

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SECONDA FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CON SEDE A CESENA**

**CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE**

Classe 25/S

Sede di Forlì

**TESI DI LAUREA
IN: SISTEMI DI PROPULSIONE AVANZATA L.S**

**Studio, Sviluppo ed Implementazione di Modelli
per la Balistica Interna di Razzi a Propellente
Solido**

**Candidato:
FILIPPO FACCIANI**

**Relatore:
Prof. Ing. FABRIZIO PONTI**

**Correlatore:
Ing. ROBERTO BERTACIN**

ANNO ACCADEMICO 2011/2012

Sessione I

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SECONDA FACOLTÀ DI INGEGNERIA
CON SEDE A CESENA**

**CORSO DI LAUREA SPECIALISTICA
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE**

Classe 25/S

Sede di Forlì

**TESI DI LAUREA
IN: SISTEMI DI PROPULSIONE AVANZATA L.S**

**Studio, Sviluppo ed Implementazione di Modelli
per la Balistica Interna di Razzi a Propellente
Solido**

**Candidato:
FILIPPO FACCIANI**

**Relatore:
Prof. Ing. FABRIZIO PONTI**

**Correlatore:
Ing. ROBERTO BERTACIN**

ANNO ACCADEMICO 2011/2012

Sessione I

Dedica

Dedico questo traguardo ai miei genitori, per la loro incredibile pazienza. Ai compagni di studio ed a quei professori che sono riusciti ad arricchirmi a livello conoscitivo e, soprattutto, personale. Ai colleghi di lavoro, che spero di rivedere presto.

Soprattutto dedico questo traguardo ad Alice, senza la quale sarei sicuramente una persona peggiore. Grazie al tuo incoraggiamento ed alla tua comprensione ho superato i miei numerosi limiti.

Grazie di cuore a tutti.

Riassunto

Il lavoro di tesi presentato nel seguente elaborato concorre allo sviluppo di un Simulatore di Combustione Anisotropa di Endoreattori a Propellente Solido. Lo sviluppo di tale simulatore è condotto da parte del Laboratorio di Propulsione e Macchine della Seconda Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna in collaborazione con l'azienda AVIO-BPD. Tale simulatore sarà costituito da due moduli: uno atto alla simulazione della regressione della superficie di combustione, uno atto alla simulazione della balistica interna del motore. La presente documentazione riguarda lo sviluppo e l'implementazione del secondo modulo. Vengono fornite dall'azienda informazioni relative al motore Z-9, appartenente al vettore VEGA.

Indice

List of Symbols	15
1 Introduzione	19
1.1 Sistemi di Propulsione	20
1.2 Balistica Interna	20
1.3 Motivazioni e Linea di Sviluppo	21
1.4 Struttura dell'Elaborato	23
2 Razzi a Propellente Solido	25
2.1 Componenti Costitutivi	25
2.1.1 Case	26
2.1.2 Thermal Protection	26
2.1.3 Propellant Grain	28
2.1.4 Igniter	31
2.1.5 Nozzle	33
2.2 Principi di Funzionamento	35
2.3 Parametri Balistici	38
2.3.1 Parametri d'ugello	40
2.3.2 Coefficiente di Spinta	40
2.3.3 Velocità Caratteristica	41
2.3.4 Impulso Totale	41
2.3.5 Impulso Specifico	41
2.3.6 Pressione di Camera e MEOP	42
2.4 Balistica Interna di Endoreattori a Propellente Solido	42
2.4.1 Modelli Balistici	42
2.4.2 Fasi della Balistica Interna	45
2.5 Rateo di Combustione	49
2.5.1 Termine Quasi-Stazionario	50
2.5.2 Combustione Erosiva	51
2.5.3 Rateo di Combustione Dinamico	54

3	Simulatore di Regressione	55
3.1	Importazione della Geometria e Formato di Rappresentazione Richiesto	56
3.2	Proprietà della Mesh Triangolare	57
3.3	Identificazione Superficie di Combustione	59
3.4	Movimentazione dei Nodi	59
3.5	Qualità degli Elementi e Remeshing	60
3.6	Calcolo del Volume di Camera	62
4	Sviluppo del Modulo Balistico	65
4.1	Sviluppo Modello 0-D	66
4.1.1	Equazione di Continuità	67
4.1.2	Bilancio dell'Energia	68
4.1.3	Forma Finale	70
4.1.4	Contributo dei Prodotti di Combustione	71
4.1.5	Contributo dell'Accenditore	71
4.1.6	Contributo dell'Efflusso dall'Ugello	73
4.1.7	Contributo dei Prodotti di Ablazione	74
4.1.8	Influenza della Potenza Termica Dissipata	75
4.1.9	Integrazione Temporale	77
4.1.10	Aggiornamento delle Variabili Fluidodinamiche	79
4.2	Sviluppo Modello 1-D	81
4.2.1	Analisi dei Termini Sorgente	84
4.3	Integrazione Numerica	88
4.3.1	Discretizzazione Spaziale	88
4.3.2	Algoritmi di Integrazione Temporale	91
4.3.3	Viscosità Artificiale	93
4.3.4	Condizioni Iniziali ed al Contorno	94
4.4	Spreading Flame e Combustione Erosiva dovuta all'Accenditore	95
4.4.1	Spreading Flame	95
4.4.2	Combustione Erosiva dovuta all'Accenditore	96
4.5	Fattori Correttivi	97
5	Integrazione dei Modelli Balistici con il Simulatore di Regressione	101
5.1	Estrapolazione dei Dati dal Simulatore di Regressione	101
5.1.1	Modello 0-D	102
5.2	Modello 1-D	109
5.2.1	Area di Porta del Canale	110
5.2.2	Volume del Canale	110
5.2.3	Calcolo della Superficie di Combustione e Relativo Perimetro	110
5.2.4	Calcolo della Superficie di Protezioni Termiche Scoperte e Relativo Perimetro	113

5.2.5	Perimetro delle Superfici con Attrito	114
5.3	Determinazione del Rateo di Combustione	115
5.3.1	Rateo di Combustione Teorico	115
5.3.2	Rateo di Combustione Reale	116
6	Validazione ed Applicazione	117
6.1	Validazione del Modello 0-D Mediante Applicazione ad una Baria	118
6.1.1	Analisi Qualitativa del Problema	118
6.1.2	Modello di Regressione	119
6.1.3	Risultati	119
6.2	Applicazione del Modello 0-D allo <i>Zefiro 9</i>	121
6.2.1	Analisi Qualitativa del Problema	123
6.2.2	Regressione della Superficie di Combustione	124
6.2.3	Risultati	124
6.3	Validazione del Modello 1-D Mediante Considerazioni Qualitative	126
6.4	Validazione del Modello 1-D Mediante Applicazione a Geometrie Cilindriche	128
6.4.1	Modello di Regressione e Definizione degli Input	130
6.4.2	Risultati	131
6.5	Applicazione del Modello 1-D ad una Geometria di Riferimento Ibrida	133
6.5.1	Scopo del Test	133
6.5.2	Analisi dei Risultati	135
6.5.3	Possibili Soluzioni	138
6.6	Esempio di Applicazione del Modello 1-D al Fine di Valutare lo Spreading Flame	138

Elenco delle figure

1.1	Struttura del Simulatore	23
2.1	Schema semplificato Z-16	27
2.2	Sezione Cilindrica, Finocyl, a Stella, Composita	31
2.3	Configurazione di accenditore pirotecnico <i>pellet-basket</i>	32
2.4	Ugello fisso	34
2.5	Ugello mobile	34
2.6	Ugello immerso	35
2.7	Schematizzazione motore	35
2.8	Espansione ottima, sovraespansione, sottoespansione	37
2.9	Spinta sul fondo della camera	37
2.10	Sezioni elementari e relativi profili di pressione	39
2.11	Fasi della vita operativa di un SRM	46
2.12	Ignition Transient	47
2.13	Influenza della combustione erosiva	52
3.1	Struttura del simulatore di regressione	55
3.2	Risultato della triangolazione 3.1	56
3.3	Esempio di mesh superficiali. In giallo è riportata la superficie esposta a combustione	57
3.4	Mesh two-manifold	58
3.5	Esempio di superficie orientabile	58
3.6	Esempio di superfici non orientabili	59
3.7	Esempio di superfici esposte a combustione	60
3.8	Triangolo, incerchio e circumcerchio associati	60
3.9	Collapsing di un <i>edge</i> [35]	61
3.10	Splitting di un <i>edge</i> [35]	61
3.11	Effetto di arrotondamento dello smoothing [34]	62
3.12	Sostituzione posizione del punto p_i	63
3.13	Esempi di volumi sottesi a due triangoli. (a) : positivo; (b) : negativo	64
4.1	Schema modello 0-D	66
4.2	Portata dell'accenditore	72

4.3	Mach all'uscita dell'accenditore	72
4.4	Pressione all'uscita dall'accenditore	73
4.5	Andamento del diametro di gola dell'ugello nel tempo	74
4.6	Griglia monodimensionale equispaziata disposta lungo l'asse motore	89
4.7	Configurazione classica di una <i>BARIA</i> [9]. Le dimensioni espresse sono in [mm].	98
4.8	Fattore HUMP	99
5.1	Esempio di andamento del volume di camera nel tempo	102
5.2	Esempio di andamento di \dot{V} nel tempo	103
5.3	Schema di grano propellente a stella. In giallo: superficie di combustione. Trasparente: case contenitivo	104
5.4	Nuvola di punti derivati dalla sezionatura della geometria 5.3 nei punti della griglia 4.6, vista laterale	105
5.5	Nuvola di punti derivati dalla sezionatura della geometria 5.3 nei punti della griglia 4.6, vista frontale	105
5.6	Profilo delle protezioni termiche esposte (rosso), profilo delle protezioni termiche non esposte (nero), raggio medio del grain propellente (blu)	107
5.7	Profilo delle protezioni termiche esposte (rosso), profilo delle protezioni termiche non esposte (nero), raggio medio del grain propellente (blu)	108
5.8	Profilo delle protezioni termiche esposte (rosso), profilo delle protezioni termiche non esposte (nero), raggio medio del grain propellente (blu)	108
5.9	Andamento della superficie di protezioni termiche esposte nel tempo	109
5.10	Andamento del diametro del canale mano a mano che la combustione scopre le pareti del case	111
5.11	Superficie in giallo: superficie di combustione. Superficie in rosso: triangoli adiacenti ai vertici assegnati al nodo <i>j-esimo</i> . Linea in rosso: profilo del case contenitivo	112
5.12	Superficie in rosso: area associata al vertice.	113
5.13	In rosso: regione di protezione termica esposta assegnata al nodo <i>j-esimo</i>	114
5.14	Esempio di distribuzione di fattori di amplificazione dovuti alla combustione erosiva dell'accenditore lungo l'asse motore.	116
6.1	Classica geometria di una <i>BARIA</i> (a) e relativa superficie di combustione (b)	118
6.2	Dall'alto in basso: evoluzione della regressione della superficie di combustione di una <i>BARIA</i>	120

6.3	In blu : andamento sperimentale della pressione di camera. In rosso: andamento della pressione di camera ricavato mediante il modello 0-D	121
6.4	Grain propellente di <i>Zefiro 9</i> (a) e relativa superficie di combustione (b)	122
6.5	Raffronto tra perimetro di una sezione a stella e perimetro della relativa sezione circolare	123
6.6	Evoluzione della superficie di combustione dello <i>Zefiro 9</i> . . .	125
6.7	In blu : andamento sperimentale della pressione di camera. In rosso: andamento della pressione di camera ricavato mediante il modello 0-D	126
6.8	Dettaglio della zona influenzata dal remeshing	127
6.9	Propagazione del disturbo	128
6.10	Distribuzione di velocità in un condotto a sezione costante . .	129
6.11	Distribuzione di velocità in un condotto a sezione divergente .	129
6.12	Evoluzione della regressione della superficie di combustione nel tempo	131
6.13	Curve di pressione normalizzate per valori relativi a ciascuna curva. Si evince che l'andamento qualitativo delle curve è identico a quello della curva di riferimento	132
6.14	Curve di pressione normalizzate per valori relativi alla sola curva di riferimento. Si evidenzia la convergenza delle curve alla curva di riferimento al diminuire di Δx . I valori combaciano per $\Delta x = 0.01L$	132
6.15	Andamento della distribuzione di pressione lungo l'asse motore. Si denota un chiaro calo di pressione tra sezione di testa e sezione d'ingresso ugello. Tale andamento è compatibile con l'andamento atteso per la geometria di studio	134
6.16	Confronto tra le previsioni del modello 0-D e quelle del modello 1-D	135
6.17	Confronto tra il perimetro della geometria a stella e la circonferenza del cerchio con cui è approssimata	136
6.18	Relazione tra la prima oscillazione di pressione nel modello 1-D e lo <i>spike</i> dovuto alla funzione di remeshing nel modello 0-D	137
6.19	Relazione tra la seconda oscillazione di pressione nel modello 1-D e lo <i>spike</i> dovuto alla funzione di remeshing nel modello 0-D	137
6.20	Propagazione del fronte di fiamma a seguito dall'attivazione dell'accenditore	139

Lista dei Simboli

X	Somma delle forze agenti lungo l'asse motore.....	35
A_e	Area sezione d'uscita ugello	36
u_e	velocità d'uscita dall'ugello	36
\dot{m}_e	Portata in uscita dall'ugello	36
F	Spinta	36
P_a	Pressione ambiente	36
P_e	Pressione gas d'uscita dall'ugello	36
u_{eq}	Velocità equivalente	36
F_c	Spinta sul fondo della camera di combustione	37
P_0	Pressione in camera di combustione	37
A^*	Area sezione di gola dell'ugello	37
γ	Rapporto dei calori specifici	38
\dot{m}_g	Portata massica dei gas di combustione	38
S_b	Superficie di combustione	38
r_b	Rateo di combustione	38
ρ_p	Densità propellente solido	38
ε^{-1}	Rateo d'espansione	40
C_F	Coefficiente di spinta	40
C^*	Velocità caratteristica	41
P_{ref}	Pressione di riferimento	41
I_t	Impulso totale	41
M_p	Massa totale di propellente	41
I_s	Impulso specifico	41
g_e	Accelerazione gravitazionale terrestre	41
a	Coefficiente termico	50
n	Indice di combustione	50
T_{ref}	Temperatura di riferimento	51
T_i	Temperatura iniziale del grain propellente	51
a_{ref}	Coefficiente a di riferimento	51
σ	Sensibilità alla temperatura	51
r_{be}	Contributo erosivo al rateo di combustione	52
G	Portata massica per unità di superficie	52
A_p	Area di porta	52
D_h	Diametro idraulico	52

c_p	Calore specifico dei gas di combustione	69
μ	Viscosità dei gas di combustione	53
Pr	Numero adimensionale di Prandtl	53
C_{pr}	Capacità termica del propellente	53
T_1	Temperatura assoluta dei gas di combustione	53
T_s	Temperatura superficiale del propellente	53
T_p	Temperatura iniziale all'interno del grano	69
\mathcal{N}	Matrice dei vertici	56
\mathcal{T}	Matrice delle triangolazioni	56
K	K-esimo triangolo	60
r_K	Raggio del K-esimo circumcerchio	60
ρ_K	Raggio del K-esimo incerchio	60
I_K	Indice di qualità del K-esimo triangolo	61
h_{max}	Lato maggiore del triangolo	61
$adj(i)$	Insieme dei vertici adiacenti al vertice i-esimo	62
V_{var}	Insieme dei vertici liberi di riposizionarsi	62
V_{fix}	Insieme dei vertici con posizione vincolata	62
V_i	Volume dell'i-esimo tetraedro	63
V_{grain}	Volume del grain propellente	63
L	Lunghezza caratteristica del motore	65
T	Temperatura in camera di combustione	66
p	Pressione in camera di combustione	66
m	Massa totale del sistema	68
ρ	Densità in camera di combustione	68
V	Volume della camera di combustione	68
\dot{m}_{acc}	Portata massica d'accenditore	68
\dot{m}_p	Portata massica dei gas di combustione	68
\dot{m}_{PT}	Portata massica dei prodotti d'ablazione	68
\dot{m}_{nozz}	Portata massica evacuata dall'ugello	68
R	Costante specifica dei gas	68
S_i	Superficie delle pareti	68
v_s	Velocità di deformazione delle pareti	68
k	Coefficiente di rigidità delle pareti	68
\dot{E}	Variazione dell'energia interna totale	82
\dot{Q}_w	Potenza termica scambiata attraverso la superficie	68
\dot{W}	Potenza delle forze esterne	68
\dot{m}_j	Portata j-esima	68
h_j	Entalpia della j-esima portata	68
c_v	Calore specifico a volume costante	69
c_p	Calore specifico a pressione costante	69
Q_{loss}	Flusso di calore attraverso le pareti inerti scoperte	69
V_{acc}	Velocità della portata d'accenditore	69
$c_{p_{acc}}$	c_p dei gas dell'accenditore	69

c_{pp}	c_p dei prodotti di combustione	69
c_{pPT}	c_p dei prodotti di ablazione	69
c_{pn}	c_p dei gas in uscita dall'ugello	69
T_{acc}	Temperatura dei gas dell'accenditore	69
T_p	Temperatura dei prodotti di combustione	69
T_{PT}	Temperatura dei prodotti di ablazione	69
T_n	Temperatura dei gas in uscita dall'ugello	69
S_{PT}	Superficie di protezioni termiche esposte	75
r_{abl}	Velocità d'ablazione	75
ρ_{PT}	Densità delle protezioni termiche	75
Q_{conv}	Flusso termico convettivo	75
Q_{rad}	Flusso termico radiativo	75
h_c	Coefficiente di scambio termico convettivo	75
T_{gas}	Temperatura dei gas caldi	75
T_{supPT}	Temperatura della superficie di protezioni termiche	75
Re	Numero di Reynolds	75
k_{gas}	Conducibilità termica dei gas	75
M_{mol}	Massa molare del gas	76
σ	Costante di Stefan-Boltzman	76
ε_{cl-w}	Emissività specifica tra parete e nube di gas	76
ε_{cl}	Emissività specifica della parete	76
ε_{cl}	Emissività specifica della nube di gas	76
h_{rad}	Coefficiente di scambio termico radiativo	76
F_v	Fattore di vista tra la superficie di protezioni termiche e la camera	76
$Al\%$	Percentuale di alluminio nel propellente	77
h_{eq}	Coefficiente di scambio termico equivalente	77
Fr_1	Frazione massica dei prodotti di combustione	80
Fr_2	Frazione massica dei gas d'accenditore	80
Fr_3	Frazione massica dei prodotti di ablazione	80
Fr_4	Frazione massica dei gas di camera	80
\vec{u}	Velocità lungo l'asse motore	82
μ	Viscosità molecolare	82
\vec{f}	Vettore delle forze di massa	82
ϕ	Funzione di dissipazione	82
P_b	Perimetro di combustione	84
τ_{wi}	Sforzo d'attrito dell' i -esima superficie	84
P_i	Perimetro dell' i -esima superficie con attrito	84
f	Friction Factor	82
Re_l	Reynold limite campo laminare	87
Re_t	Reynold limite campo turbolento	87
Re_{tt}	Reynold di distinzione della zona di transizione	87
ε	Rugosità del condotto	87
ε_r	Rugosità relativa del condotto	87

A	Matrice di discretizzazione spaziale	90
A_F	Matrice di discretizzazione spaziale per differenze finite avanti	90
A_B	Matrice di discretizzazione spaziale per differenze finite indietro	90
A_C	Matrice di discretizzazione spaziale per differenze finite centrate	90
t	tempo	92
a	Velocità del suono	92
χ	Coefficiente d'influenza dell'accenditore	97
α	Angolo d'incidenza del flusso d'accenditore sul grain	97
α	Angolo d'incidenza del flusso d'accenditore sul grain	97
Sl_i	Superficie laterale i-esimo tronco di cono	107
a	Apotema	107
r_m	Raggio medio	110
P_p	Perimetro di porta	110
V_j	Volume del j-esimo tronco di cono	110
S_{cil}	Superficie cilindrica	119
S_{lat}	Superficie corone laterali	119
R_i	Raggio interno	119
L	Lunghezza del canale	119
t_i	Tempo trascorso dall'accensione	119

Capitolo 1

Introduzione

Il presente elaborato di tesi tratta lo sviluppo di un modulo balistico atto ad interfacciarsi con un simulatore di regressione esterno, al fine di sviluppare un simulatore completo del processo di combustione di razzi a propellente solido.

Sia il simulatore di regressione che il modulo balistico sono stati sviluppati all'interno del Laboratorio di Propulsione e Macchine della Seconda Facoltà di Ingegneria con sede a Forlì dell'Università di Bologna.

Tale sviluppo rientra in un'ottica di collaborazione con l'azienda AVIO-BPD, la quale ha mostrato interesse nelle potenzialità del progetto.

Come accennato, il simulatore si articola di due moduli: un modulo preposto alla simulazione della regressione della superficie in combustione del grano propellente (cap. 3) ed un modulo preposto allo studio della balistica interna del motore in esame (cap. 4). In particolare, il lavoro presentato in questo elaborato si concentra sullo sviluppo di questo secondo modulo.

Al fine di introdurre i concetti necessari alla comprensione del problema, in questo capitolo si presenteranno:

1. Il concetto di *Sistema di Propulsione* e di *Endoreattori a Propellente Solido (Solid Rocket Motor)*.
2. Il concetto di *Balistica Interna*, inteso relativamente allo studio di endoreattori a propellente solido.
3. Le motivazioni che hanno spinto il Laboratorio di Propulsione e Macchine, in collaborazione con Avio, allo sviluppo di un nuovo simulatore anisotropo
4. La struttura di questo elaborato, atta a presentare nella maniera più chiara possibile il lavoro di tesi svolto nell'ambito della realizzazione di tale simulatore.

1.1 Sistemi di Propulsione

Si definisce *Sistema di Propulsione* un apparato in grado di determinare una spinta propulsiva. Tale scopo viene attualmente perseguito, nel nostro ambito d'interesse, variando la quantità di moto del flusso elaborato. Si ottiene, pertanto, una variazione della quantità di moto del sistema propulsivo in sè come conseguenza del Terzo Principio della Dinamica.

Qualora una parte (o tutto) il fluido propulsivo sia contenuto all'interno del motore si definirà il sistema *Jet Engine*. Tali motori possono necessitare di aspirazione di fluido esterno (*turbojets*, *turbofan*, etc) oppure basarsi completamente su massa propulsiva generata al proprio interno. Questi ultimi sono definiti *Rocket Engines* o *Endoreattori*. Tale definizione permette di intuire la loro importanza in ambito spaziale (ossia in un ambiente privo di atmosfera).

I Rocket Engines si possono distinguere in funzione del tipo di energia convertita in energia cinetica:

Thermal Rockets: l'energia cinetica utilizzata per la propulsione viene ricavata dalla trasformazione termodinamica di energia entalpica.

Electric Rockets: l'energia cinetica utilizzata per la propulsione viene ottenuta mediante l'accelerazione di particelle cariche elettricamente (ad esempio, ioni). Questo avviene a discapito di energia elettrica.

Nuclear Rockets: l'energia cinetica utilizzata per la propulsione si ottiene mediante emissione di prodotti di reazioni nucleari ad alta velocità.

Non siamo interessati, per quanto riguarda l'attuale studio, ai razzi elettrici e nucleari. Ci si limita pertanto a considerare quella categoria di razzi termici che utilizza come fonte di energia termica la combustione di propellenti. Tali razzi vengono definiti *Chemical Thermal Rockets*.

I *Chemical Thermal Rockets* si possono distinguere in:

- Solid Rocket Motors
- Liquid Rocket Motors
- Hybrid Rocket Motors

Il nostro interesse si limita alla prima tipologia: i *Solid Rocket Motors*. Tale tipologia di motore sarà presentata nel dettaglio in cap. 2.

1.2 Balistica Interna

Gli endoreattori a propellente solido sono caratterizzati da semplicità costruttiva e prontezza d'impiego. Tuttavia, essi presentano un'impossibilità

di effettuare qualsiasi regolazione o controllo attivo in fase di funzionamento, pertanto si impone la previsione teorica di ogni tipo di comportamento operativo.

Questo è il compito della materia che in gergo viene chiamata *Balistica Interna*. Nello studio di un razzo a propellente solido si parlerà di *previsione balistica* riferendosi alla previsione della prestazione propulsiva sulle basi di informazioni costruttive. Questo si ottiene mediante modelli atti a rappresentare il comportamento termofluidodinamico del flusso all'interno della camera di combustione del motore (cap. 4).

Sembrirebbe ovvio l'utilizzo di modelli accurati. In realtà, bisogna considerare che i dati di input, spesso di natura sperimentale o basati su endoreattori già in uso e conosciuti, sono affetti da incertezze spesso anche rilevanti. Un esempio sono i possibili errori di misura, la sensibilità del propellente alle condizioni ambientali vigenti in fase di produzione e stoccaggio, alle tensioni accumulate dal propellente in fase di colaggio e trasporto, etc.

La conseguenza diretta delle incertezze sui dati di input è che in fase progettuale spesso conviene utilizzare modelli meno raffinati, ma caratterizzati da tempi di calcolo contenuti e buona capacità di descrizione degli effetti qualitativi dei vari fenomeni fisici che concorrono nel determinare la prestazione propulsiva del motore.

Questo in quanto le prove sperimentali di endoreattori a propellente solido sono caratterizzate da lunghi tempi di preparazione ed elevato costo. Conseguentemente, la capacità di prevedere gli andamenti qualitativi delle prestazioni di diverse configurazioni è di capitale importanza al fine di ridurre al minimo i costi ed i tempi di sperimentazione. Questo risultato sarebbe di difficile ottenimento qualora si utilizzassero modelli complessi, più lenti ed accurati. Infatti, la presenza delle incertezze sui dati iniziali comprometterebbe comunque la maggiore accuratezza raggiunta.

1.3 Motivazioni e Linea di Sviluppo

Il Laboratorio di Propulsione e Macchine della Seconda Facoltà di Ingegneria di Forlì, analizzando i limiti dei simulatori di combustione di razzi a propellente solido attualmente in uso, si è proposto di superarli mediante sviluppo di un simulatore anistropo. Tale iniziativa ha incontrato l'interesse di AVIO-BPD, specificatamente per quanto riguarda l'analisi dei motori della famiglia *Zefiro*.

Il principale limite degli attuali simulatori è riconducibile alla loro dipendenza da modelli di regressione geometrica o dall'applicazione del *Level Set Method* [31, 55]. Le principali conseguenze negative sono:

- applicabilità a sole geometrie di cui è nota una formula di regressione analitica, o su cui si possono applicare considerazioni di simmetria o periodicità

- conseguente incapacità di valutare scostamenti dalle condizioni ideali, per tenere conto delle quali si ricorre a coefficienti correttivi sperimentali (ad es: *HUMP Factor*: cap. 4.5, punto 2).

Inoltre, si è finora trascurato l'effetto di arrotondamento degli spigoli sulla superficie di combustione. Tali spigoli, al procedere della combustione, tendono infatti a smussarsi (anche a causa di meccanismi di erosione). L'influenza di tale fenomeno è di importanza rilevante: basti considerare l'influenza sul calcolo delle velocità di regressione in prossimità di detti spigoli. La forte disuniformità che la discretizzazione di uno spigolo vivo comporta può determinare ampiezze fortemente sovradimensionate nei vettori di spostamento dei singoli nodi di discretizzazione, con conseguente introduzione di errori di valutazione.

Il simulatore in fase di sviluppo presso il Laboratorio di Propulsione e Macchine si propone di superare tali limiti. Come accennato, esso si articola in:

1. **Modulo di Regressione:** la geometria del motore viene rappresentata mediante una *Triangular Mesh* (cap. 3. La regressione della superficie di combustione viene simulata applicando uno specifico spostamento a ciascun nodo della mesh, calcolato in funzione di geometria e *rateo di combustione* (cap. 2.5). Questo determina la capacità di considerare anisotropie dovute a discontinuità, regioni di *impingement* dell'accenditore (cap. 4.4.2) etc.

Grazie a sub-routines di *tangential smoothing* (cap. 3.5) si considera, inoltre, lo smussamento di spigoli vivi e discontinuità dovuto ai vari fenomeni fisici che avvengono all'interno della camera di combustione. Tale *smoothing* permette, inoltre, di evitare singolarità geometriche che porterebbero all'inversione e compenetrazione della mesh triangolare.

2. **Modulo Balistico:** al fine di pilotare gli spostamenti dei singoli nodi della mesh, è necessaria la presenza di un modulo atto al calcolo della balistica interna. Tale modulo dovrà calcolare velocità, pressione e proprietà fisiche del flusso di gas all'interno del canale generato dalla camera di combustione. Con la conoscenza di tali parametri, il modello balistico può quindi procedere al calcolo dei *ratei di combustione* agenti su ciascun nodo, così che il modulo di regressione possa poi calcolare i vettori di spostamento da applicare a ciascun nodo.

Al fine di sviluppare il simulatore si utilizzerà principalmente l'ambiente *MATLAB*. Gli input necessari saranno:

- Mesh triangolare di superficie ottenuta mediante un meshatore qualsiasi (nel nostro caso, *Ansys*). Tale mesh si ricava a partire da geometrie CAD fornite da AVIO-BPD.

- Tabelle sperimentali contenenti i parametri necessari alla simulazione. Tali parametri verranno illustrati e trattati nei capitoli seguenti. Tali tabelle sono fornite da AVIO-BPD.

In un'ottica di collaborazione con l'azienda partner, si utilizzeranno, ove possibile, formulazioni teoriche a loro congeniali. Questo garantisce una compatibilità totale fra i dati forniti da AVIO-BPD e quelli necessari al simulatore.

In figura 1.1 viene riportato un diagramma logico degli elementi costituenti il simulatore.

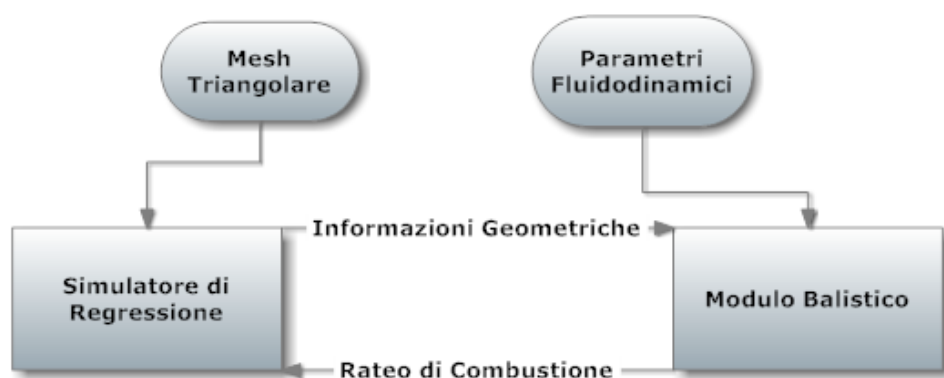


Fig. 1.1: Struttura del Simulatore

1.4 Struttura dell'Elaborato

Si riporta di seguito la struttura del presente elaborato di tesi, al fine di favorire la navigazione all'interno dello scritto:

Razzi a Propellente Solido: si approfondisce il concetto di *endoreattore a propellente solido*, studiandone gli elementi costitutivi, i principi di funzionamento, le tipologie di modelli balistici presenti in letteratura, le fasi della vita operativa ed il concetto di rateo di combustione.

Simulatore di Regressione: nonostante oggetto di questa trattazione sia la sola parte concernente lo sviluppo ed implementazione dei modelli balistici, in questo capitolo si descrive nelle sue linee generali il funzionamento del simulatore di regressione, in quanto il modulo di balistica interna è fortemente influenzato dal simulatore di regressione. In particolare si accenna alle procedure di remeshing. Tali procedure influenzano, infatti, l'andamento delle curve di pressione prodotte dai modelli di balistica interna (cap. 6)

Sviluppo del Modulo balistico: in questo capitolo si descrive lo sviluppo dei due modelli balistici integrati nel modulo di balistica interna:

1. **Modello 0-D:** si ricavano le equazioni costitutive del modello 0-D sviluppato nel corso del lavoro di tesi. Si passa quindi alla descrizione della sua implementazione.
2. **Modello 1-D:** si ricavano le equazioni costitutive del modello 1-D sviluppato nel corso del lavoro di tesi. Si passa quindi alla descrizione della sua implementazione.

Si descrivono quindi le caratterizzazioni di fenomeni complessi quali lo *spreading flame*, l'influenza dell'accenditore e dell'anisotropia lungo la direzione di combustione del propellente.

Integrazione dei Modelli Balistici con il Simulatore di Regressione: si descrive l'interfaccia tra il simulatore di regressione ed i due modelli balistici, nonché tra i modelli balistici ed il simulatore di regressione.

Validazione ed Applicazione: si procede alla validazione dei modelli ed alla loro applicazione a casi d'esempio.

Capitolo 2

Razzi a Propellente Solido

Come introdotto nel capitolo precedente, il simulatore si applicherà alla previsione dei parametri prestazionali di *Razzi a Propellente Solido (Solid Rocket Motors)*. Si ritiene quindi necessaria la presentazione di tale tipologia di motore, così da poterne individuare i fenomeni fisici chiave ed i parametri d'interesse necessari allo sviluppo del modulo balistico. Si affronteranno pertanto le seguenti tematiche:

- Componenti di un SRM
- Principi di Funzionamento
- Indici di Prestazione
- Fasi della Balistica Interna
- Rateo di Combustione
- Tipologie di Modelli Balistici

2.1 Componenti Costitutivi

Gli endoreattori a propellente solido sono caratterizzati da semplicità costruttiva, prontezza d'impiego ed economicità. Il drawback è caratterizzato in termini di difficoltà progettuali.

Ossidante e comburente sono miscelati all'interno del *Grano Propellente*, o *Propellant Grain*. Tale grain necessita l'innesco da parte di un *Igniter* e, una volta innescato, la combustione procede fino ad esaurimento del grain. Anche il semplice spegnimento si può ottenere solo con eiezione dell'ugello ed altre componenti. Questo implica la perdita di integrità del motore stesso.

Per dato ugello e composizione del grain, la regolazione della spinta durante il tempo di missione è effettuata mediante opportuna sagomazione della geometria interna del grain propellente. Tale fattore ha un peso rilevante in fase di progettazione.

Un motore a propellente solido è composto da:

- Case
- Thermal Protections
- Propellant Grain
- Igniter
- Nozzle

Nei seguenti paragrafi si procederà all'analisi di tali componenti.

2.1.1 Case

Il case del motore svolge, principalmente, una funzione prettamente strutturale. Deve resistere alla pressione interna dei gas di combustione determinata dalle condizioni operative (3-30 MPa), alla spinta propulsiva ed ai carichi trasmessi dal veicolo nel suo complesso.

E' inoltre la struttura portante del motore, sulla quale verranno innestate le restanti componenti del propulsore stesso, quali: grain, igniter, protezioni termiche, ugello ed eventuali superfici di controllo.

Assolve, infine, il compito di vincolare il motore allo stadio propulsivo cui appartiene. Qualora questo fosse l'ultimo, deve permettere l'alloggiamento del carico utile.

Generalmente i materiali costitutivi sono metallici (es: alluminio). La nostra collaborazione con AVIO-BPD riguarda il vettore Vega, caratterizzato invece da involucri in composito ottenuti mediante *filament winding* (fig 2.1.1).

2.1.2 Thermal Protection

L'elevata temperatura dei gas di combustione (generalmente tra 2000 K e 3500 K) richiede la protezione del case del motore e di altri componenti strutturali, nonché dell'interfaccia tra accenditore e case ed ugello e case.

Le caratteristiche essenziali di un materiale utilizzato per tale scopo sono [9]:

- bassa conduttività termica
- elevata capacità termica
- capacità di dissipare calore mediante raffreddamento ablativo. Tale capacità dipende principalmente da due fenomeni:
 - assorbimento di calore dovuto alla decomposizione ed evaporazione del materiale

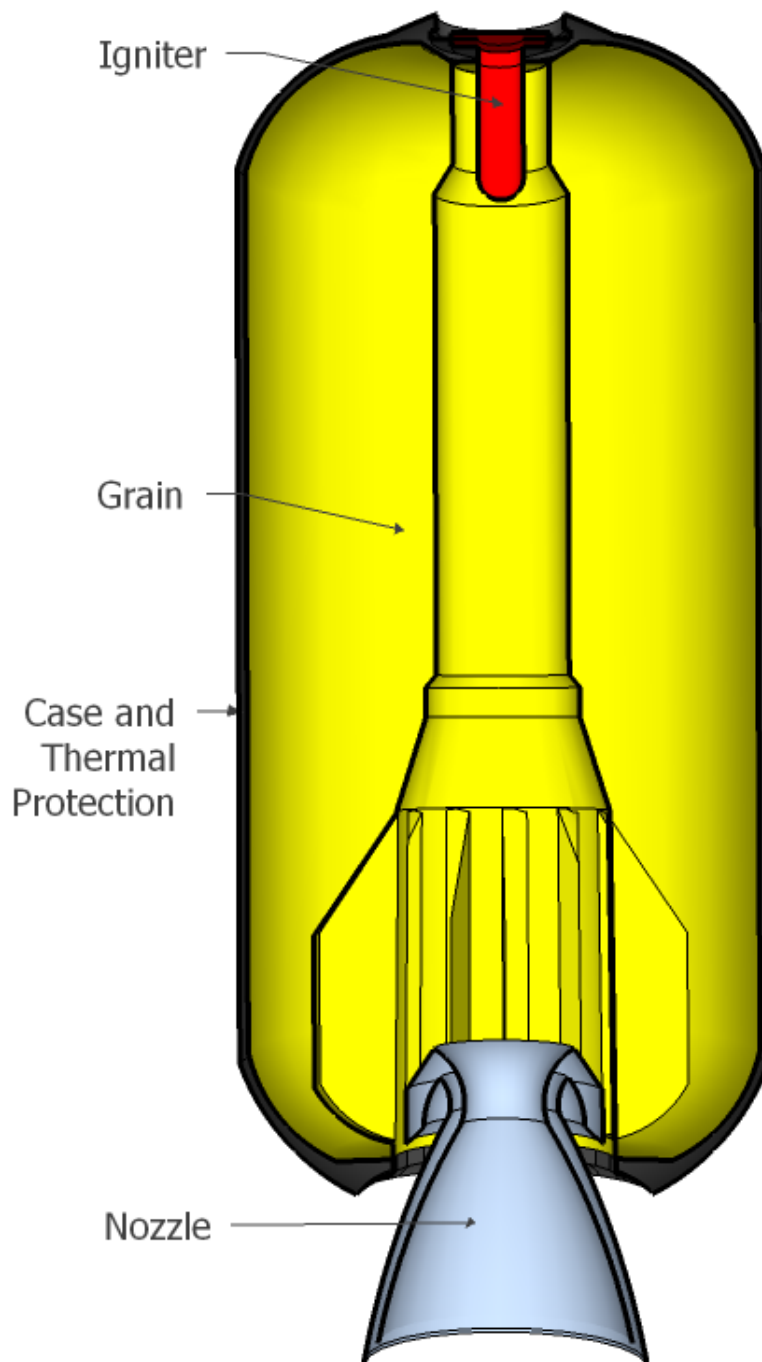


Fig. 2.1: Schema semplificato Z-16

- effetto di bloccaggio fornito dai gas traspiranti di pirolisi. Questi, propagandosi verso la superficie, si oppongono alla penetrazione in profondità del calore.

Solitamente le protezioni termiche sono costituite da fibre immerse in matrici gommo-se, costituite da termopolimeri. Al momento, come matrici si utilizzano principalmente il Nordel 1040 e il Dutral 044/E, mentre come fibre si utilizzano Kevlar o Twaron 1095.

La lavorazione di tali materiali può portare alla produzione di materiali gommosi aventi diverse proprietà. I più utilizzati presso AVIO-BPD (in particolare, nei boosters di Ariane 5 e Vega) sono:

GSM55-A: caratterizzata da modulo elastico ed allungamenti elevati, notevole tenacità, bassa resistenza all'erosione

EG2: caratterizzata da elevata rigidità, basso allungamento elastico, elevata resistenza all'erosione

Risulta evidente come, a seconda del tipo di esposizione locale al flusso dei gas di combustione, si possano utilizzare entrambi i tipi di gomma all'interno dello stesso motore.

2.1.3 Propellant Grain

Il grain propellente è costituito da una miscela di ossidante e riducente. Peculiarità di tale miscela è la stabilità a temperatura ambiente. Una volta innescata la combustione del grain, questa prosegue fino ad esaurimento, anche in mancanza d'aria.

Lo scopo è il generarsi di un apporto massico ad alta energia mediante combustione. L'energia entalpica dei gas così prodotti viene convertita in energia cinetica mediante accelerazione in ugello.

Un buon propellente solido deve presentare le seguenti proprietà:

- Elevato sviluppo di energia chimica, quindi gas prodotti dalla combustione caratterizzati ad elevata entalpia
- Elevata temperatura di combustione
- Elevata temperatura di accensione spontanea, per evitare fenomeni di autocombustione e, conseguentemente, accensioni impreviste
- Bassa tossicità dei prodotti di combustione (ove possibile)
- Bassa abrasività dei prodotti di combustione, per non incrementare il naturale consumo degli ugelli ed evitarne il danneggiamento.
- Elevata densità, così da ridurre gli ingombri e garantire un elevato carico di propellente. Segue un elevato impulso volumetrico

- Costi di produzione bassi
- Reperibilità

I grains si distinguono in:

Double-Based: generalmente costituiti da Nitroglicerina ($C_3H_5(ON_2)_3$) e Nitrocellulosa ($C_6H_8O_3(ONO_2)_2$) in un rapporto 50/50. La Nitroglicerina è liquida, la Nitrocellulosa plastica. La prima viene fatta assorbire dalla seconda.

Vi può essere la presenza di additivi come Nitrammine (per velocizzare la combustione), Ossidi di Ferro (per ritardare la combustione), Grafite (per opacizzare il grain, così da evitare l'irraggiamento delle pareti del serbatoio da parte della fiamma attraverso il grain, altrimenti trasparente).

Il grain dovrà garantire una resistenza meccanica atta ad evitare il distacco dalle pareti del case (o dalle protezioni termiche).

Ossidante e riducente risultano legati tra loro a livello molecolare. La miscela non presenta granulosità.

Tali propellenti permettono il raggiungimento di temperature di camera di circa 2700 K, pressioni ottimali di reazione di 3.5 MPa, impulsi specifici dell'ordine di 200 s

Compound: si tratta di una miscela eterogenea di combustibile, comburente ed un legante. Alla fine del processo tale miscela è considerabile macroscopicamente omogenea.

La funzione di ossidante è generalmente svolta da sali ricchi di ossigeno, quali:

- Perclorato di Potassio $KClO_4$
- Perclorato d'Ammonio NH_4ClO_4
- Nitrato d'Ammonio NH_4NO_3

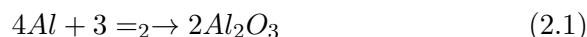
La funzione di combustibile è invece svolta da specie metalliche, in particolare da

- Alluminio
- Boro
- Berillio (particolarmente tossico)

Il polimero funzionale è costituito da un composto organico macromolecolare che, al momento della preparazione del propellente, ha forma liquida ad elevata viscosità. Presenta la capacità di inglobare elevate quantità di combustibile e comburente, sottoforma di polveri solide.

Reagisce quindi con un ulteriore elemento, definito reticolante, che lo trasforma in un solido elastico. Alla fine del processo, solo il 15% della massa totale è costituito da polimero funzionale.

Per quanto riguarda l'alluminio, costituirà generalmente dal 5% al 20% del peso totale del propellente. La sua combustione avviene secondo la reazione



Tale reazione è fortemente esotermica. Alla temperatura di 3000 K (generica temperatura di camera) il prodotto di tale reazione, detto Allumina, è sottoforma liquida. Mano a mano che si procede verso l'espulsione dalla camera, al diminuire della temperatura, solidificherà, con conseguenze sul flusso uscente e sull'ugello che trascureremo in questa trattazione. L'aumento della temperatura determinato dalla reazione sopra esposta comporta un aumento dell'impulso specifico del propellente (sez. 2.3.5).

Il grain, sottoforma liquida, viene colato nel case già completo di protezioni termiche.

Nel grain così ottenuto viene ricavata la camera di combustione, mediante punzonatura o mediante l'inserimento di una spina prima del colaggio. La geometria di tale camera ha una funzione capitale nel determinare quello che sarà il profilo di spinta dell'endoreattore. Come verrà esposto in sezione 2.2, la superficie di combustione S_b ha un'influenza diretta sulla portata \dot{m}_e di gas scaricati e, conseguentemente, sul profilo di spinta. E' importante notare come la regressione dovuta alla combustione di detta superficie influenzi i parametri di camera e la spinta mediante due contributi:

- l'apporto di massa dovuto ai gas generati dalla combustione
- l'aumento del volume di camera dovuto alla regressione della superficie di combustione

Questi due contributi generano, rispettivamente, un aumento ed una diminuzione della pressione di camera. In figura 2.2 vengono riportate tre basilari configurazioni della superficie interna del grain:

- Sezione Cilindrica
- Sezione Finocyl (fins on cylinder)
- Sezione a Stella

Viene inoltre riportata una *sezione composita*, caratterizzata da uno sviluppo 3-D. Quest'ultima configurazione, tipica dei motori della serie *Zefiro*, mostra quali livelli di complicazione possono essere necessari al fine di raggiungere profili di spinta adeguati alle necessità di una missione spaziale reale.

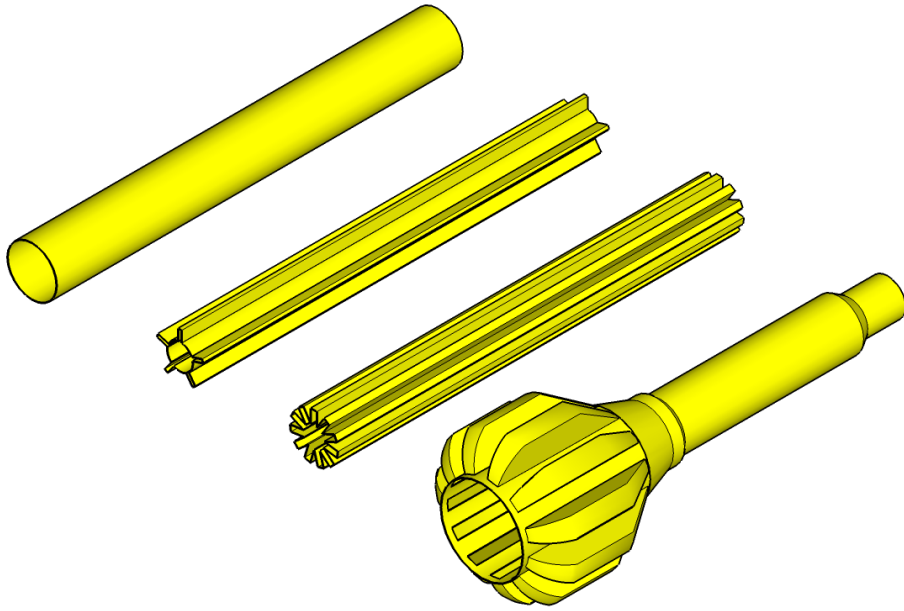


Fig. 2.2: Sezione Cilindrica, Finocyl, a Stella, Composita

2.1.4 Igniter

L'*accenditore* è il sistema deputato a fornire l'energia necessaria a porre in combustione la superficie del propellente. La sua azione durerà il minimo indispensabile affinché la combustione del grain propellente divenga autosostenuta.

L'*accenditore* può essere installato in diverse locations [19]. Per quanto riguarda i motori oggetto della presente trattazione, considereremo solo accenditori installati frontalmente (fig 2.1).

Gli *accenditori* possono essere distinti nelle due seguenti categorie [19]:

1. Pirotecnici

Gli *accenditori pirotecnici* utilizzano esplosivi solidi o formulazioni altamente energetiche simili a quelle utilizzate per i propellenti al fine di generare calore. In quest'ultimo caso, si utilizzano generalmente piccoli *pellets di propellente* caratterizzati da elevate superfici di combustione e, conseguentemente, bassi tempi di combustione.

La definizione di *accenditori pirotecnici* comprende una gran quantità di configurazioni estremamente differenti tra loro.

La configurazione più generale (*pellet-basket*, fig 2.3), è costituita da una *carica primaria o iniziatore*, la quale ha lo scopo di accendere mediante emissione di calore una seconda carica di dimensioni più

rilevanti, detta *booster*. Quest'ultimo determina, infine, l'accensione delle cariche principali, ossia i *pellets di propellente*.

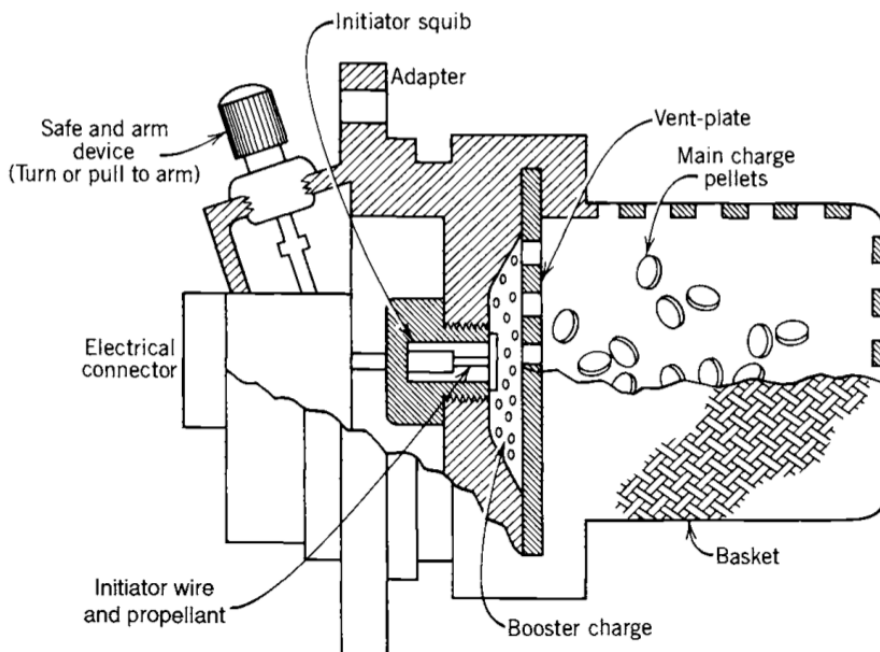


Fig. 2.3: Configurazione di accenditore pirotecnico *pellet-basket*

Non venendo utilizzata questa tipologia di accenditori nei motori oggetti di studio in questa tesi, si rimanda a [19] per una trattazione più approfondita.

2. Pirogenici

Un *accenditore pirogeno* è essenzialmente un piccolo motore a razzo utilizzato per avviare la combustione di un SRM più grande. Il suo scopo non è la generazione di spinta. Questa tipologia di accenditori utilizza uno o più ugelli, sia di tipo supersonico che di tipo subsonico. Gli *accenditori pirogeni* sono realizzati con l'utilizzo delle tipiche formulazioni di grain propellente e geometrie di camera di combustione utilizzate negli SRM.

Al contrario degli accenditori pirotecnici, nei quali il trasferimento di calore al grain propellente avviene principalmente per via radiativa, negli *accenditori pirogeni* il meccanismo di trasmissione di calore principale è di tipo *convettivo*. Il riscaldamento del grain propellente avviene quindi mediante contatto tra i gas di scarico caldi dell'accenditore ed il grain propellente dell'endoreattore a propellente solido di cui l'accenditore fa parte.

Generalmente, si ha una carica detta *iniziatore*, che verrà detonata per via elettrica o laser [19]. Questa detonerà un'ulteriore carica di dimensioni più rilevanti, detta *booster*, la quale propagherà la combustione al propellente dell'*accenditore* vero e proprio. Si cerca quindi di dimensionare iniziatore e booster al fine di ottenere una vera e propria *catena di accensione*.

I prodotti di reazione dell'*accenditore pirogeno* interagiscono con il grain propellente del motore principale in regioni precise, definite *regioni di impingement*, determinando l'accensione di detto grain.

In fase progettuale, molta importanza viene data all'evitare *missfires* o accensioni indesiderate mediante una progettazione accurata del *safe and arm device*. Per maggiori informazioni riguardo tale punto, si rimanda a [19].

2.1.5 Nozzle

L'*ugello* è l'apparato termofluidodinamico atto alla conversione dell'energia termica dei gas di combustione in energia cinetica. Determina, come conseguenza, il generarsi della spinta del motore. E' in realtà un apparato relativamente semplice, privo di componenti in movimento. Nell'ambito applicativo proprio di questa tesi, si considerano ugelli convergenti-divergenti: il fluido operativo costituito dai gas presenti in camera di combustione viene velocizzato nel tratto convergente dell'ugello per giungere a velocità sonica in corrispondenza della sezione di gola. Quindi, è soggetto ad un'espansione di tipo supersonico nel tratto divergente dell'ugello.

Geometria e design dell'ugello hanno forte influenza sulla spinta del sistema propulsivo [19]. Per quanto riguarda la presente tesi, l'unico parametro d'interesse è il diametro di gola e la sua variazione nel tempo come conseguenza dei fenomeni *ablativi* ed *erosivi*.

E' importante notare come, affinché vi sia una corretta espansione nel divergente, è indispensabile il raggiungimento della condizione sonica in sezione di gola (in caso di sottoespansione, le onde d'urto potrebbero far venire meno questa condizione qualora riuscissero a risalire il flusso). L'effetto della sezione di gola sarà ripreso in 2.3.

Per i fini di questa tesi, gli ugelli si possono distinguere semplicemente in:

- **Fissi:** rigidamente connessi al case del propulsore, incapaci di variare la direzione del getto dei gas in uscita. Vi è la possibilità (poco utilizzata) di variare tale direzione mediante sistemi fluidodinamici di interferenza (fig. 2.4).
- **Mobili:** costituiti da una componente solidale alla struttura del propulsore ed una in grado di variare l'orientamento del proprio asse di

pochi gradi rispetto all'asse della componente fissa. Tale variazione si ottiene mediante attuazione da parte di due martinetti idraulici. Ne consegue un effetto di *thrust vectoring* (fig. 2.5).

- **Immersi:** caratterizzati dal fatto che una rilevante porzione della struttura dell'ugello si trova immersa all'interno della camera di combustione o del case. Questo determina una riduzione della lunghezza totale del motore, con conseguente grande vantaggio per quanto riguarda la propulsione spaziale: la riduzione della lunghezza del singolo motore comporta la riduzione della lunghezza dell'intero sistema propulsivo (*launcher*) (fig. 2.6). Generalmente, gli *ugelli fissi* non sono *immersi*.

Gli ugelli dei motori della famiglia *Zefiro* da noi studiati sono *ugelli mobili immersi*.

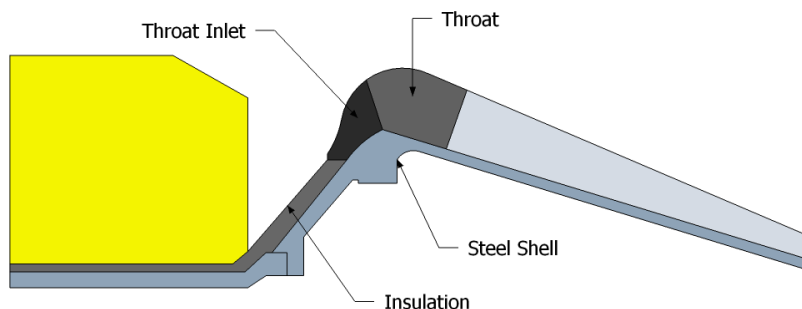


Fig. 2.4: Ugello fisso

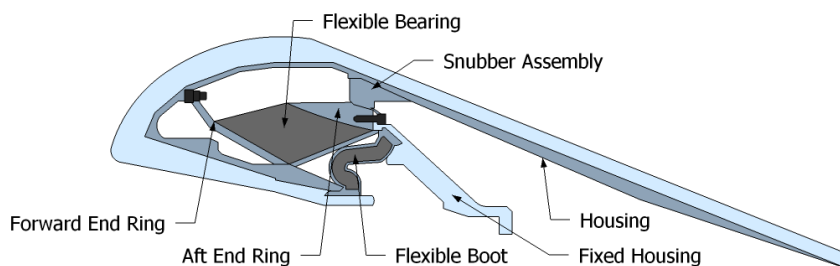


Fig. 2.5: Ugello mobile

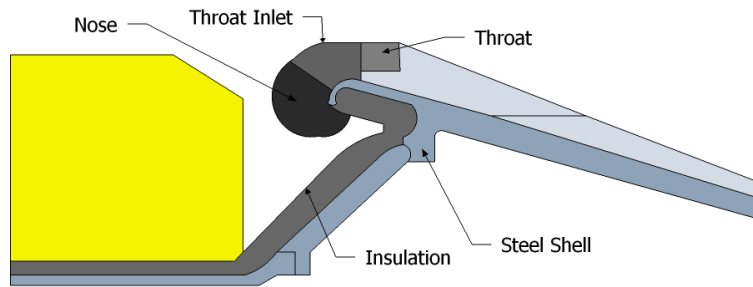


Fig. 2.6: Ugello immerso

2.2 Principi di Funzionamento

Come primo passo nello sviluppo di un simulatore balistico atto a prevedere i parametri prestazionali di un motore, è necessario individuare quali grandezze fisiche influenzano la *spinta*, scopo ultimo di un sistema propulsivo. La formula generale della spinta per i motori in esame è semplicemente ricavabile dallo schema di fig. 2.7 [39].

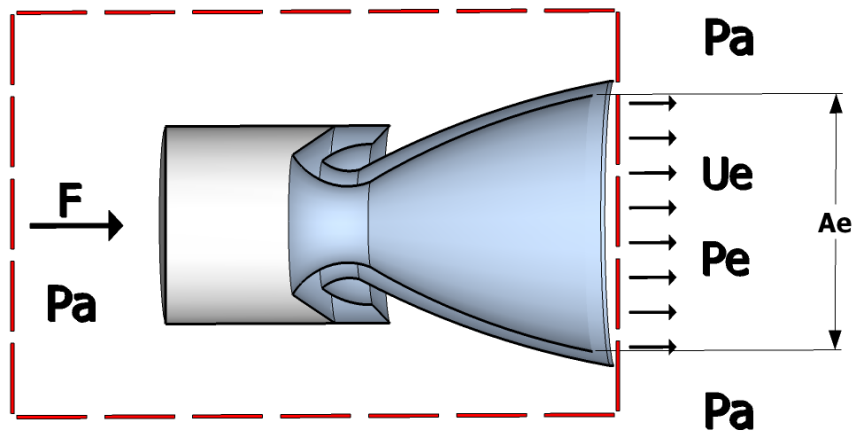


Fig. 2.7: Schematizzazione motore

Si indichino con X la somma delle forze agenti lungo l'asse del motore, con u la velocità lungo la medesima direzione. Considerando il volume di controllo delineato in rosso (fisso) e le sole componenti di forza nella direzione del moto è possibile esprimere la Seconda legge di Newton come:

$$X = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV \quad (2.2)$$

considerando la quantità di moto dovuta al flusso entrante ed uscente:

$$X = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \int_A \rho U (\vec{u} \cdot \vec{n}) dA \quad (2.3)$$

dove A e \vec{n} sono rispettivamente le superfici limite del volume e le normali a dette superfici. Si può notare come il primo integrale sia nullo, mentre l'unico flusso attraverso le superfici limite si ha in corrispondenza della sezione d'uscita dell'ugello A_e .

Denominando con u_e la velocità d'uscita dei gas dall'ugello, ed ipotizzando tale quantità e ρ costanti lungo la sezione d'uscita, si ottiene

$$\int_{A_e} \rho u_e^2 dA = \rho u_e^2 A_e = \dot{m}_e u_e \quad (2.4)$$

Per quanto riguarda le forze agenti sul volume si può scrivere:

$$X = \mathcal{F} + (P_a - P_e) A_e \quad (2.5)$$

ove \mathcal{F} rappresenta la spinta del sistema propulsivo, P_a e P_e la pressione ambiente e la pressione statica dei gas in uscita dall'ugello.

In definitiva:

$$\mathcal{F} = \dot{m}_e u_e + (P_e - P_a) A_e \quad (2.6)$$

Il secondo termine della precedente dà ragione del tipo di espansione che si avrà in funzione della pressione sulla sezione d'uscita dell'ugello e della pressione ambiente. Ipotizzando $\dot{m}_e = cost$ ed $u_e = cost$ si possono avere i tre seguenti casi (riportati in figura 2.8):

Espansione Ottima: questa condizione si ha per $P_e = P_a$ e dà ragione del fatto che l'ugello in esame è ottimale per la data pressione ambiente

Sovraespansione: questa condizione si ha per $P_e < P_a$. Si avrà un calo della spinta determinato dalla dissipazione di energia dovuta al generarsi d'onde d'urto. Qualora le onde d'urto risalissero l'ugello fino al convergente si potrebbe avere una destabilizzazione di P_0 ed una impossibilità del flusso di raggiungere la condizione sonica.

Sottoespansione: questa condizione si ha per $P_e > P_a$. Si avrà un'espansione del flusso una volta uscito dall'ugello, seguita da un incremento di spinta.

Per il resto di questa trattazione ci riferiremo al caso di espansione ottima.

Inoltre, ponendo

$$u_{eq} = \frac{(P_e - P_a) A_e}{\dot{m}_e} \quad (2.7)$$

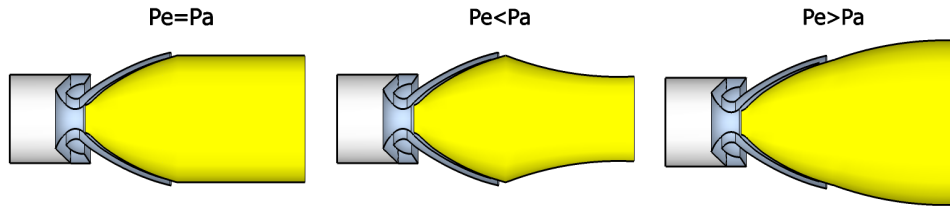


Fig. 2.8: Espansione ottima, sovraespansione, sottoespansione

è possibile riscrivere la 2.6 nella forma

$$\mathcal{F} = \dot{m}_e u_{eq} \quad (2.8)$$

Tale espressione sarà particolarmente utile per ricavare i parametri balistici espressi in paragrafo 2.3.

Considerando fig 2.9 si nota come la componente principale di spinta si sviluppi sul fondo della camera di combustione secondo la relazione

$$\mathcal{F}_c = P_0 A^*. \quad (2.9)$$

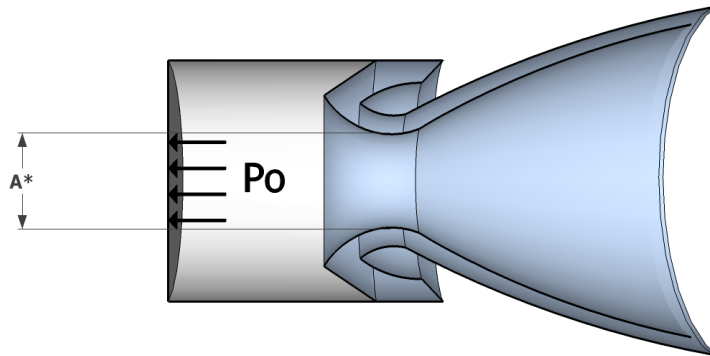


Fig. 2.9: Spinta sul fondo della camera

Le restanti componenti dovute alla pressione di camera (ad esempio, quelle sulle superfici laterali) si elidono vicendevolmente. Vi sarà, inoltre, un contributo dovuto al divergente dell'ugello. Le pressioni agenti sul divergente non sono, infatti, completamente compensate da quelle agenti sul convergente. Ben noto in letteratura [39] è lo sviluppo, sotto l'ipotesi di espansione isoentropica, di 2.6:

$$\mathcal{F} = P_0 A^* \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \frac{P_e}{P_o} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \right]} + (P_e - P_a) A_e \quad (2.10)$$

ove $\gamma = \frac{cp}{cv}$.

Risulta quindi evidente come, al fine di studiare la spinta, il modello balistico interno che svilupperemo debba, innanzi tutto, ricavare la pressione interna alla camera di combustione. Dovranno inoltre essere note le proprietà fisiche della miscela di gas presente in camera ed in espansione nell'ugello.

Per quanto riguarda l'equazione 2.6 si nota come, in condizioni ideali d'ugello ($P_e = P_a$), la spinta sia funzione dei due parametri u_e ed \dot{m}_e . Per quanto riguarda il primo parametro, si può ricavare:

$$u_e = \sqrt{\frac{2\gamma R}{\gamma - 1} T_0 \left[1 - \frac{P_e^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{P_0} \right]} \quad (2.11)$$

Avremo pertanto un limite imposto dalla T_0 massima raggiungibile e, quindi, dalla qualità e dalla tipologia del propellente.

Consideriamo la massa in uscita dall'ugello: risulta evidente come essa sia strettamente legata alla portata di gas caldi generata dalla combustione. È possibile esprimere tale portata come:

$$\dot{m}_g = S_b r_b \rho_p \quad (2.12)$$

in cui S_b , ρ_p ed r_b sono rispettivamente la superficie interna del grain soggetta a combustione (capitolo 2.1.3, figura 2.2), la densità del propellente, il rateo di regressione della superficie di combustione, definito anche *rateo di combustione*.

La regressione della superficie di combustione avviene, generalmente, lungo la normale alla superficie stessa. Il rateo di combustione, che la determina, è un parametro indispensabile nel calcolo della balistica interna di un SRM. Sarà pertanto trattato nel dettaglio in sezione 2.5.

Segue che, per determinare un aumento di spinta senza variare le dimensioni del motore, si può aumentare la superficie di combustione. In particolare, l'andamento della curva di pressione di camera $P_0(t)$ (quindi di $\mathcal{F}(t)$) è funzione dell'andamento di $S_b(t)$. Si deduce quindi il motivo per cui si utilizzino sezioni di varia forma e complicazione al fine di ottenere gli andamenti di spinta richiesti dalla missione. In figura 2.10 vengono riportati gli andamenti qualitativi delle pressioni di camera generate dalle tipologie di sezione presentate in 2.1.3.

2.3 Parametri Balistici

A partire dalle relazioni descrittive del funzionamento di un SRM ricavate nel capitolo 2.2 si possono individuare diversi parametri balistici atti a mettere in evidenza le prestazioni delle singole componenti di un endoreattore a propellente solido. In particolare, a partire dalle equazioni 2.10 e 2.8, è possibile ricavare i seguenti parametri:

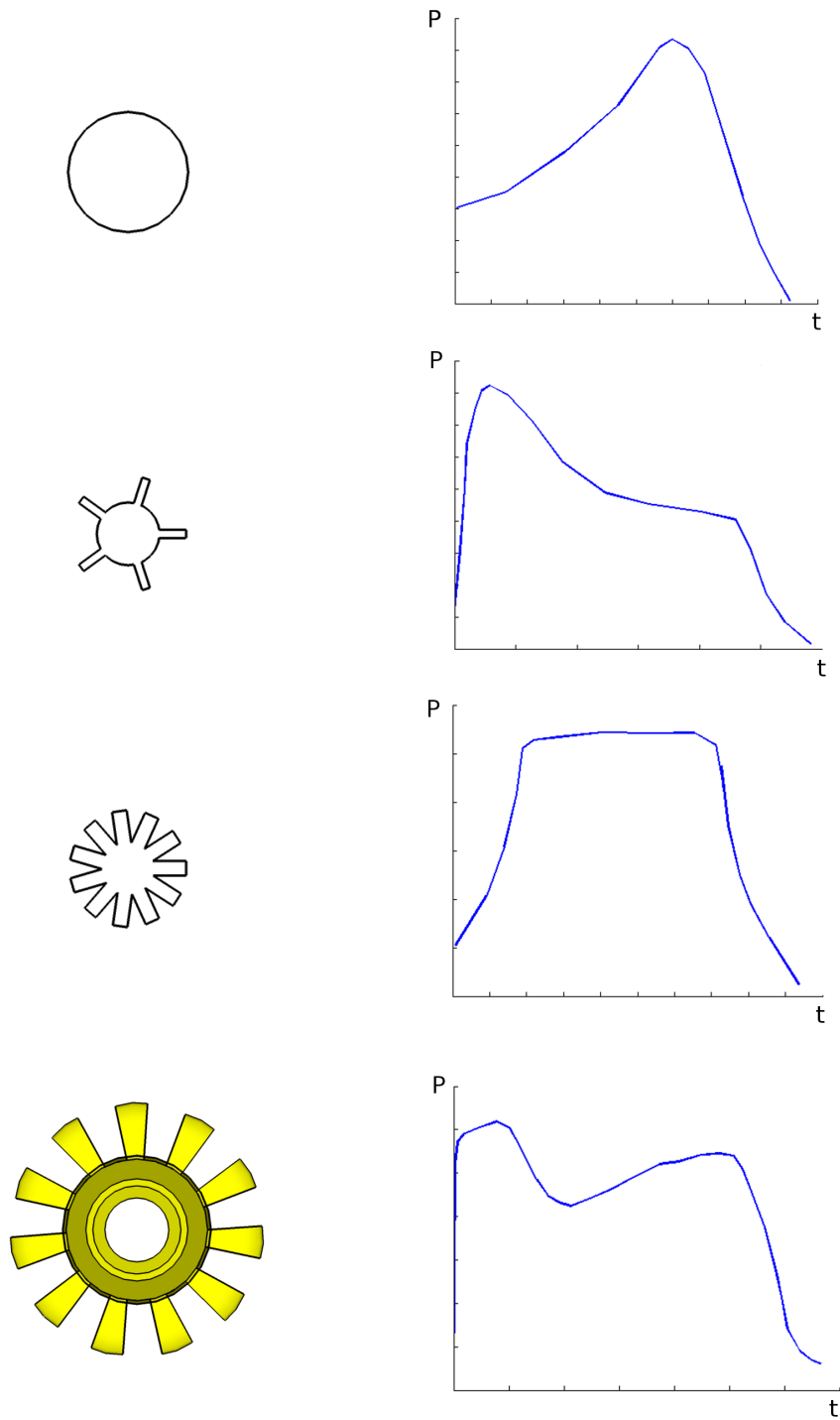


Fig. 2.10: Sezioni elementari e relativi profili di pressione

- Area di Gola e Rateo d'Espansione dell'Ugello
- Coefficiente di Spinta
- Velocità Caratteristica
- Impulso Totale
- Impulso Specifico
- Pressione di Camera e MEOP

Tali parametri verranno trattati in dettaglio nei seguenti paragrafi.

2.3.1 Parametri d'ugello

Il flusso in corrispondenza della sezione di gola dell'ugello è un parametro progettuale assai rilevante. Lo si può caratterizzare a partire dal *coefficiente di spinta*, dal *diametro della sezione d'uscita* dell'ugello, dal *diametro della sezione di gola*, dalla *pressione ambiente*, dalla *pressione di camera* e da coefficienti relativi alle *inefficienze* dell'ugello.

Il diametro della sezione di gola D^* riveste una particolare importanza: permette infatti il raggiungimento della condizione sonica ed, inoltre, determina la portata massica che attraversa l'ugello. Questo ha un'influenza determinante sulla *pressione di camera*.

Il *Rateo d'Espansione* dell'ugello è definito come il rapporto tra l'area della sezione d'uscita dell'ugello e la sua sezione di gola. Ipotizzando un'espansione isoentropica ed espansione ottima, si può scrivere [45] :

$$\frac{A^*}{A_e} = \varepsilon^{-1} = \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(\frac{P_e}{P_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[1 - \frac{P_e}{P_0} \frac{\gamma-1}{\gamma}\right]} \quad (2.13)$$

2.3.2 Coefficiente di Spinta

Il *Coefficiente di Spinta* $C_{\mathcal{F}}$ è dato dal rapporto tra 2.10 e $P_0 A^*$ [19, 39]:

$$C_{\mathcal{F}} = \frac{\mathcal{F}}{P_0 A^*} \quad (2.14)$$

$$C_{\mathcal{F}} = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right) \left[1 - \frac{P_e}{P_0} \frac{\gamma-1}{\gamma}\right]} + \frac{P_e - P_a}{P_0} \varepsilon \quad (2.15)$$

Da un punto di vista fisico, per data configurazione di propellente, è un attributo del solo ugello e ne quantifica la performance.

2.3.3 Velocità Caratteristica

La *velocità caratteristica* C^* è funzione delle proprietà del propellente e della geometria della camera di combustione. Non presenta relazioni con le proprietà dell'ugello.

Questo rende tale velocità un ottimo fattore di comparazione tra differenti propellenti e design dei motori.

E' inoltre facilmente ricavabile da dati sperimentali, quali \dot{m}_e, P_c, A^* . Può essere definita come [19, 39]:

$$C^* = \frac{P_0 A^*}{\dot{m}_e} \quad (2.16)$$

Spesso viene ricavata anche mediante la seguente espressione:

$$C^* = \eta_{ref}^* C_{ref}^* \left(\frac{P_0}{P_{ref}} \right)^{m_{C^*}} \quad (2.17)$$

dove η_{ref}^* , C_{ref}^* ed m_{C^*} sono parametri sperimentali misurati ad una data P_{ref} .

2.3.4 Impulso Totale

L'*impulso totale* [19, 39] è l'integrale della spinta sul tempo di combustione.

Tale parametro è direttamente proporzionale all'energia totale rilasciata da tutto il propellente presente nel motore. Avremo:

$$I_t = \int_0^{t_f} \mathcal{F} dt = u_{eq} M_p \quad (2.18)$$

ove M_p è la massa totale del propellente.

2.3.5 Impulso Specifico

L'*impulso specifico* è una misura dell'impulso (variazione di momento della quantità di moto) generato per unità di massa del propellente consumata [19, 39]. Può anche essere definito come il rapporto tra la spinta del motore e la massa del flusso attraverso la sezione d'uscita dell'ugello.

Risulta essere un ottimo indice della qualità del propellente, nonchè un parametro di semplice utilizzo al fine di determinare il peso di propellente necessario al fine di soddisfare i requisiti balistici di missione. Avremo:

$$I_s = \frac{I_t}{M_p} = \frac{\mathcal{F}}{\dot{m}_e} = \frac{u_{eq}}{g_e} \quad (2.19)$$

dove g_e è l'accelerazione gravitazionale terrestre.

Da eq 2.11 risulta che l'*impulso specifico* è funzione di u_e e, conseguentemente, della temperatura massima di camera T_{0max} . Quest'ultimo parametro è funzione della qualità del propellente utilizzato. Viene quindi

confermata l'affermazione secondo la quale l'*impulso specifico* è indice della qualità del propellente. Questo era già intuibile dalla definizione stessa, che esprime il semplice concetto secondo il quale il propellente è tanto più raffinato quanto maggiore sarà l'impulso ottenuto a parità di massa.

2.3.6 Pressione di Camera e MEOP

Come si è visto, per dato ugello la *pressione di camera* è il parametro fondamentale nella determinazione della curva di spinta di un endoreattore a propellente solido.

I modelli di balistica interna mirano a predire proprio questo parametro. Durante la fase di design della geometria del grain, si stabilisce una *Massima Pressione Operativa Prevista* (Maximum Expected Operating Pressure) [19]. In funzione di tale vincolo, saranno dimensionati i vari componenti strutturali (es: Case).

2.4 Balistica Interna di Endoreattori a Propellente Solido

La *balistica interna* di un endoreattore a propellente solido studia il campo di moto all'interno della camera di combustione di un SRM per tutta la durata della sua fase di spinta. La conoscenza di tale campo di moto, a partire dall'accensione del motore fino al suo spegnimento, permette la previsione delle prestazioni del motore in esame.

Si prenda ad esempio un generico motore di cui sono noti i parametri riguardanti tipologia di propellente ed ugello. Risulta intuitivo come, mediante 2.10, dalla conoscenza del campo di pressione interno alla camera di combustione si possa ricavare la spinta del motore.

2.4.1 Modelli Balistici

Lo studio dei modelli balistici presenti in letteratura evidenzia come essi si possano distinguere in quattro categorie, a seconda dell'approccio dimensionale e delle proprietà di stazionarietà che li caratterizzano:

1. Modelli Balistici 0-D

Tali modelli non considerano la variazione spaziale delle variabili termofluidodinamiche, ma soltanto la loro evoluzione temporale. Tali variabili si considerano quindi uniformi in camera di combustione e se ne ricava soltanto il valore medio. Da tale approccio deriva sia l'estrema semplicità di questi modelli, che la loro principale fonte d'errore. Essi si possono distinguere in:

Modelli Isotermici: la temperatura dei gas di camera si considera costante nel tempo. Si intuisce quanto tale approccio sia limitato [50].

Modelli Dinamici: si tiene in considerazione la variazione di temperatura nei gas di combustione. Questo permette di valutarne il transitorio e la sua influenza nella variazione delle restanti variabili termofluidodinamiche [21].

Le equazioni alla base di tale tipologia di modelli sono l'equazione di continuità e di conservazione dell'energia.

Tali modelli possono essere particolarmente utili per motori caratterizzati da basso rapporto $\frac{L}{D}$ e rapporti $\frac{A_h}{A^*}$ inferiori a 4. Queste condizioni garantiscono una bassa influenza della combustione erosiva (cap. 2.5.2). Tale tipologia di combustione, essendo dipendente dalla velocità assiale locale del flusso fluidodinamico, non è quantificabile dai modelli 0-D: nella loro formulazione manca, infatti, l'equazione di bilancio della quantità di moto e, quindi, la conoscenza del campo di velocità. Questo determina anche un errore nella valutazione della fase di *Tail Off* (sez. 2.4.2). Come sarà dettagliato in seguito, in tale fase si ha un'elevata superficie di protezioni termiche esposte al flusso fluidodinamico. Tali superfici scoperte non sono considerabili adiabatiche. Pertanto, il calore scambiato per convezione con il flusso fluidodinamico diviene rilevante. La mancanza di informazioni sulla velocità locale del flusso non permette quindi di quantificare tale parametro.

Tuttavia, qualora non sia necessaria la valutazione dettagliata dell'influenza di tale flusso di calore, i modelli 0-D costituiscono un potente e semplice strumento nella valutazione dei transitori di accensione (*IT*, 2.4.2) e di spegnimento (*TO*, 2.4.2) di motori caratterizzati da un basso rapporto $\frac{L}{D}$ (*BARIA*, accenditori, motori di piccole dimensioni).

2. Modelli Balistici 1-D Quasi-Stazionari

Questo tipo di modelli prevede l'utilizzo di una griglia di calcolo 1-D. Tale griglia viene disposta lungo l'asse del motore. La camera di combustione viene quindi suddivisa in volumi di controllo. Su ciascun nodo della griglia vengono ridistribuite le proprietà termofluidodinamiche del volume di controllo di sua competenza.

Le equazioni di lavoro di tale tipologia di modello sono l'equazione di continuità, il bilancio di quantità di moto, la conservazione dell'energia. Si considera valida l'ipotesi di *flusso stazionario*: verranno quindi trascurati dalle precedenti equazioni i termini temporali.

Il procedimento di calcolo è il seguente:

- (a) Il valore di pressione nella zona di testa dell'endoreattore viene stimato a partire da considerazioni sulla portata di gas generata in questa zona (dall'accenditore, dalla superficie di grano propellente in combustione).
- (b) Si propaga spazialmente la risoluzione delle equazioni di lavoro nodo per nodo, fino a giungere all'ingresso dell'ugello.
- (c) La pressione nella sezione d'ingresso d'ugello viene valutata e confrontata con la pressione necessaria a giustificare l'intera portata in uscita dall'ugello. Si procede quindi iterativamente fino alla convergenza dei due valori.
- (d) Si ripete il procedimento per ogni step temporale.

I risultati presenti in note tecniche di AVIO-BPD mostrano la capacità del modello di valutare l'influenza della combustione erosiva. Questo rende il modello applicabile alla valutazione della balistica interna di endoreattori a propellente solido caratterizzati da rapporti $\frac{L}{D}$ elevati, elevati fattori di riempimento, bassi valori del rapporto $\frac{A_p}{A^*}$.

La conoscenza della velocità assiale locale del flusso fluidodinamico permette, infatti, una corretta valutazione dei fenomeni erosivi e delle dispersioni termiche per convezione sulle superfici di protezioni termiche esposte. Tuttavia, l'aver trascurato i termini temporali nelle equazioni di lavoro comporta un'incapacità di valutare le fasi di transitorio (sia accensione, che spegnimento).

3. Modelli Balistici 1-D non Stazionari

Al fine di unire i vantaggi delle due tipologie di modelli precedentemente esposte ed eliderne gli svantaggi sono stati sviluppati *modelli balistici 1-D non stazionari* [4].

Lo sviluppo di tale tipologia di modelli è resa necessaria dal fatto che gran parte dei boosters a propellente solido odierni sono caratterizzati da elevati ratei $\frac{L}{D}$, elevati fattori di riempimento e bassi rapporti $\frac{A_p}{A^*}$. Al tempo stesso, lo studio dei transitori di accensione e spegnimento è spesso di elevato interesse. Questo rende inopportuno l'utilizzo di modelli 1-D Quasi-Stazionari.

Come nel caso precedente, si fissa una griglia spaziale e si distribuiscono sui suoi nodi le proprietà dei volumi di controllo ad essi relativi. Le equazioni di lavoro di tale tipologia di modello sono l'equazione di continuità, il bilancio di quantità di moto, la conservazione dell'energia. Se ne utilizza, questa volta, la forma non stazionaria.

In AVIO-BPD questo tipo di modelli è stato finora trascurato. Questo in quanto è caratterizzato da un costo computazionale maggiore che non i due casi precedenti, non giustificato da un aumento sensibile di

precisione nella valutazione della *Fase Quasi Stazionaria* (cap. 2.4.2). Questo ha portato AVIO-BPD a concentrarsi nello sviluppo di *modelli ibridi*.

4. Modelli Balistici Ibridi

Al fine di ottenere una previsione non stazionaria veloce e semplificata, è stato sviluppato presso AVIO-BPD un modello balistico di tipo ibrido [1]. Tale modello si basa sull'integrazione di un modello non stazionario 0-D e di un sottomodello 1-D quasi-stazionario. Il primo permette il calcolo del valore medio delle grandezze fluidodinamiche istante per istante, anche durante i transitori. A partire da tale valore medio, il sottomodello 1-D quasi-stazionario ricava le variazioni spaziali di tali parametri, come descritto al punto 2.

A tal fine sono stati utilizzati i modelli *RK* [7] e *PTBALL* [8], entrambi sviluppati all'interno di AVIO-BPD.

Va evidenziato come le equazioni fondanti di tale modello 1-D quasi stazionario sono derivate dalla teoria dei *flussi semplici* [2]. L'applicazione di tale modello va quindi limitata agli ambiti descrivibili da tale semplificazione. Inoltre, essendo il sottomodello 1-D inizializzato a partire dal valore medio dei parametri termofluidodinamici calcolati mediante l'applicazione di un modello 0-D, se ne eredita la principale fonte d'errore: considerare i valori iniziali dei parametri termofluidodinamici pari alla loro media su tutto il volume di controllo. L'errore sarà tanto maggiore quanto più grande sarà la dimensione della camera.

2.4.2 Fasi della Balistica Interna

La vita operativa di un SRM, ossia quel lasso di tempo che va dalla sua accensione al suo spegnimento, è generalmente definito *Combustion Time* (CT). Tale *Combustion Time* si può dividere in tre differenti fasi temporali, distinguibili in base ai fenomeni che maggiormente ne influenzano l'andamento [17] (fig 2.11):

1. Ignition Transient

A seguito del *delay* o *lag time* dell'accenditore, il contatto fra i gas di scarico caldi con la superficie del grano propellente determina l'accensione di quest'ultimo nella zona di *impingement*. Questo avviene in un lasso di tempo definito *Induction Interval*.

A seguito, il propagarsi della fiamma innesca l'accensione del restante grano propellente, determinando un'addizione di massa sempre più grande all'interno della camera di combustione, con conseguente aumento della pressione di camera P_{cc} . Tale propagarsi di fiamma avviene in un lasso di tempo definito *Flame Spreading Interval*.

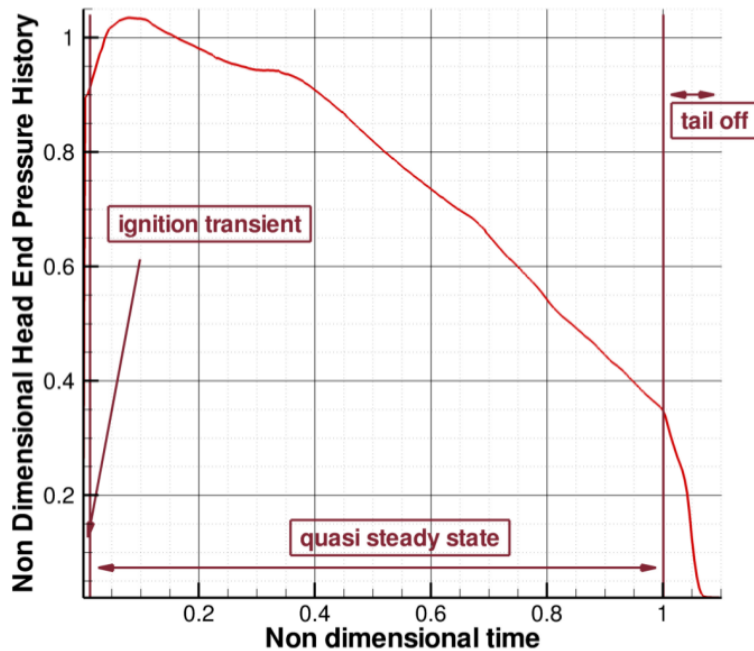


Fig. 2.11: Fasi della vita operativa di un SRM

Durante tale intervallo temporale, avvengono altri due eventi: si conclude l'addizione di massa in camera da parte dell'accenditore e si raggiunge la pressione di stappamento dell'ugello. L'ugello è, infatti, tappato mediante un apposito sigillo. La rottura di quest'ultimo si ha, generalmente, per pressioni differenziali tra sezione d'ingresso e d'uscita dell'ugello prossime a 7 bar .

Si può assistere, inoltre, ad un picco di pressione determinato dal contatto dei gas di scarico dell'accenditore sul grain propellente. Il flusso di tali gas è caratterizzato da un'elevata velocità. Determina quindi un aumento del rateo di combustione locale nella zona di *impingement* mediante il meccanismo della combustione erosiva (sez. 2.5.2). Per valutare tale contributo non si potranno utilizzare le semplici relazioni esposte in sezione 2.5.2 in quanto non si ha solo un'elevata componente di velocità tangenziale alla parete, ma anche normale. Alcune metodologie impiegate nello studio di questo fenomeno saranno riportate in capitolo 4.4.2.

Arrivati a questo punto, la superficie di combustione si trova ad essere completamente accesa, e la camera di combustione in via di riempimento. Si giunge a quelle che vengono definite *Steady State Conditions*.

Un modello balistico adatto alla descrizione dell'*Ignition Transient* dovrà essere in grado di rappresentare la forte non stazionarietà dei fe-

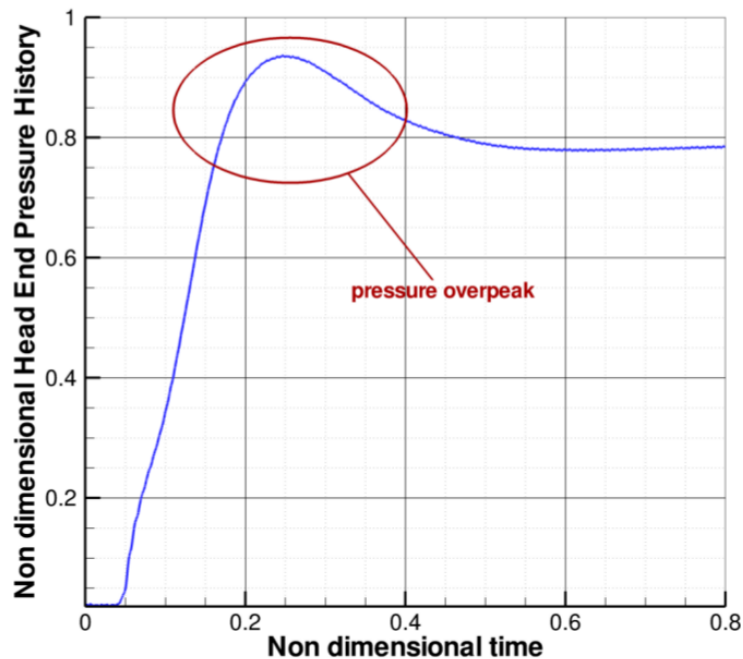


Fig. 2.12: Ignition Transient

nomeni sopra presentati dal punto di vista sia fluidodinamico che termico. Può invece considerarsi trascurabile, limitatamente a questa fase temporale, la variazione di geometria del grain determinata dalla combustione. I modelli da noi sviluppati non applicheranno tale semplificazione.

2. Quasi Steady State

In questa fase la balistica interna alla camera di combustione è determinata principalmente dall'addizione di massa da parte della combustione del grain, quindi dall'evoluzione della superficie di combustione S_b . Tale evoluzione sarà determinata dalla geometria interna del grano propellente e dalla sua regressione.

Presenta inoltre un'influenza sensibile la variazione dell'area di gola dell'ugello, dovuta a fenomeni ablativi ed erosivi. Questo è particolarmente vero per endoreattori a propellente solido caratterizzati da elevati tempi di combustione.

Mano a mano che la regressione del grano propellente porta allo scoprirsi delle pareti interne del case (ricoperte, ovviamente, dalle relative protezioni termiche), si avrà un'influenza dovuta all'addizione di massa determinata dall'ablazione delle protezioni termiche. Tale influenza può considerarsi trascurabile. Non lo è, invece, la perdita di calore at-

traverso le protezioni termiche scoperte (le pareti ricoperte dal grano propellente possono, infatti, considerarsi adiabatiche).

Possono inoltre instaurarsi fenomeni legati ad *instabilità acustica* o *instabilità di combustione*. Questi due tipi di instabilità possono considerarsi trascurabili per quanto riguarda i motori da noi considerati.

Al fine di descrivere tutti questi fenomeni, è necessario un modello dimensionale non stazionario. Qualora si possano trascurare le due instabilità sopra citate, per certe tipologie di SRM può convenire l'utilizzo di un modello 0-D (sez. 2.4.1, punto 1). Questo determina una semplificazione del problema senza che si abbia una perdita di qualità dei risultati qualora il calo di pressione lungo l'asse motore sia basso e, conseguentemente, la combustione erosiva sia trascurabile (sez. 2.5.2). Altrimenti, qualora l'influenza della combustione erosiva sia rilevante, sarà necessaria l'applicazione di un modello di balistica interna almeno 1-D (sez. 2.4.1, punti 2 e 3).

Di capitale importanza è il considerare, all'interno del modello balistico utilizzato, l'evoluzione geometrica del grain e dell'ugello (in particolare, dell'area di gola), in quanto tali geometrie determinano le condizioni vigenti nel canale all'interno del quale andremo a studiare la fluidodinamica interna del nostro motore (ossia la camera di combustione).

Le proprietà fisiche della *miscela di gas* presente all'interno del canale (prodotti di combustione, gas inerti di riempimento, prodotti di ablazione, etc) si potranno considerare pari alla media pesata delle proprietà fisiche delle singole specie che compongono detta miscela. Visto lo scarso apporto massico dovuto all'ablazione delle protezioni termiche e dell'ugello, si può sin d'ora intuire come la loro influenza sia minima.

3. Tail Off

Mano a mano che la superficie di combustione recede, la superficie esposta delle protezioni termiche aumenterà sempre più. Questo determina un'addizione di massa causata dalla loro conseguente ablazione. Contemporaneamente, l'addizione di massa dovuta alla combustione del grain diminuisce. Questo porta ad una repentina diminuzione della pressione di camera P_{cc} .

Si avranno quindi fenomeni non stazionari dovuti al crollo della pressione di camera ed alla miscelazione dei residui prodotti di combustione con quelli dovuti all'ablazione delle protezioni termiche. Sarà necessaria una descrizione dettagliata dell'evoluzione delle superfici di combustione ed ablazione. Come affermato in precedenza, l'influenza dell'addizione di massa dovuta all'ablazione delle protezioni termiche

è trascurabile (a meno che il dimensionamento delle protezioni termiche non sia lo scopo della simulazione). Non è altrettanto trascurabile l'effetto del calore perso attraverso le pareti scoperte. Sarà quindi necessaria una dettagliata modellazione di detto calore. Per quanto riguarda il presente elaborato, si utilizzerà l'approccio descritto in [9] (cap. 4.1.8).

Nonostante una dettagliata previsione della fase di *Tail Off* non ci sia attualmente richiesta, un'accurata previsione della spinta residua di un motore in fase di spegnimento è necessaria al dimensionamento degli apparati preposti alla separazione dello stadio di cui il motore fa parte. Tali apparati dovranno, infatti, opporsi sia alla forza d'inerzia dello stadio in esaurimento, che alla suddetta spinta residua.

A tal fine, anche l'influenza della portata massica dei prodotti di ablazione può risultare rilevante. Non si trascurerà, quindi, nessuno dei contributi precedentemente citati.

2.5 Rateo di Combustione

La combustione del grano propellente è un fenomeno fisicamente complesso, governato da un gran numero di variabili locali (fluidodinamiche, chimiche, termiche).

A livello pratico, si utilizzano modelli semplificati. Tali modelli evidenziano la dipendenza dai soli parametri di maggior influenza, semplificando le dipendenze dai parametri meno rilevanti.

In particolare, limitandosi ad un'osservazione macroscopica, parametro di capitale importanza è il *rateo di regressione* del grain, altrimenti detto *rateo di combustione*. Tale parametro è definito come il rapporto della distanza di regressione della superficie del grain in combustione (lungo la propria normale locale) e l'unità di tempo. La dimensione risulterà pertanto essere quella di una velocità ($\frac{m}{s}$).

Assumiamo valide le due seguenti ipotesi:

- *I gas di camera sono costituiti da una miscela inerte di gas perfetti, ossia di prodotti di combustione del grain all'equilibrio chimico, dai gas inerti di riempimento (solo nei primi istanti di combustione) e dai prodotti di ablazione [1].*
- *Tutte le reazioni chimiche sono estremamente veloci (rispetto alle dinamiche dei parametri fluidodinamici e termici) ed avvengono in uno strato molto sottile in coincidenza della superficie di combustione [17, 9].*

Tali ipotesi permettono di ignorare tutti i complessi fenomeni fisico-chimici che avvengono lungo la superficie di combustione, procedendo poi alla descrizione della balistica interna mediante modelli semi-empirici.

Sarà pertanto necessaria un'investigazione sperimentale atta ad individuare e misurare i coefficienti necessari. Tali misurazioni vengono effettuate non solo per diversi tipi di propellente, ma anche per ogni singola realizzazione dello stesso. A tal fine, si utilizzano piccoli motori detti *BARIA*.

Tali motori presentano sezione interna del grain di tipo cilindrico semplice. Tale grain viene realizzato con una colata del propellente d'interesse (in caso si ricavano i coefficienti per lo studio di un SRM specifico, il propellente dovrà appartenere alla medesima realizzazione che verrà colata nel motore vero e proprio). L'impiego di ugelli con diverse sezioni di gola consente di ottenere varie pressioni all'interno della camera, così da misurare l'andamento dei parametri sperimentali in funzione di una data pressione.

Alla luce delle precedenti affermazioni, il rateo di combustione può essere visto come costituito dall'apporto di tre differenti termini:

1. un termine *quasi-stazionario*, determinato dalla pressione interna del motore
2. un termine dovuto al *contributo erosivo*, determinato principalmente dalla velocità del flusso lungo l'asse del motore.
3. un termine *non lineare non stazionario*, determinato dalla variazione di pressione nel tempo

Nel presente lavoro di tesi si sono sviluppati ed implementati diversi modelli di *burn rate* basandosi sia su formulazioni usate in AVIO-BPD, sia su formulazioni presenti in letteratura [17, 19, 54, 42].

Vengono, di seguito, descritti i termini considerati nella determinazione del modello di *burn rate* realizzato (cap. 5.3).

2.5.1 Termine Quasi-Stazionario

Nel determinare le equazioni di lavoro relative al *termine quasi-stazionario* si è utilizzato il modello APN [19, 17]. Tale modello, di tipo semi-empirico, è il più utilizzato in letteratura ed in pratica. In tale formulazione si considera il rateo di combustione quasi-stazionario come funzione della pressione locale media. L'equazione di lavoro è anche detta *legge di Saint Robert*:

$$r_b = aP_0^n \quad (2.20)$$

in cui P_0 è la pressione in camera di combustione, a ed n sono due coefficienti semi-empirici, rispettivamente definiti *coefficiente termico* ed *indice di combustione*.

Generalmente, tali parametri si considerano costanti per range elevati di pressione di camera. Essi vengono misurati mediante *firing tests* di *BARIA*. Particolare importanza ha l'espressione di a :

$$a = a(p, T_i) = a_{ref} e^{\sigma_p(T_i - T_{ref})} \quad (2.21)$$

ove T_i è la temperatura iniziale del grain propellente, T_{ref} è la temperatura di riferimento dello stesso, a_{ref} e σ_p sono parametri sperimentali. Il primo, è il coefficiente a misurato alla temperatura T_{ref} , il secondo è la *sensibilità del rateo di combustione alla temperatura*.

Tutti i parametri sperimentali riferiti ai propellenti da noi simulati sono forniti da AVIO-BPD.

2.5.2 Combustione Erosiva

Con il termine *combustione erosiva* [19] ci si riferisce all'incremento del *burn rate* causato da flussi di gas di combustione caratterizzati da un'elevata velocità nei pressi della superficie del propellente in combustione. L'influenza sulle prestazioni di un endoreattore a propellente solido può essere notevole. Tale fenomeno avviene principalmente nei passaggi di porta o nelle perforazioni del grain, mano a mano che il flusso di gas caldi si avvicina all'ugello. Generalmente, si ha *combustione erosiva* qualora il motore sia caratterizzato da rapporti tra *lunghezza e diametro idraulico* elevati in congiunzione con rapporti tra *area ed area di gola* inferiori a 4. Questo è particolarmente vero per le configurazioni di grain di tipo *star-aft*.

Si ritiene che il meccanismo della *combustione erosiva* sia determinato da un incremento del calore trasferito dal flusso alle pareti solide del grain a causa dell'elevata velocità locale e della natura turbolenta di tale flusso [29][32].

Essendo il fenomeno assai complesso, sono stati condotti numerosi esperimenti mirati a comprenderne la natura [19]. Qualitativamente, la *combustione erosiva* determina un incremento del flusso di massa nelle prime fasi di combustione (IT, prima parte del QSS, capitolo 2.4.2). Mano a mano che la combustione genera un incremento di area di porta, l'influenza della *combustione erosiva* diminuisce, fino a divenire del tutto trascurabile. Avendosi un maggiore consumo di propellente nelle prime fasi della combustione, si determina un decremento dello stesso nelle fasi finali (TO). Segue anche un esaurimento del propellente più rapido, in particolare nella regione d'ingresso ugello. Questo comporta una più veloce esposizione dell'isolamento termico in tale regione, con conseguenti accorgimenti progettuali necessari ad evitare il cedimento termico in tale regione. Quanto detto viene riassunto in figura 2.13.

Un modello relativamente semplice per la descrizione della *combustione erosiva* è quello sviluppato da Lenoir e Robillard [27]. Tale modello è stato poi perfezionato nel tempo (noi considereremo le modifiche di Lawrence e Beddini, [54][42]). Si considera come causa principale della *combustione erosiva* l'aumento del flusso di calore attraverso il propellente solido.

Il modello divide il trasferimento di calore al grain propellente in due termini:

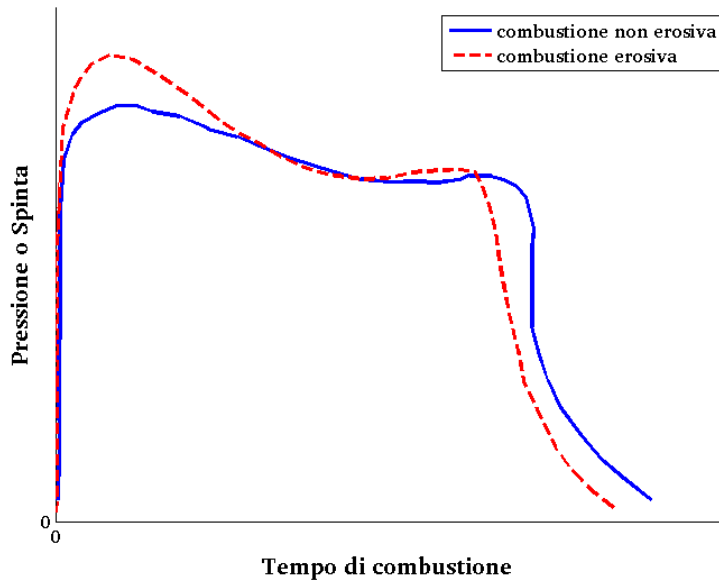


Fig. 2.13: Influenza della combustione erosiva

- r_{b_p} , modellato secondo quanto visto in 2.5.1. Tale termine considera il trasferimento di calore dalla zona di combustione primaria e dipende dalla sola pressione locale.
- r_{b_e} , il quale considera il calore trasferito al propellente dal flusso di gas di combustione che lambisce la superficie del grain. Esso dipende solo dalla velocità di tale porzione di flusso.

Essendo i due termini indipendenti, possiamo scrivere:

$$r_b = r_{b_p} + r_{b_e} \quad (2.22)$$

con

$$r_{b_e} = \alpha \frac{G^{0.8}}{D_h^{0.2}} e^{-\frac{\beta r_b \rho_p}{G}} \quad (2.23)$$

in cui:

- $G = \frac{\dot{m}}{A_p} = \rho u$ è la portata massica per unità di superficie, ove ρ esprime la densità superficiale dei gas, u la loro velocità assiale. Tale portata sarà quindi espressa in $\frac{Kg}{m^2s}$
- $D_h = \frac{4A_p}{P_p}$ è il diametro di porta, ove A_p è l'area di porta ed P_p il suo perimetro
- ρ_p è la densità del propellente incombusto

- β è una costante empirica indipendente dalla formulazione del propellente

Per quanto riguarda α , la sua espressione può essere ricavata mediante considerazioni di tipo termico. Si ottiene:

$$\alpha = 0.0288 C_p \mu^{0.2} (Pr)^{-\frac{2}{3}} \frac{1}{\rho_p C_{pr}} \frac{T_1 - T_s}{T_2 - T_p} \quad (2.24)$$

in cui :

- c_p è il calore specifico medio dei gas di combustione espresso in $\frac{Kcal}{Kg \cdot K}$
- μ è la viscosità dei gas espressa in $\frac{Kg}{m \cdot s}$
- Pr è il numero adimensionale di Prandtl ($\frac{\mu c_p}{k}$), ove k è la conduttività termica dei gas
- C_{pr} è la capacità termica del propellente solido espressa in $\frac{Kcal}{Kg \cdot K}$
- T_1 è la temperatura assoluta dei gas di combustione
- T_s la temperatura superficiale del propellente solido
- T_p è la temperatura iniziale all'interno del grain propellente

E' quindi possibile esprimere l'effetto della combustione erosiva in funzione del solo termine empirico β . In particolare, mentre la formulazione LR [27] prevede di fissare $\beta = 53$, Lawrence [54] varia i valori di β al fine di ottenere il miglior fit possibile dei dati sperimentali. Va inoltre sottolineato che l'erosione è amplificata localmente da fenomeni erosivi qualora vi siano protrusioni del grain, elementi strutturali o incavi nello grain stesso (ad esempio qualora il grain fosse ottenuto mediante unione di più segmenti).

La relazione 2.23 è stata utilizzata per lungo tempo in AVIO-BPD. Tuttavia, l'avvento di grandi boosters ha richiesto una modifica della stessa dando origine al modello S.P.P. Tale modello si ottiene sostituendo D_h con una funzione $f(D_h)$ del diametro stesso:

$$f(D_h) = 0.9 + 0.189 D_h [1 + 0.043 D_h (1 + 0.023 D_h)] \quad (2.25)$$

Tale funzione è stata ricavata mediante fitting di dati sperimentali [42].

Essendo il nostro studio principalmente concentrato su *Zefiro 9*, motore caratterizzato da una lunghezza caratteristica L abbastanza bassa, la formulazione 2.23 viene preferita al modello S.P.P. In previsione di applicazioni future, quest'ultimo modello viene comunque implementato.

E' importante notare come le formulazioni qui esposte si basino sullo studio di *flussi paralleli*. Tuttavia, il *transitorio di accensione* vede il determinarsi di una *combustione erosiva* dovuta all'interazione del flusso di gas

in uscita dall'accenditore con la zona di *impingement* sulla parete del grain propellente del motore. Tale interazione è caratterizzata da velocità normale non trascurabile. Questo rende inapplicabili i metodi convenzionali sopra esposti. La valutazione di tale contributo erosivo sarà trattata in capitolo 4.4.2.

2.5.3 Rateo di Combustione Dinamico

Finora sono stati considerati solo il *rateo di combustione quasi stazionario* ed il termine dovuto alla *combustione erosiva*. Si prevede, pertanto, un termine correttivo denominato *rateo di combustione dinamico* [17]. Tale termine, da applicarsi al *rateo di combustione quasi stazionario*, rappresenta l'influenza di effetti non stazionari all'interno della camera di combustione. Gli effetti di tale termine influenzeranno solo fasi transitorie, quali:

- Ignition Transient
- Tail Off
- possibili pulsazioni del motore dovute ad *instabilità acustiche*

Al momento, si è deciso di tralasciare tale termine. E' tuttavia possibile implementare il modello Zeldovich-Novozhilov, come descritto in [17].

Capitolo 3

Simulatore di Regressione

Lo sviluppo del modulo balistico, descrizione del quale è l'obiettivo di questo elaborato, necessita l'interfaccia con il simulatore di regressione in fase di sviluppo presso Laboratorio di Propulsione e Macchine. Le modalità di funzionamento di detto simulatore di regressione influenzano direttamente i risultati dei modelli balistici che verranno formulati nel capitolo 4. Si reputa quindi necessario introdurre i principi fondamentali del suo funzionamento.

Viene di seguito riportato un diagramma della struttura del simulatore di regressione.

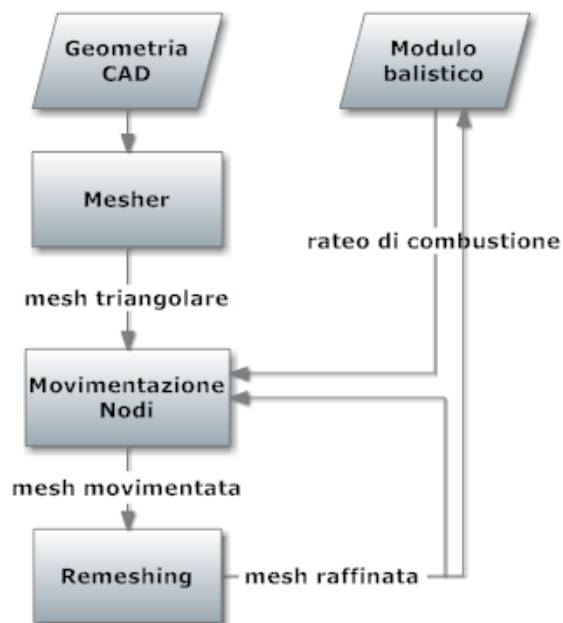


Fig. 3.1: Struttura del simulatore di regressione

3.1 Importazione della Geometria e Formato di Rappresentazione Richiesto

Il simulatore di regressione si pone lo scopo di riprodurre la combustione del grano propellente applicando dei vettori di spostamento alla geometria che lo rappresenta.

La geometria viene rappresentata attraverso una mesh superficiale triangolare chiusa. Tale mesh può essere generata da una qualsiasi mesher, purchè venga esportata utilizzando una *matrice dei vertici* ed una *matrice di triangolazione*. Tali matrici esprimeranno, rispettivamente, le coordinate di ciascun nodo e quali nodi costituiscono ciascun triangolo. Esempificando un caso bidimensionale per due soli triangoli, avremo:

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0.5 & 1 \\ 4 & 1.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

dove \mathcal{N} e \mathcal{T} sono, rispettivamente, la *matrice dei nodi* e la *matrice di triangolazione*. La prima colonna di \mathcal{N} e la prima colonna di \mathcal{T} rappresentano, rispettivamente, il numero del nodo ed il numero del triangolo. Questo genere di rappresentazione della mesh triangolare viene definito *modo indexed*.

Il risultato delle matrici 3.1 è riportato in figura 3.2.

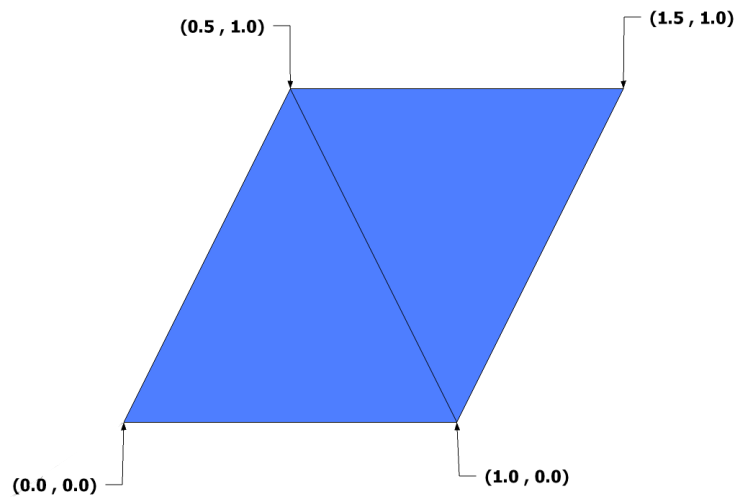


Fig. 3.2: Risultato della triangolazione 3.1

Nel nostro caso, al fine di ricavare una matrice di input al simulatore, abbiamo utilizzato il meshatore di *Ansys* applicandolo a geometrie *CAD* fornite da AVIO-BPD.

3.2 Proprietà della Mesh Triangolare

La tipologia di superfici che andremo ad analizzare (fig. 3.3) è di tipo *manifold*. Questo significa che *un intorno locale di ogni punto della superficie è topologicamente equivalente ad un disco unitario* [35]. Intuitivamente, per quanto riguarda il nostro caso, questo significa che non dovranno esserci penetrazioni della superficie o strappi.

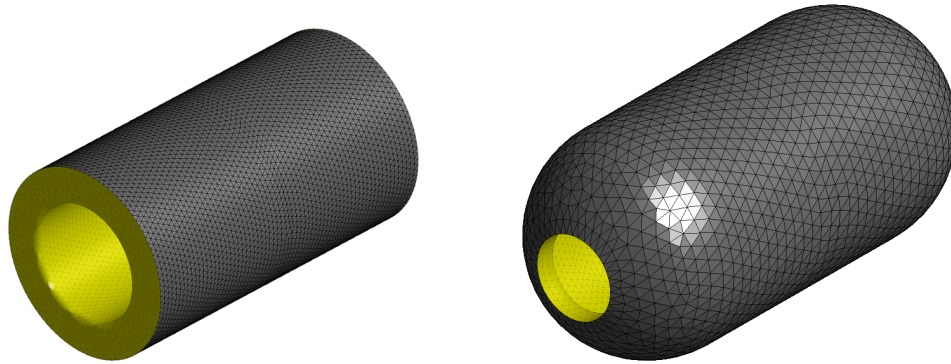


Fig. 3.3: Esempio di mesh superficiali. In giallo è riportata la superficie esposta a combustione

Questo è equivalente a dire che ogni *edge* della mesh dovrà essere condiviso da due triangoli (fig. 3.4) [35, 53]. Nel caso tale lato fosse sul *boundary* della superficie potrebbe allora appartenere ad un solo triangolo. Tale principio va sotto il nome di *Two-Manifold* (fig. 3.4).

I solidi da noi esaminati sono in realtà *manifolds* privi di *boundary edges*. Pertanto, essi dovranno rispettare le seguenti proprietà:

1. Le superfici che determinano il solido 3-D devono essere prive di strappi o penetrazioni
2. Non devono esservi *boundaries*
3. Devono essere orientabili
4. Nessuna faccia deve essere scollegata
5. Solo due triangoli condividono un lato

Le conseguenze di queste proprietà sono:

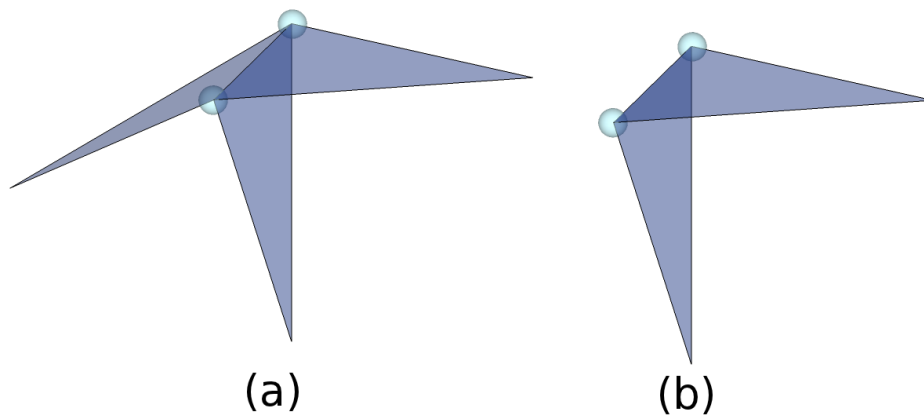


Fig. 3.4: Mesh two-manifold

- Ogni vertice è condiviso da un ring di triangoli che localmente formano una superficie
- Ogni triangolo condivide lati con esattamente tre triangoli
- Esattamente due triangoli condividono un lato

È necessario specificare il significato dell'attributo *orientabile* richiesto al punto 3. Tale attributo significa che l'ordine dei vertici espresso nella matrice di triangolazione \mathcal{T} deve garantire la coerenza delle normali dei triangoli (fig. 3.5) [53].

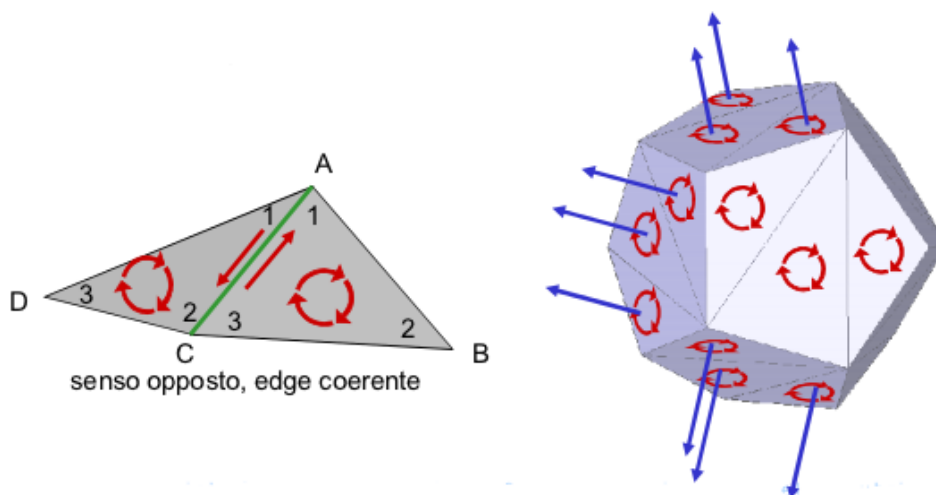


Fig. 3.5: Esempio di superficie orientabile

In figura 3.6 vengono riportate d'esempio due superfici non orientabili:

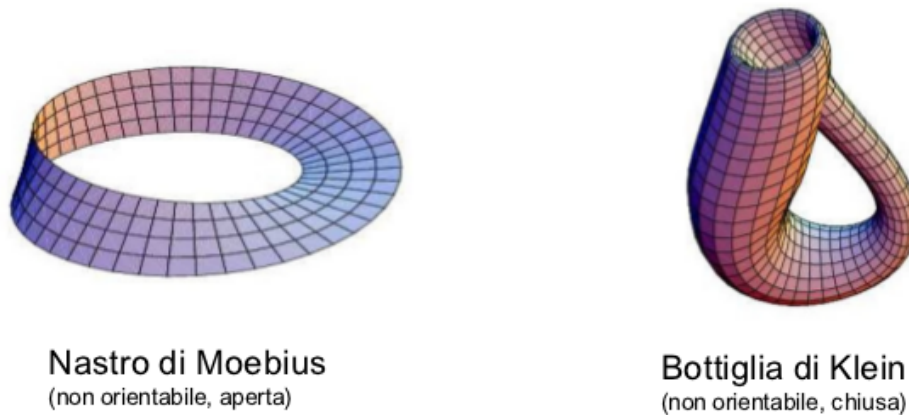


Fig. 3.6: Esempio di superfici non orientabili

3.3 Identificazione Superficie di Combustione

Come è possibile notare dalla figura 3.3 la mesh ottenuta descrive la superficie di contorno del grain propellente. Parte di questa superficie sarà in contatto con il case contenitivo del motore (cap. 2.1.1), mentre la restante parte sarà esposta alla combustione. Il simulatore di regressione si occuperà di movimentare quei nodi della mesh che rappresentano quest'ultima superficie.

Per fare questo è necessario, innanzi tutto, identificare le triangolazioni che costituiscono la superficie di combustione. Questo è possibile a partire dalla conoscenza della geometria del case. Si definiscono quindi *inibite* le triangolazioni con nodi aventi coordinate uguali a quelle del case contenitivo (a meno di una data soglia). Al contrario, si definiranno *esposte* quelle triangolazioni con nodi sufficientemente distanti dal case da poterli considerare non in contatto. Sarà quindi possibile lavorare sulle sole superfici esposte a combustione (fig. 3.7).

3.4 Movimentazione dei Nodi

Il processo di combustione viene simulato mediante movimentazione dei nodi facenti parte della sola superficie di combustione. Lo spostamento di ciascun nodo sarà funzione del rateo di combustione calcolato in sua corrispondenza e della geometria locale (ad esempio, un nodo in prossimità della parete del case non potrà attraversarla). Per quanto riguarda il calcolo del rateo di combustione, esso verrà effettuato mediante implementazione delle formule viste al capitolo 2.5. Tale implementazione avverrà all'interno del modulo balistico e sarà discussa in dettaglio in capitolo 5.3.

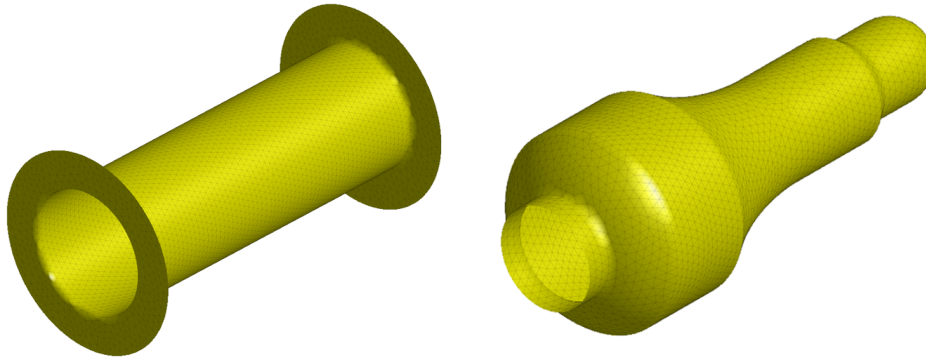


Fig. 3.7: Esempio di superfici esposte a combustione

È importante notare che ogni singolo nodo si sposterà in maniera virtualmente indipendente dagli altri nodi facenti parte della medesima triangolazione. Questo determina un'inevitabile deformazione nella forma e nelle dimensioni degli elementi superficiali. Sarà quindi importante effettuare un'operazione di *remeshing* al fine di garantire la qualità generale della mesh, nonchè evitare fenomeni che possano compromettere le proprietà esposte in sezione 3.2.

3.5 Qualità degli Elementi e Remeshing

La qualità degli elementi triangolari è molto importante al fine di garantire le proprietà esposte in sezione 3.2, nonchè per limitare il peso di errori numerici sulle soluzioni. Nel nostro caso, una buona qualità degli elementi triangolari è indispensabile al fine di evitare inversioni delle facce e compenetrazioni della superficie.

A ciascun triangolo K possono essere associati un *circumcerchio* ed un *incercchio* (fig. 3.8). Chiameremo rispettivamente r_K e ρ_K il raggio del circumcerchio e dell'incercchio.

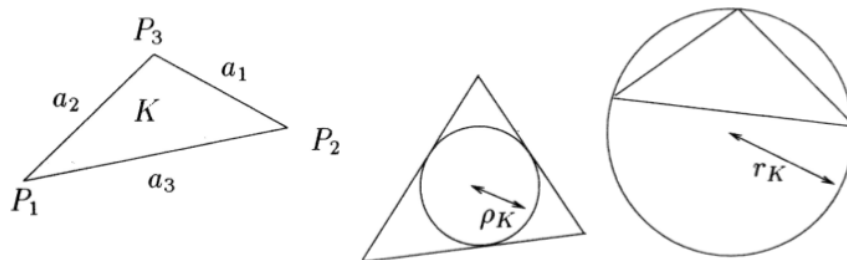


Fig. 3.8: Triangolo, incercchio e circumcerchio associati

Possiamo quindi definire l'indice di qualità I_K del triangolo K come:

$$I_K = \alpha \frac{\rho_K}{h_{max}} \quad (3.2)$$

dove h_{max} è il lato più lungo del triangolo, ρ_K è il suo inraggio ed α è un fattore di normalizzazione. Solitamente, si pone α in modo che I_K sia unitario qualora K sia equilatero e tenda a zero qualora K sia totalmente allungato.

La simulazione di combustione, movimentando i nodi indipendentemente l'uno dall'altro, tenderà ad abbassare l'indice di qualità dei triangoli. Verrà quindi effettuata una procedura di *remeshing* col duplice scopo di garantire la qualità dei triangoli ed anche di mantenere la mesh, nel suo complesso, il più semplificata possibile. Tale procedura di *remeshing* si articola in :

1. *Edge Collapsing*: definita una lunghezza minima per ciascun lato della mesh, i lati al di sotto di tale lunghezza vengono collassati (fig. 3.9).

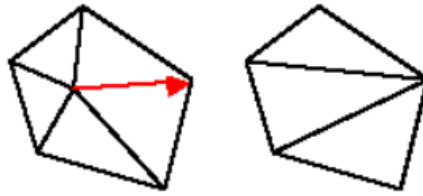


Fig. 3.9: Collapsing di un *edge* [35]

2. *Edge Splitting*: definita una lunghezza massima per ciascun lato della mesh, i lati al di sopra di tale lunghezza vengono divisi (fig. 3.10).

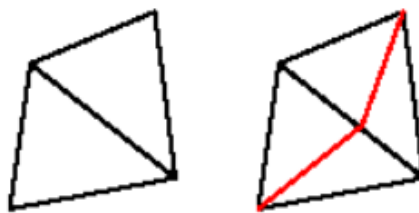


Fig. 3.10: Splitting di un *edge* [35]

3. *Laplacian Smoothing*: tale algoritmo ha lo scopo di *rilassare* la posizione dei nodi in rapporto ai nodi vicini. Effettuando uno spostamento verso il centroide della superficie, esso determina, di fatto, un arrotondamento della stessa. Pertanto gli spigoli vivi tenderanno a venire smussati (figura 3.11). Questo effetto è sia *necessario* che *desiderato*.

Necessario in quanto è il modo più efficace per evitare compenetrazioni della superficie in zone particolarmente spigolose, dovute a singolarità negli spostamenti calcolati. Desiderato in quanto è un ottimo metodo per dare ragione dello smussamento fisico degli spigoli vivi che avviene normalmente in camera di combustione.

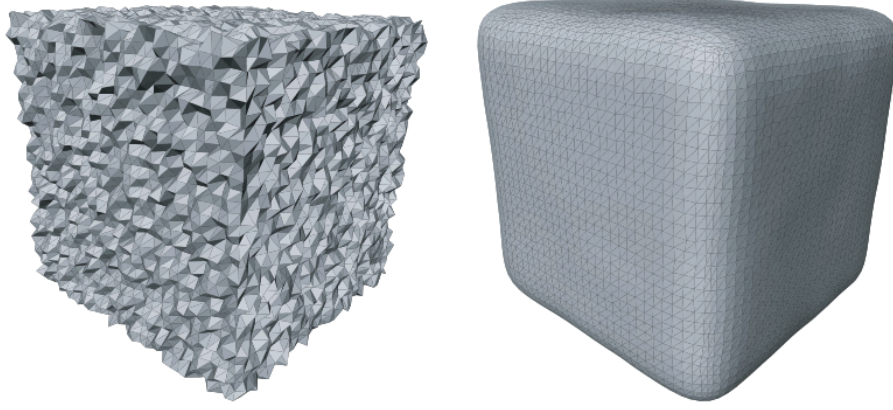


Fig. 3.11: Effetto di arrotondamento dello smoothing [34]

Tale effetto si ottiene sostituendo la posizione di ciascun i -esimo vertice con la media delle posizioni dei vertici adiacenti [28] (fig. 3.12):

$$p_i := \begin{cases} \frac{1}{|adj(i)|} \sum_{j \in adj(i)} q_j & \text{se } i \in V_{var} \\ q_i & \text{se } i \in V_{fix} \end{cases} \quad (3.3)$$

dove $adj(i)$ è l'insieme dei vertici adiacenti al vertice i -esimo, $|adj(i)|$ è la cardinalità di tale insieme, V_{var} è l'insieme dei vertici liberi di essere spostati, V_{fix} è l'insieme dei vertici con posizione vincolata.

3.6 Calcolo del Volume di Camera

Calcolare il volume contenuto all'interno della mesh superficiale è assai semplice: ad ogni triangolo della mesh viene associato un tetraedro ottenuto dai 3 vertici del triangolo più l'origine (generalmente localizzata nel centroide dei vertici). È quindi possibile ricavare il volume di ciascun tetraedro.

Considerando la direzione della normale di ciascun triangolo, è possibile assegnare un segno a tale volume. Ad esempio, possiamo definire il volume positivo se la normale è orientata verso l'esterno della superficie, negativo se verso l'interno (quindi verso l'origine) (fig. 3.13). A questo punto, mediante

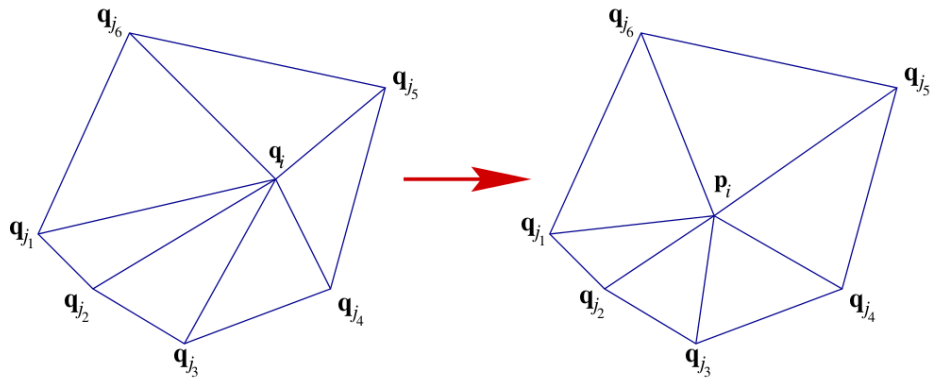


Fig. 3.12: Sostituzione posizione del punto p_i

semplice sommatoria dei volumi dotati di segno, si ricava il volume interno alla mesh superficiale, corrispondente al volume del grano propellente:

$$V_{grain} = \sum_{i=1}^n V_i \quad (3.4)$$

dove n è il numero totale di triangoli che costituiscono la mesh superficiale.

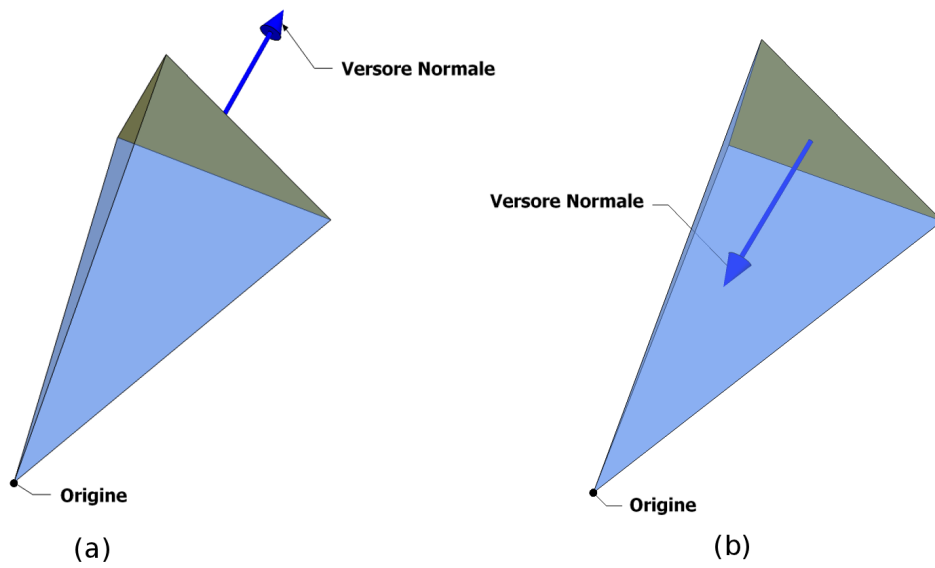


Fig. 3.13: Esempi di volumi sottesi a due triangoli. (a) : positivo; (b) : negativo

Capitolo 4

Sviluppo del Modulo Balistico

Nello sviluppo ed integrazione del modulo balistico, si è innanzi tutto fatto riferimento alle tipologie di razzi a propellente solido che ci si propone di studiare. La nostra collaborazione con AVIO-BPD riguarda lo studio del motore *Zefiro 9*.

Tale motore è caratterizzato da un rapporto $\frac{L}{D}$ relativamente basso. Questo ci permette di trascurare il termine erosivo nel calcolo del rateo di combustione (cap. 2.5.2), in virtù dello scarso calo di pressione fra sezione di testa della camera e sezione d'ingresso dell'ugello. Pertanto, al fine di minimizzare i tempi di sviluppo e di calcolo, si è scelto di sviluppare innanzi tutto un *modello balistico 0-D dinamico* (cap. 2.4.1, punto 1).

Tuttavia, in un'ottica di sviluppo futuro, si è scelto di realizzare anche un *modello balistico 1-D non stazionario* (cap. 2.4.1, punto. 3). Quest'ultimo permetterà l'utilizzo del simulatore per studi qualitativi e quantitativi di motori caratterizzati da rapporti $\frac{L}{D_h}$ elevati, alti fattori di riempimento e bassi rapporti $\frac{A_p}{A^*}$. Tale tipologia di motore è infatti caratterizzata da un'influenza del termine erosivo non trascurabile, per quantificare il quale è necessario conoscere la distribuzione di velocità all'interno del canale costituito dalla camera di combustione (cap. 2.5.2). Va inoltre sottolineato che, al fine di quantificare il calore disperso attraverso le protezioni termiche che vengono a scoprirsi mano a mano che il grano propellente recede, è ancora una volta necessaria la conoscenza di tale distribuzione di velocità. Infatti, parte del flusso di calore attraverso tali pareti esposte sarà dovuto ad una dissipazione convettiva, funzione della velocità (sez. 4.1.8). Pertanto, nel modello 0-D si potrà fornire solo una approssimazione di tale dispersione termica.

Vengono di seguito ricavate le formulazioni dei due modelli scelti.

4.1 Sviluppo Modello 0-D

Si consideri il generico schema di razzo a propellente solido riportato in figura 4.1.

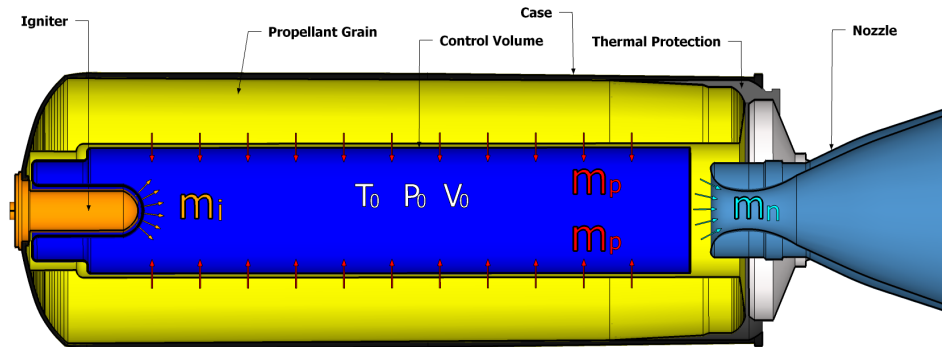


Fig. 4.1: Schema modello 0-D

In base all'approccio 0-D considereremo la miscela di gas all'interno del volume di controllo (volume blu in figura) come omogenea in ogni punto, ad ogni istante temporale. Lo stato, la composizione e le proprietà del fluido saranno quindi tempovarianti ed indipendenti dallo spazio. Tali variazioni saranno dovute, istante per istante, a trasferimento di calore, di lavoro, di massa attraverso la superficie del volume di controllo, nonché allo spostamento della stessa. Possiamo quindi trattare il sistema come un *sistema termodinamico aperto* [24]. Scopo ultimo sarà esprimere la variazione di stato del sistema in termini di \dot{T} e \dot{p} .

Limitatamente all'interno del volume di controllo possono considerarsi valide le seguenti ipotesi [51]:

1. *Le grandezze termofluidodinamiche si possono considerare funzione del solo tempo.*
2. *Il gas presente all'interno del volume di controllo è considerabile ideale.*
3. *Attraverso la superficie del volume di controllo in contatto con il grano propellente non si ha flusso di calore. Questa ipotesi deriva dal fatto che i propellenti solidi possiedono una bassissima conducibilità termica. La loro superficie è quindi considerabile adiabatica. La cessione di energia termica da parte del sistema all'esterno può considerarsi limitata alle pareti inerti che vengono via via a scoprirsi con la regressione del grano propellente.*

4. *All'interno del volume di controllo non avvengono reazioni chimiche. Le reazioni di combustione avvengono sulla superficie del grano propellente, quindi al di fuori del volume in esame. Non si avrà, pertanto, produzione di calore all'interno del volume di controllo.*
5. *Le proprietà dei gas sono variabili in funzione della pressione.*
6. *Le proprietà della miscela di gas presente all'interno del volume di controllo possono inoltre essere ricavate tramite media pesata sulla frazione massica delle proprietà delle singole specie che la compongono.*
7. *Il fluido è considerabile non viscoso.*
8. *A causa della geometria iniziale del grain, privo di convergenti-divergenti, il flusso di fluido all'interno della camera di combustione è ampiamente subsonico.*

Le equazioni fondamentali per la formulazione del modello 0-D sono

- Equazione di Continuità
- Bilancio dell'Energia

In base all'ipotesi 1 l'equazione del *bilancio della quantità di moto* risulta essere identicamente nulla.

4.1.1 Equazione di Continuità

La variazione della massa totale in un sistema termodinamico aperto è data dalla somma dei flussi di massa in ingresso ed uscita dal sistema. I flussi in uscita sono considerati negativi, quelli in ingresso positivi. Avremo:

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \dot{m}_{acc} + \dot{m}_p + \dot{m}_{PT} - \dot{m}_{nozz} \quad (4.1)$$

ove per comodità si è trascurato il pedice "0" in corrispondenza delle quantità riferite al fluido in camera di combustione. Inoltre:

- m è la massa totale del sistema
- \dot{m}_{acc} è la portata massica dell'accenditore
- \dot{m}_p è la portata massica dei prodotti di combustione
- \dot{m}_{PT} è la portata massica dei prodotti di ablazione
- \dot{m}_{nozz} è la portata massica evacuata dall'ugello

Consideriamo il primo membro. Avremo:

$$\frac{\rho V}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \frac{d\rho}{dt} \quad (4.2)$$

Grazie all'ipotesi 2 vale:

$$p = \rho RT \quad (4.3)$$

Quindi:

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{RT} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{RT^2} \frac{dT}{dt} \quad (4.4)$$

Sostituendo:

$$\frac{\rho V}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} + V \left[\frac{1}{RT} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{RT^2} \frac{dT}{dt} \right] \quad (4.5)$$

Da 4.5 e 4.1 si ottiene

$$\frac{dT}{dt} = \left[\rho \frac{dV}{dt} + \frac{V}{RT} \frac{dp}{dt} - (\dot{m}_{acc} + \dot{m}_p + \dot{m}_{PT} - \dot{m}_{nozz}) \right] \frac{RT^2}{p} \quad (4.6)$$

Infine la variazione di volume nell'unità di tempo può essere espressa come:

$$\frac{dV}{dt} = S_b r_b + S_i v_s = S_b r_b + \frac{1}{k} S_i \frac{dp}{dt} \quad (4.7)$$

dove S_b è la superficie di combustione del grain, r_b è il rateo di combustione (cap. 2.5), v_s è la velocità di deformazione delle pareti, S_i è la loro superficie, k è il coefficiente di rigidità delle pareti.

Essendo k estremamente elevato [1, 9] il contributo dovuto alla deformazione delle pareti è trascurabile.

Riscrivendo 4.6 e tenendo conto di 4.7 si ottiene l'equazione di lavoro:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho V R} \left[V \frac{dp}{dt} + p \frac{dV}{dt} - \frac{p}{\rho} (\dot{m}_{acc} + \dot{m}_p + \dot{m}_{PT} - \dot{m}_{nozz}) \right] \quad (4.8)$$

4.1.2 Bilancio dell'Energia

La prima legge della termodinamica per un sistema aperto può essere scritta come:

$$\dot{E} = \dot{Q}_w - \dot{W} + \sum_j \dot{m}_j h_j \quad (4.9)$$

dove:

- \dot{Q}_w è la potenza termica scambiata attraverso la superficie del volume di controllo

- \dot{W} è lo scambio di lavoro nell'unità di tempo attraverso la superficie del volume di controllo
- i termini h_j sono le entalpie delle portate \dot{m}_j attraverso la superficie del volume di controllo

In base alle ipotesi 4 non si ha produzione di calore all'interno del volume di controllo.

Inoltre, in base all'ipotesi 8, si possono trascurare le influenze dei contributi cinetici all'interno di entalpie ed energia interna (tranne che per la portata d'accenditore).

Possiamo scrivere [24].

$$\dot{E} = \frac{d(mu)}{dt} = \dot{Q}_w - \dot{W} + \sum_j \dot{m}_j h_j \quad (4.10)$$

dove u è l'energia interna ed h è l'entalpia specifica.

Essendo il fluido ideale, varrà

$$u = c_v T \quad (4.11)$$

Ancora una volta, grazie all'ipotesi 2 vale 4.3.

Pertanto:

$$\frac{d(mu)}{dt} = \frac{d\left(\frac{pVc_v}{R}\right)}{dt} = \frac{Vc_v}{R} \frac{dp}{dt} + \frac{pc_v}{R} \frac{dV}{dt} \quad (4.12)$$

Considerando l'ipotesi 3 l'unico flusso di calore in uscita dal volume di controllo è quello attraverso le pareti inerti scoperte: Q_{loss} .

Consideriamo, infine, il termine \dot{W} . Nel nostro caso, tale termine è dato dal solo lavoro di deformazione delle pareti dovuta alla pressione agente in camera di combustione. Sarà dato da:

$$\dot{W} = p v_s S = p \frac{1}{k} S_i \frac{dp}{dt} \quad (4.13)$$

Considerando ancora una volta k estremamente elevato si trascura l'influenza di 4.13.

Rimane, pertanto:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R}{c_v V} \left[\dot{Q}_{loss} + \sum_j \dot{m}_j h_j - \frac{c_v p}{R} \frac{dV}{dt} \right] \quad (4.14)$$

con:

$$\sum_j \dot{m}_j h_j = \dot{m}_{acc} \left[\frac{V_{acc}^2}{2} + c_{p_{acc}} T_{acc} \right] + \dot{m}_p c_{p_p} T_p + \dot{m}_{PT} c_{p_{PT}} T_{PT} - \dot{m}_{nozz} c_{p_n} T_n \quad (4.15)$$

4.1.3 Forma Finale

Siamo quindi riusciti ad ottenere le equazioni 4.12 e 4.14. Tali equazioni ci permettono, unitamente all'equazione che esprime la variazione di volume, di descrivere la variazione di stato del sistema in termini di \dot{T} e \dot{p} . Abbiamo quindi ottenuto il nostro modello balistico 0-D:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \frac{R}{c_v V} \left[\dot{Q}_{loss} + \sum_j \dot{m}_j h_j - \frac{c_v p}{R} \frac{dV}{dt} \right] \\ \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho V R} \left[V \frac{dp}{dt} + p \frac{dV}{dt} - \frac{p}{\rho} (\dot{m}_{acc} + \dot{m}_p + \dot{m}_{PT} - \dot{m}_{nozz}) \right] \\ \sum_j \dot{m}_j h_j = \dot{m}_{acc} \left[\frac{V_{acc}^2}{2} + c_{p_{acc}} T_{acc} \right] + \dot{m}_p c_{p_p} T_p + \dot{m}_{PT} c_{p_{PT}} T_{PT} - \dot{m}_{nozz} c_{p_n} T_n \\ \frac{dV}{dt} = S_b r_b \end{cases} \quad (4.16)$$

È importante notare come la prima equazione, ossia quella che determina la variazione infinitesima di pressione, sia l'equazione principale del modello. L'intero modello balistico ha, infatti, lo scopo di determinare l'andamento della pressione interna alla camera di combustione. Mediante la conoscenza di tale pressione e l'implementazione delle equazioni presentate al capitolo 2.5 sarà possibile ricavare il *rateo di combustione* su ciascun nodo della *mesh triangolare di superficie* che rappresenta la superficie di combustione (cap. 3).

L'equazione che governa la variazione di temperatura permette, concorrendo con le ipotesi 6 e 2, l'aggiornamento delle proprietà di camera al variare della pressione, della temperatura, e della composizione della miscela presente in camera (sez.4.1.10).

La terza e quarta equazione del sistema determinano i parametri $\sum_j \dot{m}_j h_j$ e $\frac{dV}{dt}$. Quest'ultimo parametro è per noi estremamente importante, in quanto rappresenta l'*input* fornitoci dal *simulatore di regressione*.

Particolarmente importanti sono i contributi che concorrono a determinare la variazione infinitesima di pressione:

- Contributo dei Prodotti di Combustione
- Contributo dell'Accenditore
- Contributo dell'Efflusso dall'Ugello
- Contributo dei Prodotti di Ablazione
- Influenza della Potenza Termica Dissipata

Ciascuno di questi contributi viene di seguito analizzato.

4.1.4 Contributo dei Prodotti di Combustione

Il contributo dei prodotti di combustione è il termine avente la maggior influenza nel calcolo di \dot{p} . Esso è dato da:

$$C_{comb} = \dot{m}_p c_{p_p} T_p \quad (4.17)$$

Mediante la conoscenza della variazione di volume di camera nel tempo $\dot{V} = S_b r_b$ e la densità del propellente solido ρ_p è facilmente ricavabile la portata massica dei prodotti di combustione:

$$\dot{m}_p = \rho_p \frac{dV}{dt} \quad (4.18)$$

Infine, c_{p_p} e T_p possono essere ricavate dalle tabelle termodinamiche *NASA CEA2* [12] o da esperienza e sperimentazione.

In sezione 5.1.1 si mostra come \dot{V} sia fornito dal simulatore di regressione.

4.1.5 Contributo dell'Accenditore

L'espressione del contributo dell'accenditore sarà data da:

$$C_{acc} = \dot{m}_{acc} \left[\frac{V_{acc}^2}{2} + c_{p_{acc}} T_{acc} \right] \quad (4.19)$$

Grazie alla collaborazione con AVIO-BPD, nello studio del motore *Zefiro 9* abbiamo potuto usufruire di tabelle riportanti portate, velocità, calori specifici e temperature dei gas prodotti dall'accenditore. Per applicazioni più generali le proprietà fluidodinamiche dei gas d'accenditore possono considerarsi analoghe a quelle del grano propellente con cui l'accenditore stesso è caricato. Infatti, i casi di studio da noi affrontati sono caratterizzati da *accenditori pirogeni* (cap. 2.1.4).

Riportiamo di seguito alcuni esempi di portate, velocità e pressione d'accenditore presenti in letteratura [1] (figure 4.2, 4.3, 4.4).

Non bisogna tuttavia credere che lo studio dell'influenza dell'accenditore si possa limitare al considerare un apporto massico e la relativa entalpia. Bisogna infatti considerare che l'incidenza dei gas emessi dall'accenditore sul grano propellente nella zona di *impingement* determina un contributo erosivo non valutabile con modelli convenzionali (cap 2.5.2). Tali modelli si basano infatti sull'ipotesi di flusso parallelo, mentre in questo caso si ha una forte componente di velocità normale alla parete. Senza considerare poi il fatto che, nell'attuale studio 0-D, le componenti di velocità sono sconosciute. Questo problema necessita una trattazione esaustiva e verrà quindi trattato in una sezione dedicata: sez. 4.4.2.

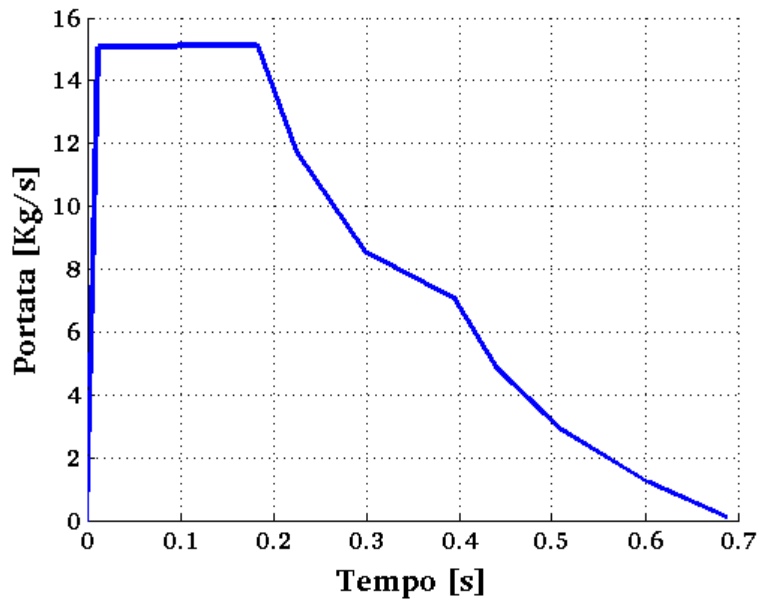


Fig. 4.2: Portata dell'accenditore

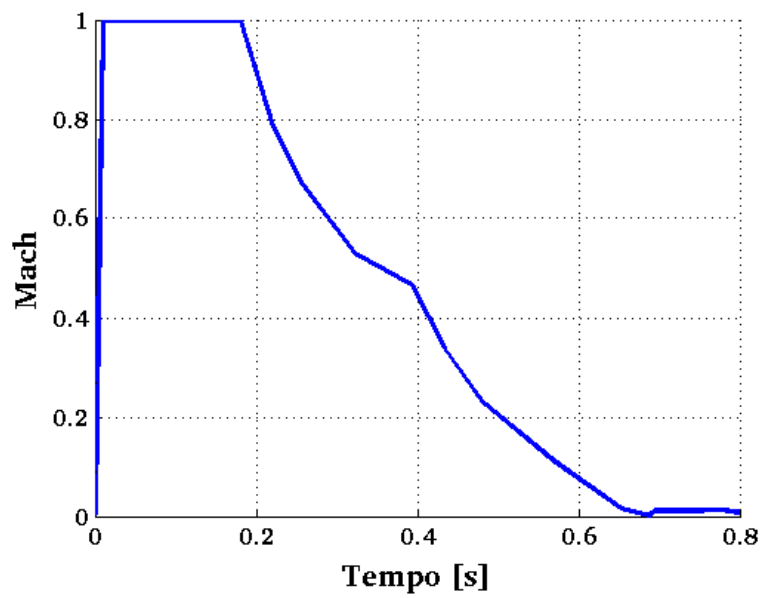


Fig. 4.3: Mach all'uscita dell'accenditore

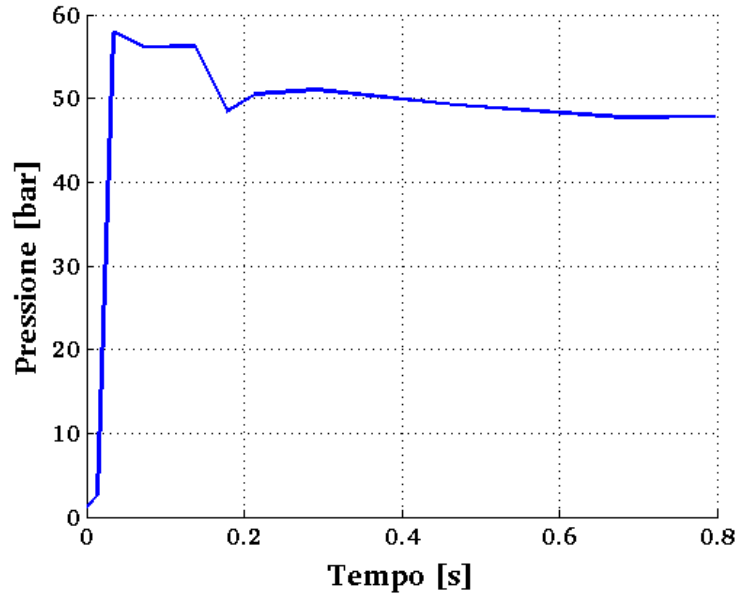


Fig. 4.4: Pressione all'uscita dall'accenditore

4.1.6 Contributo dell'Efflusso dall'Ugello

Per fini di protezione e conservazione del grano propellente, durante il trasporto e lo stoccaggio la sezione di gola di un razzo a propellente solido si trova ad essere bloccata mediante appositi sigilli. Durante il transitorio d'accensione si determina la rottura del sigillo. Questo avviene a seguito di una pressione differenziale tra interno della camera di combustione ed esterno pari a circa 7 bar . Sin dai primi istanti seguenti la rottura del sigillo, l'ugello può considerarsi operante in *condizioni soniche*.

Il contributo dovuto alla portata di gas che viene a generarsi attraverso l'ugello è quantificabile mediante la relazione 4.20:

$$C_{nozz} = \dot{m}_{nozz} c_{p_n} T_n \quad (4.20)$$

Trovandoci in condizioni soniche, grazie alla relazione 2.17 è possibile ricavare la velocità caratteristica C^* :

$$C^* = \eta_{ref}^* C_{ref}^* \left(\frac{p_0}{p_{ref}} \right)^{m_{C^*}}$$

I valori sperimentali necessari sono forniti da AVIO-BPD.

Quindi, mediante 2.16, è possibile ricavare la portata di gas attraverso l'ugello:

$$C^* = \frac{p_0 A^*}{\dot{m}_e}$$

$$\dot{m}_{nozz} = \frac{p_0 A^*}{C^*} \quad (4.21)$$

Va sottolineato il fatto che il diametro di gola dell'ugello varia col tempo a causa di fenomeni erosivi e di ablazione. Tale andamento viene fornito da AVIO-BPD mediante tabelle o grafici sperimentali, quale quello riportato in figura 4.5.

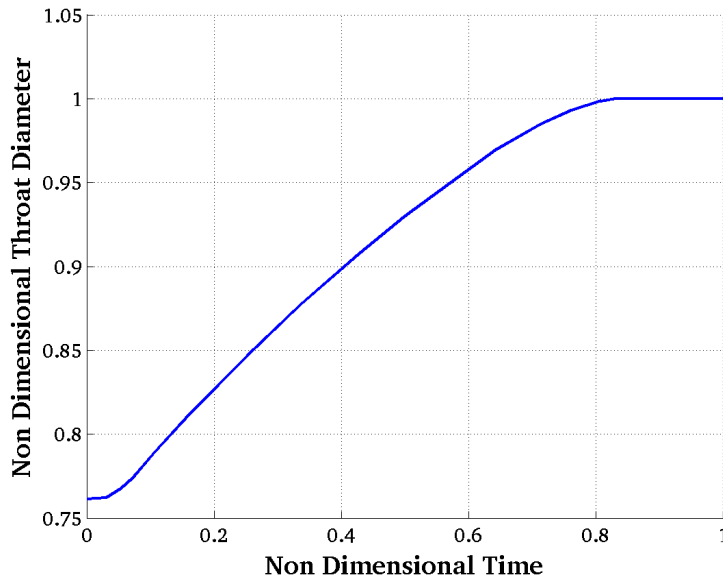


Fig. 4.5: Andamento del diametro di gola dell'ugello nel tempo

Le proprietà fisiche dei gas in uscita dall'ugello sono supposte eguali a quelle della miscela presente in camera di combustione. Il metodo mediante il quale vengono calcolate tali proprietà verrà esposto in sezione 4.1.10.

4.1.7 Contributo dei Prodotti di Ablazione

Il contributo dovuto ai *prodotti di ablazione* [9] può essere quantificato mediante la seguente espressione:

$$C_{PT} = \dot{m}_{PT} c_{pPT} T_{PT} \quad (4.22)$$

La portata dei *prodotti di ablazione* è ricavabile una volta note le seguenti quantità:

- Superficie Esposta delle Protezioni Termiche
- Velocità di Ablazione
- Densità delle Protezioni Termiche

essendo:

$$\dot{m}_{PT} = S_{PT} r_{abl} \rho_{PT} \quad (4.23)$$

Mentre le ultime due sono fornite da AVIO-BPD, la prima quantità viene ricavata mediante interfaccia con il simulatore di regressione. Il metodo seguito nel fare ciò viene esposto in sezione 5.1.1.

La temperatura della portata che viene a generarsi si considera pari alla temperatura di ablazione delle protezioni termiche in esame [9]. Tale temperatura è fornita da AVIO-BPD.

Le proprietà fisiche, quali il c_{pPT} , sono note da esperienza o tabulazioni.

Durante l'*Ignition Transient* e la prima parte della *Quasi Steady State* la superficie esposta delle protezioni termiche è relativamente bassa. Ne conseguirà un peso trascurabile della portata di gas d'ablazione nel determinare le proprietà della miscela di gas presente in camera (cap 2.4.2, punto 2).

Tale portata può invece considerarsi rilevante durante la fase di *Tail Off* (cap 2.4.2, punto 3). Questo è particolarmente vero qualora si voglia studiare il residuo di spinta in prossimità dello spegnimento del motore.

4.1.8 Influenza della Potenza Termica Dissipata

Come espresso in 4.1.2, l'unico flusso di calore in uscita dal volume di controllo è quello attraverso la superficie delle pareti inerti scoperte. Tale superficie è, ancora una volta, quantificabile come mostrato in sez. 5.1.1.

Il flusso attraverso le pareti esposte sarà dato da un contributo convettivo ed uno dovuto all'irraggiamento. Avremo quindi:

$$Q_{loss} = Q_{conv} + Q_{rad} \quad (4.24)$$

1. Flusso Convettivo

Consideriamo il solo flusso convettivo. Possiamo scrivere:

$$Q_{conv} = h_c S_{PT} (T_{gas} - T_{supPT}) \quad (4.25)$$

Per la determinazione del coefficiente di scambio termico convettivo si applica la relazione sperimentale di *Dittus-Belter*, ampiamente utilizzata in AVIO-BPD:

$$h_c = 0.0265 \frac{k_{gas}}{D_h} Re^{0.8} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (4.26)$$

dove k_{gas} è la conducibilità termica del gas, Re è il numero adimensionale di Reynolds, D_h è il diametro idraulico, Pr è il numero adimensionale di Prandtl.

Riscrivendo la precedente in funzione di parametri a noi più consoni si ottiene:

$$h_c = K \frac{c_2}{c_1} (9\gamma - 5)^{\frac{2}{3}} \frac{\gamma^{\frac{1}{3}}}{\gamma - 1} T^{0.12} \dot{m}^{0.8} \frac{1}{M_{mol}^{0.9} D_h} \quad (4.27)$$

Dove T è la temperatura di ristagno del gas e M_{mol} è la sua massa molare. Essendo il modello 0-D, considereremo il diametro idraulico medio.

I parametri sperimentali e di fitting, quali il rapporto tra i coefficienti c_2 e c_1 , sono facilmente reperibili dalla letteratura interna di AVIO-BPD.

2. Flusso Radiante

Consideriamo ora il solo flusso radiante. In letteratura si utilizza, generalmente, la relazione:

$$Q_{rad} = \sigma \varepsilon_{cl-w} S_{PT} (T_{gas}^4 - T_{supPT}^4) \quad (4.28)$$

Sfortunatamente, la dipendenza di Q_{rad} da T^4 può determinare problemi di convergenza nel metodo di integrazione implementato.

Si è quindi deciso di utilizzare un'espressione alternativa [20, 9]:

$$h_{rad} = \frac{\sigma \varepsilon_{cl-w} (T_{gas}^4 - T_{supPT}^4)}{T_{gas} - T_{supPT}} \quad (4.29)$$

Tale espressione è ottenibile mediante sviluppo in serie dell'equazione 4.28.

Possiamo quindi scrivere:

$$Q_{rad} = h_{rad} S_{PT} (T_{gas} - T_{supPT}) \quad (4.30)$$

Consideriamo il termine ε presente nelle equazioni 4.28 e 4.29. Esprimeremo tale termine mediante la rappresentazione presentata in [36], poi rielaborata in AVIO-BPD [9]:

$$\varepsilon_{cl-w} = \left[\frac{1}{\varepsilon_{cl}} + \frac{1}{\varepsilon_w} - F_v \right]^{-1} \quad (4.31)$$

Il parametro ε_{cl-w} rappresenta, fisicamente, l'emissività specifica tra parete e nube di gas in camera di combustione. Nella precedente relazione, F_v rappresenta il fattore di vista fra la superficie delle protezioni termiche e la camera di combustione.

Il termine ε_{cl} è invece espresso da una legge sperimentale reperibile in letteratura, da tempo utilizzata all'interno di AVIO-BPD:

$$\varepsilon_{cl} = 1 - \exp \left[\left(-c_1 \rho \frac{Al\%}{16} + c_2 \right) \frac{D_h}{50} \right] \quad (4.32)$$

Tale espressione tiene in considerazione la percentuale di alluminio presente all'interno del propellente. Questo in quanto la presenza di *Al* nei prodotti di combustione ne influenza fortemente l'emissività.

Nella relazione precedente i termini sperimentali c_1 e c_2 sono forniti da AVIO-BPD. Una volta ancora, D_h rappresenta il diametro idraulico medio.

Noto il coefficiente di scambio termico convettivo (eq. 4.27) e quello di scambio termico radiativo (eq. 4.29) possiamo scrivere:

$$h_{eq} = h_{conv} + h_{rad} \quad (4.33)$$

$$Q_{loss} = h_{eq} S_{PT} (T_{gas} - T_{supPT}) \quad (4.34)$$

La sovrapposizione degli effetti convettivi e radiativi è possibile grazie alla linearizzazione dell'espressione di Q_{rad} .

4.1.9 Integrazione Temporale

Al fine di integrare il sistema di equazioni 4.16, si possono considerare separatamente le prime due equazioni. Poniamoci all'istante temporale n . Integrando la prima, si ottengono p_{n+1} e \dot{p} , che poi può essere utilizzata, mediante sostituzione nella seconda equazione per valutare la variazione di temperatura \dot{T} e la temperatura T_{n+1} . Le due equazioni sono *equazioni differenziali lineari in una sola incognita*, rappresentabili in maniera generale mediante la seguente forma:

$$\frac{dq}{dt} = \lambda q + f \quad (4.35)$$

$$q(t=0) = q_0$$

Sono stati considerati i seguenti metodi di integrazione:

1. Metodo di Eulero

A partire da 4.35 possiamo ricavare l'espressione esatta della q :

$$q_e = q_0 e^{\lambda t} + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (4.36)$$

Approssimando quest'espressione mediante sviluppo di Taylor troncato si ottiene:

$$q_e(t + Dt) = q_e(t) + \frac{dq_e}{dt}Dt + \mathcal{O}(Dt^2) \quad (4.37)$$

Da tale sviluppo troncato, si ricava l'*algoritmo di Eulero*:

$$\begin{cases} q_{a_{n+1}} = (1 + \lambda Dt)q_{a_n} + f_n Dt & n = 0, \dots, N - 1 \\ q_{a_0} = q_0 \end{cases} \quad (4.38)$$

dove N è il numero totale di istanti discreti.

Tale algoritmo è consistente di accuratezza pari ad 1.

2. Metodi Runge-Kutta

I metodi *Runge Kutta* sono una particolare tipologia di metodi multi-step, quindi esprimibili dalla forma generale:

$$\sum_{k=0}^s \alpha_k q_{a_{n+k}} = Dt \sum_{k=0}^s \beta_k N_a^{n+k} \quad (4.39)$$

in cui $N_a^{n+k} = N(q_{a_{n+k}})$ è l'eventuale termine non lineare, s determina il numero di passi coinvolti. I $2(s + 1)$ coefficienti α_k e β_k determineranno il tipo di metodo utilizzato.

La forza di questi metodi è l'aumento di accuratezza dovuto all'utilizzo di informazioni sulla soluzione ottenuta ai passi precedenti.

Un metodo *Runge-Kutta* ad s stadi è espresso dalla forma:

$$\begin{aligned} q_a^{(1)} &= q_{a_n} \\ q_a^{(k)} &= q_{a_n} + \alpha_{k-1} Dt N^{k-1} & k = 2, \dots, s \\ q_{a_{n+1}} &= q_{a_n} + Dt \sum_{k=1}^s \beta_k N^{(k)} \\ N^{(k)} &= N(q_a^{(k)}) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Specificando un *Runge-Kutta* di quarto ordine al nostro caso si ottiene [9]:

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = f(t, y) \\ q(t = 0) = q_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_1 &= f_n \\ K_2 &= f\left(t_n + \frac{Dt}{2}, y_n + \frac{Dt}{2}K_1\right) \\ K_3 &= f\left(t_n + \frac{Dt}{2}, y_n + \frac{Dt}{2}K_2\right) \\ K_4 &= f\left(t_n + Dt, y_n + DtK_3\right) \\ q(t = 0) &= q_0 \end{aligned} \tag{4.41}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{Dt}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Tale metodo presenta un'accuratezza di ordine 4. Permette inoltre la semplice implementazione di un controllo adattativo sullo step di calcolo.

3. Predictor Corrector

I metodi *Predictor Corrector* derivano dal combinare un primo metodo di integrazione al fine di ottenere una *predizione* (o *stima*) della soluzione ed un secondo metodo preposto alla *correzione* di tale stima. Generalmente, si utilizzerà un metodo con basso ordine di accuratezza per ottenere la predizione ed un secondo metodo di accuratezza maggiore al fine di ridurre l'ordine dell'errore di troncamento.

Un tipico esempio di metodi *Predictor Corrector* è la combinazione del metodo di Eulero, esplicito con accuratezza di primo ordine, col metodo dei trapezi, implicito di secondo ordine. Il *Predictor Corrector* risultante è esplicito, con accuratezza di ordine 2, caratterizzato pertanto dai vantaggi dei due metodi di partenza, senza i loro svantaggi.

Per semplicità realizzativa ed al fine di semplificare il *debug* si è utilizzato, in un primo momento, il *metodo di Eulero*. Si è poi implementato anche un *Runge-Kutta* di quarto ordine.

Al fine di garantire la stabilità del metodo d'integrazione si è utilizzata una discretizzazione temporale più fitta che non per il simulatore di regressione. I valori di input ottenuti da quest'ultimo vengono quindi interpolati al fine di ottenerne i valori in corrispondenza degli istanti di integrazione del modello balistico.

4.1.10 Aggiornamento delle Variabili Fluidodinamiche

Al momento dell'accensione la camera di combustione, sigillata in corrispondenza della sezione di gola dell'ugello, si trova ad essere pressurizzata con un gas inerte posto alla pressione di circa 1.3 *bar*.

Una volta avvenuta l'accensione, tale gas verrà a miscelarsi con l'aggiunta di massa dovuta all'accenditore, con quella determinata dalla combustione del propellente e con quella dovuta all'ablazione delle protezioni termiche scoperte. Avremo quindi una miscela di quattro differenti gas.

Ovviamente, qualora non vi fossero superfici di protezione termica scoperte o qualora l'accenditore sia già giunto a spegnimento i relativi contributi verrebbero a mancare, così come il contributo del gas inerte si ha solo all'istante di accensione, in quanto negli istanti seguenti viene considerato come facente parte della miscela di gas presente in camera.

Le proprietà termofluidodinamiche di ciascun gas sono note (c_p, ρ, γ, R). In particolare, le proprietà della portata di accenditore, delle protezioni termiche e le proprietà del gas inerte sono fornite da AVIO-BPD (sez. 4.1.5 e 4.1.7). Le proprietà dei prodotti di combustione sono invece ricavate dalle tabelle citate in sez. 4.1.4.

Le proprietà fisiche della miscela di gas possono essere invece ottenute attraverso media ponderale sulla frazione di massa dei singoli gas:

$$\begin{aligned} Fr1 &= \frac{\rho_p \dot{V} dt}{m_p + m_a + m_{PT} + m} & Fr2 &= \frac{\dot{m}_{acc} dt}{m_p + m_a + m_{PT} + m} \\ Fr3 &= \frac{\dot{m}_{PT} dt}{m_p + m_a + m_{PT} + m} & Fr4 &= \frac{m}{m_p + m_a + m_{PT} + m} \end{aligned} \quad (4.42)$$

dove m è la massa presente in camera di combustione (in questa trattazione le quantità senza pedice sono riferite alla camera di combustione). Alla prima iterazione sarà data dalla massa di gas inerte presente in camera. In seguito, sarà ricavabile mediante:

$$m = \rho V \quad (4.43)$$

Note le frazioni massiche, è possibile ricavare le proprietà termofluidodinamiche della nuova miscela di gas:

$$c_p = c_{p_g} Fr1 + c_{p_a} Fr2 + c_{p_{PT}} Fr3 + c_p Fr4 \quad (4.44)$$

$$\gamma = \gamma_g Fr1 + \gamma_a Fr2 + \gamma_{PT} Fr3 + \gamma Fr4 \quad (4.45)$$

$$R = R_g Fr1 + R_a Fr2 + R_{PT} Fr3 + R Fr4 \quad (4.46)$$

La densità è ricavabile dalla legge dei gas perfetti:

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad (4.47)$$

Va notato come non si consideri la massa in uscita dall'ugello. L'influenza della portata d'ugello è già considerata, infatti, all'interno dei termini \dot{p} e \dot{T} , come si evince dalle equazioni di lavoro del modello stesso (sistema 4.16).

Le relazioni da 4.42 a 4.47 sono particolarmente utili durante la fase di integrazione temporale (sez. 4.1.9). Note p e T dall'integrazione del sistema 4.16, tali relazioni rendono possibile l'aggiornamento delle proprietà termofluidodinamiche della miscela di gas che viene a trovarsi in camera di combustione.

Questa miscela è quella che poi si troverà ad essere evacuata dall'ugello nello step temporale seguente. Determina, pertanto, anche le proprietà termofluidodinamiche della portata d'ugello.

4.2 Sviluppo Modello 1-D

Si consideri, ancora una volta, lo schema di figura 4.1.

Analizzeremo il problema, questa volta, da un punto di vista 1-D non stazionario (cap 2.4.1, punto 3). A tal fine, si pongono le seguenti ipotesi:

1. *Si può considerare la miscela di gas all'interno del canale come un fluido ideale non viscoso.*
2. *All'interno del volume di controllo non avvengono reazioni chimiche. Le reazioni di combustione avvengono sulla superficie del grano propellente, quindi al di fuori del volume in esame. Non si avrà, pertanto, produzione di calore all'interno del volume di controllo.*
3. *A causa della geometria del problema e dell'ipotesi 2, le componenti di velocità normali all'asse del motore sono trascurabili. Questa ipotesi è tanto più vera quanto maggiore è il rapporto $\frac{L}{D_h}$. Il campo di moto all'interno del canale costituito dalla camera di combustione è quindi approssimabile ad un campo di moto 1-D.*
4. *A causa della geometria iniziale del grain, privo di convergenti divergenti, il flusso di fluido all'interno della camera di combustione è ampiamente subsonico.*
5. *Il condotto rappresentato dalla camera di combustione non presenta brusche discontinuità di sezione.*
6. *Le proprietà della miscela di gas presente in camera ($c_p, c_v, \gamma, M_{mol}$, etc) si considerano uniformi lungo una data sezione, ma non lungo il canale costituito dalla camera di combustione*
7. *Attraverso la superficie del volume di controllo in contatto con il grano propellente non si ha flusso di calore. Questa ipotesi deriva dal fatto che i propellenti solidi possiedono una bassissima conducibilità termica. La loro superficie è quindi considerabile adiabatica. La cessione di energia termica da parte del sistema all'esterno può considerarsi limitata alle pareti inerti che vengono via via a scoprirsi con la regressione del grano propellente.*

8. *Le proprietà dei gas sono variabili in funzione della pressione.*
9. *Le proprietà della miscela di gas presente all'interno del volume di controllo possono inoltre essere ricavate tramite media pesata sulla frazione massica delle proprietà delle singole specie che la compongono.*
10. *Lungo la superficie di combustione l'attrito è trascurabile a causa dell'effetto di soffiaggio dovuto alla portata di massa di prodotti di combustione. Non lo è lungo la superfici inerti esposte (protezioni termiche, grano propellente non ancora in combustione).*

Le equazioni fondamentali per la descrizione del moto di un fluido sono:

- Equazione di Continuità
- Bilancio della Quantità di Moto
- Bilancio dell'Energia

In particolare, partiremo dalle *Equazioni di Eulero*. Esse rappresentano il caso limite delle equazioni di *Navier-Stokes* ottenuto considerando trascurabili gli effetti di dissipazione, di trasporto di viscosità, di diffusione di massa e di conduzione termica. In base alle ipotesi 1-10 tali equazioni sono un'ottimo set di partenza al fine di sviluppare un modello balistico 1D.

Consideriamo le equazioni di *Navier-Stokes* nella seguente forma:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad} p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{u})) + \mu \nabla^2 \vec{u} \\ \rho \frac{dE}{dt} = -p \operatorname{div}(\vec{u}) + \phi - \operatorname{div} \vec{q} \end{cases} \quad (4.48)$$

In cui \vec{f} è il vettore delle forze di massa, ϕ è la funzione di dissipazione ed E è l'energia interna.

Considerando un fluido ideale non viscoso (ipotesi 1) non si avrà conduzione o termini dovuti alla viscosità. Pertanto:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0 \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad} p \\ \rho \frac{dE}{dt} = -p \operatorname{div}(\vec{u}) \end{cases} \quad (4.49)$$

Scrivendo il precedente sistema in forma conservativa, trascurando le forze di massa \vec{f} e considerando il flusso mono dimensionale si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial \rho u h}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

dove $h = E + \frac{p}{\rho}$ è l'entalpia totale.

Nel nostro caso il flusso non è libero, bensì costretto all'interno di un condotto. In letteratura è stato dimostrato come, in queste circostanze, ottimi risultati si ottengano mediando le equazioni fluidodinamiche sull'*area di porta* A_p del condotto [33, 25]. Allora, le 4.50 diventano:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\rho A_p)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u A_p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial (\rho u A_p)}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho u^2 + p) A_p]}{\partial x} - p \frac{\partial A_p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial (\rho E A_p)}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho E + p) u A_p]}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

È, infine, necessario rappresentare l'addizione di massa, quantità di moto ed energia mediante opportuni termini sorgente [17, 43]:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\rho A_p)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u A_p)}{\partial x} = r_b P_b \rho_p + \frac{\dot{m}_{acc} A_p}{V} + \frac{\dot{m}_{PT} A_p}{V} \\ \frac{\partial (\rho u A_p)}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho u^2 + p) A_p]}{\partial x} = +p \frac{\partial A_p}{\partial x} + \frac{\dot{m}_{acc} A_p v_{acc}}{V} - \sum_{i=1}^3 \tau_{wi} P_i \\ \frac{\partial (\rho E A_p)}{\partial t} + \frac{\partial [(\rho E + p) u A_p]}{\partial x} = r_b \rho_p P_b h_g + \frac{\dot{m}_{acc} A_p h_{acc}}{V} + \frac{\dot{m}_{PT} A_p h_{PT}}{V} \end{cases} \quad (4.52)$$

dove:

- P_b è il perimetro di combustione
- h_{acc} ed h_{PT} sono, rispettivamente, l'entalpia dei gas addotti dall'accenditore e l'entalpia dei prodotti d'ablazione delle protezioni termiche
- τ_{wi} è, rispettivamente, lo sforzo di attrito sulle superfici scoperte di protezione termica, di propellente non in combustione e delle pareti d'ugello.
- P_i , con $i \in [1, 2, 3]$, è rispettivamente il perimetro bagnato delle superfici scoperte di protezione termica, del propellente non in combustione e dell'ugello (ove presente nella geometria di studio).

Tale metodologia rappresenta, ad oggi, lo standard per lo studio del moto 1-D all'interno della camera di combustione di Razzi a Propellente Solido [14, 15, 16, 17, 31].

In realtà, i termini sorgenti verranno applicati solo in funzione della coordinata assiale che si sta analizzando, come verrà esposto nel seguente paragrafo.

4.2.1 Analisi dei Termini Sorgente

Al secondo membro delle equazioni del sistema 4.52 è possibile notare la presenza di termini sorgenti di massa, quantità di moto, energia. Tali termini rappresentano il contributo all'equazione di continuità, al bilancio della quantità di moto ed al bilancio dell'energia da parte dei gas prodotti dalla combustione del propellente, addotti dall'accenditore o prodotti dall'ablazione delle protezioni termiche. Vi è poi un termine che considera lo sforzo sulle pareti del grain non ancora in combustione, delle protezioni termiche scoperte o dell'ugello. Entrando nel dettaglio:

1. Contributo dei Prodotti di Combustione

L'addizione di massa ed energia dovuta alla produzione di gas dalla combustione del propellente viene presa in considerazione mediante i seguenti termini:

$$r_b P_b \rho_p \quad r_b \rho_p P_b h_g \quad (4.53)$$

Tali termini agiscono, rispettivamente, sull'equazione di continuità e sul bilancio dell'energia. In particolare, in virtù dell'ipotesi 4, possiamo scrivere:

$$h_g = c_{p_g} T_g \quad (4.54)$$

La densità del propellente ρ_p è fornita da AVIO-BPD, mentre c_{p_g} e T_g sono ricavate dalle tabelle termodinamiche *NASA CEA2* [12] o da esperienza e sperimentazione.

Per quanto riguarda il rateo di combustione r_b , esso viene ricavato mediante l'implementazione delle formulazioni espresse in capitolo 2.5. Tale implementazione verrà discussa approfonditamente in capitolo 5.3

2. Contributo dei Gas d'Accenditore

L'addizione di massa, quantità di moto ed energia da parte dei gas d'accenditore viene quantificata mediante le seguenti relazioni:

$$\frac{\dot{m}_{acc} A_p}{V} \quad \frac{\dot{m}_{acc} A_p v_{acc}}{V} \quad \frac{\dot{m}_{acc} A_p h_{acc}}{V} \quad (4.55)$$

Tali termini agiscono, rispettivamente, sull'equazione di continuità, sul bilancio della quantità di moto e sul bilancio dell'energia.

I gas addotti dall'accenditore sono caratterizzati da un'elevata velocità, con componenti sia assiali che normali. Questo ha una duplice influenza: si ha un'induzione di combustione erosiva sulla superficie di *impingment* (cap. 2.5.2) ed un'eccezione all'ipotesi 4. Per quanto riguarda il primo effetto, si rimanda a sezione 4.4.2. Il secondo effetto porta invece a scrivere:

$$h_{acc} = c_{p_{acc}} T_{acc} + \frac{v_{acc}^2}{2} \quad (4.56)$$

In tale espressione, la portata dei gas d'accenditore \dot{m}_{acc} , la loro velocità v_{acc} ed il loro calore specifico $c_{p_{acc}}$ sono dati noti, forniti da AVIO-BPD.

È importante notare come, grazie alla loro v_{acc} non trascurabile, i gas d'accenditore siano gli unici ad avere un'influenza diretta sul bilancio della quantità di moto.

3. Contributo dei Prodotti di Ablazione

L'addizione di massa ed energia dovuta all'ablazione delle protezioni termiche esposte è quantificabile mediante i seguenti termini, agenti rispettivamente sull'equazione di continuità e sul bilancio di energia:

$$\frac{\dot{m}_{PT} A_p}{V} \quad \frac{\dot{m}_{PT} A_p h_{PT}}{V} \quad (4.57)$$

Ancora una volta, in virtù dell'ipotesi 4, possiamo scrivere:

$$h_{PT} = c_{p_{PT}} T_{PT} \quad (4.58)$$

Si può considerare $T_{PT} = T_{ablazione}$. Tale temperatura, così come il $c_{p_{PT}}$, è fornita da AVIO-BPD.

Per quanto riguarda invece la portata \dot{m}_{PT} , possiamo scrivere (sez. 4.1.7):

$$\dot{m}_{PT} = \rho_{PT} r_a S_{PT} \quad (4.59)$$

Dove r_a è la *velocità di ablazione* delle protezioni termiche. Tale dato, così come ρ_{PT} , è fornito da AVIO-BPD. La superficie esposta delle protezioni termiche S_{PT} viene invece ricavata mediante interfaccia con il simulatore di regressione, come esposto in 5.1.1.

4. Contributo Dovuto allo Sforzo d'Attrito

La superficie della camera di combustione, quindi del condotto nel quale scorre il flusso che andremo a studiare, si può distinguere in:

- (a) **Superficie del Propellente in Combustione:** lungo tale superficie l'adduzione di massa determina un effetto di soffiaggio. Si considera pertanto valida l'ipotesi 10, in virtù della quale è possibile trascurare l'effetto degli sforzi d'attrito lungo la superficie di propellente in combustione.
- (b) **Superficie del Propellente non in Combustione:** lungo tale superficie l'ipotesi 10 non è valida. Non essendoci adduzione di massa ed effetto di soffiaggio si avranno sforzi d'attrito.
- (c) **Superficie di Protezioni Termiche Esposte:** la produzione di gas per ablazione non è sufficiente a generare un effetto di soffiaggio in grado di rendere trascurabile lo sforzo d'attrito. Viene quindi a mancare l'ipotesi 10. Sarà quindi necessario conteggiare l'effetto dello sforzo d'attrito su tali superfici.
- (d) **Pareti dell'Ugello:** le pareti dell'ugello sono del tutto prive di effetti tali da rendere trascurabile lo sforzo d'attrito. Qualora nella nostra geometria si conteggiasse tale componente, sarebbe necessario conteggiare l'effetto degli sforzi d'attrito su di essa.

Risulta quindi necessario conteggiare gli effetti delle forze d'attrito sulle pareti 4b, 4c e 4d.

In particolare tali effetti verranno conteggiati mediante il termine:

$$-\sum_{i=1}^3 \tau_{wi} P_i \quad (4.60)$$

Inoltre, ciascuna τ_{wi} può essere riscritta in funzione del *Friction Factor* "f":

$$\tau_w = f \rho \frac{u^2}{2} \quad (4.61)$$

Al fine di valutare f in letteratura sono presenti numerosi studi (ad esempio [40]) a riprova degli ottimi risultati che si ottengono mediante l'utilizzo della *correlazione di Idelchik* [23].

Tale correlazione prende in considerazione sia la forma della sezione del condotto (circolare, rettangolare, triangolare) che la tipologia di flusso (laminare, turbolento, in transizione). Per distinguere tra le tre tipologie di flusso, vengono definiti dei numeri di Reynolds limite :

$$Re_l = 754e^{\left(0.0065 \frac{D_h}{\varepsilon}\right)} \quad (4.62)$$

$$Re_t = 2090 \left(\frac{D_h}{\varepsilon}\right)^{-0.0635} \quad (4.63)$$

$$Re_{tt} = 1160 \left(\frac{D_h}{\varepsilon} \right)^{-0.11} \quad (4.64)$$

dove ε è la rugosità del condotto, ossia la media delle altezze delle asperità.

Il flusso sarà considerato laminare al di sotto di Re_l , turbolento al di sopra di Re_t ed in transizione all'interno di questi due valori. Qualora vi fossero due regioni di transizione, Re_{tt} determina in quale si trova il flusso.

Il *Friction Factor* f per una sezione circolare si determina a partire dal numero di Reynolds del flusso ($Re = \frac{\rho u D_h}{\mu}$, dove μ è la viscosità molecolare). Avremo:

- Per $Re < Re_l$:

$$f = \frac{64}{Re} \quad (4.65)$$

- Per $Re_l \leq Re < Re_{tt}$:

$$f = 4.4 Re^{-0.595} e^{(-0.00275 \frac{\varepsilon}{D_h})} \quad (4.66)$$

- Per $Re_{tt} \leq Re < Re_t$:

$$f = \left[0.145 \left(\frac{\varepsilon}{D_h} \right)^0 .244 - Val \right] e^{(-0.00172 (Re_t - Re)^2)} + Val \quad (4.67)$$

con:

$$Val = 0.758 - 0.0109 \left(\frac{\varepsilon}{D_h} \right)^{-0.286} \quad (4.68)$$

- Per $Re \geq Re_t$:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon}{3.7 D_h} \right) \quad (4.69)$$

- Per $Re_l \leq Re$ e $Re_{tt} \leq Re_l$:

Si ha una sola zona di transizione. Quindi:

$$f = (7.244 Re^{-0.643} - 0.32) e^{(-0.00172 (Re_t - Re)^2)} + 0.032 \quad (4.70)$$

È importante notare che la 4.69 è la classica *correlazione di Colebrook* per flussi turbolenti [11]:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re \sqrt{f}} + \frac{\varepsilon_r}{3.7} \right) \quad (4.71)$$

dove ε_r è la *rugosità relativa*. Quest'ultimo termine adimensionale è, qualitativamente, un fattore di forma che dà ragione dell'altezza media delle asperità in rapporto al diametro idraulico del tubo. Sarà quindi:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D_h} \quad (4.72)$$

Và sottolineato il fatto che la correlazione 4.71 è *implicita*: questo significa che f andrà ricavata iterativamente.

Per tutte le nostre superfici si può generalmente ipotizzare che il flusso sia turbolento. Gran parte dei modelli di balistica interna 1-D non stazionaria utilizza quindi la semplice 4.71 per caratterizzare f , ottenendo risultati soddisfacenti.

4.3 Integrazione Numerica

Il sistema di equazioni 4.52 può essere scritto nella seguente forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (4.73)$$

con:

$$U = \begin{bmatrix} \rho A_p \\ \rho u A_p \\ \rho E A_p \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} \rho u A_p \\ (\rho u^2 + p) A_p \\ (\rho E + p) u A_p \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$S = \begin{bmatrix} r_b P_b \rho_p + \frac{\dot{m}_{acc} A_p}{V} + \frac{\dot{m}_{PT} A_p}{V} \\ p \frac{\partial A_p}{\partial x} + \frac{\dot{m}_{acc} A_p v_{acc}}{V} - \tau_w P_{eq} \\ r_b \rho_p P_b h_g + \frac{\dot{m}_{acc} A_p h_{acc}}{V} + \frac{\dot{m}_{PT} A_p h_{PT}}{V} \end{bmatrix}$$

Tale sistema è un *sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali* di tipo *iperbolico*.

Inoltre, si può notare come E ed S siano funzioni della sola U . Si procede quindi esprimendo le derivate mediante una discretizzazione alle differenze finite, per poi scegliere l'algoritmo di integrazione temporale.

4.3.1 Discretizzazione Spaziale

Vista la natura monodimensionale del problema, esso può essere discretizzato con una semplice griglia equispaziata disposta lungo l'asse motore (fig. 4.6).

Le derivate spaziali verranno espresse in base al metodo delle differenze finite. In particolare, compaiono solo derivate prime. Per una data grandezza ϕ si avranno le seguenti relazioni:

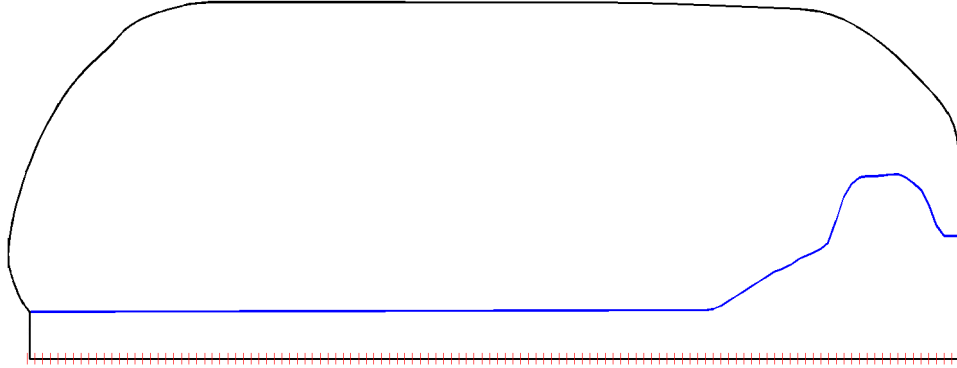


Fig. 4.6: Griglia monodimensionale equispaziata disposta lungo l'asse motore

1. Differenze Finite in Avanti

L'espressione della derivata prima mediante l'utilizzo di *differenze finite in avanti* può essere accurata al primo od al secondo ordine. Trascurando gli errori di troncamento avremo, rispettivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \quad (4.75)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-\phi_{i+2} + 4\phi_{i+1} - 3\phi_i}{2\Delta x} \quad (4.76)$$

2. Differenze Finite all'Indietro

L'espressione della derivata prima mediante l'utilizzo di *differenze finite all'indietro* può essere accurata al primo od al secondo ordine. Trascurando gli errori di troncamento avremo, rispettivamente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \quad (4.77)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_{i-2} - 4\phi_{i-1} + 3\phi_i}{2\Delta x} \quad (4.78)$$

3. Differenze Centrate

L'espressione della derivata prima mediante l'utilizzo di *differenze finite centrate* è accurata al secondo ordine. Trascurando gli errori di troncamento avremo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (4.79)$$

In generale, potremo scrivere:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \mathcal{A} \phi \quad (4.80)$$

dove \mathcal{A} è la matrice di discretizzazione spaziale.

È importante notare come, qualsiasi schema alle differenze finite si usi, si avrà uno o due nodi con derivata indeterminata: il primo nodo per le differenze finite all'indietro, l'ultimo per le differenze finite in avanti, entrambi per le differenze finite centrate. Per determinare la derivata sul primo nodo si utilizzerà quindi, localmente, una discretizzazione alle differenze finite in avanti. Viceversa per l'ultimo nodo. Questo può determinare una caduta nel livello di accuratezza locale (ad esempio, utilizzando uno schema alle differenze finite centrali coadiuvato da differenze finite avanti ed indietro al primo ordine per il primo e l'ultimo nodo).

Un'altra possibile soluzione al problema è l'utilizzo di *nodi fantasma*.

Considerando l'impiego di differenze finite in avanti ed all'indietro accurate al primo ordine e di differenze finite centrate, le matrici di discretizzazione spaziale saranno:

- **Differenze Finite in Avanti**

$$\mathcal{A}_F = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

- **Differenze Finite all'Indietro**

$$\mathcal{A}_B = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

- **Differenze Finite Centrate**

$$\mathcal{A}_C = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

4.3.2 Algoritmi di Integrazione Temporale

Al fine di scegliere un algoritmo di integrazione temporale per le equazioni 4.52 si è effettuato un ampio studio dei metodi utilizzati per le più generiche *Equazioni di Eulero* (4.50).

Salta subito all'occhio come entrambi i set di equazioni presentino le sole derivate prime nello spazio. Questo fa sì che la matrice di discretizzazione \mathcal{A} presenti autovalori immaginari puri. Sarà quindi necessario utilizzare metodi di integrazione con intervalli di stabilità comprendenti parte del piano reale. Il minimo errore di troncamento potrebbe, infatti, determinare un'instabilità di \mathcal{A} . Metodi semplici, quali l'*Algoritmo di Eulero*, vengono pertanto automaticamente esclusi.

In letteratura sono presenti numerosi riferimenti riguardanti l'integrazione delle *Equazioni di Eulero* [44, 25]. I principali metodi utilizzati sono:

- metodo *Lax* [37, 44, 25]
- metodo *Lax-Wendroff* [38, 44, 25]
- metodo *MacCormack Esplicito* [47, 43, 25]
- metodo *MacCormack Implicito*
- metodo *Upwind di Secondo Ordine* [26, 41]
- schemi *Runge Kutta Espliciti* [3, 49]
- schema di *Godunov* [17]

Tra i precedenti, viene scelto il metodo di *MacCormack*. Tale metodo è infatti di facile implementazione, intuitivo ed in grado di fornire risultati soddisfacenti per i casi di nostro interesse. È inoltre presente in letteratura una gran quantità di informazioni riguardo il suo utilizzo al fine di risolvere equazioni analoghe a 4.52 e 4.50 [43, 47, 44, 25, 52, 22].

Metodo di MacCormack

Il modello di *MacCormack* è una variazione dello schema di *Lax-Wendroff* a due passi. In particolare, la modifica consiste nell'utilizzo di un approccio del tipo *Predictor-Corrector*. La semplicità d'implementazione del metodo di *MacCormack* è dovuta principalmente al fatto che il Jacobiano non compare nella formulazione.

Si tratta di un metodo esplicito alle differenze finite accurato al secondo ordine sia nel tempo che nello spazio. È possibile raffinarne la formulazione al fine di raggiungere un'accuratezza del quart'ordine; questo è particolarmente utile nello studio di fenomeni *aeroacustici* [22]. Tuttavia, per quanto riguarda gli attuali scopi del modello, una formulazione al secondo ordine è reputata sufficiente.

Tale schema è in grado di descrivere la propagazione di onde e discontinuità a fronte rapido senza dover suddividere il dominio di integrazione in due diverse regioni localizzate a monte e a valle dell'onda, purchè le equazioni del moto siano scritte in forma conservativa [30]. Se le equazioni differenziali sono scritte in forma conservativa è dimostrabile che la soluzione, in un intorno della discontinuità, è una soluzione di tipo debole, ovvero soddisfa implicitamente le condizioni integrali di compatibilità attraverso la discontinuità stessa [37].

La formulazione è quindi del tipo a due passi:

1. **Predictor:**

$$U_j^{\overline{n+1}} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{j+1}^n - F_j^n) + \Delta t S_j^n \quad (4.84)$$

2. **Corector:**

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[U_j^n + U_j^{\overline{n+1}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_j^{\overline{n+1}} - F_{j-1}^{\overline{n+1}}) + \Delta t S_j^{\overline{n+1}} \right] \quad (4.85)$$

Va notato come l'equazione dello step *Predictor* utilizzi delle differenze finite in avanti, mentre quella del *Corrector* utilizzi delle differenze finite all'indietro. Questo ordine non è tassativo: può essere invertito. Generalmente si può osservare che l'utilizzo di differenze finite aventi la stessa direzione della propagazione della discontinuità nel *Predictor* porta a risoluzioni migliori. In ogni caso, la risoluzione fornita dal metodo è comunque buona.

Per quanto riguarda la stabilità del metodo possiamo dire che, essendo un metodo di tipo esplicito, dovrà essere rispettata la condizione di *Courant-Friedrichs-Lewy* o *CFL*:

$$C = (|u| + a) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (4.86)$$

dove C è il numero di Courant, a è la velocità del suono. Risulta evidente come griglie più fitte richiedano intervalli di discretizzazione temporale più piccoli. Questo porrà un forte limite all'utilizzo del modello a razzi di piccole dimensioni (ad es: *BARIA*: cap 6.3).

La procedura seguita per integrare le 4.52 sarà la seguente:

- Grazie all'interfaccia con il simulatore di regressione (cap. 5.2) tutti i parametri geometrici saranno noti. Saranno note inoltre, come descritto in dettaglio in sez. 4.3.4, le condizioni iniziali al tempo n e le condizioni al contorno. Pertanto, saranno completamente note U^n , F^n , S^n .
- Mediante la relazioni 4.84 è possibile propagare la U al tempo $n + 1$, ottenendo la stima $U^{\overline{n+1}}$.

- Utilizzando la media ponderale descritta in 4.1.10 è possibile aggiornare le proprietà del fluido al tempo $n + 1$.

L'area di porta A_p può essere aggiornata al tempo $n + 1$ considerando che il suo raggio sarà incrementato della quantità $r_b dt$.

Infine grazie all'ipotesi 1 è possibile ricavare $\overline{u^{n+1}}$, $\overline{p^{n+1}}$, $\overline{\rho^{n+1}}$, ed $\overline{F^{n+1}}$.

- Essendo F ed S funzione della sola U è quindi possibile calcolarne i valori al tempo $n + 1$, ottenendo i valori di stima $\overline{F^{n+1}}$ ed $\overline{S^{n+1}}$.
- Mediante la relazioni 4.85 è possibile ottenendo il valore finale U^{n+1} .
- Utilizzando la media ponderale descritta in 4.1.10 e l'ipotesi 1 si ricavano u^{n+1} , p^{n+1} , ρ^{n+1} , ed F^{n+1} .

Il valore di A_p al tempo $n + 1$ è già stato calcolato.

- Si calcolano quindi F^{n+1} ed S^{n+1} .

4.3.3 Viscosità Artificiale

La soluzione delle *Equazioni di Eulero* o del sistema 4.52 mediante tecniche numeriche richiede l'utilizzo di un metodo di integrazione fornito di una qualche forma di dissipazione intrinseca o l'utilizzo di uno schema non dissipativo coadiuvato da un termine dissipativo artificiale. Questo in quanto le *Equazioni di Eulero* non forniscono alcun sistema di dissipazione naturale. Tale dissipazione è necessaria al fine di eliminare termini ad elevata frequenza causati da non linearità e shocks.

I metodi di integrazione precedentemente presentati [37, 38, 47, 26, 41, 49, 3, 47, 17] sono tutti accomunati dall'utilizzo di approssimazioni alle differenze finite centrate con l'aggiunta di un termine dissipativo artificiale.

Al contrario, esistono metodi integrativi *upwind* basati sulle ipotesi della teoria delle caratteristiche e sulla propagazione delle onde. È dimostrabile che qualsiasi schema che ricada in questa categoria è equivalente ad un ben più semplice schema alle differenze finite centrate munito di un termine artificiale di dissipazione aggiuntivo [52].

Per quanto riguarda il metodo d'integrazione da noi scelto, lo stesso MacCormack e Baldwin proposero un modello di dissipazione artificiale di pratica implementazione [48, 22, 43]. Per lo step Predictor avremo:

$$\hat{F}_i = F_i + \epsilon(|u_i| + a) \frac{|p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}|}{p_{i+1} + 2p_i + p_{i-1}} (U_j^n - U_{j-1}^n) \quad (4.87)$$

in cui ϵ è un coefficiente utilizzato per pesare l'influenza della viscosità artificiale, generalmente posto tra 0 e 0.5.

Lo schema di MacCormack modificato con l'aggiunta del termine di viscosità artificiale si ottiene sostituendo \hat{F} ad F in 4.84 e 4.85. Va specificato

che la derivata di U in 4.87 deve essere espressa con la differenza finita opposta allo step in cui verrà applicata la \hat{F} . Per il *Predictor* avremo quindi:

$$\hat{F}_i^n = F_i^n + \epsilon(|u_i^n| + a) \frac{|p_{i+1}^n + 2p_i^n + p_{i-1}^n|}{p_{i+1}^n + 2p_i^n + p_{i-1}^n} \mathcal{A}_B U \quad (4.88)$$

mentre per il *Corrector*:

$$\hat{F}_i^{n+1} = F_i^{n+1} + \epsilon(|u_i^{n+1}| + a) \frac{|p_{i+1}^{n+1} + 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}|}{p_{i+1}^{n+1} + 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}} \mathcal{A}_F U \quad (4.89)$$

dove A_B e A_F sono, rispettivamente, matrici di discretizzazione alle differenze finite all'indietro ed all'avanti.

È importante notare che la correzione dovuta alla viscosità artificiale, grazie alla sua stessa formulazione, viene applicata in presenza di elevati gradienti di pressione. Si tenderà pertanto ad eliminare le oscillazioni spurie che si vengono a generare in presenza di elevati gradienti ed a lasciare invariata la soluzione laddove il gradiente di pressione sia basso.

4.3.4 Condizioni Iniziali ed al Contorno

Al momento dell'accensione, il motore si trova pressurizzato con gas inerte. La sezione di gola d'ugello è bloccata da un apposito sigillo, il quale si rompe raggiunta la pressione differenziale di 7 bar.

Le condizioni iniziali del fluido contenuto in camera di combustione saranno imposte in funzione di tale gas inerte, il quale si trova generalmente ad una pressione leggermente superiore a quella ambiente. Le condizioni iniziali geometriche sono imposte a partire dall'interfaccia con il modello di regressione 5.2.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno sul primo ed ultimo nodo, si porranno su entrambi condizioni di *wall* fino allo stappamento dell'ugello. Per fare questo, non si farà altro che porre portata nulla su questi due nodi.

Raggiunta la pressione necessaria allo stappamento dell'ugello, la condizione sull'ultimo nodo verrà posta a partire dalle equazioni 4.21:

$$C^* = \frac{p_n A^*}{\dot{m}_{nozz}}$$

$$\dot{m}_{nozz} = \frac{p_n A^*}{C^*}$$

dove n è l'ultimo nodo della griglia di calcolo. Si ipotizza quindi che la portata smaltita dall'ugello debba essere la stessa che attraversa l'ultimo nodo. Si avrà quindi:

$$u_n = \frac{\dot{m}_{nozz}}{\rho_n A_{p_n}} \quad (4.90)$$

Qualora fosse nota la geometria dell'ugello, e non soltanto il modello fisico che lo descrive, si potrebbe porre condizione di muro in sezione di gola fino allo stappamento, per poi imporre semplicemente la pressione ambiente in sezione d'uscita e condizione sonica in sezione di gola.

4.4 Spreading Flame e Combustione Erosiva dovuta all'Accenditore

L'accensione del propellente e la componente di combustione erosiva dovuta all'accenditore esulano dai modelli precedenti. Vengono quindi trattati separatamente in questa sezione

4.4.1 Spreading Flame

La propagazione di fiamma è fortemente legata all'interazione termofluidodinamica tra flusso dei gas d'accenditore e parete esposta del propellente solido. Tale propagazione avviene in presenza di tre differenti condizioni al contorno [9]:

1. Ugello tappato e conseguente rapido innalzamento della pressione di camera
2. Stappamento dell'ugello, con diminuzione dell'incremento di pressione
3. Accensione completa del propellente, con ugello stappato, con nuovo rapido aumento di pressione.

Misure sperimentali dimostrano come, in queste tre fasi, la fiamma si propaga con velocità differenti. L'andamento sarà del tipo alto-basso analogo all'incremento di pressione. Immagini relativi a tali andamenti saranno riportate nel capitolo 6.3.

Lo *Spreading Flame* avviene, su gran parte del motore, a causa della convezione fra gas caldi provenienti dalla combustione del propellente lungo il canale. Vi sarà, ovviamente, un'influenza dovuta alla geometria del canale stesso. Sperimentalmente è possibile notare che la propagazione della fiamma è principalmente funzione delle caratteristiche del propellente, ed in particolare dell'esponente di combustione " n ".

In prossimità della testa del motore, invece, si ha una forte influenza da parte dell'accenditore. Esso determina infatti una forte componente erosiva della velocità di combustione non quantificabile con il modello esposto in 2.5.2. Tale fenomeno verrà trattato in 4.4.2. Per ora, basti sapere che esso determina un consistente incremento del flusso termico convettivo locale, di adduzione di massa dovuta alla combustione del propellente e, conseguentemente, della velocità di propagazione della fiamma.

Nei modelli attualmente utilizzati da AVIO-BPD, al fine di caratterizzare la velocità di propagazione della fiamma sotto l'influenza dell'accenditore, vengono utilizzate apposite tabelle *tempo-velocità* compilate a partire da database conoscitivi presenti all'interno dell'azienda. Tali tabelle vanno a coprire i primi 0.3 secondi a partire dall'avvio dell'accenditore. Questo approccio, seppur basilare, ha fornito buoni risultati.

Mentre nel modello 0-D si è vincolati all'utilizzo dell'approccio sopra esposto, nel modello 1-D (sistema 4.52), mediante accurata caratterizzazione della portata d'accenditore (ossia mediante la conoscenza della sua velocità, temperatura, pressione : fig. 4.2, 4.3, 4.4), la velocità di propagazione della fiamma si otterrà automaticamente dalla risoluzione del campo fluidodinamico. Questo ci permette di svincolarci dall'utilizzo delle tabelle *tempo-velocità*. Risultati relativi a questa affermazione saranno presentati nel capitolo 6.6.

Accensione del Propellente

Nel modello 0-D si ipotizza che l'accensione del propellente avvenga nel momento in cui un dato punto del grano venga in contatto col fronte di fiamma. La velocità è ricavata dalle tabelle citate nel paragrafo precedente.

Utilizzando il modello 1-D, invece, è possibile considerare il fatto che il propellente entra in combustione raggiunta una ben fissata temperatura d'accensione, valutabile sperimentalmente : T_{pig} [6, 43]. La risoluzione delle equazioni 4.52 fornisce, istante per istante, la temperatura raggiunta in corrispondenza di ciascun nodo. Qualora tale temperatura T_{pj} sia superiore a T_{pig} , si può considerare la quota parte di grano propellente associata a detto nodo come in combustione.

4.4.2 Combustione Erosiva dovuta all'Accenditore

La portata addotta dall'accenditore, a causa del direzionamento degli ugelli dello stesso, presenta una forte componente di velocità normale alle pareti del grano propellente (questo per assicurare l'accensione del propellente stesso).

È importante notare che l'influenza dell'accenditore si estende ben oltre il tempo necessario all'accensione di tutta la superficie di propellente esposta. Prendendo ad esempio *Ariane 5*, l'accenditore insisterà sul primo segmento del grano per circa 1 s, mentre il tempo impiegato dal fronte di fiamma per coprire l'intera lunghezza del motore è di circa $0.2 \div 0.3$ s [9]. L'effetto principale dell'accenditore sul grano propellente è quello di accrescere la velocità di combustione locale nella zona di *impingement*, mediante il fenomeno della combustione erosiva. La regressione di detta zona di *impingement* non seguirà, pertanto, l'evoluzione teorica per superfici parallele.

È quindi di capitale importanza valutare il termine erosivo dovuto all'esposizione della zona di *impingement* al flusso d'accenditore. Sfortunata-

mente, il modello di *Lenoir e Robillard* 2.5.2 non è in questo caso applicabile: esso è stato ricavato, infatti, sotto l'ipotesi di flussi paralleli alla superficie di combustione [27]. Non è quindi adatto a valutare la combustione erosiva dovuta ad un flusso caratterizzato da forte componente di velocità normale alla parete.

Studi compiuti presso AVIO-BPD dimostrano l'applicabilità di un modello *S.P.P* modificato al fine di tenere in conto delle componenti di flusso non parallele all'asse del motore [9, 5]:

$$\begin{cases} r_{be} = \delta \frac{h(G, \dot{m}_{acc}, T_{acc})^{0.8}}{f(D_h)} e^{-\frac{\beta \rho r_b}{G}} \\ h(G, \dot{m}_{acc}, T_{acc} = G + \chi(T_{acc}, \alpha)G_{acc} \\ f(D_h) = 0.9 + 0.189D_h [1 + 0.043D_h (1 + 0.023D_h)] \end{cases} \quad (4.91)$$

in cui:

- δ e β sono coefficienti ricavati da prove sperimentali eseguite sul propellente in uso
- D_h è il diametro idraulico del condotto
- G e G_{acc} sono portate massiche per unità di superficie
- T_{acc} è la temperatura dei gas emessi dall'accenditore
- α è l'angolo con cui il flusso dei gas d'accenditore incide sulla superficie del propellente
- χ è il coefficiente d'influenza dell'accenditore ricavato tramite formulazione semi-empirica.

Il modello sopra descritto è stato scritto ma non ancora implementato, a causa di mancanza di valori sperimentali. È tuttavia stata considerata la combustione erosiva sui nodi d'*impingement* mediante l'applicazione di appositi fattori di amplificazione del rateo di combustione, noti da grafici basati su esperienza e simulazione (cap. 5.3).

4.5 Fattori Correttivi

Nel presente capitolo, abbiamo finora considerato il rateo di combustione come noto. Nel capitolo 2.5 abbiamo presentato alcuni modelli atti a valutarne l'entità. L'implementazione di tali modelli sarà riportata in capitolo 5.3.

Tuttavia, i modelli finora descritti non sono in grado, da soli, di valutare l'effettivo rateo di combustione che si ottiene su motori *reali*. Tali relazioni sono, infatti, in grado di prevedere il comportamento *teorico* del propellente in condizioni *ideali*. Nella realtà, si è ben lungi da tali condizioni.

È tuttavia possibile dare ragione di tali differenze mediante alcuni fattori correttivi:

1. Fattore di Scala

Il primo dei fattori correttivi che è necessario applicare al fine di ottenere il reale valore del rateo di combustione è il *fattore di scala della velocità di combustione del propellente*. Il suo valore rappresenta la differenza che si ha tra la velocità di combustione misurata in piccoli motori di test atti a valutare il comportamento del propellente (*BARIA*, fig. 4.7) e la velocità effettiva che si registra sistematicamente in motori realizzati col medesimo propellente ma aventi dimensioni molto differenti (*motori reali*). Si consideri, infatti, che le dimensioni di una *BARIA* sono di circa 0,3 m.

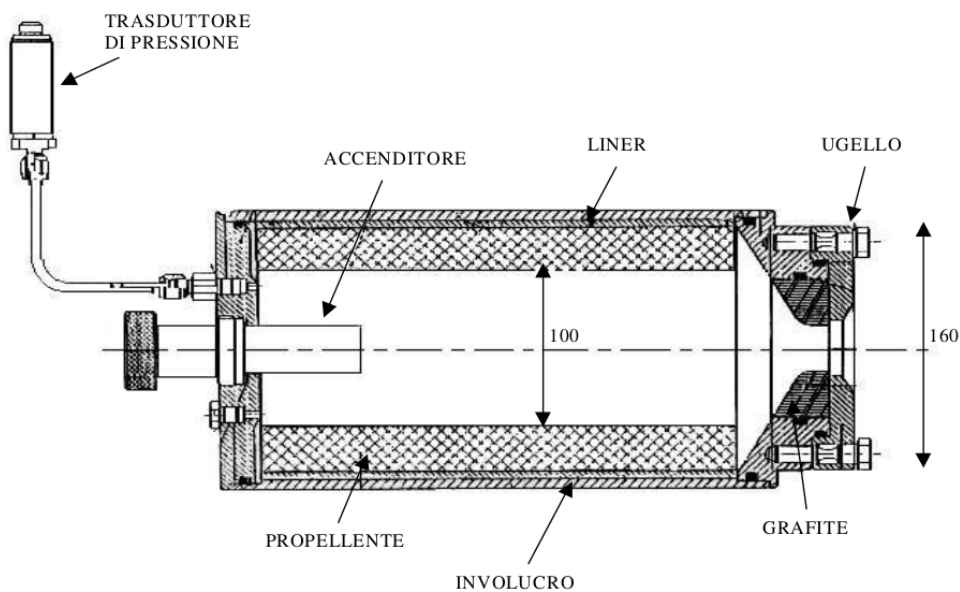


Fig. 4.7: Configurazione classica di una *BARIA* [9]. Le dimensioni espresse sono in [mm].

2. Correzione Locale sulla Velocità di Combustione

Il fattore di scala non è sufficiente al fine di ottenere un rateo di combustione paragonabile con quello reale. Il grano propellente presenta, infatti, dei comportamenti non isotropi lungo la direzione di propagazione della superficie di combustione. È quindi necessario conteggiare questo comportamento mediante un secondo fattore correttivo funzione dello spessore del propellente consumato (*web*).

L'esperienza di AVIO-BPD e pubblicazioni presenti in letteratura (ad esempio [46, 10]) confermano che l'anisotropia della velocità di combustione è causata dal processo di colaggio impiegato nella fabbricazione del grano propellente. Durante tale processo, il colaggio del propellente in forma viscosa favorisce l'insorgere di zone a diversa concentrazione di materiali costituenti. Tali zone verranno poi ad essere caratterizzate anche da una diversa morfologia.

La variazione di velocità di combustione che consegue da questo fenomeno è continua e presenterà il seguente andamento qualitativo (fig 4.8):

Al momento dell'accensione, ossia quando la superficie di combustione coincide con quella quota parte di propellente che era a contatto con la spina, la velocità di combustione risulta essere inferiore al valore di riferimento di circa l'1 ÷ 2%. Tra il 20% ed il 50% del *web* la velocità di combustione raggiungerà il suo picco, superiore di circa il 2 ÷ 3% al valore di riferimento. Verso la fine del *web thickness*, ossia in prossimità delle protezioni termiche, la velocità di combustione risulterà essere inferiore a quella nominale di circa il 5 ÷ 6%.

Si terrà conto di questo andamento moltiplicando la velocità nominale per un coefficiente correttivo chiamato *HUMP*. Si riporta, in figura 4.8, l'andamento dell'*HUMP factor* per lo *Zefiro 9*:

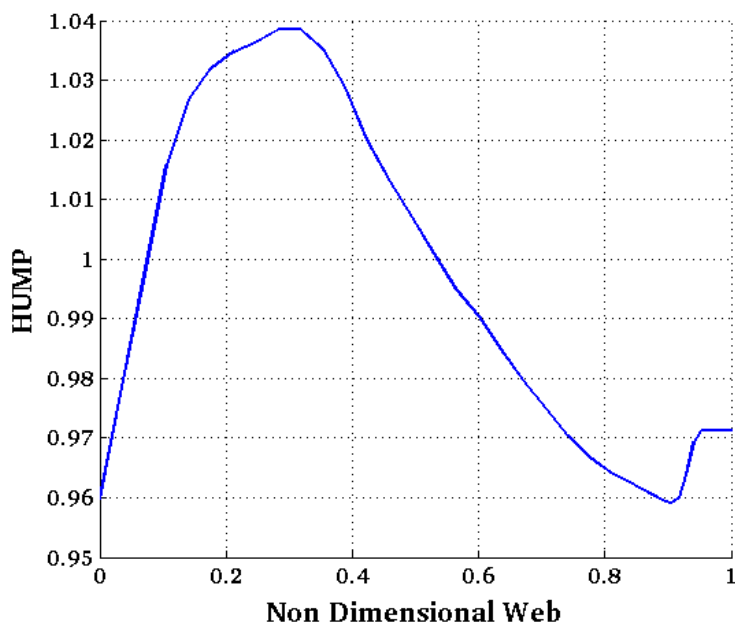


Fig. 4.8: Fattore HUMP

3. Correzione Locale sulla Superficie di Combustione

L'anisotropia della velocità di combustione esaminata al punto 2 determina un'evoluzione della superficie di combustione non riconducibile alla regressione per strati paralleli, solitamente utilizzata in gran parte dei simulatori di regressione. Questo fatto viene generalmente preso in considerazione mediante il fattore correttivo denominato *BCRF*.

I fattori correttivi sopra esposti vengono applicati nella subfunction incaricata del calcolo del rateo di combustione su ogni singolo nodo. Tale punto verrà trattato in dettaglio in capitolo 5.3. Si anticipa, comunque, che grazie all'integrazione fra il simulatore di regressione anisotropo sviluppato ed i modelli balistici formulati nel presente capitolo l'*HUMP* può essere preso in considerazione mediante una distribuzione di fattori amplificativi su ogni singolo nodo. Tale distribuzione verrà ricavata in funzione di indagini reologiche dirette sul grain propellente.

Una volta applicato l'*HUMP* non sarà, nel nostro caso, necessario applicare alcun fattore correttivo *BCRF*. Infatti, grazie al fatto che il simulatore di regressione da noi sviluppato è del tutto anisotropo, viene considerata direttamente un'evoluzione *reale*, non basata sull'ipotesi di regressione per strati paralleli.

Risultano quindi evidenti i grandi vantaggi che il simulatore sviluppato dal Laboratorio di Propulsione e Macchine offre dal punto di vista di uno studio qualitativo sull'originarsi dell'*HUMP* e dei suoi effetti.

Capitolo 5

Integrazione dei Modelli Balistici con il Simulatore di Regressione

Come più volte accennato, i modelli balistici formulati in capitolo 4 vanno accoppiati ad un apposito modulo atto al calcolo della regressione della superficie di combustione del grano propellente (cap. 3). Il flusso di dati tra questi due moduli sarà a due vie:

1. Il simulatore di regressione fornirà ai modelli balistici la geometria del canale costituito dalla camera di combustione (e dall'ugello, se la sua geometria è nota) nonché informazioni sulle variazioni di volume e di superficie di combustione.
2. A partire da questi dati, il modulo balistico calcolerà la fluidodinamica interna della camera di combustione, ricavando le distribuzioni di pressione e velocità. Conseguentemente, calcola il rateo di combustione che il modello di regressione dovrà applicare a ciascun nodo della geometria al fine di simulare il processo di combustione. Tale calcolo sarà esplicito da un'apposita funzione facente parte del modulo balistico, denominata *burnrate*. Essa è semplicemente costituita dall'implementazione delle relazioni espone in capitolo 2.5.

5.1 Estrapolazione dei Dati dal Simulatore di Regressione

Il modello 0-D ed 1-D necessitano di input differenti. Tratteremo quindi separatamente le metodologie con cui questi input vengono estrapolati a partire dalle informazioni rese disponibili dal simulatore di regressione.

5.1.1 Modello 0-D

Considerando la forma finale del modello 0-D, espressa dal sistema 4.16, è immediato notare come essa necessiti, in ingresso dal simulatore di regressione, due quantità:

1. La derivata temporale del volume di camera di combustione \dot{V}
2. Il valore delle superfici di protezioni termiche esposte S_{PT}

\dot{V} corrisponde al volume di propellente solido combusto nell'intervallo temporale dt . Da tale valore, come accennato al capitolo 4.1.4, è possibile ricavare la portata di massa addotta dalla combustione all'interno del volume di controllo. Permette inoltre il calcolo del nuovo volume di camera di combustione.

S_{PT} permette, invece, di ricavare la massa addotta dall'ablazione delle protezioni termiche ed il flusso di calore attraverso le pareti inerti scoperte (cap. 4.1.7 e 4.1.8).

Derivata Temporale del Volume di Camera

Come mostrato in capitolo 3, il simulatore di regressione è in grado di fornire in output il volume di camera di combustione a ciascuna iterazione. Confrontandolo con il volume all'iterazione precedente, risulta semplice ricavare \dot{V} .

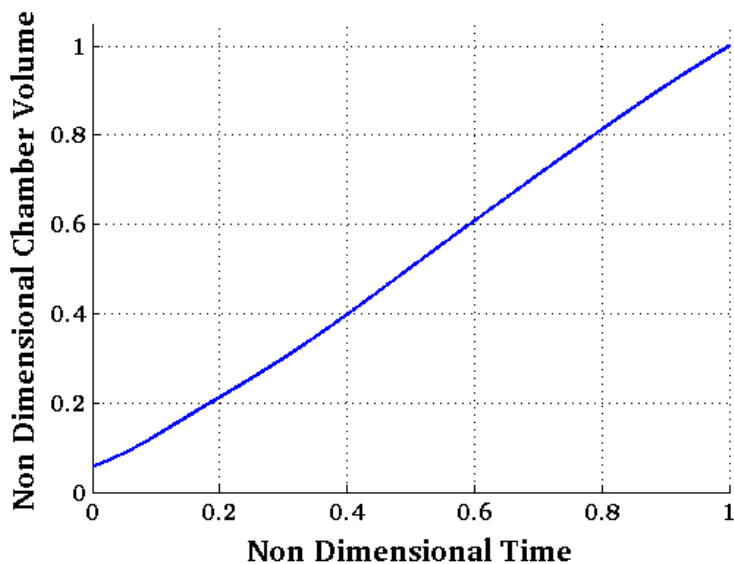


Fig. 5.1: Esempio di andamento del volume di camera nel tempo

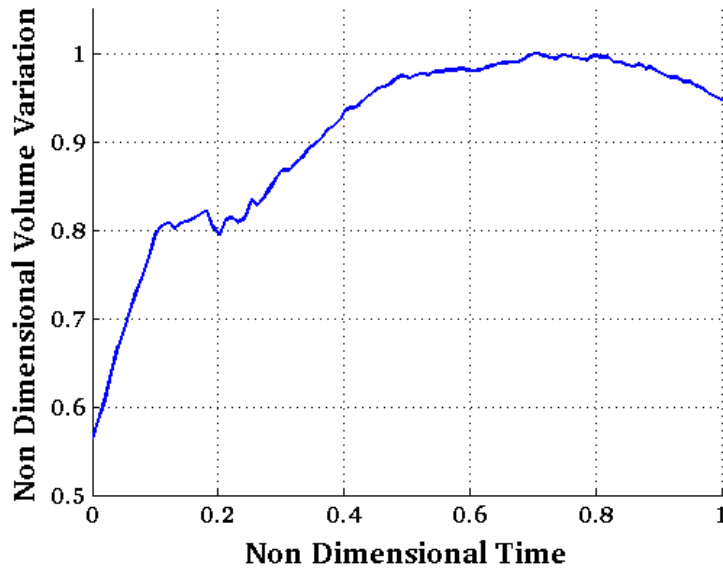


Fig. 5.2: Esempio di andamento di \dot{V} nel tempo

Nelle figure 5.1 e 5.2 sono riportati degli andamenti d'esempio del volume di camera nel tempo e della sua derivata. In figura 5.2 risulta particolarmente evidente l'effetto del *remeshing* della mesh triangolare che rappresenta la superficie di combustione (cap. 3.5).

Superficie di Protezioni Termiche Esposte

Al fine di ricavare la superficie di protezioni termiche esposte, si valuta il raggio medio della camera di combustione. Per fare questo è necessario imporre una griglia di discretizzazione lungo l'asse motore, in corrispondenza della quale verranno valutate le sezioni del motore (fig. 2.2). Tale griglia può essere la stessa utilizzata per il calcolo fluidodinamico del modello 1-D (fig. 4.6).

Si consideri, a titolo d'esempio, il motore rappresentato in figura 5.3. La superficie rappresentata in giallo è la superficie di combustione, mentre il solido trasparente rappresenta il case contenitivo del motore.

Sezionando tale geometria in corrispondenza dei punti della griglia di figura 4.6, si ottengono le sezioni esposte nelle fig. 5.4 e 5.5.

I punti costituenti le sezioni rappresentate nelle figure 5.4 e 5.5 sono ottenuti considerando ciascun lato di ciascun triangolo componente la geometria 5.3 come una retta nello spazio. Tale lato sarà pertanto definito dal luogo dei punti dati dalla seguente equazione:

$$P = Q + tu, \quad t \in \mathcal{R} \quad (5.1)$$

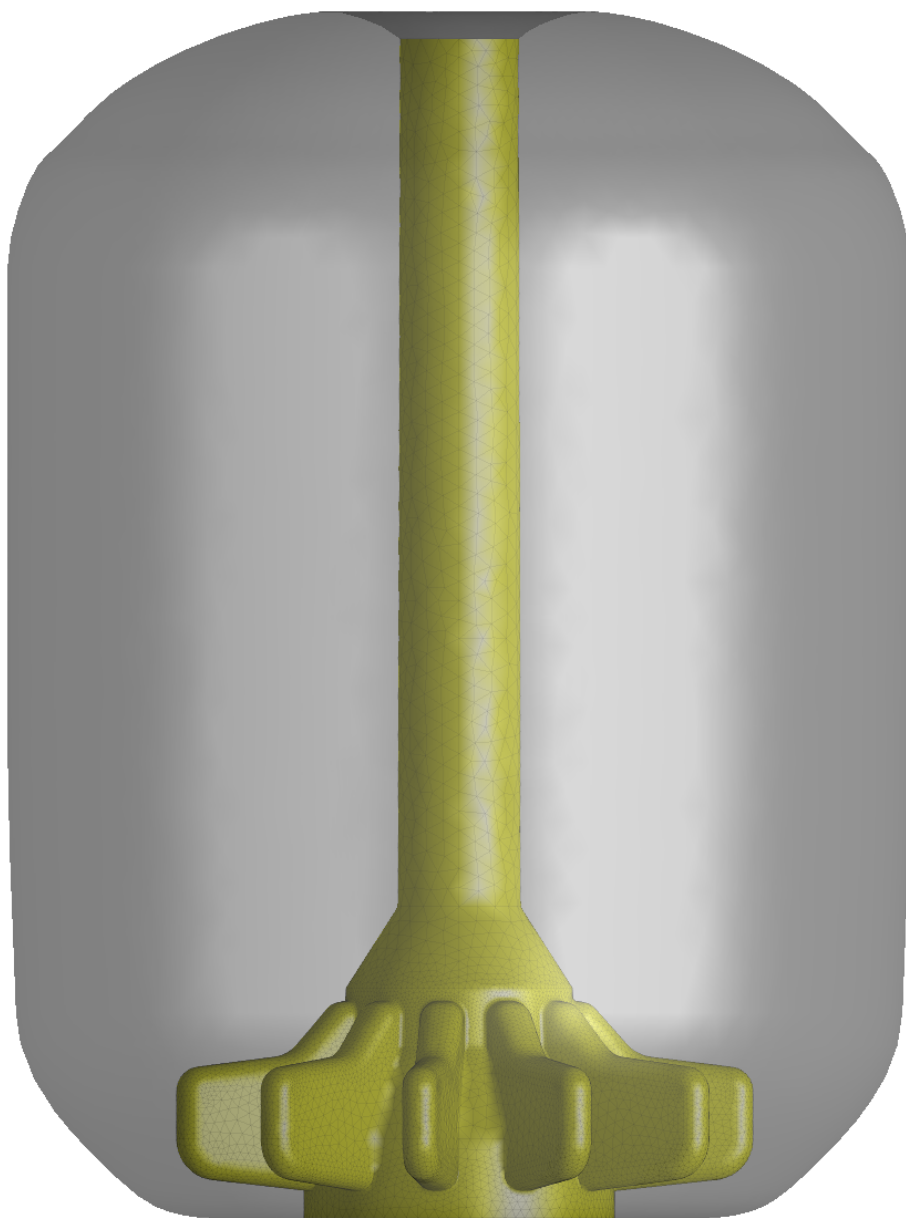


Fig. 5.3: Schema di grano propellente a stella. In giallo: superficie di combustione. Trasparente: case contenitivo

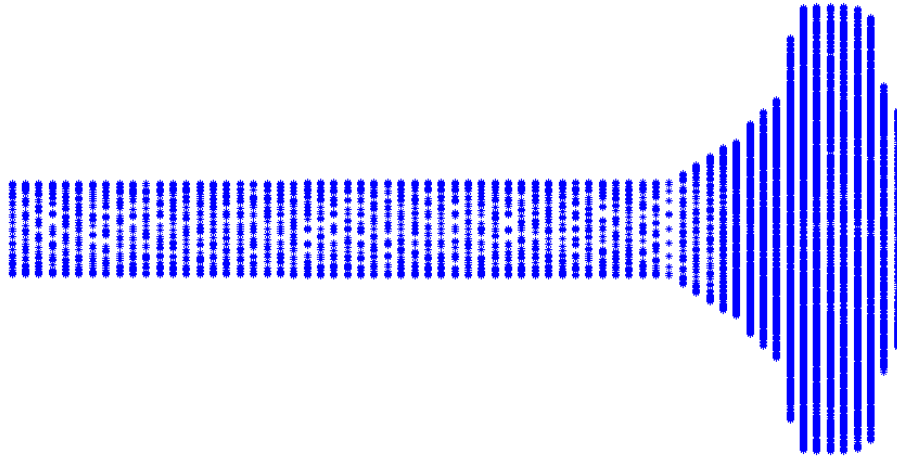


Fig. 5.4: Nuvola di punti derivati dalla sezionatura della geometria 5.3 nei punti della griglia 4.6, vista laterale

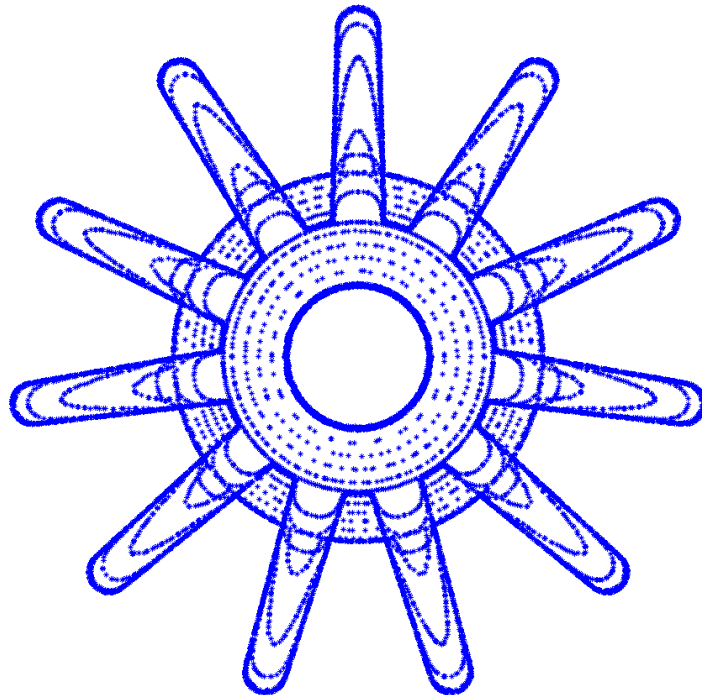


Fig. 5.5: Nuvola di punti derivati dalla sezionatura della geometria 5.3 nei punti della griglia 4.6, vista frontale

dove Q è un punto qualsiasi giacente sulla retta, u è il suo versore. In termini di componenti si avrà:

$$\frac{x - x_Q}{u_x} = \frac{y - y_Q}{u_y} = \frac{z - z_Q}{u_z} \quad (5.2)$$

Nel nostro caso, rappresentando la nostra retta il lato di un triangolo ed essendo noti i suoi punti estremi R e Q , il versore del lato può essere espresso come:

$$\frac{R - Q}{|R - Q|} \quad (5.3)$$

Sarà quindi necessario considerare un piano per ogni nodo della griglia 4.6, avente normale orientata come l'asse motore.

Un piano nello spazio 3-D può essere identificato da un punto O che vi appartiene e dal vettore u' che ne identifica la normale. Il punto O sarà dato dal nodo in corrispondenza del quale si calcola la sezione, u' sarà diretto come l'asse motore.

Allora, esso è rappresentato dal luogo dei punti tali che:

$$(O - P) \cdot u' = 0 \quad (5.4)$$

In termini di coordinate si avrà:

$$(x - x_O)u'_x + (y - y_O)u'_y + (z - z_O)u'_z = 0 \quad (5.5)$$

Espressi quindi i lati dei triangoli costituenti la mesh di superficie della geometria in esame ed espressi i piani secanti giacenti sui nodi di griglia ed aventi normale diretta come l'asse motore, possiamo esprimere l'intersezione fra le rette rappresentanti i lati e detti piani [18].

Avremo che l'eventuale punto di intersezione tra la retta $P = Q + tu = 0$ ed il piano $(O - P)u'$ è dato da:

$$(O - Q - tu) \cdot u' = 0 \quad (5.6)$$

Per data condizione si ottiene la seguente soluzione:

$$t_0 = \frac{(O - Q) \cdot u'}{u' \cdot u} \quad (5.7)$$

che ha senso se $u' \cdot u \neq 0$. Altrimenti, la retta è parallela al piano e non si ha, quindi, intersezione.

Noti i punti componenti le sezioni rappresentate in figura 5.4 ed in figura 5.5 è possibile ricavare il raggio medio di ciascuna sezione.

Si identifica quindi l'intersezione di detto raggio medio con il profilo del case contenitivo del motore. Si divide pertanto il profilo del case in tre regioni:

- una prima regione esposta che va dalla testa del motore alla prima intersezione con il profilo del grano propellente
- una regione coperta dal propellente, che va dal primo al secondo punto d'intersezione
- una seconda regione esposta, che va dalla seconda intersezione con il profilo del grano propellente ed il punto in cui si avrebbe l'innesto tra il case e l'ugello.

L'evoluzione nel tempo di queste tre zone viene riportata nelle figure 5.6, 5.7 e 5.8.

Abbiamo quindi ricavato i profili che rappresentano le parti di case esposte al flusso di gas caldi. Il case è rappresentabile, punto per punto, da una sezione di tipo circolare. Quindi, discretizzando i segmenti di case esposti, possiamo ricavare il raggio della sezione in ciascun punto di discretizzazione. Pertanto la superficie esposta è facilmente ricavabile mediante sommatoria delle superfici laterali dei tronchi di cono aventi come raggi quelli dei profili esposti:

$$S_{lPT} = \sum_{i=1}^n S_{l_i} \quad (5.8)$$

$$S_{l_i} = \pi(r_i + r_{i+1})a$$

$$a = \sqrt{dz_i^2 + (r_i - r_{i+1})^2}$$

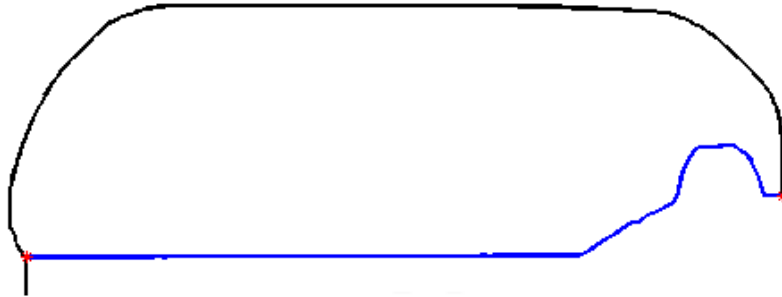


Fig. 5.6: Profilo delle protezioni termiche esposte (rosso), profilo delle protezioni termiche non esposte (nero), raggio medio del grain propellente (blu)

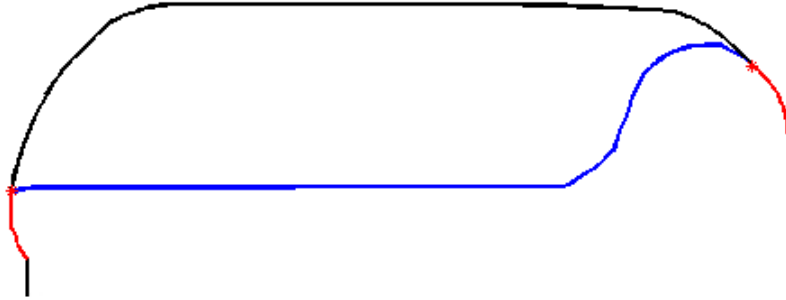


Fig. 5.7: Profilo delle protezioni termiche esposte (rosso), profilo delle protezioni termiche non esposte (nero), raggio medio del grain propellente (blu)

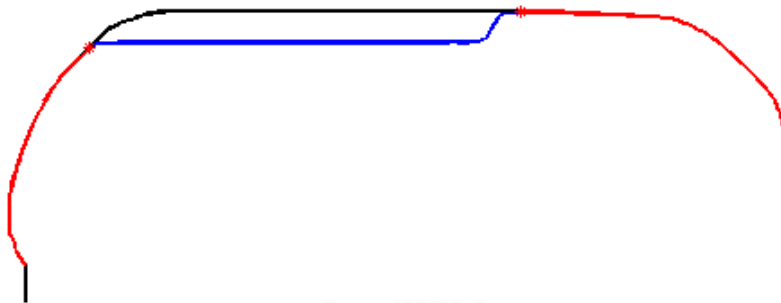


Fig. 5.8: Profilo delle protezioni termiche esposte (rosso), profilo delle protezioni termiche non esposte (nero), raggio medio del grain propellente (blu)

L'andamento delle superfici di protezioni termiche nel tempo sarà del tipo riportato in figura 5.9.

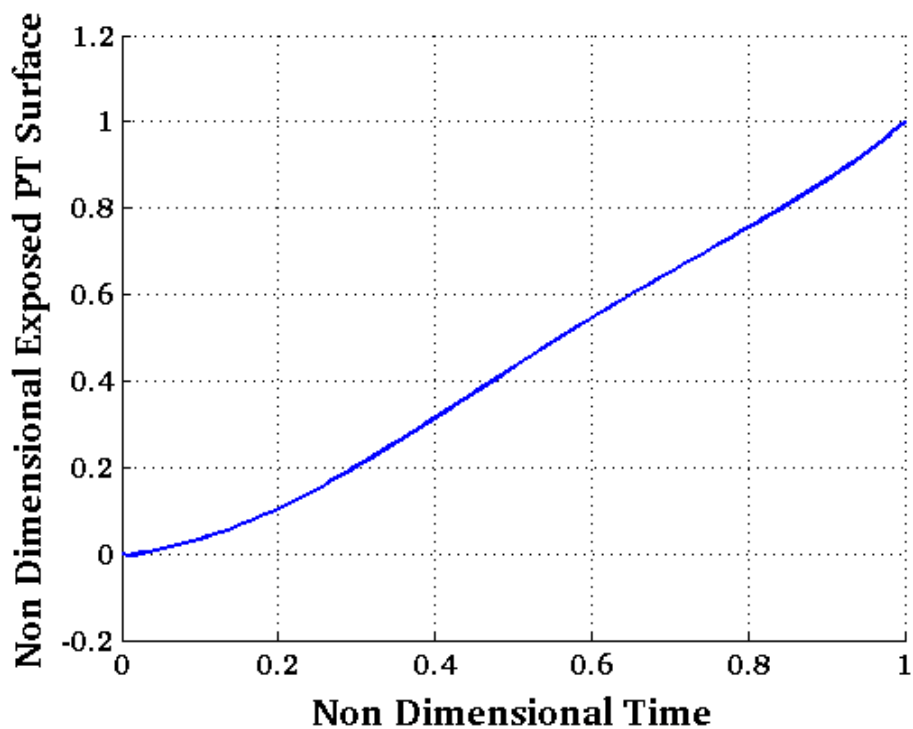


Fig. 5.9: Andamento della superficie di protezioni termiche esposte nel tempo

5.2 Modello 1-D

Analizzando la formulazione del modello 1-D (sistema 4.52) si determinano i parametri che è necessario ricavare dall'interfaccia con il simulatore di regressione:

- Area di porta del canale A_p
- Volume del canale V
- Superficie di combustione del grano propellente S_b e relativo perimetro di combustione P_b
- Superficie delle protezioni termiche scoperte S_{PT} e relativo perimetro P_{PT}
- Perimetro delle superfici con attrito (cap. 4.2.1, punto 4)

5.2.1 Area di Porta del Canale

Considerando il canale costituito dalla camera di combustione, avremo che la sua geometria evolve nel tempo e nello spazio.

Si può affermare che il canale in cui scorre il flusso sia costituito dalla cavità ricavata all'interno del propellente (*bore*), dalla geometria del case e dalla geometria dell'ugello, qualora questa venisse considerata parte del dominio di studio. A titolo esemplificativo, continueremo a considerare la geometria riportata in figura 5.3. Non considereremo quindi l'ugello come parte del dominio di studio.

Si può subito immaginare come, mano a mano che la regressione del grain venga a scoprire le pareti del case, queste determinino la geometria locale del canale in cui scorre il flusso di gas caldi. Si ricava quindi l'andamento del raggio del canale a partire dal raggio medio r_m della superficie di grano propellente, come esplicitato in sezione 5.1.1, e dal raggio del profilo del case, laddove questo venga a trovarsi scoperto. L'andamento qualitativo del diametro idraulico del canale, ricavato dalla conoscenza del raggio, viene riportato in figura 5.10.

A partire da tale diametro viene quindi ricavata l'*area di porta* A_p ed il perimetro P_p .

Area di porta, relativo perimetro, diametro idraulico e raggio del canale verranno quindi valutati nei nodi della griglia rappresentata in figura 4.6.

5.2.2 Volume del Canale

Al fine di valutare semplicemente il volume del canale considereremo una nuova griglia sfalsata di $\frac{\Delta x}{2}$ rispetto alla prima. Ci riferiremo a tale griglia chiamandola *griglia dei punti medi*. È possibile ricavare, in corrispondenza dei suoi nodi, le quantità A_p , P_p , r_m , D_h ed in particolare il volume V associato a ciascun nodo. Il volume associato al nodo *j-esimo* può essere facilmente calcolato tramite la formula del volume del tronco di cono. Definendo con i i pedici j i nodi della seconda griglia e con i i pedici i i nodi della prima, ed essendo i e $i+1$ i nodi della prima griglia che comprendono il nodo *j-esimo* della griglia dei punti medi, possiamo scrivere:

$$V_j = \frac{1}{3}\pi\Delta x(r_{i+1}^2 + r_i r_{i+1} + r_i^2) \quad (5.9)$$

5.2.3 Calcolo della Superficie di Combustione e Relativo Perimetro

Parametri indispensabili al modello 1-D sono i perimetri relativi alle superfici di combustione e delle protezioni termiche esposte, nonché le stesse superfici.

Si consideri la griglia originale e siano i e $i+1$, rispettivamente, il nodo antecedente e seguente al *j-esimo* nodo della griglia dei punti medi. Al fine

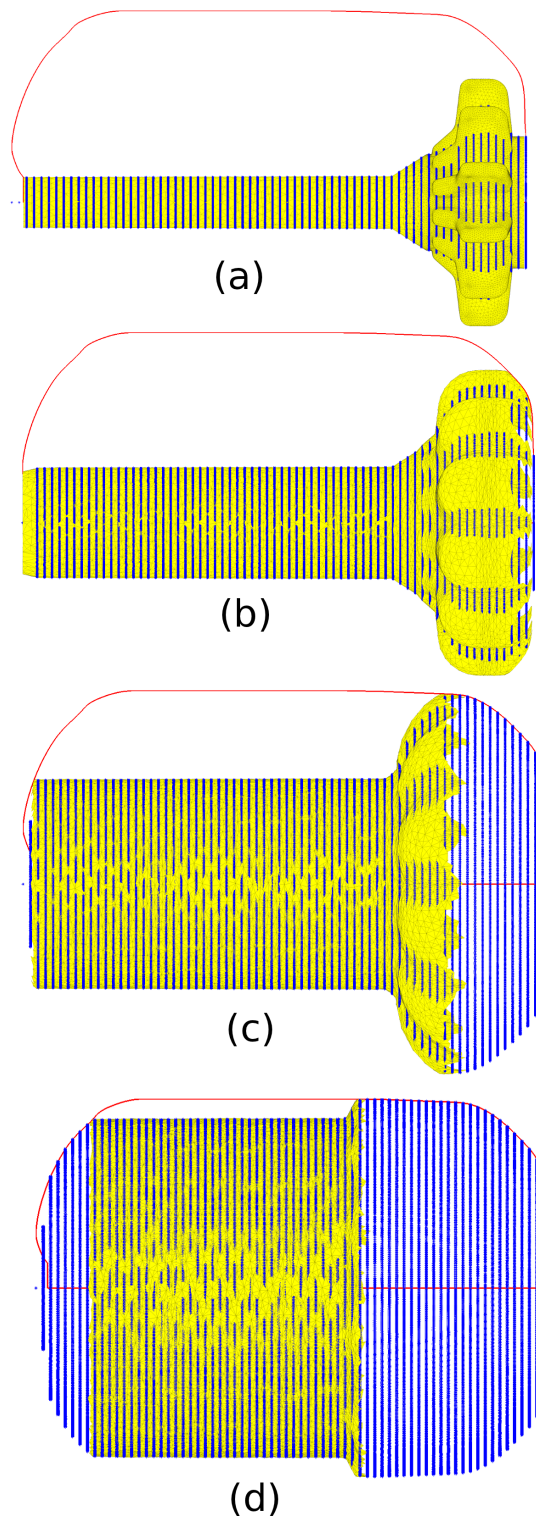


Fig. 5.10: Andamento del diametro del canale mano a mano che la combustione scopre le pareti del case

di ridistribuire la superficie di combustione del grano propellente su ogni nodo j -esimo, si considerano i *vertici* della mesh triangolare che descrive la geometria della superficie in combustione.

È possibile, mediante analisi della *matrice dei vertici* della mesh (cap 3.1), identificare i vertici compresi fra il nodo i ed $i + 1$. Possiamo quindi assegnare tali vertici al j -esimo nodo della griglia dei punti medi.

Noti i vertici della superficie di combustione associati a ciascun punto j -esimo, vi si associano i relativi *triangoli adiacenti*, ricavabili mediante analisi della *matrice di triangolazione* della mesh (cap. 3.1). A titolo esemplificativo, in figura 5.11 vengono rappresentati i triangoli adiacenti ai vertici associati al nodo j -esimo.

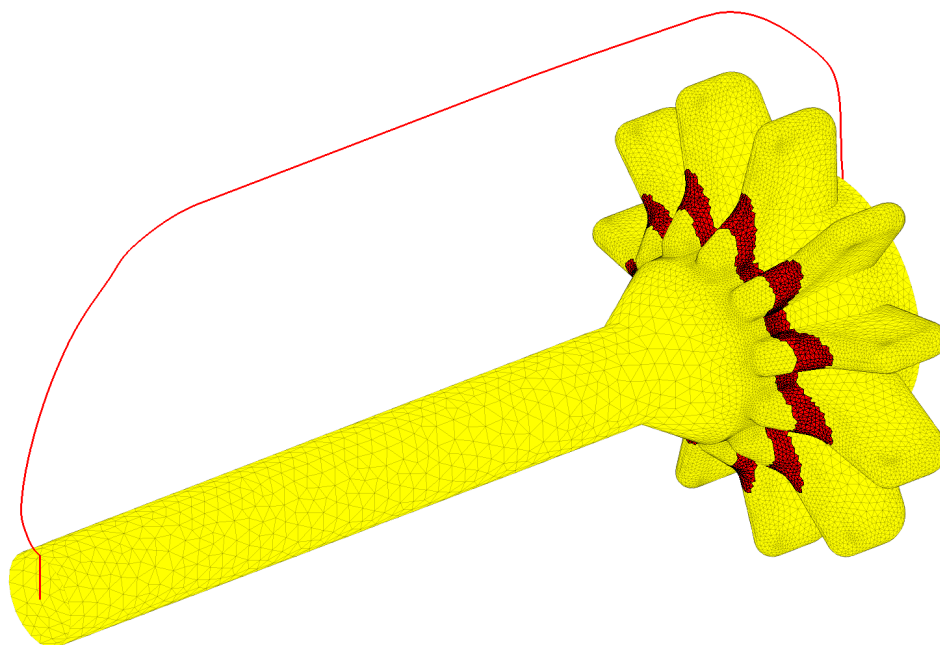


Fig. 5.11: Superficie in giallo: superficie di combustione. Superficie in rosso: triangoli adiacenti ai vertici assegnati al nodo j -esimo. Linea in rosso: profilo del case contenitivo

Noti tali triangoli, è necessario considerare che *non tutta la loro area* è associabile al nodo j -esimo. Infatti, se anche il vertice cui sono adiacenti ricade all'interno dello spazio assegnato al nodo j -esimo non è detto che lo facciano anche i restanti due vertici.

Tale problema viene ovviato assegnando a ciascun vertice appartenente alla zona d'influenza del nodo j -esimo *soltanto un terzo* dell'area dei triangoli ad esso adiacenti (fig. 5.12).

Sommando le aree associate a ciascun vertice assegnato al nodo j -esimo si ricava quindi la superficie di combustione assegnata a tale nodo.

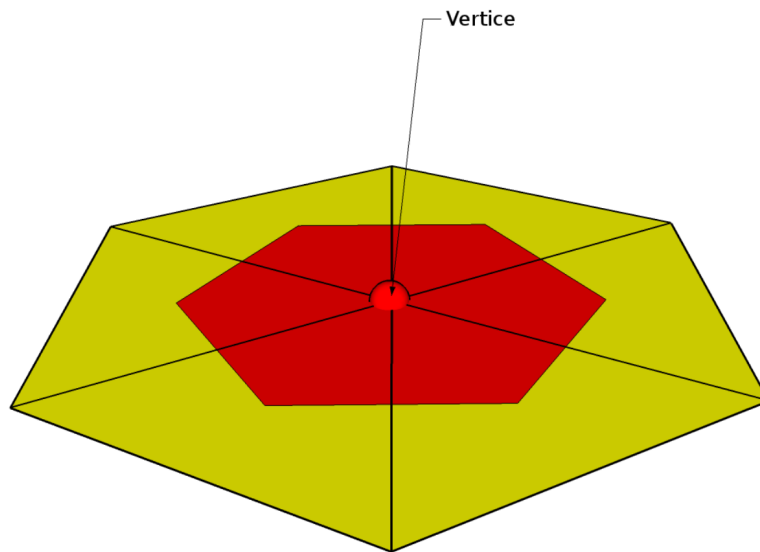


Fig. 5.12: Superficie in rosso: area associata al vertice.

Per quanto riguarda il perimetro di combustione P_b è possibile sfruttare il perimetro del canale rappresentato dalla camera di combustione. Tale perimetro è stato ricavato in sezione 5.2.1. Ricordando che esso è calcolato sul raggio medio del propellente solido *solamente* fintanto che non vengono a scoprirsi protezioni termiche, assoceremo tale valore soltanto ai nodi cui è stata assegnata una *superficie di combustione non nulla*. Qualora un nodo non presenti tale proprietà significa che, in sua corrispondenza, il grano propellente è stato completamente consumato e, pertanto, non vi è perimetro di combustione.

5.2.4 Calcolo della Superficie di Protezioni Termiche Scoperte e Relativo Perimetro

La *superficie esposta* di protezione termica è già stata calcolata in sezione 5.1.1. Va ricordato che, per fare questo, ciascuna regione esposta del profilo del case è stata discretizzata, e ne è stata valutata la superficie mediante la formula della superficie laterale del tronco di cono.

Si consideri quindi la griglia originale (fig. 4.6) e siano i ed $i + 1$, rispettivamente, il nodo antecedente e seguente al j -esimo nodo della griglia dei punti medi.

Al fine di ridistribuire la superficie di protezioni termiche esposte su ogni nodo j -esimo della griglia dei punti medi identificheremo quei nodi della discretizzazione delle regioni esposte del profilo del case compresi tra il nodo i ed $i + 1$ della griglia originale (fig. 5.13). Mediante somma delle superfici

associate a tali nodi, si otterrà la quota parte di superficie di protezione termica esposta assegnata al nodo j -esimo.

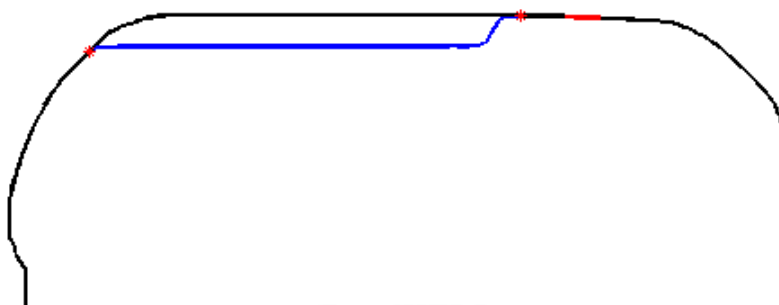


Fig. 5.13: In rosso: regione di protezione termica esposta assegnata al nodo j -esimo.

5.2.5 Perimetro delle Superfici con Attrito

Al fine di ricavare i perimetri P_i che intervengono nella determinazione delle perdite di carico sarà necessario ricavare le superfici esposte del grain non ancora in combustione, delle protezioni termiche esposte, delle pareti d'ugello.

Per fare questo, sarà possibile sfruttare la conoscenza del perimetro idraulico del canale ricavato in sez 5.2.1.

Qualora si decida di utilizzare un modello di propagazione della fiamma per calcolare il momento di accensione di ciascun nodo del grain propellente (cap. 4.4.1) sarà noto quali nodi di griglia sono già in combustione e quali no. In caso contrario, il contributo del propellente non in combustione verrà considerato nullo. Avremo allora che :

- Il perimetro relativo ai nodi di grain non ancora in combustione P_{gr} sarà dato dalla valutazione del perimetro del canale *per i soli nodi cui è associata superficie di combustione, ma che non hanno ancora raggiunto le condizioni di accensione.*
- Il perimetro relativo alle protezioni termiche esposte P_{PT} sarà ricavato, analogamente al punto precedente, dalla valutazione del perimetro del canale *per i soli nodi cui è associata superficie di protezione termica esposta*

- Il perimetro delle pareti d'ugello P_{nozz} , qualora conteggiato, sarà ricavabile dalla geometria dell'ugello (nota).

5.3 Determinazione del Rateo di Combustione

Il modulo balistico dovrà fornire, in uscita al simulatore di regressione, l'informazione sul rateo di combustione da applicare a ciascun vertice della mesh triangolare che rappresenta la geometria della superficie di combustione.

Per fare questo, sarà necessario applicare le relazioni espresse in capitolo 2.5. Tali relazioni verranno applicate in un'apposita *subfunction*, definita *burnrate*.

5.3.1 Rateo di Combustione Teorico

Burnrate dovrà applicare le relazioni esposte in 2.5 a seconda delle informazioni fornite dai modelli balistici.

Si presenteranno due possibili scenari:

1. Il campo fluidodinamico all'interno della camera di combustione è stato calcolato utilizzando il modello 0-D
2. Il campo fluidodinamico all'interno della camera di combustione è stato calcolato utilizzando il modello 1-D.

Qualora sia stato utilizzato il modello 0-D la risoluzione del campo fluidodinamico fornirà informazioni su :

- Pressione media
- Densità media
- Temperatura media
- Proprietà fisiche medie della miscela di gas presente in camera

Manca qualsiasi tipo di informazione sulla distribuzione di velocità. Il sottomodulo potrà quindi ricavare soltanto un rateo di combustione *medio*, invariante lungo l'asse motore, senza poter considerare l'effetto locale della combustione erosiva. Verrà quindi applicata la semplice legge di Saint Robert (2.20).

Qualora venga utilizzato il modello 1-D avremo anche informazioni sul campo di velocità. Si otterrà quindi una distribuzione del rateo di combustione lungo l'asse motore funzione anche dell'effetto della combustione erosiva locale. Per fare questo, si utilizzeranno le formulazioni di Lenoir e Robillard o il modello SPP (2.5.2).

Il rateo di combustione così ricavato verrà calcolato in funzione delle caratteristiche fluidodinamiche vigenti su ciascun nodo della griglia dei punti

medi. Il suo valore su ciascun vertice della mesh triangolare verrà ricavato per interpolazione.

5.3.2 Rateo di Combustione Reale

All'interno di *burnrate* verranno inoltre applicati i fattori correttivi presentati nel capitolo 4.5. Noti l'*HUMP* e lo *Scale Factor* non si dovrà far altro che moltiplicare il rateo di combustione medio o locale per il loro valore. In particolare, bisognerà considerare il valore dell'*HUMP* allo spessore di *web* in cui ci si trova.

Qualora si possieda una conoscenza derivante da studi reologici del grain riguardo la concentrazione delle varie componenti dello stesso in funzione dello spessore del web, sarà possibile ignorare tali fattori sostituendoli con una mappa amplificativa basata su tale conoscenza.

Qualora si possieda una stima derivante da esperienza sperimentale o altre simulazioni sull'effetto della combustione erosiva nella zona d'impingement dovuta all'accenditore, sarà possibile applicare un fattore d'amplificazione del rateo di combustione sui soli nodi interessati dall'impingement (es: fig 5.14).

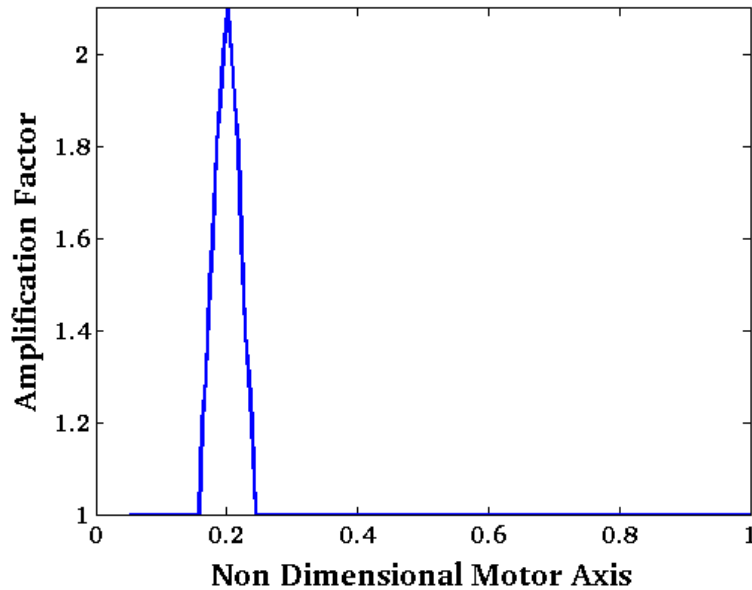


Fig. 5.14: Esempio di distribuzione di fattori di amplificazione dovuti alla combustione erosiva dell'accenditore lungo l'asse motore.

L'impiego di quest'ultima categoria di fattori di combustione, tipici per data tipologia d'accenditore e suo posizionamento, permette di semplificare la valutazione dell'influenza dell'accenditore sul rateo di combustione locale, permettendo di evitare la formulazione esposta in 4.4.2.

Capitolo 6

Validazione ed Applicazione

Nel presente capitolo si valideranno il modello 0-D ed 1-D. Nel fare questo, si applicherà il simulatore completo ad un caso reale: lo *Zefiro 9*.

Per quanto riguarda il modello 0-D sono disponibili, fornite da AVIO-BPD, misurazioni sperimentali riguardanti una configurazione *BARIA* e lo *Zefiro 9*. Tali configurazioni sono ottimali per l'applicazione di un modello 0-D in quanto caratterizzate da una perdita di pressione fra testa e ugello trascurabile, bassi rapporti $\frac{L}{D_h}$ ed elevati rapporti $\frac{A}{A^*}$. Si avranno quindi basse velocità all'interno della camera di combustione e si potrà, pertanto, trascurare l'effetto della combustione erosiva.

È importante sottolineare il fatto che l'interesse di AVIO-BPD per lo studio dello *Zefiro 9* ha concentrato la nostra attenzione sul modello 0-D. In un'ottica di studio statistico del motore, la velocità d'esecuzione delle simulazioni è un fattore di primaria importanza. Congiuntamente all'ottima applicabilità del modello 0-D al caso di studio, questo fatto ci ha spinto a tralasciare l'applicazione del modello 1-D al motore *Zefiro 9*.

Il modello 1-D verrà pertanto validato mediante l'analisi qualitativa dei risultati ottenuti dalla sua applicazione ad un condotto di sezione costante, ad un condotto di sezione variabile, ad un razzo a propellente solido caratterizzato da geometria di camera cilindrica, ad un razzo con geometria di camera ibrida cilindro-stella.

Mancando dati sperimentali con cui verificare i risultati, verrà utilizzato un raffronto con l'ormai validato modello 0-D. Per fare questo si trascurerà l'apporto della combustione erosiva, termine non valutabile dal modello 0-D.

Si mostrerà inoltre un'applicazione del modello 1-D al fine di determinare la propagazione dell'accensione del propellente in un generico motore a propellente solido con geometria di camera cilindrica.

6.1 Validazione del Modello 0-D Mediante Applicazione ad una Baria

Al fine di validare il modello 0-D verificheremo, innanzi tutto, i risultati da esso fornito quando applicato ad una *BARIA* (figure 4.7 e 6.1).

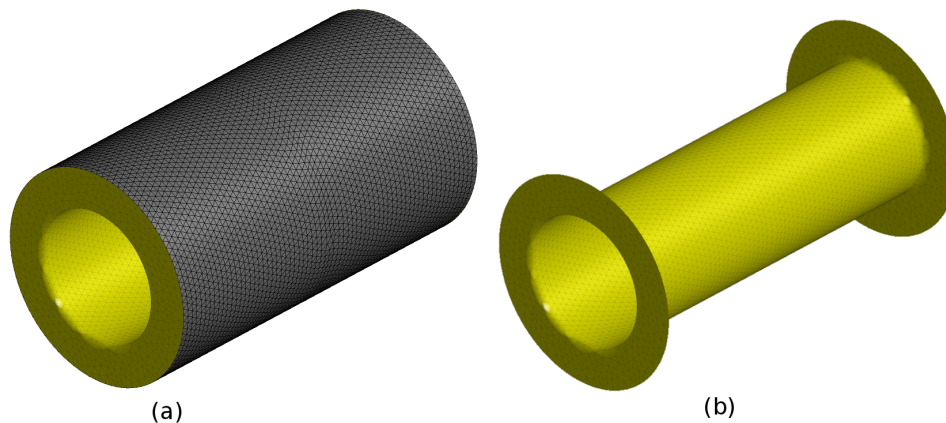


Fig. 6.1: Classica geometria di una *BARIA* (a) e relativa superficie di combustione (b)

Per tale motore sono forniti da *AVIO-BPD* gli andamenti sperimentali della pressione di camera. È inoltre fornito il diametro di gola dell'ugello.

6.1.1 Analisi Qualitativa del Problema

Il motore *BARIA* è un motore per *firing tests* realizzato con lo scopo di misurare l'andamento del rateo di combustione in funzione della pressione, così da ricavare il coefficiente a e l'esponente n che compaiono nella formula di Saint Robert (cap. 2.5.1, relazione 2.20):

$$r_b = aP_0^n$$

Per fare questo, la geometria della superficie di combustione del grain della *BARIA* è opportunamente sagomata al fine di ottenere, durante la fase di *Quasi Steady State*, una distribuzione di pressione il più possibile costante. Il valore di pressione al quale si attesterà il *plateau* è regolato mediante la selezione delle dimensioni di gola dell'ugello.

Come esposto in capitolo 5.1.1 il modello balistico 0-D richiede in ingresso dal simulatore di regressione la derivata temporale del volume \dot{V} e la superficie di protezioni termiche esposte S_{PT} .

Essendo la fase *Quasi Steady State* di durata predominante rispetto all'*Ignition Transient* ed il *Tail Off* potremo trascurare gli effetti dell'accenditore e dell'esposizione delle protezioni termiche. Tanto più che l'aderenza del modello ai dati sperimentali in queste due ultime fasi non è d'interesse.

Tale ipotesi risulta particolarmente vera se si considerano le piccole dimensioni del motore e, quindi, delle protezioni termiche stesse.

6.1.2 Modello di Regressione

La semplice geometria della superficie di combustione evidenziata in figura 6.1 (b) presenta una regressione a *falde parallele*, facilmente valutabile dal punto di vista analitico. Questo permette di svincolarci dal simulatore di regressione, così da poter validare il modello balistico senza rischiare di essere influenzati da effetti di modelli esterni.

La superficie di combustione di figura 6.1 può essere divisa in due superfici più semplici:

- Una superficie centrale cilindrica
- Due corone circolari laterali

Ciascuna di queste superfici regredirà con una velocità pari al *rateo di combustione* (cap. 2.5). Relativamente a tale velocità potremo trascurare gli effetti della combustione erosiva, viste le piccole dimensioni della *BARIA*.

La superficie cilindrica sarà data da:

$$S_{cil} = 2\pi (R_i + r_b t_i) (L - 2r_b t_i) \quad (6.1)$$

dove R_i è il raggio interno della camera di combustione, r_b è il rateo di combustione, L la lunghezza della camera di combustione, t_i il tempo trascorso dall'accensione della *BARIA*.

Per quanto riguarda la superficie delle corone circolari avremo:

$$S_{lat} = 2\pi (R_e^2 - (R_i + r_b t_i)^2) \quad (6.2)$$

\dot{V} sarà invece data da:

$$\frac{dV}{dt} = (S_{cil} + S_{lat}) r_b \quad (6.3)$$

L'andamento della regressione così calcolata è riportato in figura 6.2.

6.1.3 Risultati

Vengono di seguito riportati gli andamenti sperimentali e calcolati della pressione di camera in funzione del tempo (fig. 6.3).

È possibile notare come i risultati del modello 0-D presentino, per questo motore, un'ottima corrispondenza con i dati sperimentali.

Possiamo notare che l'andamento qualitativo della curva di pressione rispecchia le nostre aspettative: la fase di *Quasi Steady State* è, infatti, caratterizzata da un *plateau* di pressione. È possibile notare che anche il

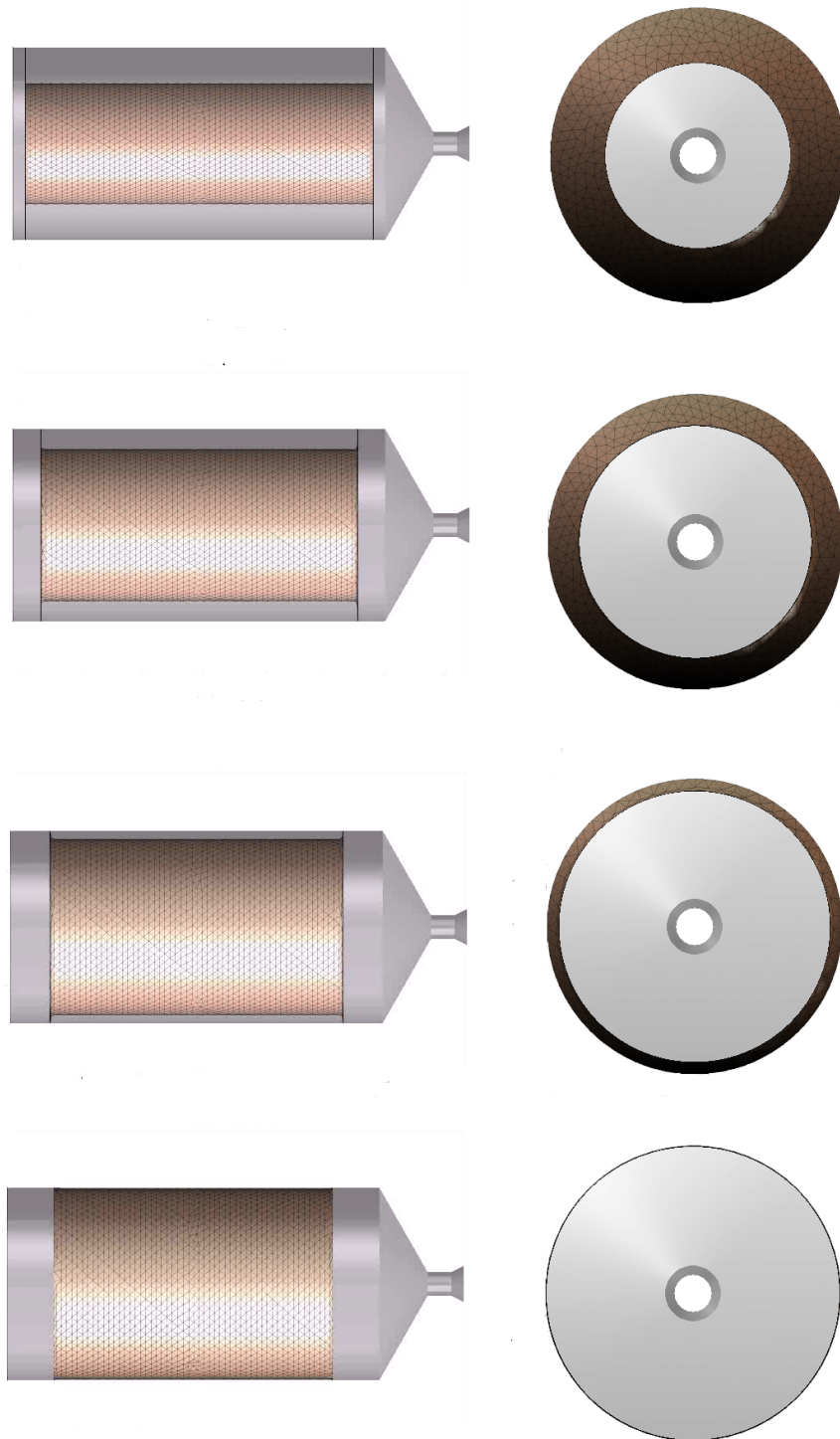


Fig. 6.2: Dall'alto in basso: evoluzione della regressione della superficie di combustione di una *BARIA*

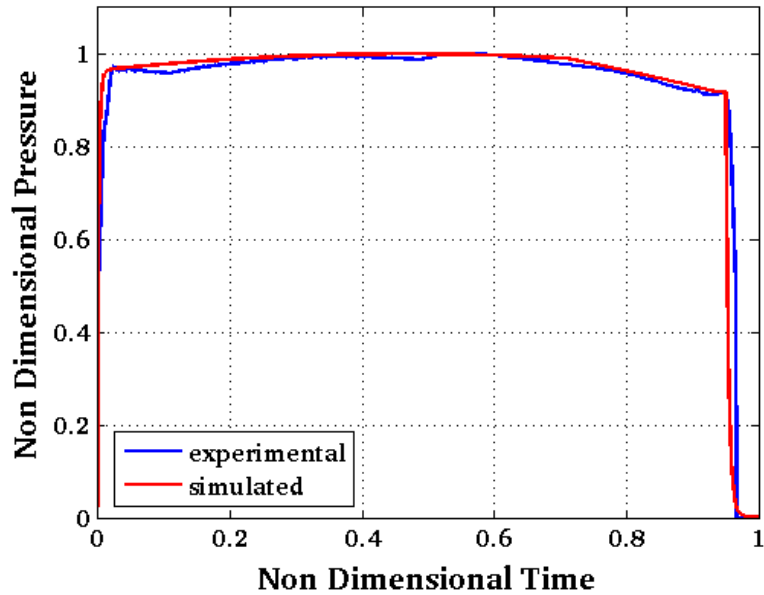


Fig. 6.3: In blu : andamento sperimentale della pressione di camera. In rosso: andamento della pressione di camera ricavato mediante il modello 0-D

calo di pressione nella fase finale del *Quasi Steady State* è rispettato. Tale calo non è infatti dovuto ad una non idealità della regressione della superficie di combustione, cosa che lo avrebbe reso non predicibile dal nostro modello di regressione ideale, bensì dal consumo della sezione di gola d'ugello.

La discrepanza nella fase di *Tail Off* non è inoltre dovuta tanto all'ipotesi semplificativa che ci ha portato a trascurare l'influenza delle protezioni termiche esposte quanto al fatto che, mentre nel nostro modello di regressione la superficie di combustione è stata completamente consumata entro la fine del *Quasi Steady State*, nella realtà possono esservi ancora presenti lembi di superficie in combustione. Questo è ovviamente dovuto al fatto che, anche per un motore dalla semplice geometria come la *BARIA* in esame, la regressione della superficie non è mai pienamente ideale.

La stessa considerazione giustifica le discrepanze in corrispondenza del *Transitorio d'Accensione*.

6.2 Applicazione del Modello 0-D allo *Zefiro 9*

Oggetto principale della nostra collaborazione con AVIO-BPD è lo studio qualitativo del processo di combustione del grain propellente del motore *Zefiro 9*, con particolare riferimento alle anisotropie di combustione che concorrono a determinare il fattore correttivo *HUMP*. Scopo finale è lo svincolarsi da tale fattore e dagli errori che esso comporta.

Per fare questo, l'azienda ha messo a disposizione:

- Misurazioni sperimentali della curva di pressione in camera di combustione
- Andamento del diametro di gola dell'ugello nel tempo
- Proprietà fisiche dei gas d'accenditore. Non sono tuttavia noti i parametri necessari alla valutazione dell'effetto delle protezioni termiche scoperte. Si utilizzeranno pertanto valori di riferimento presenti in letteratura.
- Geometria del grain propellente del motore, nonché del case contenitivo.
- Fattori correttivi *Scale Factor* ed *HUMP*

Le caratteristiche geometriche del motore *Zefiro 9* lo rendono un ottimo candidato per la validazione del nostro modello 0-D. Tale motore presenta infatti una caduta di pressione fra testa e ugello trascurabile, con conseguente effetto della combustione erosiva trascurabile. Ci si aspetta pertanto una buona previsione numerica della curva di pressione media da parte del modello 0-D.

Il motore *Zefiro 9* presenta una geometria del grain propellente costituita da un primo tratto cilindrico, un secondo tratto cilindrico divergente, un terzo tratto a stella. Tale geometria viene riportata in figura 6.4.

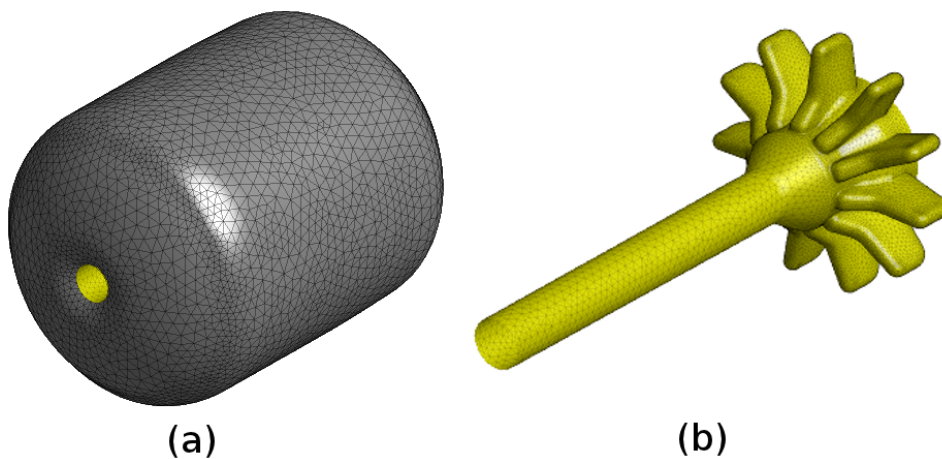


Fig. 6.4: Grain propellente di *Zefiro 9* (a) e relativa superficie di combustione (b)

6.2.1 Analisi Qualitativa del Problema

Rispetto al caso precedentemente affrontato, il motore ora in esame presenta una complicazione sicuramente superiore.

L'effetto dell'accenditore non sarà più trascurabile, ed andrà valutato in ogni suo aspetto: dall'effetto sul rateo di combustione locale, che può essere preso in considerazione grazie a tabelle e grafici del tipo presentato in figura 5.3.2, passando per l'apporto di massa vero e proprio fino alla valutazione del contributo entalpico, così come mostrato in capito 4.1.5.

L'effetto dell'addizione di massa delle protezioni termiche risulta invece essere del tutto secondario, così come quello della perdita di calore attraverso le pareti scoperte (anche se in misura minore). Tali contributi possono considerarsi sensibili solo nell'ultima parte del *Quasi Steady State* e durante la fase di *Tail Off*. Nonostante il modello 0-D sia stato calibrato per uno studio completo di tale contributo, la mancanza di informazioni esaustive ne rende l'analisi approssimativa. Per l'attuale verifica non considereremo la valutazione di tale effetto una priorità.

Al fine di validare il modello è infatti indispensabile raggiungere una buona corrispondenza fra misurazioni sperimentali e previsioni in quella che è la fase di *Quasi Steady State*. È proprio tale fase che dà ragione della validità delle previsioni del simulatore di regressione e dell'interfaccia fra tale simulatore ed il modulo balistico.

Analizzando la geometria del grano propellente, possiamo innanzi tutto aspettarci un andamento del tipo mostrato in figura 2.10.

Si avrà, innanzi tutto, un incremento iniziale di pressione dovuto alla componente con geometria a stella, la quale apporterà un contributo preponderante nei primi momenti della combustione. Il motivo per cui questo avviene è intuibile analizzando il rapporto fra il perimetro interno della stella (in combustione) ed il perimetro di una sezione circolare avente raggio pari alla massima distanza della superficie della stella dall'asse motore (fig 6.5).

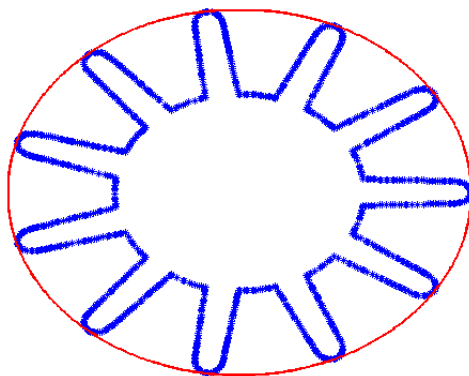


Fig. 6.5: Raffronto tra perimetro di una sezione a stella e perimetro della relativa sezione circolare

Risulta evidente come il perimetro di combustione della stella sia nettamente superiore. Esso determinerà pertanto un apporto massico preponderante rispetto alla zona con sezione circolare, visto anche il piccolo raggio che la caratterizza.

La regressione della zona a stella tenderà, nel tempo, a renderla sempre più prossima ad una geometria circolare. Questo determinerà una diminuzione del rapporto tra perimetro di combustione ed area di porta del canale, causando una diminuzione di pressione.

In seguito, la geometria sarà prossima ad essere caratterizzata da una sezione circolare variabile lungo l'asse motore. Ci si aspetta quindi una seconda parte del *Quasi Steady State* caratterizzata da un andamento della pressione dovuto ad una geometria cilindrica, del tipo mostrato in figura 2.10.

Infine, ci si aspetta un picco di pressione, di brevissima durata, nei primi istanti dall'accensione, dovuto all'influenza dell'apporto massico ed entalpico dell'accenditore.

6.2.2 Regressione della Superficie di Combustione

Il problema in esame presenta una geometria della superficie di combustione complessa, non analizzabile mediante semplici metodi analitici.

Verrà pertanto utilizzata l'interfaccia con il simulatore di regressione anisotropo sviluppato presso il Laboratorio di Propulsione e Macchine. Questo ci permetterà di validare sia l'interfaccia, sia tale simulatore.

L'andamento della regressione della geometria viene riportato in figura 6.6.

6.2.3 Risultati

In figura 6.7 vengono riportate sia la previsione della curva di pressione di camera ottenuta mediante applicazione del modello 0-D, sia la curva di pressione sperimentale fornita da AVIO-BPD.

L'analisi del grafico riporta una buona corrispondenza fra andamento sperimentale e simulato, soprattutto per quanto riguarda il transitorio d'accensione. Invece, durante la prima e l'ultima fase del *Quasi Steady State* si hanno alcune discrepanze.

La prima di queste discrepanze è da associare al raggiungimento della superficie del case contenitivo da parte degli estremi della zona con sezione a stella del grain propellente. In corrispondenza di tale evento, si ha una forte applicazione delle tecniche di *remeshing* all'interno del simulatore di regressione (3.5). Questo determina un'influenza sulla curva di pressione caratterizzata da una particolare presenza di rumore ed un discostarsi della stessa da quella sperimentale (fig. 6.8). Tale discostarsi sarà, in ultima analisi, determinato dall'erronea valutazione locale della superficie di

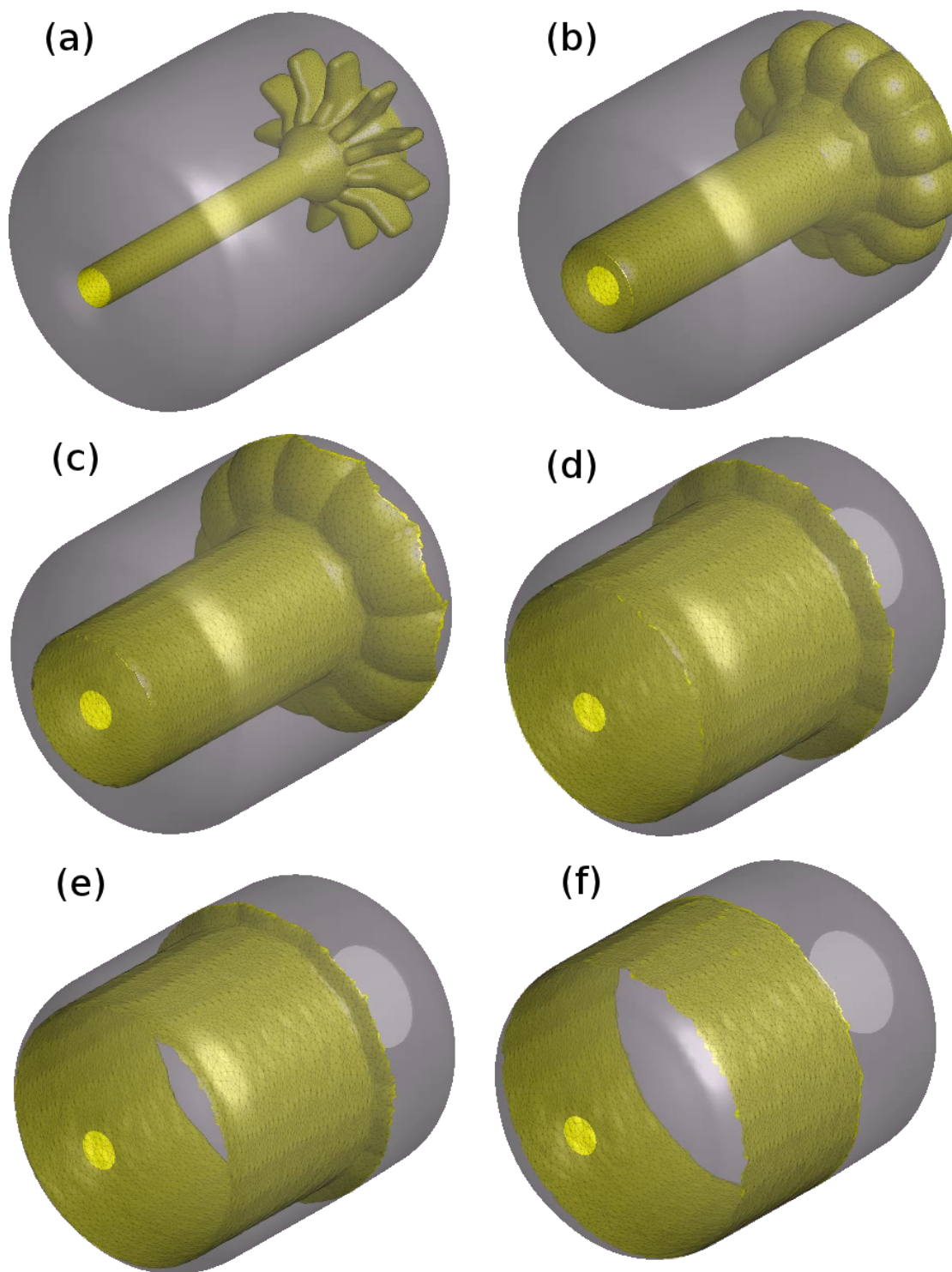


Fig. 6.6: Evoluzione della superficie di combustione dello *Zefiro 9*

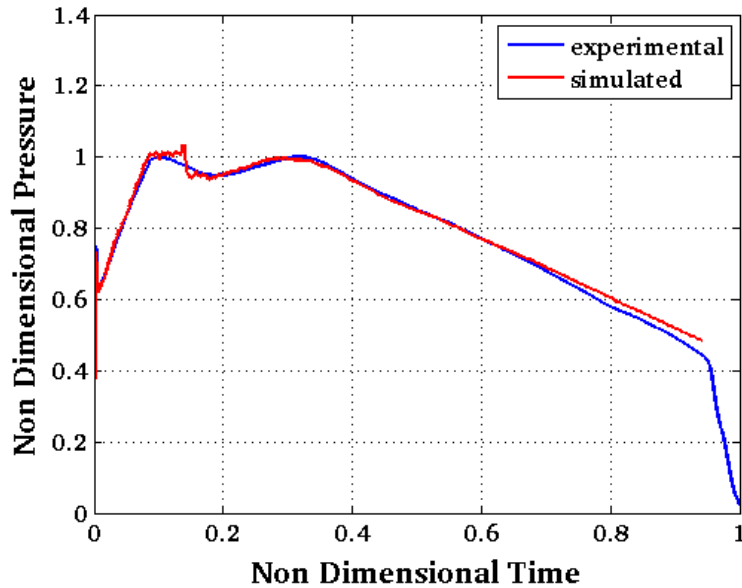


Fig. 6.7: In blu : andamento sperimentale della pressione di camera. In rosso: andamento della pressione di camera ricavato mediante il modello 0-D

combustione da parte del simulatore di regressione e, conseguentemente, del termine \dot{V} in ingresso al modello 0-D.

La risoluzione di tale problema è al momento in fase di attuazione sarà ottenuta mediante raffinamento delle tecniche di *remeshing* ed aumento del numero di triangoli utilizzati nella rappresentazione della geometria.

Per quanto riguarda il discostarsi della curva simulata da quella sperimentale nell'ultima fase del *Quasi Steady State* è ragionevole ritenere che sia dovuto alla non corretta caratterizzazione del flusso termico attraverso la superficie di protezioni termiche esposte. Come già accennato, i dati utilizzati per la caratterizzazione di tale contributo non sono specifici del motore in esame, ma sono stati ricavati da letteratura. Va inoltre specificato che tale discostarsi rientra nel range imputabile ad una non corretta caratterizzazione dell'*HUMP* locale.

Complessivamente, si reputano i risultati ottenuti soddisfacenti.

6.3 Validazione del Modello 1-D Mediante Considerazioni Qualitative

Come già osservato, le equazioni 4.52 rappresentano un *sistema di equazioni alle derivate parziali* di tipo *iperbolico*. Senza addentrarci nello studio delle caratteristiche, per il quale si rimanda a [25], possiamo dire che ci aspetteremo una soluzione di tipo ad onda. Questo significa che, applicato un

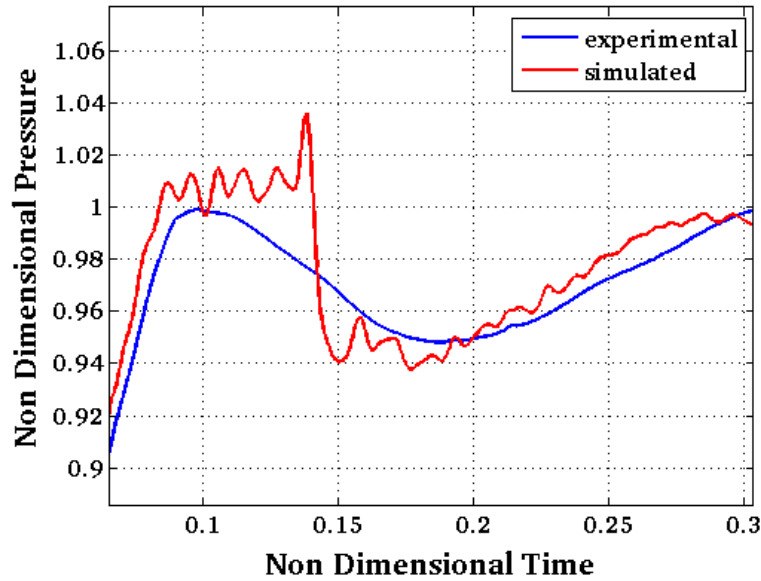


Fig. 6.8: Dettaglio della zona influenzata dal remeshing

disturbo in un punto del campo di studio, allora non tutti i punti di tale campo percepiranno l'effetto del disturbo istantaneamente. Il disturbo presenterà, pertanto, una data velocità di propagazione.

Applicando quindi un disturbo nella sezione d'ingresso di un condotto a sezione cilindrica costante, potremo verificare se la soluzione ottenuta è, appunto, un'onda. Il risultato di questa prova viene riportato in figura 6.9 e, come è evidente, è costituito proprio da un'onda.

Al fine di valutare la bontà delle soluzioni fornite dal modello 1-D relativamente alla sua applicazione sia a condotti di sezione variabile che a condotti di sezione costante, si impone un campo di moto subsonico assegnando appropriate condizioni di inlet sul primo nodo e di outlet sull'ultimo:

- pressione maggiore di quella ambiente e velocità d'ingresso sul primo nodo
- pressione pari a quella ambiente sull'ultimo nodo

Sarà quindi possibile considerare il flusso come incomprimibile. A questo punto, avremo:

$$\rho_1 A_1 u_1 = \rho_n A_n u_n \quad (6.4)$$

$$u_n = u_1 \frac{A_1}{A_n} \quad (6.5)$$

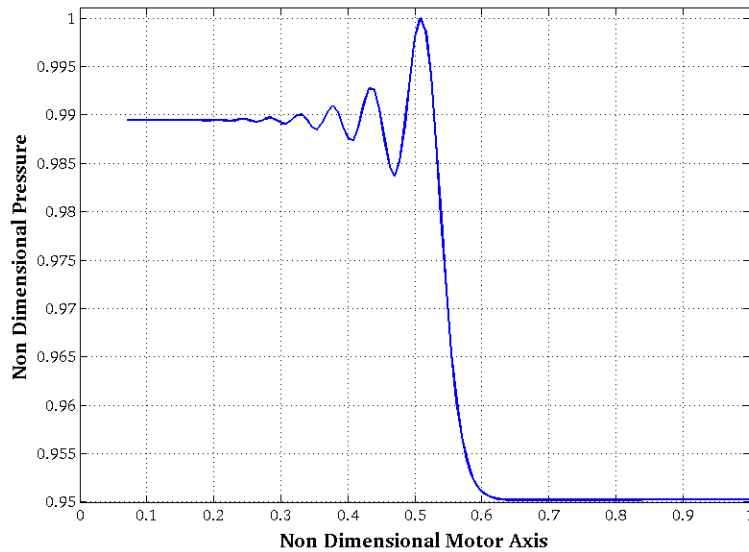


Fig. 6.9: Propagazione del disturbo

Pertanto, per sezione costante, avremo $u_n = u_1$. Per un condotto divergente la distribuzione di velocità dovrebbe invece tendere ad una distribuzione lineare lungo l'asse del condotto, con velocità sull'ultimo nodo pari a u_n .

Nelle figure 6.10 e 6.11 si riportano gli andamenti di velocità lungo l'asse del condotto per questi due casi. Si avranno scarti tra la velocità finale teorica e quella simulata inferiori all' 1.2%.

Si può quindi affermare che gli andamenti evidenziati dal simulatore presentano una buona corrispondenza con quelli attesi, così come i risultati di prima approssimazione.

6.4 Validazione del Modello 1-D Mediante Applicazione a Geometrie Cilindriche

Al fine di validare il modello 1-D ne studieremo l'applicazione ad una semplice geometria cilindrica. Non essendo disponibili valori di riferimento sperimentali raffronteremo i risultati con le previsioni ottenute applicando il modello 0-D precedentemente validato.

Non si è scelto un motore di tipo *BARIA* in quanto esso presenta due forti discontinuità nella sezione del condotto rappresentato dalla camera di combustione (6.1). Questo viola l'ipotesi 5 di capitolo 4.2, determinando un'inapplicabilità del modello 1-D.

Nonostante esistano formule correttive per tenere in considerazione una variazione discontinua di area di porta, esse non sono state implementate in

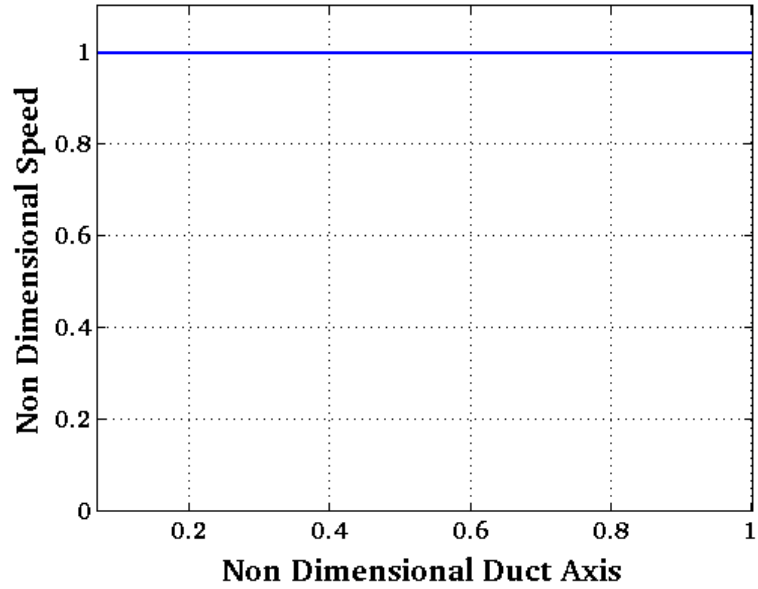


Fig. 6.10: Distribuzione di velocità in un condotto a sezione costante

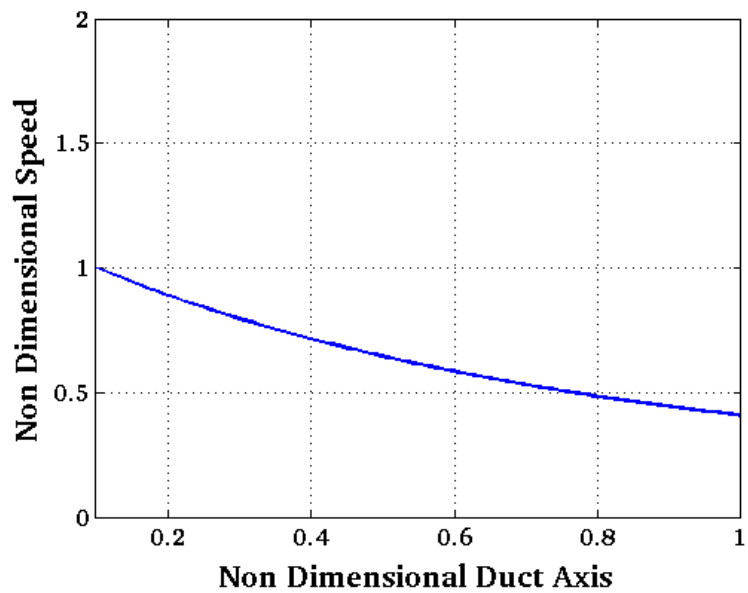


Fig. 6.11: Distribuzione di velocità in un condotto a sezione divergente

quanto la *BARIA* è l'unico motore d'interesse a presentare dette discontinuità, ed essa è già più che egregiamente simulata mediante l'uso di modelli 0-D. Bisogna inoltre evidenziare che, viste le piccole dimensioni di una *BARIA*, la griglia di discretizzazione spaziale dovrebbe essere tanto fitta da rendere l'applicazione di un modello 1-D controproducente dal punto di vista computazionale.

Si è scelto di applicare lo studio ad una geometria cilindrica semplice per i seguenti motivi:

- La regressione di detta superficie è valutabile analiticamente. Questo ci permette di svincolare il modello 1-D da possibili influenze esterne dovute al simulatore di regressione
- L'andamento qualitativo della pressione di camera di una geometria cilindrica è tipico e facilmente riconoscibile

Considereremo, inoltre, una geometria di piccole dimensioni al fine di poter valutare l'influenza della dimensione della griglia spaziale sui risultati forniti dal modello 1-D.

Questo ci porta, ancora una volta, ad ipotizzare trascurabili gli effetti dell'adduzione di massa da parte delle protezioni termiche e del calore perso attraverso le pareti inerti esposte.

6.4.1 Modello di Regressione e Definizione degli Input

Un grain propellente caratterizzato da una geometria cilindrica semplice presenta un'unica superficie di combustione. Tale superficie è analoga alla superficie cilindrica vista per la baria in sezione 6.1.2.

Pertanto, avremo:

$$S_{cil} = 2\pi (R_i + r_b t_i) L \quad (6.6)$$

dove R_i è il raggio interno della camera di combustione, r_b è il rateo di combustione, L la lunghezza della camera di combustione, t_i il tempo trascorso dall'accensione del motore (fig. 6.12).

Non essendoci combustione sulle corone circolari d'estremità, la derivata del volume di camera nel tempo sarà semplicemente:

$$\frac{dV}{dt} = S_{cil} r_b \quad (6.7)$$

Possiamo quindi ottenere la distribuzione di pressione nel tempo mediante il modello 0-D.

Per ottenere i dati necessari al modello 1-D utilizzeremo diverse griglie di calcolo, caratterizzate da Δx decrescente. L'asse motore presenta infatti una lunghezza molto piccola e, pertanto, la simulazione sarà molto sensibile all'intervallo di discretizzazione spaziale scelto. Oltre che validare il modello,

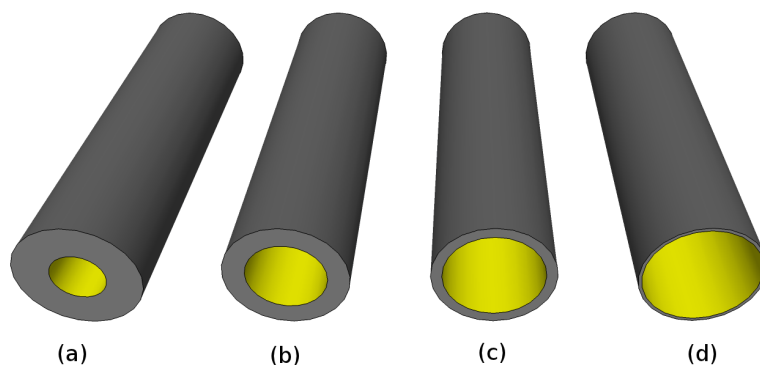


Fig. 6.12: Evoluzione della regressione della superficie di combustione nel tempo

scopo della prova è ottenere una conoscenza qualitativa dell'andamento del risultato con il variare dell'intervallo di discretizzazione.

Una volta impostata la griglia tutti i dati necessari all'applicazione del modello 1-D verranno ricavati come mostrato in capitolo 5.2. L'unica differenza è che al posto del simulatore di regressione verrà utilizzata la semplice formula sopra esposta (6.6).

6.4.2 Risultati

Vengono riportati, nelle figure 6.13 e 6.13, i risultati della prova.

La figura 6.13 riporta i risultati normalizzati rispetto a valori riferiti a ciascuna curva, mentre la figura 6.14 riporta i risultati normalizzati rispetto a valori relativi alla curva di riferimento. Questo ci permette di analizzare sia l'andamento qualitativo delle curve di pressione che l'andamento dei valori delle stesse.

Da 6.13 risulta evidente come l'andamento qualitativo delle curve al variare di Δx sia comunque analogo a quello della curva di riferimento, che viene a sovrapporsi perfettamente. Inoltre, si verifica che l'andamento ottenuto è tipico di geometrie cilindriche caratterizzate da tempi di combustione molto brevi.

Da 6.14 risulta invece che, nonostante l'andamento sia analogo per tutti i Δx utilizzati, i valori delle curve differiscono dai valori di riferimento. Si evince che i risultati tenderanno sempre più a quelli del modello 0-D mano a mano che si infittisce la griglia di calcolo, fino a giungere a convergenza per Dx pari all'1% della lunghezza del motore.

È quindi verificato il fatto che, per griglie adeguate alla geometria in esame, il modello 1-D converge al modello 0-D.

Per geometrie molto piccole, gli andamenti visti in figura 6.14 impongono intervalli di discretizzazione estremamente fini. In base alla condizione

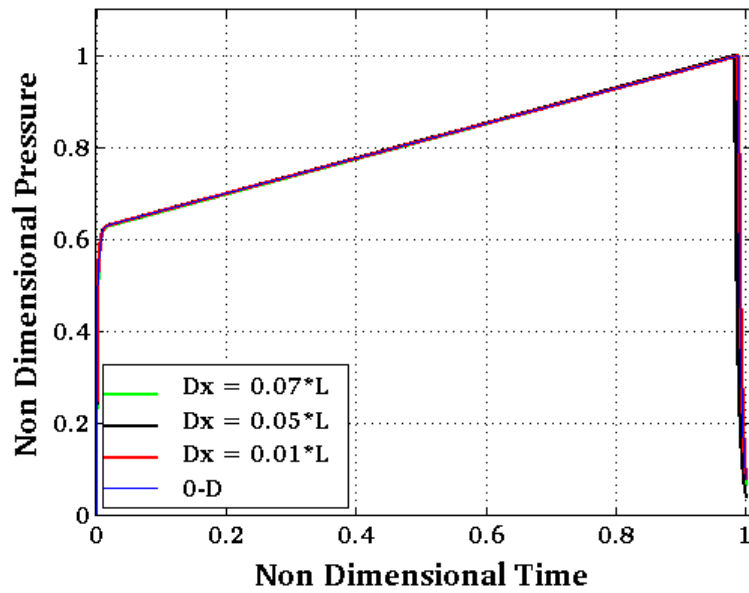


Fig. 6.13: Curve di pressione normalizzate per valori relativi a ciascuna curva. Si evince che l'andamento qualitativo delle curve è identico a quello della curva di riferimento

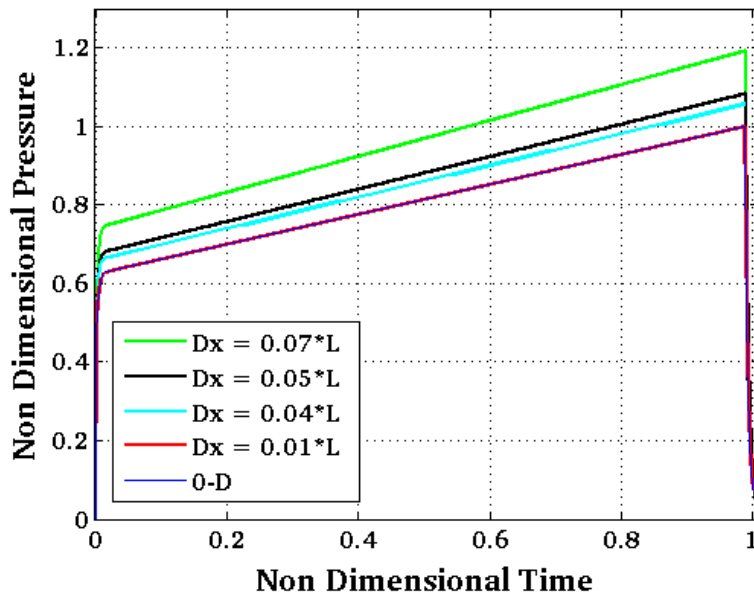


Fig. 6.14: Curve di pressione normalizzate per valori relativi alla sola curva di riferimento. Si evidenzia la convergenza delle curve alla curva di riferimento al diminuire di Δx . I valori combaciano per $\Delta x = 0.01L$.

di stabilità CFL esposta in capitolo 4.2, questo impone intervalli di discretizzazione temporale notevolmente piccoli e, quindi, costi computazionali elevati.

Qualora l'effetto della combustione erosiva fosse trascurabile, converrebbe in tali casi utilizzare il modello 0-D.

Va evidenziato il fatto che non si è, per ora, tenuta in considerazione la combustione erosiva nel determinare i grafici 6.13 e 6.14. Questo in quanto, altrimenti, non si sarebbero potuti raffrontare i risultati ottenuti con il modello 1-D a quelli ottenuti con il modello 0-D, incapace di valutare tale contributo.

Viene quindi naturale chiedersi se il modello 1-D sarebbe effettivamente in grado di valutare tale combustione erosiva. Ricordando quanto riportato in cap. 2.5.2 l'unica informazione che il modello deve fornire alla subfunction *burnrate* (cap. 5.3) al fine di valutare detto contributo è la distribuzione di velocità lungo l'asse motore.

Una geometria cilindrica di grain propellente avente le dimensioni di quella studiata dovrebbe presentare una caduta di pressione sensibile tra sezione di testa e sezione d'ingresso ugello. Questo equivale a dire che il flusso all'interno della camera di combustione accelererà percorrendo l'asse motore. Possiamo quindi verificare che la distribuzione di pressione rispetti tale andamento.

Come mostrato in figura 6.15 il modello riproduce esattamente tale andamento, indicando un'idoneità a determinare l'aumento di velocità lungo l'asse e, conseguentemente, il contributo della *combustione erosiva* sul rateo di combustione totale.

6.5 Applicazione del Modello 1-D ad una Geometria di Riferimento Ibrida

Applicheremo ora il modello 1-D ad una geometria di riferimento di tipo ibrido cilindro-stella. Qualitativamente, tale geometria è del tutto analoga a quella dello *Zefiro 9* (fig. 6.4).

Si tratta tuttavia una semplice geometria di riferimento, utilizzata per test numerici: non è una geometria reale. Inoltre, tale geometria è caratterizzata da un forte influenza delle funzioni di *remeshing* (cap. 3.5) e da conseguenti rumori e spikes sui grafici di pressione e di variazioni di volume nel tempo.

Tali spikes possono essere utilizzati come markers.

6.5.1 Scopo del Test

Come abbiamo visto nei capitoli 5.1.1 e 5.2 il canale relativo ad una sezione a stella è studiato rapportandosi al raggio medio dei punti che lo compongono.

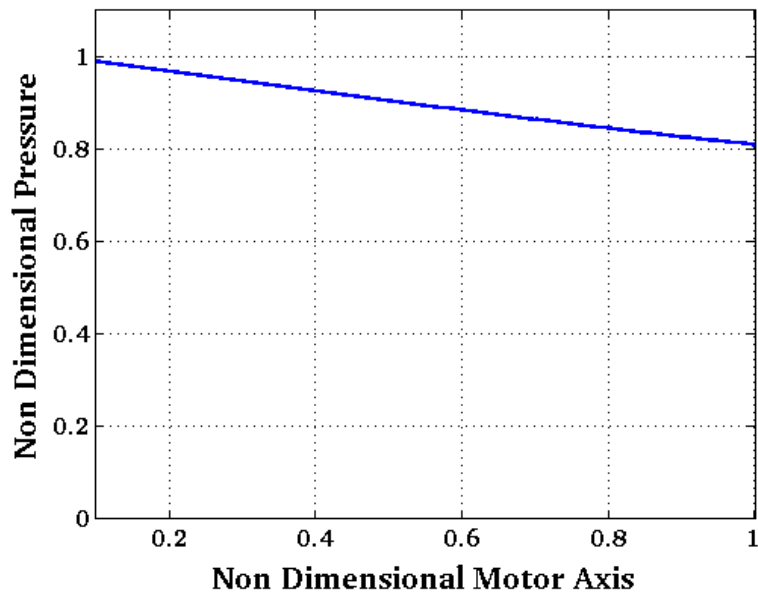


Fig. 6.15: Andamento della distribuzione di pressione lungo l'asse motore. Si denota un chiaro calo di pressione tra sezione di testa e sezione d'ingresso ugello. Tale andamento è compatibile con l'andamento atteso per la geometria di studio

Questa approssimazione viene utilizzata sia per valutare il diametro idraulico utilizzato nella relazione di *Dittus-Belter* (4.26) che per valutare il perimetro di combustione ed i raggi medi del condotto rappresentato dalla camera di combustione.

Risulta evidente come sarebbe molto più efficace utilizzare la geometria dei punti della sezione vera e propria. Tuttavia si pone un problema: i punti ottenuti nel sezionare la mesh triangolare che rappresenta la superficie di combustione rappresentano una *nuvola di punti non ordinati*. Non sono quindi organizzati in un poligono chiuso. Sviluppare un algoritmo efficiente in grado di organizzare i punti di una sezione generica, anche molto complessa, rappresenta un problema di non semplice soluzione. È infatti un argomento di ricerca attuale nell'ambito di studio della *Computer Graphics*.

Questo delucida il motivo per cui si è deciso di utilizzare l'approssimazione del raggio medio.

Come abbiamo visto, tale approssimazione è considerabile accettabile nel valutare il coefficiente di scambio termico convettivo e nello studio di geometrie di camera riconducibili a sezioni cilindriche. Non abbiamo tuttavia ancora verificato l'applicabilità di tale semplificazione per quanto riguarda lo studio di sezioni a stella.

6.5.2 Analisi dei Risultati

In figura 6.16 vengono riportati i risultati della prova.

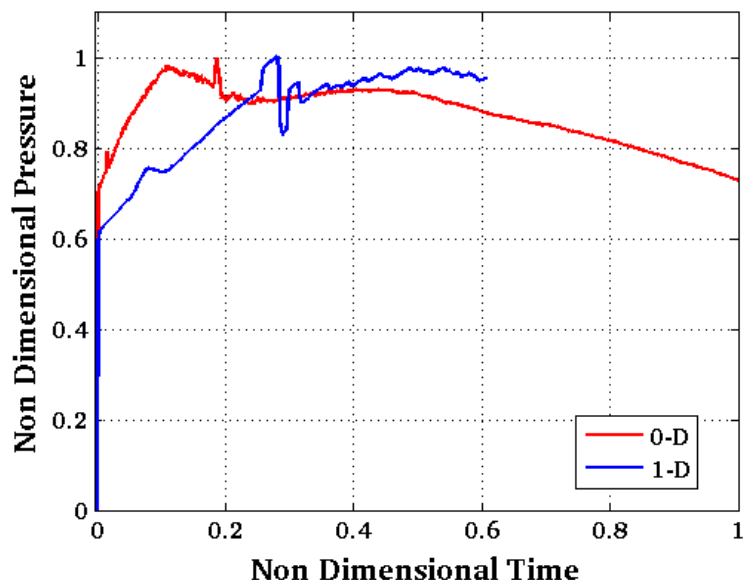


Fig. 6.16: Confronto tra le previsioni del modello 0-D e quelle del modello 1-D

Risulta subito evidente come non vi sia affatto una buona corrispondenza tra il modello 0-D ed il modello 1-D.

Si possono notare le seguenti sostanziali differenze:

1. Notevole sottostima della pressione di camera nella prima parte del *Quasi Steady State*, seguita da una sovrastima.
2. Presenza di due forti oscillazioni del valore di pressione.

Per quanto riguarda il punto 1, esso è facilmente spiegabile. Come accennato precedentemente e mostrato in figura 6.5 stimare il perimetro di una sezione a stella con il perimetro di una circonferenza porta inevitabilmente ad una sottostima. Questo è particolarmente vero nel caso attuale, in cui la circonferenza utilizzata per la stima è data dal raggio medio della sezione a stella (figura 6.17)

Considerando che il perimetro di combustione è l'unico parametro di input nel modello 0-D che dà ragione dell'adduzione di massa dovuta alla combustione del propellente, ne segue inevitabilmente una forte sottostima.

Inoltre, è possibile notare in figura 6.16 come l'andamento di pressione ottenuto con il modello 1-D tenda a seguire l'andamento qualitativo di una camera di combustione di sezione circolare (cap 2.10). Anche questo si può considerare inevitabile, visto che la geometria della sezione del condotto

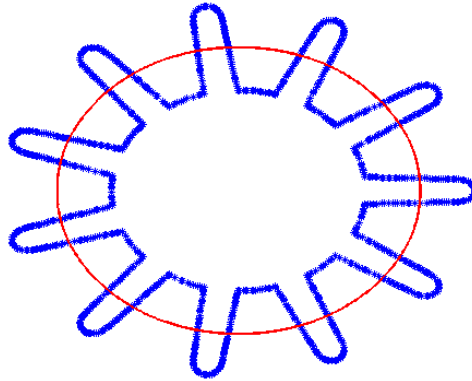


Fig. 6.17: Confronto tra il perimetro della geometria a stella e la circonferenza del cerchio con cui è approssimata

viene introdotta nel modello 1-D mediante il valore dell'area di porta nodo per nodo. Riconducendoci a sezioni circolari, determiniamo un andamento spaziale dell'area di porta tipico di condotti circolari. Ovviamente, essendo le circonferenze di riferimento equivalenti alle sezioni della geometria di studio, l'andamento si discosterà nel tempo da quello di una sezione cilindrica reale in quanto la variazione dei raggi di ciascun nodo è indipendente dalla regressione di una superficie cilindrica.

Per quanto riguarda il punto 2, analizzando nel dettaglio le due oscillazioni presenti nel grafico 6.16, è possibile notare come esse siano legate ai due *spike* di pressione presenti nella previsione del modello 0-D determinati dalla funzione di *remeshing* della mesh triangolare che costituisce la geometria della superficie di combustione (fig. 6.18 e 6.19).

Nonostante ci si potesse aspettare una forte influenza da parte della funzione di *remeshing* agente sulla detta mesh, l'effetto che ne consegue è caratterizzato da un ritardo inaspettato rispetto al momento in cui agisce il *remeshing* (praticamente contemporaneo al comparire dell'effetto sulla curva di pressione del modello 0-D).

Inoltre, la durata nel tempo delle oscillazioni della curva di pressione nel modello 1-D è molto maggiore che non per il modello 0-D.

Mentre l'effetto di *delay* potrebbe essere imputato alla mediazione delle geometrie nell'interfaccia tra simulatore di regressione e modello 1-D, il maggior perdurare ed il maggior peso dell'effetto del disturbo dovuto al *remeshing* nel modello 1-D è probabilmente dovuto alla natura stessa delle sue equazioni costitutive.

Tali equazioni sono infatti prive di fattori smorzanti. Sebbene si sia introdotta una viscosità artificiale essa si applica, come esposto in capitolo 4.3.3, solo in presenza di gradienti di pressione non fisici. Intuitivamente, essa non smorzerà gli effetti di forti rumori sulla geometria (quindi sull'area

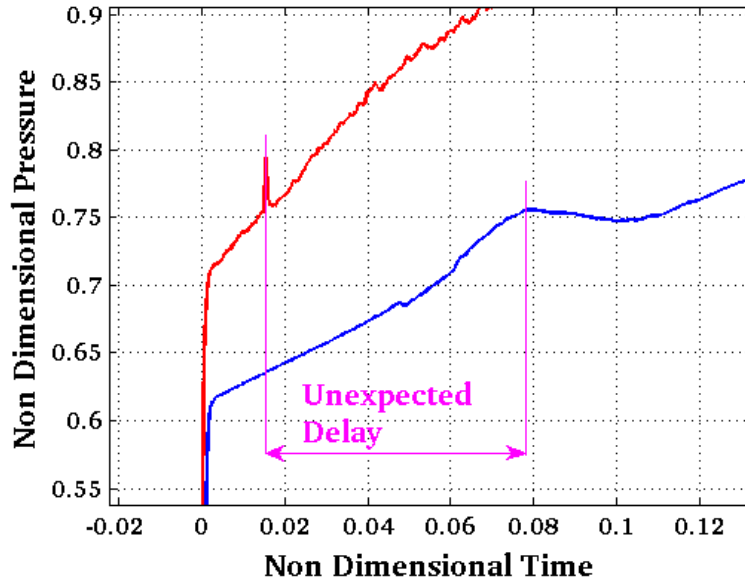


Fig. 6.18: Relazione tra la prima oscillazione di pressione nel modello 1-D e lo *spike* dovuto alla funzione di remeshing nel modello 0-D

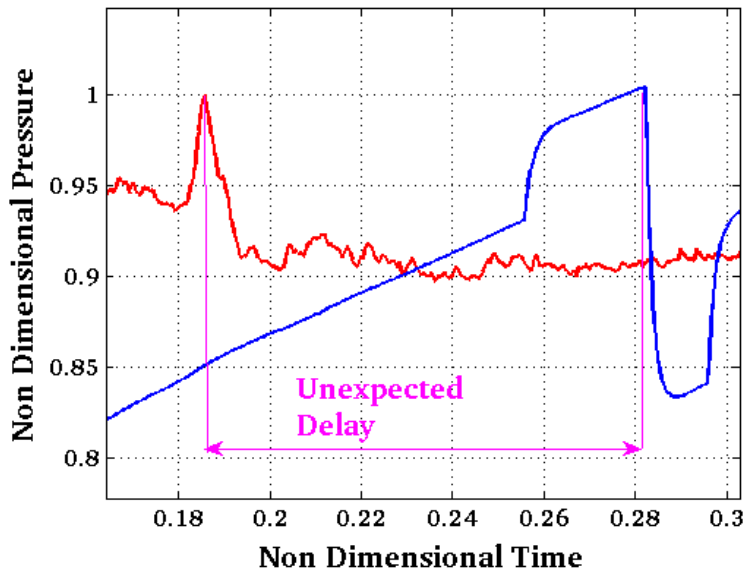


Fig. 6.19: Relazione tra la seconda oscillazione di pressione nel modello 1-D e lo *spike* dovuto alla funzione di remeshing nel modello 0-D

di porta e sul perimetro di combustione) fintanto che questi non comportino forti gradienti di pressione.

In virtù delle osservazioni fin qui fatte, il modello 1-D non risulta applicabile, ora come ora, a geometrie non riconducibili a condotti di sezione circolare.

6.5.3 Possibili Soluzioni

La soluzione al problema dell'andamento generale della curva di pressione ed al delay tra il disturbo sulla geometria dovuto al *remeshing* e l'effetto sulla curva di pressione è di facile individuazione: è necessario utilizzare l'area effettiva della sezione di stella ed il suo perimetro reale, non un'approssimazione mediante cerchi equivalenti.

Anche se di facile individuazione, tale soluzione necessita lo sviluppo di un algoritmo in grado di riordinare la nuvola di punti che rappresentano la sezione in maniera affidabile e veloce. Pertanto, la sua implementazione è tutt'altro che semplice o rapida.

Per quanto riguarda l'ampiezza degli effetti dei disturbi sulla curva di pressione del simulatore 1-D, si dovrebbe innanzi tutto verificare che essa non sia dovuta a sua volta al rapportare la sezione a stella ad una sezione circolare. Se utilizzando le aree ed i perimetri effettivi delle sezioni a stella il problema permane, bisognerà agire sinergicamente sul filtrare gli *spike* dei parametri geometrici dovuti alla funzione di remeshing e sull'accoppiare appositi termini dissipativi al sistema d'equazioni 4.52.

6.6 Esempio di Applicazione del Modello 1-D al Fine di Valutare lo Spreading Flame

Come riportato in capitolo 4.4.1, la caratterizzazione del propagarsi del fronte di fiamma nei primi istanti d'accensione di un motore a propellente solido può essere difficoltosa. Vengono quindi comunemente utilizzate tabelle e grafici ricavati mediante esperienza aziendale.

Mentre questo è inevitabile nell'applicazione di un modello 0-D, qualora si utilizzi un modello 1-D lo *spreading flame* può essere valutato mediante corretta caratterizzazione delle proprietà dell'accenditore, generalmente note.

Ipotizzando che lo studio in esame non abbia lo scopo di dimensionare l'accenditore, possiamo considerare qualsiasi nodo del grain investito dal fronte di fiamma come acceso. Altrimenti, dovremmo verificare il raggiungimento della temperatura di accensione T_{ign} di ciascun nodo di grain.

Applicando il modello 1-D ad un semplice motore di sezione cilindrica con accenditore installato in testa ed ipotizzando che l'*impingement* si abbia

già dal primo nodo, sarà possibile ottenere una soluzione di prima approssimazione che caratterizzi il propagarsi del fronte di fiamma nella camera di combustione. Per fare questo, porremo condizioni al contorno di inlet sul primo nodo (tali da caratterizzare la portata d'accenditore e relativa temperatura) e di parete sull'ultimo nodo (l'ugello è ancora sigillato). Inizializzeremo inoltre i nodi del canale con la pressione e la temperatura dei gas inerti di riempimento presenti in camera di combustione.

Il risultato dell'applicazione del modello 1-D a tale problema è riportato in figura 6.20.

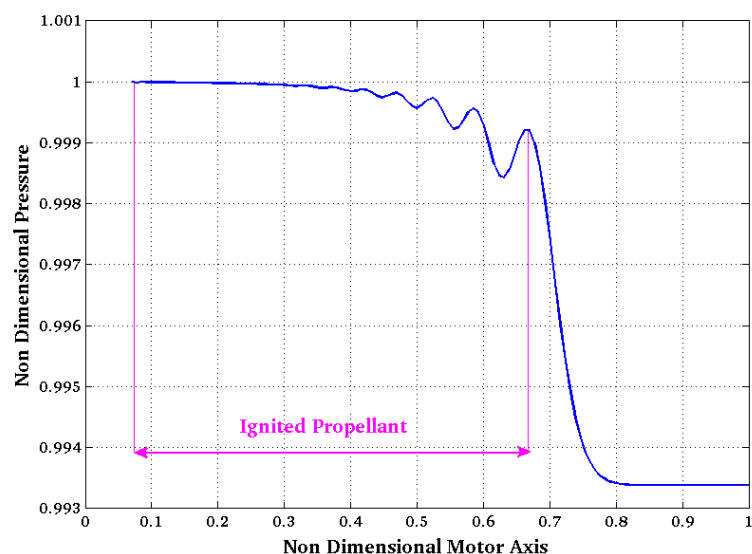


Fig. 6.20: Propagazione del fronte di fiamma a seguito dall'attivazione dell'accenditore

Le velocità ottenute per il fronte d'onda sono analoghe a quelle riportate per tale semplice problema nelle tabelle presenti in letteratura. Il vantaggio si avrà quando sarà necessario caratterizzare tale propagazione relativamente a geometrie complesse di cui non sono disponibili tabelle relative alla velocità di fiamma.

Inoltre, non si è considerata l'influenza dell'accensione dei nodi raggiunti dal fronte sulla velocità di propagazione del fronte stesso. Questo è accettabile per motori di piccole dimensioni. Mano a mano che il motore diviene più grande, l'influenza dei nodi già accesi sarà sensibile. Sarà quindi necessario conteggiare anche il loro apporto.

Bisogna tuttavia sottolineare il fatto che, per i motori attualmente in esame presso il Laboratorio di Propulsione e Macchine, i tempi d'accensione del grain propellente sono così brevi da poter essere trascurati. Generalmente si considera quindi il grain come completamente acceso sin dal primo istante.

Bibliografia

- [1] A. Annovazzi, A. Tamburini and F. Gori. An Integrated Approach to predict the Ignition Transient and Steady-State Phases in Solid Rocket Motors.
- [2] A. H. Saphiro. *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Flow*, volume 2 and 3. The Roland Press Company, 1953.
- [3] A. Jameson, W. Schmidt and E. Turkel. Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Scheme . *AIAA Paper 81-1259*, 1981.
- [4] A. Peretz, K. Kuo, L. Caveney, and M. Summerfield. Starting transient of Solid Propellant Rocket Motor with High Internal Gas Velocities. *AIAA Journal*, 11(12):1719–1727, December 1973.
- [5] A. Annovazzi. *ARIANE 5 MPS-SPP Justification File*. AVIO BPD.
- [6] A. I. Atwood, T. L. Boggs, P. O. Curran, D. M. Hanson-Parr, T. P. Parr, C. F. Price, and J. Wiknich. Burning Rate of Solid Propellant Ingredients, Part 1: Pressure and Initial Temperature Effects. *Journal of Propulsion and Power*, 15:740–747, 1999.
- [7] AVIO BPD. *Manuale d'uso del programma di calcolo RK*, April 1992.
- [8] AVIO BPD. *Manuale d'uso del programma di calcolo PTBALL*, December 1995.
- [9] AVIO BPD. *Overview Modelli Balistici*, December 1995.
- [10] M. Baskarad B. Zecevic, J. Terzic. Influence of the Solid Propellant Grains Processing on Burning Rate of Double Base Rocket Propellants . pages 547–558, 6th Seminar New Trends in Research of Energetic Materials, University of Pardubice, April 23 2003. Mechanical Engineering Faculty, Defense Technologies Department, Vilsonovo setaliste 9, 71000 Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.

- [11] C. Colebrook. Turbulent Flow in Pipes, with Particular Reference to the Transition Regime Between Smooth and Rough Pipe Laws. *Institution of Civil Engineers Journal*, 11:133–156, 1939.
- [12] NASA Glenn Research Center. Chemical Equilibrium with Application. <http://www.grc.nasa.gov/WWW/CEAWeb/>.
- [13] D. Baker. Method of Predicting Chamber Pressure Transients during the Ignition of Solid Propellant Rocket Motor. United Tecnology Center, Sunnyvale, California.
- [14] D. G. Luchinsky, V. V. Osipov, V. N. Smelyanskiy, A. Patterson-Hine, B. Hayashida, M. Watson, J. McMillin, D. Shook, M. Johnson and S. Hyde. Model-Based Diagnostics and Prognostics for Solid Rocket Motors. Annual Conference of the Prognostics and Health Management Society, 2009.
- [15] D. G. Luchinsky, V. V. Osipov, V. N. Smelyanskiy, D. A. Timucin and S. Uckun. Model Based IVHM System for the Solid Rocket Booster. IEEE Aerospace Conference.
- [16] D. S. Stewart, K. C. Tang, S. Yoo, Q. Brewster and I. R. Kuznetsov. Multiscale Modeling of Solid Rocket Motors: Computational Aerodynamics Methods for Quasi-Steady Burning. *Journal of Propulsion and Power*, 22(3), November-December 2006.
- [17] E. Cavallini. *Modeling and Numerical Simulation of Solid Rocket Motors Internal Ballistics*. PhD thesis, Sapienza Università di Roma, 2009.
- [18] A. Fusiello and R. Giannitrapani. *Intersezioni e Collisioni*. Dipartimento di Ingegneria Elettrica, Gestionale e Meccanica; Università di Udine.
- [19] G. P. Sutton and O. Biblarz. *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, 7th edition, 2001.
- [20] G. Parolini, A. Del Monaco, D. M. Fontana. *Fondamenti di Fisica Tecnica*. UTET, 1983.
- [21] H. Bradley. Theory of a Homogeneous Model of Rocket Motor Ignition Transient. In *AIAA Paper 64-127*, Solid Propellant Rocket Conference, Palo Alta, California, January 1964.
- [22] M. E. Hayder. *An Assessment of Artificial Damping Models for Aeroacoustic Calculation*. NASA, June 1995.
- [23] I. E. Idelchik. *Handbook of Hydraulic Resistance*. Hemisphere Publishing Corp., 2nd edition.

- [24] J. B. Heywood. *Internal Combustion Engine Fundamentals* . McGraw-Hill, 1989.
- [25] J. D Anderson Jr. *Computational Fluid Dynamics*. McGraw-Hill, 1995.
- [26] J. L. Steger. Implicit Finite Difference Simulation of Flow About Arbitrary Geometries with Application to Airfoils . *AIAA Journal*, 16:679, July 1978.
- [27] J. M. Lenoir and G. Robillard. A Mathematical Method to Predict the Effects of the Erosive Burning in Solid Propellant Rockets . In *In Proc. of the Sixth Symposium on Combustion*, 1957.
- [28] R. Mencl J. Vollmer and H. Muller. Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes. *Eurographics '99*, 18(3), 1999.
- [29] K. Kuo, J. Gore and M. Summerfield. *Transient Burning of Solid Propellants*, 1984.
- [30] Stefano Lanzoni. *Soluzione Numerica delle Equazioni delle Correnti a Superficie Libera*. Università di Padova.
- [31] M. A. Willcox, M. Q. Brewster, K. C. Tang, D. S. Stewart and I. Kuznetsov. Solid Rocket Motor Internal Ballistics Simulation Using Three-Dimensional Grain Burnback . *Journal of Propulsion and Power*, 23(3), May-June 2007.
- [32] M. Radzan and K. Kuo. *Erosive Burning of Solid Propellant*, 1984.
- [33] M. Salita. Verification of Spatial and Temporal Pressure Distribution in Segmented Solid Rocket Motors. In *AIAA paper89-0298*.
- [34] P. Schroder M.Mayer, M. Desbrun and A. Barr. Discretedifferential-geometryoperator for triangulated2-manifolds . *VisMath 2002*, Berlin, Germany, 2002.
- [35] S. Morigi. *Fondamenti di Computer Graphics*. Alma Mater Studiorum - Università di Bologna.
- [36] NASA. *Solid Rocket Motor Internal Insulation*, December 1976.
- [37] P. D. Lax. Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and their Numerical Computation . *Commun. Pure Appl. Math.*, 7:159–193, 1954.
- [38] P. D. Lax and B. Wendroff. System of Conservation Laws. *Commun. Pure Appl. Math.*, 13:217–237, 1960.
- [39] P. Hill and C. Peterson. *Mechanics and Thermodynamics of Propulsion*. Pearson Education Incorporate, 2010.

- [40] Q. Wang, M. E. Ewing, E. C. Mathias, J. Heman and C. Smith. Development of Flow and Heat Transfer Models for the Carbon Fiber Rope in Nozzle Joints of the Space Shuttle Reusable Solid Rocket Motor. 37th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, Salt Lake City, Utah, July 8-11 2001. ATK Thiokol Propulsion Corp.
- [41] R. Beam and R. F. Warming. An Implicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation Law Form . *Journal of Computational Physics*, 22:87–110, September 1976.
- [42] R. Beddini. Effects of Grain Port Flow on Solid Propellant Erosive Burning . In *AIAA Paper 78-977*, July 1978.
- [43] R. Gheshlaghi, S. Ghotbi, G. Zahedi. Dynamic investigation of solid propellant combustion in a rocket motor chamber. The 11th Iranian Chemical Engineering Congress, Tehran, Iran, November 28-30 2006.
- [44] R. H. Pletcher, J. C. Tannehill and D. A. Anderson. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. Taylor & Francis, 3rd edition, 2012.
- [45] R. H. Sforzini. An Automated Approach to Design of Solid Rockets Utilizing a Special Internal Ballistics Model. In *AIAA Paper 80-1135*, 1980.
- [46] E. Lee R. R. Miller and R. L. Powell. Rheology of Solid Propellant Dispersions. *Journal of Rheology*, 35(5):901–920, 1991.
- [47] R. W. MacCormack. The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering. *AIAA Paper 69-354*, 1969.
- [48] R. W. MacCormack and B. S. Baldwin. A Numerical Method for Solving the Navier Stokes Equations with Application to Shock Boundary layer Interactions . *AIAA Paper 75-1*, 1975.
- [49] A. Rizzi and I. Eriksson. Explicit multistage finite volume procedure to solve the euler equations for transonic flow. Von Karman Institute, Rhode-St-Genese, Belgium, 1983.
- [50] S. De Soto and A. Friedman. Flame Spreading and Ignition Transient in Solid Grain Propellant. *AIAA Journal*, 3(3):405–412, March 1965.
- [51] S. Filippo. *Gasdinamica*. Edizioni Ingegneria 2000, 1999.
- [52] T. H. Pulliam. Artificial Dissipation Models for the Euler Equations. *AIAA Journal*, 24(12), December 1986.
- [53] M. Tarini. *Dispense del Corso di Computer Graphics*. Università dell’Insubria.

- [54] W. Lawrence, D. Matthews and L. Deverall. The Experimental and Theoretical Comparison of the Erosive Burning Characteristics of Composite Propellants. In *AIAA-Paper 68-531*, 1968.
- [55] X. Jiao, G. Zheng, O. Lawlor, M. Heath, P. Alexander, M. Campbell and R. Fiedler. An Integration Framework for Simulations of Solid Rocket Motors . 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Tucson, Arizona, July 10-13 2005.