

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITA' DI BOLOGNA  
SECONDA FACOLTA' DI INGEGNERIA  
CON SEDE A CESENA

*CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA*  
AEROSPAZIALE  
CLASSE: 10  
SEDE DI FORLÌ

**ELABORATO FINALE DI LAUREA**  
**In Analisi matematica L-B**

# **Analisi dello sviluppo asintotico di funzioni applicate al sistema velivolo**

---

CANDIDATO  
Michelangelo D' Anniballe

RELATORE  
Davide Guidetti

CORRELATORI  
Matteo Zanzi  
Paolo Castaldi

**Anno Accademico 2011-2012**  
**Sessione Seconda**



# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Analisi del sistema</b>	<b>7</b>
2.1	Presentazione del modello . . . . .	7
2.2	Linearizzazione . . . . .	8
2.3	Introduzione del termine di controllo . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Nozioni di base</b>	<b>11</b>
3.1	Funzione matrice esponenziale . . . . .	11
3.1.1	Norma di matrici e disuguaglianza del prodotto . . . . .	11
3.1.2	Derivata e Integrale di matrici . . . . .	11
3.1.3	Definizione . . . . .	12
3.1.4	Proprietà . . . . .	13
3.1.5	Maggiorazione . . . . .	14
3.2	Equazioni differenziali . . . . .	15
3.2.1	Sistemi del primo ordine . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Teoria di base</b>	<b>19</b>
4.1	Teoremi e dimostrazioni . . . . .	19
4.2	Calcolo dei coefficienti dello sviluppo asintotico . . . . .	27
4.3	Determinazione numerica dello sviluppo asintotico . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Simulazione in MatLab</b>	<b>31</b>
5.1	Scrittura del programma . . . . .	32
5.1.1	Struttura della simulazione . . . . .	32
5.1.2	M-File preliminare . . . . .	32
5.1.3	Simulink . . . . .	34
5.1.4	M-File conclusivo . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>37</b>



# Capitolo 1

## Introduzione

La presente attività di tesi pone la propria attenzione sullo studio del fault, il quale, limitandoci al campo aeronautico, può essere visto come una variazione non controllata dei parametri di volo, generata da guasti meccanici o legata all'interferenza di fenomeni atmosferici. Lo studio del fault assume grande rilevanza nell'ottica della prevenzione degli incidenti.

Nel corso della trattazione studieremo la dinamica di un velivolo ad alte prestazioni basandoci su un sistema di equazioni differenziali lineari, frutto di procedure di linearizzazione, del tipo

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

In questo sistema, le variabili di stato rappresentano le variazioni da una particolare condizione di equilibrio: in riferimento alla  $u(t)$ , in termini della spinta, del fattore di carico e dell'angolo di rollio, in riferimento alla  $x(t)$ , della velocità, dell'angolo di salita e della direzione rispetto al suolo. Interpretiamo la funzione  $u(t)$  come variazioni generate dell'azione diretta di un fault mentre interpreteremo  $x(t)$  come variazioni conseguenti a quelle su  $u(t)$ .

Dimostreremo matematicamente che, sotto determinate ipotesi, se la funzione  $u(t)$  presenta uno sviluppo asintotico del tipo

$$u(t) = g_1(t)u_1 + g_2(t)u_2 + \dots + g_n(t)u_n + o(g_n)(t)(t \rightarrow \infty),$$

con  $g_i$  funzioni opportune e  $u_i$  vettori opportuni, anche  $x(t)$  presenta uno sviluppo asintotico con struttura analoga:

$$x(t) = g_1(t)x_1 + g_2(t)x_2 + \dots + g_n(t)x_n + o(g_n)(t)(t \rightarrow \infty),$$

Inoltre, forniremo delle strategie di calcolo atte a:

- calcolare i coefficienti  $x_i$  dello sviluppo asintotico di  $x(t)$  sulla base della conoscenza di un numero finito di valori  $x(\tau_i)$ , con un errore dipendente dai particolari  $\tau_i$  utilizzati.
- ricondursi allo sviluppo asintotico della  $u(t)$  da quello della  $x(t)$ .

Infine costruiremo una simulazione del modello in MatLab nella quale considereremo una condizione di equilibrio iniziale corrispondente al volo livellato, la quale, a partire da un certo istante  $t_0$ , verrà sconvolta dalla presenza di un fault, in termini di variazione della spinta, del fattore di carico e dell'angolo di rollio, con conseguente variazione della velocità, dell'angolo di planata e della direzione rispetto al suolo. Sulla base dei valori che assumerà lo stato  $x(t)$ , campionati nella simulazione, ricaveremo analiticamente lo sviluppo asintotico dello stesso e ricostruiremo in seguito quello dell'anomalia  $u(t)$ , applicata in ingresso al sistema ma teoricamente non nota.

# Capitolo 2

## Analisi del sistema

In questo capitolo, tramite procedure di linearizzazione, ricondurremo lo studio della dinamica del velivolo da quello di un sistema di equazioni differenziali non lineari a quello di un sistema di equazioni differenziali lineari, in cui le nuove variabili di stato risulteranno degli scostamenti rispetto ad una fissata condizione di equilibrio

### 2.1 Presentazione del modello

Identificando il velivolo con un punto materiale, ci riduciamo a studiare un sistema di equazioni differenziali non lineari in cui consideriamo costanti la massa  $m$ , l'accelerazione di gravità  $a$ , la densità  $\varrho$  e i parametri  $D_0$  e  $D_1$ , il coefficiente di resistenza indotta  $C_{d0}$  e la superficie  $S$ . Inoltre, in questo sistema, consideriamo solo funzioni del tempo  $t$  la velocità  $V$ , l'angolo di rollio  $\phi$ , la direzione a terra  $\chi$ , il fattore di carico  $n$ , la spinta  $T$  e l'angolo di salita  $\gamma$ .

Il sistema è del tipo:

$$x'(t) = f(x(t), u(t))$$

con

$$x(t), u(t) : [0, T] \longrightarrow R^3,$$

e, in particolare,

$$x(t) = (V(t), \gamma(t), \chi(t))$$

e

$$u(t) = (T(t), n(t), \phi(t)).$$

Tale sistema è il seguente:

$$\begin{cases} V'(t) = T(t) - D_0 V^2(t) - \frac{D_1 n^2(t)}{V^2(t)^m} - g \sin(\gamma(t)) \\ \gamma'(t) = \frac{gn(t) \cos(\phi(t))}{V(t)} - \frac{g \cos(\gamma(t))}{V(t)} \\ \chi'(t) = \frac{gn(t) \sin(\phi(t))}{V(t) \cos(\gamma(t))} \end{cases} \quad (2.1)$$

con

$$D_0 = \frac{1}{2} \rho S C_{d0}$$

$$D_1 = \frac{2km^2}{(\rho S)}.$$

## 2.2 Linearizzazione

La natura non lineare del sistema (2.1) impedisce l'applicazione diretta della teoria puramente lineare che enunceremo e dimostreremo nei prossimi capitoli e, per ricondurci al caso lineare, ricorriamo a metodologie di linearizzazione che si basano sull'approssimazione intorno a determinati punti di equilibrio. Il nuovo sistema, prodotto dalla linearizzazione, studia gli scostamenti rispetto alla suddetta condizione di equilibrio.

In generale, se si prende in considerazione un sistema non lineare, dinamico, tempo continuo, stazionario, del tipo

$$x'(t) = f(x(t), u(t)),$$

si può considerare una condizione di equilibrio  $x_0$ , conseguenza dell'applicazione al sistema di un ingresso  $u_0$ , ed un movimento perturbato  $x(t)$  generato da un ingresso perturbato  $u(t)$ . Le seguenti differenze rappresentano le perturbazioni del sistema.

$$\delta x(t) = x(t) - x_0 : \text{perturbazione dello stato.}$$

$$\delta u(t) = u(t) - u_0 : \text{perturbazione dell'ingresso.}$$



L'evoluzione temporale della perturbazione dello stato  $\delta x(t)$  è soluzione dell'equazione differenziale

$$\delta x'(t) = f(x_0 + \delta x(t), u_0 + \delta u(t)) = f(x(t), u(t)).$$

La funzione  $f(x(t), u(t))$  può essere sviluppata in serie di Taylor in un intorno di  $x_0$  e  $u_0$  come

$$f(x(t), u(t)) = f(x_0 + \delta x(t), u_0 + \delta u(t))$$

e, se tronciamo lo sviluppo al termine lineare, chiamando A lo Jacobiano di f rispetto ad x calcolato in  $(x_0, u_0)$  e B lo Jacobiano di f rispetto ad u calcolato in  $(x_0, u_0)$  otteniamo

$$\delta x'(t) \cong A\delta x(t) + B\delta u(t).$$

Quindi, l'evoluzione temporale del sistema (2.1) può essere espressa, in forma approssimata, nell'intorno della condizione di equilibrio  $(x_0, u_0)$ , in funzione delle perturbazioni  $\delta x(t)$  e  $\delta u(t)$ . L'approssimazione sarà tanto migliore quanto piccole sono le perturbazioni rispetto ad  $(x_0, u_0)$

In particolare, riferendoci al punto di equilibrio  $(x_0 = (V_0, \gamma_0, \chi_0), u_0 = (T_0, n_0, \phi_0))$ , le matrici A e B che si ottengono dal sistema (2.1) sono:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-2D_0V_0}{m} + \frac{2D_1n_0^2}{(mV_0^3)} & -g \cos(\gamma_0) & 0 \\ (-n \cos(\phi_0) + \frac{\cos(\gamma_0)g}{V_0^2}) & \frac{\sin(\gamma_0)g}{V_0} & 0 \\ -gn_0 \sin(\gamma_0)(V_0^2 \cos(\gamma_0)) & \frac{gn_0 \sin(\gamma_0) \sin(\phi_0)}{(V_0 \cos^2(\gamma_0))} & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & \frac{-2D_1n_0}{(mV_0^2)} & 0 \\ 0 & \frac{g \cos(\phi_0)}{V_0} & \frac{-n_0 \sin(\phi_0)g}{V_0} \\ 0 & \frac{g \sin(\phi_0)}{(V_0 \cos(\gamma_0))} & \frac{gn_0 \cos(\phi_0)}{(V_0 \cos(\gamma_0))} \end{bmatrix}$$

e, ponendo  $x_L = \delta x(t)$  e  $u_L = \delta u(t)$ , possiamo scrivere

$$x'_L(t) = Ax_L(t) + Bu_L(t). \quad (2.2)$$

Equazione linearizzata che approssima il sistema (2.1) nel punto di equilibrio  $(x_0, u_0)$

### 2.3 Introduzione del termine di controllo

Il sistema (2.2) è lineare ma non necessariamente stabile in quanto la matrice  $A$  potrebbe presentare autovalori a parte reale positiva in dipendenza del particolare punto di equilibrio considerato. Per assicurare la stabilità è necessario introdurre uno stabilizzatore del tipo  $u(t) = -Kx(t)$  con  $K$  matrice opportuna.

Inoltre, l'ingresso  $u_L(t)$  risulta a rigore composizione di due contributi, entrambi dipendenti dal tempo, l'uno,  $\hat{u}_L(t)$  rappresentante la parte su cui si ha controllo e che può essere soggetta al regolatore, l'altro,  $\tilde{u}(t)_L$ , azione del fault vero e proprio, disaccoppiato.

Risulta un sistema del tipo

$$x'_L(t) = Ax_L(t) + B\hat{u}_L(t) + B\tilde{u}_L(t)$$

e, con l'aggiunta del regolatore, otteniamo

$$x'_L(t) = (A - BK)x_L(t) + B\tilde{u}_L(t). \quad (2.3)$$

Ponendo  $\tilde{A} = A - BK$ , risulta

$$x'_L(t) = \tilde{A}x_L(t) + B\tilde{u}_L(t). \quad (2.4)$$

Il sistema così elaborato soddisfa tutte le ipotesi necessarie ed è a questo che applicheremo la teoria che ci apprestiamo ad enunciare.

# Capitolo 3

## Nozioni di base

Introduciamo, in via preliminare, alcune nozioni di base necessarie alla comprensione dei teoremi che enunceremo e dimostreremo successivamente.

### 3.1 Funzione matrice esponenziale

#### 3.1.1 Norma di matrici e disuguaglianza del prodotto

Definita la matrice  $A \in M_{m \times n}(C)$  come una matrice  $m \times n$  ad elementi complessi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

richiamiamo la nozione di norma euleriana di matrice. Esprimendola con il segno grafico  $\|\cdot\|$  poniamo

$$\|A\| = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Inoltre se  $A \in M_{m \times n}(C)$  e  $B \in M_{n \times p}(C)$  vale la nota disuguaglianza

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|. \quad (3.3)$$

#### 3.1.2 Derivata e Integrale di matrici

Richiamiamo anche come si comportano gli operatori derivata e integrale se applicati alla matrice  $A \in M_{m \times n}(C)$ .

Sia  $I$  un intervallo in  $\mathbb{R}$ , se  $A : I \rightarrow M_{m \times n}(C)$  è una funzione, diremo che

è continua se ciascuna delle funzioni  $A_{i,j} : I \rightarrow C$  con  $(1 \leq i \leq m)$  e  $(1 \leq j \leq n)$  è continua.

In tal caso, se  $a, b \in I$ , con la scrittura  $\int_a^b A(t)dt$  indicheremo la matrice  $m \times n$  la cui componente  $(i,j)$  è  $\int_a^b a_{ij}(t)dt$ .

$$\int_a^b A(t)dt = \begin{bmatrix} \int_a^b a_{11}(t) & \dots & \int_a^b a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^b a_{m1}(t) & \dots & \int_a^b a_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

Analogamente, se ciascuna delle funzioni  $A_{i,j} : I \rightarrow C$  con  $(1 \leq i \leq m)$  e  $(1 \leq j \leq n)$  è anche derivabile, indicheremo con  $D_t A(t)$  la matrice  $m \times n$  la cui componente  $(i,j)$  è  $D_t(a_{ij}(t))$

$$D_t A(t) = \begin{bmatrix} D_t a_{11}(t) & \dots & D_t a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_t a_{m1}(t) & \dots & D_t a_{mn}(t) \end{bmatrix}.$$

### 3.1.3 Definizione

È noto che la funzione esponenziale complessa  $e^z$  è rappresentabile come:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (3.4)$$

Analogamente possiamo definire la matrice  $e^A$  come:

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + A + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \quad (3.5)$$

ove l'elemento di posto  $i,j$  si scrive come :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{ij}^n}{n!}, \quad (3.6)$$

con  $a_{ij}^n$  elemento di posto  $i,j$  della matrice  $A^n$ .

Notiamo che la serie (3.6) è sempre convergente, intendendo per convergenza di matrici che data una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n \quad (3.7)$$

con  $B \in M_{m \times n}(C)$ , essa converge se per ogni coppia  $(i,j)$  converge la sua serie numerica

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{ij}^n. \quad (3.8)$$

Infatti, tenendo conto della definizione di norma euleriana e che  $\forall(i,j) |a_{ij}| \leq \|A\|$  e possiamo scrivere

$$|a_{ij}^n| \leq \|A^n\| \leq \|A\|^n.$$

Per cui è chiaro che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}.$$

A questo punto, utilizzando (3.5) possiamo considerare la funzione

$$e^{tA} : R \longrightarrow M_{n \times n}(C). \quad (3.9)$$

funzione matrice esponenziale.

$$e^{At} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} = I + At + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \quad (3.10)$$

### 3.1.4 Proprietà

La funzione matrice esponenziale gode di alcune importanti proprietà che andremo ad elencare:

- La funzione  $e^{tA}$  è continua da  $R$  a  $M_{n \times n}(C)$
- $\forall A, B \in M_{n \times n}(C)$  con  $AB = BA$  abbiamo:

$$e^{sA} e^{tB} = e^{sA+tB}, \forall s, t \in R \quad (3.11)$$

e

$$e^{sA} e^{tA} = e^{(t+s)A}, \forall s, t \in R \quad (3.12)$$

- La funzione (3.9) è derivabile e la sua derivata prima è data da

$$D_t(e^{At}) = D_t\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right) = A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \dots = A \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \right] = A e^{At} \quad (3.13)$$

- Se  $A$  è diagonale, con  $A_{ii} = d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) si può dimostrare che  $e^{tA}$  è diagonale con  $e_{ii}^{tA} = e^{ta_i}$ ,

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{ta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{ta_n} \end{bmatrix}.$$

Inoltre, tenendo presente che

$$|e^z| = e^{\Re(z)} \quad \forall z \in C, \quad (3.14)$$

possiamo scrivere

$$\|e^{tA}\| = \left( \sum_{i=1}^n |e^{ta_i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \sum_{i=1}^n e^{2t\Re(a_i)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

### 3.1.5 Maggiorazione

Cerchiamo ora una maggiorazione adeguata per la norma della funzione

$$e^{tA} : R \longrightarrow M_{n \times n}(C). \quad (3.16)$$

Possiamo distinguere due casi:

- $A$  è diagonalizzabile,  $\exists B \in M_{n \times n}$  invertibile tale che:

$$A = B^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} B. \quad (3.17)$$

Se

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

potremo allora scrivere :

$$A^n = B^{-1} \Lambda B B^{-1} \Lambda B B^{-1} \Lambda B \dots = B^{-1} \Lambda^n B, \quad (3.19)$$

per cui

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^{-1} \Lambda^n B}{n!}. \quad (3.20)$$

Posso portare fuori dalla sommatoria  $B^{-1}$  e  $B$  e (3.20) diventa

$$e^{tA} = B^{-1}e^{t\Lambda}B$$

con

$$e^{t\Lambda} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Valendo la (3.3),

$$\|e^{tA}\| \leq \|B^{-1}\| \|B\| \|e^{t\Lambda}\|. \quad (3.22)$$

Esplicitando la norma, il termine  $e^{t\Lambda}$  si può riscrivere come

$$(|e^{2\lambda_1 t}|^2 + \dots + |e^{2\lambda_n t}|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

che, ricordando la 3.15, diventa

$$((e^{2\Re(\lambda_1)t})^2 + \dots + (e^{2\Re(\lambda_n)t})^2)^{\frac{1}{2}}$$

Quest'ultima forma ci mostra che se la matrice  $A$  è diagonalizzabile possiamo scrivere:

$$\|e^{tA}\| \leq Ce^{\omega t} \quad (3.23)$$

$\forall t \geq 0$ ,  $C$  costante e  $\omega = \max(\Re(\lambda_i))$ ,

che è la maggiorazione cercata

- $A$  non è diagonalizzabile, si può dimostrare che vale una maggiorazione leggermente peggiore, del tipo:

$$\|e^{tA}\| \leq C(\epsilon)e^{(\omega+\epsilon)t}$$

$\forall t \geq 0$ ,  $C$  costante dipendente da  $\epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$  e stessa  $\omega$ .

## 3.2 Equazioni differenziali

### 3.2.1 Sistemi del primo ordine

Nella seguente trattazione analizzeremo un sistema di equazioni differenziali del primo ordine della forma

$$x'(t) = Ax(t) + u(t) \quad (3.24)$$

con

$$x : I \longrightarrow R^n \quad (3.25)$$

e

$$u : I \longrightarrow R^n \quad (3.26)$$

con  $I$  intervallo in  $R$  con interno non vuoto e non superiormente limitato.

Il sistema è equivalente a

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Consideriamo ora il problema di Cauchy associato a (3.24), imponendo a una soluzione  $x$  di dominio  $I$  l'ulteriore condizione  $x(t_0) = x_0$  arbitrario elemento di  $R^n$ :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + u(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

Ora moltiplicando membro a membro la (3.24) per la funzione matrice esponenziale  $e^{-tA}$  possiamo riscriverla come

$$e^{-tA}x'(t) - Ae^{-At}x(t) = e^{-At}u(t) \quad (3.29)$$

notando che il primo membro può essere riscritto in quanto:

$$e^{-At}x'(t) - Ae^{-At}x(t) = \frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)). \quad (3.30)$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}u(t) \quad (3.31)$$

ed integrando otteniamo:

$$e^{-At}x(t) = C + \int_{t_0}^t e^{-As}u(s)ds. \quad (3.32)$$

Da  $t = t_0$  segue  $C = e^{-At_0}x_0$ , da cui

$$e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(-s)A}u(s)ds \quad (3.33)$$

e

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}u(s)ds, \quad (3.34)$$



soluzione del problema (3.28)

La (3.34) prende il nome di formula delle variazioni delle costanti o formula di Lagrange.



# Capitolo 4

## Teoria di base

In questo capitolo viene enunciata la teoria fulcro della trattazione, teoria che isola una correlazione, sotto determinate ipotesi, tra lo sviluppo asintotico dell'ingresso del sistema con quello dell'uscita, composta da teoremi, con relative dimostrazioni, e integrata con metodologie create ad hoc, fondamentali per la costruzione della simulazione in ambiente MatLab.

### 4.1 Teoremi e dimostrazioni

**Teorema 1.** *Sia*

$$x'(t) = Ax(t) + u(t)$$

*con*

$$x : I \longrightarrow R^n$$

*e*

$$u : I \longrightarrow R^n,$$

*continue, con  $I$  intervallo in  $R$  non vuoto e non superiormente limitato.*

*Se*

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t} (\omega > 0)$$

*e*

$$u(t) \longrightarrow u(\infty) (t \longrightarrow \infty)$$

*allora*

$$x(t) \longrightarrow -A^{-1}u(\infty)$$

*Dimostrazione.* Dall'equazione di Lagrange, per  $t \geq t_0 \in I$ :

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s)ds,$$

inoltre

$$\|e^{(t-t_0)A}x(t_0)\| \leq Me^{-\omega(t-t_0)} \longrightarrow 0(t \longrightarrow \infty),$$

$$\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(s)ds = \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(\infty)ds + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}[u(s) - u(\infty)]ds$$

con

$$\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}u(\infty)ds = [-A^{-1}e^{(t-s)A}]_{s=t_0}^{s=t}u(\infty) = A^{-1}(e^{(t-t_0)A}-1)u(\infty) \longrightarrow -A^{-1}u(\infty).$$

Siano  $\epsilon, \eta > 0$ . Allora  $\exists \bar{t}$  tale che  $\|u(s) - u(\infty)\| \leq \eta$  se  $t \geq \bar{t}$ .

Se  $t \geq \bar{t}$

$$\int_{t_0}^t e^{(t-s)A}[u(s) - f(\infty)]ds = \int_{t_0}^{\bar{t}} e^{(t-s)A}[u(s) - u(\infty)]ds + \int_{\bar{t}}^t e^{(t-s)A}[u(s) - u(\infty)]ds,$$

$$\left\| \int_{\bar{t}}^t e^{(t-s)A}[u(s) - u(\infty)]ds \right\| \leq C\eta \int_{\bar{t}}^t e^{-\omega(t-s)}ds = C\eta e^{-\omega t} \left[ \frac{e^{\omega s}}{\omega} \right]_{s=\bar{t}}^{s=t}$$

che è anche uguale a:

$$\frac{C}{\omega}\eta(1 - e^{\omega(\bar{t}-t)}) \leq \frac{C}{\omega}\eta \leq \epsilon$$

se

$$\eta \leq \frac{\epsilon\omega}{C}.$$

Infine

$$\left\| \int_{t_0}^{\bar{t}} e^{(t-s)A}[u(s) - u(\infty)]ds \right\| \leq C \int_{t_0}^{\bar{t}} e^{-\omega(t-s)}(\|u(s)\| + \|u(\infty)\|)ds$$

che risulta minore od uguale di

$$2C \sup_{t \geq t_0} \|u\| e^{-\omega t} \frac{e^{\omega \bar{t}} - e^{\omega t_0}}{\omega} \longrightarrow 0$$

per  $t \longrightarrow \infty$

□

**Teorema 2.** *Sotto le ipotesi del teorema 1,*

*sia*

$$u(t) = u_0 + t^{-1}u_1 + o(t^{-1})(t \longrightarrow \infty).$$

Allora

$$x(t) = x_0 + t^{-1}x_1 + o(t^{-1})$$

con  $x_0 = -A^{-1}u_0$  e  $x_1 = -A^{-1}u_1$ .

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\phi(t) = t[x(t) - x_0],$$

diventa:

$$x(t) = x_0 + t^{-1}\phi(t),$$

da cui, derivando,

$$x'(t) = -t^{-2}\phi(t) + t^{-1}\phi'(t).$$

È anche vero

$$x(t)' = Ax(t) + u(t) = Ax_0 + At^{-1}\phi(t) + u(t),$$

la quale può essere uguagliata alla precedente, ottenendo

$$\phi'(t) = A\phi(t) + t[u(t) + Ax_0] + t^{-1}\phi(t).$$

Si ha:

$$t[u(t) + Ax_0] = t[u(t) - u_0] = u_1 + o(1)(t \rightarrow \infty),$$

$$t^{-1}\phi(t) = x(t) - x_0 \rightarrow 0$$

che ci dice che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = x_0.$$

Quindi, per il teorema 1,

$$\phi(t) \rightarrow x_1 = -A^{-1}u_1.$$

Abbiamo:

$$\phi(t) = x_1 + o(1)$$

e

$$t[x(t) - x_0] = x_1 + o(1)$$

quindi

$$x(t) = x_0 + t^{-1}x_1 + o(t^{-1})$$

□

Vediamo ora un'altra estensione del teorema 1 nel caso in cui sia presente una funzione  $B : I \rightarrow R^n$ .

**Teorema 3.** *Alle ipotesi del teorema 1, aggiungiamo:*

$$\|B(t)\| \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty), B \in C([t_0, +\infty[).$$

Analizziamo il sistema

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + B(t)x(t) + u(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Allora, se

$$u(t) \rightarrow u(\infty)$$

abbiamo

$$x(t) \rightarrow x(\infty) = -A^{-1}u(\infty).$$

*Dimostrazione.* Supponiamo di aver dimostrato che  $x$  sia limitata. In tal caso  $B(t)x(t) + f(t) \rightarrow f(\infty)$  e possiamo applicare il risultato precedente. Basta quindi che  $x$  sia limitata.

Sia  $\epsilon > 0$  e sia  $\|B(t)\| \leq \epsilon$  se  $t \geq \tau$ .

Allora, per  $t \geq \tau$ ,

$$x(t) = e^{(t-\tau)}x(\tau) + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A}f(s)ds + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A}B(s)x(s)ds$$

dove,

$$x_0(t) = e^{(t-\tau)}x(\tau) + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A}f(s)ds.$$

Segue

$$\|x(t)\| \leq \|x_0(t)\| + M\epsilon \int_{\tau}^t e^{-\omega(t-s)}\|x(s)\|ds, t > \tau. \quad (4.1)$$

Sia

$$\phi(t) = \int_{\tau}^t e^{\omega s}\|x(s)\|ds, \quad (4.2)$$

da cui,

$$\phi'(t) = e^{\omega t}\|x(t)\|.$$

Quindi

$$\phi'(t) \leq e^{\omega t}\|x_0(t)\| + M\epsilon\phi(t),$$

$$\begin{aligned}\phi'(t) - M\epsilon\phi(t) &\leq e^{\omega t}\|x_0(t)\|, \\ e^{-M\epsilon t}\phi'(t) - M\epsilon e^{-M\epsilon t}\phi(t) &\leq e^{\omega - M\epsilon)t}\|x_0(t)\|\end{aligned}$$

con

$$e^{-M\epsilon t}\phi'(t) - M\epsilon e^{-M\epsilon t}\phi(t) = \frac{d}{dt}(e^{-M\epsilon t}\phi(t)).$$

Quindi, integrando da  $\tau$  a  $t$ , poichè  $\phi(\tau) = 0$

$$e^{-M\epsilon t}\phi(t) \leq \int_{\tau}^t e^{(\omega - M\epsilon)s}\|x_0(s)\|ds$$

e

$$\phi(t) \leq \int_{\tau}^t e^{\omega s} e^{M\epsilon(t-s)}\|x_0(s)\|ds. \quad (4.3)$$

A questo punto, tenendo conto di (3.1), (3.2) e (3.3), otteniamo

$$\|x(t)\| \leq \|x_0(t)\| + M\epsilon \int_{\tau}^t e^{(-\omega + M\epsilon)(t-s)}\|x_0(s)\|ds.$$

Scegliamo  $\epsilon$  in modo che  $-\omega + M\epsilon < 0$ . Diciamo  $\|x_0(t)\| < K$ . Dal teorema 1,  $x_0$  risulta limitata.

Quindi

$$\begin{aligned}\|x(t)\| &\leq K + M\epsilon \int_{\tau}^t e^{(M\epsilon - \omega)(t-s)}Kds = \\ &= K(1 + M\epsilon e^{(M\epsilon - \omega)t} \left[ \frac{e^{-(M\epsilon - \omega)s}}{\omega - M\epsilon} \right]_{s=\tau}^{s=t}) = \\ &= K(1 + M\epsilon e^{(M\epsilon - \omega)t} \frac{e^{(\omega - M\epsilon)t} - e^{-(M\epsilon - \omega)\tau}}{\omega - M\epsilon}) = \\ &= K(1 + M\epsilon \frac{1 - e^{(\omega - M\epsilon)(\tau - t)}}{\omega - M\epsilon}) \leq cost.\end{aligned}$$

Quindi  $x$  è limitata. □

A questo punto possiamo dare la seguente generalizzazione del teorema 2

**Teorema 4.**

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + u(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Siano, in aggiunta alle ipotesi del teorema 1,:

$$C \in R^n,$$

$$\begin{aligned}
u(t) &= g(t)C + o(g(t))(t \rightarrow \infty), \\
g(t) &\in C^1([t_0, \infty[), \\
g(t) &\neq 0 \forall t \geq t_0, \\
g'(t) &= o(g)(t \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

Allora

$$x(t) = -g(t)A^{-1}C + o(g)(t \rightarrow \infty)$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$\phi(t) = g(t)^{-1}x(t) \Rightarrow x(t) = g(t)\phi(t).$$

L'equazione differenziale si riscrive come:

$$g'(t)\phi(t) + g(t)\phi'(t) = g(t)A\phi(t) + u(t),$$

da cui

$$\phi'(t) = Au(t) - \frac{g'(t)}{g(t)}\phi(t) + \frac{u(t)}{g(t)}.$$

Notiamo che

$$\frac{g'(t)}{g(t)} \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty),$$

mentre

$$\frac{u(t)}{g(t)} \rightarrow C (t \rightarrow \infty).$$

Allora, ponendo

$$B(t) = -\frac{g'(t)}{g(t)},$$

possiamo ricondurci al teorema precedente, da cui,

$$\phi(t) \rightarrow -A^{-1}C \Rightarrow g(t)^{-1}x(t) = -A^{-1}C + o(1).$$

segue la conclusione. □

Il risultato è applicabile  $\forall g(t)$  della forma  $t^a (a \in R)$ , da cui,  $g'(t) = at^{a-1} = o(t^a)$  o per  $g(t) = \ln(t)$ , da cui,  $g'(t) = \frac{1}{t}$ .

Questo si può estendere anche nel caso di un numero maggiore di funzioni.

**Teorema 5.** *sia  $m \in N$  con  $g_1, \dots, g_m \in C^1([t_0, \infty[)$  e  $g_i(t) \neq 0 \forall t \geq t_0$*

*Supponiamo che :*



i) per ciascun  $i = 1, \dots, m - 1$   $g_{i+1}(t) = o(g_i)(t \rightarrow \infty)$ ;

ii)  $\forall i \in \{1, \dots, m - 1\}$   $g'_i(t) = \sum_{j=i+1}^m c_{ij}g_j(t) + o(g_m(t))(t \rightarrow \infty)$

con  $c_{ij} \in R$  e  $g'_m(t) = o(g_m(t))(t \rightarrow \infty)$

iii) consideriamo

$$u : [\tau, \infty[ \rightarrow R^n$$

continua e tale che

$$u(t) = \sum_{i=1}^m g_i(t)u_i + o(g_m(t))(t \rightarrow \infty)$$

con  $u_i \in R^n$ .

Sia  $x$  soluzione di

$$x'(t) = Ax(t) + u(t)$$

con

$$t \geq \tau$$

e con

$$\|e^{tA}\| \leq Me^{-\omega t} (t \geq 0) (\omega > 0).$$

Allora

$$\exists x_1, \dots, x_m \in R^n$$

ed

$$\exists x'_2, \dots, x'_m \in R^n$$

tali che

$$x(t) = \sum_{i=1}^m g_i(t)x_i + o(g_m)(t \rightarrow \infty),$$

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{m-1} g'_i(t)x_i + o(g_m)(t \rightarrow \infty)$$

e

$$x'(t) = \sum_{i=2}^m g_i(t)x'_i + o(g_m)(t \rightarrow \infty).$$

*Dimostrazione.* Proviamo il risultato per induzione su  $m$ :

se  $m = 1$ , abbiamo  $g_1 \in C'([t_0, \infty])$  con  $g_1(t) \neq 0$  e con  $t \geq t_0$   $g'_1(t) = o(g_1)$ .

In questo caso

$$u(t) = g_1(t)u_1 + o(g_1(t)).$$

Abbiamo già visto che:

$$x(t) = g_1(t)x_1 + o(g_1)$$

con

$$Ax_1 + u_1 = 0. \longrightarrow x_1 = -A^{-1}u_1$$

in quanto  $A$  è invertibile.

Proviamo che:

$$x'(t) = o(g_1(t))(t \longrightarrow \infty).$$

Infatti:

$$\begin{aligned} x'(t) &= Ax(t) + u(t) = A(g_1(t)x_1 + o(g_1(t))) + g_1(t)u_1 + o(g_1(t)) = \\ &= g_1(t)(Ax_1 + u_1) + o(g_1(t)) = o(g_1(t)). \end{aligned}$$

Supponiamo che il risultato valga per  $m$  funzioni  $(g_2, \dots, g_m, g_{m+1})$  e, in accordo con il ragionamento induttivo, proviamo che vale per  $m + 1$  funzioni  $(g_1, g_2, \dots, g_m, g_{m+1})$ .

Si ha, dal caso  $m = 1$ ,

$$\begin{aligned} u(t) &= g_1(t)u_1 + o(g_1(t)), \\ x(t) &= g_1(t)x_1 + o(g_1(t)), \\ x'(t) &= o(g_1(t)) \end{aligned}$$

con

$$Ax_1 + u_1 = 0.$$

Ponendo

$$\begin{aligned} \phi(t) &:= x(t) - g_1(t)x_1, \\ g_1'(t)x_1 + \phi'(t) &= x'(t) = A(g_1(t)x_1 + \phi(t)) + u(t) \end{aligned}$$

da cui

$$\phi'(t) = A\phi(t) + g_1(t)Ax_1 + u(t) - g_1'(t)x_1.$$

Si ha:

$$g_1(t)Ax_1 + u(t) - g_1'(t)x_1 = g_1(t)Ax_1 + g_1(t)u_1 + \sum_{i=2}^{m+1} g_i(t)u_i + o(g_{m+1}(t)) - \sum_{j=2}^{m+1} c_{1j}g_j(t)x_1 + o(g_{m+1})$$

uguale a

$$\sum_{i=2}^{m+1} g_i(t)(u_i - c_{1i}x_1) + o(g_{m+1}(t)).$$

Allora, per l'ipotesi induttiva,

$$\phi(t) = \sum_{i=2}^{m+1} g_i(t)\phi_i + o(g_{m+1}(t))$$

e

$$\phi'(t) = \sum_{i=3}^{m+1} g_i(t)\phi'_i + o(g_{m+1}(t))$$

( $\phi'(t) = o(g_2)(t)$  se  $m = 1$ ).

Segue:

$$x(t) = g_1(t)x_1 + u(t) = g_1(t)x_1 + \sum_{i=2}^m g_i(t)u_i + o(g_{m+1})$$

e

$$x'(t) = g'_1(t)x_1 + \sum_{i=3}^m g_i(t)u'_i + o(g_{m+1}(t)) = \sum_{j=2}^{m+1} c_{1j}g_j(t)x_1 + \sum_{i=1}^3 g_i(t)u'_i + o(g_{m+1}(t)).$$

Il risultato è provato. □

## 4.2 Calcolo dei coefficienti dello sviluppo asintotico

A questo punto illustriamo delle formule per calcolare gli  $x_i$ .

Notiamo che, per  $m = 1$ , vale

$$x'(t) = o(g_1)$$

e, per  $m \geq 2$ ,

$$x'(t) = \sum_{i=2}^m g'_i(t)x_i + o(g_m).$$

Da

$$x'(t) = Ax(t) + u(t)$$

segue

$$\sum_{i=1}^{m-1} g'_i(t)x_i + o(g_m) = A\left(\sum_{i=1}^m g_i(t)x_i\right) + \sum_{i=1}^m g_i(t)f_i + o(g_m)$$

$$\sum_{i=1}^{m-1} g'_i(t)x_i = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_{ij}g_j(t)x_i + o(g_m) = \sum_{j=2}^m g_j(t)\left(\sum_{i=1}^{j-1} c_{ij}x_i\right) + o(g_m).$$

Deve dunque essere :

$$\begin{cases} o = Ax_1 + u_1 \\ \sum_{i=1}^{j-1} c_{ij}x_i = Ax_j + u_j \end{cases}$$

con  $j = 2, \dots, m$ .

Quindi gli  $x_j$  si possono trovare ricorsivamente.

Noti  $x_1, \dots, x_{j-1}$

$$x_j = A^{-1}\left(\sum_{i=1}^{j-1} c_{ij}x_i - u_j\right).$$

In generale si vede che:

$$x_j = \sum_{i=1}^j T_{ji}u_i$$

per  $j = 1, \dots, m$  con  $T_{ji}$  lineare.

$g_1, \dots, g_m$  possono essere ad esempio:

$$t^a \ln(t), t^a, t^{a-1} \ln(t), t^{a-1}, \dots, t^{a-k} \ln(t), t^{a-k} (a \in R)$$

### 4.3 Determinazione numerica dello sviluppo asintotico

Tramite il seguente procedimento, in un caso particolare, è possibile ricostruire lo sviluppo asintotico della funzione  $x(t)$  sulla base della conoscenza di un numero finito di valori assunti da tale funzione e delle funzioni  $g_i(t)$  che costruiscono tale sviluppo. Questo a meno di un errore dipendente dalle particolari soluzioni utilizzate.

Sia

$$x(t) = \sum_{j=1}^m g_j(t)x_j + o(g_m)(t \rightarrow \infty)$$

#### 4.3. DETERMINAZIONE NUMERICA DELLO SVILUPPO ASINTOTICO 27

Supponiamo che:

- $g_1 = g$  sia continua,
- $g_1(t) \neq 0 \forall t \geq 0$
- $g_j(t) = t^{1-j}g(t)$ , per  $j = 1, \dots, n$ .

Allora

$$x(t) = g(t)x_1 + g(t)t^{-1}x_2 + \dots + g(t)t^{1-n}x_m + g(t)t^{1-m}\epsilon(t)$$

con  $\epsilon(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ .

Voglio determinare  $x_1, \dots, x_m$ .

Sia  $\tau > 0$ .

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} g(\tau)\tilde{x}_1 + \dots + g(\tau)\tau^{1-m}\tilde{x}_m = x(\tau) \\ g(2\tau)\tilde{x}_1 + \dots + g(2\tau)(2\tau)^{1-m}\tilde{x}_m = x(2\tau) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ g(m\tau)\tilde{x}_1 + \dots + g(m\tau)(m\tau)^{1-m}\tilde{x}_m = x(m\tau) \end{cases}$$

Nelle incognite  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$ . Questo sistema è univocamente risolvibile. Infatti:

$$\begin{aligned} & \det \begin{bmatrix} g(\tau) & \dots & \dots & g(\tau)\tau^{1-m} \\ g(2\tau) & \dots & \dots & g(2\tau)(2\tau)^{1-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g(m\tau) & \dots & \dots & g(m\tau)(m\tau)^{1-m} \end{bmatrix} = \\ & = g(\tau) \dots g(m\tau) * \det \begin{bmatrix} 1 & \tau^{-1} & \dots & \dots & \tau^{1-m} \\ 1 & (2\tau)^{-1} & \dots & \dots & (2\tau)^{1-m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (m\tau)^{-1} & \dots & \dots & (m\tau)^{1-m} \end{bmatrix} = \\ & = g(\tau) \dots g(m\tau)\tau^{-1} \dots \tau^{1-m} * \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & (\frac{1}{2}) & \dots & \dots & (\frac{1}{2})^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (\frac{1}{m}) & \dots & \dots & (\frac{1}{m})^{m-1} \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

L'ultimo determinante è diverso da zero in quanto determinante di Vandermonde, quindi il sistema ha un'unica soluzione  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$  dipendente da  $\tau$

Ora c'è da verificare che  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m)$  tende a  $(x_1, \dots, x_m)$  per  $\tau \rightarrow (\infty)$ .

Infatti, per  $t = \tau, 2\tau, \dots, m\tau$ , si ha

$$\begin{cases} x(\tau) = g(\tau)x_1 + g(\tau)\tau^{-1}x_2 + \dots + g(\tau)\tau^{1-m}x_m + g(\tau)\tau^{1-m}\epsilon(\tau) \\ \dots\dots\dots \\ x(m\tau) = g(m\tau)x_1 + g(m\tau)(m\tau)^{-1}x_2 + \dots + g(m\tau)(m\tau)^{1-m}x_m + g(m\tau)(m\tau)^{1-m}\epsilon(m\tau) \end{cases}$$

da cui, per differenza,

$$\begin{cases} g(\tau)(x_1 - \tilde{x}_1) + \dots + g(\tau)\tau^{1-m}(x_m - \tilde{x}_m) = -g(\tau)\tau^{1-m}\epsilon(\tau) \\ g(2\tau)(x_1 - \tilde{x}_1) + \dots + g(2\tau)(2\tau)^{1-m}(x_m - \tilde{x}_m) = -g(2\tau)(2\tau)^{1-m}\epsilon(2\tau) \\ \dots \\ g(m\tau)(x_1 - \tilde{x}_1) + \dots + g(m\tau)(m\tau)^{1-m}(x_m - \tilde{x}_m) = -g(m\tau)(m\tau)^{1-m}\epsilon(m\tau) \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per  $g(\tau)^{-1}\tau^{m-1}$ , la seconda per  $g(2\tau)^{-1}(2\tau)^{m-1}$  e così via fino a l'ultima otteniamo:

$$\begin{cases} \tau^{m-1}(x_1 - \tilde{x}_1) + \tau^{m-2}(x_2 - \tilde{x}_2) + \dots + x_m - \tilde{x}_m = -\epsilon(\tau) \\ (2\tau)^{m-1}(x_1 - \tilde{x}_1) + (2\tau)^{m-2}(x_2 - \tilde{x}_2) + \dots + x_m - \tilde{x}_m = -\epsilon(2\tau) \\ \dots \\ (m\tau)^{m-1}(x_1 - \tilde{x}_1) + (m\tau)^{m-2}(x_2 - \tilde{x}_2) + \dots + x_m - \tilde{x}_m = -\epsilon(m\tau) \end{cases}$$

Poniamo  $\psi_1 = \tau^{m-1}(x_1 - \tilde{x}_1)$ ,  $\psi_2 = \tau^{m-2}(x_2 - \tilde{x}_2)$  e così via fino a  $\psi_m = x_m - \tilde{x}_m$ . Allora:

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m = -\epsilon(\tau) \\ 2^{m-1}\psi_1 + 2^{m-2}\psi_2 + \dots + \psi_m = -\epsilon(2\tau) \\ \dots\dots\dots \\ m^{m-1}\psi_1 + m^{m-2}\psi_2 + \dots + \psi_m = -\epsilon(m\tau) \end{cases}$$

Segue

$$\psi_i = L_i(-\epsilon(\tau), \dots, \epsilon(m\tau))$$

dove

$$L_i : (R^n)^m \rightarrow R^n$$

lineare, indipendente da  $\tau$ , da cui:

$$x_i - \tilde{x}_i = \tau^{i-m} * L_i(-\epsilon(\tau), \dots, -\epsilon(m\tau))$$

e

$$\|x_i - \tilde{x}_i\| \leq \text{cost} * \tau^{i-m} * (\|-\epsilon(\tau)\| + \dots + \|-\epsilon(m\tau)\|)$$

per  $\tau \rightarrow \infty$ .

# Capitolo 5

## Simulazione in MatLab

In questa ultima parte del progetto di tesi simuleremo in Matlab il volo di un OAV ad alte prestazioni che, posto in una condizione di equilibrio iniziale, corrispondente al volo livellato, a partire da un certo istante  $t_0$ , risulta soggetto ad una anomalia dei parametri di volo espressa in termini di variazione della spinta, del fattore di carico e dell'angolo di rollio con conseguente variazione della velocità, dell'angolo di salita e della direzione rispetto al suolo. Il modello matematico è quello del sistema linearizzato nel capitolo 2:

$$x'_L(t) = \tilde{A}x_L(t) + B\tilde{u}_L(t).$$

Imporremo in ingresso una funzione  $\tilde{u}_L(t)$  che simuli l'andamento delle prime 3 variazioni ottenendo in uscita i valori delle variazioni  $x_L(t)$ , conseguenti all'applicazione di  $\tilde{u}_L(t)$ .

Imporremo una funzione del tipo:

$$\tilde{u}_L(t) = \begin{cases} T(t) = -500t^0 - 200t^{-1} + 460t^{-2} - 380t^{-3} & [N] \\ n(t) = -1t^0 + 3t^{-1} + 2t^{-2} + 1t^{-3} & [ ] , \\ \phi(t) = +2t^0 + 2t^{-1} + 3t^{-2} + 1t^{-3} & [o] \end{cases}$$

che, ricollegandoci a teoria e notazione espressa nel capitolo precedente, risulta composta da 4 funzioni  $g_1 = t^0$ ,  $g_2 = t^{-1}$ ,  $g_3 = t^{-2}$ ,  $g_4 = t^{-3}$  e dai coefficienti  $u_1, u_2, u_3, u_4$  raggruppati nella matrice

$$U = \begin{bmatrix} -500 & -200 & 460 & -380 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Interpreteremo  $T(t), n(t), \phi(t)$  come variazioni che, dopo un certo transitorio, si stabilizzeranno ad un valore costante, corrispondente al primo coefficiente dello sviluppo asintotico. In questo caso, faremo implicitamente l'ipotesi che la funzione  $\tilde{u}_L(t)$  coincida con il suo sviluppo asintotico.

Una volta effettuata la simulazione disporremo dei valori che assume lo stato  $x(t)$  in un intervallo di tempo corrispondente alla durata della simulazione. Disponendo di questi valori, applicheremo la teoria esposta nel capitolo 4 e calcoleremo i coefficienti dello sviluppo asintotico di  $x_L(t)$ , infine, tramite questi, quelli dell'ingresso  $\tilde{u}_L(t)$  riconducendoci di conseguenza al suo sviluppo asintotico.

## 5.1 Scrittura del programma

### 5.1.1 Struttura della simulazione

Dichiarate le variabili preliminari in un M-File, costruiamo in Simulink lo schema a blocchi del sistema e, tramite questo, effettueremo la simulazione vera e propria, poi, grazie ad i valori dello stato, campionati dalla simulazione, scriveremo un altro M-File, conclusivo, che elabori tali dati.

### 5.1.2 M-File preliminare

Dichiariamo in un M-File preliminare i valori dei parametri propri del velivolo e le costanti fisiche: densità, massa, superficie in pianta, coefficiente di resistenza, accelerazione di gravità, parametri  $D_0$  e  $D_1$

```
ro=1.2251;
m=12515;
S=37.16;
Cd0=0.02;
k=0.1;
g=9.81;
D0=1/2*ro*S*Cd0;
D1=2*k*m^2/(ro*S);
```

i valori corrispondenti alla condizione di equilibrio di volo livellato, con velocità di 200  $m/s$



```
V0=200;
gamma0=0;
khi0=0;
phi0=0;
n0=1;
```

le matrici A e B,

```
A=[-(2*D0*V0)/m+(2*D1*n0^2)/(m*V0^3) -g*cos(gamma0) 0;...
    (g/V0^2)*(-n0*cos(phi0)+cos(gamma0)) (g/V0)*sin(gamma0) 0;...
    (-g*n0*sin(phi0))/(V0^2*cos(gamma0)) ...
    (g/V0)*n0*(sin(gamma0)*sin(phi0)/cos(gamma0)^2) 0];

B=[1/m (-2*D1*n0)/(m*V0^2) 0; 0 (g/V0)*cos(phi0) ...
    (-g/V0)*n0*sin(phi0); 0 (g/V0)*(sin(phi0)/cos(gamma0)) ...
    (g/V0)*n0*(cos(phi0)/cos(gamma0))];
```

lo stabilizzatore K, calcolato tramite il comando place, imponendo autovalori fortemente stabili, in -10,-20,-30.

```
K=place(A,B,[-10,-20,-30]);
```

matrici ausiliarie,

```
D=zeros(3);
C=eye(3);
```

una matrice U le cui righe incorporino i coefficienti dello sviluppo asintotico del fault ipotizzato.

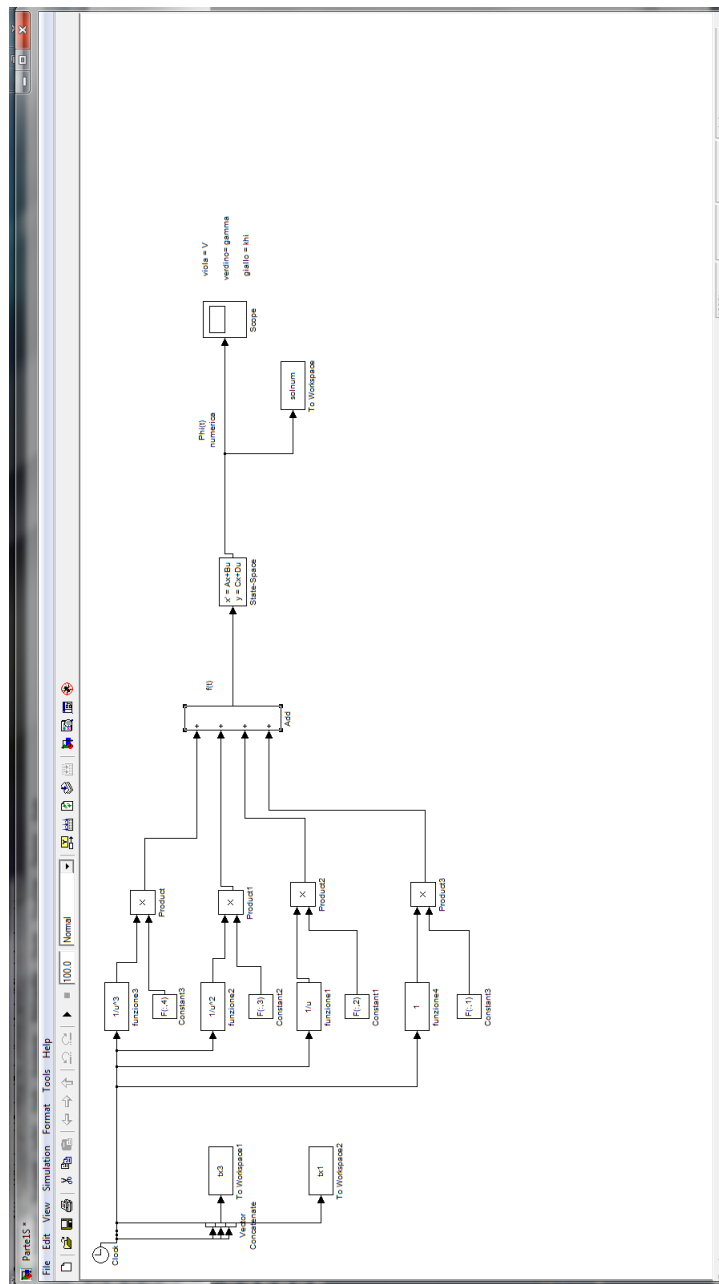
```
U=[-500 -200 460 -380;-1 3 2 1;2 2 3 1];
```

Paragoneremo in seguito questi vettori con quelli che ricaveremo analiticamente tramite la teoria.

```
u1ipo=F(:,1);
u2ipo=F(:,2);
u3ipo=F(:,3);
u4ipo=F(:,4);
```

### 5.1.3 Simulink

Costruiamo in Simulink il sistema vero e proprio, inseriamo al blocchetto principale le funzioni che compongono l'ingresso, ovvero il fault, ottenendo in uscita l'andamento nel tempo delle variazioni dello stato.



### 5.1.4 M-File conclusivo

Nell'M-File conclusivo ricaviamo i coefficienti dello sviluppo asintotico di  $x(t)$  tramite la conoscenza degli stati del sistema campionati in Simulink, questo utilizzando le due metodologie di calcolo illustrate nella parte finale del capitolo 4.

Scriviamo e risolviamo il sistema,

```

Coeff=[1 tx1(2000)^(-1) tx1(2000)^(-2) tx1(2000)^(-3)...
      ;1 tx1(4000)^(-1) tx1(4000)^(-2) tx1(4000)^(-3);...
      1 tx1(6000)^(-1) tx1(6000)^(-2) tx1(6000)^(-2);...
      1 tx1(2050)^(-1) tx1(2050)^(-2) tx1(2050)^(-3)];

Noti1=[solnum(2000); solnum(4000); solnum(6000);...
      solnum(2050)];
X=Coeff\Noti1;

Noti2=[solnum(2000,2); solnum(4000,2); solnum(6000,2);...
      solnum(2050,2)];
Y=Coeff\Noti2;

Noti3=[solnum(2000,3); solnum(4000,3); solnum(6000,3);...
      solnum(2050,3)];
Z=Coeff\Noti3;

```

inseriamo le soluzioni in una matrice,

```

L=zeros(3,3);
L(1,:)=X';
L(2,:)=Y';
L(3,:)=Z';

```

rappresentano i coefficienti dello sviluppo asintotico dello stato.

```

x1t=L(:,1);
x2t=L(:,2);
x3t=L(:,3);
x4t=L(:,4);

```

Infine, una volta calcolati analiticamente i coefficienti dello sviluppo asintotico del fault tramite i valori dei coefficienti dello sviluppo asintotico dello stato

```

f1=- (A-B*K) *x1t;
f2=2*x1t- (A-B*K) *x2t;
f3=2*x1t+x2t- (A-B*K) *x3t;
f4=2*x1t+x2t+x3t- (A-B*K) *x4t;

Ft=zeros (3,4);
Ft (:,1)=f1;
Ft (:,2)=f2;
Ft (:,3)=f3;
Ft (:,4)=f4;

Uipotesi=U
Uteoria=B\Ft

```

li confrontiamo con quelli ipotizzati, confermandone l'effettiva uguaglianza a meno di un fattore di errore trascurabile in rapporto al peso di quel determinato coefficiente. Infatti si nota che il fattore di errore aumenta al diminuire dell'esponente di  $t^n$  ma allo stesso modo diminuisce il peso di questo fattore di errore nell'analisi dei coefficienti.

```

Uipotesi =
   -500   -200    460   -380
     -1     3     2     1
     2     2     3     1

Uteoria =
  -500.0197  -294.9825   273.7479  -75.3770
   -0.9999    2.8937    2.3572    0.1232
    2.0001    2.1272    3.4219    0.2660

```

Ripetendo la prova per diversi valori dei tempi nella ricerca dei coefficienti dello sviluppo asintotico di  $x(t)$  scopriamo che, in questo caso particolare, l'errore del primo coefficiente dello sviluppo asintotico di  $\tilde{u}_L(t)$  si attesta ad un valore inferiore all'1 % per tempi successivi a  $t = 10$  secondi. Questo si traduce nella possibilità di determinare il valore a cui tende l'anomalia con un campionamento di 10 secondi.

# Capitolo 6

## Conclusioni

In conclusione, nel presente lavoro, viene fornita una metodologia che può essere applicata a qualsiasi velivolo ad alte prestazioni. Una volta scelta la famiglia di funzioni che meglio schematizzano la tipologia di fault di cui si vuole individuare la presenza, si possono effettuare delle simulazioni per stabilire quanti secondi di campionamento sono necessari per determinare lo sviluppo asintotico di tale famiglia di funzioni con un errore che possa essere ritenuto accettabile. I dati raccolti potranno poi essere utilizzati per degli studi più raffinati nell'ambito della fault detection.