

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

**CONTROLLABILITÀ A ZERO PER  
EQUAZIONI DIFFERENZIALI  
DEGENERI**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
ANGELO FAVINI

**Presentata da:**  
MARCO ZOBOLI

**II Sessione  
Anno Accademico 2011/2012**



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Teoria dei Semigrupperi</b>	<b>1</b>
1.1 Semigrupperi fortemente continui e proprietà principali . . . . .	1
1.1.1 Teorema di Hille-Yosida . . . . .	10
1.2 Semigrupperi di contrazioni e operatori dissipativi . . . . .	10
1.3 Semigrupperi Analitici . . . . .	11
1.4 Esempi di semigrupperi . . . . .	16
1.4.1 Equazioni paraboliche . . . . .	16
<b>2 Rappresentazione e controllo</b>	<b>19</b>
2.1 Controllabilità e osservabilità di sistemi finito-dimensionali . . .	19
2.2 Operatori di controllo e osservazione . . . . .	21
2.2.1 Soluzioni di equazioni differenziali non-omogenee . . . . .	23
2.3 Controllabilità dei sistemi infinito-dimensionali . . . . .	24
2.4 Osservabilità dei sistemi infinito-dimensionali . . . . .	25
2.5 Dualità fra controllabilità e osservabilità . . . . .	25
<b>3 Controllabilità a zero a 2 dimensioni</b>	<b>27</b>
3.1 Presentazione del problema . . . . .	27
3.2 Ipotesi sul dominio . . . . .	27
3.3 Ipotesi sull'operatore . . . . .	28
3.4 Caso debolmente degenere . . . . .	28
3.5 Caso fortemente degenere . . . . .	29
3.6 Stime di Carleman per il problema aggiunto degenere . . . . .	30
<b>A Alcuni richiami di analisi funzionale</b>	<b>33</b>
A.1 Concetti fondamentali . . . . .	33
A.2 Operatori lineari chiusi tra spazi di Banach . . . . .	33
<b>Bibliografia</b>	<b>35</b>



# Introduzione

L'evoluzione dello stato di tanti sistemi modellati da equazioni a derivate parziali lineari (PDEs) o da equazioni differenziali con ritardo, possono essere descritti da semigruppì di operatori lineari. Lo stato di tali sistemi è rappresentato da un elemento di uno spazio normato infinito-dimensionale, da cui il nome sistema lineare infinito-dimensionale.

Lo studio degli operatori di controllo e osservazione per tali semigruppì è un settore relativamente recente. Questi operatori sono necessari per modellare l'interazione di un sistema col mondo circostante mediante ingressi e uscite (inputs e outputs). Gli argomenti d'interesse principale per tali operatori sono la controllabilità, l'osservabilità e la stabilizzabilità. Gli operatori d'osservazione e controllo sono gli ingredienti essenziali dei sistemi lineari ben posti.

A differenza della teoria del controllo finito-dimensionale, per sistemi infinito-dimensionali ci sono diversi concetti, non equivalenti, di controllabilità e osservabilità. Quelli più forti sono i concetti di controllabilità esatta e osservabilità esatta, rispettivamente. La controllabilità esatta al tempo  $t > 0$  significa che ogni stato finale può essere raggiunto, partendo dallo stato iniziale zero, per mezzo di un adatto segnale di input sull'intervallo di tempo  $[0, t]$ . Il concetto duale di osservabilità esatta al tempo  $t$  significa che se l'ingresso è zero, lo stato iniziale può essere recuperato in modo continuo dal segnale d'uscita sull'intervallo di tempo  $[0, t]$ .

Il problema della controllabilità delle equazioni differenziali paraboliche è stato considerevolmente sviluppato negli ultimi decenni. Dopo i primissimi lavori di Fattorini e Russell [13],[14], Russell [23] e Seidman [24], si è avuto un evidente progresso con i risultati di Lebeau e Robbiano [20] e Fursikov e Imanuvilov [18]. L'elemento innovativo della teoria è stata, in [20] e [18], rispettivamente, l'introduzione delle stime di Carleman locali per equazioni ellittiche (utilizzate per studiare la controllabilità a zero dell'equazione del calore su una varietà) e stime di Carleman globali per equazioni paraboliche. Tale teoria è stata estesa anche a problemi semilineari, vedi per esempio Anita e Barbu [2], Fernandez-Cara [15], a equazioni su domini illimitati con i

lavori di De Teresa [11], Micu e Zuazua [21] e Miller [22] e alle equazioni di Stokes e Navier-Stokes, vedi Barbu [3], Coron e Fursikov [9], Fabre e Lebeau [12], Fernandez-Cara, Guerrero e Imanuvilov [16], Imanuvilov [19], Fursikov e Imanuvilov [18].

Mentre per le equazioni paraboliche in forma nondegenere la teoria è stata ampiamente sviluppata, per i casi degeneri esistono ancora pochi risultati. Per equazione parabolica in forma degenera si intende un'equazione differenziale alle derivate parziali in cui il coefficiente del termine di ordine massimo nella variabile spaziale, generalmente non costante, si annulla in uno o in entrambi gli estremi del suo dominio di definizione, nel caso mono-dimensionale, alla frontiera di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ , nel caso a più dimensioni.

In altre parole, lo studio della controllabilità della semplice equazione parabolica degenera

$$u_t - (a(x)u_x)_x = h\chi_\omega, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, T) \quad (1)$$

è stato affrontato per esempio in [5], poi esteso in [6], attraverso stime di Carleman, su opportuni spazi funzionali di Sobolev ponderati.

L'equazione (1), dove il controllo  $h$  agisce su un sottoinsieme non vuoto  $\omega \subset (0, 1)$ , modella l'equazione del calore a una dimensione.

Nell'ultima parte della tesi si illustra la naturale estensione e generalizzazione del problema monodimensionale di cui sopra, ovvero si considerano la proprietà di controllabilità a zero di equazioni paraboliche degeneri in più dimensioni, studiando il problema ai valori iniziali e al bordo

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(A(x)\nabla u)_x = f(t, x)\chi_\omega(x), & (t, x) \in \Omega_T = (0, T) \times \Omega, \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in \Gamma_T = (0, T) \times \Gamma, \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\Omega), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

dove la matrice  $A(x)$  è degenera al bordo del suo dominio di definizione.

# Capitolo 1

## Teoria dei Semigrupp

### 1.1 Semigrupp fortemente continui e proprietà principali

**Definizione 1.1.1.** Sia  $X$  uno spazio di Banach e  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  una famiglia di operatori lineari limitati su  $X$ , ovvero appartenenti a  $\mathcal{L}(X)$ . Se sono verificate

1.  $\mathcal{T}(0) = I$
2.  $\mathcal{T}(t+s) = \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s) \quad \forall t, s \geq 0$  (proprietà di semigrupp)
3.  $\mathcal{T}(t)x \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{X} x \quad \forall x \in X$ . (forte continuità)

si dice che  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  è un *semigrupp fortemente continuo* di operatori lineari appartenenti a  $\mathcal{L}(X)$  o, brevemente, un *semigrupp di classe  $\mathcal{C}_0$* .

**Definizione 1.1.2.** L'operatore lineare  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow X$  definito da

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{T}(t)x - x}{t} \right\}$$

$$Ax := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{T}(t)x - x}{t}$$

si chiama *generatore infinitesimale* del semigrupp fortemente continuo  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$ .

L'operatore  $A$  è un operatore lineare, generalmente illimitato, e si vedrà che è definito solo su un sottospazio denso  $\mathcal{D}(A)$  di uno spazio di Banach  $X$ . Allo scopo di derivare il semigrupp  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  dal suo generatore  $(A, \mathcal{D}(A))$ , è necessario un terzo oggetto, *l'operatore risolvete*.

**Definizione 1.1.3.** (*Operatore Risolvente*)

Si definisce

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - A : \mathcal{D}(A) \rightarrow X \text{ è biettiva}\} \quad (1.1)$$

l'insieme risolvente e il suo complementare  $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$  lo spettro di  $A$ . Per  $\lambda \in \rho(A)$ , l'inverso

$$R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1} \quad (1.2)$$

è, per il teorema del grafo chiuso, un operatore limitato su  $X$  e sarà detto il *risolvente* (di  $A$  nel punto  $\lambda$ ).

**Esempio 1.** Sia  $A \in \mathcal{L}(X)$ , poniamo

$$\mathcal{T}(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

la serie converge nella norma di  $\mathcal{L}(X)$  per ogni  $t \geq 0$ .

Si ha  $e^{tA} \in \mathcal{L}(X) \quad \forall t \geq 0$  (e per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ). La famiglia di operatori  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  costituisce un *semigrupp fortemente continuo*, infatti  $e^{0A} = I$ ;  $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$ ,

$$\|e^{tA} - I\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^k \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

abbiamo dunque

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|\mathcal{T}(t) - I\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$$

**Esempio 2.** (*Heat Semigroup*)

Sia  $X = L^2(\mathbb{R})$ , per ogni  $t \geq 0$  e  $f \in X$  definiamo l'operatore

$$\mathcal{T}(t)f(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-s)^2}{4t}} f(s) ds \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

applicando la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  rispetto la variabile  $x$  alla definizione di  $\mathcal{T}$  otteniamo

$$(\mathcal{F}\mathcal{T}(t)f)(\xi) = e^{-\xi^2 t} (\mathcal{F}f)(\xi)$$

mediante l'antitrasformata  $\mathcal{F}^{-1}$  vediamo che

$$\mathcal{T}(0)f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\mathcal{T}(0)(f)) = (\mathcal{F}f) = f$$

e quindi  $\mathcal{T}(0) = I$ . Inoltre

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t+s)f &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}\mathcal{T}(t+s)(f)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-\xi^2(t+s)}(\mathcal{F}f)) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(e^{-\xi^2 t} \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}e^{-\xi^2 s}(\mathcal{F}f))) \\ &= \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s)f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}), \forall t, s \geq 0 \end{aligned}$$



**Definizione 1.1.4.** (*Limite di Crescita*)

Si chiama *Limite di Crescita* o *Growth Bound*, il numero definito da

$$\omega_0(\mathcal{T}) = \inf_{t \in (0, \infty)} \frac{1}{t} \log \|\mathcal{T}(t)\|$$

**Proposizione 1.1.1.** *Sia  $\mathcal{T}$  un semigruppero fortemente continuo su  $X$ , con limite di crescita  $\omega_0(\mathcal{T})$ . Allora*

1.  $\omega_0(\mathcal{T}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mathcal{T}(t)\|$
2. per ogni  $\omega > \omega_0(\mathcal{T})$  esiste  $M_\omega \in [1, \infty)$  tale che

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \quad \forall t \in [0, \infty)$$

3. la funzione  $\varphi : [0, \infty) \times X \rightarrow X$  definita da  $\varphi(t, x) = \mathcal{T}(t)x$  è continua (rispetto la topologia prodotto)

*Dimostrazione.* Per la continuità a destra della funzione  $x \mapsto \mathcal{T}(t)x$  per  $t \rightarrow 0^+$ , abbiamo continuità in un intorno destro e per il teorema di Weierstrass  $\exists t_1 > 0$  tale che la funzione assume un massimo e un minimo nell'intervallo  $[0, t_1)$  e di conseguenza in tale intervallo è limitata. La stessa proprietà vale per un altro intorno  $[0, t_2)$  con  $t_2 \neq t_1$  e per la proprietà di semigruppero,  $\mathcal{T}(t_1 + t_2) = \mathcal{T}(t_1)\mathcal{T}(t_2) = \mathcal{T}(s)$  la stessa funzione è continua, dunque limitata, su  $[0, s)$  con  $s = t_1 + t_2$ . Data l'arbitrarietà di  $s$  abbiamo che  $x \mapsto \mathcal{T}(t)x$  è limitata su  $[0, s)$  per ogni  $s > 0$ . Applicando il principio di uniforme limitatezza, segue che la funzione  $t \mapsto \log \|\mathcal{T}(t)\|$  è limitata per  $t \in [0, T], \forall T > 0$ .

Denotiamo  $p(t) = \log \|\mathcal{T}(t)\|$ , per la proprietà di semigruppero e per la proprietà della norma operatoriale  $\|\mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s)\| \leq \|\mathcal{T}(t)\| \cdot \|\mathcal{T}(s)\|$  con  $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(X)$ ,  $\forall t, s \geq 0$  segue

$$\begin{aligned} p(t + s) &= \log \|\mathcal{T}(t + s)\| \\ &= \log \|\mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s)\| \\ &\leq \log \|\mathcal{T}(t)\| + \log \|\mathcal{T}(s)\| \\ &= p(t) + p(s). \end{aligned}$$

da cui  $p(t + s) \leq p(t) + p(s)$ . Denotiamo ora con  $[t]$  e  $\{t\}$  rispettivamente la parte intera e la parte frazionaria di  $t \in [0, \infty)$ . Abbiamo così

$$p(t) = p([t] + \{t\}) \leq p([t]) + p(\{t\}) = [t]p(1) + p(\{t\})$$

Ora, sappiamo che  $\|\mathcal{T}(t)\|$  è limitata dall'alto, di conseguenza lo è anche  $p(\{t\})$ . Dividendo la precedente espressione per  $t$  e prendendo il limite superiore di entrambe le parti troviamo

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( p(1) + \frac{M}{t} \right) = p(1)$$

dove  $M = \max p(\{t\})$ . La stessa formula (con la stessa dimostrazione) vale se sostituiamo  $p$  con  $p_\alpha$ , dove  $p_\alpha(t) = p(\alpha t)$ ,  $\alpha \in (0, \infty)$ . Da cui segue

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq \frac{p(\alpha)}{\alpha} \quad \forall \alpha > 0$$

quindi  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} \leq \inf_{t \in (0, \infty)} \frac{p(t)}{t}$ . Da questa disuguaglianza vale anche l'opposta, così otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{t} = \inf_{t \in (0, \infty)} \frac{p(t)}{t} = \omega_0(\mathcal{T})$$

da cui il punto 1. Per quanto riguarda il punto 2., se  $\omega > \omega_0(\mathcal{T})$ , allora  $\exists t_\omega \geq 0$  t.c.

$$\omega_0(\mathcal{T}) \leq \frac{\log \|\mathcal{T}(t)\|}{t} \leq \omega \quad \forall t > t_\omega$$

da cui  $\|\mathcal{T}(t)\| \leq e^{\omega t}$ ,  $\forall t > t_\omega$ . Quindi, possiamo porre  $M_\omega = \sup_{t \in [0, t_\omega]}$ , e segue il punto 2. Veniamo al punto 3.. Proviamo che la funzione  $t \rightarrow \varphi(t, f_0)$  è continua, con  $f_0 \in X$  fissata. La continuità da destra è nota. Per mostrare la continuità da sinistra prendiamo una successione sulla retta reale  $t_n$  convergente a  $t_0 > 0$ , con  $t_n < t_0$ . Dunque  $\|\varphi(t_n, f) - \varphi(t_0, f)\| = \|\mathcal{T}(t_n)(I - \mathcal{T}(t_0 - t_n))f\| \leq K \|(I - \mathcal{T}(t_0 - t_n))f\|$ , dove  $K$  è un maggiorante per  $\|\mathcal{T}(t_n)\|$ . Sia  $(t_n, f_n) \rightarrow (t_0, f_0) \in [0, \infty) \times X$  con  $f_n$  successione di funzioni convergente a  $f_0$  in  $X$ . Allora

$$\mathcal{T}(t_n)f_n - \mathcal{T}(t_0)f_0 = \mathcal{T}(t_n)(f_n - f_0) + \mathcal{T}(t_n)f_0 - \mathcal{T}(t_0)f_0$$

la quale implica che

$$\|\varphi(t_n, f_n) - \varphi(t_0, f_0)\| \leq K \|f_n - f_0\| + \|\varphi(t_n, f_0) - \varphi(t_0, f_0)\|$$

dove  $K$  è ancora un maggiorante per  $\|\mathcal{T}(t_n)\|$  □

**Definizione 1.1.5.** Sia  $\mathcal{T}$  un semigrupp fortemente continuo su  $X$ , con limite di crescita  $\omega_0(\mathcal{T})$ . Questo semigrupp si dice *esponenzialmente stabile* se  $\omega_0(\mathcal{T}) < 0$ .

**Proposizione 1.1.2.** *Sia  $\mathcal{T}$  un semigruppı fortemente continuo su  $X$ , con generatore  $A$ . Allora, per ogni  $x \in \mathcal{D}(A)$  e  $t \geq 0$  abbiamo che  $\mathcal{T}_t z \in \mathcal{D}(A)$  e*

$$\frac{d}{dt} \mathcal{T}_t z = A \mathcal{T}_t z = \mathcal{T}_t A z \quad (1.3)$$

*Dimostrazione.* Se  $z \in \mathcal{D}(A)$ ,  $t \geq 0$  e  $\tau > 0$ , allora

$$\frac{\mathcal{T}_\tau - I}{\tau} \mathcal{T}_t z = \mathcal{T}_t \frac{\mathcal{T}_\tau - I}{\tau} z \rightarrow \mathcal{T}_t A z, \quad \text{per } \tau \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

per cui  $\mathcal{T}_t z \in \mathcal{D}(A)$  e  $A \mathcal{T}_t z = \mathcal{T}_t A z$ . Inoltre, (1.1.2) implica che la derivata da destra di  $\mathcal{T}_t z$  esiste ed   uguale a  $A \mathcal{T}_t z$ . Resta da dimostrare che, per  $t > 0$  anche la derivata sinistra di  $\mathcal{T}_t z$  esiste ed   uguale a  $\mathcal{T}_t A z$ . Questo segue da

$$\frac{\mathcal{T}_t z - \mathcal{T}_{t-\tau} z}{\tau} - \mathcal{T}_t A z = \mathcal{T}_{t-\tau} \left[ \frac{\mathcal{T}_\tau z - z}{\tau} - A z \right] + (\mathcal{T}_{t-\tau} A z - \mathcal{T}_t A z)$$

infatti, utilizzando la Proposizione 1.1.1 e la prima parte di questa dimostrazione, vediamo che entrambi i termini al secondo membro dell'ultima equazione, convergono a zero per  $\tau \rightarrow 0$ .  $\square$

**Proposizione 1.1.3.** *Sia  $\mathcal{T}$  un semigruppı fortemente continuo su  $X$ , con generatore  $A$ . Sia  $z_0 \in X$ . Per ogni  $\tau > 0$  si pone*

$$z_\tau = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{T}_t z_0 dt. \quad (1.5)$$

Allora  $z_\tau \in \mathcal{D}(A)$  e  $\lim_{\tau \rightarrow 0} z_\tau = z_0$ .

*Dimostrazione.* Dalla continuit  della mappa  $x \mapsto \mathcal{T}(t)x$  e dalla definizione di  $z_\tau$  segue  $z_\tau \rightarrow z_0$  per  $\tau \rightarrow 0$ . Per ogni  $\tau, h > 0$

$$\frac{\mathcal{T}_h - I}{h} z_\tau = \frac{1}{h\tau} \int_\tau^{\tau+h} \mathcal{T}_t z_0 dt - \frac{1}{h\tau} \int_0^h \mathcal{T}_t z_0 dt$$

effettuando il limite, per  $h \rightarrow 0$  a entrambi i membri si ottiene

$$A z_\tau = \frac{1}{\tau} (\mathcal{T}_\tau z_0 - z_0)$$

dunque  $z_\tau \in \mathcal{D}(A)$ .  $\square$

**Osservazione 1.1.4.** *Dalla dimostrazione di cui sopra segue il seguente utile risultato:*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t z - z &= A \int_0^t \mathcal{T}_s z ds \quad \forall z \in X \\ &= \int_0^t \mathcal{T}_s A z ds \quad \forall z \in \mathcal{D}(A) \end{aligned} \quad (1.6)$$

**Teorema 1.1.5.** *Il generatore di un semigrupp fortemente continuo è un operatore lineare chiuso e densamente definito che determina univocamente il semigrupp.*

*Dimostrazione.* Sia  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  un semigrupp fortemente continuo su uno spazio di Banach  $X$ . Come già evidenziato, il suo generatore  $(A, \mathcal{D}(A))$  è un operatore lineare. Per dimostrare che  $A$  è chiuso, consideriamo una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$  per la quale  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y$  esistono. Per la (1.6) si ha

$$\mathcal{T}_t x_n - x_n = \int_0^t \mathcal{T}_s A x_n ds$$

per  $t > 0$ . L'uniforme convergenza di  $\mathcal{T} A x_n$  su  $[0, t]$  per  $n \rightarrow \infty$  implica

$$\mathcal{T}_t x - x = \int_0^t \mathcal{T}_s y ds.$$

Moltiplicando entrambi i membri per  $1/t$  e facendo il limite per  $t \rightarrow 0^+$ , vediamo che  $x \in \mathcal{D}(A)$  e  $Ax = y$ , i.e.,  $A$  è chiuso.

Per la Proposizione 1.1.3 gli elementi  $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{T}_t z_0 dt$  appartengono sempre a  $\mathcal{D}(A)$ . La forte continuità di  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  implica

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{T}(s)x ds$$

per ogni  $x \in X$ , si conclude che  $\mathcal{D}(A)$  è denso in  $X$ .

Infine, per assurdo supponiamo che  $(\mathcal{S}(t))_{t \geq 0}$  sia un altro semigrupp fortemente continuo avente lo stesso generatore  $(A, \mathcal{D}(A))$ . Per  $x \in \mathcal{D}(A)$  e  $t > 0$ , consideriamo la mappa

$$s \mapsto \eta_x(s) := \mathcal{T}(t-s)\mathcal{S}(s)x$$

per  $0 \leq s \leq t$ . Per  $s$  fissato, l'insieme

$$\left\{ \frac{\mathcal{S}(s+h)x - \mathcal{S}(s)x}{h} : h \in (0, 1] \right\} \cup \{A\mathcal{S}(s)x\}$$

è compatto, i rapporti incrementali

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(\eta_x(s+h) - \eta_x(s)) &= \mathcal{T}(t-s-h) \frac{1}{h}(\mathcal{S}(s+h)x - \mathcal{S}(s)x) \\ &\quad + \frac{1}{h}(\mathcal{T}(t-s-h) - \mathcal{T}(t-s))\mathcal{S}(s)x \quad (1.7) \end{aligned}$$

convergono, per la forte continuit  e per la (1.3), a

$$\frac{d}{ds}\eta_x(s) = \mathcal{T}(t-s)A\mathcal{S}(s)x - A\mathcal{T}(t-s)\mathcal{S}(s)x = 0.$$

Da  $\eta_x(0) = \mathcal{T}(t)(x)$  e  $\eta_x(t) = \mathcal{S}(t)(x)$  si ottiene

$$\mathcal{T}(t)(x) = \mathcal{S}(t)(x)$$

per ogni  $x$  nel dominio denso  $\mathcal{D}(A)$ . Dunque,  $T(t) = S(t)$  per ogni  $t \geq 0$ .  $\square$

Ricordando la definizione di *spettro, insieme risolvente e operatore risolvente*, ricaviamo le seguenti importanti identit .

**Lemma 1.1.6.** *Sia  $(A, \mathcal{D}(A))$  il generatore di un semigruppı fortemente continuo  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$ . Allora, per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  e  $t > 0$ , valgono le seguenti identit :*

$$e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t)x - x = (A - \lambda) \int_0^t e^{-\lambda s}\mathcal{T}(s)x ds \quad \forall x \in X \quad (1.8)$$

$$= \int_0^t e^{-\lambda s}\mathcal{T}(s)(A - \lambda)x ds \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \quad (1.9)$$

*Dimostrazione.* L'asserto segue dall'applicazione della formula (1.6) al semigruppı riscaldato

$$S(t) := e^{-\lambda t}\mathcal{T}(t), \quad t \geq 0$$

il cui generatore    $B := A - \lambda$  con dominio  $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$ .  $\square$

**Teorema 1.1.7.** *Sia  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  un semigruppı fortemente continuo sullo spazio di Banach  $X$  e si prendano le costanti  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $M \geq 1$  (si veda la Proposizione 1.1.1) tali che*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad (1.10)$$

per  $t \geq 0$ . Per il generatore  $(A, \mathcal{D}(A))$  di  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  valgono le seguenti propriet :

1. se  $\lambda \in \mathbb{C}$    tale che  $R(\lambda)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s}\mathcal{T}(s)x ds$  esiste per ogni  $x \in X$ , allora  $\lambda \in \rho(A)$  e  $R(\lambda, A) = R(\lambda)$ .
2. se  $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ , allora  $\lambda \in \rho(A)$ , e il risolvente   dato dall'espressione integrale del punto 1.
3.  $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$  per ogni  $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ .

La formula  $R(\lambda, A)$  in 1. è chiamata la rappresentazione integrale del risolvete. Tale integrale deve essere inteso come un integrale di Riemann improprio, i.e.,

$$R(\lambda, A)x := \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\lambda s} \mathcal{T}(s)x ds \quad (1.11)$$

per ogni  $x \in X$ . Per semplicità, si scriverà

$$R(\lambda, A)x := \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mathcal{T}(s)x ds \quad (1.12)$$

*Dimostrazione.* 1. Senza perdita di generalità si può assumere che  $\lambda = 0$ . Dunque per arbitrari  $x \in X$  e  $h > 0$ , si ha

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{T}(h) - I}{h} R(0)x &= \frac{\mathcal{T}(h) - I}{h} \int_0^\infty \mathcal{T}(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty \mathcal{T}(s+h)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty \mathcal{T}(s)x ds \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\infty \mathcal{T}(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty \mathcal{T}(s)x ds \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^h \mathcal{T}(s)x ds \end{aligned}$$

facendo il limite per  $h \rightarrow 0^+$  si conclude che  $\text{range} R(0) \subseteq \mathcal{D}(A)$  e  $AR(0) = -I$ . D'altra parte, per  $x \in \mathcal{D}(A)$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mathcal{T}(s)x ds = R(0)x,$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A \int_0^t \mathcal{T}(s)x ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \mathcal{T}(s)Ax ds = R(0)Ax,$$

dove si è usato la (1.6) per la seconda uguaglianza. Sappiamo dal Teorema 1.1.5 che  $A$  è chiuso, questo implica  $R(0)Ax = AR(0)x = -x$  e quindi  $R(0) = (-A)^{-1}$  come richiesto. I punti 2. e 3. seguono facilmente da 1. e dalla stima

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} \mathcal{T}(s)x ds \right\| \leq \int_0^t e^{(\omega - \text{Re}\lambda)s} ds,$$

per il fatto che  $\text{Re}\lambda > \omega$ , l'integrale a secondo membro converge a  $\frac{M}{(\text{Re}\lambda - \omega)}$  per  $t \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Corollario 1.1.8.** *Per il generatore  $(A, \mathcal{D}(A))$  di un semigruppı fortemente continuo  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  che soddisfa*

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq Me^{\omega t} \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

si ha, per  $\operatorname{Re}\lambda > \omega$  e  $n \in \mathbb{N}$ , che

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} R(\lambda, A)x \quad (1.13)$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} \mathcal{T}(s)x ds \quad (1.14)$$

per ogni  $x \in X$ . In particolare, le stime

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \quad (1.15)$$

valgono per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ .

*Dimostrazione.* L'equazione (1.13)   valida per ogni operatore con  $\rho(A) \neq \{\emptyset\}$ . D'altra parte, per il teorema 1.1.7 1., si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} R(\lambda, A)x &= \frac{d}{d\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda s} \mathcal{T}(s)x ds \\ &= - \int_0^\infty s e^{-\lambda s} \mathcal{T}(s)x ds \end{aligned}$$

per  $\operatorname{Re}\lambda > \omega$  e ogni  $x \in X$ . Procedendo per induzione, si deduce (1.13). Infine, la stima (1.15) segue da

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)^n x\| &= \frac{1}{(n-1)!} \cdot \left\| \int_0^\infty s^{n-1} e^{-\lambda s} \mathcal{T}(s)x ds \right\| \\ &\leq \frac{M}{(n-1)!} \cdot \int_0^\infty s^{n-1} e^{(\omega - \operatorname{Re}\lambda)s} ds \cdot \|x\| \\ &= \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \cdot \|x\| \end{aligned}$$

per ogni  $x \in X$ . □

**Definizione 1.1.6.** A ogni operatore lineare  $A$  associamo il suo *limite spettrale* definito da

$$s(A) := \sup \{ \operatorname{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A) \}.$$

Come conseguenza del teorema 1.1.7 2. vale la seguente relazione fra il limite di crescita di un semigrupp fortemente continuo (si veda Definizione 1.1.4) e il limite spettrale del suo generatore.

**Corollario 1.1.9.** *Per un semigrupp fortemente continuo  $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$  con generatore  $A$ , si ha*

$$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 < +\infty.$$

### 1.1.1 Teorema di Hille-Yosida

Questo teorema, di fondamentale importanza, fornisce condizioni necessarie e sufficienti affinché un operatore lineare sia un generatore infinitesimale per un semigrupp fortemente continuo

**Teorema 1.1.10.** *Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ , i seguenti enunciati sono equivalenti:*

1.  $\mathcal{D}(A)$  è denso in  $X$  ed esistono due numeri reali  $M$  e  $\omega$ , con  $M > 0$  tali che  $\rho(A) \supset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$  e sono valide le seguenti stime

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda, \operatorname{Re} \lambda > \omega \quad (1.16)$$

2.  $A$  è il generatore infinitesimale di un semigrupp fortemente continuo  $\mathcal{T}$  ed esistono due numeri reali  $M$  e  $\omega$ , con  $M > 0$  tali che

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (1.17)$$

## 1.2 Semigrupp di contrazioni e operatori dissipativi

Un semigrupp fortemente continuo  $\mathcal{T}$  si dice *semigrupp di contrazioni* se

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq 1. \quad \forall t \geq 0 \quad (1.18)$$

Se è un semigrupp di contrazioni allora la condizione (1.16) si riduce a

$$\|(\lambda - A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda} \quad \forall \lambda, \operatorname{Re} \lambda > 0 \quad (1.19)$$

perchè si può scegliere  $M = 1$  e  $\omega = 0$ . Si possono però caratterizzare i semigrupp di contrazioni mediante una speciale classe di operatori lineari, che sono gli *operatori dissipativi*.



Per dare questa definizione è necessario il concetto di sub-differenziale:  $\forall x \in X$  il sub-differenziale  $\partial|x|$  è definito da

$$\partial|x| = \{x' \in X' : |x'| = 1, \langle x, x' \rangle = |x|\} \quad (1.20)$$

dove  $X'$  è il duale topologico di  $X$ . Per il teorema di Hahn-Banach  $\partial|x|$  non è mai vuoto.

**Definizione 1.2.1.** (Operatore dissipativo)

1. diciamo che un operatore lineare  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$  è *dissipativo* se

$$\forall x \in \mathcal{D}(A), \quad \exists x' \in \partial|x| \text{ tale che } \operatorname{Re}\langle Ax, x' \rangle \leq 0$$

2. L'operatore lineare  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$  è detto *massimale dissipativo*, o *m-dissipativo* se è dissipativo e non ha ulteriori estensioni dissipative

## 1.3 Semigrupperi Analitici

**Definizione 1.3.1.** (Semigruppero Analitico)

Un operatore lineare chiuso  $(A, \mathcal{D}(A))$  con dominio denso in uno spazio di Banach  $X$  è detto *settoriale*, (di angolo  $\delta$ ) se esiste  $0 < \delta \leq \pi/2$  tale che il settore

$$\sum_{\frac{\pi}{2}+\delta} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \right\} \setminus \{0\}$$

è contenuto nell'insieme risolvente  $\rho(A)$ , e se per ogni  $\epsilon \in (0, \delta)$  esiste  $M_\epsilon \geq 1$  tale vale la stima

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\epsilon}{|\lambda|} \quad \text{per ogni } 0 \neq \lambda \in \overline{\sum_{\frac{\pi}{2}+\delta-\epsilon}} \quad (1.21)$$

Per operatori settoriali e appropriati cammini  $\gamma$ , la funzione esponenziale  $e^{tA}$  può ora essere definita mediante la formula integrale di Cauchy.

**Definizione 1.3.2.** Sia  $(A, \mathcal{D}(A))$  un operatore settoriale di angolo  $\delta$ . Si definisce  $\mathcal{T}(0) := I$  e gli operatori  $\mathcal{T}(z)$ , per  $z \in \sum_\delta$  mediante

$$\mathcal{T}(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu z} R(\mu, A) d\mu \quad (1.22)$$

dove  $\gamma$  è una curva liscia a tratti in  $\sum_{\frac{\pi}{2}+\delta}$  con supporto tra  $\infty e^{-i\pi/2+\delta'}$  e  $\infty e^{i\pi/2+\delta'}$  per  $\delta' \in (|\arg z|, \delta)$ .

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $(A, \mathcal{D}(A))$  un operatore settoriale di angolo  $\delta$ . Allora, per ogni  $z \in \Sigma_\delta$ , le mappe  $\mathcal{T}(z)$  sono operatori lineari limitati su  $X$  che soddisfano le seguenti proprietà:*

1.  $\|\mathcal{T}(z)\|$  è uniformemente limitato per  $z \in \Sigma_{\delta'}$  se  $0 < \delta' < \delta$ .
2. la mappa  $z \mapsto \mathcal{T}(z)$  è analitica in  $\Sigma_{\delta'}$ .
3.  $\mathcal{T}(z_1 + z_2) = \mathcal{T}(z_1)\mathcal{T}(z_2)$  per ogni  $z_1, z_2 \in \Sigma_{\delta'}$
4. la mappa  $z \mapsto \mathcal{T}(z)$  è fortemente continua in  $\Sigma_{\delta'} \cup \{0\}$  se  $0 < \delta' < \delta$ .

*Dimostrazione.* Per prima cosa verifichiamo che per  $z \in \Sigma_{\delta'}$  con  $\delta' \in (0, \delta)$  fissato, l'integrale (1.22) che definisce  $\mathcal{T}(z)$  converge uniformemente in  $\mathcal{L}(X)$  rispetto la norma operatoriale. Dato che la funzione integranda è analitica in  $\mu \in \Sigma_{\frac{\pi}{2} + \delta}$ , questo integrale, se esiste, è indipendente dalla particolare scelta del cammino  $\gamma$  per il teorema integrale di Cauchy. Dunque, possiamo scegliere  $\gamma = \gamma_r$ , vedi figura a pag. 15, i.e.,  $\gamma$  consiste delle tre parti

$$\begin{aligned} \gamma_{r,1} &:= \{-\rho^{-i(\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon)} : -\infty \leq \rho \leq -r\}, \\ \gamma_{r,2} &:= \left\{ r e^{i\alpha} : -\left(\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon\right) \leq \alpha \leq \left(\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon\right) \right\}, \\ \gamma_{r,3} &:= \left\{ \rho^{i(\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon)} : r \leq \rho \leq \infty \right\}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

dove  $\epsilon := \frac{(\delta - \delta')}{2} > 0$  e  $r := \frac{1}{|r|}$ .

Dunque, per  $\mu \in \gamma_{r,3}$ ,  $z \in \Sigma_{\delta'}$ , si può scrivere

$$\mu z = |\mu z| e^{-i(\frac{\pi}{2} + \delta - \epsilon)},$$

dove  $\frac{\pi}{2} + \epsilon \leq \arg \mu + \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \epsilon$ . Dunque, abbiamo

$$\frac{1}{\mu z} \operatorname{Re}(\mu z) = \cos(\arg \mu + \arg z) \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) = -\sin \epsilon$$

dunque

$$|e^{\mu z}| \leq e^{-|\mu z| \sin \epsilon} \quad (1.24)$$

per ogni  $z \in \Sigma_{\delta'}$  e  $\mu \in \gamma_{r,3}$ . Allo stesso modo si dimostra che (1.24) è vera per  $z \in \Sigma_{\delta'}$  e  $\mu \in \gamma_{r,1}$ , dalla quale concludiamo

$$\|e^{\mu z} R(\mu, A)\| \leq e^{-|\mu z| \sin \epsilon} \frac{M_\epsilon}{|\mu|} \quad (1.25)$$

per ogni  $z \in \Sigma_{\delta'}$  e  $\mu \in \gamma_{r,1} \cup \gamma_{r,3}$ . D'altra parte la stima

$$\|e^{\mu z} R(\mu, A)\| \leq e \frac{M_\epsilon}{|\mu|} = e M_\epsilon z \quad (1.26)$$

vale per ogni  $z \in \sum_{\delta'}$  e  $\mu \in \gamma_{r,2}$ . Utilizzando le stime (1.25) e (1.26) si conclude

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\gamma_r} e^{\mu z} R(\mu, A) d\mu \right\| &\leq \sum_{k=1}^3 \left\| \int_{\gamma_{r,k}} e^{\mu z} R(\mu, A) d\mu \right\| \\ &\leq 2M_\epsilon \int_{\frac{1}{|z|}}^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\rho|z|\sin\epsilon} d\rho + eM_\epsilon|z| \cdot \frac{2\pi}{|z|} \\ &= 2M_\epsilon \int_1^{\infty} \frac{1}{\rho} e^{-\rho\sin\epsilon} d\rho + 2\pi eM_\epsilon \end{aligned}$$

per ogni  $z \in \sum_{\delta'}$ . Questo dimostra che l'integrale che definisce  $\mathcal{T}(z)$  converge assolutamente e uniformemente in  $\mathcal{L}(X)$  per  $z \in \sum_{\delta'}$ , i.e., gli operatori  $\mathcal{T}(z)$  sono ben definiti e soddisfano 1.

Inoltre, dalle considerazioni sopra, segue che la mappa  $z \mapsto \mathcal{T}(z)$  è analitica per  $z \in \sum_{\delta} = \bigcup_{0 < \delta' < \delta} \sum_{\delta'}$ , la quale prova 2.

Ora si verifica la proprietà di semigruppj 3. Per dimostrarla, scegliamo una costante positiva  $c$  tale che  $\gamma \cap \gamma' := \gamma_1 + (\gamma_1 + c) = \emptyset$ , dove  $\gamma_1$  è definito da (1.23) con  $r = 1$ . Allora, per  $z_1, z_2 \in \sum_{\delta'}$  si ottiene, utilizzando l'equazione risolvente e il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z_1)\mathcal{T}(z_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} e^{\mu z_1} e^{\mu z_2} R(\mu, A) R(\lambda, A) d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} \frac{e^{\mu z_1} e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} (R(\mu, A) R(\lambda, A)) d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\mu z_1} R(\mu, A) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda \right) d\mu \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} e^{\lambda z_2} R(\lambda, A) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu \right) d\lambda \end{aligned}$$

Chiudendo le curve  $\gamma$  e  $\gamma'$  con circonferenze di diametro crescente sulla sinistra e utilizzando il fatto che  $\gamma$  si trova sulla sinistra di  $\gamma'$ , il teorema integrale di Cauchy implica che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\mu z_1}}{\lambda - \mu} d\mu = 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma'} \frac{e^{\lambda z_2}}{\lambda - \mu} d\lambda = e^{\mu z_2}$$

così, si può concludere

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z_1)\mathcal{T}(z_2) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\mu z_1} e^{\mu z_2} R(\mu, A) d\mu \\ &= \mathcal{T}(z_1 + z_2) \end{aligned}$$

per tutti  $z_1, z_2 \in \sum_{\delta'}$ , da cui segue la proprietà di semigrupp 3.  
 Rimane da dimostrare la 4., i.e., la mappa  $z \mapsto \mathcal{T}(z)$  è fortemente continua in  $\sum_{\delta'} \cup \{0\}$  per ogni  $0 < \delta' < \delta$ . Per la 1 e 2 è sufficiente dimostrare che

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{T}(z)x - x = 0 \quad \text{per } z \in \sum_{\delta'}, x \in \mathcal{D}(A) \quad (1.27)$$

Partiamo dalla stima (1.24) e dalla formula integrale di Cauchy, considerando  $\gamma = \gamma_1$  che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{\mu z}}{\mu} d\mu = 1$$

per ogni  $z \in \sum_{\delta'}$ . Quindi, l'identità  $R(\mu, a)Ax = \mu R(\mu, A)x - x$  per  $x \in \mathcal{D}(A)$  porta a

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z)x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{\mu z} \left( R(\mu, A) - \frac{1}{\mu} \right) x d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\mu, A) \frac{e^{\mu z}}{\mu} Ax d\mu \end{aligned}$$

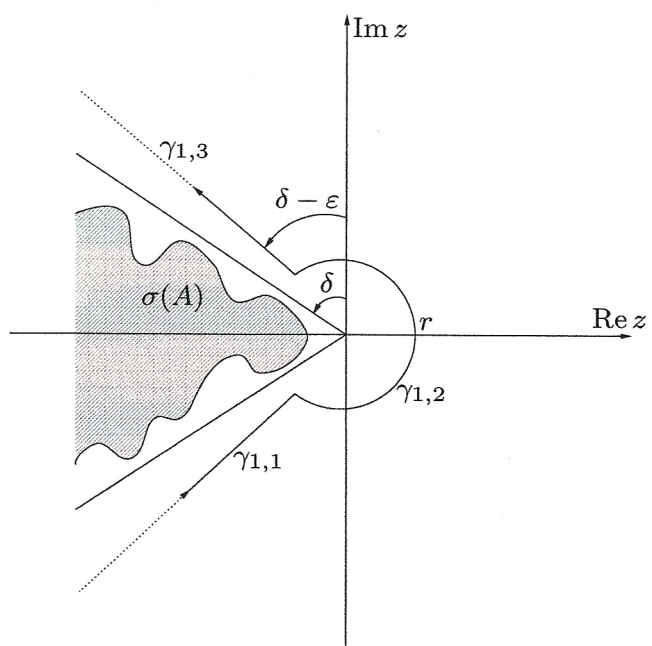
per ogni  $z \in \sum_{\delta'}$ . Ora, per la (1.21) e la (1.25), abbiamo

$$\left\| R(\mu, A) \frac{e^{\mu z}}{\mu} Ax \right\| \leq \frac{M_{\epsilon}}{|\mu|^2} (1 + e^{|z|}) \|Ax\|$$

per ogni  $\mu \in \gamma$  e  $z \in \sum_{\delta'}$ . Utilizzando questa stima e il fatto che  $\lim_{z \rightarrow 0} e^{\mu z} = 1$ , per il teorema della convergenza dominata di Lebesgue, si ha

$$\lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{T}(z)x - x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\mu} R(\mu, A) Ax d\mu = 0$$

per  $z \in \sum_{\delta'}$ , dove la seconda equazione segue dal teorema integrale di Cauchy chiudendo il cammino  $\gamma$  con circonferenze di diametro crescente sulla destra. Questo prova la (1.27) e la dimostrazione è completa.  $\square$



## 1.4 Esempi di semigrupp

### 1.4.1 Equazioni paraboliche

Sia  $H$  uno spazio di Hilbert e  $A$  un operatore chiuso auto-aggiunto in  $H$  con dominio denso  $\mathcal{D}(A)$  in  $H$ . Assumiamo che esista  $\omega \in \mathbb{R}$  tale che

$$\langle Ax, x \rangle \leq \omega |x|^2 \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \quad (1.28)$$

per il teorema di Lumer-Phillips,  $A$  è il generatore infinitesimale di un semigrupp fortemente continuo  $\mathcal{T}$  in  $H$  tale che

$$\|\mathcal{T}(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad t \geq 0 \quad (1.29)$$

**Proposizione 1.4.1.**  $\mathcal{T}$  è un semigrupp analitico.

*Dimostrazione.* si nota che  $A - \omega I$  è autoaggiunto negativo, allora  $\sigma(A) \subset ]-\infty, \omega[$ . Allora per ogni  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, \omega[$  e ogni  $y \in H$  esiste  $x \in \mathcal{D}(A)$  tale che

$$\lambda x - Ax = y \quad (1.30)$$

poniamo  $\lambda = \omega + \rho e^{i\theta}$ . Sostituendo in (1.30), si ottiene  $\rho e^{i\theta} x - (A - \omega)x = y$ . Ora moltiplichiamo per  $e^{-i\theta/2} x$  e prendiamo la parte reale. Otteniamo

$$\cos \frac{\theta}{2} |x|^2 - \cos \frac{\theta}{2} \langle (A - \omega I)x, x \rangle = \operatorname{Re} [e^{-i\theta/2} \langle x, y \rangle]$$

dalla condizione (1.28) segue che  $|x| \leq (\rho \cos \theta/2)^{-1} |y|$ , quindi

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\lambda - \omega| \cos \theta/2}$$

Ora scegliamo un settore  $\mathcal{T}_{\omega, \theta_0}$  per alcuni  $\theta_0$ ,  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$  e  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < \theta_0$ . Allora  $\cos \frac{\theta}{2} > \cos \frac{\theta_0}{2}$  e

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\lambda - \omega| \cos(\theta_0)/2}, \quad \text{per ogni } \lambda \in \mathcal{T}_{\omega, \theta_0}$$

così  $\mathcal{T}$  è un semigrupp analitico.  $\square$

**Esempio 3.** Sia  $\Omega$  un insieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  con frontiera regolare  $\partial\Omega$ . Consideriamo il problema ai valori iniziali per  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right\}, \quad x \in \Omega \\ u(t, x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \\ u(0, x) &= u_0(x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (1.31)$$

dove i coefficienti  $a_{jk}$  sono funzioni reali continue in  $\bar{\Omega}$ . Assumiamo che esista  $\nu > 0$  tale che valga la seguente condizione di forte ellitticit :

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \xi_j \xi_k \geq \nu |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.32)$$

Poniamo  $H = L^2(\Omega)$  e sia  $A$  l'operatore lineare in  $H$  definito come

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \xi_j \xi_k \geq \nu |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.33)$$

$$\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$(Au)(x) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ a_{jk}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \quad (1.34)$$

allora  $A$    auto-aggiunto e l'ipotesi (1.30)   soddisfatta con  $\omega = \lambda_0$ , dove  $\lambda_0$    il primo autovalore di  $A$ . Per ulteriori dettagli se veda [1].





# Capitolo 2

## Rappresentazione e controllo

### 2.1 Controllabilità e osservabilità di sistemi finito-dimensionali

Siano  $U$ ,  $X$  e  $Y$  spazi normati con prodotto scalare finito dimensionali. Si consideri il sistema di controllo lineare finito-dimensionale nell'intervallo  $[0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

dove  $x(t) \in X$  rappresenta lo stato (del sistema) al tempo  $t$ ,  $u(t) \in U$  la funzione d'ingresso (input signal),  $y(t) \in Y$  la funzione di uscita (output signal). Denotiamo  $n = \dim X$ . Nel sistema (2.1),  $A, B, C, D$  sono operatori lineari tali che  $A : X \rightarrow X$ ,  $B : U \rightarrow X$ ,  $C : X \rightarrow Y$  e  $D : U \rightarrow Y$ . L'equazione differenziale in (2.1) ha, per ogni funzione d'ingresso  $u$  continuo e ogni stato iniziale  $x(0)$ , soluzione unica

$$x(t) = e^{tA}x(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds. \quad (2.2)$$

L'ultima formula definisce le traiettorie di stato  $x(\cdot)$  anche per segnali d'ingresso che non sono continui, per esempio per  $u \in L^2([0, \infty); U)$ . Anche per tali funzioni d'ingresso,  $x(t)$  è una funzione continua nella variabile  $t$ .

Per ogni  $u \in L^2([0, \infty); U)$  e  $T \geq 0$ , si denota con  $\mathbf{P}_T u$  la restrizione di  $u$  nell'intervallo  $[0, T]$ . Per ogni sistema lineare come sopra si introducono due famiglie di operatori, dipendenti da  $T \geq 0$ ,  $\Phi_T \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty); U), X)$  e  $\Psi_T \in \mathcal{L}(X, L^2([0, \infty); Y))$  con

$$\Phi_T u = \int_0^T e^{A(T-s)}Bu(s)ds, \quad (2.3)$$

$$(\Psi_T x)(t) = \begin{cases} Ce^{At}x, & \text{se } t \in [0, T], \\ 0, & \text{se } t > T. \end{cases} \quad (2.4)$$

**Osservazione 2.1.1.** Se, in (2.1) abbiamo come condizione iniziale  $x(0) = 0$ , allora  $x(T) = \Phi_T u$ . Se invece si ha  $u = 0$  e  $x(0) = x_0$  allora  $P_T y = \Psi_T x_0$ .

Per questo motivo gli operatori  $\Phi_T$  sono chiamati mappe di input di (2.1), mentre  $\Psi_T$  sono chiamate mappe di output di (2.1).

**Definizione 2.1.1.** Il sistema (2.1) (o la coppia  $(A, B)$ ) è *controllabile* se per alcuni  $T > 0$  abbiamo  $\text{Range } \Phi_T = X$ . Il sistema (2.1) (o la coppia  $(A, C)$ ) è *osservabile* se per alcuni  $T > 0$  abbiamo  $\ker \Phi_T = \{\emptyset\}$ .

Controllabilità e osservabilità sono proprietà formalmente duali, come si vedrà di seguito. Ora consideriamo il *sistema duale* del sistema (2.1). Tale sistema è descritto da

$$\begin{cases} \dot{x}^d(t) = A^*x^d(t) + C^*y^d(t), \\ u^d(t) = B^*x^d(t) + D^*y^d(t), \end{cases} \quad (2.5)$$

dove  $y^d(t) \in Y$  è la funzione d'ingresso di 2.5 al tempo  $t$ ,  $x^d(t) \in X$  è il suo stato al tempo  $t$  e  $u^d(t) \in U$  è la sua funzione di uscita al tempo  $t$ . Si denotano con  $\Phi_T^d$  e  $\Psi_T^d$  le mappe di input e output di (2.5).

Allo scopo di esprimere gli aggiunti degli operatori  $\Phi_T$  e  $\Psi_T$ , si introducono gli operatori di riflessione rispetto al tempo  $R_T \in \mathcal{L}(L^2([0, \infty); U))$  definiti, per ogni  $T \geq 0$  da

$$(\Phi_T u)(t) = \begin{cases} u(T-t), & \text{se } t \in [0, T], \\ 0, & \text{se } t > T. \end{cases} \quad (2.6)$$

Sarà utile notare che

$$R_T^* = R_T \quad \text{e} \quad R_T^2 = P_T \quad (2.7)$$

**Proposizione 2.1.2.** Per ogni  $T \geq 0$  si ha  $\Phi_T^* = R_T \Psi_T^d$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $x_0 \in X$  e  $u \in L^2([0, \infty); U)$  abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \Phi_T u, x_0 \rangle &= \int_0^T \langle e^{A(T-s)} B u(s), x_0 \rangle ds \\ &= \int_0^T \langle u(s), B^* e^{(T-s)A^*} u(s) x_0 \rangle ds = \langle u, R_T \Psi_T^d x_0 \rangle \end{aligned}$$

□

Si può esprimere  $\Phi_T^*$  in termini degli operatori  $A$  e  $B$  come segue:

$$(\Phi_T^*x)(t) = B^*e^{(T-s)A^*}x, \quad \forall t \in [0, T].$$

**Corollario 2.1.3.** *Per ogni  $T \geq 0$  si ha  $\text{Range } \Phi_T = (\ker \Psi_T^d)^\perp$*

*Dimostrazione.* Secondo la (A.3) e utilizzando la proposizione precedente si ha

$$(\text{Range } \Phi_T)^\perp = \ker \Phi_T^* = \ker R_T \Psi_T^d$$

ma  $\ker R_T \Psi_T^d = \ker \Psi_T^d$ , si ottiene che  $(\text{Range } \Phi_T)^\perp = \ker \Psi_T^d$ . Prendendo i complementi ortogonali si ottiene la tesi  $\square$

## 2.2 Operatori di controllo e osservazione

In questo paragrafo  $U, X$  e  $Y$  sono spazi di Hilbert complessi che si identificano con i loro duali. Si introducono gli spazi  $X_1$  e  $X_{-1}$ , centrali nella teoria degli operatori illimitati di osservazione e controllo.

**Proposizione 2.2.1.** *Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$  un operatore densamente definito con  $\rho(A) \neq \emptyset$ . Allora, per ogni  $\beta \in \rho(A)$ , lo spazio  $\mathcal{D}(A)$  con la norma*

$$\|z\|_1 = \|(\beta I - A)z\| \quad \forall z \in \mathcal{D}(A)$$

*è uno spazio di Hilbert, denotato  $X_1$ . Le norme definite come sopra, per diversi  $\beta \in \rho(A)$  sono equivalenti alla norma del grafico. L'immersione  $X_1 \subset X$  è continua. Se  $L \in \mathcal{L}(X)$  è tale che  $L\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ , allora  $L \in \mathcal{L}(X_1)$*

*Dimostrazione.*  $\rho(A) \neq \emptyset$  implica che  $A$  è chiuso, dunque  $\mathcal{D}(A)$  è uno spazio di Hilbert con la norma del grafico  $\|\cdot\|_{gr}$ . Dimostriamo che per ogni  $\beta \in \rho(A)$ ,  $\|\cdot\|_1$  è equivalente a  $\|\cdot\|_{gr}$ . Ora segue che per alcuni  $c > 0$  abbiamo

$$\|z\|_1 \leq c \|z\|_{gr} \quad \forall z \in \mathcal{D}(A)$$

La dimostrazione di questa stima sfrutta la semplice relazione  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ ,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ . Per provare la stima in senso inverso, utilizziamo ancora questa stima, come segue:

$$\begin{aligned} \|z\|_{gr}^2 &= \|z\|^2 + \|(\beta I - A)z - \beta z\|^2 \\ &\leq \|z\|^2 + 2(\|(\beta I - A)z - \beta z\|^2 + \beta^2 \|z\|^2) \end{aligned}$$

ora, utilizzando la stima

$$\|z\| \leq \|(\beta I - A)^{-1}\| \cdot \|(\beta I - A)z\| \quad (2.8)$$

otteniamo  $\|z\|_{gr} \leq k \|z\|_1$  per alcuni  $k > 0$  indipendenti da  $z \in \mathcal{D}(A)$ . Così si è dimostrato che le norme  $\|z\|_1$  sono equivalenti alle norme  $\|z\|_{gr}$ .

La continuità delle immersioni  $X_1 \subset X$  segue da (2.8).

Ora consideriamo  $L \in \mathcal{L}(X)$  tale che  $L$  mappa  $\mathcal{D}(A)$  in se stesso, i.e.,  $L\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ . Ora, dalla proprietà che se  $V$  è uno spazio di Hilbert contenuto in  $H$  e  $LV \subset V$ , allora la restrizione di  $L$  a  $V$  è in  $\mathcal{L}(V)$ , abbiamo che  $L$  è continuo su  $X_1$ .  $\square$

Sia  $A$  come nella Proposizione 2.2.1, allora anche  $A^*$  ha le stesse proprietà. Così, possiamo definire  $X_1^d = \mathcal{D}(A^*)$  con la norma

$$\|z\|_1^d = \|(\bar{\beta}I - A^*)z\| \quad \forall z \in \mathcal{D}(A^*)$$

dove  $\bar{\beta} \in \rho(A^*)$ , o equivalentemente,  $\beta \in \rho(A)$ , e  $(X_1^d, \|\cdot\|_1^d)$  è uno spazio di Hilbert.

**Proposizione 2.2.2.** *Consideriamo  $A$  come nella Proposizione 2.2.1 e prendiamo  $\beta \in \rho(A)$ . Denotiamo con  $X_{-1}$  il completamento di  $X$  rispetto la norma*

$$\|z\|_{-1} = \|(\beta I - A)^{-1}z\| \quad \forall z \in X \quad (2.9)$$

*Allora le norme generate come sopra per diversi  $\beta \in \rho(A)$  sono equivalenti (in particolare,  $X_{-1}$  è indipendente dalla scelta di  $\beta$ ).*

*Dimostrazione.* Scegliamo lo stesso  $\beta$  per definire la norma su  $X_1^d$  (la scelta di  $\beta$  nella definizione di  $\|\cdot\|_1^d$  non è importante, come si evince dalla Proposizione 2.2.1 applicata ad  $A^*$ ). Per ogni  $z \in X$  abbiamo, utilizzando le proprietà degli operatori aggiunti e del risolvete

$$\begin{aligned} \|z\|_{-1} &= \|(\beta I - A)^{-1}z\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle (\beta I - A)^{-1}z, x \rangle| \\ &= \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\langle z, (\bar{\beta}I - A^*)^{-1}x \rangle| \\ &= \sup_{\varphi \in X_1^d, \|\varphi\|_1^d \leq 1} |\langle z, \varphi \rangle|. \end{aligned}$$

Questo dimostra che la norma  $\|\cdot\|_{-1}$  è la norma duale di  $\|\cdot\|_1^d$  rispetto lo spazio di pivot  $X$ . D'altra parte, per la proposizione precedente,  $\|\cdot\|_1^d$  varia in una norma equivalente al variare di  $\beta$ , e lo stesso è vero per  $\|\cdot\|_{-1}$ .  $\square$

Il concetto di operatore di controllo ammissibile è motivato dallo studio delle soluzioni dell'equazione differenziale  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , dove  $u \in L_{loc}^2([0, \infty); U)$ ,  $x(0) \in X$  e  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$ . Ora, vogliamo studiare quegli operatori  $B$  per i quali tutte le soluzioni  $x$  di questa equazione (con  $u$  e  $x(0)$  in  $L_{loc}^2([0, \infty); U)$  e  $X$ , rispettivamente) sono funzioni continue a valori in  $X$ .

**Definizione 2.2.1.** L'operatore  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  è chiamato *Operatore di controllo ammissibile* per  $\mathcal{T}$ , se per almeno un  $T > 0$ ,  $\text{Range } \Phi_T \subset X$ .

### 2.2.1 Soluzioni di equazioni differenziali non-omogenee

Le traiettorie dello stato  $x$  di un sistema di controllo lineare sono definite come le soluzioni di equazioni differenziali non omogenee della forma  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , dove  $u$  è la funzione d'input. Per questo è importante chiarire che cosa si intende per soluzione di tale equazione differenziale e quindi dare alcuni risultati base di esistenza e unicità. Da qui in poi il termine  $Bu(t)$  sarà sostituito da  $f(t)$ .

**Definizione 2.2.2.** Consideriamo l'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t) \quad (2.10)$$

dove  $f \in L^1_{loc}([0, \infty); X_{-1})$ . Una *soluzione* di (2.10) in  $X_{-1}$  è una funzione

$$x \in L^1_{loc}([0, \infty); X) \cap C([0, \infty); X_{-1})$$

che soddisfa le seguenti equazioni in  $X_{-1}$ :

$$x(t) - x(0) = \int_0^t (Ax(s) + f(s)) ds \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2.11)$$

La soluzione (2.11) si può anche chiamare '*soluzione forte*' di (2.10) in  $X_{-1}$ , perchè (2.11) implica che  $x$  è assolutamente continua a valori in  $X_{-1}$  e (2.10) vale per quasi ogni  $t \geq 0$ , con derivata calcolata rispetto la norma di  $X_{-1}$ . L'equazione (2.10) non ha necessariamente una soluzione forte.

**Definizione 2.2.3.** Si definisce '*soluzione debole*' di (2.10) in  $X_{-1}$  una soluzione come la precedente ma richiedendo, al posto di (2.11), che per ogni  $\varphi \in X_1^d$  e ogni  $t \geq 0$ ,

$$\langle x(t) - x(0), \varphi \rangle_{X_{-1}, X_1^d} = \int_0^t \left( \langle x(s), A^* \varphi \rangle_X + \langle f(s), \varphi \rangle_{X_{-1}, X_1^d} \right) ds \quad (2.12)$$

Data l'equivalenza dei due concetti di soluzione, si utilizza solamente il termine soluzione in  $X_{-1}$

**Proposizione 2.2.3.** Con la notazione della definizione 2.2.2, supponiamo che  $x$  sia una soluzione della (2.10) in  $X_{-1}$  e denotiamo  $x_0 = x(0)$ . Allora  $x$  è data da

$$x(t) = \mathcal{T}_t x_0 + \int_0^t \mathcal{T}_{t-s} f(s) ds \quad (2.13)$$

in particolare, per ogni  $x_0 \in X$  esiste al più una soluzione in  $X_{-1}$  di (2.10) che soddisfa la condizione iniziale  $x(0) = x_0$ .

**Definizione 2.2.4.** con la notazione della Definizione 2.2.2, la funzione  $x$  a valori in  $X_{-1}$  definita in (2.13) è chiamata 'soluzione mild' di (2.10), corrispondente allo stato iniziale  $x_0 \in X$  e della funzione forzante  $f \in L^1_{loc}([0, \infty); X_{-1})$ .

Nell'ultima proposizione si è dimostrato che ogni soluzione di (2.10) in  $X_{-1}$  è una soluzione mild di (2.10). Il viceversa di questa affermazione non è vero. Tuttavia, il seguente teorema dimostra che per funzioni forzanti  $f(t) \in H^1$ , la soluzione mild di (2.10) è in realtà una soluzione di (2.10) in  $X_{-1}$ , e inoltre questa soluzione è una funzione continua a valori in  $X$ .

**Teorema 2.2.4.** *Se  $x_0 \in X$  e  $f \in H^1_{loc}((0, \infty); X_{-1})$ , allora (2.10) ha un'unica soluzione in  $X_{-1}$ , denotata con  $x$ , che soddisfa  $x(0) = x_0$ . Inoltre, questa soluzione è tale che*

$$x \in C([0, \infty); X) \cap C^1([0, \infty); X_{-1})$$

e soddisfa (2.10) in senso classico, per ogni  $t \geq 0$ .

Nota: dall'ultimo teorema segue immediatamente che

$$Az + f \in C([0, \infty); X_{-1})$$

## 2.3 Controllabilità dei sistemi infinito-dimensionali

Mentre per i sistemi lineari finito-dimensionali si aveva un solo concetto di controllabilità, vedi Paragrafo 2.1, per sistemi infinito-dimensionali abbiamo almeno tre importanti concetti di controllabilità, ognuno dipendente dal tempo  $T$ .

Sia  $U$  uno spazio di Hilbert complesso e sia  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  un operatore di controllo ammissibile per  $\mathcal{T}$ . Secondo la definizione 2.2.1 significa che per ogni  $T \geq 0$ , la formula

$$\Phi_T u = \int_0^T \mathcal{T}_{t-s} B u(t) \quad (2.14)$$

definisce un operatore limitato  $\Phi_T : L^2([0, \infty); U) \rightarrow X$ .

**Definizione 2.3.1.** Sia  $T > 0$

- La coppia  $(A, B)$  è *esattamente controllabile* al tempo  $T$  se  $\text{Range } \Phi_T = X$

- La coppia  $(A, B)$  è *approssimativamente controllabile* al tempo  $T$  se  $\text{Range } \Phi_T$  è denso in  $X$
- La coppia  $(A, B)$  è *controllabile a zero* al tempo  $T$  se  $\text{Range } \Phi_T \supset \text{Range } \mathcal{T}_T$

L'esatta controllabilità al tempo  $T$  è equivalente alla seguente proprietà: per ogni  $x_0, x_1 \in X$  esiste  $u \in L^2([0, T]; U)$  tale che la soluzione  $x$  di

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.15)$$

soddisfa  $x(T) = x_1$ .

La controllabilità approssimata al tempo  $T$  è equivalente alla seguente proprietà: per ogni  $x_0, x_1 \in X$  e ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $u \in L^2([0, T]; U)$  tale che la soluzione  $x$  di (2.15) soddisfa  $\|x(T) - x_1\| < \epsilon$ .

La controllabilità a zero al tempo  $T$  è equivalente alla seguente proprietà: per ogni  $x_0 \in X$ , esiste  $u \in L^2([0, T]; U)$  tale che la soluzione  $x$  di (2.15) soddisfa  $x(T) \equiv 0$

## 2.4 Osservabilità dei sistemi infinito-dimensionali

Per sistemi infinito-dimensionali esistono almeno tre concetti distinti di osservabilità, ognuno dipendente dal tempo  $T$ .

In questo paragrafo  $Y$  è uno spazio di Hilbert complesso e  $C \in \mathcal{L}(X_1, Y)$  è un operatore di osservazione ammissibile per  $\mathcal{T}$ . Sia  $T > 0$ , e sia  $\Psi_T$  l'operatore di output associato ad  $(A, C)$

**Definizione 2.4.1.** Sia  $T > 0$ .

- La coppia  $(A, C)$  è *esattamente osservabile* al tempo  $T$  se  $\text{Range } \Psi_T$  è limitato dal basso.
- La coppia  $(A, C)$  è *approssimativamente osservabile* al tempo  $T$  se  $\ker \Psi_T = \{0\}$
- La coppia  $(A, C)$  è *osservabile allo stato finale al tempo  $T$*  se esiste  $k_T > 0$  tale che  $\|\Psi_T x_0\| \geq k_T \|\mathcal{T}_T x_0\|$  per ogni  $x_0 \in X$ .

## 2.5 Dualità fra controllabilità e osservabilità

In questo paragrafo mostriamo che i concetti di osservabilità introdotti nella Definizione 2.4.1 sono duali ai concetti di controllabilità introdotti nella Definizione 2.3.1

**Teorema 2.5.1.** *Assumiamo che  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  è un operatore di controllo ammissibile per  $\mathcal{T}$ , il semigruppato generato da  $A$ , e sia  $T > 0$ .*

1. *La coppia  $(A, B)$  è esattamente controllabile al tempo  $T$  se e solo se  $(A^*, B^*)$  è esattamente osservabile al tempo  $T$ .*
2. *La coppia  $(A, B)$  è approssimativamente controllabile al tempo  $T$  se e solo se  $(A^*, B^*)$  è approssimativamente osservabile al tempo  $T$ .*
3. *La coppia  $(A, B)$  è controllabile a zero al tempo  $T$  se e solo se  $(A^*, B^*)$  è osservabile allo stato finale al tempo  $T$ .*

*Dimostrazione.* dimostriamo il punto 3., che è quello che interessa maggiormente. Secondo la Proposizione A.2.2 (vedi Appendice),  $\text{Range } \Phi_T \supset \text{Range } \mathcal{T}_T$  se e solo se esiste una costante  $c > 0$  tale che  $c \|\Phi_T^*\| \geq \|\mathcal{T}_T z\|$  per ogni  $z \in X$ . Utilizzando gli operatori di riflessione rispetto al tempo, questo è equivalente a  $c \|\Psi_T^*\| \geq \|\mathcal{T}_T z\|$  per ogni  $z \in X$ , i.e. al fatto che  $(A^*, B^*)$  è osservabile allo stato finale al tempo  $T$ .  $\square$



# Capitolo 3

## Controllabilità a zero a 2 dimensioni

### 3.1 Presentazione del problema

L'obiettivo del capitolo, e della tesi, è di analizzare la controllabilità a zero di una classe di equazioni paraboliche degeneri al bordo, per mezzo di funzioni di controllo agenti localmente sul sottoinsieme non vuoto  $\omega \subset\subset \Omega$ . La classe di equazioni che si prende in considerazione è descritta da

$$u_t - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = h\chi_\omega, \quad x \in \Omega, \quad t > 0. \quad (3.1)$$

con le opportune condizioni iniziali e alla frontiera. In analogia con lo studio dell'equazione del calore a una dimensione il problema si divide nel caso *debolmente degenerare* e *fortemente degenerare*, dipendentemente dal valore del coefficiente di diffusione  $\alpha$ .

### 3.2 Ipotesi sul dominio

Si assume che  $\Omega$  sia un insieme aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$ , la cui frontiera  $\Gamma$  sia di classe  $C^4$ . Si denota con  $\nu(y)$  il versore normale uscente da  $\Omega$  nel punto  $y \in \Gamma$  e con  $d(x, \Gamma)$  la distanza fra  $x \in \Omega$  e la frontiera  $\Gamma$ , ovvero

$$d(x, \Gamma) := \min_{y \in \Gamma} |x - y|$$

Inoltre dato  $\eta > 0$  costante reale, si definiscono

$$\Omega_\eta := \{x \in \Omega, |d(x, \Gamma) < \eta\} \quad \Omega^\eta := \Omega \setminus \Omega_\eta \quad \Gamma^\eta := \partial\Omega^\eta$$

Di conseguenza esiste  $\eta_1 > 0$  tale che la funzione  $x \mapsto d(x, \Omega)$  è di classe  $C^4$  in  $\overline{\Omega_{\eta_1}}$ . Inoltre,  $\forall x \in \Omega_{\eta_1}, \exists ! p_{\Gamma}(x) \in \Gamma$  tale che  $d(x, \Gamma) = |x - p_{\Gamma}(x)|$ , e  $\nabla d(x, \Gamma) = -\nu(p_{\Gamma}(x)), \forall x \in \Omega_{\eta_1}$ .

### 3.3 Ipotesi sull'operatore

Riguardo la matrice  $A(x)$ , che compare nell'operatore della (3.1), si fanno le ipotesi seguenti:

1.  $A(x) := (a_{i,j}(x))_{i,j=1}^2$  è una matrice di dimensione  $2 \times 2$ , simmetrica con coefficienti reali.
2.  $\forall x \in \overline{\Omega}, a_{i,j}(x) \in C^{\alpha_0}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}) \cap C^4(\Omega; \mathbb{R})$
3.  $\forall x \in \overline{\Omega}, \xi \in \mathbb{R}^2, A(x)\xi \cdot \xi \geq 0$
4.  $\forall x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^2, A(x)\xi \cdot \xi > 0$  con autovalori  $0 < \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x)$  tali che esistono  $\eta_0 > 0, M, m > 0$  con  $M > m$  e  $\alpha \geq 0$  tali che  $\forall x \in \Omega_{\eta_0}, \lambda_1(x) = d(x, \Gamma)^{\alpha}$  e  $\lambda_2(x) \in [m, M]$ ,
5.  $\forall x \in \Omega_{\eta_0}, \epsilon_1(x) = \nu(p_{\Gamma}(x)) = -\nabla d(x, \Gamma)$  è un autovettore di  $A(x)$  associato a  $\lambda_1(x)$ .

### 3.4 Caso debolmente degenere

Nelle ipotesi del paragrafo precedente, si assume  $\alpha \in [0, 1)$ . Ora si può completare (3.1) con la condizione all'istante iniziale e la condizione alla frontiera di Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) = h\chi_{\omega}, & (t, x) \in \Omega_T \\ u(t, x) = 0, & (t, x) \in \Gamma_T \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\Omega), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.2)$$

dove  $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$  e  $\Gamma_T := (0, T) \times \Gamma$ .

Per lo studio della buona posizione del problema (3.2) e gli altri argomenti, si definiscono i seguenti spazi di Sobolev ponderati.

$$H_A^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \cap H_{loc}^1(\Omega) \mid A\nabla u \cdot \nabla u \in L^1(\Omega)\},$$

$$H_A^2(\Omega) := \{u \in H_A^1(\Omega) \cap H_{loc}^2(\Omega) \mid \operatorname{div}(A\nabla u) \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_{A,0}^1(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H_A^1(\Omega)},$$

**Teorema 3.4.1.** *L'operatore illimitato  $(A_1, D(A_1))$  dato da*

$$A_1 u = \operatorname{div}(A \nabla u), \quad D(A_1) = H_A^2(\Omega) \cap H_{A,0}^1(\Omega) \quad (3.3)$$

*è  $m$ -dissipativo e auto-aggiunto*

Di conseguenza,  $A_1$  è il generatore infinitesimale di un semigruppoo fortemente continuo, denotato da  $e^{tA_1}$ . Si può dimostrare che tale semigruppoo è analitico. Per la dimostrazione e ulteriori dettagli si veda [8].

Si può enunciare il seguente teorema di buona posizione, che si può dimostrare tramite la teoria standard, si veda [4].

**Teorema 3.4.2.** *(di buona posizione del caso debolmente degenere)*

*Per ogni  $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$  e  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , il problema (3.2) ha un'unica soluzione debole*

$$u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_{A,0}^1(\Omega)) \quad (3.4)$$

*Inoltre, si ha*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^T \|u(t)\|_{H_{a,0}^1}^2 dt \leq C \left( \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \quad (3.5)$$

*per un'opportuna costante  $C > 0$ .*

**Teorema 3.4.3.** *(di controllabilità)*

*Se  $A(x)$  verifica le ipotesi sopra descritte per opportuni  $\alpha \in [0, 1)$ , allora, per ogni  $T > 0$  e ogni  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , esiste  $h \in L^2(\Omega_T)$  tale che la soluzione  $u$  di (3.2) soddisfa  $u(T, \cdot) = 0$  in  $L^2(\Omega)$ .*

## 3.5 Caso fortemente degenere

Nelle ipotesi del paragrafo 2.3, si assume  $\alpha \in [1, 2)$ . Ora si può completare (3.1) con la seguente condizione al bordo di Neumann generalizzata:

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(A(x) \nabla u) = h \chi_\omega, & (t, x) \in \Omega_T \\ A \nabla u \cdot \nu(t, x) = 0, & (t, x) \in \Gamma_T \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\Omega), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.6)$$

dove  $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$  e  $\Gamma_T := (0, T) \times \Gamma$ .

**Teorema 3.5.1.** *L'operatore illimitato  $(A_2, D(A_2))$  dato da*

$$A_2 u = \operatorname{div}(A \nabla u), \quad D(A_2) = H_A^2(\Omega) \quad (3.7)$$

*è  $m$ -dissipativo e auto-aggiunto*

Di conseguenza,  $A_2$  è il generatore infinitesimale di un semigruppoo fortemente continuo, denotato da  $e^{tA_2}$ . Si può dimostrare che tale semigruppoo è analitico. Per la dimostrazione e ulteriori dettagli si veda [8]. Si può enunciare il seguente teorema di buona posizione, dimostabile, si veda [4], tramite la teoria standard.

**Teorema 3.5.2.** *(di buona posizione del caso fortemente degenere)*

*Per ogni  $h \in L^2((0, T) \times \Omega)$  e  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , il problema (3.6) ha un'unica soluzione debole*

$$u \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_A^1(\Omega)) \quad (3.8)$$

*Inoltre, si ha*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^T \|u(t)\|_{H_A^1}^2 dt \leq C \left( \|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) \quad (3.9)$$

*per un'opportuna costante  $C > 0$ .*

**Teorema 3.5.3.** *(di controllabilità)*

*Se  $A(x)$  verifica le ipotesi sopra descritte per opportuni  $\alpha \in [1, 2)$ , allora, per ogni  $T > 0$  e ogni  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , esiste  $h \in L^2(\Omega_T)$  tale che la soluzione  $u$  di (3.6) soddisfa  $u(T, \cdot) = 0$  in  $L^2(\Omega)$ .*

## 3.6 Stime di Carleman per il problema aggiunto degenere

Come per il caso nondegenere, i risultati di controllabilità a zero enunciati nei teoremi 3.4.3 e 3.5.3 si riducono alla disuguaglianza d'osservabilità

$$\int_{\Omega} v(x, 0)^2 dx \leq \int_{\omega_T} v(x, t)^2 dx dt, \quad \omega_T := (0, T) \times \omega \quad (3.10)$$

per le soluzioni  $v$  del problema aggiunto omogeneo:

$$\begin{cases} v_t - \operatorname{div}(A(x)\nabla v) = 0, & (t, x) \in \Omega_T \\ v(t, x) = 0, & \text{se } \alpha \in [0, 1), (t, x) \in \Gamma_T \\ A\nabla u \cdot \nu(t, x) = 0, & \text{se } \alpha \in [1, 2), (t, x) \in \Gamma_T \\ v(T, x) = v_T(x), & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.11)$$

dove  $v_T \in L^2(\Omega)$ ,  $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$ , e  $\Gamma_T := (0, T) \times \Gamma$ .

Avendo a che fare con equazioni degeneri, per provare la disuguaglianza d'osservabilità precedente si utilizzano degli strumenti particolari, che sono le stime di Carleman. La prima difficoltà consiste nel derivare la giusta forma di queste stime, e questo problema si supera scegliendo le giuste funzioni ponderate. Il prossimo lemma serve a definire le funzioni ponderate che compaiono nelle stime di Carleman.

**Lemma 3.6.1.** *Sia  $\omega_0 \subset \Omega$  un insieme aperto diverso dal vuoto lontano dalla frontiera di  $\Omega$  e sia  $\alpha \in [0, 2)$ . Allora esiste un numero positivo  $\eta_2 \leq \eta_0$  e una funzione  $\phi \in C(\bar{\Omega}) \cap C^4(\Omega)$  tale che*

1.  $\forall x \in \Omega_{\eta_2} \quad \phi(x) = \frac{1}{2-\alpha} d(x, \Gamma)^{2-\alpha}$ ,
2.  $\{x \in \Omega \mid \nabla \phi(x) = 0\} \subset \omega_0$

In particolare, per 1.  $\phi$  soddisfa anche :

$$\forall x \in \Omega_{\eta_2}, \quad \nabla \phi(x) = -d(x, \Gamma)^{1-\alpha} \nu(p_\Gamma(x)) = -d(x, \Gamma)^{1-\alpha} \epsilon_1(x).$$

Ora si considerano le funzioni  $\theta, \sigma$  e  $\rho$  definite da

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, T), \quad \theta(t) &:= \left( \frac{1}{t(T-t)} \right)^4, \quad \sigma(t, x) := \theta(t)(e^{2S\|\phi\|_\infty} - e^{S\phi(x)}), \\ \rho(t, x) &:= RS\theta(t)e^{S\phi(x)}. \end{aligned}$$

Il seguente teorema stabilisce le stime di Carleman per il problema (3.11)

**Teorema 3.6.2.** *Sia  $A(x)$  una matrice che verifica le ipotesi della sezione 2.3 con  $\alpha \in [0, 2)$ . Allora, esistono costanti  $\eta > 0$ ,  $C = C(\alpha, \omega, T) > 0$  e  $S_0 \geq 1$  tali che  $\forall S \geq S_0, \exists r(S) > 0$  tale che  $\forall R \geq S^4 + e^{12S\|\phi\|_\infty}$ , e per tutte le soluzioni  $v$  di (3.11) con condizione iniziale  $v(T) \in L^2(\Omega)$ , abbiamo le seguenti:*

1. *Stime dei termini d'ordine zero:*

$$\begin{aligned} S \int_{\Omega_T} |A(x)\nabla \phi \cdot \nabla \phi|^2 \rho^3 v^2 e^{-2R\sigma} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\eta} d(\Gamma)^{2-\alpha} \rho^3 v^2 e^{-2R\sigma} d\mathbf{x} \leq \\ C \int_{\omega_T} \rho^3 v^2 e^{-2R\sigma} d\mathbf{x} \quad (3.12) \end{aligned}$$

2. *Stime delle derivate del primo ordine nello spazio*

$$r(S) \int_{\Omega_T} \frac{\rho}{\theta} (A(x) \nabla v \cdot \nabla v) e^{-2R\sigma} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_\eta} d(x, \Gamma)^\alpha \rho (\nabla v \cdot \epsilon_1)^2 e^{-2R\sigma} d\mathbf{x} \leq C \int_{\omega_T} \rho^3 v^2 e^{-2R\sigma} d\mathbf{x} \quad (3.13)$$

# Appendice A

## Alcuni richiami di analisi funzionale

### A.1 Concetti fondamentali

**Definizione A.1.1.** (Spazio duale)

Sia  $X$  uno spazio di Hilbert e definiamo  $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$ , come *spazio duale* di  $X$ , insieme dei funzionali lineari limitati su  $X$  munito della norma operatoriale.

**Definizione A.1.2.** (Aggiunto di un operatore)

Siano  $X$  e  $Y$  spazi di Hilbert e  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . L'*aggiunto* di  $A$  è l'operatore  $A^* \in \mathcal{L}(Y', X')$  definito da

$$(A^*\xi)x = \xi(Ax), \quad \forall x \in X, \xi \in Y' \quad (\text{A.1})$$

Identificando  $X$  con  $X'$  e  $Y$  con  $Y'$  (è possibile, come conseguenza delle proprietà degli spazi di Hilbert e loro duali), allora  $A^* \in \mathcal{L}(Y, X)$  e A.1 diviene

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad \forall x \in X, y \in Y \quad (\text{A.2})$$

Gli operatori aggiunti godono delle proprietà:

$$(SA)^* = A^*S^*, \quad A^{**} = A, \quad \|A^*\| = \|A\| = \|A^*A\|^{\frac{1}{2}} \text{ e}$$

$$\ker A = (\text{Range}A^*)^\perp \quad (\text{A.3})$$

### A.2 Operatori lineari chiusi tra spazi di Banach

**Definizione A.2.1.** Siano  $X$  e  $Y$  spazi di Banach (su  $\mathbb{C}$  o su  $\mathbb{R}$ ). È noto che  $X \times Y$  munito della norma  $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$  è anch'esso uno spazio

di Banach.

Sia  $A : \mathcal{D}(A) (\subseteq X) \rightarrow Y$  un operatore lineare, non necessariamente limitato, definito su  $\mathcal{D}(A)$  (dominio di  $A$ , sottospazio di  $X$ ) con valori in  $Y$ . Si definisce *grafico* di  $A$  l'insieme

$$G(A) := \{(x, y) \in X \times Y : x \in \mathcal{D}(A), y = Ax\}. \quad (\text{A.4})$$

Si dice che  $A$  è chiuso se  $G(A)$  è un sottospazio chiuso di  $X \times Y$ .

In altri termini,  $A$  è chiuso se, data una successione  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di elementi di  $X$  tale che  $\mathcal{D}(A) \ni x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} x$ ,  $Ax_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{Y} y$  implica  $x \in \mathcal{D}(A)$  e  $Ax = y$ .

**Teorema A.2.1.** *(del grafico chiuso)*

*Se  $A : X \rightarrow Y$  è chiuso allora  $A$  è limitato.*

Da questo teorema discendono alcune conseguenze, racchiuse nella seguente proposizione.

**Proposizione A.2.2.** *Supponiamo che  $Z_1, Z_2$  e  $Z_3$  siano spazi di Hilbert,  $F \in \mathcal{L}(Z_1, Z_3)$  e  $G \in \mathcal{L}(Z_2, Z_3)$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *Range  $F \subset$  Range  $G$ ,*
2. *Esiste  $c > 0$  tale che  $\|F^*z\|_{Z_1} \leq c \|G^*z\|_{Z_2}$ ,  $\forall z \in Z_3$ .*
3. *Esiste un operatore  $L \in \mathcal{L}(Z_1, Z_2)$  tale che  $F = GL$*



# Bibliografia

- [1] AGMON S., *Lectures on elliptic boundary-value problems*, Van Nostrand, Princeton, New York (1965).
- [2] ANIȚA S. and BARBU V., *Null controllability of nonlinear convective heat equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 5 (2000), 157-173.
- [3] BARBU V., *On local controllability of Navier-Stokes equations*, Adv. Differential Equations, 8 (2003), 1481-1498.
- [4] BENSOUSSAN A., DA PRATO G., DELFOUR M.C. e MITTER S.K. *Representation and control of infinite dimensional systems. Systems and control: foundations and applications*, Birkhauser (1993).
- [5] CANNARSA P., MARTINEZ P. e VANCOSTENOBLE J., *Null controllability of the degenerate heat equations*, Adv. Differential Equations 10 (2005), 153-190.
- [6] CANNARSA P., MARTINEZ P. e VANCOSTENOBLE J., *Carleman estimates for a class of degenerate parabolic operators*, SIAM J. Control Optim. 47 (1) (2008) 1-19.
- [7] CANNARSA P., MARTINEZ P. e VANCOSTENOBLE J., *Carleman estimates and null controllability for boundary-degenerate parabolic operators*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 147-152.
- [8] CANNARSA P., ROCCHETTI D. e VANCOSTENOBLE J., *Generation of analytic semi-groups in  $L^2$  for a class of second order degenerate elliptic operators*, Control. Cybernet. 37 (2008), no. 4, 831-878.
- [9] CORON J.-M. and FURSIKOV A.V., *Global exact controllability of the 2D Navier-Stokes equations on a manifold without boundary*, Russian J. Math. Phys., 4 (1996), 429-448.
- [10] DE TERESA L., *Approximate controllability of a semilinear heat equation in  $\mathbb{R}^N$* , SIAM J. Control Optim., 36 (1998), 2128-2147.

- [11] ENGEL K.-J. E NAGEL R., *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, vol. 194 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York (2000). With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafunne, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt.
- [12] FABRE C. and LEBEAU G., *Prolongement unique des solutions de l'équation de Stokes*, Comm. Partial Differential Equations, 21 (1996), 139-148.
- [13] FATTORINI H.O. and RUSSELL D.L., *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal., 4 (1971), 272-292.
- [14] FATTORINI H.O. and RUSSELL D.L., *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math., 32 (1974), 45-69.
- [15] FERNANDEZ-CARA E., *Null controllability of the semilinear heat equation*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 2 (1997), 87-103.
- [16] FERNANDEZ-CARA E., GUERRERO S., IMANUVILOV O. YU., PUEL J.-P., *Local exact controllability of the Navier-Stokes system*, J. Math. Pures Appl. (9), 83 (2004), 1501-1542.
- [17] FERNANDEZ-CARA E., ZUAZUA E., *Controllability for weakly blowing-up semilinear heat equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 17 (2000) 583-616.
- [18] FURSIKOV A.V. and IMANUVILOV O. YU., *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series 34, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul National University, Seoul, Korea (1996).
- [19] IMANUVILOV O. YU., *Remarks on exact controllability for the Navier-Stokes equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 6 (2001) 39-72.
- [20] LEBEAU G. and ROBBIANO L., *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995), 335-356.
- [21] MICU S. and ZUAZUA E., *On the lack of null controllability of the heat equation on the half-line*, Trans. Amer. Math. Soc., 353 (2001), 1635-1659.

- 
- [22] MILLER L., *On the null controllability of the heat equation in unbounded domains*, Bull. Sci. Math., 129 (2005), 175-185.
- [23] RUSSELL D.L., *Controllability and stabilizability theorems for linear partial differential equations: recent progress and open questions*, SIAM Review 20 (1978), 639-739.
- [24] SEIDMAN T.I., *Exact boundary control for some evolution equations*, SIAM J. Control Optim., 16 (1978), 979-999.
- [25] TATARU D., *Carleman estimates, unique continuation and controllability for anisotropic PDE's*, Contemporary Mathematics 209 (1997), 267-279.
- [26] TUCSNAK M., WEISS G. *Observation and control for operators semigroups*, Birkhauser (2009)