunto alla lettura del primo e dell'ultimo elemento dei vettori dx_meno e $dx_più$, che definiscono la geometria della discretizzazione.

3.3.3. Risultati della simulazione

Per verificare la correttezza del modello sono stati confrontati i risultati ottenuti con la prima versione della nuova metodologia e quelli calcolati in uscita dal quinto blocchetto del modello di confronto. Nella figura sono riportati i risultati di velocità e pressione: le curve così ottenute sono quasi perfettamente sovrapposte. La velocità mostra una variazione minore rispetto a quella del segnale di pressione che invece presenta alcune difficoltà nel seguire le repentine inversioni di tendenza. Nonostante ciò si può comunque considerare la modellazione una buona base di partenza per lo sviluppo della nuova metodologia.

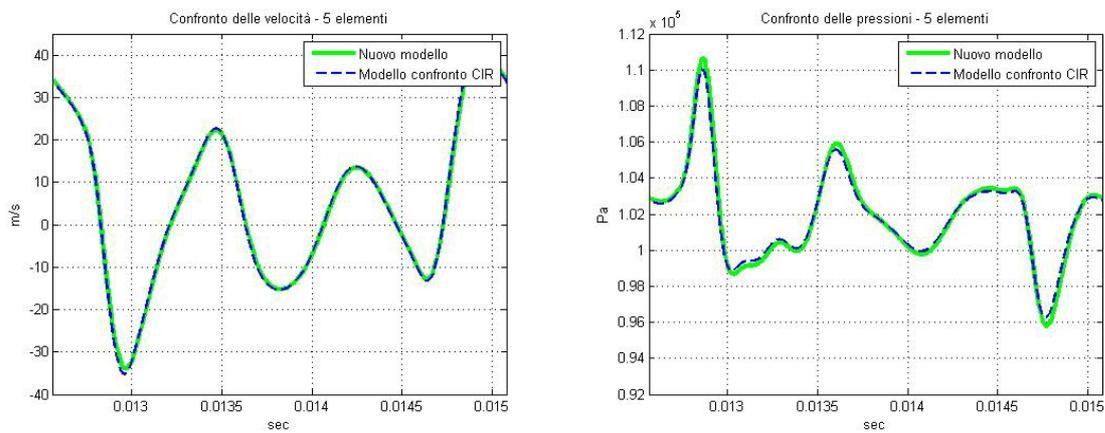


Fig. 11 - Risultati della velocità (sx) e della pressione (dx) del quinto elemento, riportati, per facilitare la visualizzazione, solo per il sesto ciclo simulato

La validità del nuovo modello si può valutare anche dalla seconda serie di grafici riportati, dove vengono mostrate le differenze presenti tra i segnali in uscita delle due diverse modellazioni.

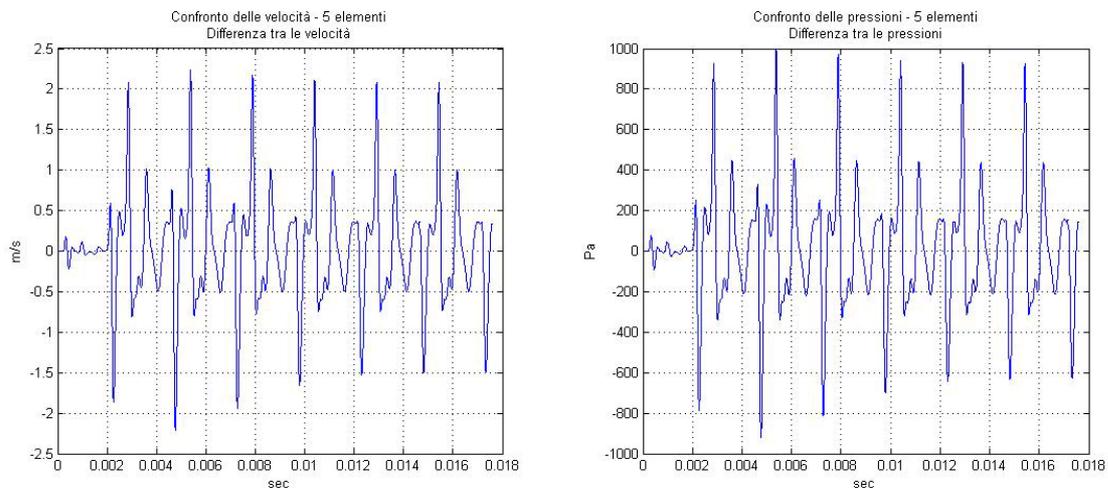


Fig. 12 - Differenze dei segnali di velocità (sx) e di pressione (dx)

Analizziamo infine le tempistiche di simulazione. La tempistica rispetto al modello di riferimento è stata sicuramente ridotta: il nuovo modello simula i 7 cicli previsti in 1,47 secondi (2,42 nel caso con il salvataggio dei risultati) rispetto ai 2,92 necessari a simulare i 5 elementi con il modello di confronto. Nonostante l'incremento di prestazioni è necessario abbattere il tempo di simulazione di almeno due ordini di grandezza per pensare di applicarlo per un controllo in tempo reale.

3.3.4. Giunzione a Y in forma numerica

A seguito della modellazione dei 5 elementi si è provato a sviluppare il lavoro realizzato per realizzare una giunzione a Y. L'idea era quella di considerare la geometria di un generico condotto come l'insieme di geometrie elementari, come ad esempio condotti cilindrici, giunzioni, porte, ecc. con i quali viene creata una libreria da cui attingere per la modellazione del sistema di aspirazione. In un certo senso questa modalità di utilizzo si avvicina molto alla conformazione che già presentava il modello di confronto, semplicemente con un raggruppamento ad un livello superiore. Proprio per tale motivo questa strada è stata subito abbandonata, in quanto sarebbero state reintrodotti le caratteristiche di scarsa generalità che si stava cercando di eliminare. Si è ritenuto opportuno, in ogni caso, riportare tale sviluppo, in quanto le relazioni ricavate in questa fase saranno poi utilizzate anche per la modellazione più generale.

La giunzione a Y necessita infatti di una attenta applicazione del modello CIR e delle equazioni di continuità. In questa maniera si riesce ad ottenere una relazione matriciale di facile implementazione.

Per quanto riguarda il CIR, bisogna considerare la mancanza di alcune onde sugli elementi terminali e iniziali della giunzione: nel condotto 1 non è presente la condizione R, in quanto entra nell'elemento di giunzione, e non ha senso parlare di onda retrocedente dall'elemento successivo, mentre nei condotti 2 e 3 non è presente la condizione L ed è inoltre presente una riflessione della condizione S.

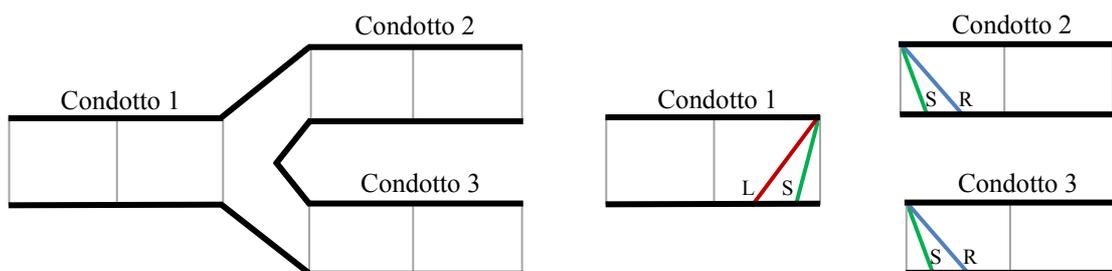


Fig. 13 - Schema della giunzione a Y

La soluzione dell'elemento di giunzione si può ottenere introducendo l'equazione di continuità: la quantità di massa entrante dal canale 1 è pari alla quantità uscente dai canali 2 e 3:

$$\begin{aligned}\dot{m}_1 &= \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \\ \rho_1 u_1 A_1 &= \rho_2 u_2 A_2 + \rho_3 u_3 A_3\end{aligned}$$

dove se si considera che la densità all'interno della giunzione è costante si ottiene:

$$u_1 A_1 = u_2 A_2 + u_3 A_3 \Rightarrow u_1 A_1 - u_2 A_2 - u_3 A_3 = 0$$

A questo punto utilizzando le relazioni CIR per le condizioni L, R e S possiamo scrivere la seguente equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(\rho_L^n a_L^n)_1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(\rho_R^n a_R^n)_2} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{(\rho_R^n a_R^n)_3} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & A_1 & -A_2 & -A_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p^{n+1} \\ u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{p_L^n}{\rho_L^n a_L^n} + u_L^n + \frac{1}{\rho_L^n a_L^n} [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t \right)_1 \\ \left(\frac{p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} - u_R^n + \frac{1}{\rho_R^n a_R^n} [\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t \right)_2 \\ \left(\frac{p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} - u_R^n + \frac{1}{\rho_R^n a_R^n} [\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t \right)_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dove i pedici 1, 2 e 3 si riferiscono all'elemento del rispettivo condotto di riferimento. Applicando quindi l'inversione della matrice si ottiene l'iterazione delle tre velocità, una in ingresso e due in uscita alla giunzione (o viceversa in caso di flusso inverso), e della pressione all'interno dell'elemento. Come si può notare, non compare il termine della densità, che per ipotesi viene considerata costante, e viene calcolata successivamente mediante la condizione S del condotto 1 a seguito dei calcoli appena descritti.

La struttura dell'intero modello, di conseguenza, sarà una concatenazione dei tre condotti cilindrici ad un blocco centrale in cui sono implementate le relazioni sopra descritte. Questo blocco avrà come ingressi la condizione calcolata nell'ultimo elemento del condotto 1 e nei primi dei condotti 2 e 3. Le uscite rappresenteranno pertanto le condizioni di valle e di monte da imporre rispettivamente al condotto in ingresso e a quelli di uscita.

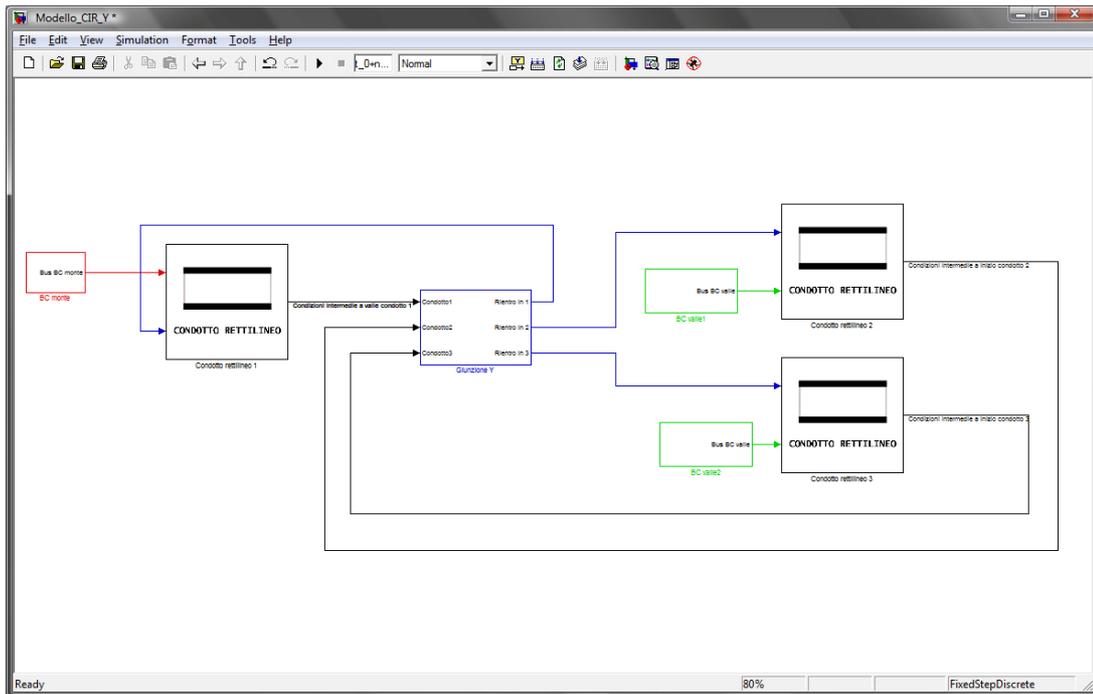


Fig. 14 - Schema della prima versione della giunzione a Y

I risultati ottenuti sono abbastanza buoni, anche se si evidenzia una certa fluttuazione, soprattutto nel calcolo della velocità, nel periodo che si interpone tra un ciclo e l'altro.

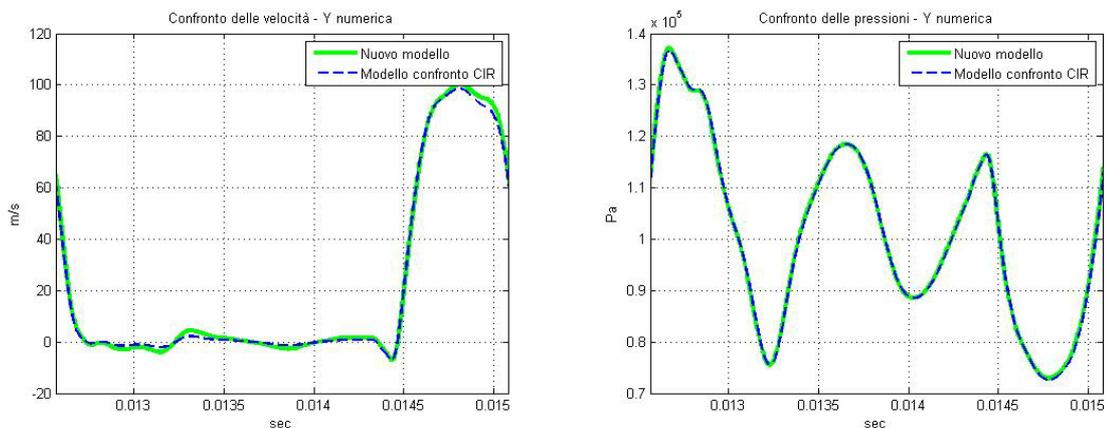


Fig. 15 - Risultati in velocità (sx) e pressione (dx) della giunzione riportate solo per il sesto ciclo simulato

Si evidenzia invece una riduzione della velocità di calcolo: la simulazione di 32 elementi (9 nel primo condotto + 11 nel secondo e nel terzo + la giunzione) impiega circa 8 secondi. In ogni caso si sottolinea ulteriormente il fatto che il metodo dello stato in forma vettoriale funziona in maniera ottimale anche introducendo un discreto numero di elementi.

Riportiamo per completezza anche le tabelle delle caratteristiche geometriche di questi condotti.

N° elemento	D [m]	A [m ²]	dx meno [m]	dx più [m]	$\frac{dA}{dx}$ meno	$\frac{dA}{dx}$ più
1	0,03200	0,00080	0,01	0,009	0,0060	0,006
2	0,03292	0,00085	0,009	0,009	0,0060	0,006
3	0,03880	0,00118	0,009	0,009	0,0060	0,006
4	0,03470	0,00094	0,009	0,0085	0,0060	0,006
5	0,03600	0,00101	0,0085	0,009	-0,0095	-0,0095
6	0,03428	0,00092	0,009	0,009	-0,0095	-0,0095
7	0,03256	0,00083	0,009	0,009	-0,0095	-0,0095
8	0,03084	0,00074	0,009	0,009	-0,0095	-0,0095
9	0,02912	0,00066	0,009	0,009	-0,0095	-0,0095

N° elemento	D [m]	A [m ²]	dx meno [m]	dx più [m]	$\frac{dA}{dx}$ meno	$\frac{dA}{dx}$ più
1	0,02334	0,00042	0,0072	0,009	0	-0,0037
2	0,02234	0,00039	0,009	0,009	-0,0037	-0,0037
3	0,02136	0,00035	0,009	0,009	-0,0037	-0,0037
4	0,02032	0,00032	0,009	0,0085	-0,0037	-0,0037
5	0,01928	0,00029	0,0085	0,01	-0,0037	0
6	0,01928	0,00029	0,01	0,01	0	0
7	0,01928	0,00029	0,01	0,01	0	-0,0034
8	0,01821	0,00026	0,01	0,0104	-0,0034	-0,0034
9	0,01685	0,00022	0,0104	0,01228	-0,0034	0,0024
10	0,01793	0,00025	0,01228	0,0091	0,0024	0,0018
11	0,01850	0,00026	0,0091	0,006	0,0018	0,006

3.4. Seconda modellazione: Soluzione matriciale di 5 elementi rettilinei

Dopo aver quindi nuovamente validato il codice e aver effettivamente verificato la fattibilità di applicare la risoluzione CIR ad una modellazione di tipo vettoriale, si cercherà di rendere le iterazioni di calcolo completamente matriciali. Questa scelta è dettata dal fatto di riuscire a semplificare e generalizzare i passaggi di iterazione e pensando soprattutto ad una successiva implementazione della procedura in una centralina elettronica (*Engine Control Unit*): si cercherà di semplificare le operazioni di calcolo e di ridurre al minimo le informazioni necessarie per ogni passo di iterazione, diminuendo quindi lo *storage* necessario.

3.4.1. Modellazione matriciale con aumento dello stato

Riprendendo le formule di iterazione per il metodo CIR, è possibile riscrivere le relazioni che permettono il calcolo delle condizioni L, S e R in funzione della grandezza all'istante precedente. Prendendo ξ come una generica grandezza (pressione, velocità, densità, velocità del suono) riscriviamo le relazioni della modellazione CIR:

$$\xi_L^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$$

$$\xi_R^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (\xi_{i+1}^n - \xi_i^n)$$

$$\xi_S^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$$

Analizziamo inizialmente la condizione L. Considerando di avere ancora una volta l'intero stato come vettore, è possibile riscrivere la relazione in forma matriciale. Iniziamo dalla seconda parte dell'equazione, introduciamo una matrice che chiameremo L_2 , caratteristica della condizione in analisi:

$$[(\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{monte} \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_{valle} \end{bmatrix} = L_2 [\xi_i^n]$$

Come si può notare, in questa fase sono state aumentate le dimensioni dello stato di due posizioni, questo per riuscire ad introdurre anche le relazioni presenti con le condizioni al contorno. Successivamente la riscrittura matriciale sarà proposta anche senza questa modifica dello stato, che aumenta la complessità computazionale. Per il momento si è ritenuto importante mantenerla perché rende molto chiare le relazioni presenti anche con le condizioni al contorno.

La relazione matriciale sopra proposta verrà ora utilizzata anche per il calcolo del $\frac{\delta x_L}{\Delta x}$, infatti possiamo riscrivere:

$$\left[\frac{\delta x_L}{\Delta x} \right] = \frac{u_i^n + a_i^n}{\frac{\Delta x}{\Delta t} + (u_i^n - u_{i-1}^n) + (a_i^n - a_{i-1}^n)} = \frac{[u_i^n] + [a_i^n]}{\left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \right] + L_2[u_i^n] + L_2[a_i^n]}$$

dove le grandezze tra parentesi quadra sono in realtà vettori di dimensione pari alla grandezza dello stato aumentata di due. Otteniamo così il vettore di tutti i $\frac{\delta x_L}{\Delta x}$. Possiamo

quindi passare alla realizzazione dello *step* successivo, cioè la riscrittura dell'intera relazione $\xi_L^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$ per le grandezze in L.

Introduciamo un'altra matrice, che chiameremo L_1 , che sarà pari ad una matrice identità con 0 nel primo e nell'ultimo elemento della diagonale¹. L'obiettivo è arrivare a costruire una matrice L che permetta di realizzare questa relazione:

$$[\xi_L^n] = \xi_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n) = L[\xi_i^n]$$

Quindi:

$$L = L_1 - L_2 \times \left[\frac{\delta x_L}{\Delta x} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\delta x_L}{\Delta x} & \frac{\delta x_L}{\Delta x} \end{bmatrix}$$

Abbiamo quindi ottenuto la matrice L che permette di calcolare agevolmente le condizioni in L, infatti si possono riscrivere le relazioni per le quattro grandezze:

$$p_L^n = Lp_i^n$$

$$u_L^n = Lu_i^n$$

$$\rho_L^n = L\rho_i^n$$

$$a_L^n = La_i^n$$

Inoltre, secondo tale ragionamento, l'intera geometria viene definita esclusivamente dalla forma delle matrici L_1 e L_2 , che restano costanti nel tempo, e quindi rende anche la procedura di inizializzazione della simulazione molto semplice.

Si può ragionare in maniera analoga anche per le condizioni S e R, le uniche variazioni si avranno nella scrittura delle matrici R_2 e S_2 , in quanto per la prima la differenza tra le grandezze è con il nodo successivo, mentre per la seconda è necessario

¹ Nella trattazione matematica è corretto che la matrice L abbia sia il primo elemento (1,1) che l'ultimo elemento (n,n) il valore 0, in quanto non esistono le condizioni L, R e S per le condizioni al contorno. Nell'implementazione in Matlab-Simulink si è invece fatto in modo di avere in tali posizioni 1 per non avere singolarità nelle operazioni successive, in particolare divisioni per 0. Tale scelta, in ogni caso, non influisce sulle prestazioni del modello, in quanto ciò che viene calcolato per la prima e l'ultima condizione dello stato viene poi escluso in fase di iterazione.

prestare attenzione alla riflessione della *pathline characteristic* all'imbocco del condotto. Riportiamo pertanto i valori di R_2 e S_2 per il condotto a 5 elementi:

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto possiamo generare la matrice e il vettore che controllano l'iterazione: dal metodo CIR infatti è possibile scrivere una relazione matriciale delle grandezze all'istante successivo. Riprendiamo le relazioni valide per i punti L, R e S:

$$\begin{aligned} p_i^{n+1} - p_L^n + \rho_L^n a_L^n u_i^{n+1} - \rho_L^n a_L^n u_L^n + [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t &= 0 \\ p_i^{n+1} - p_R^n - \rho_R^n a_R^n u_i^{n+1} + \rho_R^n a_R^n u_R^n + [\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t &= 0 \\ p_i^{n+1} - p_S^n - a_S^{n2} \rho_i^{n+1} + a_S^{n2} \rho_S^n + [\Delta_{1S}^n] \Delta t &= 0 \end{aligned}$$

Riscriviamo in forma matriciale, isolando il vettore dello stato iterato:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_L^n a_L^n & 0 \\ 1 & -\rho_R^n a_R^n & 0 \\ 1 & 0 & -a_S^{n2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_i^{n+1} \\ u_i^{n+1} \\ \rho_i^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} p_L^n + \rho_L^n a_L^n u_L^n - [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t \\ p_R^n - \rho_R^n a_R^n u_R^n - [\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t \\ p_S^n - a_S^{n2} \rho_S^n - [\Delta_{1S}^n] \Delta t \end{bmatrix}$$

Cioè invertendo la matrice:

$$\begin{pmatrix} p_i^{n+1} \\ u_i^{n+1} \\ \rho_i^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_L^n a_L^n & 0 \\ 1 & -\rho_R^n a_R^n & 0 \\ 1 & 0 & -a_S^{n2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p_L^n + \rho_L^n a_L^n u_L^n - [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t \\ p_R^n - \rho_R^n a_R^n u_R^n - [\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t \\ p_S^n - a_S^{n2} \rho_S^n - [\Delta_{1S}^n] \Delta t \end{bmatrix}$$

Queste relazioni sono valide per un singolo punto, è quindi necessario riscrivere la matrice e il vettore in termini dell'intero stato: questo corrisponde a fare una composizione di matrici. Inizialmente è stato ripreso il caso del condotto cilindrico a 5 elementi, ottenendo quindi le relazioni:

$$\begin{pmatrix} (p_1^{n+1}) \\ \vdots \\ (p_5^{n+1}) \\ (u_1^{n+1}) \\ \vdots \\ (u_5^{n+1}) \\ (\rho_1^{n+1}) \\ \vdots \\ (\rho_5^{n+1}) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (\rho_L^n a_L^n)_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (\rho_L^n a_L^n)_5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (-\rho_R^n a_R^n)_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (-\rho_R^n a_R^n)_5 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (-a_S^{n^2})_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & (-a_S^{n^2})_5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (TN_{L_1}^n) \\ \vdots \\ (TN_{L_5}^n) \\ (TN_{R_1}^n) \\ \vdots \\ (TN_{R_5}^n) \\ (TN_{S_1}^n) \\ \vdots \\ (TN_{S_5}^n) \end{bmatrix}$$

dove TN corrispondono ai termini noti calcolati all'istante n , nei vari elementi, nelle condizioni L, R e S e i pedici si riferiscono al numero dell'elemento in cui le grandezze sono calcolate. Otteniamo quindi una relazione generica applicabile a qualsiasi modello, in quanto la geometria del condotto viene inserita già nel calcolo delle matrici di condizione.

Applicando tali passaggi, il modello si compone ancora di tre macroblocchi, nel primo dei quali vengono preparati i vettori aumentati con le condizioni al contorno, nel secondo vengono calcolate le matrici L , R e S e nel terzo si creano matrice e vettore per l'iterazione, così da calcolare in un unico passaggio tutte le grandezze dell'intera discretizzazione.

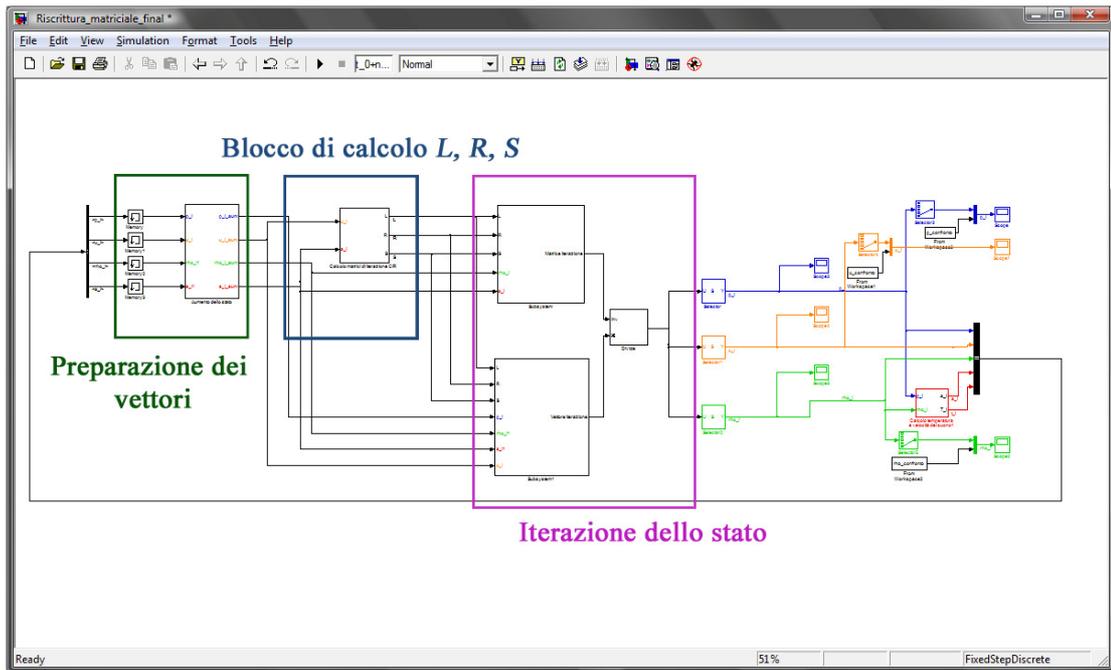


Fig. 16 - Schermata principale della modellazione matriciale

3.4.2. Inserimento delle condizioni al contorno

La procedura fin qui descritta non presenta alcun problema se si considera un tratto di condotto interno. Si rilevano, invece, alcune problematiche nel caso in cui questo tratto sia messo in contatto direttamente con l'ambiente esterno, sia per quanto riguarda l'aspirazione che lo scarico. In questi casi, infatti, viene a mancare una condizione delle tre fondamentali del metodo CIR ed è quindi necessario imporre alcune ipotesi per riuscire a risolvere il sistema.

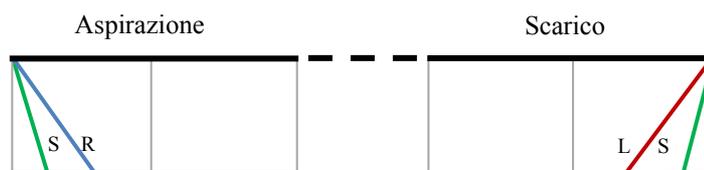


Fig. 17 - Schema delle condizioni CIR in aspirazione e scarico verso l'ambiente

Partiamo dalle condizioni di aspirazione. Imponiamo pertanto che le grandezze nel primo elemento siano pari a quelle presenti nell'ambiente ad esso collegato. Tale condizione viene ricavata dalle condizioni di ristagno del fluido in ingresso, ma essendo per ipotesi la velocità in ingresso sempre nulla, quanto ipotizzato non è molto distante da quanto effettivamente avviene nella realtà ed è il caso più semplice e più comune applicato in queste condizioni. Formalmente, se le condizioni nell'ambiente in ingresso sono a_0 e p_0 , il gas si espande isoentropicamente nel primo elemento alle condizioni a e p . Applicando l'equazione dell'energia attraverso l'imbocco del condotto si ottiene:

$$\frac{a_0^2}{k-1} = \frac{a^2}{k-1} + \frac{u^2}{2}$$

che può essere riscritta in forma adimensionale, introducendo una grandezza di riferimento a_{rif} (solitamente la condizione ambiente):

$$A_0^2 = A^2 + \frac{k-1}{2} U^2$$

dove $A_0 = \frac{a_0}{a_{rif}}$, $A = \frac{a}{a_{rif}}$ e $U = \frac{u}{a_{rif}}$.

Considerando che la velocità massima ottenibile per una sezione convergente è $u = a$, cioè efflusso sonico, possiamo sostituire nella forma adimensionale $U = A$, ottenendo:

$$A_0^2 = U^2 + \frac{k-1}{2} U^2$$

$$U = A_0 \sqrt{\left(\frac{2}{k+1}\right)}$$

Consideriamo quindi il caso di efflusso sonico, allora $A = 1$. Possiamo scrivere la relazione:

$$A = \left(\frac{p}{p_{ref}}\right)^{\frac{k-1}{2k}} = 1$$

cioè $p = p_{ref} = p_{amb}$. Per semplicità si può pertanto considerare che anche nel caso di flusso subsonico la pressione a valle dell'imbocco del condotto sia pari a quella ambiente presente all'esterno del canale.

Procediamo quindi con la correzione delle matrici L_1 e L_2 in maniera tale da sostituire nel primo elemento le grandezze presenti nell'ambiente esterno. L'obiettivo è quello di realizzare la condizione L del primo punto della discretizzazione pari alle condizioni di ingresso. Bisognerà quindi azzerare la riga corrispondente all'elemento di ingresso nella matrice L_2 , e spostare l'1 nella matrice L_1 . Otterremo quindi le due matrici corrette, che chiameremo L_1^* e L_2^* :

$$L_1^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il ragionamento è del tutto uguale anche per quanto riguarda lo scarico: è necessario imporre una condizione accessoria in mancanza della relazione dell'onda retrocedente. Analogamente all'aspirazione, si impone che la pressione calcolata nell'elemento finale sia pari alla pressione ambiente. Introdurre la possibilità di scarico a pressione più elevata di quella ambiente, come può ad esempio avvenire per un propulsore aeronautico, significherebbe infatti considerare un flusso in uscita supersonico, eventualità non realistica per le condizioni in cui sarà applicato il modello in analisi. Si è quindi scelto di proseguire con lo scarico a pressione ambiente.

3.4.3. Risultati

Ancora una volta andiamo ad analizzare i dati ottenuti confrontando la nuova simulazione con il modello di confronto sempre sul quinto elemento della discretizzazione. Questa volta il grado di precisione ottenuto è molto più elevato rispetto alle simulazioni fatte in precedenza: la velocità rispetto al modello di riferimento si discosta al massimo di 12×10^{-3} m/s, mentre la pressione si discosta di -5 Pa. Sono stati inoltre calcolati i valori efficaci² delle differenze dei segnali in velocità e pressione, in maniera tale da avere un valore rappresentativo dello scostamento ottenuto nell'intera simulazione. Per la velocità l'RMS è pari a 0,002 m/s, mentre per la pressione è pari a 0,894 Pa. Questi valori dimostrano quindi l'efficacia del metodo simulativo.

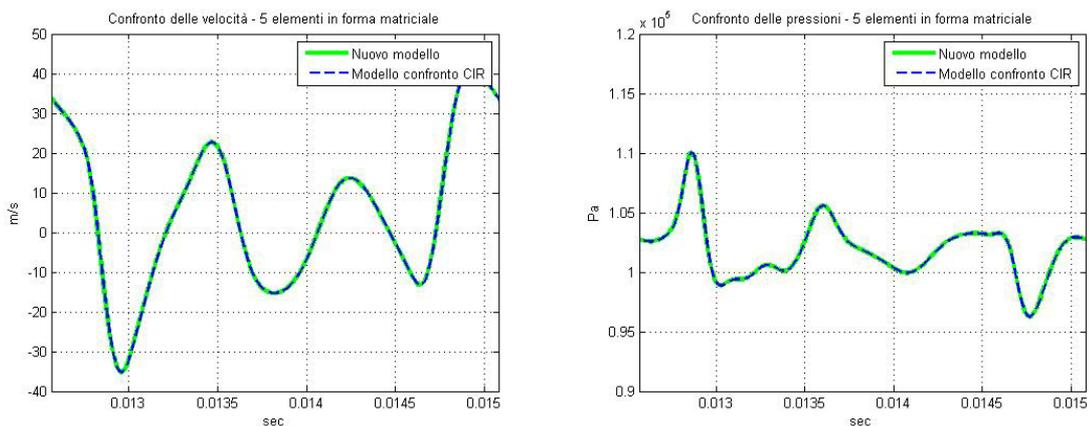


Fig. 18 - Risultati in velocità (sx) e pressione (dx) della modellazione in analisi per il sesto ciclo simulato

² Il valore efficace di un segnale, o RMS (*Root Mean Square*), è la radice quadrata della media del segnale, verrà quindi calcolato con la formula $RMS = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)}$

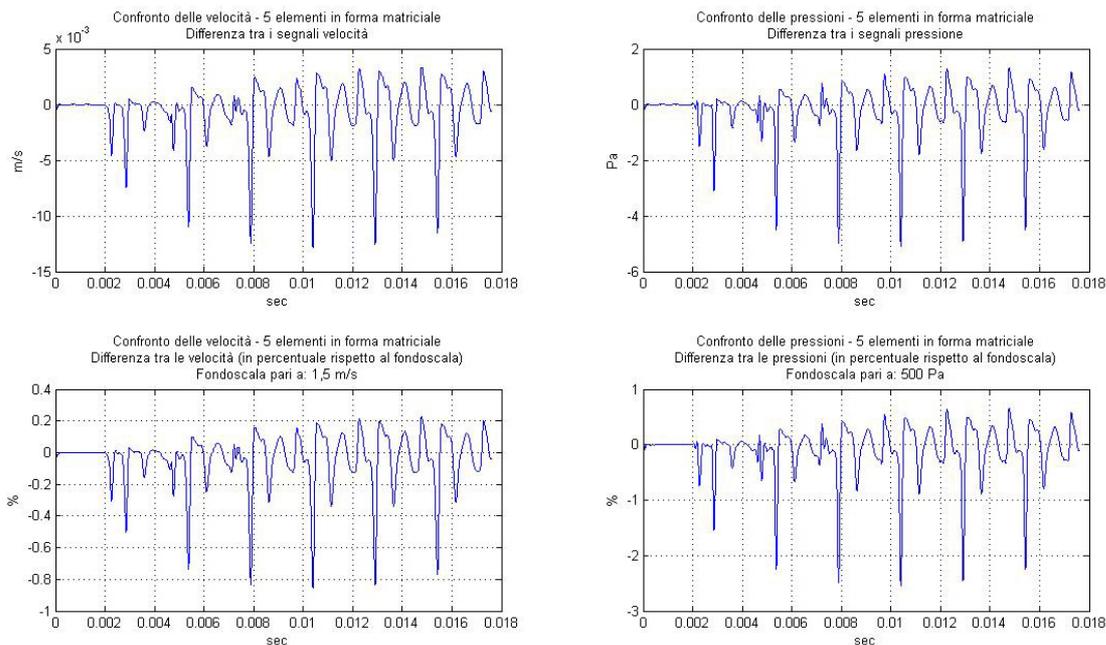


Fig. 19 - Differenza dei segnali ottenuti dalla nuova modellazione e quella di confronto

Bisogna comunque sottolineare che i picchi che si vedono nel grafico delle percentuale sono in corrispondenza di velocità prossima allo zero. Quindi, in queste condizioni, anche una minima differenza rispetto al segnale originale provoca un elevato scostamento della funzione.

I risultati finora si riferivano solamente all'ultimo elemento della discretizzazione, ma per una più completa valutazione del modello verranno ora presentati anche i risultati e i confronti sui cinque elementi. Si ritiene utile questo passaggio per confermare la validità del modello anche nelle posizioni intermedie, più distanti dalle condizioni al contorno, e quindi non influenzate direttamente dai segnali delle *BC* dati in ingresso al modello.

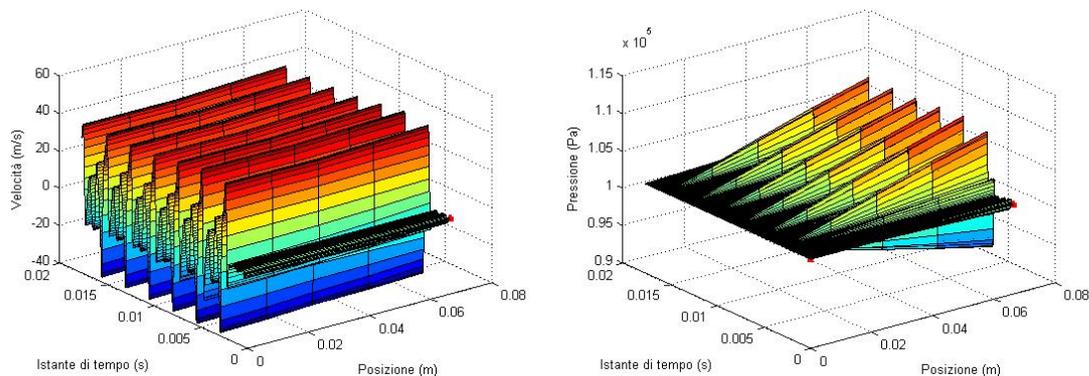


Fig. 20 - Rappresentazione tridimensionale dell'andamento di velocità e pressione sui 5 elementi

Per una maggiore chiarezza nei risultati si è isolato un singolo ciclo di combustione, così da poter visualizzare in modo migliore gli scostamenti del nuovo modello da quello preso come campione. Nei grafici delle differenze tra i segnali calcolati si può vedere che lo scostamento massimo che si ottiene per le pressioni è di 5 Pa, paragonabile quindi a quanto già visto per l'ultimo elemento, mentre per quanto riguarda le velocità, lo scostamento massimo è di circa 0,02 m/s.

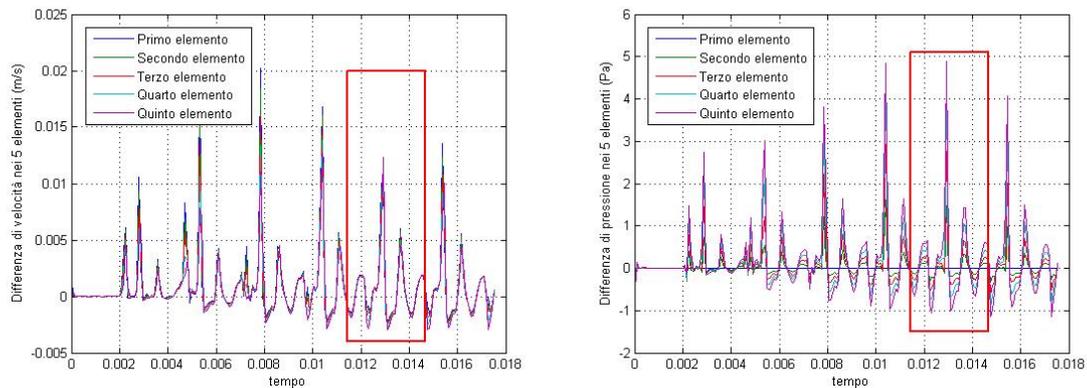


Fig. 21 - Differenza di velocità (sx) e pressione (dx) su tutti gli elementi, evidenziato il ciclo che verrà riportato in dettaglio successivamente

L'andamento generale delle grandezze si può evidenziare dal primo grafico, dove sono riportati i segnali delle pressioni degli elementi. Come si può vedere il nuovo modello segue correttamente il modello di riferimento lungo tutti gli elementi presenti.

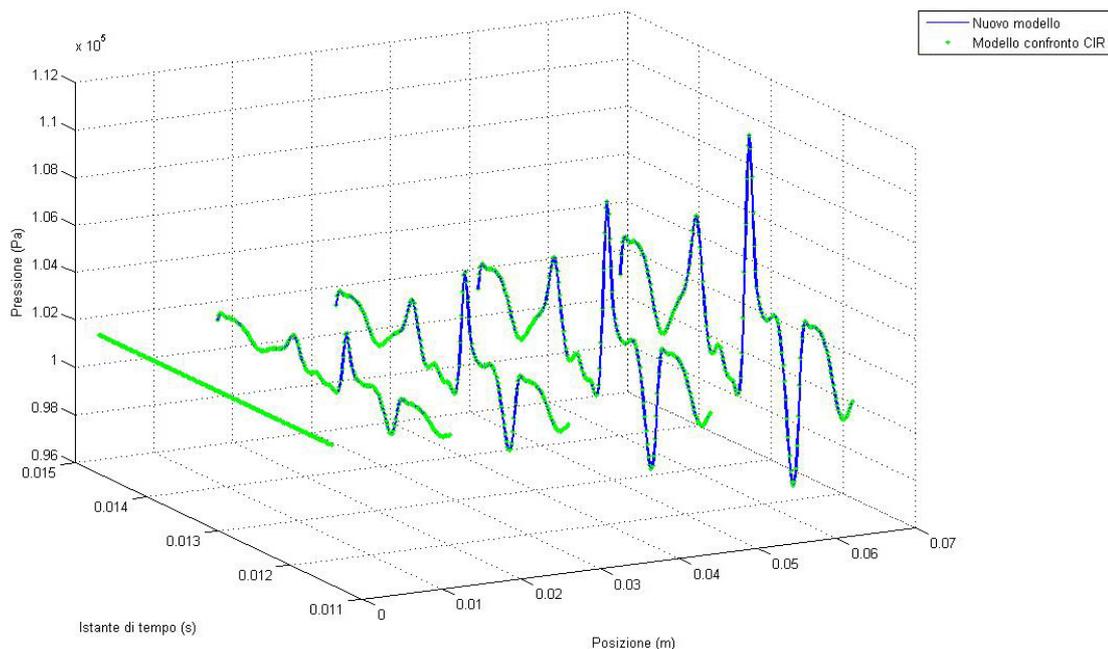


Fig. 22 - Confronto diretto tra l'andamento della pressione nelle due modellazioni nel sesto ciclo simulato

Entrando nel dettaglio del singolo ciclo, si può notare che gli scostamenti delle velocità sono più elevati nel primo elemento e tendono a diminuire negli elementi successivi. Per la pressione accade invece l'esatto contrario: il segnale del primo elemento è esattamente sovrapposto, e ciò indica un corretto inserimento delle condizioni al contorno, mentre gli scostamenti massimi si ottengono negli elementi successivi, mantenendosi comunque su valori molto bassi, circa 5 Pa, che rappresentano quindi un $5 \times 10^{-3}\%$ della pressione.

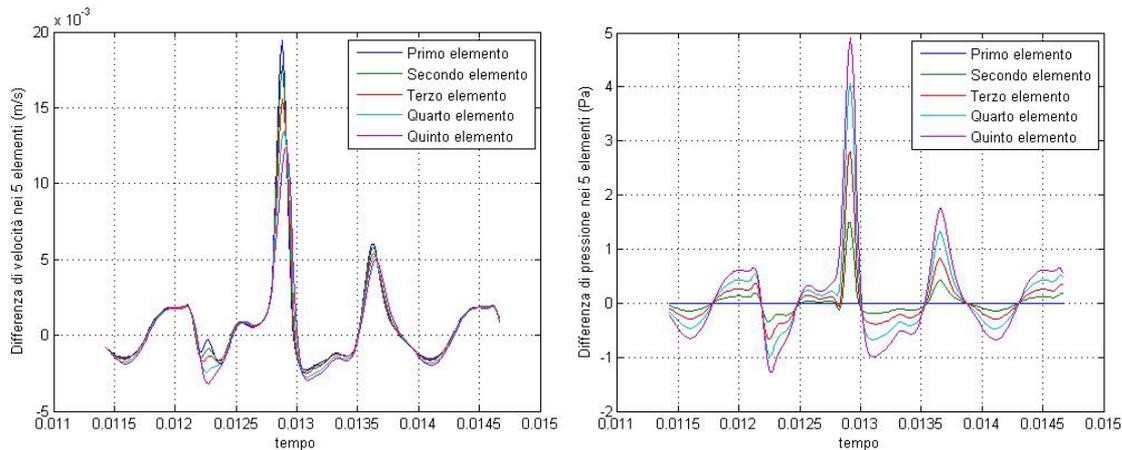


Fig. 23 - Dettaglio delle differenze di velocità e pressione nel sesto ciclo simulato

Questo andamento si può verificare anche dai grafici successivi, dove gli scostamenti sono stati plottati in funzione del tempo e dello spazio, creando pertanto due superfici che evidenziano i picchi di differenza proprio in corrispondenza del picco di pressione/velocità dovuto alla fase di aspirazione del condotto.

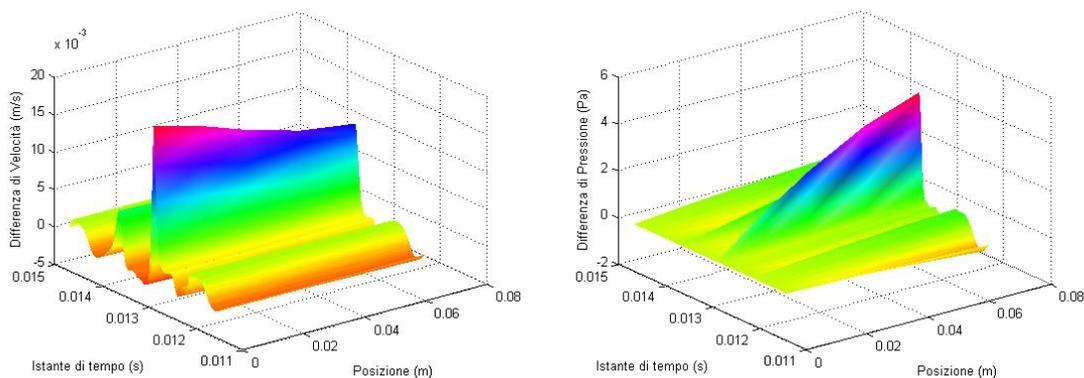


Fig. 24 - Errori di velocità e pressione riportati per tutti e 5 gli elementi simulati nel sesto ciclo

Infine, per quanto riguarda le tempistiche di simulazione, ci possiamo nuovamente confrontare con i circa 3 secondi necessari per simulare i 7 cicli con il modello campione. La forma matriciale impiega 0.98 secondi (1.31 con il salvataggio

dei dati) dimostrando quindi un ulteriore aumento della velocità di calcolo, anche nei confronti del modello numerico della precedente versione.

3.5. Terza modellazione: Giunzione a Y matriciale

Una volta validato il modello matriciale per il condotto rettilineo è necessario iniziare a implementare i vari componenti che possono essere installati sui condotti di aspirazione, come elementi di suddivisione, valvole, porte ecc. Per ottenere la massima generalità, accompagnata anche da buone precisioni e velocità di calcolo, l'obiettivo è schematizzare ogni singolo componente come un elemento, che influisce sulla dinamica del flusso e che dialoga con l'elemento precedente e quello successivo, così come accade per gli elementi visti finora nella discretizzazione cilindrica. Ciò permette quindi di scrivere delle matrici specifiche della geometria che restano costanti nel tempo nella fase di inizializzazione, ed utilizzare poi una procedura di risoluzione del tutto uguale a quella usata nelle modellazioni precedenti.

3.5.1. Modellazione della Y mediante un singolo nodo

Iniziamo con l'analizzare la realizzazione di una giunzione a Y. In letteratura, come anche nel modello di confronto, tale collegamento viene modellato mediante l'utilizzo di tre elementi: uno a monte e due a valle, così come già visto nel capitolo 3.3.4.

Analogamente a prima, bisogna considerare che nel metodo CIR alcune onde non sono più presenti, e quindi eliminare le equazioni differenziali corrispondenti alle condizioni che perdono di validità.

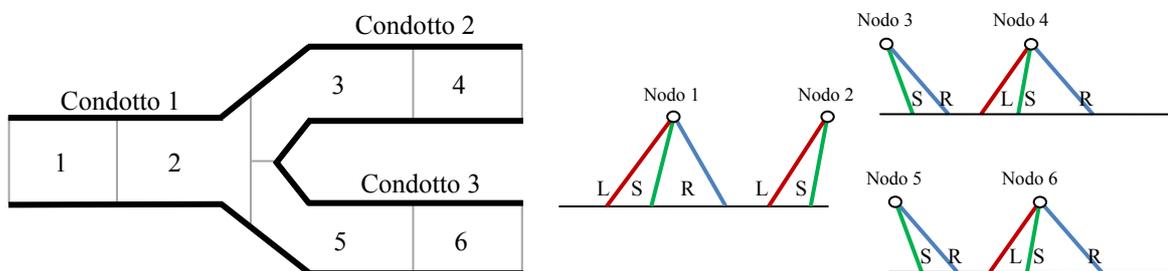


Fig. 25 - Schema delle condizioni CIR per la giunzione a Y

Una discretizzazione di questo tipo porta alla realizzazione di una matrice 18x18 solo per la risoluzione della giunzione, senza considerare il fatto che è necessario intervenire nella matrice di inversione per annullare le condizioni che non vengono soddisfatte. A

questo proposito è stata sviluppata una nuova metodologia che consideri un unico nodo risolvente per la connessione. Risulta quindi una fusione dei nodi 2, 3 e 5, realizzando una discretizzazione come nella figura riportata.

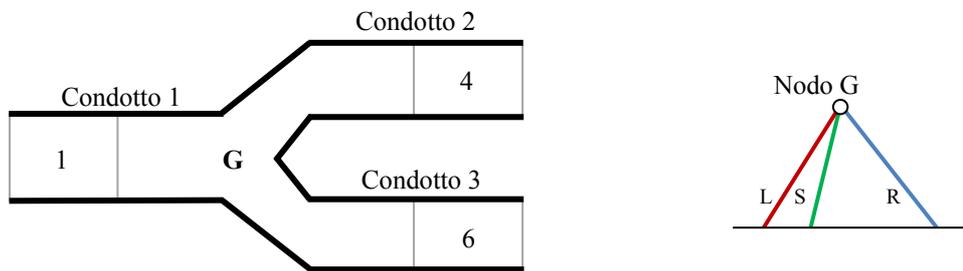


Fig. 26 - Schema delle condizioni CIR per giunzione a Y a nodo unico

In questo caso il nodo G si fa carico delle condizioni L ed S del vecchio nodo 2, e delle condizioni R dei nodi 3 e 5. Ciò è possibile in quanto, per riuscire a risolvere la giunzione, è necessario considerare che i nodi 2, 3 e 5 abbiano la stessa pressione e la stessa densità, mentre la velocità è dipendente, grazie all'equazione di continuità, solamente dal rapporto delle aree dei tre condotti. Riducendo quindi il numero dei nodi è possibile ridurre anche le informazioni necessarie per il calcolo. Negli elementi successivi i segnali di pressione e densità risulterebbero infatti uguali a quelli della sezione di ingresso della giunzione, mentre i segnali delle velocità sono scalati mediante un coefficiente costante, dipendente dalla geometria della giunzione.

Applicando questo ragionamento, la matrice di soluzione completa diventa di dimensioni 12x12, senza dover annullare nessuna condizione al suo interno, visto che non sono più presenti nodi in cui non vengono calcolate tutte e tre le condizioni L, S e R. Valutiamo ora come vengono riscritte le matrici L , S e R in funzione delle nuove caratteristiche introdotte al metodo. Prendiamo come riferimento le solite relazioni del metodo CIR, con la generica grandezza:

$$\xi_L^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$$

$$\xi_R^n = \xi_{i+1}^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (\xi_{i+1}^n - \xi_i^n)$$

$$\xi_S^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$$

Rispetto al procedimento illustrato in precedenza la variazione influirà esclusivamente nella scrittura delle matrici L_2 , S_2 e R_2 , quindi è possibile riscrivere le equazioni precedenti nella forma:

$$\xi_L^n = \left(L_1 - L_2 \times \frac{\delta x_L}{\Delta x} \right) \xi_i^n$$

$$\xi_R^n = \left(R_1 - R_2 \times \frac{\delta x_R}{\Delta x} \right) \xi_i^n$$

$$\xi_S^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{1L}^n \\ \xi_{GL}^n \\ \xi_{4L}^n \\ \xi_{6L}^n \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - (BC)_m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\delta x_L}{\Delta x} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_G \\ \xi_4 \\ \xi_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{1R}^n \\ \xi_{GR}^n \\ \xi_{4R}^n \\ \xi_{6R}^n \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{\delta x_R}{\Delta x} \begin{matrix} \\ (BC)_v \\ (BC)_v \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_G \\ \xi_4 \\ \xi_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{1S}^n \\ \xi_{GS}^n \\ \xi_{4S}^n \\ \xi_{6S}^n \end{pmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - (BC)_m \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\delta x_S}{\Delta x} \right) \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_G \\ \xi_4 \\ \xi_6 \end{pmatrix}$$

dove le BC sono le condizioni al contorno di monte e di valle da inserire opportunamente. Nel caso in cui siano presenti ulteriori elementi sia a valle sia a monte le matrici appena descritte rappresentano solo una parte delle matrici complessive e le condizioni al contorno vengono inserite semplicemente sostituendo rispettivamente un -1 e un $+1$.

Particolare attenzione viene prestata anche nell'inserimento dei vettori dx_meno e $dx_più$, che quindi definiscono lo spostamento in avanti e in indietro rispetto ad ogni nodo. Nella formulazione tradizionale per il nodo 2 non veniva considerato l'incremento della posizione positivo, mentre nei nodi 3 e 5 non veniva inserito il valore dello spostamento in direzione negativa. Nella nuova formulazione, avendo unito i tre nodi in uno unico, è necessario considerare che nella posizione relativa all'elemento G vanno sostituiti i valori coerenti alla nuova discretizzazione. In dx_meno viene quindi sostituito il valore in arrivo dall'elemento 2, mentre in $dx_più$ va inserito il valore per i nodi successivi.

Un'altra modifica va effettuata nelle matrici L_2 , S_2 e R_2 per il calcolo della velocità.

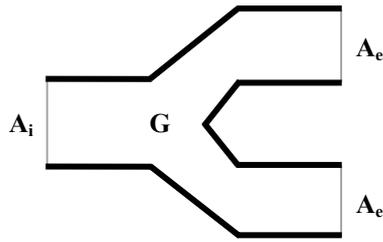


Fig. 27 - Geometria della giunzione a Y

Considerando che le sezioni di uscita siano uguali³, possiamo scrivere l'equazione di continuità sulla sezione:

$$A_i u_i = A_e u_e + A_e u_e = 2A_e u_e$$

Introducendo allora un parametro $\tau = \frac{A_i}{A_e}$ dall'equazione precedente possiamo ricavare la velocità in uscita come:

$$u_e = \frac{1}{2} \frac{A_i}{A_e} u_i = \frac{1}{2} \tau u_i$$

In questa maniera si ottiene un coefficiente che lega la velocità dei vecchi elementi 3 e 5 alla velocità di ingresso della giunzione. Sarà quindi necessario inserire questo coefficiente moltiplicativo ogni qualvolta gli elementi successivi vadano a leggere come ingresso la velocità dell'elemento precedente. Le matrici L_2 , S_2 e R_2 saranno quindi:

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\tau & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\tau & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\tau & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\tau & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\tau & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

³ Nel caso in cui le sezioni siano diverse sarà necessario introdurre un ulteriore coefficiente di rapporto tra le due sezioni di uscita, ma sarà comunque possibile applicare questo approccio per la risoluzione matriciale ad elemento unico delle giunzioni a Y. Questa applicazione segue l'analogia fluidodinamica (o elettrica) della divisione in nodi.

Applicando pertanto anche quest'ultima correzione si ottiene la giunzione a Y modellata completamente con un singolo elemento.

Riportiamo infine le caratteristiche geometriche della giunzione simulata (i dati riferiti all'elemento G sono da considerarsi per la sezione di ingresso, tranne per i dati relativi all'incremento positivo, inoltre il rapporto tra l'area di ingresso e quelle di uscita è $\tau = 0,689$, inoltre sono state anche mantenute le numerazioni del caso generale, per avere un confronto diretto tra le due modellazioni).

N° elemento	D [m]	A [m ²]	dx meno [m]	dx più [m]	$\frac{dA}{dx}$ meno	$\frac{dA}{dx}$ più
1	0,02912	0,00066	0,00900	0,00900	-0,0095	-0,0095
G	0,02740	0,00058	0,00900	0,00722	-0,0095	0
4	0,02334	0,00042	0,00722	0,00900	0	-0,0037
6	0,02334	0,00042	0,00722	0,00900	0	-0,0037

3.5.2. Risultati

Anche in questo caso riportiamo i risultati ottenuti dalla simulazione con la nuova metodologia, in confronto con quelli ottenuti mediante l'esportazione dalla simulazione con il modello di confronto. Come possiamo notare, i segnali di velocità e pressioni si sovrappongono perfettamente.

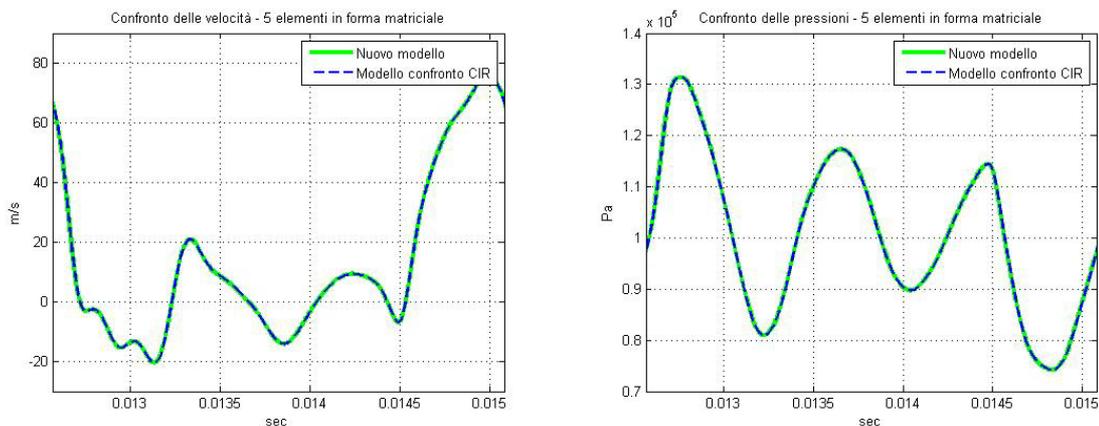


Fig. 28 - Risultati in velocità (sx) e pressione (dx) della giunzione a Y, riportati per il sesto ciclo simulato

Analizzando anche le differenze tra i segnali si può notare che si ha uno scarto massimo di 0.1 m/s e di circa 50 Pa. Anche in questo caso si è valutato il valore efficace dei segnali di scarto tra i valori simulati e quelli ottenuti dal modello di confronto. Per la velocità l'RMS è 0,031 m/s mentre per la pressione è di 13,8 Pa. Pensando di confrontare questi risultati con quelli ottenuti per la sezione cilindrica di 5 elementi, si può vedere che si ha uno scostamento leggermente più elevato, ma in ogni caso

decisamente trascurabile. Possiamo quindi considerare la nuova modellazione a unico elemento efficace per la simulazione corretta della giunzione.

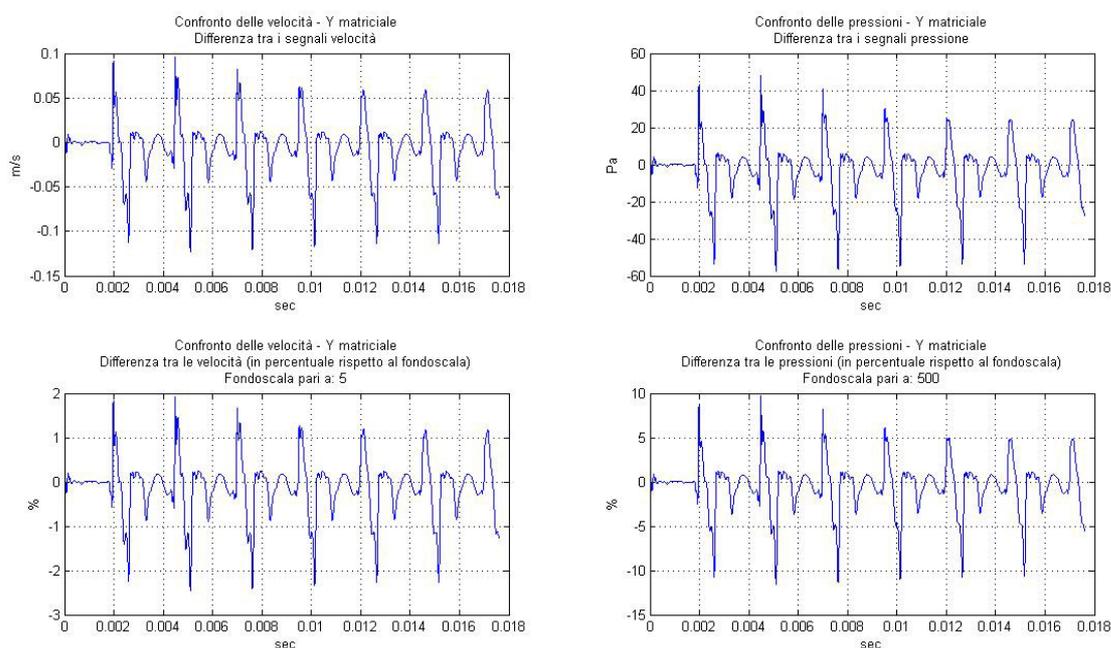


Fig. 29 - Differenza e errori percentuali delle velocità e delle pressioni della giunzione a Y

La grande potenzialità di questa modellazione sta nel fatto che il modello Simulink utilizzato per la risoluzione della giunzione a Y è perfettamente uguale a quello utilizzato per la simulazione del condotto cilindrico. Questo garantisce una completa generalità del solutore, demandando alle matrici di inizializzazione la definizione dell'intera geometria e del comportamento dinamico dei vari elementi che sussistono nel sistema di aspirazione.

3.6. Quarta modellazione: Boundary Conditions come input esterni

Le versioni realizzate finora hanno evidenziato la difficoltà di inserire all'interno del modello le condizioni al contorno. Nell'introduzione di elementi come la farfalla o le valvole, che quindi rappresentano delle vere e proprie discontinuità del modello, si è dovuto cercare una nuova metodologia per considerare nei calcoli eventuali interruzioni dei *path* delle onde presenti nel sistema di aspirazione.

Cercando quindi di ragionare sul codice dal punto di vista controllistico si è cercato di realizzare una modellazione che considerasse gli elementi di discontinuità come "nodi esterni" che semplicemente dialogano con quelli antecedenti e successivi.

In questo modo si genera un vettore di *input* che influenza il calcolo delle condizioni L, S ed R e che si riaggiornerà ad ogni ciclo di iterazione a partire dallo stato iterato.

Questa possibilità risulta anche molto comoda per la modifica del sistema di aspirazione, in quanto in caso di più farfalle o più valvole sarà semplicemente necessario duplicare il blocchetto che genera l'iterazione dell'elemento e andare poi a creare la relativa uscita da sostituire nel vettore delle *BC*.

3.6.1. Modellazione di 5 elementi rettilinei

Al fine di garantire una corretta implementazione si è ritornati ai 5 elementi rettilinei come prima modellazione, valutando quindi come scrivere le nuove matrici di controllo e i passi di iterazione. Le relazioni matriciali per le condizioni della metodologia CIR dovranno infatti essere modificate in relazione al fatto che le informazioni delle condizioni al contorno non saranno più presenti come stato aumentato, ma saranno invece trasportate in un altro vettore. Bisogna inoltre ricordare che l'influenza che può avere un elemento interno al condotto, come potrebbe essere la farfalla o una valvola, è ben diversa dalla condizione di aspirazione, o scarico, verso l'ambiente esterno. Nel primo caso, infatti, la *BC* entra nel calcolo delle condizioni come se fosse veramente un altro nodo presente nel sistema di aspirazione, mentre nel secondo caso bisogna considerare una vera e propria sostituzione, come spiegato in precedenza.

È quindi necessario applicare alcune modifiche alle relazioni matriciali espresse in precedenza. Andiamo a riassumere i principali passaggi per arrivare alla realizzazione di questa metodologia. Riprendendo le generiche relazioni CIR:

$$\xi_L^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_L}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$$

$$\xi_R^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_R}{\Delta x} (\xi_{i+1}^n - \xi_i^n)$$

$$\xi_S^n = \xi_i^n - \frac{\delta x_S}{\Delta x} (\xi_i^n - \xi_{i-1}^n)$$

Andiamo ad analizzare la condizione L per il condotto rettilineo di 5 elementi con aspirazione in ambiente e riscriviamo la relazione in forma matriciale:

$$[\xi_L^n] = \left(L_1 - L_2 \left[\frac{\delta x_L}{\Delta x} \right] \right) [\xi_i^n] + L_3 [BC] + L_4 \left[\frac{\delta x_L}{\Delta x} \right] [BC]$$

dove le grandezze tra parentesi sono da intendersi vettori, in particolare *[BC]* è il vettore delle condizioni al contorno o vettore di *input*. In questo caso le matrici di

controllo per le condizioni CIR sono pertanto diventate quattro: oltre alle due già descritte, che continuano ad essere indicate come L_1 e L_2 , si aggiunge una matrice L_3 , detta di sostituzione diretta, che interagisce nel caso in cui la grandezza dell'elemento precedente debba essere sostituita in una condizione dell'elemento successivo (come può essere per la pressione in L nel caso di *inlet* del condotto) e la matrice L_4 , o matrice di influenza, che invece gestisce le influenze indirette (come potrebbe essere la pressione a valle dell'elemento farfalla).

Riscriviamo quindi la relazione vista in precedenza in forma estesa per il condotto a 5 elementi:

$$\xi_L^n = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_L \\ \Delta x \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1^n \\ \xi_2^n \\ \xi_3^n \\ \xi_4^n \\ \xi_5^n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{amb}^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{valle}^n \end{pmatrix} \\ + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_L \\ \Delta x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{amb}^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{valle}^n \end{pmatrix}$$

Per semplicità di calcolo le matrici L_3 e L_4 sono state memorizzate come vettori, e non è stata quindi applicata una moltiplicazione matriciale, bensì la moltiplicazione detta *element wise* (*), che implica una moltiplicazione elemento per elemento sulle righe dei vettori e delle matrici che vengono moltiplicati. Nel caso appena illustrato la matrice L_3 presenta un singolo coefficiente in posizione 1, essendo appunto la sostituzione della condizione ambiente nella condizione L del primo elemento. La matrice L_4 risulta invece nulla, visto che non sono presenti elementi che influiscono “esternamente” al condotto in questa prima versione.

Analogamente si possono ricavare anche le equazioni per le condizioni R e S del metodo CIR:

$$[\xi_R^n] = \left(R_1 - R_2 \left[\frac{\delta x_R}{\Delta x} \right] \right) [\xi_i^n] + R_3 [BC] - R_4 \left[\frac{\delta x_R}{\Delta x} \right] [BC] \\ [\xi_S^n] = \left(S_1 - S_2 \left[\frac{\delta x_S}{\Delta x} \right] \right) [\xi_i^n] + S_3 [BC] + S_4 \left[\frac{\delta x_L}{\Delta x} \right] [BC]$$

Vediamo tali equazioni anche espresse in forma matriciale:

$$\begin{aligned}
\xi_R^n &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_R \\ \Delta x \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1^n \\ \xi_2^n \\ \xi_3^n \\ \xi_4^n \\ \xi_5^n \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{amb}^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{valle}^n \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_R \\ \Delta x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{amb}^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{valle}^n \end{pmatrix} \\
\xi_S^n &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_S \\ \Delta x \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} \xi_1^n \\ \xi_2^n \\ \xi_3^n \\ \xi_4^n \\ \xi_5^n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{amb}^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{valle}^n \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_L \\ \Delta x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{amb}^n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{valle}^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Come si può notare, per i 5 elementi la condizione R influenzerà la condizione a valle (1 in posizione 5 in R_4), mentre la condizione S non presenta modifiche rispetto alla versione precedente, in quanto nel primo elemento è presente la riflessione della *pathline characteristic*.

L'implementazione in *Matlab-Simulink* delle nuove impostazioni di calcolo richiedono una leggera modifica rispetto alle versioni precedenti, anche se complessivamente si mantiene la divisione in tre macroblocchi: preparazione dei vettori, calcolo delle condizioni CIR e infine iterazione dello stato.

I risultati ottenuti con questa nuova metodologia sono ottimi sia per quanto riguarda la precisione, sia in termini di velocità di calcolo.

Analizzando gli esiti delle simulazioni gli andamenti della nuova implementazione si sovrappongono perfettamente ai segnali ottenuti con il Modello CIR di confronto e gli errori, in questo caso, si assestano a valori inferiori rispetto alle simulazioni precedenti: la differenza massima è di circa 6×10^{-3} m/s per quanto riguarda la velocità e di circa 3 Pa sulla pressione all'ultimo elemento.

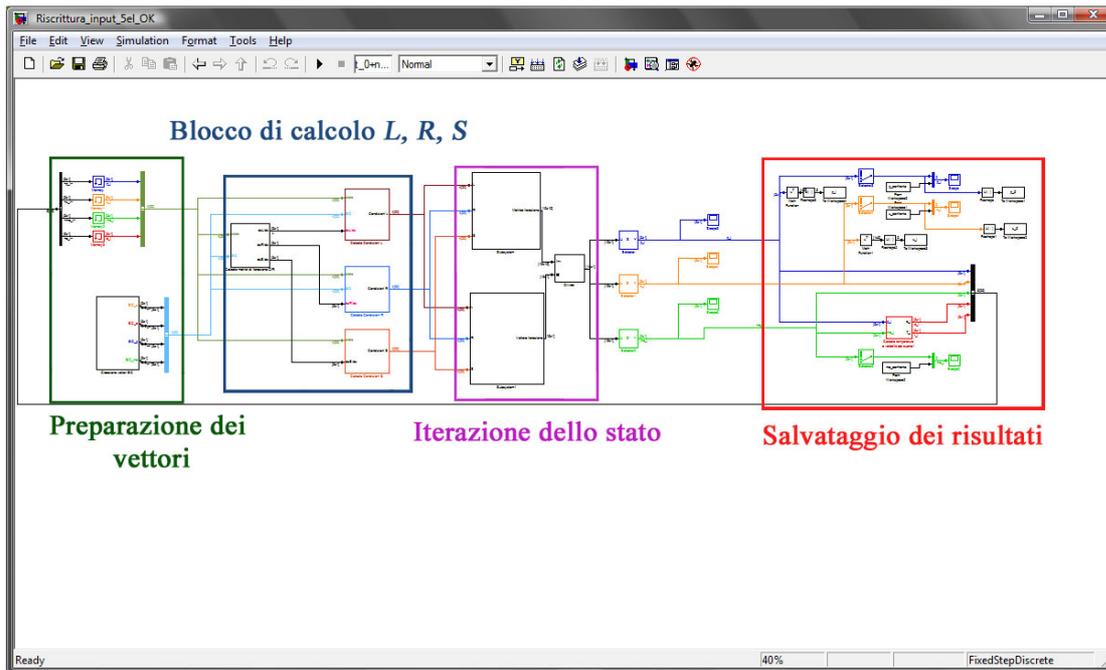


Fig. 30 - Schema principale della nuova modellazione, si può notare che a nella preparazione dei vettori si aggiunge il blocco per la preparazione delle BC

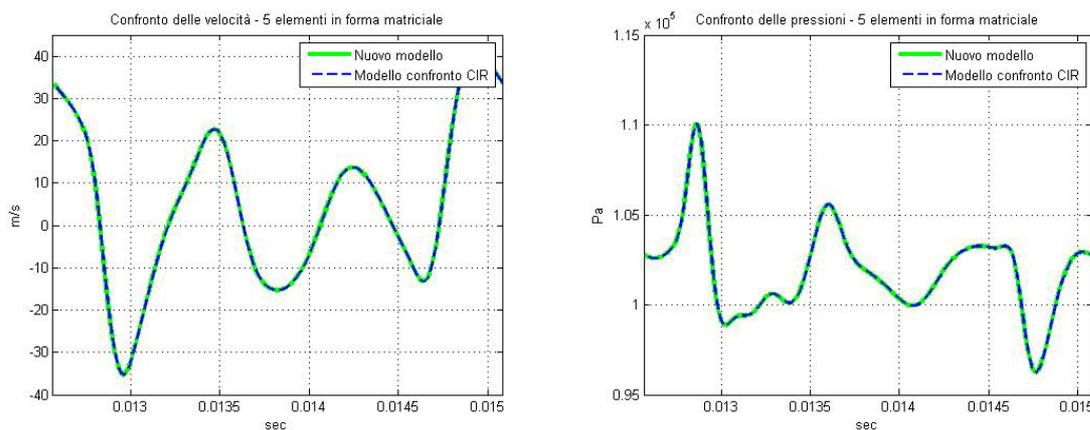


Fig. 31 - Confronto risultati della nuova modellazione riportati per il sesto ciclo simulato

Anche in questo caso sono stati valutati i valori efficaci degli scarti: per la velocità lo RMS è pari a 0,002 m/s mentre per la pressione è pari a 0,706 Pa. È stata dunque migliorata ulteriormente la precisione del metodo, aumentando anche le prestazioni di calcolo: i 7 cicli previsti vengono simulati in 0.74 secondi (1,22 con il salvataggio dei risultati), che rappresenta quindi un netto miglioramento dalla simulazione matriciale realizzata precedentemente.

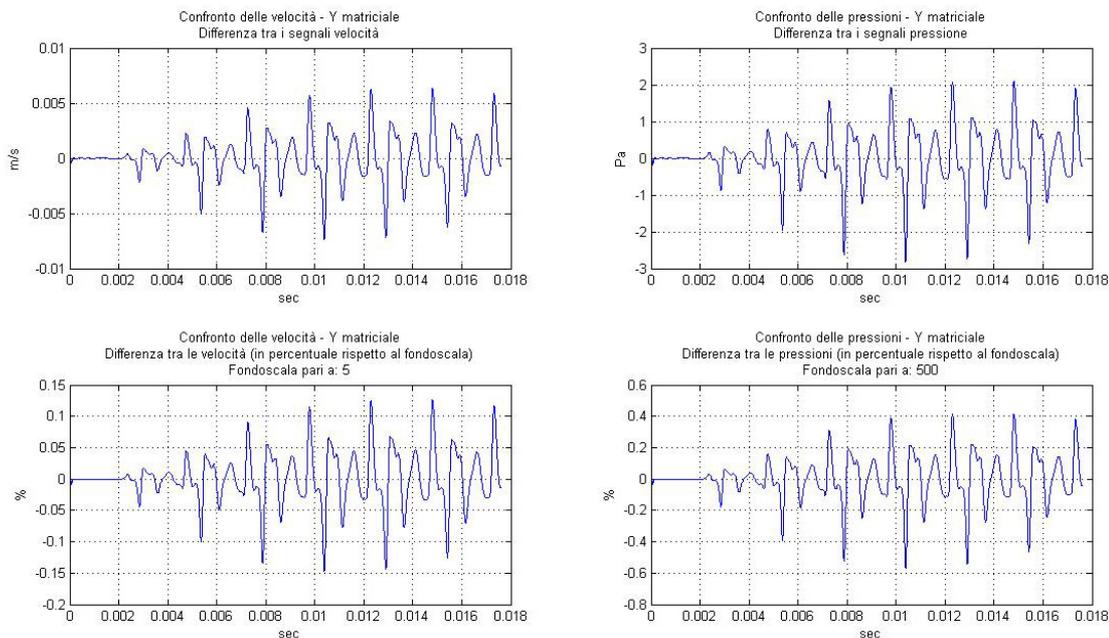


Fig. 32 - Differenza e errori percentuali dei segnali della nuova modellazione

Infine valutiamo anche l'andamento complessivo su tutti e cinque gli elementi, così da avere una conferma della bontà del nuovo metodo sull'intero condotto.

L'andamento generale è sicuramente corretto, i segnali sono perfettamente sovrapposti e seguono in maniera esatta la dinamica evidenziata dal modello di confronto.

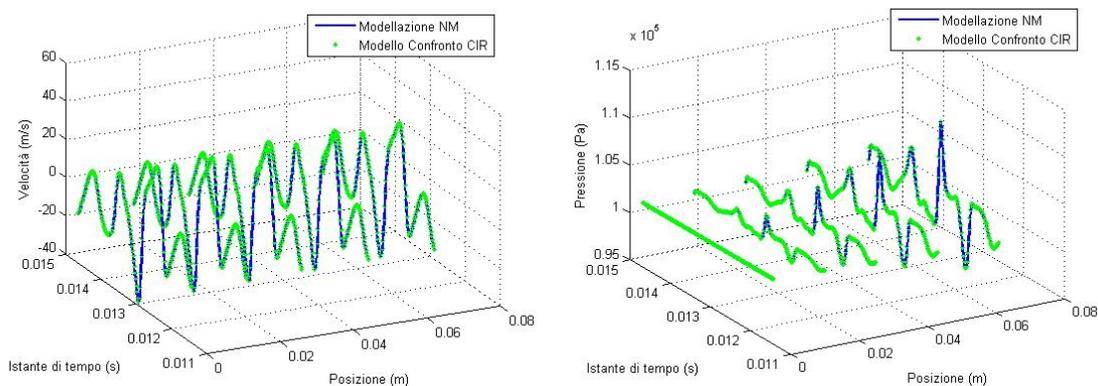


Fig. 33 - Andamento tridimensionale dei 5 elementi in velocità e pressione

Riportiamo inoltre come nel caso precedente, i risultati estrapolati per un singolo ciclo simulato (il sesto), così da rendere più chiara la dinamica degli scostamenti tra i segnali ottenuti con la nuova metodologia e quella di partenza.

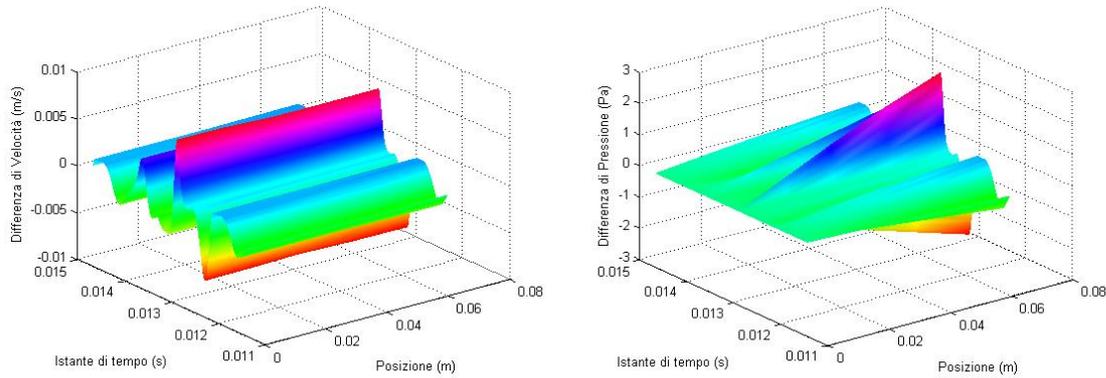


Fig. 34 - Differenza dei segnali nell'intero condotto simulato

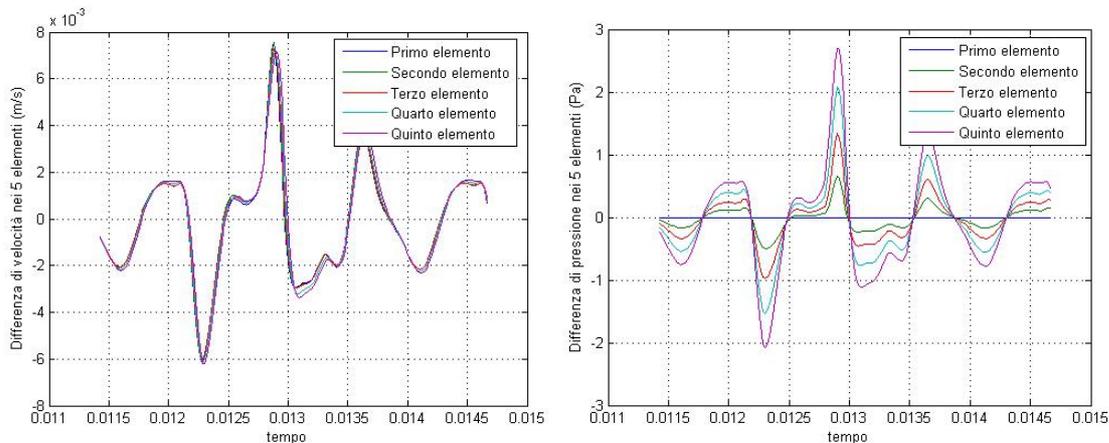


Fig. 35 - Differenza dei segnali di velocità (sx) e pressione (dx) per tutti e cinque gli elementi per il sesto ciclo simulato

Come si può notare, lo scostamento massimo per la velocità è di circa 8×10^{-3} m/s e di 3 Pa per la pressione. La differenza sostanziale tra pressione e velocità è rappresentata dal fatto che l'andamento degli errori nella prima è all'incirca costante per tutti gli andamenti: lo si può notare anche nel grafico a superfici, dove la colorazione varia in maniera analoga lungo l'asse del tempo. La pressione presenta invece un errore che cresce con l'aumentare del numero di elementi. Questo potrebbe indicare la presenza di un piccolo errore di iterazione dello stato di pressione, che resta comunque molto limitato (2×10^{-3} % circa) e stabile nel tempo e non tende ad aumentare.

3.6.2. Modellazione della farfalla

Avendo a questo punto a disposizione una nuova metodologia corretta che permette di considerare anche delle influenze esterne, si può passare all'implementazione di tutti quei dispositivi che introducono delle singolarità nei condotti di aspirazione. Così facendo si possono fisicamente svincolare i calcoli per

l'iterazione delle grandezze degli elementi di discontinuità rispetto al flusso di lavoro per la simulazione del comportamento all'interno del canale.

Consideriamo innanzitutto il sistema in cui verrà modellata la presenza dell'elemento farfalla: è stato estrapolato dall'intero condotto un insieme di otto elementi, quattro a monte e quattro a valle della porta in analisi. Andiamo quindi a considerare come si comporterà il sistema dinamico modellato attraverso la discretizzazione CIR:

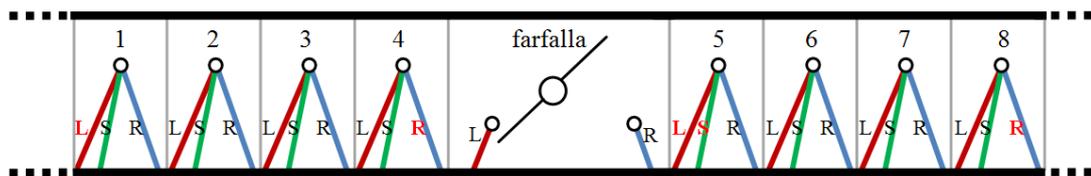


Fig. 36 - Schema completo delle condizioni CIR del tratto di condotto simulato

le condizioni evidenziate saranno oggetto di influenza da parte delle condizioni al contorno e quindi da considerare nella riscrittura delle matrici L_4 , R_4 e S_4 . Le due condizioni L e R presenti in farfalla verranno calcolate direttamente nel blocchetto dedicato, in quanto tali risultati andranno a influenzare esclusivamente l'andamento del vettore BC e non entreranno nell'iterazione dello stato degli otto elementi.

I vettori di controllo diventeranno quindi:

$$L_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mentre i vettori di sostituzione diretta L_3 , R_3 e S_3 saranno tutti nulli in quanto non c'è un contatto diretto con l'ambiente o una discontinuità che necessiti di una sostituzione delle grandezze negli elementi adiacenti.

La grossa problematica di questo elemento è rappresentata dal fatto che, introducendo un aumento di entalpia, si introduce di fatto una discontinuità nelle grandezze termodinamiche. La chiusura della farfalla fa inoltre ridurre di molto l'area efficace di passaggio, accelerando il flusso e raggiungendo anche le condizioni soniche.

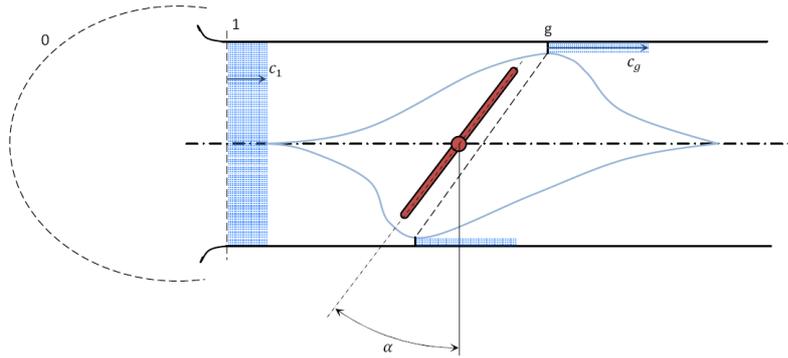


Fig. 37 - Schema di apertura di una farfalla

A questo proposito non è possibile utilizzare, come in un modello 0-D, un semplice bilancio di massa, in quanto la propagazione delle onde di pressione nel canale fa variare, anche di molto, le condizioni a monte e a valle della porta. È quindi necessario procedere con una linearizzazione delle equazioni a nostra disposizione. Si può infatti pensare di introdurre un calcolo del profilo di velocità mediante un efflusso attraverso un orifizio al variare dei possibili rapporti di pressione sussistenti tra monte e valle della farfalla. Analogamente, si può ragionare per ricavare un profilo di velocità mediante il metodo CIR. A questo punto, avendo i due profili di velocità, il loro incrocio indicherà la dinamica del rapporto di pressione e di velocità nel tempo.

Analizziamo inizialmente l'efflusso attraverso un orifizio. L'andamento della velocità in funzione della variazione del rapporto di pressione può essere diviso in quattro tratti. A causa della presenza del fenomeno di blocco sonico, infatti, si generano due portate costanti, una per flusso diretto e una per flusso inverso, che vengono poi unite dalle due equazioni valide per il regime subsonico che sono di tipo quadratico.

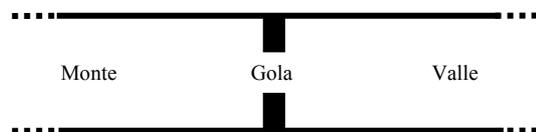


Fig. 38 - Schema di efflusso attraverso orifizio

Ricaviamo le equazioni che governano il moto in analisi, partendo dall'equazione di bilancio:

$$c_p T^0 = c_p T + \frac{u^2}{2} \Rightarrow \frac{kR}{k-1} T^0 = \frac{kR}{k-1} T + \frac{u^2}{2}$$

Ricaviamo la velocità di efflusso generica che andremo a sostituire nell'equazione della portata di massa:

$$u = \sqrt{2 \frac{kRT_m^0}{k-1} \left[1 - \frac{T}{T_m^0}\right]}$$

$$\dot{m} = \rho u A$$

Applichiamo queste equazioni generali al caso della farfalla:

$$\dot{m} = \rho u c_D A_{th}$$

dove $c_D A_{th}$ è l'area effettiva di passaggio. Continuiamo con la sostituzione:

$$\dot{m} = c_D A_{th} \frac{\rho_1}{\rho_1/\rho_2} \sqrt{2 \frac{kR}{k-1} T_1 \left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right]}$$

dove le grandezze con i pedici 1 sono considerate in ingresso, mentre quelle con i pedici 2 sono valutate in uscita dalla farfalla. Possiamo inoltre sostituire i rapporti di

temperatura e densità con quelli in pressione, ricordando che $\frac{T_e}{T_0} = \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{k-1}{k}}$ e $\frac{\rho_e}{\rho_0} = \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{1}{k}}$:

$$\dot{m} = c_D A_{th} \rho_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}} \sqrt{2 \frac{kR}{k-1} T_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}}$$

Otteniamo quindi l'equazione della portata di massa attraverso un orifizio al variare del rapporto di pressione sussistente tra valle e monte del condotto:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= c_D A_{th} \rho_0 \sqrt{RT_1} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{(k-1)+2}{k}} \right]} \\ &= c_D A_{th} \rho_1 \sqrt{RT_1} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{(k+1)}{k}} \right]} \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione iniziale della portata possiamo ora ottenere la velocità di efflusso in relazione al rapporto di pressioni:

$$\begin{aligned} u_{eff} = \frac{\dot{m}}{\rho A} &= \frac{c_D A_{th} \rho_1 \sqrt{RT_1}}{A \rho_1} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{(k+1)}{k}} \right]} \\ &= \frac{c_D A_{th}}{A} \sqrt{\frac{\rho_1 p_1}{\rho_1^2}} \sqrt{\frac{2k}{k-1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{(k+1)}{k}} \right]} \end{aligned}$$

L'equazione è quindi applicabile in qualsiasi condizione, sia di flusso diretto che di flusso inverso, con l'accortezza che in caso di flusso diretto il rapporto di densità sotto

la radice si semplifica, mentre in caso di flusso inverso tale rapporto resta presente, in quanto diventa rapporto tra la densità nel punto 1 e quella nel punto 2.

Ricaviamo ora il profilo di velocità dalle condizioni CIR presenti in farfalla. Partendo dalle equazioni delle condizioni L e R scritte per i punti 1 e 2 si può ottenere:

$$\begin{aligned} p_1^{n+1} - p_L^n + \rho_L^n a_L^n u_1^{n+1} - \rho_L^n a_L^n u_L^n + [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t &= 0 \\ p_2^{n+1} - p_R^n - \rho_R^n a_R^n u_2^{n+1} + \rho_R^n a_R^n u_R^n + [\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t &= 0 \end{aligned}$$

Quindi isolando al primo membro le grandezze iterate all'istante successivo si avrà:

$$\begin{aligned} u_1^{n+1} + \frac{p_1^{n+1}}{\rho_L^n a_L^n} &= u_L^n + \frac{p_L^n}{\rho_L^n a_L^n} - \frac{[\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t}{\rho_L^n a_L^n} \\ u_2^{n+1} - \frac{p_2^{n+1}}{\rho_R^n a_R^n} &= u_R^n - \frac{p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} + \frac{[\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t}{\rho_R^n a_R^n} \end{aligned}$$

Per semplicità indichiamo i secondi membri delle equazioni come TN_L^1 e TN_R^2 .

Possiamo pertanto scrivere la generica relazione:

$$p_2^{n+1} = p_1^{n+1} \cdot \Gamma$$

dove Γ rappresenta il rapporto di pressione tra valle e monte, esattamente come nel moto di efflusso (cioè $\Gamma = \frac{p_2^{n+1}}{p_1^{n+1}}$).

Ricaviamo ora dalle relazioni CIR le pressioni:

$$\begin{aligned} p_1^{n+1} &= (TN_L^1 - u_1^{n+1}) \rho_L^n a_L^n \\ p_2^{n+1} &= (u_2^{n+1} - TN_R^2) \rho_R^n a_R^n \end{aligned}$$

Sostituendo quindi nell'equazione del rapporto di pressione:

$$\begin{aligned} (u_2^{n+1} - TN_R^2) \rho_R^n a_R^n &= (TN_L^1 - u_1^{n+1}) \rho_L^n a_L^n \cdot \Gamma \\ \rho_R^n a_R^n u_2^{n+1} - \rho_R^n a_R^n TN_R^2 &= \rho_L^n a_L^n TN_L^1 \Gamma - \rho_L^n a_L^n u_1^{n+1} \Gamma \\ \rho_L^n a_L^n u_1^{n+1} \Gamma + \rho_R^n a_R^n u_2^{n+1} &= \rho_L^n a_L^n TN_L^1 \Gamma + \rho_R^n a_R^n TN_R^2 \end{aligned}$$

$$u_1^{n+1} \left(\rho_L^n a_L^n \Gamma + \rho_R^n a_R^n \frac{u_2^{n+1}}{u_1^{n+1}} \right) = \rho_L^n a_L^n TN_L^1 \Gamma + \rho_R^n a_R^n TN_R^2$$

Applicando l'equazione di continuità tra l'ingresso e l'uscita dell'elemento farfalla, possiamo quindi scrivere $\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$; isolando il rapporto di velocità, si ottiene quindi:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1 A_1}{\rho_2 A_2}$$

Sostituendo nella precedente si ottiene l'equazione:

$$u_1^{n+1} \left(\rho_L^n a_L^n \Gamma + \rho_R^n a_R^n \left(\frac{\rho_1^{n+1}}{\rho_2^{n+1}} \right) \frac{A_1}{A_2} \right) = \rho_L^n a_L^n T N_L^1 \Gamma + \rho_R^n a_R^n T N_R^2$$

Si può quindi sostituire il rapporto di densità con il rapporto di pressioni:

$$\frac{\rho_1^{n+1}}{\rho_2^{n+1}} = \left(\frac{p_1^{n+1}}{p_2^{n+1}} \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{1}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{k}}$$

Possiamo infine ricavare l'equazione del profilo di velocità al variare del rapporto di pressione esistente in farfalla:

$$u_{CIR} = \frac{\rho_L^n a_L^n T N_L^1 \Gamma + \rho_R^n a_R^n T N_R^2}{\left(\rho_L^n a_L^n \Gamma + \rho_R^n a_R^n \left(\frac{1}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{A_1}{A_2} \right)}$$

Abbiamo pertanto ottenuto due profili di velocità che ad ogni *step* di iterazione si incrociano in un unico punto al quale corrisponderà un nuovo valore di velocità in ingresso e rapporto di pressione della farfalla.

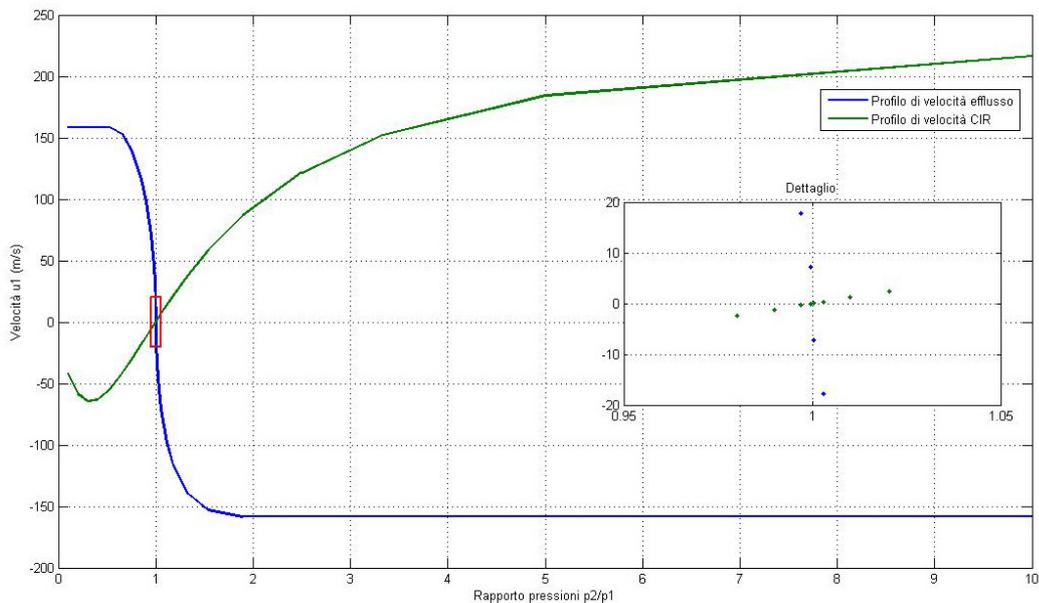


Fig. 39 - Rappresentazione dei due profili di velocità nelle condizioni in analisi, nel dettaglio sono rappresentati solo i punti di calcolo

La modellazione della valutazione di tale incrocio ha richiesto molta attenzione in quanto il sistema matematico da risolvere è non omogeneo e non lineare e ci si è pertanto dovuti basare su una linearizzazione numerica. I profili di velocità sono infatti calcolati a rapporti di pressione predeterminati e potrebbe quindi capitare che l'incrocio tra i due profili avvenga in un punto intermedio rispetto alla discretizzazione.

La modellazione in Matlab-Simulink della valutazione dell'incrocio si è pertanto basata sulla ricerca del punto di attraversamento dello zero della differenza dei due segnali. Facendo ciò e applicando una linearizzazione del primo ordine si riesce ad ottenere l'iterazione del rapporto delle pressioni e della velocità a monte. Si può infatti scrivere il sistema di due equazioni in cui le variabili sono la velocità e il rapporto di pressione all'istante successivo:

$$\begin{cases} u_1^{n+1} = u_{eff_A} + \frac{u_{eff_A} - u_{eff_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} (\Gamma_A - \Gamma^{n+1}) \\ u_1^{n+1} = u_{CIR_A} + \frac{u_{CIR_A} - u_{CIR_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} (\Gamma_A - \Gamma^{n+1}) \end{cases}$$

dove i pedici A e B si riferiscono rispettivamente alle grandezze valutate al punto precedente e seguente all'incrocio dei profili di velocità.

Sostituendo la prima nella seconda si ottiene infatti:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{CIR_A} - u_{CIR_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} - \frac{u_{eff_A} - u_{eff_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} \right) \Gamma^{n+1} \\ & = u_{CIR_A} + \frac{u_{CIR_A} - u_{CIR_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} \Gamma_A - u_{eff_A} - \frac{u_{eff_A} - u_{eff_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} \Gamma_A \\ \Gamma^{n+1} & = \frac{u_{CIR_A} + \frac{u_{CIR_A} - u_{CIR_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} \Gamma_A - u_{eff_A} - \frac{u_{eff_A} - u_{eff_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} \Gamma_A}{\left(\frac{u_{CIR_A} - u_{CIR_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} - \frac{u_{eff_A} - u_{eff_B}}{\Gamma_A - \Gamma_B} \right)} \end{aligned}$$

da cui, di conseguenza, si può ricavare la velocità applicando una delle due equazioni del sistema precedente.

Una volta applicati questi ragionamenti, si possono semplicemente ricavare dalle equazioni CIR le grandezze rimaste per la risoluzione della farfalla. In ordine di calcolo si possono infatti ottenere:

$$\begin{aligned} p_1^{n+1} & = \rho_L^n a_L^n (u_L^n - u_1^{n+1}) + p_L^n - [\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n] \Delta t \\ p_2^{n+1} & = \Gamma^{n+1} p_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} & = u_R^n + \frac{(p_2^{n+1} - p_R^n)}{\rho_R^n a_R^n} + \frac{[\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t}{\rho_R^n a_R^n} \\ \rho_1^{n+1} & = \rho_S^n + \frac{(p_1^{n+1} - p_S^n)}{a_S^{n2}} + \frac{[\Delta_{1S}^n] \Delta t}{a_S^{n2}} \\ \rho_2^{n+1} & = \rho_1^{n+1} (\Gamma^{n+1})^{\frac{1}{k}} \end{aligned}$$

Una volta che la farfalla risulta completamente risolta, i valori andranno quindi ad aggiornare il vettore delle condizioni al contorno BC , che andrà ad influenzare la dinamica degli elementi adiacenti attraverso le matrici descritte in precedenza.

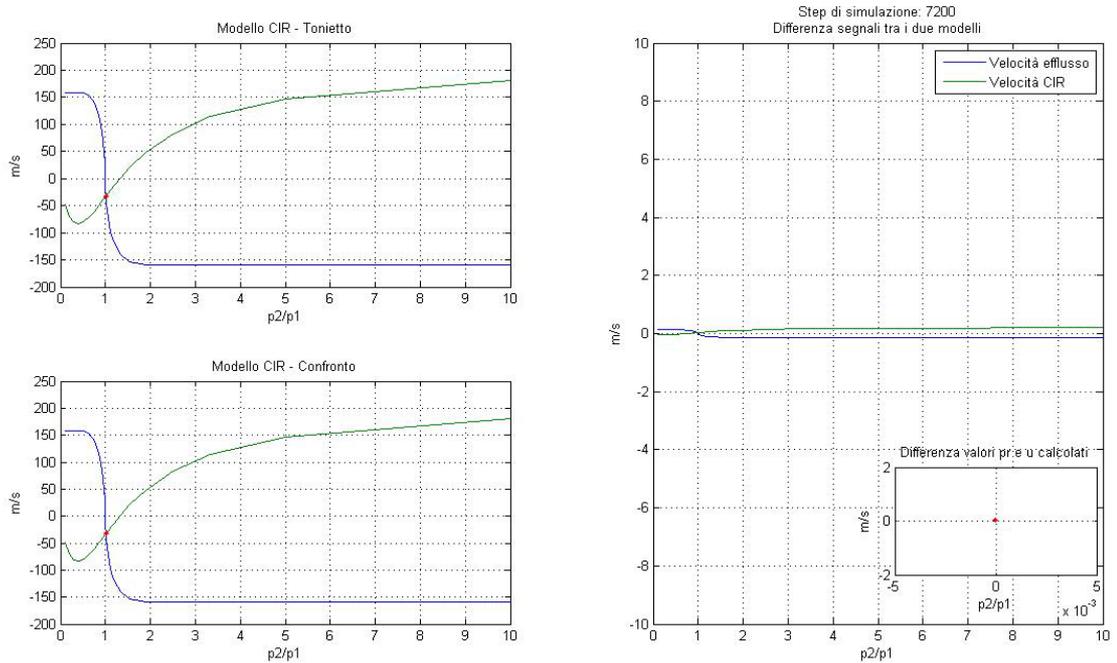


Fig. 40 - Screenshot per il confronto e il controllo dell'andamento della simulazione delle condizioni in farfalla, step di simulazione: 7200

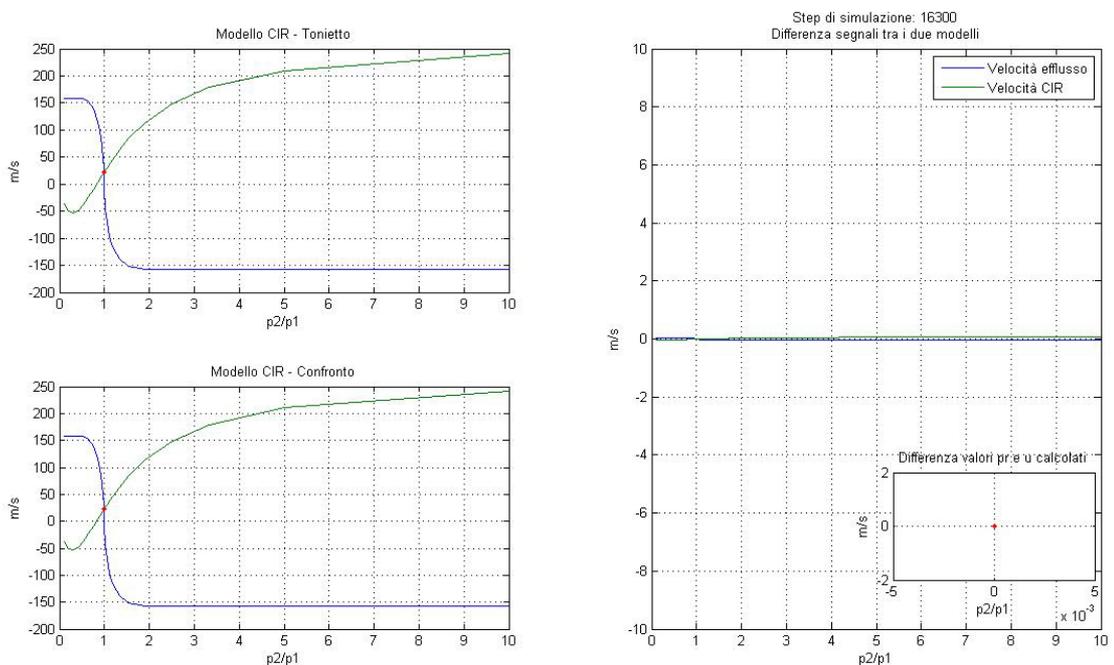


Fig. 41 - Screenshot per il confronto e il controllo dell'andamento della simulazione delle condizioni in farfalla, step di calcolo: 7200

Confrontando anche i segnali in uscita dall'elemento farfalla si può notare che i segnali della nuova modellazione e quelli ottenuti con il modello di confronto si sovrappongono perfettamente, dimostrando quindi una corretta implementazione della modellazione.

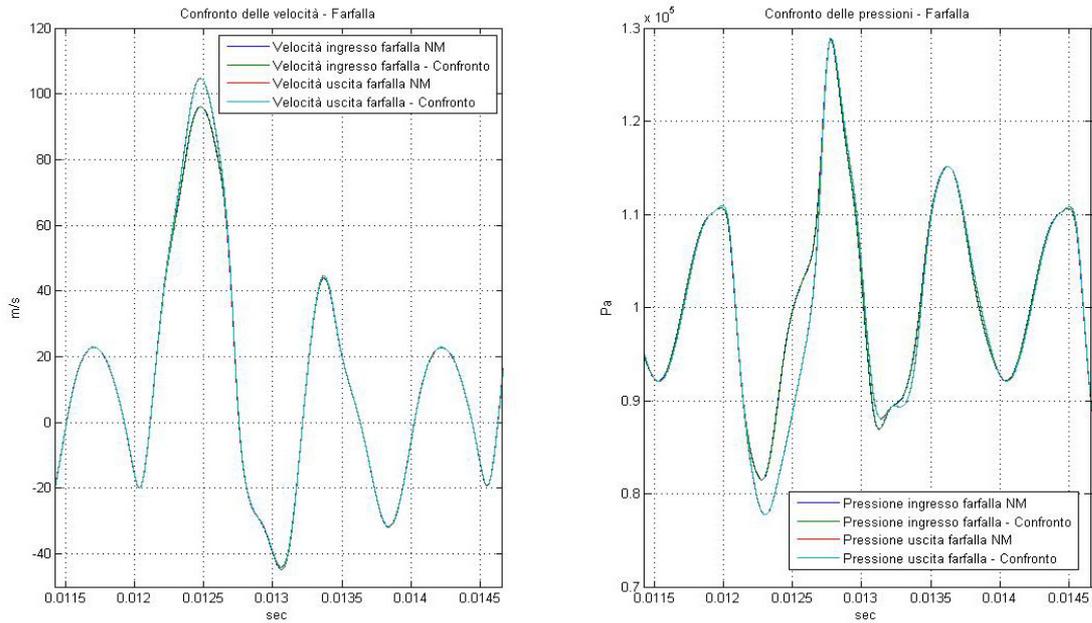


Fig. 42 - Confronto per il sesto ciclo simulato delle velocità e delle pressioni in ingresso e uscita dalla farfalla

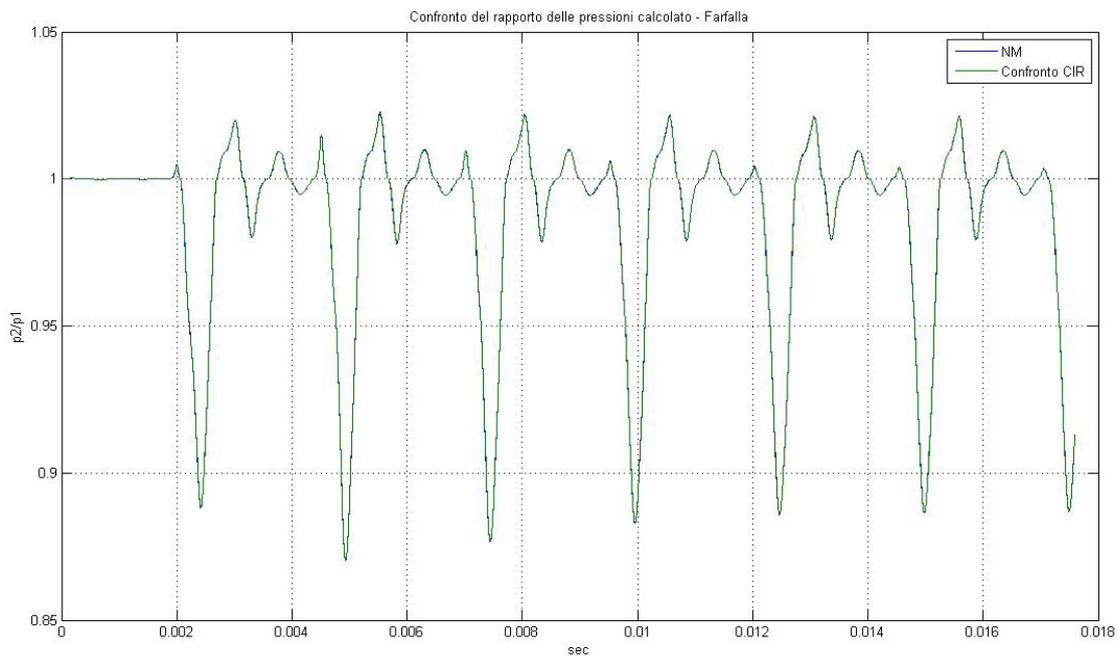


Fig. 43 - Confronto del rapporto delle pressioni calcolato in farfalla

I risultati sono analoghi a quelli ottenuti per la farfalla e anche in questo caso sono state effettuate simulazioni esclusivamente con il salvataggio dei dati, e il tempo di simulazione si assestava attorno ai 3,4 secondi.

A questo punto, avendo a disposizione in libreria l'intero set degli elementi, è possibile passare alla simulazione dell'intero sistema di aspirazione nel suo complesso.

3.7. Modellazione FM e HM

Nell'implementazione dell'intero modello, per far fronte all'aumento dei tempi di simulazione dovuti all'inversione di matrici sempre più grandi⁴, si è trovata un'ulteriore modellazione che mantenesse i vantaggi della riscrittura matriciale, ma che garantisse velocità di simulazione maggiori.

La procedura utilizzata finora, che prevedeva la costruzione della matrice completa delle equazioni differenziali e poi la sua inversione per la soluzione dello *step* di iterazione, è stata quindi chiamata modellazione FM (*full-matrix*),.

La nuova metodologia, detta HM (*half-matrix*), sfrutta la possibilità di dividere l'intera matrice di definizione delle relazioni CIR in tre sottomatrici più piccole, una per l'iterazione della velocità, una per l'iterazione della pressione e l'ultima per l'iterazione della densità.

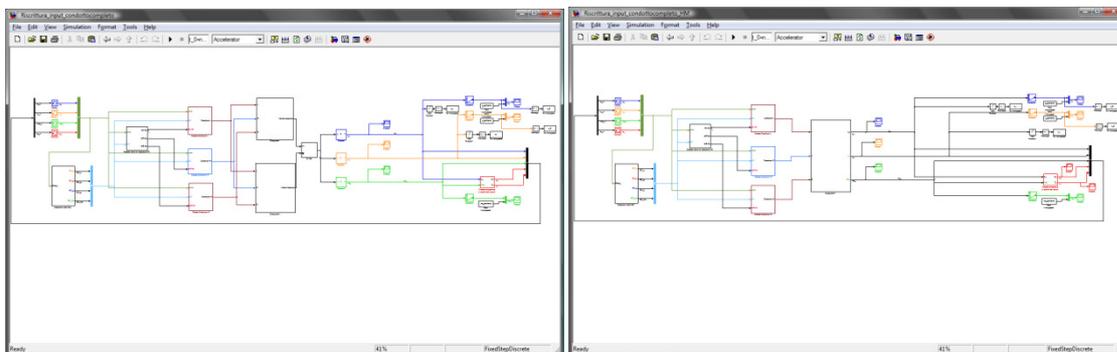


Fig. 45 - Schermata principale della modellazione FM (Full-Matrix) (sx) e di quello HM (Half-Matrix) (dx)

Applicando questa riduzione, il calcolo delle relazioni necessarie per ottenere la dinamica delle grandezze termodinamiche risulta ovviamente molto più veloce. Inoltre, per migliorare ulteriormente le prestazioni del codice, è stata implementata direttamente la catena di calcolo della grandezza già iterata, mediante la scrittura delle equazioni già ricavate in precedenza:

⁴ L'intero sistema di confronto prevede la discretizzazione di 50 elementi, il che significa invertire ad ogni *step* di iterazione una matrice 150x150.

$$u_i^{n+1} = \frac{p_i^{n+1} - p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} + u_R^n + \frac{[\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n] \Delta t}{\rho_R^n a_R^n}$$

$$p_i^{n+1} = \frac{\frac{p_L^n}{\rho_L^n a_L^n} + \frac{p_R^n}{\rho_R^n a_R^n} + u_L^n - u_R^n - \left[\frac{\Delta_{1R}^n + \Delta_{2R}^n - \Delta_{3R}^n}{\rho_R^n a_R^n} + \frac{\Delta_{1L}^n + \Delta_{2L}^n + \Delta_{3L}^n}{\rho_L^n a_L^n} \right] \Delta t}{\left(\frac{1}{\rho_L^n a_L^n} + \frac{1}{\rho_R^n a_R^n} \right)}$$

$$\rho_i^{n+1} = \frac{p_i^{n+1} - p_S^n + a_S^{n2} \rho_S^n + [\Delta_{1S}^n] \Delta t}{a_S^{n2}}$$

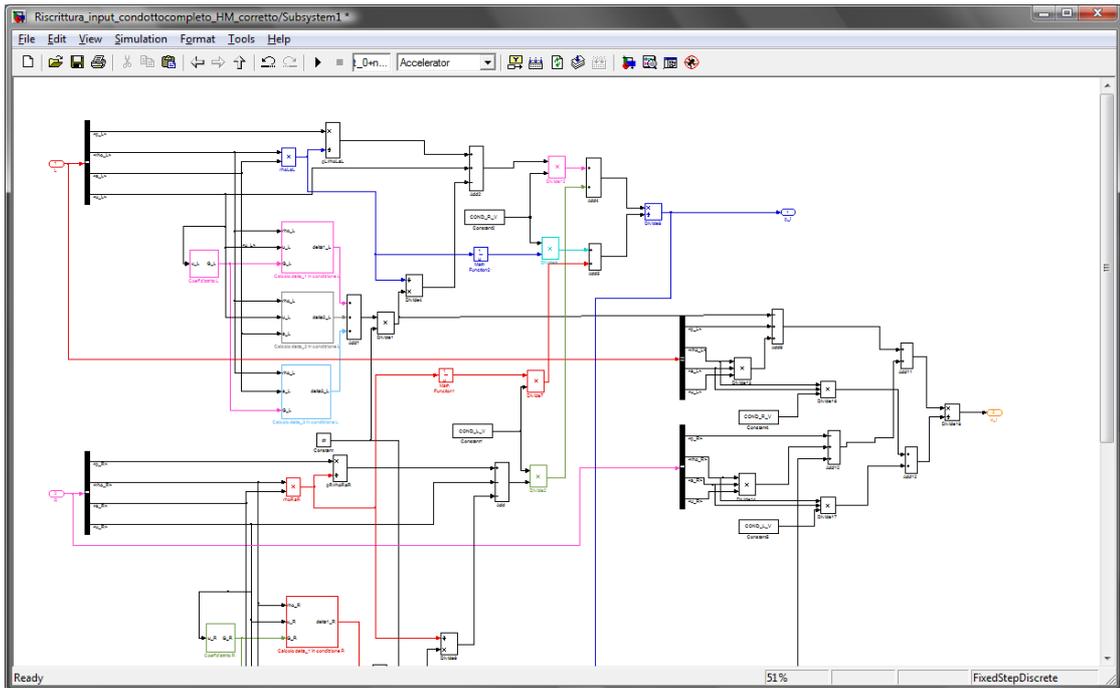


Fig. 46 - Visualizzazione delle equazioni numeriche di iterazione implementate per il modello HM

Questa nuova riscrittura assicura gli stessi vantaggi della FM, in quanto le condizioni CIR continuano ad essere valutate mediante scrittura matriciale, che quindi garantisce la facilità di configurazione, offrendo però prestazioni di calcolo globali nettamente migliori. Infatti, applicando questa nuova metodologia si riescono ad ottenere tempi di simulazione visibilmente ridotti, senza nessuna perdita di precisione. È stata pertanto scelta questa modalità per la simulazione dei condotti di aspirazione completi.

4. LA SIMULAZIONE

4.1. Introduzione

Una volta terminata, quindi, la modellazione e la validazione dei singoli elementi che compongono il condotto si può ora passare alla simulazione completa dell'apparato di aspirazione. L'applicazione del nuovo modello sarà prima effettuata su una discretizzazione fissa, uguale a quella usata nella metodologia di confronto e applicata anche nella realizzazione dei singoli componenti. In un secondo momento si farà variare la suddivisione in elementi della geometria, in maniera tale da valutare la risposta del modello alla variazione della griglia di calcolo.

4.2. Modello del condotto completo con discretizzazione fissa

La discretizzazione fissa finora utilizzata prevede la suddivisione in 55 elementi per la simulazione dell'intero condotto di aspirazione. Si possono distinguere quattro segmenti principali del sistema. Originariamente, nel modello di confronto, il tratto iniziale era costituito da 18 elementi, seguiti dal blocchetto farfalla. Il secondo segmento era formato da 9 nodi collegati al blocco giunzione a Y e infine due tratti di 12 elementi ciascuno, che si interfacciavano con le valvole, a loro volta collegate alla camera di combustione del cilindro.

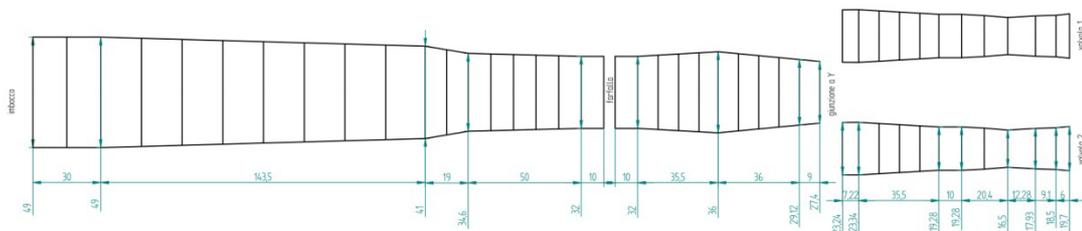


Fig. 47 - Rappresentazione della discretizzazione a 50 elementi

Come già visto nel capitolo della modellazione, il numero di elementi proposti dalla nuova modellazione si riducono fin da subito: estraendo l'iterazione diretta dei componenti ad aumento di entalpia si riduce automaticamente il numero di nodi necessari. L'iterazione dello stato diventa infatti a 50 elementi, mantenendo comunque inalterata la griglia di soluzione.

4.2.1. La procedura di lancio della simulazione

Il lancio della simulazione del modello Simulink avviene, ovviamente, attraverso un codice Matlab che inizializza le variabili e i vettori necessari alla risoluzione. Per queste prime simulazioni la geometria, essendo fissa, è stata definita in maniera manuale, inserendo cioè tutti i dati dei vettori necessari per la simulazione. Ciò rappresenta comunque un notevole miglioramento rispetto alla versione usata per il confronto, nella quale la definizione della geometria era insita nel modello Simulink e poco si prestava a correzioni o modifiche successive.

Il codice di lancio inizia con le definizioni di parametri base della simulazione:

```
%Parametri per configurare la simulazione Simulink
t_0=0;
passo_simulazione=0.0043;
dt=4.166e-06;
n_cicli=7;
bias=1e-11;

%Inserimento dettagli fluido: ARIA

R=287;          % J/kgK
cp=1000;        % J/(kg K)
cv=cp-R;
k=cp/cv;
rapp_cr=(2/(k+1))^(k/(k-1));

%Inserimento proprietà condotto

q=0; %consideriamo condotto adiabatico
f=0.002; %coeff di attrito con le pareti
```

Per il momento i parametri legati agli intervalli di simulazione sono considerati fissi. Essendo però l'intera simulazione valutata in base angolo, in caso di variazione di velocità di rotazione del motore devono essere variati sia il passo di simulazione che il dt.

Come si può notare dall'estratto del codice il fluido in analisi è considerato come aria pura con proprietà costanti. Questa semplificazione sarebbe corretta soltanto nel caso in cui l'iniezione del combustibile avvenisse in camera di combustione, cioè per motori GDI (*Gasoline Direct Injection*). Tuttavia, anche per motori con iniezione indiretta, non si discosta molto dalle condizioni reali, in quanto la forte diluizione del combustibile non fa variare in maniera considerevole tali proprietà. Questa condizione è stata perciò adottata per non aggravare ulteriormente il costo computazionale del modello.

Successivamente vengono inseriti i vettori che definiscono la geometria della griglia di calcolo. I vettori necessari sono sei: diametro, area, variazione di posizione in avanti e all'indietro e variazione di sezione rispetto all'elemento precedente e seguente.

```
%Inserimento parametri geometria condotto

D=[0.049 0.049 0.049 0.048 0.047...0.01685 0.01793 0.0185]';

l=length(D);

for i=1:l
    A(i)=pi*D(i)^2/4;
end
A=A';

dx_meno=[0 0.015 0.015 0.018 0.018 0.018...0.01228 0.0091]';
dx_piu=[0.015 0.015 0.018 0.018 0.018...0.01228 0.0091 0.006]';
dA_dx_meno=[0 0 0 -0.00423 -0.00423...-0.0034 0.0024 0.0018]';
dA_dx_piu=[0 0 -0.00423 -0.00423...0.0024 0.0018 0.006]';
```

Particolare importanza riveste anche il parametro l , che definisce il numero totale di elementi presenti nella discretizzazione e che viene richiamato più volte anche nel modello Simulink. Uguale importanza hanno anche i parametri che definiscono le posizioni di elementi come farfalla e valvola e la posizione della giunzione. Questi termini verranno infatti utilizzati in seguito per la costruzione automatica delle matrici di controllo dell'iterazione con il metodo CIR. Come si è già visto nel capitolo precedente, la presenza di tali elementi fa appunto variare la regolarità delle matrici, rappresentando quindi il cuore di questa nuova modellazione. Grazie a questi pochi parametri è possibile, infatti, riscrivere completamente la geometria di soluzione, mantenendo inalterato il modello generale.

```
%Definizione parametri farfalla, giunzione Y e valvola

farf=18;    %numero elemento precedente alla farfalla

gY1=29;    %numero primo elemento del primo condotto in uscita
           %dalla giunzione

gY2=40;    %numero primo elemento del secondo condotto in uscita
           %dalla giunzione
```

```

if gY1~=0 && gY2~=0

    tau=(A(gY1-1)/A(gY1))/2; %rapporto sezioni
                                ingresso/uscita diviso per 2
end

valv_1=39; %numero elemento precedente alla prima valvola
valv_2=50; %numero elemento precedente alla seconda valvola

```

Per il momento tali valori sono inseriti manualmente, tuttavia in seguito verrà automatizzata anche questa procedura di inserimento.

Si può quindi passare alla scrittura delle matrici di controllo. Vengono innanzitutto scritte le matrici nella forma generica, quindi come se l'intero apparato di aspirazione fosse un condotto rettilineo cilindrico, a cui vengono poi applicate le correzioni necessarie.

```

%Matrici per L:

L1=eye(1); %Prima matrice di controllo CIR (car. L)

if dx_meno(1)==0
    L1(1,1)=0;
end

l2=diag(ones(1-1,1),-1);
L2=(L1-l2); %Seconda matrice di controllo CIR
(car. L)

if gY1~=0 && gY2~=0
    L2(gY2,gY1-1)=-1; L2(gY2,gY2-1)=0;
end

if farf~=0
    L2(farf+1, farf)=0;
end

L3=zeros(1,1); %Matrice di sostituzione diretta (car L.)

if dx_meno(1)==0
    L3(1,1)=1;
end

L4=zeros(1,1); %Matrice di influenza (car. L)

if dx_meno(1)~=0
    L4(1,1)=1;
end

if farf~=0
    L4(farf+1,1)=1;
end

if gY1~=0 && gY2~=0

```

```

L5=zeros(1,1); L5([gY1,gY2],gY1-1)=1-tau; %Matrice
necessaria per la correzione della velocità nella
condizione L nell'elemento giunzione Y
end

COND_L=diag(1.-L3);
COND_L_V=(1.-L3);

```

Anche per le condizioni R e S sono stati scritti codici analoghi, che definiscono completamente l'influenza dei vari componenti sugli elementi a loro adiacenti.

Una volta calcolate queste matrici e questi vettori necessari al controllo dell'iterazione, non resta che settare le condizioni iniziali all'interno del condotto e caricare i segnali delle condizioni al contorno, ovvero le grandezze termodinamiche (pressione, velocità, densità e velocità del suono) all'imbocco del condotto e nel cilindro, oltre alla dinamica di apertura della farfalla e all'alzata delle valvole.

```

%Definizione delle condizioni iniziali: consideriamo all'inizio
della simulazione tutti gli elementi a condizione ambiente

u_0_i=ones(1,1).*u_iniz;

p_0_i=ones(1,1).*p_iniz;

rho_0_i=ones(1,1).*rho_iniz;

a_0_i=ones(1,1).*a_iniz;

load segnali_78.mat

```

4.2.2. La simulazione

La simulazione del condotto completo verrà eseguita una prima volta con entrambe le metodologie proposte (*FM* e *HM*) per un primo confronto di prestazioni. Successivamente si utilizzerà esclusivamente la modellazione *HM* (*Half Matrix*), in maniera tale da avere una prestazione di calcolo migliore. Una volta inseriti i parametri nella procedura di lancio sarà necessario solamente lanciare la simulazione, in quanto il modello si adatta autonomamente alle condizioni date in ingresso ai vettori.

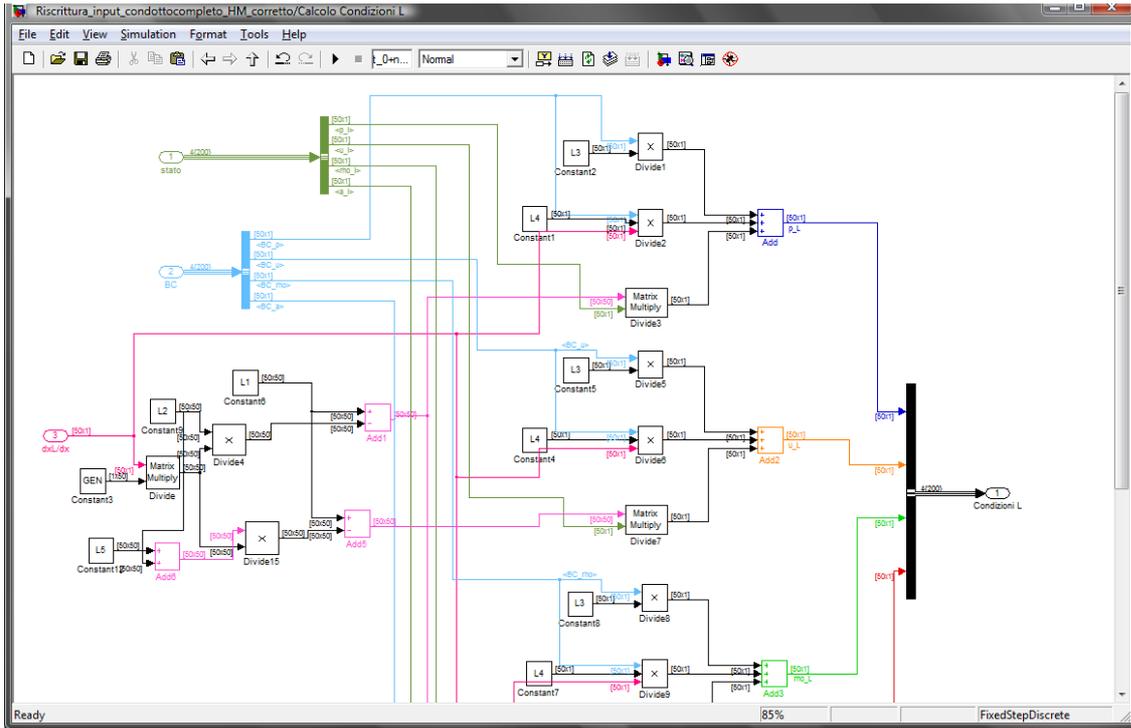


Fig. 48 - Schermata del calcolo delle condizioni L, si può vedere una parte comune per tutte le grandezze termodinamiche (a sx) con l'aggiunta successiva delle condizioni al contorno

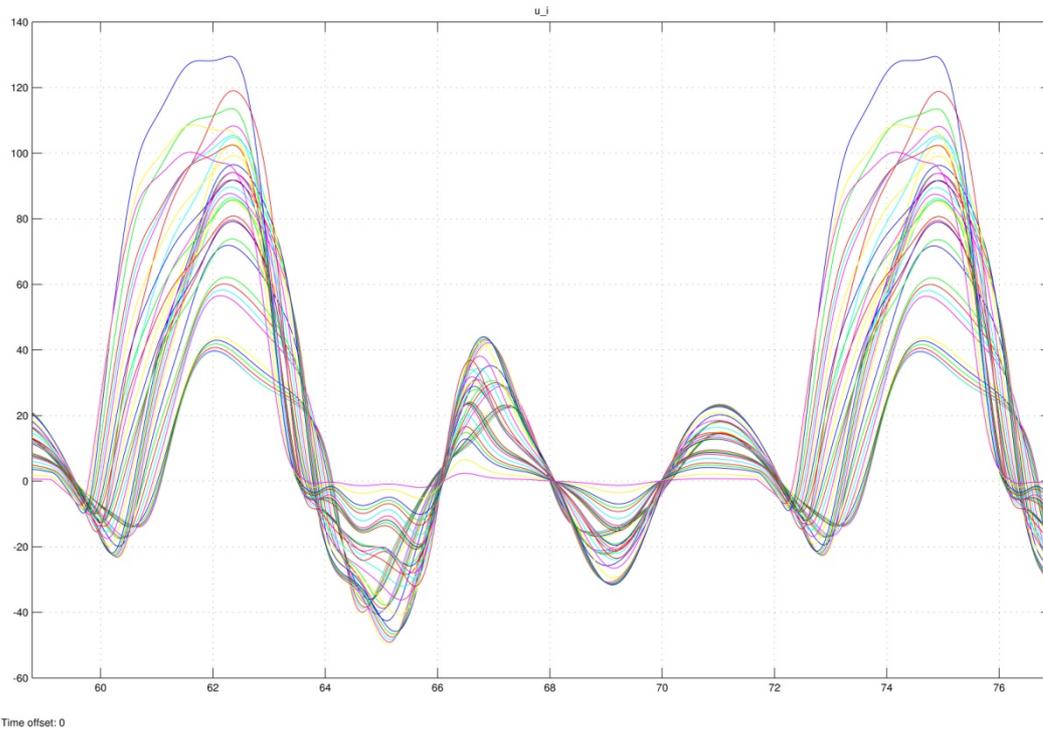


Fig. 49 - Grafico che rappresenta l'andamento della velocità in tutti e 50 gli elementi nel corso del 5/6 ciclo

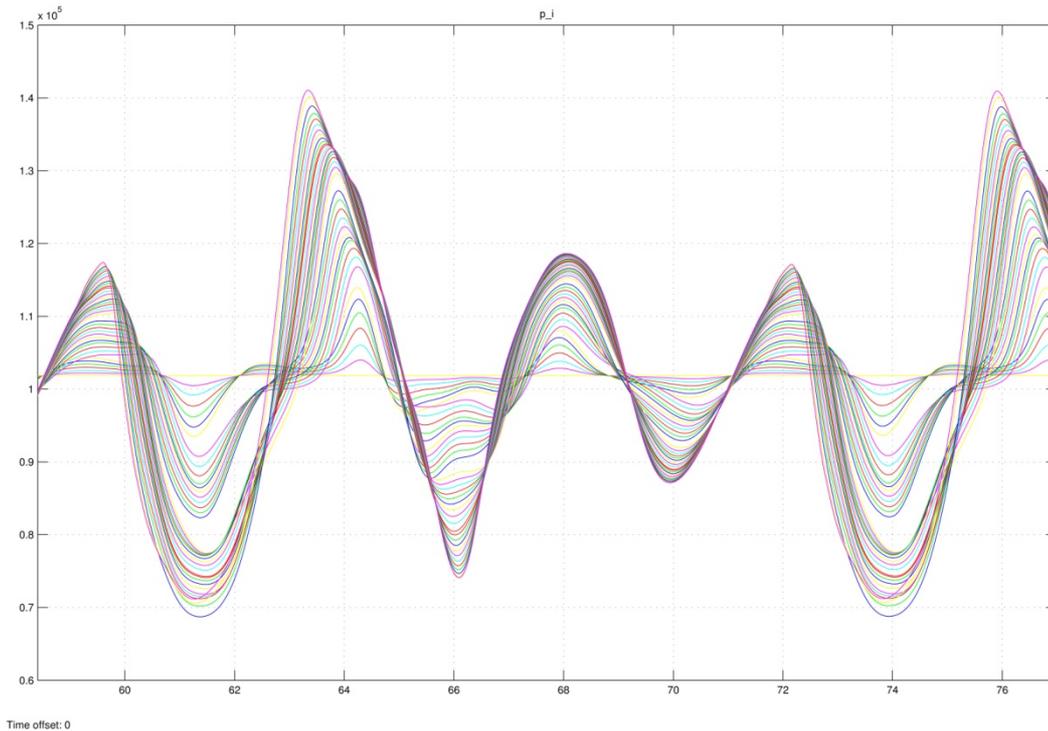


Fig. 50 - Grafico che rappresenta l'andamento della pressione in tutti e 50 gli elementi nel corso del 5/6 ciclo

Per quanto riguarda i risultati e le tempistiche di simulazione, riportiamo l'esito delle simulazioni effettuate con Matlab:

```
### Building the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_FM
### Successfully built the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_FM
```

```
Tempo simulazione modello FM
Elapsed time is 166.3 seconds.
```

```
### Building the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_HM
### Successfully built the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_HM
```

```
Tempo simulazione modello HM
Elapsed time is 15.43 seconds.
```

```
### Building the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_HM_clean
### Successfully built the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_HM_clean
```

```
Tempo simulazione modello HM_CLEAN
Elapsed time is 13.66 seconds.
```

Simulazione corretta, CFL = 0.1103 < 1

Punto 1: 10000 rpm - 100

Massa d'aria aspirata: 136.9 mg/ciclo [Confronto: 138.3 mg/ciclo
Sperimentale: 137.8 mg/ciclo]

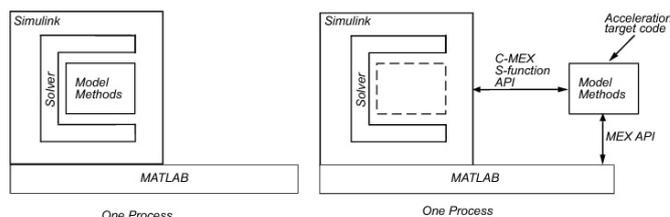
Pressione media condotto: 1008 mbar [Confronto: 1008 mbar
Sperimentale: 1031 mbar]

Bisogna innanzitutto sottolineare che le simulazioni sono state lanciate mediante modalità Accelerator⁵. Senza dubbio si può notare un netto miglioramento tra la modalità FM, che quindi è obbligata a invertire ad ogni *step* di iterazione una matrice di 150x150 elementi e la modalità HM. Il modello HM_CLEAN è senza salvataggio dei risultati e come si può notare ha un tempo di soluzione leggermente più breve. La precisione del modello è decisamente buona, nonostante la riduzione del tempo di simulazione (il modello di confronto impiega circa 40 secondi a simulazione), si ottengono pressoché gli stessi risultati.

4.3. Modello a discretizzazione variabile

Andiamo ora a valutare le prestazioni del modello in caso di variazione della discretizzazione. A tale scopo si è costruita una procedura che, a partire dalla stessa geometria, realizzasse automaticamente diverse griglie di soluzione.

⁵ La modalità Accelerator sfrutta parte del codice Simulink per generare dei file eseguibili esterni al codice implementato. Applicando questa nuova codifica del modello si ottengono quindi tempi di simulazione più ridotti.



Nella modalità Accelerator, infatti, i metodi di modello sono separati dall'ambiente Simulink e viene invece generata una C-MEX API S-Function che comunica con il software di modellazione ed è parte integrante del nuovo file eseguibile. Una funzione MEX API è inoltre necessaria per comunicare con l'ambiente Matlab. In questa maniera il modello viene eseguito in un unico processo.

4.3.1. La funzione *Geometria*

Per realizzare quindi una discretizzazione variabile è stata realizzata una funzione che, a partire dagli elementi richiesti dall'utente, valuta la fattibilità e ottimizza la suddivisione della griglia. Questa funzione è pensata per la geometria in analisi, in quanto ragiona sulla suddivisione in tre macrotratti del condotto di aspirazione, a cui vengono mantenute fisse le proprietà degli elementi estremi. Successivamente ogni tratto viene suddiviso in una serie di segmenti minori, che si distinguono per avere la stessa variazione di sezione. Questa specializzazione della funzione, comunque, non compromette la generale applicabilità di questo procedimento, in quanto è solamente necessario riscrivere la parte in cui vengono definite le proprietà geometriche dei segmenti.

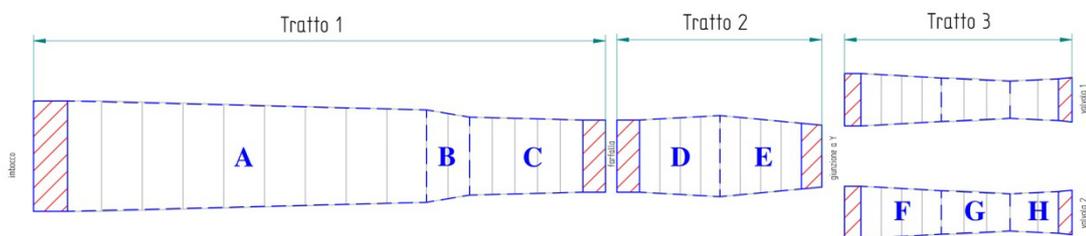


Fig. 51 - Rappresentazione della suddivisione preliminare della geometria all'interno della funzione, in rosso sono evidenziati gli elementi fissi, mentre in grigio sono riportate le suddivisioni originali della geometria

La procedura inizia chiedendo all'utente il numero di elementi desiderati per i tratti descritti:

```
%Inserimento parametri geometria condotto  
  
n1 = input('Numero elementi del tratto Imbocco-Farfalla ')  
n2 = input('Numero elementi del tratto Farfalla-Giunzione ')  
n3 = input('Numero elementi del tratto Giunzione-Valvola ')
```

A questo punto è necessario inserire la geometria generica, che viene inserita mediante i parametri degli elementi fissi, e la geometria di massima dei singoli segmenti evidenziati.

```
%Inseriamo i parametri degli elementi fissi come imbocco,  
farfalla,  
%giunzione a Y e valvola, che verranno poi utilizzati per la  
creazione dei  
%vettori generali della geometria del condotto  
  
d_imbocco=0.049;  
A_imbocco=pi*(d_imbocco^2)/4;  
dA_imbocco=0;
```

```

dx_imbocco=0.015;

d_farf_i=0.032;
A_farf_i=pi*(d_farf_i^2)/4;
dA_farf_i=0;
dx_farf_i=0.01;

[...]

%Inseriamo la geometria generale del condotto, ogni tratto è
%stato scomposto in più segmenti con la stessa variazione
%costante, verranno poi suddivisi in base al numero degli
%elementi richiesti, utilizzeremo le lettere maiuscole per
%indicare i segmenti successivi:
%il primo, dall'imbocco alla farfalla avrà i segmenti A, B, C
%il secondo, dalla farfalla alla giunzione a Y, i segmenti D, E
%il terzo dalla giunzione alla valvola i segmenti F, G, H

D_A_i=d_imbocco;
dx_A=0.1585;

D_B_i=0.041;
dx_B=0.019;

D_C_i=0.0346;
dx_C=0.050;

D_D_i=d_farf_e;
dx_D=0.0355;

D_E_i=0.036;
dx_E=0.036+0.009;

D_F_i=0.02334;
dx_F=0.0355+0.00722;

D_G_i=0.01928;
dx_G=0.0404;

D_H_i=0.01685;
dx_H=0.01228+0.0091+0.006;

```

Ora è possibile partire con la suddivisione degli elementi. Notando che la lunghezza di ogni singolo segmento è fortemente variabile, è necessario pensare di applicare un bilancio pesato del numero totale di elementi richiesti dall'utente in base alla lunghezza del segmento in analisi rispetto al tratto complessivo. A tal fine si è quindi applicato un rapporto lineare tra le due lunghezze, moltiplicandolo poi per il numero di elementi da inserire, e prendendo quindi la parte intera del quoziente con la funzione *floor*. Per i tratti più corti si è utilizzato la funzione *ceil* per evitare l'inserimento di 0 elementi.

```

%Suddividiamo in maniera pesata gli elementi nei differenti
tratti
%scomposti in precedenza e procediamo con la costruzione dei
vettori della geometria:

%PRIMO SEGMENTO
n_1_1=floor(n_1*dx_A/(dx_A+dx_B+dx_C)); %numero elementi tratto
A
n_1_2=floor(n_1*dx_B/(dx_A+dx_B+dx_C)); %numero elementi
tratto B
n_1_3=ceil(n_1*dx_C/(dx_A+dx_B+dx_C)); %numero elementi tratto
C

%Controlliamo che ci sia almeno un elemento per ogni tratto

if n_1_1==0
    n_1_1=1;
end

if n_1_2==0
    n_1_2=1;
end

if n_1_3==0
    n_1_3=1;
end

```

Il controllo successivo viene effettuato come ulteriore sicurezza per far sì che ci sia almeno un elemento per ogni segmento.

Valutato il numero di elementi da inserire per ogni segmento, si può quindi procedere nel calcolo delle proprietà geometriche della griglia necessaria alla soluzione. Vengono infatti valutati per ogni segmento il dx e la variazione di diametro e di area rispetto a dx: $\frac{dD}{dx}$ e $\frac{dA}{dx}$.

```

%Valori per il tratto A
dx_1=dx_A/(n_1_1);
dD_dx_1=- (D_A_i-D_B_i)/dx_A;
dA_dx_1=-pi/(4*dx_A)*(D_A_i^2-D_B_i^2);
%Valori per il tratto B
dx_2=dx_B/(n_1_2);
dD_dx_2=- (D_B_i-D_C_i)/dx_B;
dA_dx_2=-pi/(4*dx_B)*(D_B_i^2-D_C_i^2);

%Valori per il tratto C
dx_3=dx_C/(n_1_3);
dD_dx_3=- (D_C_i-d_farf_i)/dx_C;
dA_dx_3=-pi/(4*dx_C)*(D_C_i^2-d_farf_i^2);

```

I valori calcolati vengono considerati costanti all'interno dello stesso segmento, mentre variano da segmento a segmento all'interno dello stesso tratto. Ora è sufficiente costruire la serie dei sei vettori di controllo della geometria, prestando particolare

attenzione al fatto che il primo e l'ultimo elemento del tratto saranno costituiti da elementi fissi. A questo proposito si utilizza un ciclo *for* che va a spazzare in maniera sequenziale tutti gli elementi da valutare:

```

for i=1:(n_1_1+n_1_2+n_1_3+1)
    if i==1
        D_1(i)=d_imbocco;
        A_1(i)=A_imbocco;
        dx_meno_1(i)=dx_imbocco;
        dx_piu_1(i)=dx_1;
        dA_dx_meno_1(i)=dA_imbocco;
        dA_dx_piu_1(i)=dA_dx_1;
    elseif i<(n_1_1+1)
        D_1(i)=D_1(i-1)+dD_dx_1*dx_1;
        A_1(i)=A_1(i-1)+dA_dx_1*dx_1;
        dx_meno_1(i)=dx_1;
        dx_piu_1(i)=dx_1;
        dA_dx_meno_1(i)=dA_dx_1;
        dA_dx_piu_1(i)=dA_dx_1;
    elseif i==(n_1_1+1)
        D_1(i)=D_1(i-1)+dD_dx_1*dx_1;
        A_1(i)=A_1(i-1)+dA_dx_1*dx_1;
        dx_meno_1(i)=dx_1;
        dx_piu_1(i)=dx_2;
        dA_dx_meno_1(i)=dA_dx_1;
        dA_dx_piu_1(i)=dA_dx_2;
    elseif i>(n_1_1+1) && i<(n_1_1+n_1_2+1)
        D_1(i)=D_1(i-1)+dD_dx_2*dx_2;
        A_1(i)=A_1(i-1)+dA_dx_2*dx_2;
        dx_meno_1(i)=dx_2;
        dx_piu_1(i)=dx_2;
        dA_dx_meno_1(i)=dA_dx_2;
        dA_dx_piu_1(i)=dA_dx_2;
    elseif i==(n_1_1+n_1_2+1)
        D_1(i)=D_1(i-1)+dD_dx_2*dx_2;
        A_1(i)=A_1(i-1)+dA_dx_2*dx_2;
        dx_meno_1(i)=dx_2;
        dx_piu_1(i)=dx_3;
        dA_dx_meno_1(i)=dA_dx_2;
        dA_dx_piu_1(i)=dA_dx_3;
    elseif i>(n_1_1+n_1_2+1) && i<(n_1_1+n_1_2+n_1_3+1)
        D_1(i)=D_1(i-1)+dD_dx_3*dx_3;
        A_1(i)=A_1(i-1)+dA_dx_3*dx_3;
        dx_meno_1(i)=dx_3;
        dx_piu_1(i)=dx_3;
        dA_dx_meno_1(i)=dA_dx_3;
        dA_dx_piu_1(i)=dA_dx_3;
    elseif i==(n_1_1+n_1_2+n_1_3+1)
        D_1(i)=D_1(i-1)+dD_dx_3*dx_3;
        A_1(i)=A_1(i-1)+dA_dx_3*dx_3;
        dx_meno_1(i)=dx_3;
        dx_piu_1(i)=dx_farf_i;
        dA_dx_meno_1(i)=dA_dx_3;
        dA_dx_piu_1(i)=dA_farf_i;
    end
end

```

Analogamente a quanto appena visto per il primo tratto, si ragiona anche per il secondo ed il terzo, ottenendo quindi i vettori di controllo della geometria per i singoli tratti. È ora sufficiente affiancare i vettori fin qui calcolati, ricavando quelli totali:

```

D=[d_imbocco D_1 D_2 D_3 D_3 ]';
A=[A_imbocco A_1 A_2 A_3 A_3]';

dx_meno=[0 dx_meno_1 dx_meno_2 dx_meno_3 dx_meno_3]';
dx_piu=[dx_imbocco dx_piu_1 dx_piu_2 dx_piu_3 dx_piu_3]';

dA_dx_meno=[0 dA_dx_meno_1 dA_dx_meno_2 dA_dx_meno_3
dA_dx_meno_3]';
dA_dx_piu=[dA_imbocco dA_dx_piu_1 dA_dx_piu_2 dA_dx_piu_3
dA_dx_piu_3]';

farf=n_1_1+n_1_2+n_1_3+2;
gY1=n_1_1+n_1_2+n_1_3+n_2_1+n_2_2+4;
gY2=n_1_1+n_1_2+n_1_3+n_2_1+n_2_2+n_3_1+n_3_2+n_3_3+5;
valv_1=n_1_1+n_1_2+n_1_3+n_2_1+n_2_2+n_3_1+n_3_2+n_3_3+4;
valv_2=n_1_1+n_1_2+n_1_3+n_2_1+n_2_2+2*(n_3_1+n_3_2+n_3_3)+5;

fprintf('Numero elementi richiesti = %0.0f - %0.0f - %0.0f
\nElementi inseriti %0.0f - %0.0f - %0.0f \nNumero elementi
totali (compresi quelli fissi): %0.0f \n', n_1, n_2, n_3,
n_1_1+n_1_2+n_1_3+1,n_2_1+n_2_2+1,n_3_1+n_3_2+n_3_3+1,n_1_1+n_1_2+
n_1_3+n_2_1+n_2_2+2*(n_3_1+n_3_2+n_3_3)+5);

[dx_max,p_max]=max(dx_piu);

if p_max<=n_1_1+n_1_2+n_1_3+2
    str='Dx massimo nel tratto 1';
elseif p_max>=n_1_1+n_1_2+n_1_3+2 && p_max<=(n_1_1+n_1_2+
+n_1_3+n_2_1+n_2_2+4
    str='Dx massimo nel tratto 2';
else
    str='Dx massimo nel tratto 3';
end

fprintf('dx massimo= %0.4f\n',dx_max);
disp(str)

```

Come si può notare, oltre al calcolo dei vettori di controllo sono stati automatizzati anche i calcoli dei parametri di posizione degli elementi fissi, andando quindi a semplificare ulteriormente l'utilizzo del codice. Infine, a coda della procedura di calcolo viene fatta una stampa del numero effettivo di elementi inseriti, che può leggermente differire dal numero degli elementi richiesti dall'utente. Infatti il sistema si autoregola in maniera tale da ottenere sempre una geometria che sia valida a fini simulativi.

Con questa funzione risulta quindi molto semplice valutare l'influenza del numero di elementi sull'efficacia e sulla precisione della simulazione.

4.3.2. Stabilità del metodo

Per evitare problemi di instabilità numeriche è necessario calcolare il numero di Courant, noto come *CFL* (*Courant-Friedrichs-Levy Number*). Questo parametro dipende dalla velocità di propagazione del segnale, dall'intervallo di integrazione e dalla geometria della griglia di soluzione. Per non appesantire ulteriormente il codice di calcolo si è scelto di valutare la condizione peggiore presente nel condotto e verificare la stabilità in quel punto. Ovviamente, dimostrata la stabilità in quel preciso regime di funzionamento, la stabilità dell'intero sistema è una conseguenza diretta. Perché un sistema sia stabile è necessario che:

$$CFL = \frac{\Delta t}{\Delta x} u \leq 1$$

Possiamo quindi valutare per il nostro sistema la massima velocità calcolata, il dx massimo calcolato e verificare quindi che per la condizione più gravosa per la soluzione numerica la stabilità sia soddisfatta. In codice Matlab:

```
u_max=max(max(u_i.signals.values));
a_max=max(max(a_i.signals.values));
dx_max=max(dx_piu);
CFL=dt*(u_max+a_max)/dx_max;

if CFL<1
    fprintf('Simulazione corretta, CFL = %0.4f < 1',CFL);
else
    fprintf('ATTENZIONE!Simulazione NON corretta, CFL = %0.4f >=
    1',CFL);
end
```

L'esito della simulazione a 50 elementi, sarà quindi:

```
Numero elementi tratto Imbocco-Farfalla: 16
Numero elementi tratto Farfalla-Giunzione: 10
Numero elementi tratto Giunzione-Valvola: 12

Numero elementi richiesti = 16 - 9 - 12
Elementi inseriti 16 - 9 - 12
Numero elementi totali (compresi quelli fissi): 50

dx massimo= 0.0190
Dx massimo nel tratto 1

[...]

Tempo simulazione modello HM
Elapsed time is 15.77 seconds.

Simulazione corretta, CFL = 0.1123< 1
```

Come si può notare, il CFL è ben al di sotto della soglia di stabilità. Analizziamo anche l'esito della simulazione per il numero minimo di elementi in cui è discretizzabile il condotto.

```
Numero elementi tratto Imbocco-Farfalla: 1
Numero elementi tratto Farfalla-Giunzione: 1
Numero elementi tratto Giunzione-Valvola: 1

Numero elementi richiesti = 1 - 1 - 1
Elementi inseriti 5 - 3 - 5
Numero elementi totali (compresi quelli fissi): 19

dx massimo= 0.1585
Dx massimo nel tratto 1

[...]

Tempo simulazione modello HM
Elapsed time is 4.13 seconds.

Simulazione corretta, CFL = 0.1570 < 1
```

Il numero minimo di elementi è 18, in quanto, nonostante sia stato chiesto un singolo elemento per ogni tratto, la funzione *Geometria* riconosce almeno 18 elementi necessari. Inoltre, si può vedere che anche in questo caso il numero CFL è ben al di sotto della soglia di stabilità, confermando quindi la concretezza del metodo.

4.4. Influenza del numero di elementi sulla precisione del modello

Passiamo ora ad analizzare l'influenza del numero di elementi presenti nella griglia di soluzione rispetto all'andamento e alla validità dei risultati ottenuti. Inizieremo con un confronto tra i 50 elementi ottenuti in forma fissa e i 50 elementi ottenuti mediante la funzione *Geometria*. Applicheremo poi una riduzione di elementi, per avere dei risultati intermedi. Infine si proverà a portare al limite il metodo, chiedendo quindi alla funzione di applicare il minor numero di elementi possibili e valutando quanto peggiorano i risultati con l'aumento al massimo delle dimensioni degli elementi.

4.4.1. Confronto tra 50 elementi manuali e 50 elementi *Geometria*

Lanciando la discretizzazione del condotto attraverso la funzione *Geometria* e richiedendo lo stesso numero di elementi presenti nella griglia iniziale per ogni tratto, si ottiene comunque una leggera variazione nelle proprietà geometriche del condotto. Applicando la discretizzazione automatica le variazioni totali di sezione e di posizione

dei segmenti restano costanti, ma sono presenti alcune piccole variazioni sui singoli elementi rispetto a quella manuale.

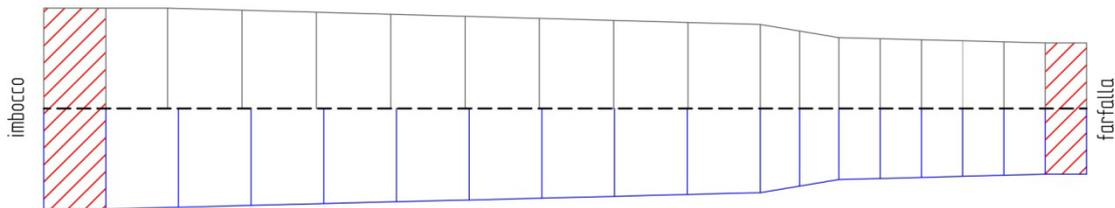


Fig. 52 – Esempio della diversa discretizzazione del tratto 1, a parità del numero di elementi di griglia. In nero, nella parte superiore è evidenziata la discretizzazione manuale, con disuniformità della griglia, mentre in blu la discretizzazione automatica. Si può notare come all'interno degli stessi segmenti la discretizzazione sia uniforme.

Non tutti i nodi, quindi, saranno perfettamente sovrapposti e non ha perciò senso andare a cercare di confrontare perfettamente i cinquanta segnali ottenuti dalle due simulazioni. L'analisi generale tra i modelli si effettuerà mettendo a rapporto i segnali dei punti fissi, cioè quelli che non subiscono variazioni di posizione tra le diverse discretizzazioni, in particolare: il punto dopo l'imbocco del condotto, il punto a valle della farfalla, uno dei due punti a valle della giunzione a Y e, infine, il punto a monte della valvola. Questi quattro confronti generali verranno applicati successivamente anche agli altri modelli a minor numero di elementi.

Per quanto riguarda le tempistiche e la stabilità del metodo, l'esito della simulazione è perfettamente paragonabile alla simulazione effettuata con la griglia definita manualmente.

```

Numero elementi tratto Imbocco-Farfalla: 16
Numero elementi tratto Farfalla-Giunzione: 9
Numero elementi tratto Giunzione-Valvola: 10

Numero elementi richiesti = 16 - 9 - 10
Elementi inseriti 17 - 10 - 11
Numero elementi totali (compresi quelli fissi): 50

dx massimo= 0.0176
Dx massimo nel tratto 1

### Building the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto
### Successfully built the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto

### Building the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_HM
### Successfully built the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_HM

### Building the Accelerator target for model:
Riscrittura_input_condottocompleto_HM_clean

```

```
### Successfully built the Accelerator target for model:  
Riscrittura_input_condottocompleto_HM_clean
```

```
Tempo simulazione modello FM  
Elapsed time is 166.09 seconds.
```

```
Tempo simulazione modello HM  
Elapsed time is 15.80 seconds.
```

```
Tempo simulazione modello HM_CLEAN  
Elapsed time is 13.66 seconds.
```

Simulazione corretta, CFL = 0.1046 < 1

Analizzando poi i risultati dettagliati, si può notare un lieve scostamento delle soluzioni. In particolar modo, si può notare un leggero scostamento sui risultati della pressione che tende ad aumentare leggermente a valle della farfalla. Questo scostamento è probabilmente imputabile alla leggera differenza nella definizione della geometria inserita nella procedura automatica di discretizzazione del condotto.

IMBOCCO
Velocità:
Errore massimo = 8.63 m/s
Errore medio = 1.94 m/s

Pressione:
Errore massimo = 0.00 Pa
Errore medio = 0.00 Pa

FARFALLA
Velocità:
Errore massimo = 12.57 m/s
Errore medio = 2.10 m/s

Pressione:
Errore massimo = 3471 Pa
Errore medio = 910.9 Pa

GIUNZIONE
Velocità:
Errore massimo = 11.15 m/s
Errore medio = 1.44 m/s

Pressione:
Errore massimo = 3311 Pa
Errore medio = 1173 Pa

VALVOLA
Velocità:
Errore massimo = 10.12 m/s
Errore medio = 0.84 m/s

Pressione:
Errore massimo = 3503 Pa
Errore medio = 1088 Pa

Possiamo comunque ritenere la funzione *Geometria* validata, in quanto, valutando la quantità di massa d'aria media aspirata per ogni ciclo simulato e la pressione media all'interno del condotto, si ottiene:

Massa d'aria aspirata:
123.1 mg/ciclo

Modello Confronto: 122.7 mg/ciclo
Sperimentale: 122.4 mg/ciclo

Pressione media condotto:
988.8 mbar

Modello Confronto: 987.6 mbar
Sperimentale: 1014.3 mbar

Si può quindi notare che è presente una leggera differenza tra la simulazioni e il dato sperimentale, ma è un valore trascurabile. L'esito si può comunque ritenere molto buono, soprattutto essendo perfettamente allineato con il modello di confronto.

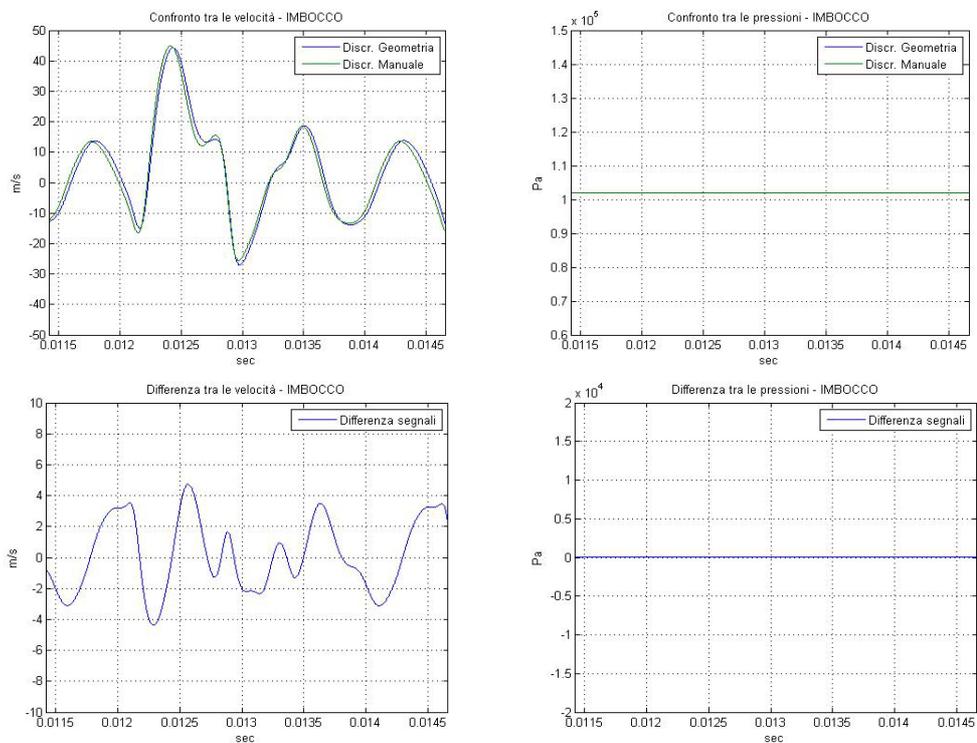


Fig. 53 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra le due soluzioni di 50 elementi all'imbocco. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni.

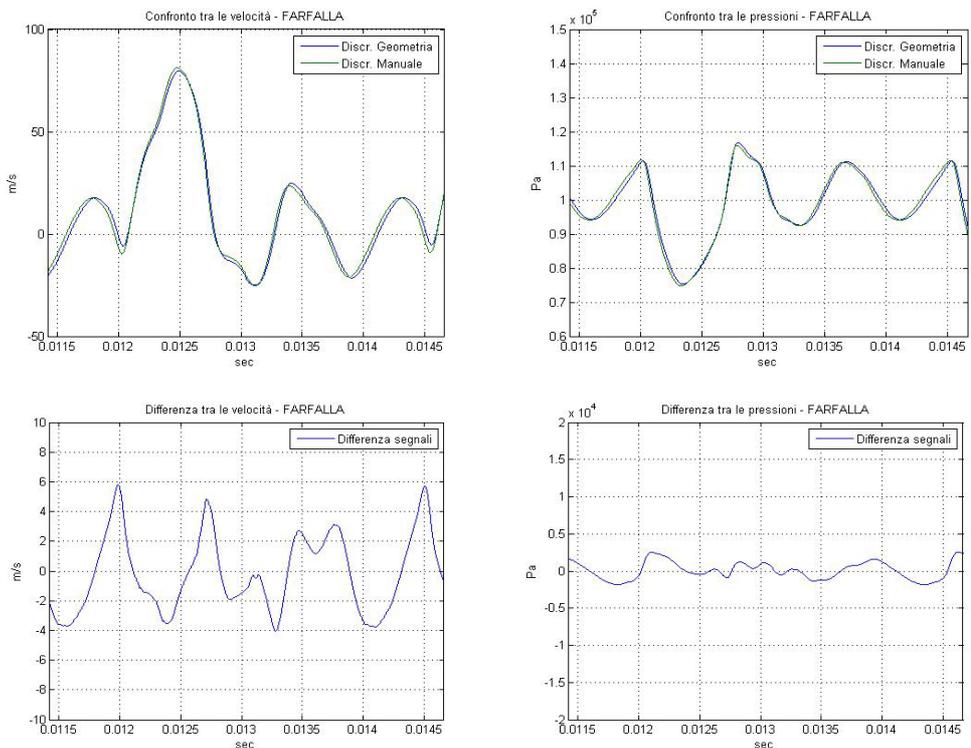


Fig. 54 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra le due soluzioni di 50 elementi a valle della farfalla. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni.

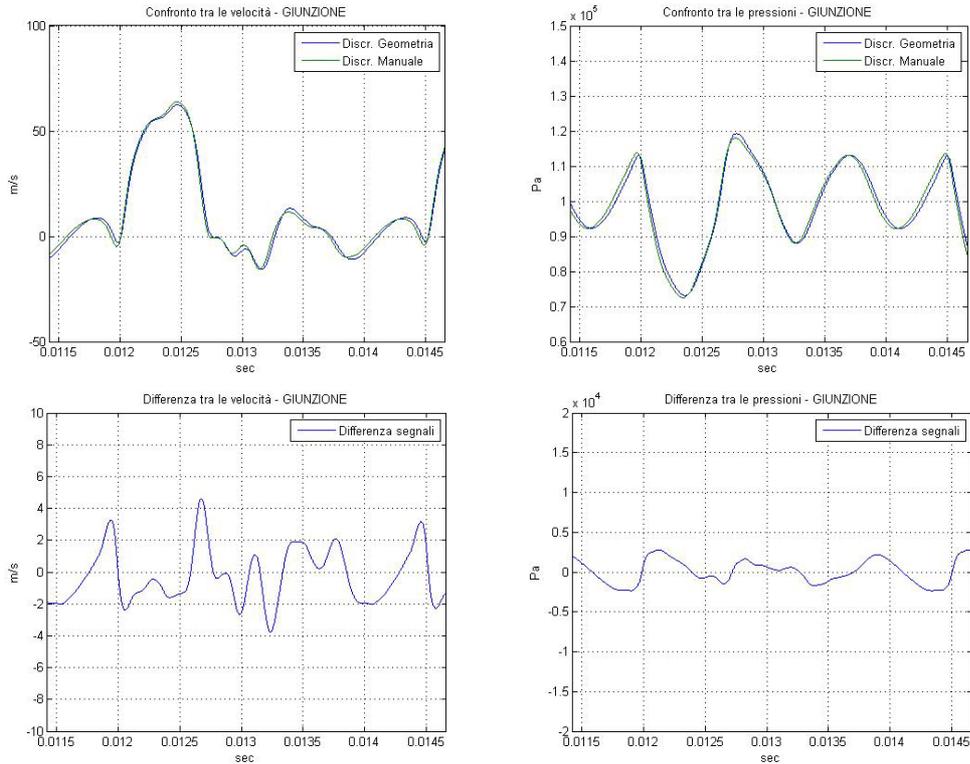


Fig. 55 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra le due soluzioni di 50 elementi a valle della giunzione a Y. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni.

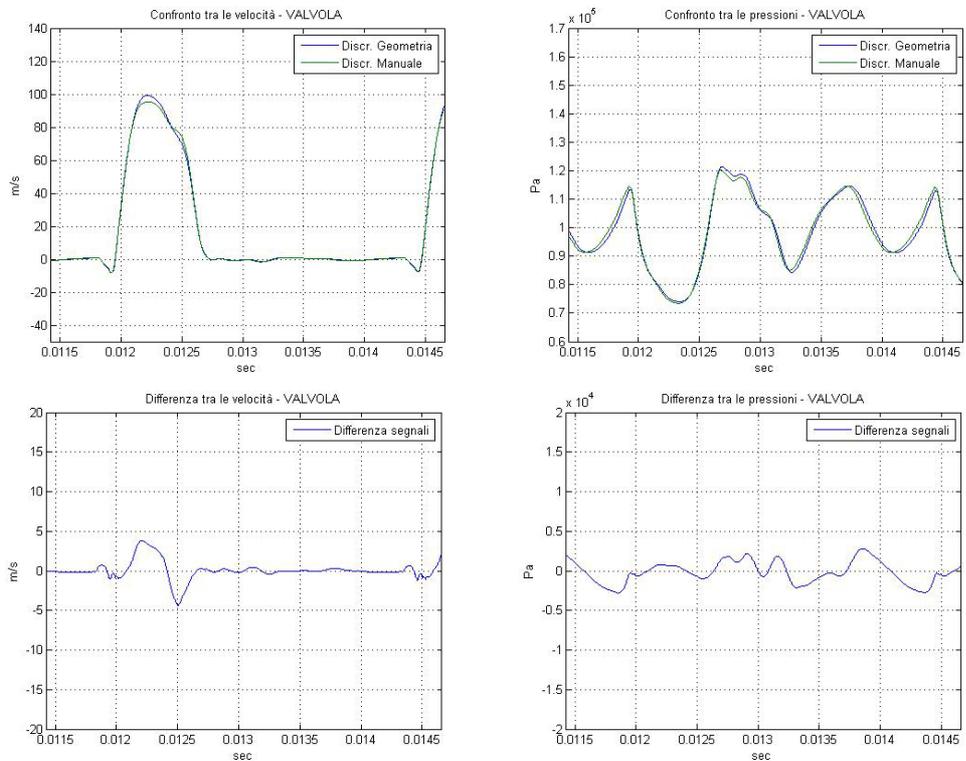


Fig. 56 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra le due soluzioni di 50 elementi a monte della valvola. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni.

4.4.2. Confronto tra 50 e 27 elementi *Geometria*

Passiamo ora alla riduzione del numero degli elementi della discretizzazione del condotto. Iniziamo con la generazione di una griglia ad un numero intermedio di nodi.

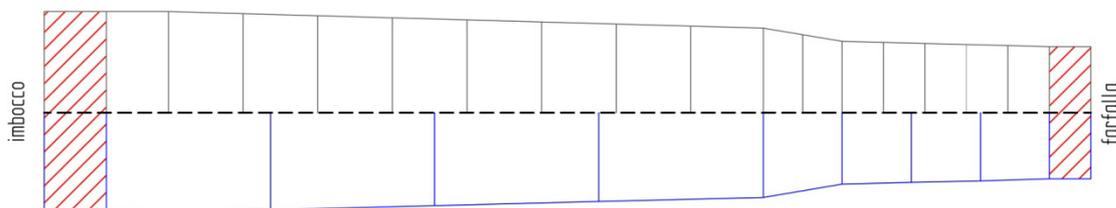


Fig. 57- Esempio della diversa discretizzazione del tratto 1 tra le due geometrie simulate, in alto la discretizzazione manuale del modello di confronto, mentre in basso la discretizzazione automatica a 27 elementi

Procediamo quindi con l'inserimento del numero di elementi desiderati: viene lanciata la simulazione per un condotto a 10-4-6 nodi, per un totale di 27 elementi:

```
Numero elementi tratto Imbocco-Farfalla: 9
Numero elementi tratto Farfalla-Giunzione: 4
Numero elementi tratto Giunzione-Valvola: 5

Numero elementi richiesti = 9 - 4 - 5
Elementi inseriti 9 - 5 - 6
Numero elementi totali (compresi quelli fissi): 27

dx massimo= 0.0404
Dx massimo nel tratto 3

[...]

Tempo simulazione modello FM
Elapsed time is 33.80 seconds.

Tempo simulazione modello HM
Elapsed time is 6.42 seconds.

Tempo simulazione modello HM_CLEAN
Elapsed time is 5.37 seconds.

Simulazione corretta, CFL = 0.0469 < 1
```

Come si nota immediatamente, i tempi di simulazione sono visibilmente ridotti e la stabilità del metodo non viene comunque compromessa.

Andiamo a valutare anche per questo caso l'andamento dei risultati. Per quanto riguarda la massa d'aria aspirata, si assiste ad un leggero aumento della quantità calcolata, mentre si mantiene una leggera sottopressione sul valore medio all'interno del condotto:

Massa d'aria aspirata:
138.6 mg/ciclo

Modello Confronto: 122.7 mg/ciclo
Sperimentale: 122.4 mg/ciclo

Pressione media condotto:
987.4 mbar

Modello Confronto: 987.6 mbar
Sperimentale: 1014.3 mbar

Riportiamo gli errori calcolati nei punti fissi, questa volta riportati oltre che per il metodo di confronto, anche per la geometria automatica a 50 elementi:

IMBOCCO

Velocità:
Errore max CIR= 10.90 m/s
Errore medio CIR= 2.97 m/s

Errore max G50_el= 8.55 m/s
Errore med G50_el= 2.97 m/s

Pressione:
Errore max CIR= 0.00 Pa
Errore medio CIR= 0.00 Pa

Errore max G50_el= 0.00 Pa
Errore med G50_el= 0.00 Pa

FARFALLA

Velocità:
Errore max CIR= 13.19 m/s
Errore medio CIR= 4.54 m/s

Errore max G50_el= 11.50 m/s
Errore med G50_el= 4.54 m/s

Pressione:
Errore max CIR= 3803 Pa
Errore medio CIR= 1706 Pa

Err. max G50_el= 2643 Pa
Err. med G50_el= 1706 Pa

GIUNZIONE

Velocità:
Errore max CIR= 11.07 m/s
Errore med CIR= 3.25 m/s

Errore max G50_el= 9.96 m/s
Errore med G50_el= 3.25 m/s

Pressione:
Errore max CIR= 5544 Pa
Errore med CIR= 1754 Pa

Errore max G50_el= 3340 Pa
Errore med G50_el= 1754 Pa

VALVOLA

Velocità:
Errore max CIR= 15.76 m/s
Errore med CIR= 2.32 m/s

Errore max G50_el= 13.77 m/s
Errore med G50_el= 2.32 m/s

Pressione:
Errore max CIR= 7489 Pa
Errore med CIR= 2205 Pa

Errore max G50_el= 4209 Pa
Errore med G50_el= 2205 Pa

Andando ad analizzare in dettaglio i risultati per i singoli elementi fissi, si può notare che l'errore maggiore si ha sulla pressione. In particolare, si tende ad avere una sovrappressione in corrispondenza della chiusura della valvola. È inoltre molto evidente la diminuzione della frequenza propria del sistema: con la riduzione del numero di elementi è presente un'attenuazione del fenomeno oscillatorio delle onde di pressione all'interno del condotto.

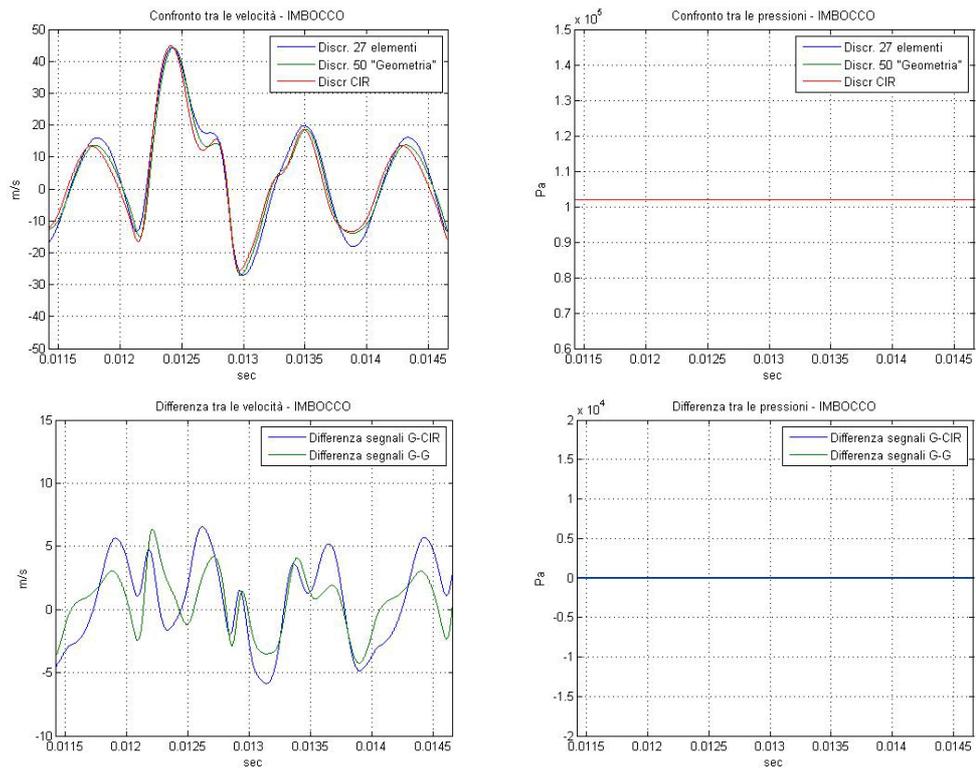


Fig. 58 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 27 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto all'imbocco. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

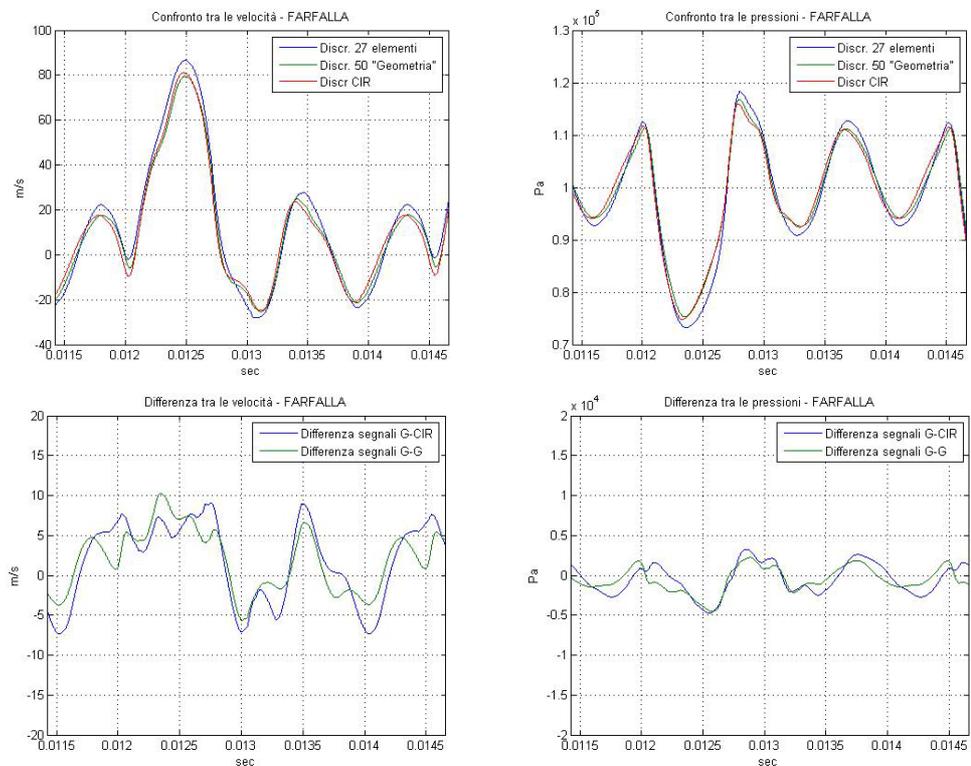


Fig. 59 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 27 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto a valle della farfalla. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

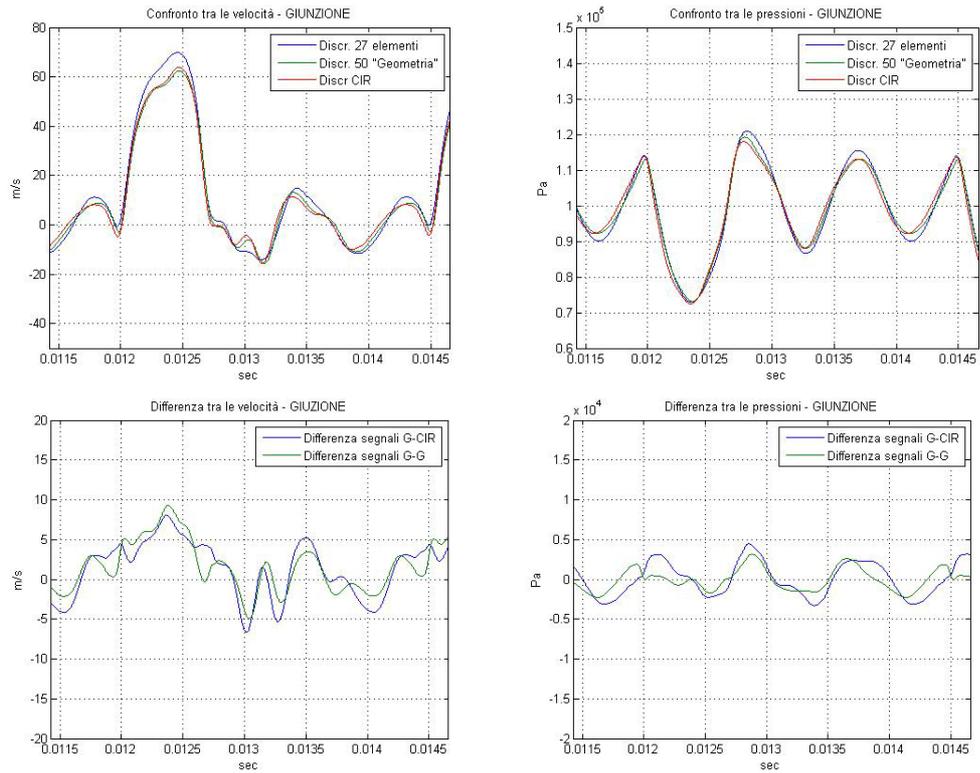


Fig. 60 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 27 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto a valle della giunzione a Y. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

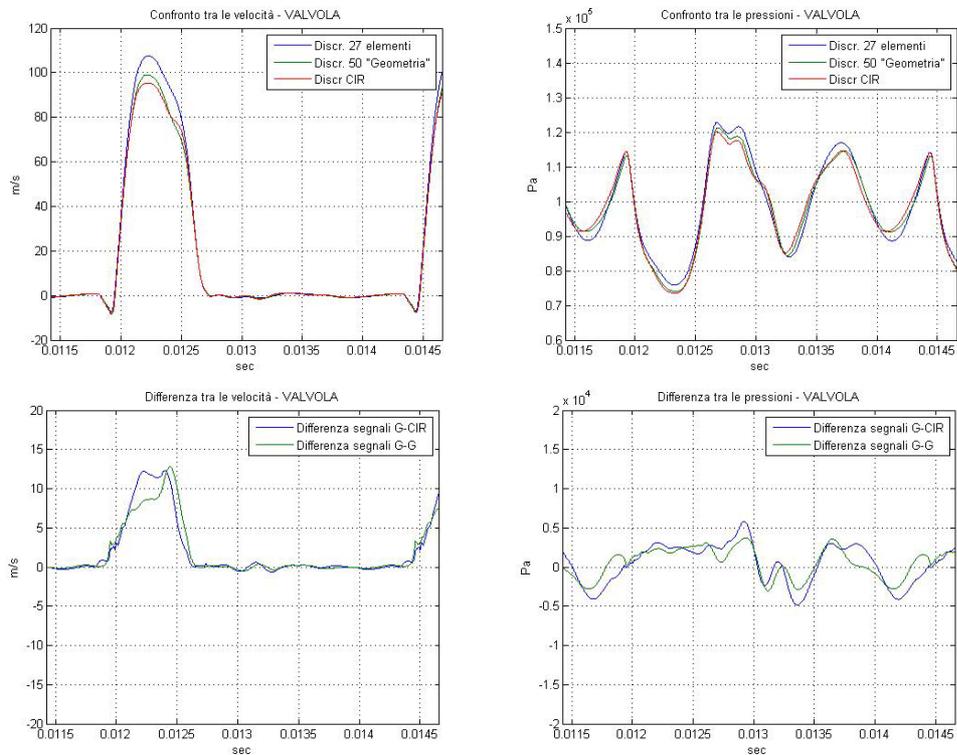


Fig. 61 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 27 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto a monte della valvola. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

4.4.3. Confronto tra 50 e 19 elementi *Geometria*

Passiamo ora ad una situazione limite, per riuscire a valutare quanto ci si può spingere nella riduzione del numero di elementi. Vengono richiesti quindi alla funzione geometria 1-1-1 elementi. Il numero minimo, come già visto, è 19. Si riportano i risultati della simulazione.

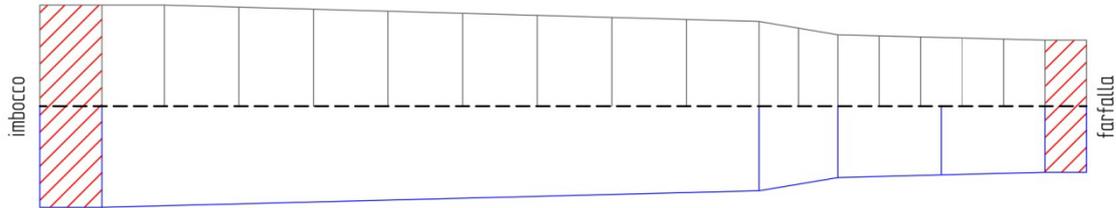


Fig. 62 - La diversa discretizzazione del tratto 1 tra le due geometrie simulate, in alto la discretizzazione manuale del modello di confronto, mentre in basso la discretizzazione automatica a 19 elementi con solo tre nodi nel primo tratto

```
Numero elementi tratto Imbocco-Farfalla: 1
Numero elementi tratto Farfalla-Giunzione: 1
Numero elementi tratto Giunzione-Valvola: 1

Numero elementi richiesti = 1 - 1 - 1
Elementi inseriti 5 - 3 - 5
Numero elementi totali (compresi quelli fissi): 19

dx massimo= 0.1585
Dx massimo nel tratto 1

[...]

Tempo simulazione modello FM
Elapsed time is 13.48 seconds.

Tempo simulazione modello HM
Elapsed time is 4.13 seconds.

Tempo simulazione modello HM_CLEAN
Elapsed time is 3.53 seconds.

Simulazione corretta, CFL = 0.0123 < 1
```

Come si può notare, il tempo di simulazione è decisamente ridotto, soprattutto per il modello FM dove la dimensione del condotto influisce pesantemente sulle risorse di calcolo necessarie. La stabilità del metodo è comunque garantita.

IMBOCCO

Velocità:

Errore max CIR= 24.64 m/s

Errore medio CIR= 4.38 m/s

Errore max G50_el= 23.49 m/s

Errore med G50_el= 4.38 m/s

Pressione:

Errore max CIR= 0.00 Pa

Errore medio CIR= 0.00 Pa

Errore max G50_el= 0.00 Pa

Errore med G50_el= 0.00 Pa

FARFALLA

Velocità:

Errore max CIR= 22.25 m/s

Errore medio CIR= 5.80 m/s

Errore max G50_el= 23.60 m/s

Errore med G50_el= 5.80 m/s

Pressione:

Errore max CIR= 7307 Pa

Errore medio CIR= 2379 Pa

Errore max G50_el= 5653 Pa

Errore med G50_el= 2380 Pa

GIUNZIONE

Velocità:

Errore max CIR= 20.30 m/s

Errore medio CIR= 4.63 m/s

Errore max G50_el= 20.12 m/s

Errore med G50_el= 4.63 m/s

Pressione:

Errore max CIR= 11153 Pa

Errore medio CIR= 2163 Pa

Errore max G50_el= 9042 Pa

Errore med G50_el= 2163 Pa

VALVOLA

Velocità:

Errore max CIR= 31.95 m/s

Errore medio CIR= 3.57 m/s

Errore max G50_el= 29.79 m/s

Errore med G50_el= 3.57 m/s

Pressione:

Errore max CIR= 14674 Pa

Errore medio CIR= 3081 Pa

Errore max G50_el= 11320 Pa

Errore med G50_el= 3082 Pa

Con l'analisi dettagliata degli elementi fissi, tuttavia, si può notare come inizi ad esserci un elevato scostamento dei segnali calcolati. La pressione valutata per la discretizzazione a 19 elementi presenta delle notevoli difficoltà nel seguire il segnale nei bruschi cambi di direzione che caratterizzano queste simulazioni.

Inoltre, anche il calcolo della massa effettivamente aspirata è indicativo della difficoltà che il sistema incontra in questo caso nel seguire l'effettivo andamento del fenomeno, mostrando un aumento del 20% circa rispetto alla massa aspirata valutata per via sperimentale e che la discretizzazione più fitta simulava più correttamente.

Massa d'aria aspirata:

148.9 mg/ciclo

Modello Confronto: 122.7 mg/ciclo

Sperimentale: 122.4 mg/ciclo

Pressione media condotto:

994.9 mbar

Modello Confronto: 987.6 mbar

Sperimentale: 1014.3 mbar

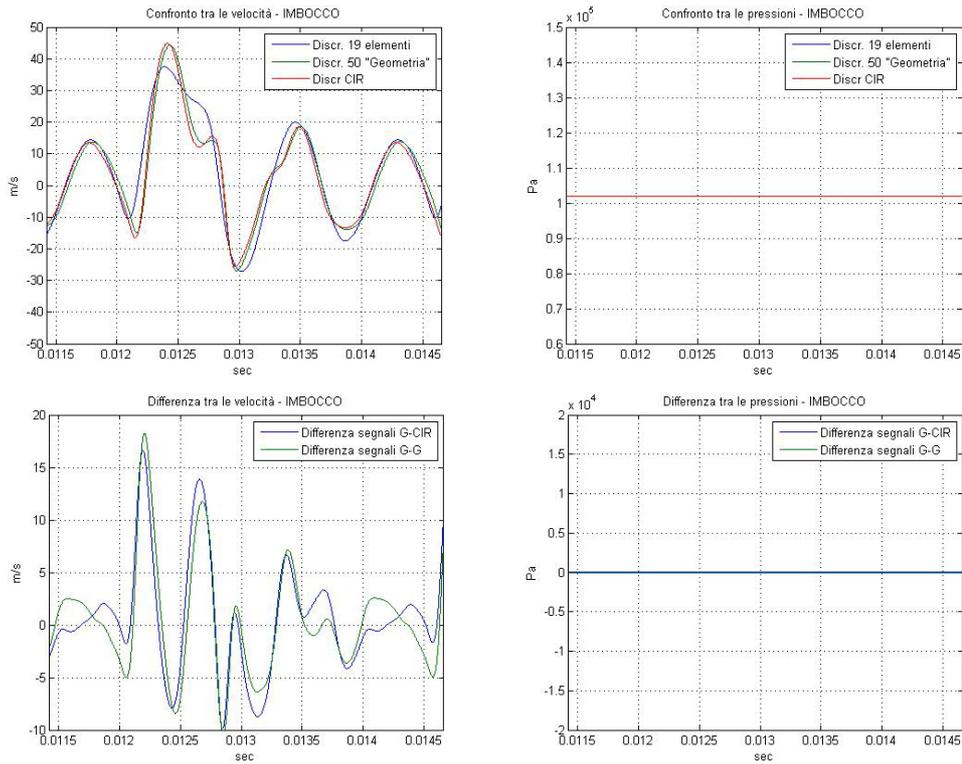


Fig. 63 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 19 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto all'imbocco. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

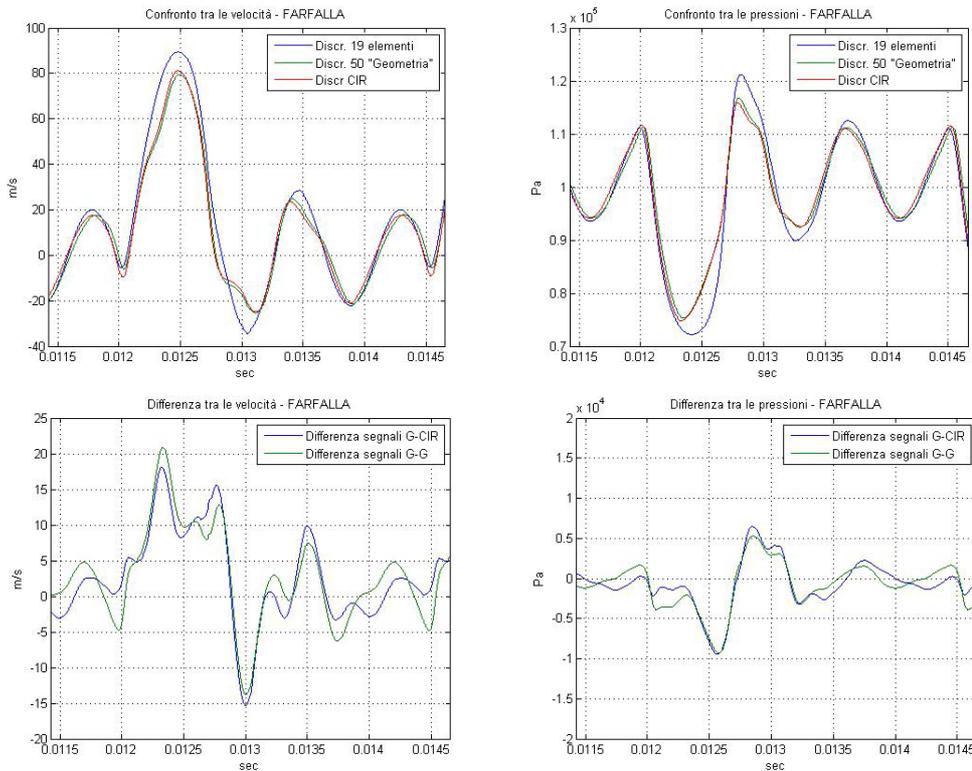


Fig. 64 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 19 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto a valle della farfalla. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

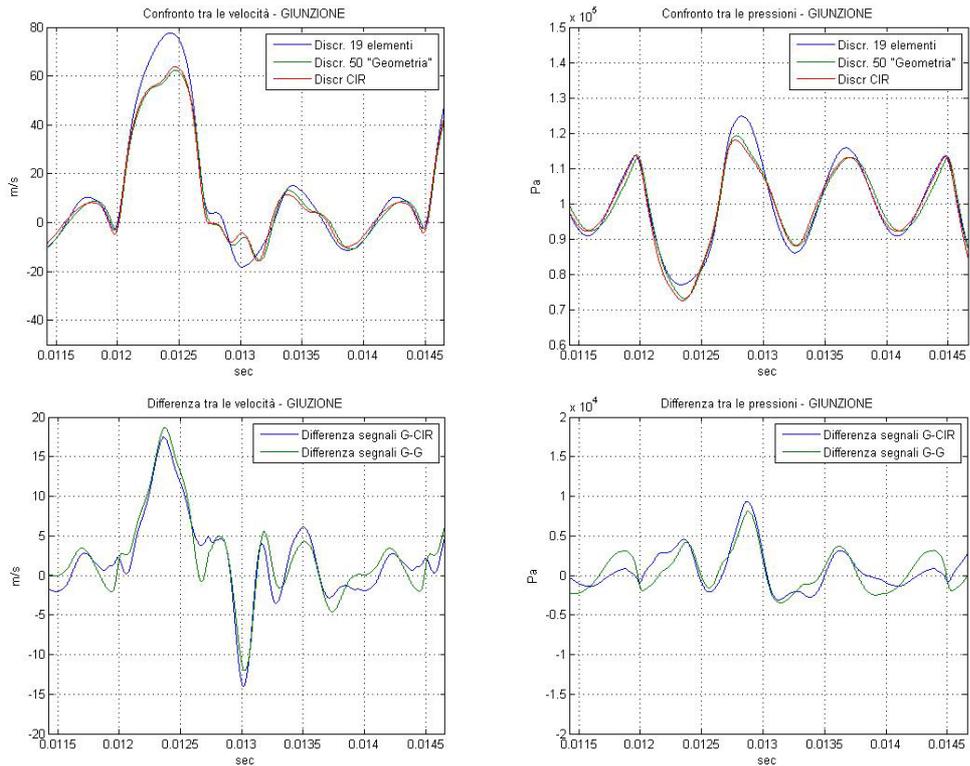


Fig. 65 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 19 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto a valle della giunzione Y. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

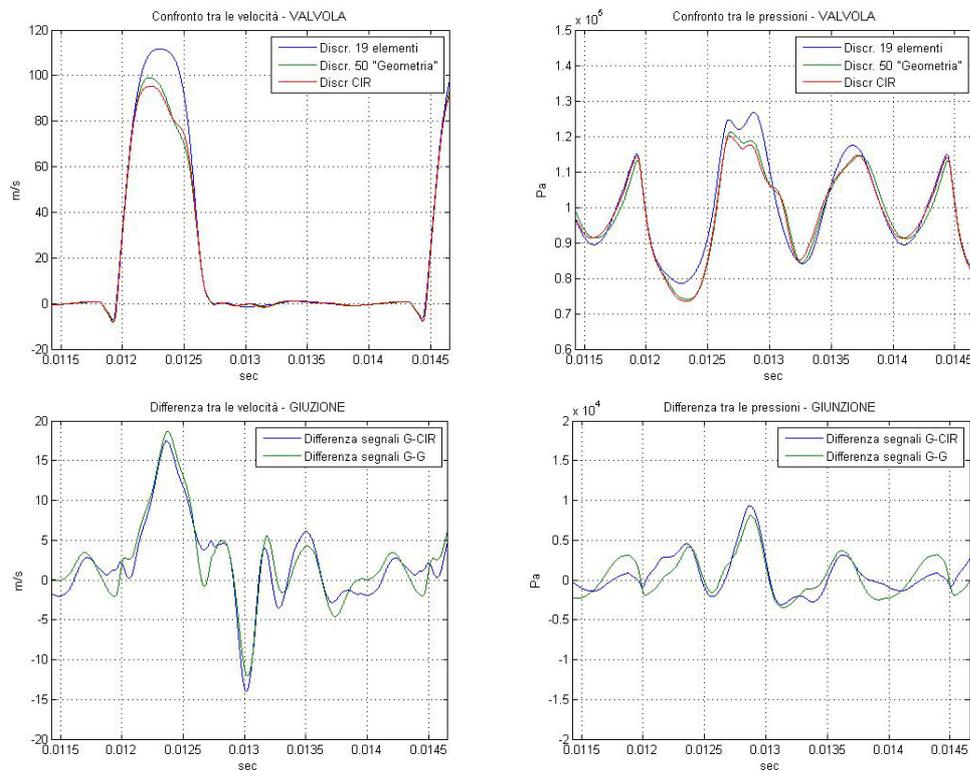


Fig. 66 - Confronto tra velocità (in alto a sx) e pressione (in alto a dx) tra la soluzioni a 50 e a 19 elementi della funzione Geometria e quella del modello di confronto a monte della valvola. In basso la differenza tra i segnali delle due simulazioni

4.4.4. Analisi dei risultati ottenuti

Come si è visto dalle soluzioni proposte, l'idea di diminuire il numero degli elementi per poter migliorare le prestazioni di calcolo può ritenersi efficace solo in parte. La minor risoluzione della griglia porta infatti a trascurare parte degli effetti oscillatori per cui è stato realizzato questo modello.

Eseguendo ulteriori discretizzazioni e simulandole si è ottenuto un grafico del tempo di risoluzione e della precisione in funzione del numero di elementi. L'andamento che si riesce a ricavare è sostanzialmente un'iperbole per quanto riguarda l'errore della massa aspirata, mentre la riduzione del tempo di simulazione è pressoché lineare.

Nel ridurre il numero di elementi bisogna quindi considerare anche la diminuzione della precisione della soluzione, nonostante si possa pensare anche ad un coefficiente di correzione legato alla differenza del numero di elementi utilizzati rispetto ad una simulazione con una griglia con più nodi, ovviamente più precisa, ma con un tempo di calcolo maggiore.

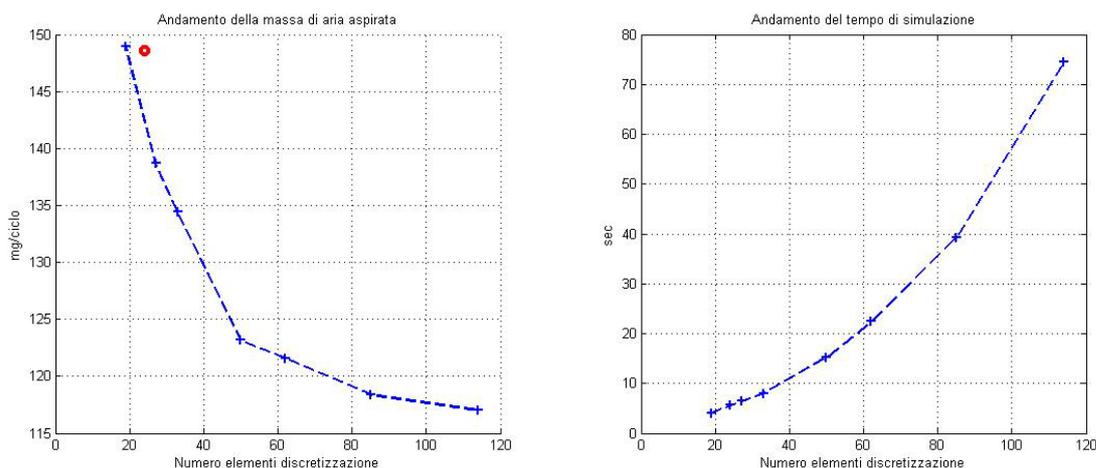


Fig. 67 – A sinistra l'andamento della massa aspirata, valutata al diminuire del numero di elementi. Trascurando il punto evidenziato in rosso, gli altri si trovano su una linea di tendenza iperbolica, il che significa che l'errore commesso è inversamente proporzionale al numero di elementi utilizzati nella discretizzazione. A destra è rappresentato l'andamento del tempo di simulazione, che ha una riduzione pressoché parabolica rispetto al numero di elementi

4.5. Influenza della discretizzazione temporale

Tutte le simulazioni eseguite finora sono state fatte a dt e passo di simulazione costante. Oltre che dal regime di rotazione, tali parametri sono influenzati anche dal numero di campionamenti, o calcoli, eseguiti per ogni grado di rotazione dell'albero motore. Essendo il coefficiente CFL molto al di sotto dei limiti di stabilità per tutte le

simulazioni fatte finora, si è cercato anche di ridurre il numero di punti calcolati per ogni grado di rotazione.

Utilizzando quindi una versione ridotta di *DOE*⁶, si faranno variare numero di elementi e numero di punti, cercando di individuare un *trend* dell'influenza di tali parametri rispetto alla precisione e alla velocità di calcolo del modello. Per quanto riguarda il numero di elementi, utilizzeremo le stesse griglie usate nei test precedenti⁷, andando di volta in volta a diminuirne il numero. Per quanto riguarda invece la discretizzazione temporale, confronteremo i risultati ottenuti con 4 punti/° e con i 2 punti/°.

Riportiamo quindi i grafici che si ottengono dalla serie di simulazioni previste dal *DOE*:

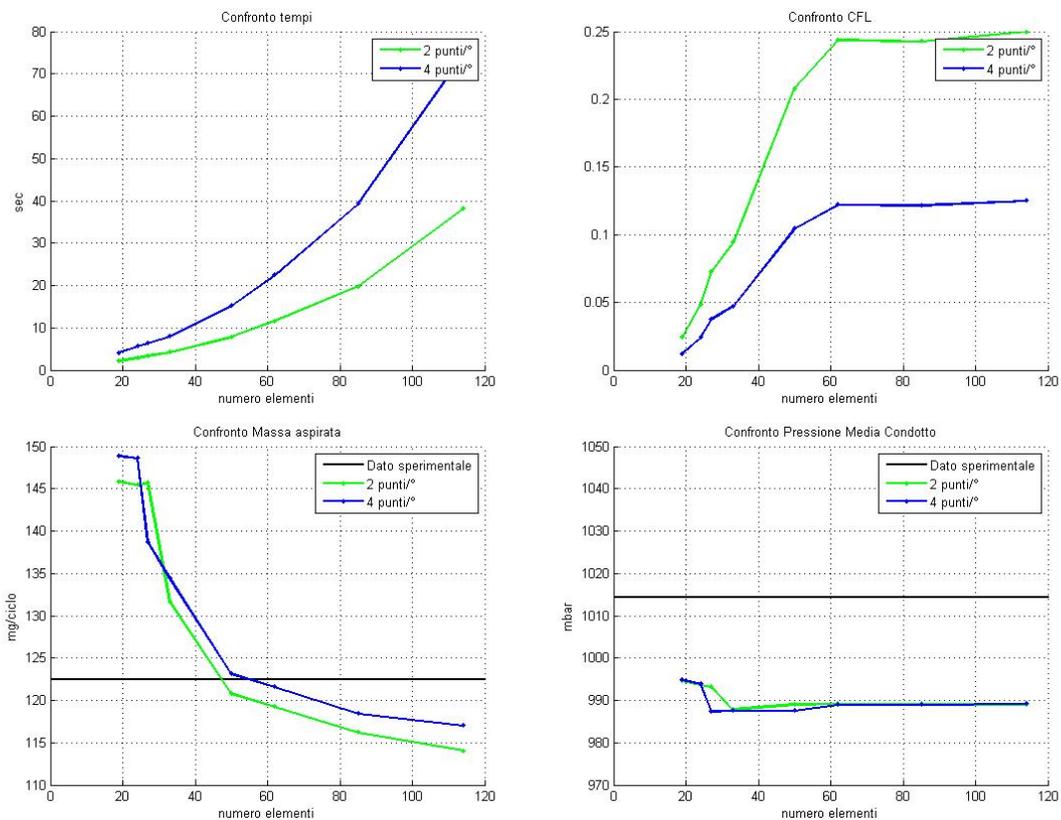


Fig. 68 - Esiti del *DOE*. In alto tempi di simulazione e CFL, mentre in basso massa media aspirata e pressione media del condotto

⁶ *DOE* (*Design of Experiments*) è una metodologia investigativa su una particolare attività sperimentale. Spesso la complessità dei fenomeni e l'alto numero di parametri che possono subire variazioni rendono molto difficile, se non impossibile, l'ottimizzazione parametrica di un determinato modello. L'analisi monovariata (variazione di un singolo parametro per ogni simulazione) a volte non è un approccio molto efficace, in quanto alcuni fenomeni presentano variabili in grado interagire reciprocamente. Attraverso l'analisi *DOE* si applica un approccio di tipo multivariato, in maniera tale di avere variazioni simultanee di più parametri, cercando quindi una correlazione tra le variazioni.

⁷ La serie sarà: 114 (30-20-30), 85 (25-15-20), 62 (20-10-13), 50 (16-9-10), 33 (10-5-7), 27 (9-4-6), 24 (7-3-5) e 19 (5-3-5). Le soluzioni con 1 punto/° si sono rivelate instabili e quindi non verranno riportate.

Come si può notare, la diminuzione dei punti di calcolo ha un'elevata incidenza sui tempi di simulazione, che per i risultati a meno campionamenti si riducono a circa la metà di quelli valutati a 4 punti/°. Il coefficiente di stabilità è ovviamente più alto, ma nel complesso si è ancora ben all'interno della zona di correttezza.

Per quanto riguarda la massa aspirata, si riconosce ancora una volta una relazione molto simile ad una iperbole, con un principio di appiattimento per un numero molto limitato di elementi. Nella pressione media del condotto, invece, i risultati sono pressoché invariati.

La scelta della discretizzazione spaziale e temporale migliore deve quindi essere fatta valutando l'insieme dei parametri che possono influire sulla dinamica delle grandezze nel condotto, tenendo presenti la necessità di precisione e la velocità di calcolo.

4.6. Variazione del punto di funzionamento

Tutte le simulazioni fin qui eseguite si riferivano ad un solo punto di funzionamento. Per validare ulteriormente la nuova metodologia e valutare anche come si comporta la funzione *Geometria* al variare delle condizioni di utilizzo, è stata lanciata una serie di simulazioni, facendo variare di volta in volta le percentuali di apertura della farfalla e il numero di giri motore. Sono state eseguite ventuno simulazioni, con tre velocità di rotazione (10000 rpm, 6000 rpm e 3000 rpm) e sette posizioni di apertura valvola (80%, 65%, 50%, 40%, 30%, 20%, 15%). Terminata ogni simulazione sono stati calcolati gli errori sulla massa d'aria aspirata e sulla pressione media rispetto a quelle valutate per via sperimentale. È stata quindi ottenuta una mappatura degli errori nei vari punti di funzionamento.

La prima serie di simulazioni è stata lanciata sulla discretizzazione manuale e i risultati ottenuti sono perfettamente in linea con quelli del modello di confronto utilizzato. Come visto in precedenza per il singolo punto, il modello è molto buono per quanto riguarda la massa aspirata, mentre ha un errore medio leggermente più alto nel calcolo della pressione media. L'errore massimo si assesta attorno al 5% per la prima, mentre si ha circa il 10% massimo di differenza per la seconda.

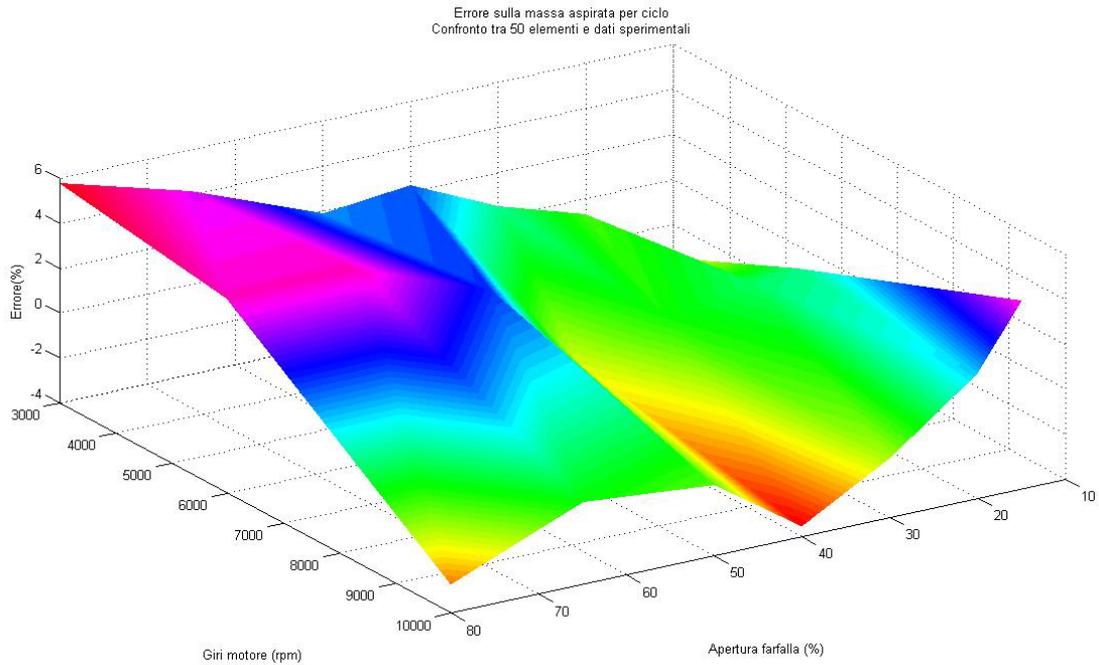


Fig. 69 - Mappatura dell'errore per il calcolo della massa aspirata con discretizzazione manuale a 50 elementi

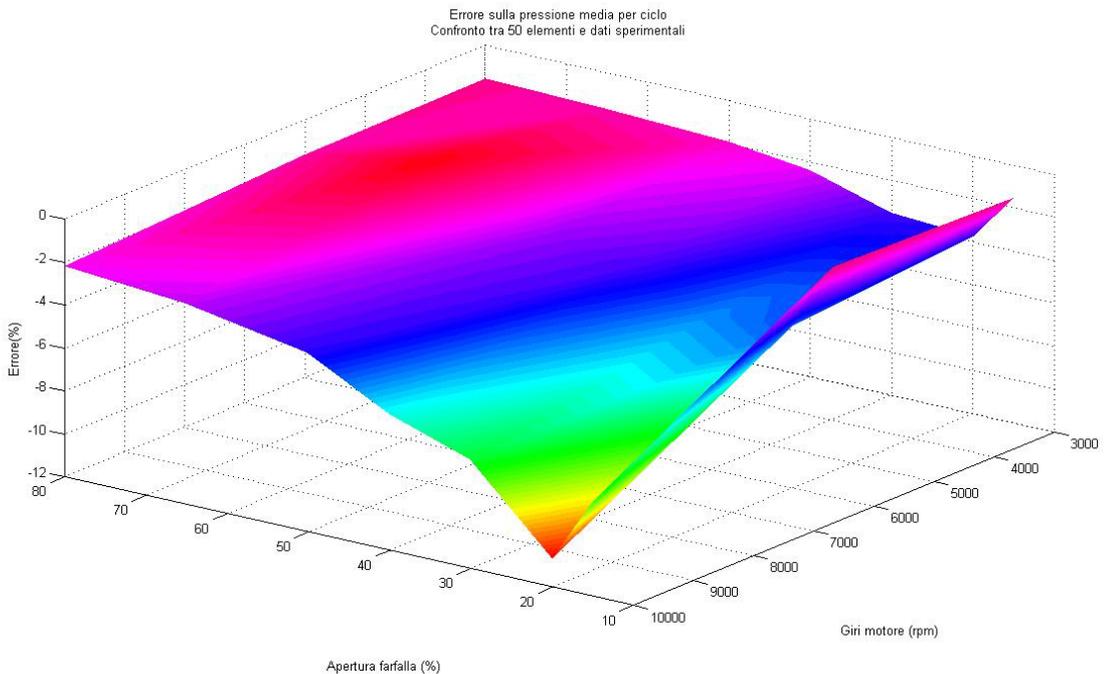


Fig. 70 - Mappatura dell'errore per il calcolo della pressione media del condotto con discretizzazione manuale a 50 elementi

Per verificare anche il comportamento delle discretizzazioni automatiche calcolate mediante la funzione *Geometria*, sono state eseguite altre due serie di simulazioni: una per un caso intermedio, con discretizzazione a 26 elementi, e una per il caso limite a soli 19 elementi.

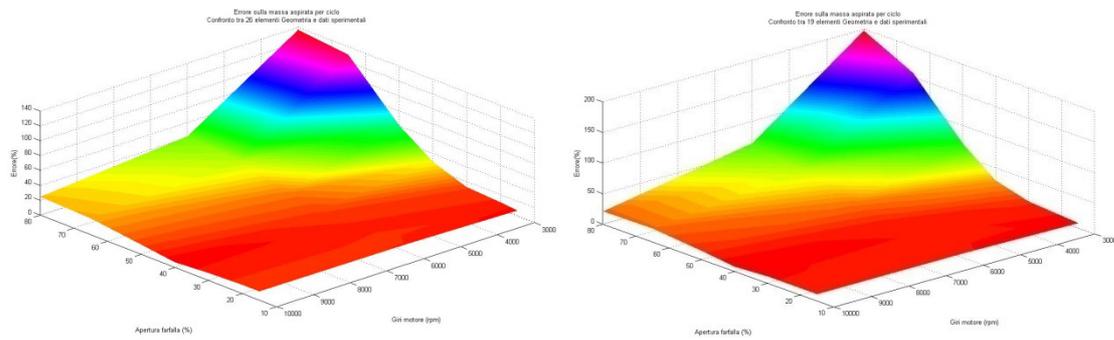


Fig. 71 - Mappature degli errori sulla massa aspirata valutata per discretizzazione a 26 (sx) e 19 (dx) elementi. Si può notare che l'errore diventa anche il 200% in caso di bassi giri di rotazione e aperture rilevanti della farfalla.

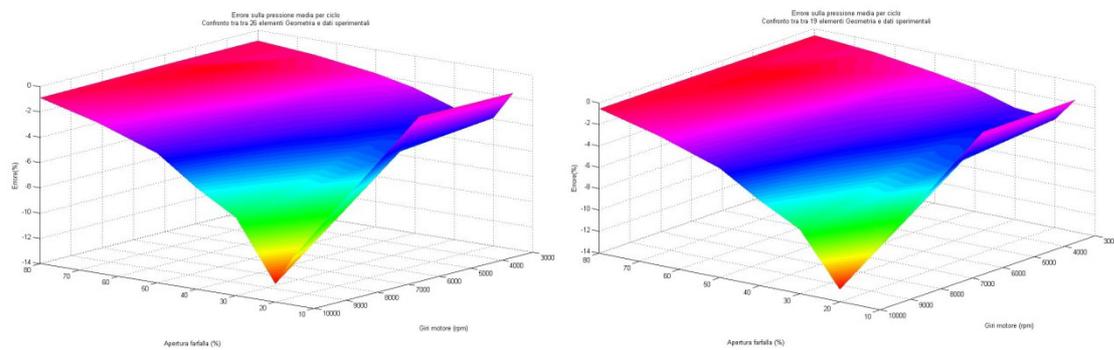


Fig. 72 - Mappature degli errori sulla pressione media del condotto valutata per discretizzazione a 26 (sx) e 19 (dx) elementi. Si può notare che in questo caso le due discretizzazioni non influenzano particolarmente l'esito della pressione.

In questo caso l'errore sulla massa aspirata diventa molto ingente in alcuni punti di funzionamento, fino ad arrivare a circa il 200% per bassi regimi di rotazione e farfalla molto aperta. Tuttavia, si può vedere che la tendenza dell'errore è abbastanza definita e costante e sarebbe pertanto abbastanza agevole valutare un coefficiente di correzione dei risultati che si ottengono dalle simulazioni. L'ultima valutazione riguarda le tempistiche di simulazione. La batteria delle ventuno simulazioni ha infatti richiesto circa 320 secondi per il caso a 50 elementi discretizzati manualmente (circa 15,2 sec l'una). Le discretizzazioni a 26 e 19 elementi *Geometria* hanno invece impiegato rispettivamente circa 150 sec (7,1 sec l'una) e 100 sec (4,6 sec l'una), a ulteriore dimostrazione dell'efficacia della riduzione del numero di elementi sulla diminuzione delle tempistiche di simulazione. Ciò non toglie comunque che vengano introdotti errori decisamente maggiori, sottolineando quindi ancora una volta la necessità di ponderare adeguatamente la scelta della discretizzazione in funzione delle esigenze.

5. CONSIDERAZIONI FINALI E CONCLUSIONI

5.1. Considerazioni e sviluppi futuri

Come dimostrato nei capitoli precedenti, la modellazione CIR permette di avere ottimi risultati per quanto riguarda la precisione, ma, allo stato dell'arte, non è adatta per applicazioni di tipo controllo *on-line*. Nonostante la forte riscrittura, anche attraverso l'utilizzo di calcoli matriciali, proposta soprattutto per separare il flusso di calcolo e renderlo quindi più rapido, la procedura non raggiunge gli standard di velocità richiesti.

Tale mancanza è da attribuire, in particolare, alla risoluzione numerica, che richiede una griglia sufficientemente fitta per riuscire a risolvere il metodo. Applicando tale divisione viene quindi analizzata anche la dinamica delle grandezze nei nodi interni del condotto, che ai fini del controllo sono praticamente inutili. Prendendo ad esempio come riferimento i modelli 0-D, metodologia con la quale sono attualmente applicati i controlli, i segnali globali sono un bilancio generale delle grandezze che vengono coinvolte. Questo tipo di calcolo è ovviamente molto più rapido e quindi si rivela ottimale per la valutazione in tempo reale dei fenomeni.

In sede di preparazione del lavoro di tesi si era iniziato ad investigare su metodologie a parametri concentrati, che, a partire dal Metodo delle Caratteristiche, permettessero la valutazione di vere e proprie capacità dinamiche di tratti di condotti. Tali metodi sono stati abbandonati in quanto non si adattavano correttamente alle applicazioni in analisi: i passi di integrazione del metodo variavano a seconda della velocità calcolata nel canale. Ciò avrebbe significato dover calcolare di volta in volta lo *step* temporale per l'integrazione successiva e questo non è accettabile per un'applicazione di controllo in linea. Inoltre, il metodo si dimostrava fortemente instabile.

In ogni caso, nonostante tali problematiche, il naturale sviluppo di questo lavoro potrebbe essere proprio quello di andare a valutare una risoluzione che si basi sul calcolo di parametri concentrati, che permettano di valutare la dinamica nel suo complesso all'interno del condotto di aspirazione. L'idea potrebbe essere di utilizzare le metodologie studiate in questa tesi come *tuning* per un modello più scarno, ma con prestazioni di calcolo decisamente migliori.

5.2. Conclusioni

In questo lavoro è stato analizzato il comportamento di un condotto di aspirazione mediante soluzione numerica delle equazioni non conservative della fluidodinamica. Particolare importanza è stata data alla facilità di implementazione e di scrittura delle geometrie, privilegiando anche la possibilità di test sulle migliori discretizzazioni spaziali e temporali. Rispetto al modello di confronto utilizzato durante la fase di modellazione si è sicuramente fatto un passo in avanti, migliorando sia la fruibilità fin dalle prime volte da parte di un utente che non ha mai visto il codice di modellazione, sia la possibilità di riscrittura. Inoltre, con la riscrittura matriciale a *input* separati le tempistiche di simulazione si sono ridotte anche ad un quinto rispetto alle tempistiche del modello di confronto.

Il lavoro fin qui svolto lascia comunque spazio a diversi sviluppi, cercando appunto una metodologia da affiancare a quanto fatto finora per il controllo *on-line* dei flussi all'intero del motore, in maniera tale da migliorare i rendimenti dei propulsori, sovralimentati e non.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Ferrari G, 2008, "*Motori a Combustione Interna*", Il Capitello, Torino
2. Heywood J., 1988, "*Internal Combustion Engine Fundamentals*", McGraw-Hill, New York
3. Winterbone D. E., Pearson R. J., 2000, "*Theory of Engine Manifold Design, wave action methods for IC Engines*", Professional Engineering Publishing, London
4. Cavina N., Migliore F., Carmignani L, Di Palma S., 2009, "*Development of a Control-Oriented Engine Model Including Wave Action Effects*", SAE 2009-24-0107
5. Tonietto S., Ponti F., 2012, "*Relazione di preparazione alla Tesi in Sistemi Propulsivi Avanzati LM*", Seconda Facoltà di Ingegneria, Università di Bologna
6. The MathWorks Inc, 2002, "*Simulink, Model-Based and System-Based Design*", Natick
7. Chalet D., Chesse P., 2010, "*Fluid dynamic modeling of junctions in internal combustion engine inlet and exhaust systems*", Science Press and Institute of Engineering Thermophysics, CAS and Springer-Verlag Berlin Heidelberg

7. RINGRAZIAMENTI

Vorrei innanzitutto ringraziare il professor Fabrizio Ponti, relatore di questo lavoro di tesi, che nonostante le numerose difficoltà che ho incontrato nel lungo percorso di studio ed elaborazione di questa metodologia simulativa, mi ha sempre aiutato e spronato a dare il massimo. Spesso, davanti ad un nuovo problema che inizialmente mi sembrava insormontabile, mi ripeteva che le cose semplici sono in grado di farle tutti. Grazie professore per aver creduto in me e per avermi fatto capire che impegnandomi e ragionando con la mia testa non ci sono cose facili o difficili, ma solo soluzioni da trovare.

Devo poi ringraziare tutti i miei compagni di studi, dal primo all'ultimo. Insieme abbiamo creato un ambiente stupendo in aula, dove ci aiutavamo tutti e ci supportavamo a vicenda. So che su di voi potrò sempre contare. Quindi grazie a Davide, Marco, Emanuele, Eurosia, Maria Pia, Margherita, Viola, Luca, Filippo, Giacomo, Matteo, Matteo, Guglielmo, Cinzia, Federico, Antonio, Siro, Marco, Simone, Mattia e a tutti gli altri.

Un grazie va anche al mio collega tesista Antonio, compagno di interminabili giornate in aula 20, impegnati nei rispettivi problemi, ma trovando sempre il tempo per consigliarci a vicenda. Grazie perché, oltre all'aiuto, ho trovato un amico.

Un particolare ringraziamento va a Matteo, amico insostituibile, che ha il merito di avermi guidato nel percorso forlivese, e che mi ha sempre spronato ad andare avanti anche nei momenti più difficili, e poi un grazie immenso anche a Riccardo, Enrico, Daniele, Rachele e Raissa, è sempre stupendo staccare la spina con voi.

In questo elenco di ringraziamenti non può mancare mia sorella, Serena, grazie per tutti i tuoi consigli e i tuoi incoraggiamenti.

Non basterebbe l'intera tesi per ringraziare i miei genitori, Fabiano e Maria Rosa, è solo ed esclusivamente merito loro se sono arrivato a questo punto. Grazie per aver sempre creduto in me, e avermi sempre fatto tirare fuori il massimo, siete il mio appiglio sicuro e so che voi per me ci sarete sempre, vi voglio bene.

Infine devo ringraziare Arianna, che nonostante i periodi difficili e stressanti che abbiamo vissuto ultimamente, mi è sempre stata accanto. I nostri sogni sono sempre più vicini, continuiamo a camminare insieme per raggiungerli.