

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

# Un approccio alla Matematica nell'antica Cina

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Salvatore Coen

Presentata da:  
Samantha Galli

Correlatore:  
Prof. Paolo Freguglia

II Sessione  
Anno Accademico 2011-2012



*Ai miei genitori  
e a mio fratello Loris*



# Introduzione

Scopo della seguente tesi é quello di illustrare a grandi linee alcune conoscenze dell'antica matematica cinese, riportando però anche alcune informazioni sull'introduzione della matematica occidentale in Cina nel XVII secolo. Per inquadrare l'argomento viene proposto un rapido excursus sulla storia della Cina dal 2000 a.C. circa. In realtà, le testimonianze della cultura e dell'insegnamento della matematica in Cina non sono molte. Le piú antiche che oggi sono note risalgono al II secolo a.C. Si tratta del libro Suanshu shu trovato in una tomba durante scavi archeologici del 1984 nella provincia di Hubei. Nel VII secolo d.C. fu stesa una raccolta delle conoscenze matematiche cinesi a cura di Li Chunfeng che oscuró i testi precedenti e che si proponeva come sintesi completa delle conoscenze nel campo. Tale raccolta é nota come *I dieci canoni*.

Il testo piú importante di questa raccolta é *Nove capitoli* ed é in particolare dell'ottavo capitolo di quest'ultima opera, noto come *fangcheng*, di cui mi occupo nel secondo capitolo di questa tesi. Si tratta di un metodo sostanzialmente destinato alla risoluzione di sistemi lineari. É assolutamente necessario osservare che il metodo non é mai illustrato come tale, ma attraverso problemi concreti quali 8.1, 8.2,... Nel secondo capitolo vengono quindi illustrati alcuni dei problemi posti confrontando la soluzione "cinese" con quella ottenuta con i metodi attualmente usati.

Nel campo della matematica svolse un ruolo importante padre Matteo Ricci (1552-1633), nel passare (e controllare) le conoscenze matematiche (oltre che

astronomiche, cartografiche, letterarie e, naturalmente soprattutto religiose) occidentali in Cina e viceversa. Saranno gli *Elementi* di Euclide nella traduzione in latino di Cristoforo Clavio (maestro di Ricci) uno dei primi libri che Ricci porta in Cina. Si crea così un gruppo di matematici cinesi capaci di comprendere la matematica occidentale e dediti a trasferirla nel loro paese. Tra questi ricordiamo Xu Guangqi (1562-1633) e Li Zhizao (1565-1610). La differenza fondamentale tra le conoscenze matematiche occidentali e quelle cinesi era da trovarsi più che nei singoli risultati nel fatto che in Cina mancava la nozione stessa di "dimostrazione". Alcuni matematici cinesi furono in grado di fondere parzialmente alcuni risultati degli *Elementi* di Euclide con la matematica classica cinese per mostrare come anche questa potesse essere feconda di risultati nuovi validamente dimostrati. Tutto ciò viene trattato nel terzo capitolo.

In conclusione le nostre conoscenze sulla matematica cinese non sono molto sviluppate. È certo da notare l'originalità nei procedimenti che gli antichi cinesi erano stati in grado di mettere in opera, ma senza che -per quanto ne sappiamo ad oggi- siano mai stati ottenuti risultati, nell'ambito del sistema logico deduttivo, di grosso spessore. In ogni caso, a provare la concretezza e l'interesse della matematica sviluppata in Cina è da ricordare l'uso abbastanza fluido che si fece dei numeri (interi) negativi (già nel I sec. a.C.); molti storici pensano che tale concetto si sia effettivamente sviluppato per la prima volta in Cina.

L'archeologia troverà certo in Cina delle possibilità di sviluppo eccezionali data la straordinaria quantità di siti ancora da studiare (o scavare). È da sperarsi che questi studi possano aiutarci a raggiungere una conoscenza più ampia e più approfondita, dell'attuale, della matematica in Cina ai tempi antichi.

Concludo con una breve appendice sulle unità di misura (di lunghezza, di

volume e di peso) citate nella tesi.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Inquadramento storico</b>	<b>1</b>
1.1 Cina . . . . .	3
1.2 I Dieci Canoni di matematica . . . . .	12
1.3 Nove capitoli . . . . .	15
1.4 Suanshu shu, ritrovato nel 1984 . . . . .	18
<b>2 Fangcheng: Capitolo 8 dei <i>Nove Capitoli</i></b>	<b>21</b>
2.1 La procedura fangcheng . . . . .	22
2.2 La procedura della diminuzione e dell'aumento . . . . .	25
2.3 La procedura del positivo e del negativo . . . . .	27
2.4 Metodo d'eliminazione per moltiplicazione reciproca . . . . .	30
<b>3 La matematica occidentale in Cina nel XVII secolo</b>	<b>33</b>
<b>A Unitá di misura</b>	<b>41</b>
A.1 Unitá di lunghezza . . . . .	41
A.2 Unitá di volume . . . . .	41
A.3 Unitá di peso . . . . .	41
<b>Bibliografia</b>	<b>43</b>



# Capitolo 1

## Inquadramento storico

		inizio	fine
Dinastia Xia		2100 a.C.	1600 a.C.
Dinastia Shang		1600 a.C.	1046 a.C.
Dinastia Zhou		1046 a.C.	256 a.C.
	Per. delle primavere e degli autunni	770 a.C.	454 a.C.
	Per. degli Stati Combattenti	453 a.C.	221 a.C.
Dinastia Qin		221 a.C.	206 d.C.
Dinastia Han		206 d.C.	220 d.C.
	Han Occidentali	206 a.C.	9 d.C.
	Han Orientali	25 d.C.	220 a.C.
Periodo dei Tre Regni		220 d.C.	280 d.C.
Dinastia Jin		265 d.C.	420 d.C.
	Jin Occidentali	265 d.C.	316 d.C.
	Jin Orientali	317 d.C.	420 d.C.
Periodo dei Sedici Regni		304 d.C.	439 d.C.
Dinastia Nord e del Sud		420 d.C.	581 d.C.
Dinastia Sui		581 d.C.	618 d.C.
Dinastia Tang		618 d.C.	907 d.C.

---

		inizio	fine
Periodo delle Cinque Dinastie		907 d.C.	960 d.C.
Dinastia Song		960 d.C.	1279 d.C.
	Song Settentrionali	960 d.C.	1127 d.C.
	Song Meridionali	1127 d.C.	1279 d.C.
Dinastia Yuan		1279 d.C.	1368 d.C.
Dinastia Ming		1368 d.C.	1644 d.C.
Dinastia Qing		1644 d.C.	1912 d.C.
Repubblica di Cina		1912 d.C.	1949 d.C.
Repubblica Popolare Cinese		1949 d.C.	

## 1.1 Cina



Figura 1

La storia cinese si é sviluppata, nel corso dei millenni, in un territorio all'estremitá orientale del continente eurasiatico. Mentre a est e a sud la Cina si affaccia sul mare, a nord il deserto di Gobi, a ovest e a sudovest il massiccio tibetano e il bacino del Fiume Rosso la separano dal resto della massa continentale, conferendole unitá. Nel corso dei secoli altre regioni geografiche si sono aggiunte al nucleo originario: il Tibet, la Manciuria, parte del Turchestan e della Mongolia, l'isola di Taiwan.

La civiltá cinese ha origine nell'era del Neolitico (circa 7000-1500 a.C.), quando piccoli insediamenti si svilupparono in tutte le regioni della Cina, in par-

ticolare lungo il Fiume Giallo, nel Nordovest; la prima civiltá neolitica é chiamata 'civiltá di Yangshao'.

La dinastia Xia (2100-1600 a.C.) fu la prima dinastia ereditaria cinese; fu fondata quando inizió lo sviluppo delle prime forme statali in un paese, quello cinese, basato sull'agricoltura. Il primo sovrano fu Yu, ricordato per le opere di regolazione dell'acqua. Si susseguirono diciassette sovrani, l'ultimo Jie, fu detronizzato da Cheng Tang, capo del popolo Shang sottomesso ai Xia, che diede inizio ad una nuova dinastia.

A causa di una tradizione soprattutto orale, questa dinastia fu considerata da alcuni, solo un mito; importanti ritrovamenti intorno agli anni Cinquanta dimostrarono però il contrario.

Le prime notizie di una storia cinese scritta sono collegate alla dinastia Shang (1600-1046 a.C.), detta anche dinastia Yin (che era il nome della capitale). Gli ossi piú antichi in cui si possono trovare caratteri cinesi risalgono infatti al 1500 a.C.

Questa dinastia fu fondata da un comandante in ribellione, Cheng Tang, che depose il sovrano precedente, creando un governo piú umano. La forma di governo era teocratica ed il trono era ereditario.

A nord-ovest del regno degli Shang viveva un altro popolo, gli Zhou; il principe di quest'ultimo, Wuwang, che portó a termine l'opera del padre Wenwang, sconfisse gli Shang nella battaglia di Muye (1046 a.C.), conquistandone i territori e formando la dinastia Zhou. Questa ebbe la piú lunga durata fra le dinastie cinesi (1046-256 a.C.). Con la dinastia degli Zhou si svilupparono cultura, letteratura e filosofia cinesi, con le personalitá di Confucio e Laozi. Nei confronti del popolo Shang venne adottata una politica di rigida separazione; gli Shang vennero deportati in massa e sparsi nelle varie localitá del regno, dove furono separati da mura dagli Zhou, per evitare delle ribellioni di massa.

Il sovrano Zhou era il sommo sacerdote del regno e per sottolineare la centralitá del re rispetto al suo dominio la capitale fu spostata al centro del regno e sará chiamata Luoyi, in seguito rinominata Luoyang.

Il periodo che seguì allo spostamento della capitale fu diviso in due, e vide la fine degli Zhou occidentali. Il primo il "Periodo delle primavere e degli autunni" (770-454 a.C.) terminò quando il regno si divise in tre stati indipendenti (Han, Wei e Zhao). In questo periodo ci furono guerre interne fra vari capi militari locali, che volevano affermarsi. L'invasione di popolazioni straniere, provenienti da nord-ovest, aggravò la situazione. Iniziò così la seconda dinastia degli Zhou, quelli orientali, divisa in 7 stati principali, in lotta fra loro: Han, Chao, Wei, Yan, Qin, Qi, Chu; questi stati servivano solo formalmente la dinastia dominante.

In questo periodo in risposta a molti cambiamenti politici, nascono le Cento scuole di Pensiero e molti importanti movimenti come il confucianesimo, il taoismo,...

Il secondo il "Periodo degli Stati Combattenti" (o dei Regni Combattenti) (453-221 a.C.) vide numerosi stati (Han, Wei, Chao, Qi, Qin, Yan e Chu) scontrarsi fra loro. Si impose lo stato di Qin, fondando quindi la Dinastia Qin (221-206 a.C.). L'unificazione della Cina fu dovuta a Li Si (che sarà il primo imperatore cinese), che si rinominò Qin Shi Huang Di; i termini Huang e Di erano usati per indicare gli imperatori che avevano dato origine ad una civiltà. Li Si si poneva sul loro stesso piano, sottolineando il fatto che non aveva bisogno della tradizione per legittimare il suo potere. L'imperatore unificò le monete e le scritture per favorire la comunicazione tra le diverse regioni. Rinforzò le difese settentrionali del paese, costruendo la Grande Muraglia, per proteggere il territorio dalle incursioni dei barbari Hsiungnu. Per evitare che qualcuno dubitasse dell'autorità del sovrano invocando la tradizione, tutti gli antichi testi furono bruciati, ad eccezioni di quelli scientifici e tecnici (cioè quelli utili per necessità pratiche).

La dinastia non sopravvisse alla morte del primo imperatore nel 210 a.C.; infatti l'erede al trono fu, probabilmente, eliminato per timore delle sue qualità militari e salì al trono Ershi Huangdi. L'erede al trono eliminato aveva però dei seguaci negli ambienti militari; la rivolta covava ovunque. L'occasione fu un ritardo sulla tabella di marcia verso la frontiera di alcuni soldati, che

implicava loro la pena di morte, che portó loro ad una ribellione guidata da Chen She e Wu Guang. Dopo un periodo di confusione emersero due nuovi gruppi, uno guidato da Xiang Yu, esponente dei Chu, e l'altro da Liu Bang, sottoufficiale di origine contadina.

Nel 206 a.C. dopo rivolte popolari in tutto l'impero Xiang Yu scoffisse l'esercito imperiale e dopo uno scontro tra i due capi ribelli il trono passó a Liu Bang, che inizió la dinastia Han (206 a.C.-220 d.C.), con il nome di GaoZu. Intanto, nella frontiera settentrionale del paese, il popolo Xiongnu stava aumentando il suo potere, minacciando la pace dell'Impero. Per mettere fine a questo stato di cose, inizialmente si ricorse alle armi, ma visti gli insuccessi si stipuló il primo trattato internazionale della storia cinese. Con esso gli Xiongnu s'impegnavano a mettere fine alle loro scorrerie e i cinesi gli avrebbero riforniti periodicamente di viveri e stoffe. Questo trattato non sará rispettato per molto. Gli scontri ripresero ben presto, ma grazie all'uso della cavalleria e di strategie ben preparate l'esercito cinese ebbe la meglio. In questo periodo, altre spedizioni avevano conquistato la Manciuria meridionale e la Corea del Nord.

Dal 9 d.C. al 25 d.C. inizió un periodo di lotte interne nelle regioni dello Shandong e del Hubei. I ribelli del Hubei, guidati da Liu Xin, presero il nome di 'Armata di Lulin', mentre quelli dello Shandong saranno detti 'sovraccigli rossi'. Sconfitto il potere, tra le due fazioni, inizió una terribile lotta, che sará vinta da Liu, che salirá al trono.

Durante questa dinastia il Confucianesimo era la filosofia ufficiale dello stato e furono migliorati i commerci e l'agricoltura. Si puó dividere questo periodo in due parti: il primo detto Dinastia degli Han Occidentali o Anteriori (206 a.C.-9 d.C.) e il secondo detto Dinastia degli Han Orientali o Posteriori (9 d.C.-220 d.C.).

Durante questo periodo ci furono grandi progressi intellettuali, letterari, artistici e scientifici. Inoltre fu perfezionata la scoperta della carta, che sostituí la seta e il bambú.

Verso il 180 d.C. la Cina precipitava nuovamente in una crisi economica. In

questa situazione un gruppo di ribelli i 'turbanti gialli' attaccó l'imperatore. L'esercito imperiale ebbe la meglio, ma questo attacco improvviso scardinó la dinastia degli Han posteriori.

Dopo questa dinastia inizió il periodo dei Tre Regni (220-280 d.C.). La Cina era tornata ad una divisione politica: Cao Cao, che diede vita alla Dinastia Wei a occidente del paese; Liu Bei, che diede vita alla Dinastia Shu Han a sud del paese; Sun Quan, che diede vita alla Dinastia Wu nei territori restanti. Nel 263 d.C. lo stato degli Shu Han veniva assorbito da quello dei Wei.

Questo periodo fu seguito dalla dinastia Jin, che si puó dividere in: dinastia Jin occidentale (265-316 d.C.), che unificó la Cina, e la dinastia Jin orientale (317-420 d.C.), che governó sul sud della Cina.

Nel 280 d.C., una nuova famiglia, i Jin conquistarono il regno Wu, e riunificarono l'antico impero Han. Questa riunificazione non duró molto a causa di popoli nomadi del nord, infatti nel 316 d.C., lo stato Jin scomparve nel nord della Cina, e si trovó diviso in sedici regni. Per questo il periodo dal 304 al 439 d.C. si chiamerá "Periodo dei Sedici regni". Questo fu un momento di caos e frammentazione politica.

I Tuoba, un popolo di etnia non cinese, unificarono il nord della Cina, e proclamarono nel 440 d.C. la dinastia Wei. La Cina risultó quindi divisa in due stati, quello del Nord (Wei del Nord, Wei dell'Est, Wei dell'Ovest, Qi del Nord e Zhou del Nord) e quello del Sud (dinastia Song, Qi, Liang e Chen).

La Dinastia Sui (581-618 d.C.) fu molto importante per il consolidamento della Cina come unica nazione, che avvenne nel 589 d.C. In questo periodo iniziano riforme burocratiche e funzionali per la gestione del territorio: i funzionari imperiali vengono nominati solo in seguito ad una serie di esami. Importante in questo periodo fu lo scavo del Canale Imperiale lungo piú di 1.500 chilometri. Tramite questa via d'acqua artificiale, e alcune naturali, diventa facile trasportare materie prime e uomini nelle varie zone dell'impero.

Nel 590 d.C. iniziano alcune rivolte. Nel 618 d.C. l'imperatore viene ucciso dai ricchi agricoltori, che inizialmente l'avevano appoggiato, ed inizió la

dinastia Tang (618-907 d.C.); Li Yuan Gaozu, fondatore di questa dinastia, inizialmente mette sul trono un nipote dell'imperatore Yang Guang, ma presto indossò lui stesso la corona. Questo periodo può essere diviso in tre parti: l'ascesa al potere e il consolidamento; la rivolta di Anshi; il declino.

Nel 626 d.C. Li Yuan Gaozu abdica in favore del figlio, Taizong Li Shimin; quest'ultimo scoperta una congiura contro di lui da parte dei fratelli, fu 'costretto' ad ucciderli ottenendo così il potere. Riuscì, con non poche difficoltà, a fronteggiare l'invasione dei turchi, che erano quasi arrivati alla capitale cinese, pagando un riscatto. Il Confucianesimo riprese vigore, e tutti i candidati alle cariche pubbliche dovettero superare vari esami.

Iniziarono gli scambi culturali e commerciali della Cina, che dureranno per tutta la dinastia Tang.

Nel 705 d.C. la situazione precipita ed inizia un periodo pieno di incertezze e di ribellioni. Le donne, vicine ai monarchi, decidono spesso le sorti del governo. A corte la corruzione dilaga. Il declino è inevitabile nel 750 d.C., durante la battaglia sul fiume Talos, dove i turchi mettono in ginocchio l'armata cinese. Il condottiero An Lushan allestisce un'armata e si ribella al potere centrale (detta la Ribellione di An Lushan o Anshi), si proclama imperatore e fonda la dinastia dei Grandi Yan.

Nell'ultimo periodo di questa dinastia ci furono molte lotte per conquistare il potere e il susseguirsi di personaggi che si autoproclamavano imperatori. Il generale Zhu Wen pone fine a questa dinastia e conquista il potere uccidendo l'imperatore e mettendo al trono un imperatore-fantoccio chiamato Zhaoxuan. Nel 907 d.C. si proclama imperatore dando vita alla dinastia Liang Posteriori, la prima delle Cinque Dinastie.

Inizia così un periodo noto come "Periodo delle Cinque dinastie e dei dieci regni" o semplicemente delle "Cinque Dinastie", cioè la dinastia Liang Posteriore, dinastia Tang Posteriore, dinastia Jin Posteriore, dinastia Han Posteriore e dinastia Zhou Posteriore, che va dal 907 al 960 d.C. Queste si svilupparono tutte nel Nord della Cina. Nel sud si suppone ci fossero numerosi stati indipendenti, ma gli scarsi documenti non ci garantiscono una

certezza di ciò.

La dinastia Song regnó sulla Cina dal 960 al 1279 d.C. riportando l'unitá politica del regno; si puó dividere in due periodi: dal 960 al 1127 d.C. la dinastia dei Song Settentrionali e dal 1127 al 1279 d.C. la dinastia dei Song Meridionali. Durante tali dinastie si sviluppó il sistema commerciale, quello manifattiero e anche la stampa (a caratteri mobili), inventata durante la dinastia Tang, che diventó il mezzo per la diffusione delle idee. E con essa inventarono la prima cartamoneta della storia. Fiorirono le prime enciclopedie nei vari settori, fra cui anche quello matematico.

La dinastia Yuan regnó dal 1279 al 1368 d.C. Il primo imperatore fu Qubilai; con la riunificazione della Cina, iniziarono i commerci con le popolazioni europee. Durante questo periodo l'eccessiva circolazione di moneta (che provocó inflazione) e le inondazioni del fiume Giallo portarono l'agricoltura cinese a condizioni disastrose. Nel 1368 la dinastia finí, con la conquista di Pechino da parte dei 'copicapi rossi' e dell'imperatore Zhu Yuanzhang, fondatore della dinastia Ming (1368-1644 d.C.). Durante questa dinastia ci fu una rinascita culturale, molti libri furono stampati con caratteri mobili. E vista la necessitá di fronteggiare i Mongoli, fu costruito un potente esercito. Tra il 1405 e il 1433 l'ammiraglio Zheng He condusse sette spedizioni navali attraversando l'Oceano Indiano e l'arcipelago asiatico di sud-orientale.

In seguito ad instabilitá politiche che sconvolgevano la dinastia Ming, che portarono al suicidio dell'ultimo imperatore, si affermó la dinastia Qing o Ch'ing (1644-1912 d.C.), chiamata prima del 1636 d.C. dinastia Jin. Questa dinastia era formata dal popolo Manciú. Nel 1662 d.C. salí al trono l'imperatore Kangxi, all'etá di sette anni; difendere l'impero acquisito, non fu compito facile, ma Kangxi aiutato dalla nonna rafforzó l'impero e trattó con molti missionari Gesuiti, che vennero in Cina sperando di ottenere conversioni di massa. A metá del XIX secolo ci fu la rivolta dei Taiping nei confronti della dinastia Qing, che provocó un gran numero di morti. In questi secoli la Cina si rifiutava di intrattenere rapporti con le nazioni europee, che considerava incivili e barbare. Nel 1793 la Cina stabilí che, poiché non

aveva bisogno dei manufatti europei, accettava solo lingotti di argento in cambio dei prodotti cinesi quali la seta, il té e l'oppio. Per evitare questo deflusso di metalli preziosi Gran Bretagna e Francia cercarono di rendere la Cina dipendente dall'oppio. Quando nel 1838 i Qing cercarono di bandire il traffico dell'oppio, la Gran Bretagna dichiarò guerra alla Cina, iniziando la prima guerra dell'oppio, che mostrò la debolezza, tecnologica e in tattiche, dell'esercito cinese, che fu costretto ad arrendersi firmando il Trattato di Nanchino, che prevedeva un cospicuo pagamento per i danni di guerra e l'apertura di cinque porti al commercio occidentale. Questo fu un 'trattato ineguale' che portò la Cina ad una condizione semi-coloniale. Nel 1860 la coalizione anglo-francese sconfisse nuovamente i cinesi nella seconda guerra dell'oppio. Nel 1894 scoppiò la prima guerra cino-giapponese che portò al vero indebolimento di questa dinastia. La guerra si concluse con il trattato di Shimonoseki (anche questo ineguale) che concedeva l'indipendenza alla Corea e cedeva la Penisola di Liaodong, la Manciuria, Taiwan e le isole Pescadores al Giappone. Nel 1898 l'imperatore Guangxu tentò la riforma dei cento giorni, nei quali vennero approvate nuove leggi e vennero aboliti alcuni vecchi regolamenti. In questo periodo prese il potere l'imperatrice Cixi, che fino ad allora aveva operato nell'ombra. Si sviluppò una società segreta i 'Boxer' che volevano restaurare i Qing, questi provocarono numerose rivolte in tutto il paese. Nel 1901 in seguito all'assassinio dell'ambasciatore tedesco da parte dei Boxer, l'alleanza delle otto nazioni (Gran Bretagna, Francia, Germania, Austria-Ungheria, Italia, Russia, Giappone e Stati Uniti) entrò in Cina, e ne prese il controllo. Come ricompensa militare l'alleanza stilò un elenco che comprendeva varie richieste al governo Qing.

Nel 1911 la rivolta dell'esercito a Wuhan, seguita da altre in tutto il sud della Cina, portò alla proclamazione di indipendenza e della Repubblica di Cina, con Sun Yat-sen come presidente provvisorio. Numerose province si separarono dal controllo dei Qing; così il governo chiamò Yuan Shikai al comando dell'armata per sconfiggere i rivoluzionari. Quest'ultimo negoziando con Sun Yat-sen fu nominato presidente della repubblica.

Al termine della Rivoluzione Xinhai, nel 1912 si istaura la Repubblica della Cina, che nel 1945 sarà uno dei paesi fondatori dell'ONU.

La Cina partecipò nel 1917 al primo conflitto mondiale alleandosi con l'Intesa, non per immischiarsi degli affari europei, ma per approfittare, in caso di vittoria (come sarà) di chiedere l'annullamento dei trattati ineguali.

Nel luglio 1921 fu fondato a Shanghai il Partito comunista cinese. Chen Duxiu ne fu il primo segretario generale e Mao Tse Tung fu tra i fondatori.

Le guerre civili fra i nazionalisti del generale Chang Shai e i comunisti di Mao Tse Tung (1927-1937 d.C. e 1945-1949 d.C.) e l'invasione giapponese (1937-1945 d.C.) portarono sconvolgimenti nella Repubblica. I comunisti crearono un esercito ben organizzato chiamato l' 'Armata Rossa'. Nel 1935 questi iniziarono la 'lunga marcia' contro i giapponesi. Nel 1937 comunisti e nazionalisti firmavano un accordo che prevedeva una collaborazione contro i giapponesi. In realtà i due eserciti combattevano in fronti separati, ciascuno per conto proprio. Durante il secondo conflitto mondiale il Giappone era un alleato di Germania e Italia. L'apporto militare cinese agli Alleati non fu rilevante, se non per il fatto che impegnò parte dell'esercito giapponese in una guerra di posizione, impedendogli di spostarsi su altri fronti. La capitolazione del Giappone avvenne con i bombardamenti atomici di Hiroshima e Nagasaki, così ai comunisti e ai nazionalisti fu restituita la Manciuria.

Dopo il conflitto mondiale il governo degli Stati Uniti mandò in missione un generale, Marshall, incaricandolo di riportare la pacificazione in Cina fra nazionalisti e comunisti. Il generale formò il 'comitato dei tre' con il quale stipulò un progetto di accordo politico-militare, il quale non sarà mantenuto. Scoppieranno così guerre civili che terminarono nel 1949 d.C. quando Mao Tse-tung proclama la Repubblica Popolare Cinese, sostenendo di aver sostituito la Repubblica della Cina, che si ritirò sull'isola di Taiwan (isola di Formosa).

Tra il 1958 e il 1960 d.C. ci fu il Grande balzo in avanti, azione proposta da Mao Tse Tung, che collettivizzava le terre ed incoraggiava alla produzione di materiali industriali, come l'acciaio. Questo però ebbe esiti negativi, causan-

do una terribile carestia.

Nel 1962 d.C. vi fu la guerra Cino-Indiana, che si concluse vedendo la vittoria cinese. Nella seconda metà degli anni Settanta iniziarono terribili lotte tra la destra e la sinistra (quest'ultima guidata da Mao Tse-Tung e Lin Biao) che portarono alla rivoluzione culturale (1965-1969 d.C.).

Nel 1971 d.C. la Repubblica Popolare Cinese venne ammessa all'ONU, sostituendo il governo di Taiwan. L'anno successivo il presidente americano Nixon visitó Pechino, riconoscendo la Cina popolare e quindi terminó il suo isolamento internazionale.

Nel 1975 fu avanzato il piano delle quattro modernizzazioni che prevedeva miglioramenti nel campo della scienze, dell'industria, dell'agricoltura e dell'esercito. Nel 1976 con la morte di Mao la modernizzazione della Cina e l'apertura con l'Occidente poteva iniziare.

Nel 1997 e 1999 Hong Kong e Macao si riunirono con la Cina; per quanto riguarda Taiwan é, ancora, indipendente e una riunificazione con la Cina sembra lontana. Anche se nel 2012 molti paesi in tutto il mondo l'anno riconosciuta ed intrattengono con essa numerosi rapporti commerciali.

## 1.2 I Dieci Canoni di matematica

Nel 656 d.C. Li Chunfeng presentó all'imperatore Gaozong, della dinastia dei Tang, una raccolta che comprendeva i piú antichi testi di matematica cinese e i commenti di questi da parte di un gruppo di studiosi supervisionati dallo stesso Li Chunfeng, chiamata i *Dieci canoni di matematica* (*Suanjing shishu*). Questa edizione oscuró tutte le precedenti.

Nel 1984 però fu trovato il *Libro dei procedimenti matematici* (*Suanshu shu*) in una tomba, grazie a scavi archeologici. Questo testo si pensa risalente alla fine del II sec.a.C.

Qui di seguito é elencato il contenuto della raccolta dei *Dieci canoni di matematica*:

1. *Gnomone dei Zhou (Zhoubi)*: compilato intorno al I sec.d.C. sulla base di testi già esistenti. In esso la matematica é utilizzata per effettuare calcoli calendaristici.
2. *Nove capitoli sui procedimenti matematici (Jiuzhang suanshu)*: abbreviato in *Nove capitoli*, viene collocato tra il I sec.a.C. e il I sec.d.C., ed é il piú antico testo cinese sulla matematica tramandato dalla tradizione scritta. Alcuni capitoli di questo scritto saranno oggetto della seguente tesi.
3. *Canone di matematica dell'isola marina (Haidao suanjing)*: compilato nel III sec da Liu Hui, autore anche di un commento al testo *Nove capitoli*. Inizialmente questo scritto era solamente un capitolo aggiuntivo ai *Nove capitoli* che riguardava le misure a distanza.
4. *Canone matematico del Maestro Sun (Sunzi suanjing)*: composto intorno al 400 d.C. In esso i capitoli due e tre presentano la matematica sotto forma di problemi e algoritmi. Per la maggior parte ricalca temi presenti nei *Nove capitoli*. Presenta delle differenze per quanto riguarda il primo capitolo, in esso ci sono sequenze di unitá di misura e di procedimenti di calcolo, algoritmi fondamentali per le operazioni piú diffuse.
5. *Canone matematico di Zhang Qiuqian (Zhang Qiuqian suanjing)*: compilato nella seconda metà del V sec. Nel VI sec. Liu Xiaosun aggiunse spiegazioni dettagliate su come effettuare le procedure. Questo testo, per la presentazione e per gli argomenti trattati, segue i *Nove capitoli*.

6. *Canone matematico delle cinque sezioni (Wucaosuanjing)*: composto nel VI sec. da Zhen Luan. Contiene le procedure elementari per risolvere i problemi di lavoro dei funzionari governativi locali e le suddivisioni dell'opera rispecchiano la natura dei vari compiti che essi dovevano svolgere, cioè agrimensura, truppe, banchetti, granai e finanze.
  
7. *Procedimenti matematici dei Cinque classici (Wujingsuanshu)*: attribuito a Zhen Luan, discute sul contenuto matematico di antichi commenti ai Classici confuciani.
  
8. *Canone di matematica che continua gli antichi (Jigusuanjing)*: composto da Wang Xiaotong durante la prima metà del VII sec. Il primo problema tratta di una congiunzione astronomica, mentre per tutti gli altri si tratta di risolvere particolari equazioni cubiche o biquadratiche su problemi sui volumi o sui triangoli rettangoli.
  
9. *Memorie sui metodi di numerazione (Shushujiyi)*: scritto da Xu Yue, tratta in modo discorsivo dei sistemi di numerazione e degli strumenti tramite i quali effettuare i calcoli. Questo testo non contiene commenti del gruppo di studiosi di Li Chunfeng.
  
10. *Canone matematico di Xiahou Yang (Xiahou Yangsuanjing)*: composto nel VIII sec., ricalca gli argomenti dei *Nove capitoli*. È formato da tre capitoli che descrivono in modo semplificato gli algoritmi per le operazioni fondamentali dell'aritmetica e le frazioni decimali.

## 1.3 Nove capitoli

Il titolo dell'opera *Nove capitoli* fu trovato in un'iscrizione su un recipiente usato per le misure di capacità vistato dal Ciambellano della Tesoreria dello Stato (*Dasinong*) nel 179 d.C.

Il motivo principale per cui questo testo non é andato perduto é sicuramente per il fatto che divenne un canone (*jing*), poco dopo essere stato ultimato. Il termine 'canone' fu introdotto da Liu Hui, autore del primo commento all'opera che sia giunto fino a noi. I *Nove capitoli* furono oggetto di numerosi commenti; due di questi, quello di Liu Hui, completato nel 263 d.C., e quello composto da un gruppo di studiosi sotto la supervisione di Li Chunfeng, furono scelti per essere tramandati insieme al testo. Per questo motivo tutte le edizioni che abbiamo dei *Nove capitoli* contengono questi due commenti. In essi vengono citate le opere di altri studiosi (tra cui Zhang Heng, Zu Chongzhi e Zu Geng), mostrando cosí che vi era una tradizione molto diffusa sulla ricerca degli argomenti trattati nei *Nove capitoli*.

Con la dinastia Song ci fu una ripresa d'interesse nei confronti dei *Nove capitoli*. Fu anche ristampato nel 1084 dal Dipartimento della Biblioteca imperiale (*Mishusheng*); fu ristampato nuovamente nel 1213 per opera di Bao Huanzhi, ed é proprio questa la piú antica edizione in nostro possesso.

Ci furono anche altri commenti: *Procedimenti dettagliati del Canone dell'imperatore Giallo dei Nove capitoli sulla matematica* (*Huangdi jiuzhang suanjing xicao*) di Jia Xian, nella prima metà dell'XI sec. e *Spiegazione dettagliata dei 'Nove capitoli sui metodi matematici'* (*Xiangjie jiuzhang suanfa*) di Yang Hui, datato 1261.

Nella prefazione di Yang Hui, lui stesso afferma, citando la prefazione di Rong Qi al commento di Jia Xian del 1148:

'Quando il governo istituí gli esami di matematica al fine di selezionare i funzionari i *Nove capitoli* furono scelti come il piú importante classico matematico, perché in verità esso é come i Sei classici del confucianesimo, il *Canone delle difficoltà* (*Nanjing*) e la *Grande semplicitá* (*Taisu*) delle Scuole di medicina e il *Libro del Maestro Sun* dell'arte militare'.

Il confronto con i Classici del confucianesimo ci mostra il grande valore attribuito a quest'opera, e non contraddice il fatto che si credeva fosse stato scritto da un imperatore o da un saggio dell'Antichità. Il testo propone problemi, le loro soluzioni e gli algoritmi di risoluzione. Questo rispecchia il fatto che nella Cina antica le conoscenze matematiche era proposte sotto forma di algoritmi. Diversamente da quanto risulta nei commenti, nei *Nove capitoli* non vi sono ausili visivi, anche se ci sono spesso riferimenti ad una superficie per eseguire i calcoli, sulla quale i numeri erano rappresentati mediante delle bacchette. Solo nelle dinastie Song e Yuan compaiono le prime rappresentazioni nei testi. Il modo in cui gli algoritmi venivano eseguiti su queste superfici, come descritto nei *Nove capitoli*, determinerà l'approccio alla matematica e agli algoritmi in Cina.

Nei problemi sono presentate situazioni particolari, ad esempio:

'Supponiamo che qualcuno posseda un campo largo  $\frac{4}{7}$  di bu e lungo  $\frac{3}{5}$  di bu (1 bu=6 chi=1,38 m ca.)'.

oppure situazioni astratte, come:

'Supponiamo che qualcuno abbia  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{5}$ . Si chiede quanto ottiene unendo ciò che ha'.

Nonostante la presenza di questo secondo tipo di situazioni, gli storici, inizialmente, hanno considerato l'opera *Nove capitoli* come un testo semplice, utile per risolvere problemi riguardanti attività concrete.

Gli algoritmi di risoluzione presenti nel testo sono di carattere generale; quando ciò non si verifica in pieno Liu Hui affronta la stessa questione e fornisce un algoritmo, generale. Questo mostra l'atteggiamento critico, di Liu Hui nei confronti del contenuto dello scritto, nonostante lui stesso definisce i *Nove capitoli* un canone.

Oltre a conoscenze inerenti l'aritmetica e l'algebra, ci sono anche quelle di geometria. Ad esempio il metodo per calcolare l'area del cerchio:

'Moltiplicando metà della circonferenza e metà del diametro tra loro si ottiene il bu del prodotto (l'area)'.

Queste sono le caratteristiche fondamentali inerenti ai problemi e agli algoritmi-

mi che compongono l'opera, che, come si può vedere dal titolo, è strutturata in nove capitoli (juan).

Il testo non è attribuito a nessun autore. Liu Hui cita il contributo di Zhang Cang (250-152 a.C. ca.) e Geng Shouchang (attivo intorno al 50 a.C.); queste date ci mostrano come il processo di costruzione dell'opera sia durato secoli. Le situazioni dei problemi, ci rimandano spesso a problemi concreti che doveva affrontare al burocrazia della dinastia Han; precisamente a problemi per i quali era responsabile il Ciambellano della Tesoreria dello Stato, come la paga dei 'dipendenti pubblici', la gestione dei granai e delle opere civili e la definizione degli standard di misura per il grano. Questi rimandi tra compiti della burocrazia e problemi matematici può essere spiegato dal fatto che molti studiosi, noti per le loro abilità matematiche, nella dinastia Han hanno lavorato per l'amministrazione dello Stato. Ricordiamo Geng Shouchang e Zhang Cang.

Alcuni problemi presenti nei *Nove capitoli* saranno considerati, da alcuni studiosi, come il matematico Wang Xiaotong, attinenti a questioni astronomiche.

Il titolo dell'opera si riferisce ad un'organizzazione tradizionale della conoscenza matematica nell'antica Cina che veniva suddivisa in 'nove parti della matematica' (jiushu).

Secondo il testo *Riti dei Zhou (Zhouli)* ai figli degli alti dignitari venivano insegnate le sei arti, ultima delle quali comprendeva le nove parti della matematica. Zheng Xuan (127-200) sostiene che queste nove parti hanno dato il nome alle sezioni dei *Nove capitoli*.

CAPITOLO 1: Campo rettangolare (fan tian).

Descrive gli algoritmi per effettuare calcoli con le frazioni, lavorando sui numeratori e sui denominatori. Contiene anche algoritmi per calcolare l'area di figure fondamentali, dette anche campi, come il rettangolo (da cui il nome del capitolo), triangolo, cerchio, corona circolare, settore sferico, ecc.

CAPITOLO 2: Miglio e grano spulato (sumi).

Esponde la regola del tre e alcune sue applicazioni. Questa regola veniva utiliz-

zata per il calcolo dell'equivalenza tra cereali secondo i tassi ufficiali stabiliti dalla Tesoreria e relativi al pagamento, in natura, delle imposte.

CAPITOLO 3: Parti pesate secondo il grado (shuaifen).

Descrive un algoritmo per suddividere tutto in parti non uguali. La prima applicazione riguarda la distribuzione delle gratificazioni tra i funzionari di status differente.

CAPITOLO 4: Piccola larghezza (shao guang).

Descrive i vari tipi di divisione, sia quelle con i numeri frazionari, sia le estrazioni di radice (metodo simile al nostro).

CAPITOLO 5: Discussione di opere (shang gong).

Dedicato all'esecuzioni delle opere pubbliche. Tratta di algoritmi per il calcolo del volume dei solidi, quali il parallelepipedo e il cilindro, il prisma trapezoidale, la piramide e il tronco di piramide a base quadrata, il tetraedro, il cono e il tronco di cono, ecc.

CAPITOLO 6: Pagare le tasse sul trasporto in modo equo (junshu).

Il primo argomento trattato é riportato nel titolo. Tutti i problemi trattati in questo capitolo richiedono l'uso della regola dei tre.

CAPITOLO 7: Eccesso e difetto (ying bu zu).

Descrive la regola della doppia falsa posizione.

CAPITOLO 8: Misure di un quadrato (fangcheng).

Descrive un algoritmo per risolvere sistemi di  $n$  equazioni lineari in  $n$  incognite.

CAPITOLO 9: Base e altezza (gougu).

Il nome del capitolo denota i cateti di un triangolo rettangolo; sará proprio lo studio di questa figura l'argomento del capitolo. Si apre con un algoritmo corrispondente al teorema di Pitagora.

## 1.4 Suanshu shu, ritrovato nel 1984

Nel 1984 fu ritrovata un'antica opera matematica nella tomba sigillata (probabilmente del 186 a.C.) di Zhangjiashan della dinastia Han nella pro-

vincia di Hubei. Su numerose strisce di bambú erano riportati vari argomenti matematici con l'intestazione *Suanshu shu*, tradotto come *Libro dei procedimenti matematici*.

Questa opera é quindi considerata la piú antica opera di matematica cinese esistente. Il testo *Libro dei procedimenti matematici* viene spesso paragonato ai *Nove capitoli* per la grande somiglianza dei problemi e dei metodi presenti. Consideriamo ad esempio il primo problema enunciato in questo testo:

*La larghezza di una campo misura un Bu e mezzo Bu. Si prende 1 come 2, un mezzo come 1; si uniscono, si ottiene 3, che é preso come divisore. Poi si mette al posto dei 240 Bu (dell'area) e si prende ugualmente 1 come 2, e si divide. Quando questo é divisore, si ottiene una lunghezza di 1 Bu, questo fa come lunghezza 160 Bu. Dove si é moltiplicato per un Bu e mezzo Bu.*

Per quanto simile ai problemi presenti nei *Nove capitoli*, questa formulazione presenta alcune differenze. *Libro sui procedimenti matematici* non é quindi il predecessore diretto dei *Nove capitoli*. Questo fatto va ad avvalorare la tesi proposta da Liu Hui cioé che la compilazione dei *Canoni di matematica*, di cui i *Nove capitoli* forniscono un contributo principale, si é sviluppata in un periodo precedente a quello della Dinastia Qin.

I problemi presenti nel testo *Libro sui procedimenti matematici* sono piú semplici (rispetto ai *Nove capitoli*), sono trattati in maniera piú sistematica e contengono vari errori. Il piú noto é quello riguardo al metodo di estrazione della radice quadrata, che propone solamente un risultato approssimato. Inoltre non permette di estrarre radice cubica. Un altro errore é quello riguardo alla 'regola dei tre' che viene usata spesso, ma non enunciata chiaramente in termini astratti.

Da queste considerazioni é possibile concludere che il periodo che separa i due famosi testi matematici cinesi fu un periodo di crescita nel trattamento dei problemi matematici in Cina.



## Capitolo 2

# Fangcheng: Capitolo 8 dei *Nove Capitoli*

Questo capitolo raccoglie problemi per la risoluzione di sistemi di equazioni lineari e per questo ha come titolo il nome del metodo matematico inventato per questo scopo: *fangcheng*.

La procedura del metodo fangcheng viene descritta dettagliatamente nel primo problema, in seguito viene spiegata in riferimento alle produzioni di cereali.

Le situazioni presentate negli enunciati di alcuni problemi di questo capitolo sono complicate e non danno subito delle soluzioni standard; per questo motivo sono necessari dei metodi per risolvere tali condizioni come la *procedura di diminuzione e di aumento* (descritta nel secondo problema). Inoltre quando si utilizza l'algoritmo di fangcheng per risolvere i sistemi di equazioni, attraverso i processi di eliminazione delle incognite, possono apparire dei numeri negativi. Per raggiungere la soluzione sono necessarie addizioni e sottrazioni di questi numeri positivi e negativi, utilizzando la *procedura del positivo e del negativo* (presente nel terzo problema).

Questo capitolo é formato da 18 problemi che si risolvono tutti utilizzando i tre metodi sopra citati. Da qui l'importanza dei primi tre problemi, inseguito descritti dettagliatamente.

## 2.1 La procedura fangcheng

É qui enunciato il primo problema dell'ottavo capitolo(8.1):

*Supponiamo che 3 Bing di miglio di qualità superiore, 2 Bing di miglio di qualità media, 1 Bing di miglio di qualità inferiore producano (shi) 39 Dou; che 2 Bing di miglio di qualità superiore, e 3 Bing di miglio di qualità media, 1 Bing di miglio di qualità inferiore producano (shi) 34 Dou; che 1 Bing di miglio di qualità superiore, 2 Bing di miglio di qualità media, 3 Bing di miglio di qualità inferiore producano (shi) 26 Dou; si chiede quanto producono (shi) rispettivamente un Bing di miglio di qualità superiore, di qualità media, di qualità inferiore.*

*Risposta:*

*Un Bing di miglio di qualità superiore 9 Dou  $\frac{1}{4}$  di Dou;*

*Un Bing di miglio di qualità media 4 Dou  $\frac{1}{4}$  di Dou;*

*Un Bing di miglio di qualità inferiore 2 Dou  $\frac{3}{4}$  di Dou.*

*Procedura: fangcheng.*

Per questioni di semplicità rappresentiamo tutti i problemi riportati in questa tesi utilizzando le cifre arabe, i *Nove capitoli* utilizzavano le bacchette.

La procedura fangcheng descritta in questo primo problema, come già detto, é un metodo generale che sarà poi utilizzato in tutto il capitolo.

Possiamo rappresentare questo primo problema nel modo seguente:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Se consideriamo  $x$ ,  $y$ ,  $z$  variabili che rappresentano rispettivamente la produzione di Bing dei cereali delle qualità superiore, media ed inferiore, possiamo riscrivere il problema come:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Il metodo fangcheng prevede di moltiplicare tutti i termini della colonna (riga, nel caso della rappresentazione odierna) di mezzo per il coefficiente del cereale di qualità superiore della colonna di destra (in alto), poi si toglie la colonna di destra (in alto) tante volte quanto necessario perché il coefficiente del cereale della qualità superiore della colonna (riga) di mezzo si annulli. Operazione chiamata dai *Nove capitoli* come *eliminazione tra quantità che si fronteggiano*.

Ottenendo:

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

O anche:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$5y + z = 24$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Si moltiplicano ora tutti i coefficienti della colonna di sinistra (riga in basso) per il termine del cereale di qualità superiore della colonna di destra (riga in alto), poi si toglie la colonna di destra finché il coefficiente del cereale di qualità superiore della colonna di sinistra si annulli. Ottenendo:

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

O anche:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$5y + z = 24$$

$$4y + 8z = 39$$

Liu Hui chiama queste operazioni *processo di omogeneizzazione e di eguaglianza*. Moltiplicare, il valore maggiore della colonna di destra per la posizione superiore della colonna di mezzo e poi per tutti i termini sotto di essa, é detto omogeneizzare. Sottrarre la colonna di destra a quella centrale fino ad ottenere un valore nullo nella posizione superiore di quest'ultima é detto eguagliare.

Ritornando ai calcoli. Si moltiplicano, nuovamente, per il coefficiente del cereale della qualità media della colonna (riga) di mezzo i termini della colonna di sinistra (riga in basso) e si toglie questa colonna (riga) centrale finché il coefficiente del cereale di qualità media della colonna di sinistra (riga in basso) si annulli. Cioé:

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

O anche:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$5y + z = 24$$

$$36z = 99$$

Completare l'algoritmo ora risulta banale: la colonna di sinistra (riga in basso) da  $z$ , la colonna (riga) centrale da  $y$  e la colonna di destra (riga in alto) da  $x$ .

Ciò equivale al seguente sistema:

$$4x = 37$$

$$4y = 24$$

$$4z = 11$$

Si ottengono così le produzioni di un Bing, rispettivamente, del cereale di qualità superiore ( $x = 9 \text{ Dou } \frac{1}{4} \text{ di Dou}$ ), del cereale di qualità media ( $y = 4 \text{ Dou } \frac{1}{4} \text{ di Dou}$ ) e del cereale di qualità inferiore ( $z = 2 \text{ Dou } \frac{3}{4} \text{ di Dou}$ ).

## 2.2 La procedura della diminuzione e dell'aumento

É qui enunciato il secondo problema dell'ottavo capitolo(8.2):

*Supponiamo che diminuendo la produzione (shi) di 7 Bing di miglio di qualità superiore di 1 Dou ed aumentando di quella di 2 Bing di miglio di qualità inferiore, allora la produzione (shi) (globale) sia di 10 Dou; che aumentando la produzione (shi) di 8 Bing di miglio di qualità inferiore di 1 Dou e di quella di 2 Bing di miglio di qualità superiore, allora la produzione (shi) (globale) sia di 10 Dou. Si chiede quanto producono (shi) rispettivamente un Bing di miglio di qualità superiore ed inferiore.*

*Risposta:*

*Un Bing di miglio di qualità superiore produce (shi)  $1 \text{ Dou } \frac{18}{52}$  di Dou.*

*Un Bing di miglio di qualità inferiore produce (shi)  $\frac{41}{52}$  di Dou.*

*Procedura: Si segue fangcheng. Ciò di cui si diminuisce é detto aumentare, ciò di cui si aumenta é detto diminuire.*

Questo metodo é utilizzato anche nel quarto, nel quinto, nel sesto, nell'ottavo, nel decimo, nell'undicesimo e nel quindicesimo problema del capitolo otto.

I termini *diminuire* e *aumentare*, significano rispettivamente aggiungere e sottrarre una stessa quantità.

Nei *Nove capitoli* é presente la seguente affermazione -ció di cui si diminuisce é detto aumentare- secondo la quale diminuire di una quantità uno dei membri dell'enunciato di una relazione equivale ad aumentare della stessa quantità l'altro membro. Viceversa -ció di cui si aumenta é detto diminuire- significa che aumentare di una quantità uno dei membri dell'enunciato di una relazione equivale a diminuire della stessa quantità l'altro membro.

Analizziamo il secondo problema, sopra enunciato.

Qui sotto é enunciato in termini moderni il secondo problema:

$$(7x - 1) + 2y = 10$$

$$2x + (8y + 1) = 10$$

-Ció di cui si diminuisce é detto aumentare- equivale a far passare il -1 dal membro di sinistra al membro di destra, cioè  $10+1=11$ . Contemporaneamente, -ció di cui si aumenta é detto diminuire- equivale a far passare l' 1 dal membro di sinistra al membro di destra, cioè  $10-1=9$ .

Cosí si ottiene:

$$7x + 2y = 11$$

$$2x + 8y = 9$$

Quindi quando una quantità viene spostata da un membro all'altro, l'addizione si trasforma in sottrazione e viceversa. Questa operazione equivale ad

un cambiamento di segno.

Il problema si risolve utilizzando il metodo fangcheng descritto dettagliatamente nel primo problema.

## 2.3 La procedura del positivo e del negativo

I problemi 8.3, 8.12, 8.13, 8.14, 8.16, 8.17 e 8.18 presentano equazioni a coefficienti tutti positivi, che durante il procedimento del fangcheng diventano negativi. I problemi 8.4, 8.5, 8.6, 8.8 e 8.15 invece presentano equazioni con coefficienti negativi.

E' quindi necessario introdurre i numeri negativi (i cinesi furono i primi ad utilizzarli).

I *Nove capitoli* propongono delle regole di addizione e di sottrazione relative ai numeri positivi e negativi:

*Se dei numeri dello stesso nome sono eliminati l'uno dall'altro, i numeri dei nomi differenti si aumentano l'un l'altro; se il positivo non ha dove entrare, lo si rende negativo, se il negativo non ha dove entrare, lo si rende positivo. Se dei numeri di nomi differenti sono eliminati l'un l'altro, i numeri dello stesso nome si aumentano l'un l'altro; se il positivo non ha dove entrare, lo si rende positivo, se il negativo non ha dove entrare, lo si rende negativo.*

Il termine 'nome', sopra presente, indica il segno del numero. Con l'espressione 'dello stesso nome' si intendono numeri con lo stesso segno, con 'nomi differenti' si indicano numeri con segni opposti. Possiamo quindi stabilire delle regole di sottrazione fra numeri positivi e negativi; se i due numeri sono dello stesso segno:

$$(\pm a) - (\pm b) = \pm (a-b) \text{ se } a > b$$

$$(\pm a) - (\pm b) = \mp (b-a) \text{ se } a > b$$

Se i numeri sono di segno opposto:

$$(\pm a) - (\mp b) = \pm (b+a)$$

Se il numero positivo non ha valore:

$$0 - a = -a \text{ se } a > 0$$

Viceversa se il numero negativo non ha valore:

$$0 - (-a) = a \text{ se } a > 0$$

Se le due quantità sono di segno opposto:

$$(\pm a) - (\mp b) = \pm (a-b) \text{ se } a > b$$

$$(\pm a) - (\mp b) = \mp (b-a) \text{ se } a > b$$

Se sono dello stesso segno:

$$(\pm a) + (\pm b) = \pm (a+b)$$

Se il numero positivo non ha numero al quale essere aggiunto:

$$0 + a = +a \text{ se } a > 0$$

Se il numero negativo non ha numero al quale essere aggiunto:

$$0 + (-a) = -a \text{ se } a > 0$$

È qui enunciato l'ottavo problema dell'ottavo capitolo(8.8):

*Supponiamo che, se si vendono 2 buoi e 5 pecore per comprare 13 maiali, restano 1000 sapechi, che se si vendono 3 buoi e 3 maiali per comperare 9 pecore, si abbiano abbastanza sapechi, e che se si vendono 6 pecore ed 8 maiali per comperare 5 buoi, si abbia un deficit di 600 sapechi. Si chiede quanto valgono rispettivamente i prezzi dei buoi, di una pecora e di un maiale.*

*Risposta:*

*Il prezzo di un bue vale 1200;*

*Il prezzo di una pecora vale 500;*

*Il prezzo di un maiale vale 300.*

*Procedura: si segue fangcheng. Si pongono i 2 buoi e le 5 pecore positive, i 13 maiali negativi, la quantità (shu) di sapechi restante é positiva. Poi i 3 buoi positivi, le 9 pecore negative, i 3 maiali positivi. Poi i 5 buoi negativi, le 6 pecore positive, gli 8 maiali positivi, i sapechi in deficit negativo. Si introduce la procedura del positivo e del negativo.*

Possiamo rappresentare il problema nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} -5 \quad 3 \quad 2 \\ 6 \quad -9 \quad 5 \\ 8 \quad 3 \quad -13 \\ 600 \quad 0 \quad 1000 \end{array}$$

Eseguo la procedura del fangcheng con le regole di addizione e sottrazione sopra citate. Cioé moltiplico la colonna di mezzo per il coefficiente superiore della riga a destra e poi sottraggo questa colonna da quella centrale tante volte per annullare il termine maggiore della colonna. Ed ottengo:

$$\begin{array}{r} -5 \quad 0 \quad 2 \\ 6 \quad -33 \quad 5 \\ 8 \quad 45 \quad -13 \\ 600 \quad -3000 \quad 1000 \end{array}$$

Stesso discorso per la colonna di sinistra a cui si moltiplica il coefficiente superiore della colonna centrale e si sottrae dalla prima la seconda colonna tante volte fino ad annullare il termine superiore:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 2 \\ -27 \quad -33 \quad 5 \\ 39 \quad 45 \quad -13 \\ -1800 \quad -3000 \quad 1000 \end{array}$$

Si semplifica la colonna centrale per -3, e quella di sinistra per 3, ottenendo:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 2 \\ -9 \quad 11 \quad 5 \\ 13 \quad -15 \quad -13 \\ -600 \quad 1000 \quad 1000 \end{array}$$

Ora si moltiplica la colonna di sinistra per il coefficiente di mezzo della colonna centrale e si aggiunge questo tante volte per annullare il coefficiente piú in alto della colonne di sinistra:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 2 \\ 0 \quad 11 \quad 5 \\ 8 \quad -15 \quad -13 \\ 2400 \quad 1000 \quad 1000 \end{array}$$

Si semplifica la colonna di sinistra per 8, ottenendo:

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 2 \\ 0 \quad 11 \quad 5 \\ 1 \quad -15 \quad -13 \\ 300 \quad 1000 \quad 1000 \end{array}$$

Otteniamo quindi le soluzioni cercate, cioè che un maiale vale 300, una pecora 500 e infine un bue 1200.

I *Nove capitoli* non enunciano in modo esplicito le regole di moltiplicazione e di divisione dei numeri positivi e negativi, ma le utilizzano in modo corretto. Nel XIII sec. Zhu Shijie mostrerá esplicitamente queste regole nel testo *Suanxue qimeng*, cioè *Introduzione allo studio delle matematiche*.

Liu Hui nel suo commentario alla *Procedura dei numeri positivi e negativi* schematizza questa teoria.

## 2.4 Metodo d'eliminazione per moltiplicazione reciproca

Il processo di eliminazione delle incognite per sottrazione fra numeri puó richiedere delle sottrazioni ripetute; talvolta i calcoli possono essere molto

difficili. Liu Hui elaboró il metodo di *eliminazione delle incognite per moltiplicazione reciproca*. Vediamolo tramite il settimo problema del capitolo otto (8.7):

*Supponiamo che 5 buoi e 2 pecore valgono 10 Liang d'oro, che 2 buoi e 5 pecore valgono 8 Liang d'oro. Si chiede quanto oro valgono rispettivamente un bue ed una pecora.*

*Risposta:*

*Un bue vale 1 Liang  $\frac{13}{21}$  di Liang d'oro.*

*Una pecora vale  $\frac{20}{21}$  di Liang d'oro.*

*Procedura: Si segue fangcheng.*

Possiamo rappresentare il problema nel seguente modo:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 5 \\ 5 \quad 2 \\ 8 \quad 10 \end{array}$$

O anche:

$$5x + 2y = 10$$

$$2x + 5y = 8$$

Moltiplico i termini di ogni colonna per la posizione di testa dell'altra, in questo modo ottengo:

$$\begin{array}{r} 10 \quad 10 \\ 25 \quad 4 \\ 40 \quad 20 \end{array}$$

O anche:

$$10x + 4y = 20$$

$$10x + 25y = 40$$

Sottraggo la colonna con contiene il valori in alto piú bassi dall'altra, in questo modo la posizione di testa si annulla a sinistra, ed ottengo:

$$\begin{array}{r} 10 \\ 21 \ 4 \\ 20 \ 20 \end{array}$$

Risolvendo ottengo che un bue vale 1 Liang  $\frac{13}{21}$  di Liang d'oro e una pecora vale  $\frac{20}{21}$  di Liang d'oro.

Secondo Liu Hui questo metodo, si può utilizzare in sistemi di equazioni con un numero qualsiasi di colonne. Nonostante questo, bisognerà aspettare la metà del XIII sec. quando il matematico dei Song, nel testo *Shushu jiuzhang* (o anche *Scritti sulle matematiche dei Nove capitoli*), scarterà il metodo della sottrazione fra numeri che si fronteggiano, introducendo quello spiegato qui sopra.

## Capitolo 3

# La matematica occidentale in Cina nel XVII secolo

Solo nei primi anni del XVII sec. la matematica cinese iniziò ad essere influenzata dalla matematica degli altri paesi. La traduzione in cinese di vari testi matematici dell'Europa contemporanea, per opera dei gesuiti, permise un confronto tra le culture, rivelando incompatibilità in vari ambiti, ma non in quello matematico; infatti in quest'ultimo campo le idee occidentali furono subito accolte. Li Zhizao nella prefazione dell'opera *Trattato sui metodi di calcolo [occidentale e orientale] (Tongwen suanzhi)*, letteralmente 'elementi di quantità', del 1613, spiegò perché matematica occidentale e cinese sono simili.

Il risultato principale che portò l'incontro di queste due tradizioni matematiche fu un nuovo interesse per la disciplina, e nuovi tentativi, da parte degli studiosi, di confrontare la matematica occidentale con quella cinese, volti ad uniformare la terminologia e i metodi.

Nonostante parte della matematica cinese fosse stata persa, le opere dell'epoca della dinastia Ming erano un patrimonio molto importante. La ricerca dei contenuti matematici cinesi delle epoche precedenti divenne un obiettivo importante tanto quello di formulare una nuova matematica.

L'introduzione della matematica occidentale in Cina fu opera di un gruppo

di missionari gesuiti guidati da motivazioni religiose e guardati con sospetto sia in Cina sia in Europa. Uno di questi missionari fu Matteo Ricci. Quest'ultimo stabilitosi definitivamente a Pechino nel 1601 incontro Xu Guangqi e Li Zhizao (1565-1630), alti funzionari governativi, con i quali collaboró alla traduzione di vari testi matematici. Con Xu Guangqi tradusse i primi sei libri degli *Elementi* di Euclide, che uscirono in cinese nel 1607 con il titolo *Elementi di geometria (Jihe yuanben)* e con Li Zhizao si occupó dell'aritmetica. La geometria come trattata da Euclide fu un'idea decisamente nuova in Cina, mentre l'aritmetica era già presente nella tradizione cinese con la differenza però che in occidente era sviluppata con il calcolo scritto, cioè quello effettuato con carta e penna.

Le conoscenze che furono portate dai gesuiti fino alla fine del XVII sec. seguivano la scuola di Cristoforo Clavio (maestro di Matteo Ricci). Per questo la prima edizione della versione latina di Clavio degli *Elementi* di Euclide, fu la base per l'opera già citata *Jihe yuanben* di Ricci e Xu Guangqi; mentre l'*Epitome arithmeticae practicae* di Clavio fu la base per il *Trattato sui metodi di calcolo [occidentale e orientale]* di Li Zhizao. Xu e Ricci nella rielaborazione dell' 'Euclide cinese' invece di traslitterare i termini, cioè di riprodurre le parole straniere anche utilizzando caratteri cinesi senza significato, cercarono di trovare termini cinesi equivalenti per rendere chiaro ogni concetto. Questa era una tecnica largamente utilizzata in Cina. Questa tecnica da una parte ottenne come vantaggio un linguaggio elegante e comprensibile, dall'altra però nascose importanti differenze fra le due culture.

Una difficoltà di questo tipo si presenta anche nel titolo dell'opera *Jihe yuanben*, dove il termine *jihe* fu utilizzato per esprimere il concetto di 'quantità in generale'. Si fa così riferimento alla matematica greca dove la matematica veniva divisa sul concetto di quantità in due blocchi: la geometria, che considerava le quantità continue (*du*) e l'aritmetica, che riguardava le quantità discrete (*shu*). In Cina le grandezze geometriche venivano sempre considerate come 'quantità misurate'; infatti il termine *jihe* ricorre spesso nei testi matematici con il significato di 'quanto grande'. Il *Jihe yuanben* portó ad

una identificazione della geometria come una parte della matematica; il termine *jihe* diventò il termine geometria.

Nonostante ciò il contenuto dell'opera di Euclide non fu pienamente apprezzato a quei tempi. Ricci nella sua prefazione a quest'opera sottolinea l'importanza della matematica nella società; a questa segue la prefazione di Xu, il quale ricorda il prestigio delle scienze matematiche durante la società ideale delle Tre Dinastie (prima del 1700 a.C.) e la successiva perdita di questa tradizione a causa di conflitti interni cinesi. Xu voleva quindi sottolineare la continuità con il passato e l'importanza di questa disciplina nella società.

Coerentemente con queste idee, Xu, con l'aiuto di Ricci, pubblicò una breve opera sui metodi di misurazione del terreno, intitolato *Spiegazione dei metodi di misurazione (Celiang fayi)*, basata su quanto Ricci aveva appreso da Roma.

Xu concluse che la matematica cinese e quella europea usavano gli stessi metodi; però i cinesi non dimostravano perché questi metodi fossero corretti, né come si fosse giunti ad essi, la matematica occidentale forniva invece spiegazioni esaurienti.

Nell'opera *Differenze e somiglianze [tra oriente e occidente nei metodi] di misurazione (Celiang yitong)*, Xu confrontò sei metodi di misurazione del terreno contenuti nell'opera scritta con Ricci, con quelli equivalenti cinesi; nell'opera *Spiegazioni del triangolo rettangolo (Gougu yi)*, cercò di dimostrare, secondo i criteri occidentali, 15 algoritmi cinesi tradizionali sul triangolo rettangolo; nell'opera, inedita, *Metodi di estrazione [della radice] quadrata con divisore fisso (Dingfa pingfang suanshu)*, spiegò gli algoritmi per l'estrazione di radice.

Questa ricerca comparativa tra le due culture intrapresa da Xu fu condivisa anche da Li Zhizao, che interessato alla geografia, si avvicinò alla cultura occidentale tramite la versione cinese del *Mappamondo* di Matteo Ricci.

Li Zhizao tradusse un'opera di geometria nota come *Spiegazioni delle differenze [nell'area e nel volume] tra [figure] contenute in un cerchio e in una sfera (Yuanrongjiao yi)*, del 1607, un trattato di Clavio inserito nel commen-

to a *De sphaera mundi* di Giovanni di Sacrobosco; lavoro importante a livello matematico per gli studi cosmologici dei gesuiti. L'opera piú importante di Li é sicuramente il *Trattato sui metodi di calcolo [occidentale e orientale]*, che é stata scritta in tre tempi diversi. La prima parte, del 1607, fu scritta insieme a Ricci e introduce agli algoritmi per effettuare le quattro operazioni fondamentali con carta e penna. La seconda parte, del 1613, illustra le ricerche di Li Zhizao; é basata ancora sulle opere di Clavio, ma ingloba anche molte opere cinesi, come *Origini generali dei metodi matematici* di Cheng Dawei. L'ultima parte, non conosciuta per intero, tratta di argomenti di trigonometria.

Li Zhizao trattó anche di argomenti presenti nei *Nove capitoli sui procedimenti matematici*, come le frazioni, le somme di serie, le estrazioni di radici e la 'regola dei tre'. Molto interesse ebbe il 'metodo della doppia falsa posizione', che egli trovó analogo a *ying bu zu*, che significa letteralmente 'troppo e non abbastanza', che é proprio il capitolo 7 dei *Nove capitoli*.

Li si occupa anche del metodo cinese tradizionale per risolvere i sistemi di n equazioni lineari in n incognite, che veniva applicato quando il metodo della doppia falsa posizione diventava difficile, corrispondente al capitolo 8 dei *Nove capitoli*. Questo metodo giá descritto é noto con il nome di fangcheng, cioé calcoli facendo uso di tabulazioni. Successivamente Mei Wending affermerá che il metodo del fangcheng non esisteva nella tradizione occidentale.

Importante per la diffusione dei metodi matematici occidentali furono le traduzioni inerenti alla riforma del calendario. Xu Guangqi e Li Zhizao fecero in modo che alcuni gesuiti entrassero a far parte del comitato che si occupava di migliorare l'accuratezza delle osservazioni e dei calcoli astronomici. La raccolta, nota come *Trattato sulla scienza calendaristica del periodo Chongzhen* (*Chongzhen lishu*), fu resa nota al sovrano tra il 1631 e il 1634. La raccolta comprendeva trattati di trigonometria piana e sferica, fra cui quelli scritti da dei gesuiti, come *Grandi misurazioni (Dace)* di Johann Schreck e *Spiegazione completa della misurazione (Celiang quanyi)* di Giacomo Rho. Molto interesse ebbero l'introduzione di alcuni dispositivi di calcolo, come

---

il compasso geometrico militare di Galileo, che viene illustrato nella *Spiegazione del compasso per proporzioni* (*Biligui jie*) di Rho. Sarà poi aggiunto anche il trattato *Procedimenti essenziali 'di geometria'* (*Jihe yaofa*) del gesuita Giulio Aleni, che tratta di problemi di costruzione e geometria pratica. Nella seconda metà del XVII sec. le ricerche di Xu e di Li portarono a nuovi contributi creativi. L'ambiente culturale interessato alla matematica occidentale era cambiato. Le ricerche sulla matematica venivano condotte soprattutto dai letterati confuciani a cui fu tolto il potere politico; questi consideravano gli studi matematici come una parte dell'impresa intellettuale incentrata sul passato.

La suddivisione della matematica nelle varie branche rimase quella tradizionale e la forma 'problema-algoritmo' non mutò; l'idea di dimostrazione iniziò a guadagnare un'importanza sempre maggiore. Ad esempio Fang Zhongtong, un letterato-matematico, scrisse *Rivelazione di numeri e grandezze* (*Shudu yan*) nel 1661, il quale non forniva materiale nuovo, ma offriva una visione della matematica collegata alla cosmologia neoconfuciana.

Il tentativo di organizzare la matematica occidentale e cinese, portò alla suddivisione in nove branche corrispondenti a quelle dei *Nove capitoli*.

Du Zhigeng nell'opera *Chiave per la matematica* (*Shuxue yao*) del 1681, ha combinato la suddivisione della matematica tradizionale con la struttura dei sei libri degli *Elementi* di Euclide. Egli presentò sei capitoli, ciascuno dei quali era diviso a sua volta in sezioni corrispondenti alla nove divisioni dei *Nove capitoli*. Ogni capitolo è preceduto da un insieme di *fanli*, che si può tradurre come 'principi generali', che si riferiscono sia alle definizioni e ai postulati degli *Elementi* di Euclide, sia alle definizioni dei concetti di matematica cinese. Il testo era formato da problemi seguiti da algoritmi necessari per risolverli, proprio come si usava nella tradizione cinese. Gli algoritmi erano però seguiti da una spiegazione o da una dimostrazione. Inoltre i problemi erano disposti dal più semplice al più complesso; per risolvere quest'ultimo era necessario conoscere quelli precedenti.

Du Zhigeng pubblicò anche una versione ridotta dei *Jihe yuanben* nota come

*Epitome degli 'Elementi [di geometria]'* (*Jihe lunyue*) del 1700, nella quale aggiunse 10 proposizioni da lui trovate. Nella prefazione precisó che era necessario un adattamento della traduzione di Ricci e di Xu, in quanto questo respingeva i lettori poiché prolisso. Un'osservazione simile era stata avanzata anche da Li Zijin che notó che sia i risultati piú profondi sia quelli piú ovvi venivano dimostrati con la stessa accuratezza di dettagli. Molti lettori consultavano quindi il lavoro di Aleni *Procedimenti essenziali 'di geometria'*, considerato un riassunto di Xu e Ricci. Li Zijin cercó un equilibrio fra le troppe e le troppo poche spiegazioni.

Lo stile di Mei Wending, noto scrittore di matematica del tempo, risentí dell'influenza della geometria occidentale. Egli fa uso quasi sempre di spiegazioni e giustificazioni, anche se lo scopo non é quello di fornire dimostrazioni rigorose, bensí quello di far capire. Mei Wending proseguí il lavoro di Li Zhizao, studiando il fangcheng nell'opera *Sulle misure di un quadrato (Fangcheng lun)*; classifica i problemi dell'ottavo capitolo dei *Nove capitoli* in quattro tipi, mostra come risolverli, con carta e penna, con eliminazioni successive e propone problemi in cui compaiono fino a sei incognite. Infine sottolinea la differenza fra il fangcheng e il 'metodo della doppia falsa posizione'. Nonostante ciò l'interesse principale di Mei é rivolto alla geometria e all'astronomia. Cercó di spiegare alcuni argomenti del *Trattato sulla scienza calendaristica del periodo Chongzhen*, secondo lui trattati in modo affrettato, esponendoli nei lavori noti come *Aspetti essenziali di trigonometria piana (Ping sanjiao juyao)* e *Aspetti essenziali di trigonometria sferica (Hu sanjiao juyao)*. In piú sviluppo la stereometria cioè la geometria delle figure solide nell'opera *Supplemento agli 'Elementi [di geometria]'* (*Jihe bubian*).

Mei calcoló il volume e la lunghezza dei lati dei solidi platonici e di due dei solidi archimedei per i quali serví un approccio di natura intuitiva, immaginando cioè che i solidi fossero inscritti l'uno nell'altro. Trovó quindi nel testo *Spiegazione completa della misurazione* alcuni errori nei dati numerici delle figure solide. Mei rivalutó il modo di comparare la matematica occidentale e quella cinese seguito dai suoi predecessori; invece di ricorrere alla

geometria euclidea per spiegare gli algoritmi tradizionali, mostró come molte proposizioni degli *Elementi* di Euclide potevano essere riformulate usando la terminologia usata per il triangolo rettangolo e come potevano essere dimostrate a partire dalle relazioni della matematica tradizionale. Il successo della dimostrazione lo portó alla conclusione che nell'opera *Jihe yuanben* non vi era piú matematica di quella presente nella tradizione cinese e che l'importanza degli *Elementi* era il teorema di Pitagora e la misurazione delle aree e dei volumi.

L'opera di Mei Wending fu un importante punto di riferimento per avvicinarsi alla conoscenze importate dall'Occidente.



# Appendice A

## Unitá di misura

### A.1 Unitá di lunghezza

unitá cinese	unitá italiana
1 chi	circa 23-24cm
1 bu = 6 chi	circa 138-144cm

### A.2 Unitá di volume

unitá cinese	unitá italiana
1 sheng	0,2 litri
1 dou = 10 sheng	2 litri

### A.3 Unitá di peso

unitá cinese Han occidentali	unitá cinese Han orientali	unitá italiana
1 jin	fra 220g e 260g	fra 215g e 230g
$1liang = \frac{1}{16}jin$	fra 13,75g e 16,25g	fra 13,44g e 14,38g



# Bibliografia

- [1] Karine Chemla e Guo Shuchun, *Les Neuf Chapitres*, Ed. Dunod, Paris, 2004.
- [2] Shen Kangshen, John N.Crossley e Antony W.-C. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, Oxford Univesrity Press, Science Press - Beijing, 1999.
- [3] Karine Chemla, *La matematica: I nove capitoli*, Storia della Scienza Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, 2001.
- [4] Jean-Claude Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris, 1987.
- [5] P. Engelfriet, *Matematica e astronomia: l'introduzione della matematica occidentale in Cina nel XVII secolo*, Storia della Scienza Enciclopedia Italiana Treccani, Roma, 2001.
- [6] Piero Corradini, *Cina: popoli e società in cinque millenni di storia*, Firenze, 1996.