

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in INGEGNERIA CIVILE

Tesi di Laurea in CALCOLO AUTOMATICO DI STRUTTURE LS

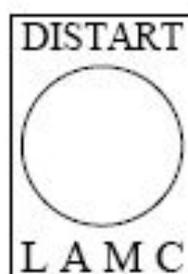
Modellazione numerica di una Barriera Paramassi a Rete

Candidato:
Luca Spadoni

Relatore:
Prof.Ing.Francesco Ubertini

Correlatori:
Prof.Ing.Guido Gottardi
Dott.Ing.Cristina Gentilini
Dott.Ing.Laura Govoni

Anno Accademico 2008/2009 - Sessione I



Tesi di laurea svolta presso il DISTART - Scienza delle Costruzioni,

Laboratorio di Meccanica Computazionale (LAMC),

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

al nonno Vittorio

Indice

Indice	4
Introduzione	6
1 Sistemi di protezione passiva per la caduta massi	8
1 Barriere paramassi a rete	8
1.1 Generalità	8
1.2 Criteri progettuali	9
1.3 Caratteristiche generali di un kit paramassi tipo	12
1.4 Kit paramassi	18
2 Dati sperimentali	22
2.1 Campo prove a caduta verticale	22
2.2 Strumentazione di supporto e relative quantità misurate	26
2.3 Risultati delle prove effettuate	30
2 Dinamica non lineare	36
1 Cinematica non lineare	36
1.1 Problema Tipico	36
1.2 Riferimento Relativo o Assoluto?	37
1.3 Continuo Deformabile	39
1.4 FEM Non-Lineare	39
1.4.1 Deformazioni	40
1.4.2 Sforzi ed Equilibrio	42
1.4.3 Altre Misure di Sforzo e Deformazione	44
1.5 Principio dei Lavori Virtuali	46
1.5.1 Rigidezza di Presforzo e Geometrica	48

Indice	5
1.5.2 Termini Inerziali	49
2 Metodi di integrazione nel tempo	50
2.1 Lo schema di Newmark	51
2.2 Metodo α di Hilber-Hughes e Taylor	52
2.3 Requisiti di Hilber e Hughes	53
3 Modellazione numerica	55
1 Caratterizzazione del materiale	55
1.1 Montante	59
1.2 Elementi cavo	59
1.2.1 Tiranti	61
1.2.2 Rete	61
1.3 Dissipatore	62
1.4 Esperimento	64
2 Caratterizzazione della geometria	65
2.1 Pannello di rete	66
2.2 Modello 2D	68
2.2.1 Risultati	71
2.3 Modello 3D	75
2.3.1 Materiale	78
2.3.2 Sezioni	79
2.3.3 Mesh	79
2.3.4 Vincolamento e carico	81
2.3.5 Particolari costruttivi	83
2.3.6 Risultati dell'analisi	87
4 Conclusioni	94
Bibliografia	95

Introduzione

La caduta di massi da scogliere o pendii può provocare gravi danni alle strutture sottostanti.

In passato tra gli interventi di protezione passiva contro la caduta massi, si distinguevano soprattutto barriere rigide, strutture poco flessibili che intercettavano le rocce e lasciavano il compito di dissipare l'energia di impatto ai materiali di rivestimento, come sabbia o terra riportata.

Negli ultimi anni invece si sta sempre più diffondendo l'uso di barriere a rete, più flessibili.

Le quali installate su versanti potenzialmente instabili hanno la funzione di intercettare e bloccare la caduta di blocchi di roccia, tramite una rete metallica, che svolge anche il compito di trasmettere attraverso funi, e altri elementi di collegamento, le forze di impatto alle strutture di fondazione.

In assenza di affidabili e consolidati metodi di progettazione, la verifica di queste strutture è affidata a prove di impatto in vera grandezza, necessarie a valutare la reale efficacia di ogni tipo di barriera. Tali test però sono molto onerosi in termini di tempo e denaro.

Dall'inizio del 2008 i test sono disciplinati a livello europeo dalle linee guida per il benessere tecnico di kit paramassi (ETAG 27)[1].

In questo contesto, la modellazione numerica si pone indubbiamente come strumento formidabile di progettazione in supporto alla sperimentazione, particolarmente nella estrapolazione dei suoi risultati ai casi reali.

In questo ambito, la tesi si propone di sviluppare modelli numerici di una barriera considerando differenti livelli di dettaglio: partendo da un modello monodimensionale non-lineare, passando per un modello bidimensionale di pannello equivalente fino alla modellazione tridimensionale della rete nella sua interezza.

Per queste analisi è stato utilizzato un software di calcolo commerciale, particolarmente adatto per modellare fenomeni che avvengono alle alte velocità quale è Abaqus.

La tesi si articola in 3 capitoli, brevemente illustrati in seguito:

Nel primo capitolo sono brevemente illustrate e descritte le caratteristiche geometriche della rete, il campo prova dove sono stati raccolti i dati e la strumentazione necessaria alla raccolta.

Nel secondo capitolo vengono analizzati i criteri teorici dell'analisi dinamica non lineare, e gli approcci o semplificazioni che usa il programma commerciale implementato.

Nel terzo capitolo sono illustrati e vengono spiegati i diversi dettagli della modellazione, a partire dal modello monodimensionale semplice fino a giungere al modello tridimensionale più complesso.

In seguito vengono illustrati e discussi i risultati raggiunti e confrontati con i dati sperimentali ottenuti nel campo prova.

Le considerazioni finali completano l'esposizione.

Capitolo 1

Sistemi di protezione passiva per la caduta massi

La teoria è quando si sa tutto ma non funziona niente.

La pratica è quando funziona tutto ma non si sa il perchè.

In ogni caso si finisce sempre a coniugare la teoria con la pratica:

non funziona niente e non si sa il perchè.

- Albert Einstein -

1 Barriere paramassi a rete

1.1 Generalità

Negli ultimi anni c'è stata una crescente sensibilizzazione da parte delle pubbliche amministrazioni verso il fenomeno denominato '*caduta massi*'.

Con tale termine si intende il distacco e successivo movimento verso valle di blocchi rocciosi delle dimensioni comprese fra 0.02 m³ e 5 m³ con velocità che possono raggiungere e talora superare i 30 m/s.

Tale fenomeno rappresenta uno dei rischi geologici più frequenti nel territorio nazionale, in particolar modo negli ambienti montani, con gravi conseguenze sulla percorribilità dei tratti viari, sulle infrastrutture, e conseguenti gravi disagi ai centri abitati.

Recentemente la ricerca e gli studi nel campo della caduta massi hanno subito un incremento sia in termini quantitativi, che qualitativi, come provano l'aumento di prestazioni ed affidabilità delle opere di difesa rispetto al passato.

Le *barriere paramassi* in rete metallica stanno diventando l'intervento di dife-

sa passivo più frequentemente utilizzato negli ultimi anni, questo grazie alla notevole evoluzione tecnologica dovuta ad una maggiore attenzione da parte degli studiosi ai problemi di carattere progettuale e costruttivo.

Anche nella loro forma più semplice, le barriere in questione presentano indubbi vantaggi rispetto ad altri sistemi di difesa passiva che consistono principalmente, nel limitato impatto ambientale arrecato, nei costi contenuti, nella rapidità di esecuzione dell'intervento, nella facile manutenzione od eventuale ripristino della struttura, nell'ingombro ridotto e nelle prestazioni elevate.

Una qualsiasi struttura riesce ad assorbire una quantità di energia cinetica, sviluppata in seguito ad un urto, tanto più elevata, quanto migliori sono le sue caratteristiche di deformabilità.

Per questo motivo lo studio di nuove modalità di assemblaggio degli elementi della barriera e la possibilità di utilizzo di nuovi materiali sono stati costantemente indirizzati verso la realizzazione di strutture sempre più deformabili.

1.2 Criteri progettuali

Per quanto riguarda gli aspetti progettuali, di fondamentale importanza nell'approccio al problema sono le prove in sito, che consentono un'osservazione diretta del fenomeno ed una valutazione immediata dei parametri principali che lo governano (individuazione dei percorsi di caduta, energia cinetica assunta dai massi, etc.). La sperimentazione in sito ha quindi lo scopo di mettere in evidenza gli aspetti fenomenologici della caduta dei massi che, per il loro carattere specifico ed aleatorio, sarebbero altrimenti assai difficili da determinare e quantificare correttamente.

Il posizionamento delle opere deve essere tale da intercettare le traiettorie dei blocchi in caduta e quindi la previsione e la definizione del possibile moto del masso rivestono un ruolo fondamentale nella fase di progettazione e condizionano anche la scelta tipologica ottimale dell'intervento.

Il corretto funzionamento di una barriera dipende in maniera preponderante dal dimensionamento dei componenti della struttura, i principali elementi sono:

- Le *reti*, che costituiscono la struttura principale di intercettazione dei blocchi (fig.1.1).

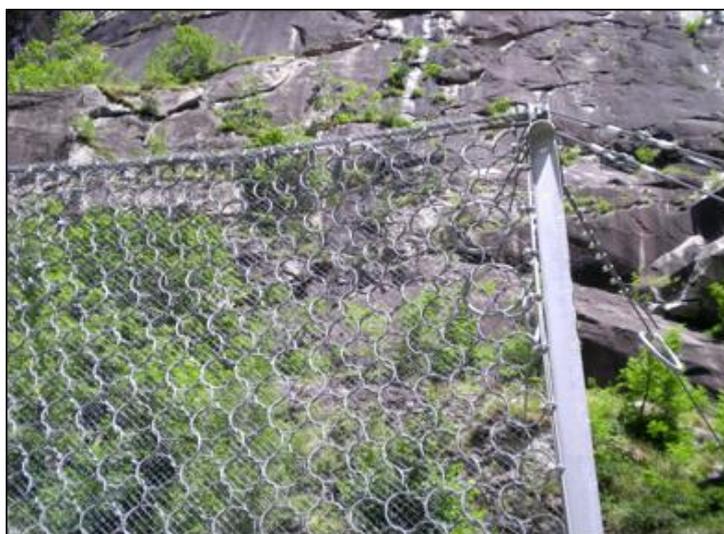


Figura 1.1: Esempio di pannello di rete ad anelli di fune di acciaio

- I *montanti*, che servono a mantenere dispiegate le reti e la cui funzione statica è indispensabile al funzionamento della barriera;
- Gli *ancoraggi*, elementi fondamentali della struttura di fondazione, il cui dimensionamento deve assicurare resistenza alle sollecitazioni sia in campo statico che dinamico (fig.1.2);



Figura 1.2: Particolare di un ancoraggio alla parete rocciosa

- I *dispositivi di frenaggio* o *dissipatori di energia*, che contribuiscono all'attenuazione dell'urto ed entrano in funzione quando la capacità di assorbimento della rete è esaurita. Vengono inseriti nelle funi di ancoraggio e sulle funi longitudinali superiori e inferiori 1.3;



Figura 1.3: Particolare di dissipatore di energia ad anello

- Le *funi*, che collegano la superficie di intercettazione alle fondazioni, normalmente dimensionate in considerazione del carico massimo agente dopo un impatto che sviluppa un'energia di classe pari a quella della barriera.

Generalmente la normativa di riferimento a cui si attingeva durante la fase di progettazione dell'opera era costituita dai seguenti elementi legislativi:

- il D.M. n° 47/88 per le opere di fondazione;
- il D.M. 9/01/96 per le opere in cemento armato;
- l'Eurocodice EC7 per l'ingegneria geotecnica;
- le raccomandazioni AICAP per gli ancoraggi nei terreni e nelle rocce.

La complessità del fenomeno '*caduta massi*' dovuta ai numerosi fattori di tipo dinamico che la governano e il crescente interesse verso questa tematica ha portato alla necessità di definire in modo univoco i criteri per la progettazione e classificazione delle strutture paramassi.

I più recenti aggiornamenti normativi dono il D.M. 14/09/2005: 'Norme tecniche per le Costruzioni' ed in particolare, nel febbraio 2008, l'Organizzazione Europea per il Benestare Tecnico (EOTA) ha rilasciato le linee guida di Benestare Tecnico Europeo per il kit di protezione contro la caduta massi, ETAG 027 [1].

Quest'ultimo documento non riguarda i principi di progettazione ma armonizza le regole di qualificazione dei materiali e certifica le prestazioni che il kit è in grado di fornire tramite una procedura di sperimentazione che garantisca la conformità alle norme europee.

1.3 Caratteristiche generali di un kit paramassi tipo

Tutte le tipologie di kit paramassi sono realizzate mediante la successione di uno o più moduli funzionali; il contenuto minimo di un kit rientrante nelle linee guida ETAG 027 è di tre moduli funzionali identici (3FM).

Questa possibilità di assemblaggio del prodotto permette di adeguare la lunghezza della struttura all'estensione delle opere da proteggere e di seguire agevolmente la conformazione pianoaltimetrica del terreno.

Nella seguente figura 1.4 è rappresentato uno schema assonometrico che descrive qualitativamente un generico kit paramassi collaudato nelle prove.

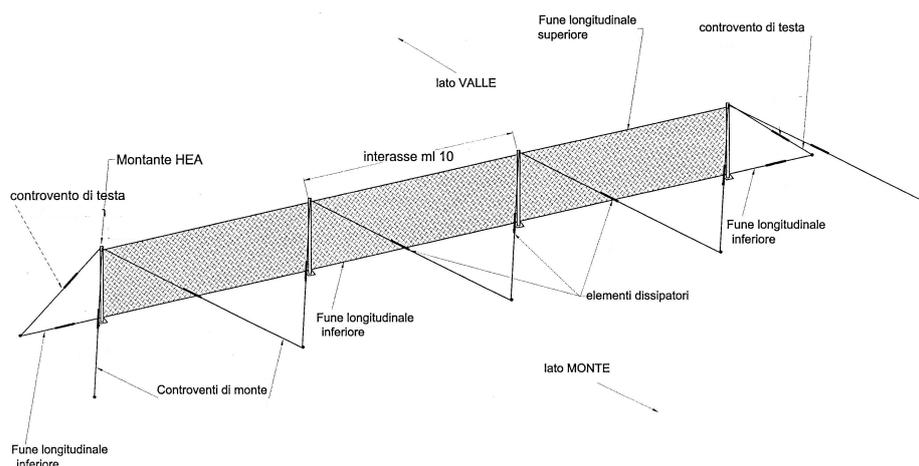


Figura 1.4: Schema assonometrico di un kit paramassi tipo

La descrizione qualitativa di un generico kit paramassi può partire dalla scomposizione in quattro elementi costituenti fondamentali:

- *struttura di intercettazione*: questa è usualmente costituita da una o più reti metalliche sovrapposte, la rete principale è composta da cavi o fili metallici collegati in vari modi: si possono adottare maglie quadrate di fune connesse da borchie (questa variante prevede che nella denominazione del modello del kit venga contrassegnata la lettera B, vedi fig.1.6 o anelli di fune reciprocamente interconnessi (in questo caso il kit sarà contrassegnato dalla lettera A, vedi fig.1.5. E' opportuno specificare che il pannello di tipo A, essendo più resistente, viene utilizzato per i kit paramassi ad elevata capacità di assorbimento di energia. La rete secondaria è composta da pannelli in rete metallica più fitta a doppia torsione a maglie esagonali, allo scopo di intercettare gli elementi lapidei di dimensioni ridotte. La funzione della struttura di intercettazione è quella di sostenere direttamente l'urto del blocco e di trasmettere le sollecitazioni generate alle strutture di sostegno, di raccordo e di fondazione;

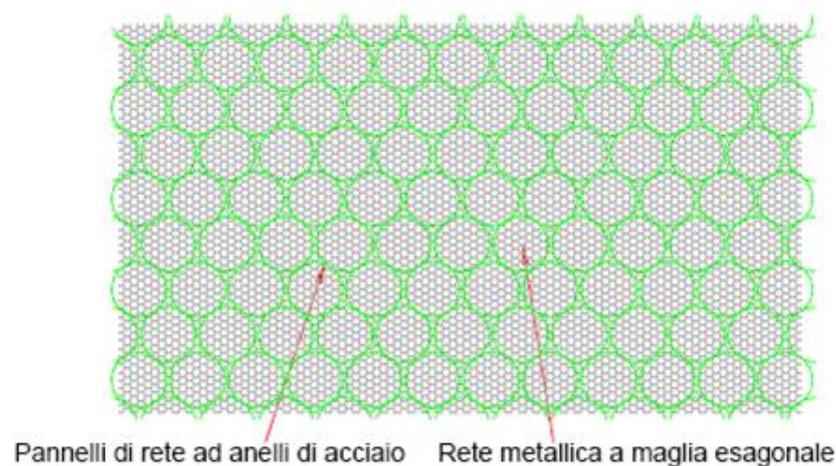


Figura 1.5: Esempio di struttura di intercettazione di tipo A

- *struttura di sostegno*: costituita da pali in acciaio (tubolari o profilati

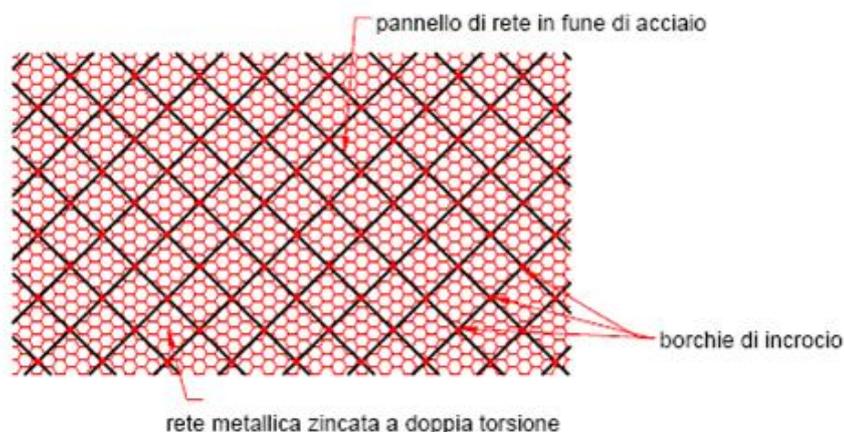


Figura 1.6: Esempio di struttura di intercettazione di tipo B

metallici) di dimensioni dipendenti dalla classe di assorbimento energetico del relativo kit. I pali (o montanti) sono posti ad interassi costanti di 10 m e collegati alla struttura di fondazione tramite snodi a cerniera mono o bidirezionali che permettono la rotazione rispetto a piani predefiniti (vedi fig.1.7). La loro funzione è di mantenere dispiegata la struttura di intercettazione;

- *struttura di raccordo*: costituita da cavi (o controventi) metallici di monte, valle e laterali, che hanno la funzione di mantenere nella corretta posizione i pali di sostegno e trasmettere le sollecitazioni agli elementi di fondazione; inoltre appartengono a questa categoria le funi longitudinali inferiori e superiori che contribuiscono al sostegno della struttura di intercettazione.

Tutti i cavi appena esposti possono essere provvisti di elementi in grado di dissipare energia ('dissipatori di energia' o 'freni') grazie alla possibilità di un allungamento controllato; nei kit collaudati nel campo prove di Fonzaso, i dissipatori installati sono del tipo a 'frizione', cioè costituiti da elementi tubolari cavi entro cui scorrono funi di compressione in acciaio e tamponi cilindrici in alluminio. Nelle seguenti figure 1.8, 1.9, 1.10 sono evidenziati i principali elementi che costituiscono la struttura di raccordo[2]:

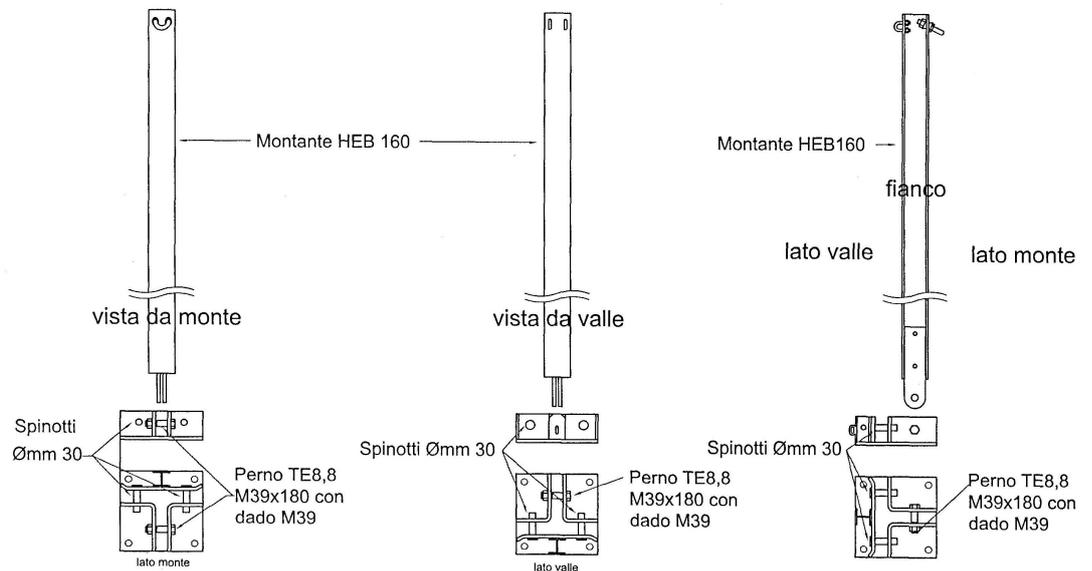


Figura 1.7: Esempio di montanti e relative piastre di appoggio costituenti la struttura di sostegno

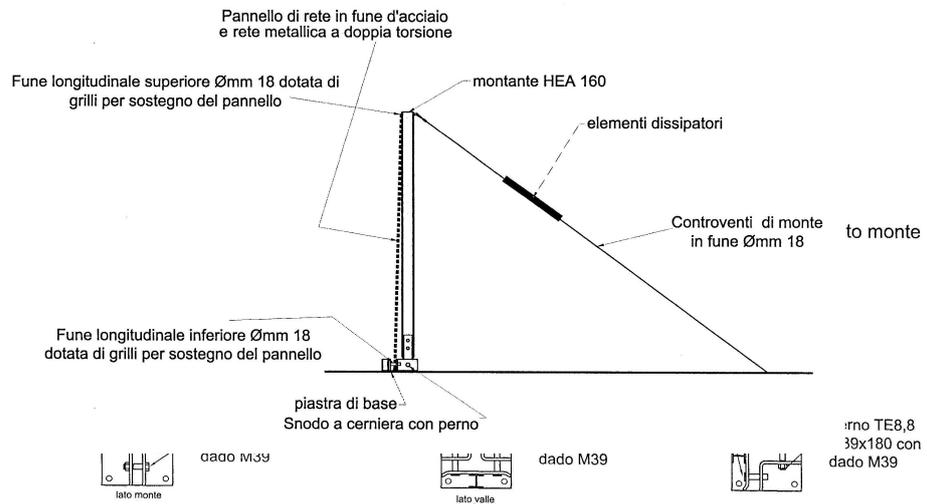


Figura 1.8: Esempio di vista laterale di barriera paramassi in cui sono evidenziati i cavi di monte, le funi longitudinali inferiori e superiori e gli elementi dissipatori.

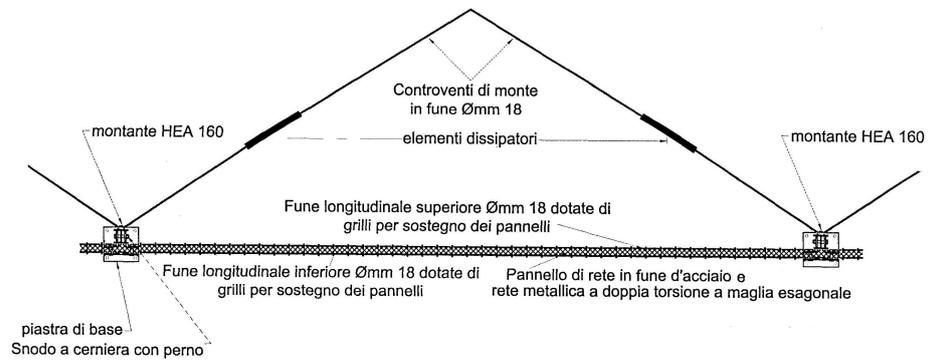


Figura 1.9: Sezione in pianta in cui sono evidenziati i cavi di monte, le funi longitudinali inferiori e superiori e gli elementi dissipatori.

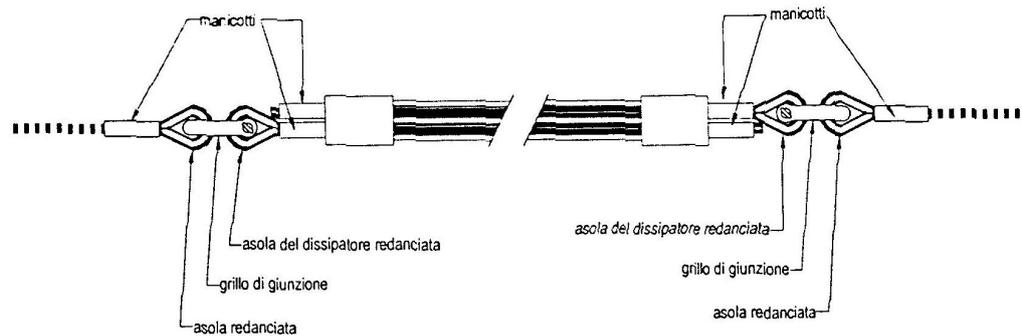


Figura 1.10: Particolare del collegamento fra il dissipatore d'energia e il cavo della barriera su cui è installato

- *struttura di fondazione*: costituita da piastre d'appoggio vincolate al terreno da elementi rigidi come barre metalliche o micropali oppure da elementi flessibili come funi metalliche cementate nel relativo foro (fig.1.11). Grazie a queste il kit paramassi riesce a scaricare al terreno le sollecitazioni derivanti dalle prove d'urto.

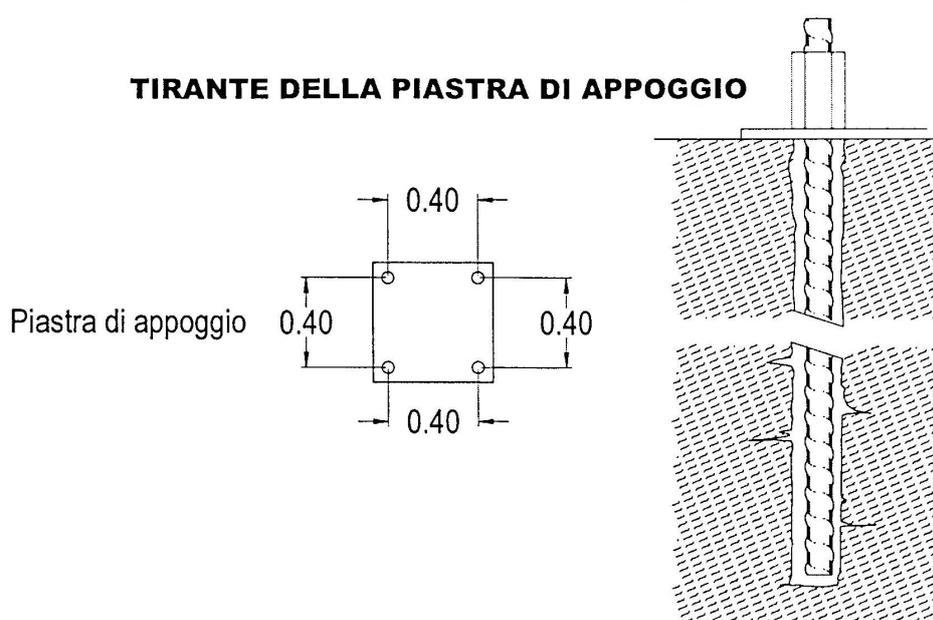


Figura 1.11: Particolare di piastra d'appoggio e relativo tirante

In fine si annota che le connessioni fra i vari elementi delle barriere avvengono attraverso morsetti, redance e grilli, inoltre il dimensionamento di ogni singolo elemento costruttivo è dipendente dalla classe di assorbimento energetico del kit in prova.

Ora verranno analizzate nel dettaglio le specifiche tecniche del kit paramassi preso in esame e collaudato presso il campo prove di Fonzaso, nell'ambito del Contratto di Ricerca e Consulenza tra il Consorzio Triveneto Rocciatori di Fonzaso ed il Dipartimento DISTART dell'Università di Bologna.

Le caratteristiche tecniche dei kit sono fornite dalle rispettive case costruttrici in apposite schede insieme ai relativi manuali di montaggio, come imposto dalle recenti linee guida.

1.4 Kit paramassi

La seguente tabella riassume le specifiche tecniche del kit esaminato, così come dichiarate dalla casa costruttrice.

<i>Classe di assorbimento di energia</i>	500Kj
<i>Pali</i>	In acciaio S235 EN 10025 forma tubolare $\phi=114,3$ spessore 4 mm, con cerniera ed elementi passafune in acciaio S235 EN 10025.
<i>Piastre di base</i>	In acciaio S235 EN 10025 avente forma rettangolare con lati di 600 mm e 250 mm, spessore 10 mm, con dispositivo passafune per la fune longitudinale inferiore, dispositivo di svincolo con bulloni a rottura, elemento di protezione dalle fondazioni e predisposta con n° 2 fori $\phi=40$ mm per l'ancoraggio con i tirafondi di fondazione.
<i>Pannelli di rete in fune (rete principale)</i>	In acciaio $\phi=8$ mm aventi classe di resistenza 1766 N/mm ² e carico di rottura 40.6 kN, costruita secondo norma UNI ISO 2408 a maglia quadrata (300mm x 100mm) bloccata agli incroci mediante borchie a semiguscio in acciaio galvanizzato chiuse a pressione (struttura di intercettazione di tipo 'B')
<i>Cavi di monte</i>	In fune di acciaio aventi $\phi =16$ mm a 114 fili (6(1+6+12)+AM) costruzione crociata destra avente classe di resistenza 1766 N/mm ² e carico di rottura 161 kN costruita secondo Norma UNI ISO 2408, dotati di cappio manicottato.

<i>Cavi laterali</i>	In fune di acciaio aventi $\phi = 16$ mm a 114 fili (6(1+6+12)+AM) costruzione crociata destra avente classe di resistenza 1766 N/mm ² e carico di rottura 161 kN costruita secondo Norma UNI ISO 2408, dotati di cappio manicottato e dispositivo dissipatore.
<i>Cavi di collegamento laterali</i>	In fune di acciaio aventi $\phi = 16$ mm a 114 fili (6(1+6+12)+AM) costruzione crociata destra avente classe di resistenza 1766 N/mm ² e carico di rottura 161 kN costruita secondo Norma UNI ISO 2408, dotati di cappio manicottato.
<i>Fune longitudinale superiore</i>	In fune di acciaio aventi $\phi = 16$ mm a 114 fili (6(1+6+12)+AM) costruzione crociata destra avente classe di resistenza 1766 N/mm ² e carico di rottura 161 kN costruita secondo Norma UNI ISO 2408, dotati di cappio manicottato.
<i>Fune longitudinale inferiore</i>	In fune di acciaio aventi $\phi = 16$ mm a 114 fili (6(1+6+12)+AM) costruzione crociata destra avente classe di resistenza 1766 N/mm ² e carico di rottura 161 kN costruita secondo Norma UNI ISO 2408
<i>Dissipatori di energia Mod.A.A./700/07/α</i>	Costituiti da elementi tubolari aventi $\phi = 28$ mm entro cui scorrono le funi in acciaio aventi $\phi = 16$ mm a 114 fili (6(1+6+12)+AM) costruzione crociata destra avente classe di resistenza 1766 N/mm ² e carico di rottura 161 kPa costruita secondo Norma UNI ISO 2408, e tamponi cilindrici in alluminio forati. Le funi sono dotate ad una estremità di asola con redacia DIN 6899 e chiuse con manicotto in alluminio pressato del tipo <i>Talurit</i> a norma DIN 3093 e all'altra estremità da un analogo manicotto avente le funzioni di fine corsa. Le funi vengono assemblate nel dissipatore in senso inverso e simmetrico.

<i>Rete metallica (rete secondaria)</i>	A doppia torsione filo $\phi = 2,7$ mm a maglia esagonale 80mm x 100mm.
<i>Snodo a cerniera con perno</i>	In acciaio S235 EN 10025 $\phi=30$ mm. Possibilità di rotazione su un unico piano.
<i>Morsetti</i>	A cavalletto per funi $\phi= 16$ mm DIN 741
<i>Redance</i>	Secondo Norma DIN 6899 per funi $\phi= 16$ mm.
<i>Grilli</i>	A norma UNI 1497/A $\phi=16$ mm

Nelle seguenti figure 1.12 e 1.13 sono rispettivamente indicate le posizioni degli ancoraggi del kit al terreno e uno schema assonometrico d'insieme in cui è evidenziata la collocazione dei dissipatori di energia e la configurazione delle funi di controvento e di sostegno della struttura d'intercettazione.



Figura 1.12: Vista frontale del kit con in evidenza la posizione degli ancoraggi e l'interasse dei momenti.

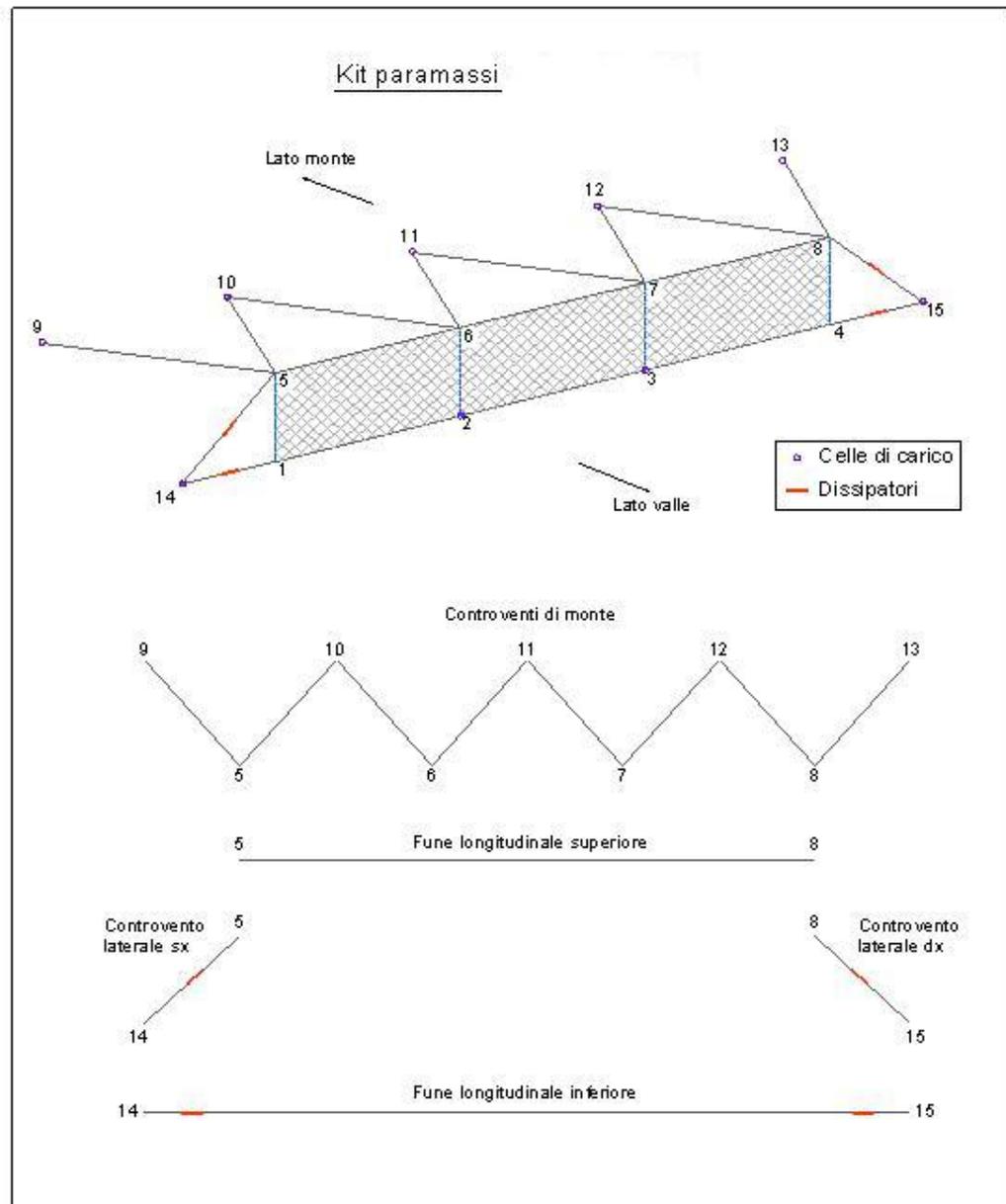


Figura 1.13: Schema assonometrico del kit con in evidenza posizione dei dissipatori di energia, celle di carico e configurazione delle funi.

2 Dati sperimentali

2.1 Campo prove a caduta verticale

Il DISTART dell'Università di Bologna ha stipulato nel 1998 un Contratto di Ricerca e Consulenza con il Consorzio Triveneto Rocciatori di Fonzaso (BL), avente come oggetto di studio appunto una serie di barriere a reti paramassi ad alta deformabilità da sottoporre a prove di impatto in vera grandezza.

Per lo svolgimento pratico delle prove è stato individuato un sito con caratteristiche idonee in località Agana, presso il comune di Fonzaso (BL), in cui è stato allestito un campo di collaudo.

Il campo prove all'inizio prevedeva l'utilizzo di una teleferica fissa a campata unica per la guida del blocco in direzione della barriera paramassi posizionata a valle.

Nel 2003, il Contratto di Ricerca e Consulenza è stato rinnovato ed in seguito ai continui aggiornamenti normativi, e quindi alla continua necessità di armonizzazione delle procedure di collaudo ed univocità nell'acquisizione dei dati, si è riscontrato che fosse più idoneo allestire un campo prove a caduta verticale, più consono al tipo di dati ricercati.

Il luogo più idoneo alla sua realizzazione è stato individuato sempre nel Comune di Fonzaso.

Il sito dal punto di vista geomorfologico, si dimostra particolarmente adatto all'allestimento di un campo a caduta verticale, in quanto vi è la presenza di una parete rocciosa caratterizzata da un'inclinazione subverticale ulteriormente profilata e di un'ampia area pianeggiante al piede della stessa.

Il tutto ulteriormente impresiosito dal fatto che quest'area risulta facilmente accessibile con qualsiasi automezzo.

Nella figura 1.14 è illustrato uno schema plano-altimetrico della zona in cui è stato allestito il campo.

Nello schema sono individuabili i seguenti elementi:

- braccio meccanico di sollevamento (1);
- sistema di ancoraggio del braccio meccanico al suolo (2);
- argano a motore per gli spostamenti del braccio meccanico (3);
- barriera paramassi da collaudare (4);

- recinzione del campo prove (5);
- struttura in cui avviene l'elaborazione dei dati (6);
- ingresso alla zona di collaudo (7).

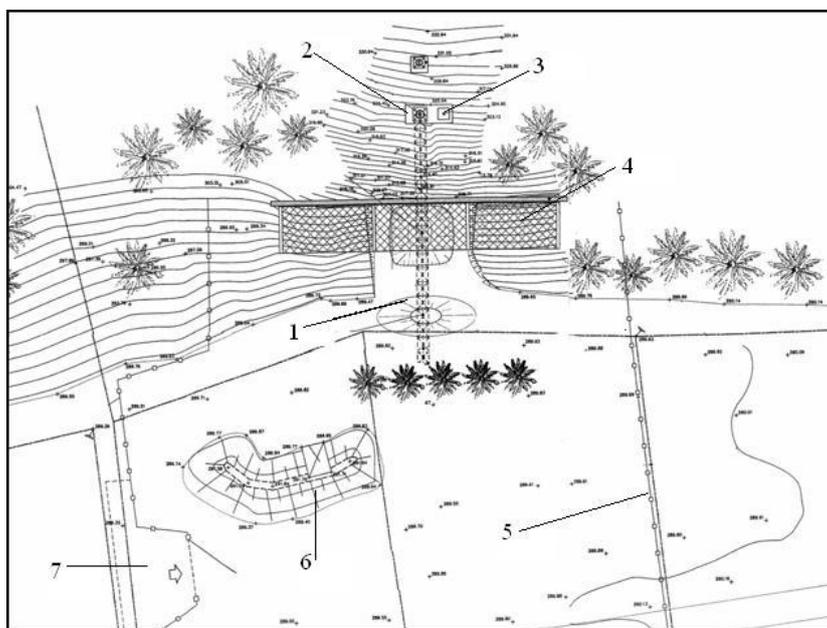


Figura 1.14: Schema planoaltimetrico del campo prove a caduta verticale

La caduta verticale del corpo di lancio è resa possibile da un impianto di sollevamento, costituito da un braccio formato da una struttura reticolare a sezione triangolare, solidale al terreno mediante un apposito giunto a cerniera. L'utilizzo di tale tipologia di ancoraggio permette al braccio meccanico di assumere varie angolazioni e quindi di raggiungere diverse altezze.

Nella configurazione standard, si trova posto ad una quota di 31,5 m dal piano di campagna e ad una distanza dalla barriera paramassi di 19,5 m.

Il braccio può inoltre posizionarsi in altre due configurazioni geometriche: la prima caratterizzata da un'altezza massima rispetto al piano di campagna di 58,5 m, mentre la seconda prevede una modifica strutturale che permette di raggiungere una quota massima di 79 m rispetto al piano di riferimento.

La movimentazione della gru avviene mediante un argano di brandeggio, mentre un argano di sollevamento consente di elevare il blocco fino all'altezza desiderata e posizionarlo in modo tale da poter impattare in un punto predeterminato della barriera da collaudare.

Lo sgancio del corpo di lancio determina una sollecitazione abbastanza violenta nella struttura reticolare (rinculo), perciò all'estremità esterna del braccio sono stati installati due stralli con la funzione di assorbire durante ogni prova tale reazione elastica.

Il braccio e gli argani sono fissati alla parete rocciosa grazie a plinti in calcestruzzo armato e barre di ancoraggio in *dywidag*, mentre lo sgancio del masso durante la fase di collaudo è azionato da un dispositivo automatico attivabile elettronicamente, in modo tale da non interferire in alcun modo con il moto del masso.

Il blocco viene collegato al braccio meccanico attraverso un bozzello in acciaio, di cui il dimensionamento deve essere molto accurato poichè in fase di lancio non devono verificarsi moti di rototraslazione, al fine di evitare eventuali errori di target durante ogni prova.

I kit paramassi da collaudare vengono installati in configurazione a sbalzo sulla parete verticale, ad una altezza di 12,02 m dal piano di riferimento.

I quattro pali che costituiscono la struttura di sostegno del kit, vengono generalmente posizionati ad interasse di 10 m e fissati alla parete rocciosa attraverso opportune piastre di ancoraggio formandoun angolo di inclinazione rispetto all'orizzontale di 10° verso l'alto.

In corrispondenza della campata centrale della barriera è stato eseguito uno scavo profondo 4 m rispetto al piano campagna, questo per escludere qualsiasi contatto con il terreno dei pannelli in rete durante la fase di deformazione massima del kit a seguito dell'impatto del blocco.

Per ogni lancio è possibile registrare diversi filmati attraverso la postazione di 4 videocamere digitali: tre di queste sono posizionate frontalmente alle barriere, alle quote di 0,00 m (piano campagna), 11,3 m e 13,18 m, mentre un'altra è posta lateralmente rispetto al kit di prova, alla quota di 13,01m.

Le modalità di collaudo sono quelle tipiche di ogni campo prove a lancio verticale: quando il braccio meccanico ha sollevato il blocco fino alla posizione prestabilita, quest'ultimo viene sganciato dalla fune e fatto impattare sul modulo funzionante centrale del kit paramassi.

L'aspetto principale di questa tipologia di collaudo sta nel fatto che è escluso ogni contatto fra corpo di lancio e terreno prima dell'impatto con la barriera, in modo che non si registri alcuna dissipazione energetica, fatta eccezione

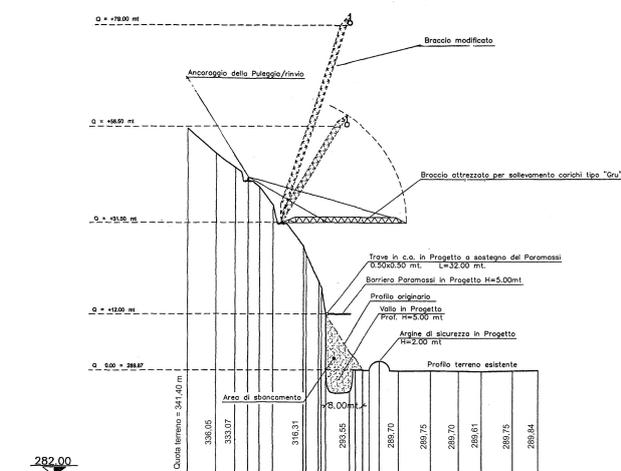


Figura 1.15: Vista laterale del campo prove con indicazione delle altimetrie degli elementi principali

per la resistenza dell'aria, che si considera trascurabile.

Le caratteristiche geometriche del campo prove e le differenti possibilità di posizionamento e dimensionamento dei blocchi di prova, consentono di raggiungere velocità di caduta anche di 30 m/s, con energie sviluppabili oltre i 4000 kJ a 25 m/s, ed oltre i 5800 kJ a velocità superiori.

Le principali caratteristiche del campo prove sono riassunte di seguito:

Traiettoria del blocco di prova	verticale
Pendenza del terreno a valle del kit paramassi	90°
Max peso del blocco di prova	200 kN
Altezza di sollevamento standard	31,50 m
Max altezza di sollevamento dal piano di riferimento	58,50 m
Max altezza di sollevamento con braccio modificato	79,00 m
Altezza del kit paramassi dal piano di riferimento	12,02 m
Profondità dello scavo rispetto al piano di riferimento	4,00 m
Interasse tra i montanti	10 m
Max numero di campate per kit paramassi	3

2.2 Strumentazione di supporto e relative quantità misurate

Ogni campo prove per il collaudo di kit paramassi, oltre all'attrezzatura necessaria per il lancio del blocco, necessita di una serie di elementi di corredo indispensabili al raccoglimento e all'analisi dei dati.

Rispetto all'attrezzatura di sollevamento, la cui caratteristica principale richiesta è la buona resistenza meccanica alle sollecitazioni, alla strumentazione di misura in questione è richiesta la precisione di rilievo.

Dalla qualità dei dati raccolti dipende l'attendibilità delle informazioni tecniche derivanti dalla prova d'urto, per questo è indubbio che per ottenere buoni risultati sia necessario l'utilizzo di apparecchiature estremamente precise e quindi notevolmente costose.

La scelta di attrezzare il campo prove con strumenti di precisione può quindi essere considerata un ottimo investimento, poichè il loro utilizzo permette il rilievo di un maggior numero di informazioni derivanti da ogni singola sperimentazione.

Per questo motivo il numero di prove per ogni barriera può essere sensibilmente ridotto, con conseguente risparmio in termini di tempo e denaro.

Si esaminano ora le strumentazioni di corredo di maggior rilevanza all'interno del campo prove di Fonzasò:

- *strumentazione topografica di precisione*: viene utilizzata prima di ogni prova per la determinazione delle caratteristiche geometriche del kit paramassi e per la valutazione dell'*altezza di caduta* (ΔH) del corpo di lancio, quest'ultima è espressa come la differenza tra la quota dell'intradosso del blocco di prova in posizione di lancio e la quota della linea congiungente la mezzeria delle due piastre di base in cui sono fissati i pali che sostengono il pannello in rete del modulo funzionale centrale del kit;
- *misuratore di velocità a sensori laser*: si tratta di uno strumento ad elevata precisione utilizzato per il calcolo della *velocità del blocco* (v_{fm}) al momento dell'impatto. Esso rileva l'interruzione di tre raggi laser (causata dal passaggio del masso) posti a breve distanza tra loro (circa 100 mm) e calcola il tempo trascorso tra le interruzioni, con un errore di

rilievo inferiore all'1%. I dati rilevati dallo strumento vengono immediatamente trasmessi via radio ad un elaboratore situato nel box ufficio, e qui confrontati con quanto rilevato dalle videocamere digitali. L'utilità di questo apparecchio va ricercata nella possibilità di ricavare l'effettiva energia cinetica di impatto con una precisione non raggiungibile attraverso il solo uso delle videocamere.

- *quattro videocamere digitali*: tali apparecchiature di ripresa sono necessarie perchè grazie all'analisi dei fotogrammi ricavabili dai filmati consentono: la verifica della velocità di caduta del blocco misurata con la strumentazione laser, il rilievo in condizioni dinamiche dell'*allungamento massimo* (D_m) del kit, il *tempo di frenata* (t_s). Come già accennato in precedenza, tre di queste telecamere sono posizionate frontalmente al campo di collaudo (fig.1.16), mentre una è in posizione laterale. questa disposizione permette una osservazione globale ed esauriente del comportamento del kit consecutivamente all'urto. La velocità di ripresa delle videocamere utilizzate è di 23 fotogrammi al secondo.

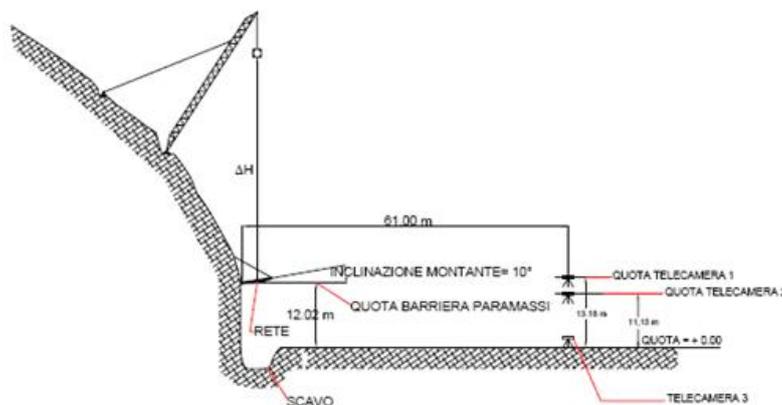


Figura 1.16: Sezione laterale del campo prove con evidenziata l'altezza di caduta, la posizione delle telecamere e la configurazione geometrica del kit paramassi

- *celle di carico*: tutti gli ancoraggi del kit al suolo sono dotati di una cella di carico per il rilievo in continuo della *forza di trazione* (T) agente sugli stessi durante la prova. Questi strumenti vantano una tecnologia

estremamente raffinata, considerando che consentono di effettuare registrazioni di dati con frequenze dell'ordine di 1000 letture al secondo. I pali interni sono stati dotati di particolari dispositivi per la misurazione delle forze trasmesse alle piastre di base: ossia tre celle di carico di cui una per la misurazione della *forza di compressione*(N), una per la *forza di taglio in direzione verticale* (Tv) ed una per la *forza di taglio in direzione orizzontale*(To);

- *dinamometro*: viene utilizzato prima di ogni prova per il calcolo del *peso del blocco di prova*(P).

Grazie alle informazioni ricavate direttamente da questi strumenti, si può risalire con semplicità ai valori di energia cinetica posseduta dal blocco nelle differenti prove.

Nota la massa m del corpo di lancio, misurando l'altezza di caduta , sarà possibile determinare l'*energia potenziale iniziale*(E_{kft}), ricavabile a partire dal valore dell'*energia potenziale iniziale*(E_{pi}) dalla relazione:

$$E_{pi} = mg\Delta H = E_{kft}$$

La misurazione della reale velocità di impatto del blocco contro la barriera consente invece di determinare l'*energia cinetica misurata*(E_{kfm}) all'impatto, ricavabile dalla relazione:

$$E_{kft} = \frac{1}{2} mv^2$$

Al termine di ogni prova, prima che avvenga la rimozione del blocco, viene effettuato un sopralluogo al fine di rilevare deformazioni, eventuali danni ed indicazioni sul comportamento meccanico dei vari elementi costitutivi del kit paramassi.

In particolare, da quest'ultima indagine, vengono misurate le seguenti grandezze:

- *allungamento finale*(D_f);
- *altezza residua*(h_R);
- *altezza nominale*(h_N);
- *accorciamento*(d).

Per accorciamento (d), s'intende la variazione di lunghezza dei dissipatori d'energia rispetto alla configurazione iniziale.

Riassumendo, nella seguente tabella sono riportate tutte le grandezze misurabili direttamente o calcolabili, in sede di prova.

Massa del blocco di prova	m (kg)
Accelerazione di gravità	g (m/s ²)
Peso del blocco di prova	P (kN)
Altezza di caduta	δH (m)
Altezza nominale	h_n (m)
Punto d'urto	posizione
Velocità teorica al momento dell'impatto	v_{ft} (m/s)
Energia cinetica teorica al momento dell'impatto	E_{kft} (kJ)
Velocità misurata al momento dell'impatto	v_{fm} (m/s)
Energia cinetica misurata al momento dell'impatto	E_{kft} (kJ)
Tempo di frenata	t_s (s)
Allungamento massimo	D_m (m)
Azioni sugli ancoraggi	F(kN)
Allungamento finale	D_f (m)
Altezza residua	h_R (m)
Accorciamento dei dissipatori d'energia	d(cm)
Perforazioni del pannello di rete	si/no
Eventuali rotture	si/no

In conclusione, lo studio svolto sul campo prove di Fonzaso, permette di dimostrare ancora una volta, come un campo prove a lancio verticale rappresenti lo strumento migliore per il collaudo e la verifica di kit paramassi ad elevata deformabilità, sia in merito alle tecniche di collaudo che alla possi-

bilità di analisi dei parametri ricavabili dalle prove stesse.

2.3 Risultati delle prove effettuate

Le linee guida ETAG 027 indicano di effettuare sul kit un lancio al massimo livello di energia competente alla classe di appartenenza dello stesso, detto Maximum Energy Level (MEL), e due lanci successivi ad un livello di energia di servizio, detto Service Energy Level (SEL=1/3MEL), al fine di valutare la capacità di resistenza residua della struttura a seguito di un precedente impatto.

La procedura di collaudo prevede inanzitutto il rilievo delle caratteristiche principali del blocco utilizzato per la prova; si tratta di due distinti blocchi, entrambi in calcestruzzo armato e di forma poliedrica (fig.1.17), aventi le seguenti caratteristiche:

- blocco prova MEL: lato $L_{ext}=0,85$ m, peso $P=15,79$ kN, massa $m=1610$ kg, altezza di caduta $\delta H=33,41$ m.
- blocco prova SEL: lato $L_{ext}=0,68$ m, peso $P=5,29$ kN, massa $m=540$ kg, altezza di caduta $\delta H=33,60$ m.

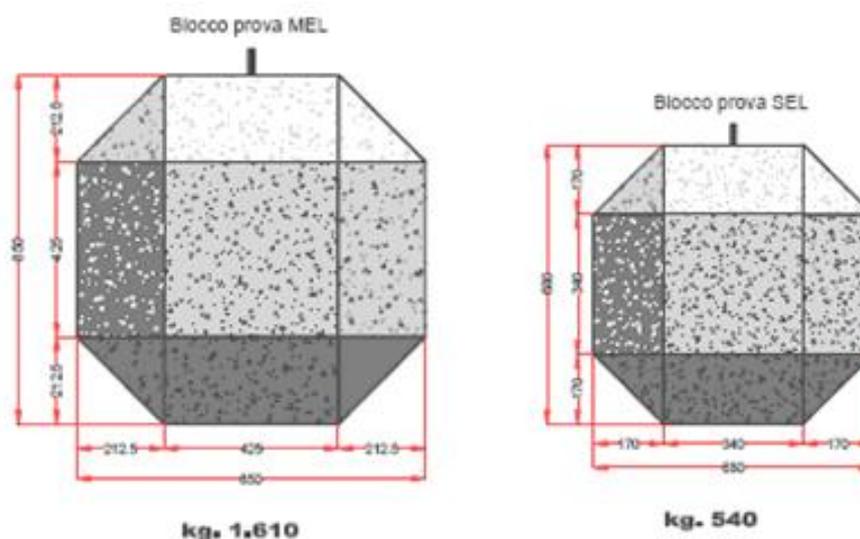


Figura 1.17: Caratteristiche geometriche dei blocchi di prova

Nelle seguenti tabelle sono riportate alcuni dati di prova, relativi al kit paramassi preso in esame, registrati in occasione dei lanci eseguiti in entrambe le tipologie di prova (MEL e SEL).

Kit paramassi-Prove MEL		
Massa del blocco	m	1610 kg
Peso del blocco	P	15,79kN
Velocità misurata all'impatto	V_{fm}	25,44 m/s
Energia cinetica misurata all'impatto	E_{kfm}	528 kJ
Altezza di caduta	ΔH	33,41 m
Altezza nominale	h_N	3 m
Allungamento finale	D_f	2,60 m
Allungamento finale %	$D_{f\%}$	87 %
Allungamento max	D_m	2,95 m
Allungamento max %	$D_{m\%}$	98 %
Altezza residua	h_R	2,12 m
Tempo di frenata	t_s	0,17 s

Kit paramassi-Prove SEL		
Massa del blocco	m	540 kg
Peso del blocco	P	5,29kN
Velocità misurata all'impatto	V_{fm}	25,49 m/s
Energia cinetica misurata all'impatto	E_{kfm}	175 kJ
Altezza di caduta	ΔH	33,60 m
Altezza nominale	h_N	3 m
Allungamento finale	D_f	2,10 m
Allungamento finale %	$D_{f\%}$	70 %
Allungamento max	D_m	2,40 m
Allungamento max %	$D_{m\%}$	80 %
Altezza residua	h_R	2,39 m
Tempo di frenata	t_s	0,17 s

Per quel che riguarda le informazioni agli ancoraggi, l'installazione delle celle di carico nei punti medesimi della barriera ha poi permesso di costruire i

grafici relativi all'andamento temporale delle sollecitazioni di trazione agenti sugli ancoraggi stessi a seguito dell'impatto sul kit collaudato.

Mostriamo di seguito i diagrammi forza-tempo relativi agli ancoraggi del kit registrati durante l'esecuzione della prova MEL.

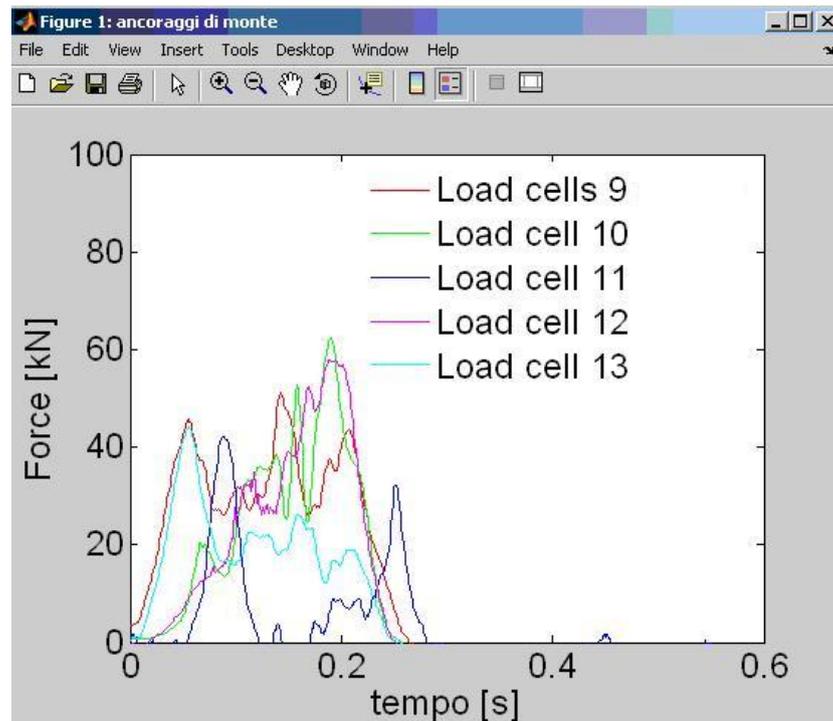


Figura 1.18: Andamento nel tempo della forza di trazione sugli ancoraggi

Lo studio del grafico permette di avanzare le seguenti osservazioni:

- l'andamento della forza di trazione nel tempo è qualitativamente lo stesso per tutti gli ancoraggi;
- l'impatto del corpo di lancio sul pannello centrale in rete del kit provoca un rapidissimo incremento delle sollecitazioni fino al raggiungimento di un picco. I valori più alti sono stati registrati sugli ancoraggi 10 e 12 che hanno raggiunto la linea dei 70 kN;
- dalla visione del percorso delle curve e dai valori raggiunti in corrispondenza del picco, è riscontrabile il comportamento simmetrico della struttura a seguito dell'impatto; questo perchè l'andamento delle

- curve relative alle coppie di ancoraggi simmetriche rispetto alla mezzia della barriera risulta molto simile;
- successivamente al picco vi è un altrettanto rapido decremento delle sollecitazioni dovuto al successivo rimbalzo del blocco sul pannello della barriera, la fase di salita e discesa dal primo picco ha una durata di circa lo 0,3 s;
 - dopo la fase di rimbalzo di circa 1 s, si ha un'ulteriore contatto fra il blocco ed il pannello, che determina un altro picco di sollecitazione di durata leggermente inferiore al primo ma con sollecitazioni raggiunte decisamente inferiori nell'ordine del 20/30% di quella massima;
 - la fase di decelerazione fino al completo arresto del blocco si manifesta, con una serie di rimbalzi di ampiezza sempre più limitata, che si evidenziano nel grafico con una serie di ondulazioni delle curve fino alla stabilizzazione finale, in cui il corpo di lancio risulta oramai immobile.

Si osservi come i valori di picco raggiunti sugli ancoraggi laterali sono in media singolarmente più elevati di quelli di monte.

Nella figura 1.19 sono illustrati gli andamenti delle sollecitazioni registrate dalle celle di carico poste alla base dei montanti centrali del kit, come ricordato più volte le suddette celle hanno la possibilità di rilevare le forze in tre diverse direzioni. In quella successiva (figura 1.20) invece sono illustrati i valori agli ancoraggi laterali bassi.

Nelle tabelle seguenti sono sintetizzati tutti i dati relativi ai valori delle forze di picco (F_p).

La suddivisione in categorie delle celle è la seguente: celle su ancoraggi di monte, celle su ancoraggi laterali, celle su funi longitudinali e celle alla base dei montanti.

Di fianco al numero di ogni cella sono elencati gli estremi dei cavi del kit che convergono alla stessa cella, in corrispondenza di essi, si trovano i valori di accorciamento del dissipatore posizionato sul cavo corrispondente.

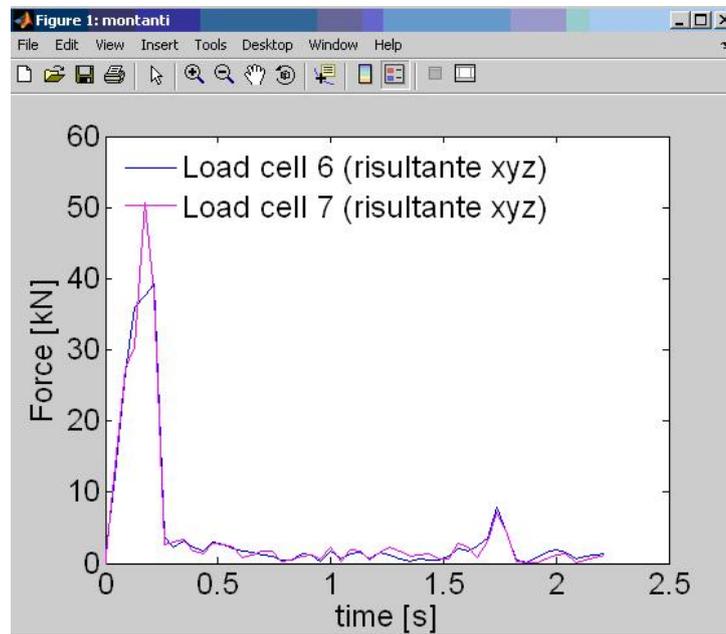


Figura 1.19: Risultante delle forze agenti sul montante

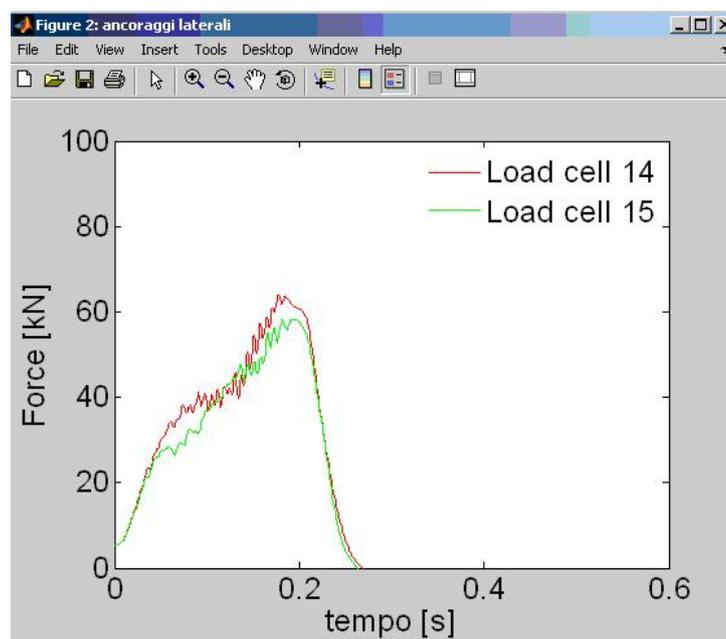


Figura 1.20: Risultante forze ancoraggi laterali bassi

Celle e cavi kit paramassi prova MEL		
Celle	Cavi	Fp
9	R (9-5)	60,50 kN
10	R (10-5/6)	72,60 kN
11	R (11-6/7)	51,10 kN
12	R (12-7/8)	68,10 kN
13	R (13-8)	54,50kN
14	R (14-1)	75,60kN
15	R (15-4)	69,50 kN
2	montante (2-6)	57,50 kN(C) 15,70 kN(T _o) 31,30 kN(T _v)
3	montante (2-6)	52,70 kN(C) 13,60 kN(T _o) 33,70 kN(T _v)

Celle e cavi kit paramassi prova SEL		
Celle	Cavi	Fp
9	R (9-5)	23,50 kN
10	R (10-5/6)	29,60 kN
11	R (11-6/7)	19,50 kN
12	R (12-7/8)	32,20 kN
13	R (13-8)	23,70 kN
14	R (14-1)	38,00 kN
15	R (15-4)	39,10 kN
2	montante (2-6)	26,50 kN(C) 7,20 kN(T _o) 18,50 kN(T _v)
3	montante (2-6)	30,10 kN(C) 6,20 kN(T _o) 19,60 kN(T _v)

Capitolo 2

Dinamica non lineare

1 Cinematica non lineare

L'analisi della barriera è caratterizzata da uno studio di tipo dinamico che contempla una non linearità di tipo geometrico, dovuta a grandi spostamenti e a grandi deformazioni, e una non linearità legata al comportamento del materiale.

1.1 Problema Tipico

Si consideri un problema del tipo:

$$\mathbf{M}(u)\ddot{u} = \mathbf{f}(u, t) \quad (2.1)$$

Dove u sia una incognita dipendente dal tempo t che esprime la configurazione, ovvero l'insieme di posizione e orientazione, di un generico punto del sistema materiale che viene analizzato.

La velocità e l'accelerazione di ogni singolo punto all'istante t si ottengono eseguendo la derivata temporale (mantenendo x costante) rispettivamente delle coordinate spaziali e della velocità:

$$u = u(x, t) \quad (2.2)$$

$$v = \dot{u} = \frac{\partial}{\partial t}[u(x, t)], \quad (2.3)$$

$$a = \ddot{u} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}[u(x, t)] \quad (2.4)$$

Si tratta di un problema differenziale non lineare che risulta dalla scrittura della dinamica di un sistema meccanico generico, indipendentemente dal principio fisico utilizzato (scrittura diretta dell'equilibrio, bilancio di energia, principio lavori virtuali...).

La descrizione della deformabilità in modo corretto richiede la capacità di definire ed utilizzare deformazioni in grado di esprimere correttamente il fatto che un movimento rigido di ampiezza finita ed arbitraria deve corrispondere energia di deformazione nulla.

1.2 Riferimento Relativo o Assoluto?

Un punto fondamentale è che grandezze diverse possono essere descritte nel sistema di riferimento che ne rende più agevole la definizione. In questo senso le equazioni della dinamica sono tipicamente descritte nel sistema di riferimento inerziale perchè in questo modo non compaiono i termini di trascinamento e di *Coriolis* nelle forze di natura inerziale. Le forze di natura elastica sono più convenientemente espresse in un opportuno sistema di riferimento solidale con il materiale; tuttavia la loro trasformazione nel sistema inerziale coinvolge una semplice relazione cinematica che non deve essere derivata, con la notevole eccezione dello smorzamento strutturale, che nel modello residuo in forma viscosa a rigore richiede la velocità di deformazione; si tratta comunque di un ordine di derivazione in meno rispetto alle accelerazioni.

Si consideri ad esempio un punto, la cui posizione sia definita in un sistema mobile di orientazione \mathbf{R} , soggetto a rotazione pura, per cui la posizione del punto nel sistema inerziale é:

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{x}} \quad (2.5)$$

La velocità assoluta è data da:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \quad (2.6)$$

(dove si è fatto uso di $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$) mentre l'accelerazione assoluta è:

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{R}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \quad (2.7)$$

e, come se non bastasse, la sua perturbazione, necessaria per la linearizzazione del problema, è data da:

$$\begin{aligned} \delta a &= \delta \ddot{\mathbf{x}} \\ &= \delta \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \delta \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \boldsymbol{\omega} + (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{x} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}) \delta x \\ &+ 2\delta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}\delta \dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \delta \mathbf{R}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{R}\delta \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Siccome le forze d'inerzia nel sistema assoluto sono definite come $\mathbf{f}_{in} = -m\mathbf{a}$, è evidente che conviene descrivere il movimento del corpo direttamente con le coordinate assolute, per le quali $\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}}$. Se invece vi fossero forze elastiche, tipicamente dipendenti dalla configurazione relativa, la loro espressione, $\tilde{\mathbf{f}}_{el} = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}})$, agevole da definire nel sistema relativo, richiede:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^T \mathbf{x} \quad (2.9)$$

che è una espressione più semplice da maneggiare rispetto all'espressione dell'accelerazione. La forza elastica nel riferimento inerziale diventa quindi:

$$\mathbf{f}_{el} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{R}^T \mathbf{x}) \quad (2.10)$$

Questo approccio può essere svantaggioso nel caso in cui sia necessario considerare formulazioni intrinseche della deformazione.

1.3 Continuo Deformabile

Si consideri un continuo deformabile. Il problema dell'equilibrio di un continuo è dato dall'equazione di equilibrio indefinito.

$$\nabla \cdot \sigma + f = 0 \tag{2.11}$$

l'equazione dei momenti in genere non viene scritta esplicitamente in quanto, fatta eccezione per i materiali polari, i continui non possono contrastare momenti per unità di volume e, di conseguenza, tale equazione degenera in un vincolo algebrico di simmetria per il tensore degli sforzi.

La soluzione di questo problema consiste nel determinare la configurazione del sistema, \mathbf{u} , le cui deformazioni, $\mathbf{D}(\mathbf{u})$, attraverso un opportuno legame costitutivo, danno luogo a sforzi $\sigma(\mathbf{D}(\mathbf{u}))$ tali da soddisfare l'equilibrio e le condizioni al contorno sia in termini di posizione che di carico.

A questo risultato raramente si può giungere in forma chiusa; normalmente si usano metodi basati sulla discretizzazione del dominio e sulla scelta di soluzioni elementari, la cui combinazione dà luogo ad una approssimazione della soluzione. Questi metodi possono essere riassunti sotto il nome generale di metodi agli elementi Finiti (FEM).

1.4 FEM Non-Lineare

Le deformazioni sono intrinsecamente non-lineari. Il concetto di deformazione, in termini puramente cinematici, è legato alla distorsione della rappresentazione di un punto che si ha tra due diverse configurazioni (ad esempio in due istanti diversi, o per diversi livelli di sollecitazione). Esistono diverse definizioni di deformazione (e di sforzo coniugato) che consentono di descrivere in modo opportuno lo stato di deformazione (ovvero l'energia di deformazione) accumulata in un continuo deformato in una data configurazione. Tra queste, le più significative sono[5]:

Formulazione	Sigla	Sforzi e deformazioni
Lagrangiana totale	TL	tensore secondo di Piola-Kirchoff tensore di Green-Lagrange
Lagrangiana aggiornata	UL	tensore di Cauchy tensore di Almansi
Lagrangiana aggiornata secondo Jaumann	ULJ	rateo di sforzo di Jaumann velocità di deformazione

Tipi di analisi:

1. sforzi e deformazioni infinitesime; legame costitutivo lineare o non-lineare (TL);
2. grandi spostamenti e rotazioni, ma piccole deformazioni; legame costitutivo lineare o non-lineare (TL,UL);
3. grandi spostamenti, rotazioni e deformazioni (TL,ULJ).

Si noti come l'approccio TL sia sempre valido, mentre gli altri siano adatti ad analisi specialistiche. Questo significa che l'approccio TL, pur generale, in casi speciali può risultare poco conveniente, mentre approcci specialistici possono consentire maggiore efficienza, accuratezza e semplicità di formulazione.

1.4.1 Deformazioni

La deformazione si ottiene a partire dalla misura della distorsione a cui è soggetto un continuo al variare della sua configurazione. La distanza tra le due diverse posizioni di uno stesso punto in due diverse configurazioni si può esprimere come:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 \quad (2.12)$$

Il suo gradiente rispetto alla configurazione indeformata è

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} = \nabla_0 \mathbf{u} \quad (2.13)$$

La misura della distorsione è data dal gradiente della posizione finale rispetto alla posizione iniziale

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x_1}{\partial x_0} = \nabla_0 x_1 \quad (2.14)$$

a condizione che la variazione di configurazione sia regolare; ne consegue:

$$\mathbf{F} = \nabla_0 x_0 + \nabla_0 u = \mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}} \quad (2.15)$$

Si noti che, per come è definita la trasformazione \mathbf{F} , vale la relazione

$$\delta \mathbf{F} = \delta \bar{\mathbf{F}} \quad (2.16)$$

Una condizione perchè la deformazione sia definita è che il determinante di \mathbf{F} non si annulli; siccome per deformazione nulla, ovvero per $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ e $\bar{\mathbf{F}}=\mathbf{0}$ il determinante è positivo (e unitario), si assume che per una deformazione regolare il determinante debba essere positivo.

Il gradiente dello spostamento è un tensore doppio, che può essere espresso come somma di una parte simmetrica e di una antisimmetrica:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{F}} &= \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T) + \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{F}} - \bar{\mathbf{F}}^T) \\ &= \bar{\mathbf{F}}_s + \bar{\mathbf{F}}_r \end{aligned} \quad (2.17)$$

le quali, per piccole deformazioni, corrispondono alla deformazione e alla rotazione rigida di riferimento.

Si consideri ora la distanza tra due punti infinitamente vicini a due diverse configurazioni, tali che la loro distanza passi da $d\mathbf{x}_0$ a $d\mathbf{x}_1$; dato che $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$, si può scrivere

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{F} d\mathbf{x}_0 \quad (2.18)$$

perchè

$$d\mathbf{x}_1 = d\mathbf{x}_0 + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} d\mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}) d\mathbf{x}_0 \quad (2.19)$$

La norma della distanza diventa:

$$d\mathbf{x}_1^T d\mathbf{x}_1 - d\mathbf{x}_0^T d\mathbf{x}_0 = d\mathbf{x}_0^T \left(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{F}}^T + \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \right) d\mathbf{x}_0 \quad (2.20)$$

La differenza della norma valutata nelle due diverse configurazioni dà la misura della deformazione che ci interessa:

$$d\mathbf{x}_1^T d\mathbf{x}_1 - d\mathbf{x}_0^T d\mathbf{x}_0 = d\mathbf{x}_0^T \left(\bar{\mathbf{F}}^T + \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \right) d\mathbf{x}_0 = 2d\mathbf{x}_0^T \epsilon d\mathbf{x}_0 \quad (2.21)$$

ove ϵ è il tensore di deformazione di *Green-Lagrange*:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\bar{\mathbf{F}}^T + \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} \right) = \frac{1}{2} \left((\nabla_0 \mathbf{u})^T + \nabla_0 \mathbf{u} + (\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \mathbf{u} \right) \quad (2.22)$$

per piccole deformazioni, il termine quadratico si può trascurare, ottenendo così la consueta definizione delle deformazioni lineari.

1.4.2 Sforzi ed Equilibrio

Gli sforzi, come enunciato in precedenza, sono definiti come i tensori che soddisfano l'equilibrio rispetto alle forze di volume e, al contorno, rispetto alle forze di superficie. Al tendere a zero del volume di controllo, se le forze di volume sono regolari (ovvero non vi sono singolarità come ad esempio forze concentrate), l'equilibrio coinvolge solo sforzi sul contorno del volume. Ne risulta che il flusso degli sforzi attraverso la superficie di contorno deve essere nullo, ovvero deve valere la relazione

$$\sigma_n = \sigma \mathbf{n} \quad (2.23)$$

secondo la quale gli sforzi σ_n sulla faccia in direzione \mathbf{n} sono dati dal prodotto di un tensore σ per la direzione \mathbf{n} .

L'equilibrio del volume di controllo è dato da

$$\int_V \mathbf{f} dV + \int_{\partial V} \sigma \mathbf{n} dS = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

ma l'integrale di superficie può essere trasformato in integrale di volume attraverso il teorema di *Stokes*:

$$\int_{\partial V} \sigma \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \sigma dV \quad (2.25)$$

e quindi l'equilibrio, dal momento che deve valere in ogni punto, diventa:

$$\mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma = 0 \quad (2.26)$$

Dal momento che l'equilibrio di un volume di struttura dipende dal flusso di sforzo attraverso il contorno, è fondamentale definire in modo opportuno il sistema di riferimento rispetto al quale vengono operate le differenziazioni. I tensori di sforzo si distinguono in base alla normale e all'elementino di superficie che moltiplicano a dare le forze per unità di superficie in un determinato punto; vale la relazione

$$\sigma \mathbf{n} dS = \sigma_i \mathbf{n}_i dS_i \quad (2.27)$$

ovvero il prodotto del tensore di sforzo per una normale e per un elemento infinitesimo di superficie formulati in modo consistente non dipende dalla configurazione in cui è stato formulato e quindi si conserva.

Quando la normale e l'elementino di area vengono calcolati nella *configurazione deformata* si hanno gli sforzi di *Cauchy*; in questo caso la relazione di equilibrio è scritta concettualmente nella forma

$$\mathbf{f} + \nabla_1 \cdot \sigma = 0 \quad (2.28)$$

ovvero la divergenza viene calcolata nella configurazione finale.

Quando invece si considera la *configurazione iniziale*, si ha il *tensore primo di Piola-Kirchhoff*:

$$\mathbf{f} + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I = 0 \quad (2.29)$$

Questo tensore ha una chiara interpretazione fisica e risulta comodo in quanto elimina la dipendenza dalla configurazione incognita di normale ed elemento di area.

Tuttavia tale tensore non è coniugato ad una misura di deformazione per noi significativa; conviene allora usare il *tensore secondo di Piola-Kirchhoff*, definito come

$$\mathbf{P}_{II} \stackrel{def}{=} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}_I \quad (2.30)$$

Questo tensore è coniugato, dal punto di vista energetico, del tensore di deformazione di *Green-Lagrange*.

Ciò significa che data l'energia di deformazione per unità di volume del sistema (che ovviamente è indipendente dal sistema di riferimento o dalla definizione di deformazione e sforzo adottate), lo sforzo coniugato ad una deformazione si ottiene considerandone il gradiente rispetto ad una data deformazione (e viceversa):

$$\boldsymbol{\sigma} \stackrel{def}{=} \frac{\partial \mathbf{W}_d}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.31)$$

1.4.3 Altre Misure di Sforzo e Deformazione

Come accennato in precedenza, esistono diverse formulazioni del problema della meccanica del continuo, e diverse misure di sforzo e deformazione. I requisiti fondamentali che tali misure devono soddisfare sono: (a) la capacità di descrivere correttamente uno spostamento ed una rotazione rigida, e (b)

l'essere tra loro coniugati dal punto di vista energetico.

Il *secondo tensore di Piola-Kirchhoff* ed il *tensore di Green-Lagrange* soddisfano questa condizione. Anche i tensori di sforzo e di deformazione di *Cauchy* la soddisfano, a patto di riferirsi alla configurazione deformata anziché a quella iniziale, cosa che presenta alcuni svantaggi. Infatti nel secondo caso, il dominio di integrazione e le coordinate rispetto alle quali si eseguono le derivazioni sono incogniti, quindi il problema fin dalla sua impostazione è implicito.

Esistono tuttavia casi in cui sia conveniente lavorare con le grandezze espresse nel riferimento *deformato*: sono i casi in cui la legge costitutiva del materiale non è conservativa, e quindi il tensore di sforzo dipende dalla storia della deformazione. In questo caso conviene utilizzare il *tensore di rateo di sforzo di Jaumann*. La sua definizione è molto semplice: si tratta della derivata temporale del tensore di Cauchy, riportata nel sistema di riferimento del materiale. Sia σ il tensore di sforzo di Cauchy, ovvero il tensore di sforzo ricavato considerando la normale e l'elementino di area in configurazione deformata. Il tensore di *Cauchy* viene *orientato* come il sistema iniziale attraverso la rotazione rigida descritta dalla parte antisimmetrica del gradiente di spostamento:

$$\mathbf{R} = \int_0^t \dot{\mathbf{F}}_\tau d\tau \quad (2.32)$$

con $\dot{\mathbf{F}}_\tau = \boldsymbol{\omega} \times$; quindi lo sforzo di *Cauchy* ruotato nel riferimento iniziale è:

$$\tilde{\sigma} = \mathbf{R}^T \sigma \mathbf{R} \quad (2.33)$$

La sua derivata temporale è:

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega} \times^T \sigma \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\sigma} \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \sigma \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (2.34)$$

Quando il tutto viene riportato in avanti nella configurazione deformata si ottiene

$$\dot{\sigma}_J = \boldsymbol{\omega} \times^T \sigma + \dot{\sigma} + \sigma \boldsymbol{\omega} \times \quad (2.35)$$

Questo tensore è coniugato con la velocità di deformazione,

$$\dot{\epsilon}_J = \dot{\mathbf{F}}_s \quad (2.36)$$

il cui integrale nel tempo è la deformazione di *Cauchy*.

1.5 Pricipio dei Lavori Virtuali

Si parta dall'equazione di equilibrio, considerando tra le forze di volume anche le forze d'inerzia e altre forze generiche comunque potenzialmente dipendenti dalla configurazione (ad esempio le forze di natura elettromagnetica):

$$-\rho \mathbf{a} + \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I = 0 \quad (2.37)$$

dove \mathbf{q} siano incognite che non esprimono la configurazione del sistema. Il lavoro virtuale per unità di volume è dato da

$$\delta \mathbf{u}^T (-\rho \mathbf{a} + \mathbf{f}(\mathbf{q}) + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I) = 0 \quad (2.38)$$

Si noti che $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{x}_1$ in quanto la configurazione iniziale non subisce variazioni virtuali dal momento che non è incognita. Si integri il lavoro sul volume della struttura in configurazione indeformata:

$$\int_{V_0} \delta \mathbf{u}^T (-\rho_0 \mathbf{a} + \mathbf{f}_0(\mathbf{q}) + \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I) dV = 0 \quad (2.39)$$

si noti come anche la densità ed in generale le forze per unità di volume dipendano dalla scelta del volume di riferimento per l'integrazione. L'ultimo termine, che esprime il lavoro della divergenza degli sforzi, secondo la regola di derivazione del prodotto di funzioni si può esprimere come:

$$\delta \mathbf{u}^T \nabla_0 \cdot \mathbf{P}_I = \nabla_0 \cdot (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}_I) - \delta \nabla_0 \mathbf{u} : \mathbf{P}_I \quad (2.40)$$

dove l'operatore $\mathbf{a}:\mathbf{b}$ esegue il prodotto interno coefficiente per coefficiente dei tensori doppi \mathbf{a} e \mathbf{b} . Mentre l'integrale sul volume del primo termine a secondo membro si trasforma in un integrale di superficie dell'argomento della divergenza, nel secondo termine a secondo membro si riconosce la perturbazione virtuale dello Jacobiano della trasformazione di configurazione; si consideri ora la relazione:

$$\begin{aligned}
 \delta \nabla_0 \mathbf{u} : \mathbf{P}_I &= \delta \mathbf{F} : \mathbf{P}_I \\
 &= \delta \mathbf{F} : \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}_I \\
 &= \delta \mathbf{F} : \mathbf{F} \mathbf{P}_{II} \\
 &= \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} : \mathbf{P}_{II} \\
 &= \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) : \mathbf{P}_{II}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

dove, per definizione, $\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I}$, la matrice identità. L'unico passaggio non banale è il penultimo, che sfrutta una proprietà del prodotto interno tra i tensori per la quale $\mathbf{a} : \mathbf{bc} = \mathbf{b}^T \mathbf{a} : \mathbf{c}$. Si noti infine che l'ultima operazione, ovvero considerare

$$\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} : \mathbf{P}_{II} = \frac{1}{2} \delta (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) : \mathbf{P}_{II} \tag{2.42}$$

è lecita in quanto il tensore secondo di *Piola-Kirchhoff* è simmetrico. Si ottiene quindi

$$\delta \nabla_0 \mathbf{u} : \mathbf{P}_I = \delta \epsilon : \mathbf{P}_{II} \tag{2.43}$$

Il risultato saliente è che il lavoro virtuale del sistema può essere scritto come:

$$\int_{V_0} (\delta \mathbf{u}^T (-\rho_0 \mathbf{a} + \mathbf{f}_0(\mathbf{q})) - \delta \epsilon : \mathbf{P}_{II}) dV + \int_{\partial V_0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0 \tag{2.44}$$

dove si è usato $\mathbf{p} = \mathbf{P}_I \mathbf{n}_0$ per indicare la forza per unità di superficie imposta al contorno, mentre la configurazione imposta al contorno è implicitamente

considerata nel $\delta \mathbf{u}$, la cui perturbazione virtuale è diversa da zero solo sulla parte libera.

1.5.1 Rigidezza di Presforzo e Geometrica

A partire dal lavoro interno per unità di volume si possono ricavare interessanti informazioni sui contributi all'equilibrio forniti dalla deformabilità della struttura e legati alla nonlinearietà del problema.

Si consideri il lavoro interno

$$\delta \mathbf{W}_d = \delta \epsilon : \mathbf{P}_{II} \quad (2.45)$$

in cui compare la perturbazione virtuale della deformazione di *Green-Lagrange*, $\delta \epsilon$, data dalla relazione

$$\delta \epsilon = \frac{1}{2} \left((\nabla_0 \delta \mathbf{u})^T + \nabla_0 \delta \mathbf{u} + 2(\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0 \delta \mathbf{u} \right) \quad (2.46)$$

Come si vede il termine quadratico nel gradiente di \mathbf{u} si è trasformato in un termine misto che, al di là del gradiente, dipende linearmente da \mathbf{u} . La linearizzazione del lavoro comporta la perturbazione dei termini di deformazione e di sforzo in funzione della configurazione \mathbf{u} :

$$\delta \delta \mathbf{W}_d = \left(\mathbf{P}_{II} : \frac{\partial \delta \epsilon}{\partial \mathbf{u}} + \delta \epsilon : \frac{\partial \mathbf{P}_{II}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{u}} \right) \delta \mathbf{u} \quad (2.47)$$

Si noti che $\partial \mathbf{P}_{II} / \partial \epsilon$ è la linearizzazione del legame costitutivo, che esprime la relazione tra la perturbazione di deformazione e la perturbazione di sforzo. Il primo termine a secondo membro è il già citato termine di *rigidezza di presforzo*. Esso esprime una forza dipendente dalla configurazione attraverso le sollecitazioni presenti nella struttura; un tipico esempio è dato dalla rigidezza trasversale di un filo, che è direttamente proporzionale alla pretensione applicata al filo stesso. Nel secondo termine a secondo membro, che con un certo abuso di notazione possiamo indicare con

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\nabla_0^T + \nabla_0 + 2(\nabla_0 \mathbf{u})^T \nabla_0) \quad (2.48)$$

la parte lineare, $(\nabla_0^T + \nabla_0)/2$, determina la consueta *rigidezza lineare*, mentre la parte quadratica determina la cosiddetta *rigidezza geometrica*.

Questi contributi sono implicitamente considerati quando si usa la formulazione non-lineare completa; la loro interpretazione è importante quando se ne vogliono considerare gli effetti in termini di correzione di una formulazione lineare o comunque semplificata.

1.5.2 Termini Inerziali

Si consideri ora il termine di lavoro esterno, ed in particolare le forze d'inerzia. Come visto in precedenza, se le incognite che descrivono la configurazione del sistema sono espresse direttamente nel riferimento inerziale, l'espressione delle forze d'inerzia risulta notevolmente semplificata.

A volte, tuttavia, questo non è possibile o non è conveniente per altri motivi. In precedenza era stata scritta l'espressione dell'accelerazione di un corpo la cui posizione era descritta dalla sovrapposizione di un moto relativo ed uno di trascinamento; sostituendo l'espressione dell'accelerazione nella forza d'inerzia per unità di volume si ottiene:

$$\mathbf{f}_{in} = -\rho (\dot{\omega} \times \mathbf{x} + \omega \times \omega \times \mathbf{x} + 2\omega \times \mathbf{R}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \mathbf{R}\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}) \quad (2.49)$$

Lo spostamento virtuale corrispondente è:

$$\delta \mathbf{x} = \theta_\delta \times \mathbf{x} + \mathbf{R}\delta \tilde{\mathbf{x}} \quad (2.50)$$

dove $\theta_\delta \times = \delta \mathbf{R} \mathbf{R}^T$. Il lavoro per unità di volume è:

$$\delta \mathbf{W}_{in} = \theta_\delta^T \mathbf{x} \times \mathbf{f}_{in} + \delta \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{R}^T \mathbf{f}_{in} \quad (2.51)$$

ovvero

$$\delta \mathbf{W}_{in} = - \begin{pmatrix} \theta_\delta \\ \delta \tilde{\mathbf{x}} \end{pmatrix}^T = \rho \left(\begin{bmatrix} \mathbf{x} \times^T \mathbf{x} \times & -\mathbf{x} \times^T \mathbf{R} \\ -\mathbf{R}^T \mathbf{x} \times & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\omega} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{x}}} \end{pmatrix} \right)$$

$$+ \left(\begin{array}{c} -x \times^T \omega \times \omega x - 2x \times^T \omega \times \mathbf{R} \dot{x} \\ \mathbf{R}^T \omega \times \omega \times x + 2\mathbf{R}^T \omega \times \mathbf{R} \dot{x} \end{array} \right) \quad (2.52)$$

di cui è agevole separare la vera e propria matrice di massa generalizzata, il primo contributo a secondo membro:

$$\rho \begin{bmatrix} x \times^T x \times & -x \times^T \mathbf{R} \\ -\mathbf{R}^T x \times & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{m}(x, \mathbf{R}) \quad (2.53)$$

dai termini di trascinamento in $\omega \times \omega \times$, la cui linearizzazione dà la cosiddetta *rigidezza centrifuga*, e di *Coriolis* in $\omega \times \mathbf{R}$, che danno la tipica formulazione del problema dinamico non vincolato

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \quad (2.54)$$

Queste considerazioni possono essere facilmente estese al caso generale; ciò che preme sottolineare è che dalla linearizzazione del problema si nota che le forze di inerzia ‘di riferimento’ danno un contributo di rigidezza e di ritardo che si aggiungono ai termini correttivi puramente deformativi visti in precedenza[5][6].

2 Metodi di integrazione nel tempo

Questo paragrafo è dedicato alla presentazione dei metodi di integrazione diretta della famiglia di Newmark. Tali metodi sono particolarmente usati in dinamica strutturale per la loro accuratezza e possibilità di controllare gli effetti di dissipazione numerica. In particolare richiameremo alcuni risultati fondamentali di stabilità e convergenza sia per il metodo di Newmark sia per il metodo α di Hilber-Hughes e Taylor [7].

2.1 Lo schema di Newmark

Detto Δt il passo temporale di avanzamento temporale, siano $\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n, \mathbf{a}_n$ le approssimazioni della soluzione $\mathbf{u}(t)$ e delle sue derivate temporali all'istante $n\Delta t$.

La famiglia dei metodi di Newmark è definita in funzione di due parametri β e γ che determinano le proprietà di stabilità ed accuratezza del metodo. Lo schema nella forma generale consiste nelle seguenti equazioni:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \quad (2.55)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \quad (2.56)$$

Indicano Velocità e spostamento all'istante t_{n+1} .

$$M\mathbf{a}_{n+1} + K\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{p}t_{n+1} \quad (2.57)$$

Equilibrio all'istante t_{n+1}

$$\hat{K}\mathbf{a}_{n+1} = \hat{\mathbf{p}}_{n+1} \quad (2.58)$$

$$\hat{K} = M + \beta K \Delta t^2 \quad (2.59)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathbf{p}(t_{n+1}) - K \left(\mathbf{u}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{1}{2}(1 - 2\beta)\Delta t^2 \mathbf{a}_n \right) \quad (2.60)$$

Il parametro β caratterizza questo algoritmo ed è introdotto per stabilire il modello di accelerazione tra due istanti di tempo successivi.

Alcuni valori caratteristici di β hanno un significato fisico. Assumere, infatti, $\beta = \frac{1}{6}$ equivale ad ipotizzare un modello di accelerazione ad andamento lineare nell'intervallo di tempo. Considerare invece $\beta = \frac{1}{4}$ equivale ad ipotizzare un andamento costante dell'accelerazione nell'intervallo di tempo.

- Metodo dell'*accelerazione lineare*

$$\beta = \frac{1}{6}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad (2.61)$$

- Metodo delle *differenze centrali*

$$\beta = 0, \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad (2.62)$$

- Regola del *trapezio*

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad (2.63)$$

Il metodo di *Newmark* è detto *implicito*, poichè scrive le equazioni direttamente al passo $n+1$, dovendo però prima calcolare velocità ed accelerazione, mentre il metodo alle differenze centrali è detto *esplicito*, poichè considera le equazioni al tempo t , e le combina con le equazioni alle differenze finite per trovare *esplicitamente* la soluzione al passo $n+1$.

2.2 Metodo α di Hilber-Hughes e Taylor

Velocità e spostamento all'istante t_{n+1} (metodo di Newmark)

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\mathbf{a}_n + \gamma\mathbf{a}_{n+1}] \quad (2.64)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t\mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n + 2\beta\mathbf{a}_{n+1}] \quad (2.65)$$

Equilibrio all'istante t_α

$$M\mathbf{a}_{n+1} + (1 + \alpha)K\mathbf{u}_{n+1} - \alpha K\mathbf{u}_n = \mathbf{p}(t_\alpha) \quad (2.66)$$

Equazione nell'incognita \mathbf{a}_{n+1}

$$\hat{K}\mathbf{a}_{n+1} = \hat{\mathbf{p}}_{n+1} \quad (2.67)$$

$$\hat{K} = M + (1 + \alpha)\beta K \Delta t^2 \quad (2.68)$$

$$\hat{\mathbf{p}}_{n+1} = \mathbf{p}(t_{\alpha}) - K(\mathbf{u}_n + (1 + \alpha)\Delta t \mathbf{v}_n + (1 + \alpha)(1 - 2\beta)\Delta t^2 \mathbf{a}_n) \quad (2.69)$$

Si noti come per $\alpha=0$ si ritorni al metodo di Newmark.

2.3 Requisiti di Hilber e Hughes

Requisiti indicati da Hilber e Hughes (1978)

1. algoritmo incondizionatamente stabile, cioè tale che per una piccola perturbazione introdotta ad un dato istante produce agli istanti successivi perturbazioni limitate (stabile per ogni Δt)
2. accuratezza almeno del secondo ordine, cioè l'errore introdotto al generico passo è non maggiore di una quantità del tipo

$$C\Delta t^2 \quad (2.70)$$

dove C è una costante positiva e Δt è l'ampiezza del passo di integrazione

3. capacità di ridurre l'influenza sulla soluzione dei modi ad alta frequenza artificialmente introdotti dal processo di semidiscretizzazione (smorzamento algoritmico)
4. avvio della procedura senza necessità di algoritmi speciali (algoritmo *self-starting*)
5. onere computazionale richiesto in ciascun passo pari alla soluzione di un singolo sistema delle stesse dimensioni delle matrici di rigidezza K e delle masse M

Metodo di Newmark.

1. soddisfatto per

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (2.71)$$

2. soddisfatto per

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad (2.72)$$

3. soddisfatto per

$$\gamma > \frac{1}{2} \quad (2.73)$$

4. richiesta la determinazione di \mathbf{a}_0

5. soddisfatto

La massima accuratezza del metodo di Newmark si ha per $\gamma=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{4}$ (regola del trapezio)

Metodo α di Hilber Hughes e Taylor.

• 1.,2.,3. soddisfatti per

$$-\frac{1}{3} \leq \alpha \leq 0, \quad \gamma = \frac{1}{2}(1 - 2\alpha), \quad \beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2 \quad (2.74)$$

• 4. richiesta determinazione di \mathbf{a}_0

• 5. soddisfatto

Per $\alpha=0$ si ha la regola del trapezio.

Diminuendo α ($-\frac{1}{3} \leq \alpha < 0$) aumenta la dissipazione alle alte frequenze e si perde accuratezza. Abaqus utilizza appunto un valore di $\alpha=0,05$ che comunque non crea troppi problemi alle basse frequenze.

Capitolo 3

Modellazione numerica

*I computer sono incredibilmente veloci, accurati e stupidi.
Gli uomini sono incredibilmente lenti, inaccurati e intelligenti.
Insieme sono una potenza che supera l'immaginazione.*

- Albert Einstein -

Il lavoro di modellazione numerica della barriera è stato svolto per gradi partendo da un modello molto semplice fino ad arrivare ad uno più complesso. Di seguito saranno descritte e illustrate le diverse problematiche incontrate nell'affrontare la modellazione con il software agli elementi finiti ABAQUS.

1 Caratterizzazione del materiale

Come visto in precedenza il materiale utilizzato per la rete è l'acciaio; questo materiale sarà simulato in campo elasto-plastico (incrudente). Il problema inizialmente affrontato è quello di come definire il materiale nel software [8]. I valori nominali di tensione σ (*nominal stress*) e di deformazione ϵ (*nominal strain*) sono definiti come:

$$\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}_0}, \quad \frac{\Delta l}{l_0} \tag{3.1}$$

dove lo 0 indica i valori riferiti ad uno stato indeformato. Questi valori però non sono accettabili nel caso reale, infatti prendendoli per buoni non si terrebbe conto del cambiamento subito dall'area della sezione del materiale durante lo sforzo, infatti l'uguaglianza della deformazione a compressione e a trazione è valida solo nel caso in cui si considerino piccole deformazioni

$\Delta l \rightarrow dl \rightarrow 0$.

Per cui:

$$d\epsilon = \frac{dl}{l} \quad (3.2)$$

e

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) \quad (3.3)$$

dove l è la lunghezza corrente, l_0 è la lunghezza aggiornata e ϵ è la *true strain* o *logarithmic strain*.

La misura della tensione (*stress*) che è coniugata alla *true strain* è chiamata *true stress* ed è definita come

$$\sigma = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A}} \quad (3.4)$$

dove \mathbf{F} è la forza applicata al materiale e la \mathbf{A} è l'aria modificata.

Quando definiamo la plasticità del materiale in Abaqus per interpretare bene il comportamento del materiale dobbiamo utilizzare i valori cosiddetti 'veri' (*true stress* e *true strain*).

Molto spesso infatti i test effettuati sui provini indicano valori *nominal* e il programma presenta una serie di espressioni per convertire i valori dal caso nominale al caso reale.

La relazione tra *true strain* e *nominal strain* è stabilita nel seguente modo:

$$\epsilon_{nom} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - \frac{l_0}{l_0} = \frac{l}{l_0} - 1. \quad (3.5)$$

quindi

$$\epsilon = \ln(1 + \epsilon_{nom}) \quad (3.6)$$

La relazione tra la *true stress* e la *nominal stress* è formata considerando il

rapporto tra le aree e le lunghezze:

$$l_0 A_0 = l A \quad (3.7)$$

$$A = A_0 \frac{l_0}{l} \quad (3.8)$$

sostituendo la definizione di A dentro alla definizione di *true stress* si ha:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \frac{l}{l_0} = \sigma_{nom} \left(\frac{l}{l_0} \right), \quad (3.9)$$

dove

$$\frac{l}{l_0}, \quad (3.10)$$

può essere anche scritto come

$$1 + \epsilon_{nom}, \quad (3.11)$$

e facendo la sostituzione finale si ottiene la relazione tra true stress e nominal stress e strain:

$$\sigma = \sigma_{nom} (1 + \epsilon_{nom}). \quad (3.12)$$

I valori di ϵ ricavati dai test effettuati sui materiali, ed usati per definire il comportamento plastico dello stesso, molte volte non descrivono il reale comportamento. Infatti probabilmente sono i valori totali di ϵ che tengono conto anche della parte elastica. Per definire nel modo corretto il materiale ABAQUS richiede la distinzione tra la ϵ plastica e quella elastica. La ϵ plastica si ottiene sottraendo a quella totale la ϵ elastica, definita dal valore di *true*

stress diviso il modulo di Young del materiale (figura3.1).

$$\epsilon^{pl} = \epsilon^t - \epsilon^{el} = \epsilon^t - \sigma/\mathbf{E} \quad (3.13)$$

dove

ϵ^{pl} è la deformazione plastica

ϵ^t è la deformazione totale

ϵ^{el} è la deformazione elastica

σ è la tensione vera e

\mathbf{E} è il modulo di Young.

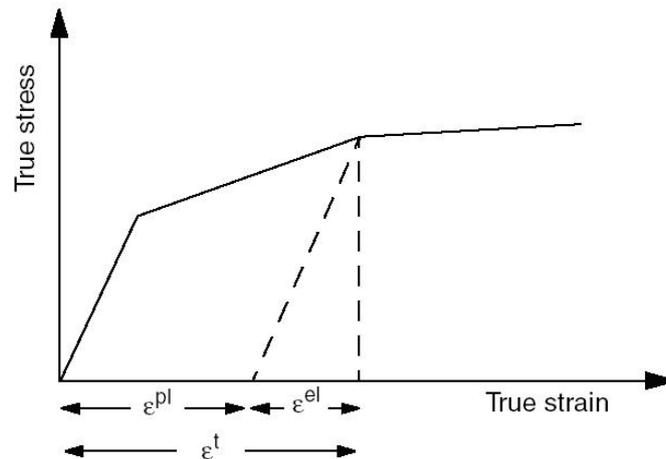


Figura 3.1: Scomposizione della total strain nella componente elastica e plastica

Il comportamento incrudente viene assegnato per punti, sarà poi il programma ad unire con una serie di linee rette i medesimi punti per ottenere dei grafici leggibili. Non c'è alcuna limitazione al numero di punti inseribili.

Vediamo ora come abbiamo caratterizzato il materiale per i vari componenti della barriera.

1.1 Montante

Per montante è stato utilizzato un acciaio S235 EN 10025. Questo materiale sarà simulato con un comportamento elastico-plastico non lineare (fig. 3.2) con i seguenti valori di riferimento:

$$\mathbf{E} = 210GPa, \quad \nu = 0.3, \quad \epsilon^{el} = 0.001, \quad \rho_s = 7800kg/m^3.$$

Il modello del materiale è stato convenientemente calibrato per riprodurre l'andamento dei dati sperimentali, il comportamento è quello di un materiale elastico incrudente (fig.3.2)

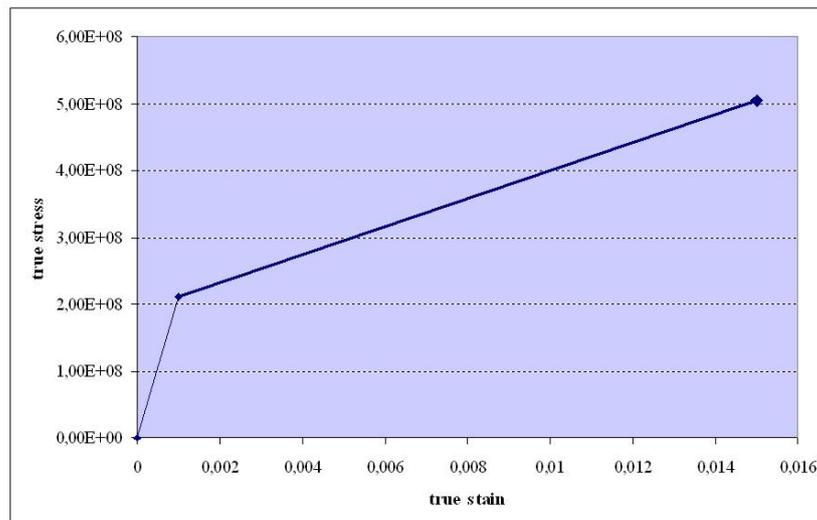


Figura 3.2: Legame costitutivo del montante

1.2 Elementi cavo

Gli elementi cavo meritano un discorso aggiuntivo, infatti tali elementi non hanno alcuna resistenza a compressione. Il software, nel modulo *Plastic*, considera il comportamento del materiale secondo la legge di Mises (simmetrica

per definizione), quindi per riuscire a simulare questo effetto è stata utilizzata la funzione NO COMPRESSION che si trova nel modulo *Elasticity* (fig.3.3). Questa funzione permette di ottenere un materiale con resistenza a compressione nulla (*cut off*) ma è utilizzabile solo con ABAQUS-Standard. L'inconveniente principale di questa sezione del programma è l'utilizzo di analisi di tipo implicito (*dynamic implicit*), più precise e affidabili (incondizionatamente stabili) ma al tempo stesso molto più onerose a livello computazionale rispetto alle analisi di tipo esplicito (*dynamic explicit*)[9].

Per poter utilizzare delle analisi esplicite (ABAQUS-Explicit) si sarebbe potuto scrivere una *routine* in *FORTRAN*, ma tale scelta avrebbe richiesto molto tempo senza sapere se la strada imboccata per la modellazione del materiale avrebbe portato a qualche risultato affidabile.

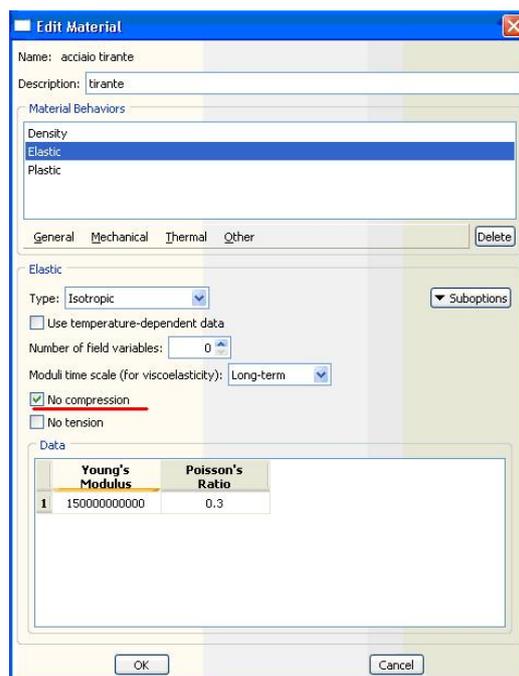


Figura 3.3: No compression

1.2.1 Tiranti

Per i tiranti sono state utilizzate funi di acciaio con classe di resistenza 1766 N/mm² e carico di rottura 161 kN, modellate con un comportamento elastico-incrudente.

Si utilizzano i seguenti valori:

$$\mathbf{E} = 150\text{GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \epsilon^{el} = 0.01, \quad \rho_s = 7800\text{kg/m}^3.$$

Il modello del materiale è stato convenientemente calibrato per riprodurre l'andamento dei dati sperimentali, anche in questo caso il comportamento è quello di un materiale elastico incrudente (fig.3.4).



Figura 3.4: Legame costitutivo dei tiranti

1.2.2 Rete

Per i cavi della rete sono della rete è stato modellato come elastico-incrudente. I valori utilizzati per calibrare la rete sono gli stessi del tirante (fig.3.5)

$$\mathbf{E} = 150\text{GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \epsilon^{el} = 0.01, \quad \rho_s = 7800\text{kg/m}^3.$$

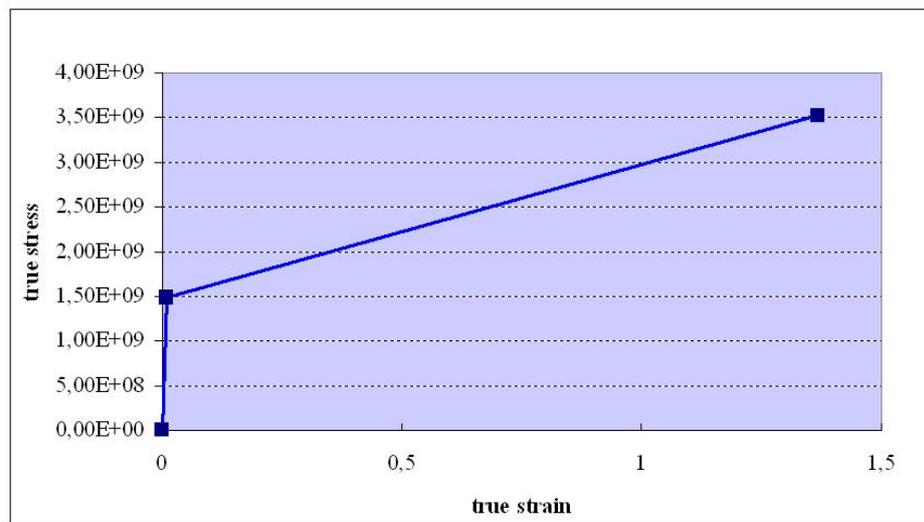


Figura 3.5: Legame costitutivo rete

1.3 Dissipatore

Il dissipatore è un dispositivo frenante composto da un elemento tubolare al cui interno scorrono 2 tiranti (3.6 riquadro rosso e giallo), questo elemento viene modellato attribuendo al materiale un comportamento, come si vede in figura 3.7, elastico-plastico-elastico non lineare.

Il dissipatore si deve attivare quando la forza di trazione raggiunge i 40 kN, deve poi scorrere fino ad allungarsi di un metro (ramo plastico) e successivamente deve riattivarsi fino al raggiungimento della tensione di snervamento del cavo. Le pendenze dei due rami elastici sono uguali mentre la parte di scorrimento ha una pendenza bassissima. I valori utilizzati per la modellazione sono i seguenti:

$E = 150GPa$ (Primo e terzo ramo del grafico)

$$\nu = 0.3\epsilon^{el} = 0.01 \quad \Delta P^l = 1m, \quad \rho_s = 7800kg/m^3$$

Il modello è stato calibrato con opportuni valori che ci hanno poi fornito l'andamento espresso nel grafico (fig.3.7).



Figura 3.6: Dissipatore

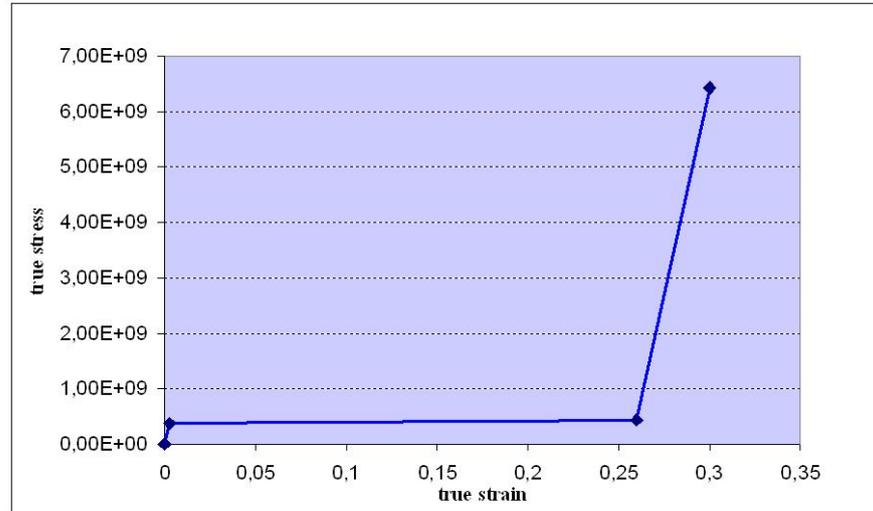


Figura 3.7: legame costitutivo dissipatore

1.4 Esperimento

Di seguito viene illustrato una modellazione di un trefolo per tarare il dissipatore e verificare che il comportamento sia quello atteso.

Si considera un cavo di lunghezza l uguale 1 m, con diametro di 16 mm. Il cavo viene incastrato in sommità con l'utilizzo di alcune cerniere.

Sul cavo, al fine di simulare un carico dinamico, viene applicata una massa all'estremità libera ed una velocità di partenza scelta in modo da arrivare a considerare tutti e tre i rami interessati. Il nostro cavo deve avere un comportamento elastico-plastico-elastico non lineare tipico dei dissipatori che sono inseriti nella nostra rete, deve quindi avere una prima fase elastica, poi allungarsi di una quantità prefissata e infine riattivare una seconda fase elastica. Come per i dissipatori abbiamo imposto alla fase di incrudimento di attivarsi raggiunta la soglia dei 40 kN e una fase di allungamento Δl pari a 0,25% l , al termine della fase di allungamento si riattiva la parte elastica che deve durare fino al raggiungimento della σ ultima.

Dati del nostro trefolo:

Lunghezza cavo (m)(l)	Diametro ϕ (mm)	Area efficace (m ²)	Δl (m)
1	16	0,0001065	0,25

I valori di massa e di velocità inseriti per la calibrazione del modello sono stati presi dopo una serie di tentativi per fare in modo che il cavo raggiungesse

tutti e tre i rami con diversi.

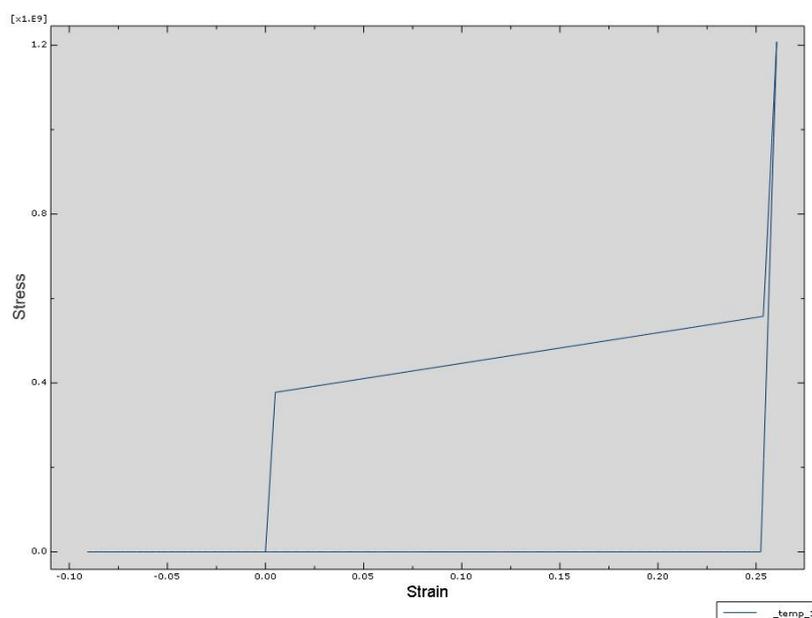


Figura 3.8: Legame costitutivo trefolo

Vediamo dal grafico 3.8 come il nostro cavo, soggetto alla forzante applicata, raggiunga tutti e 3 i rami ed abbia un comportamento elasto-plastico non lineare. Si noti inoltre come il cavo non reagisca affatto a trazione, questo è stato reso possibile dall'opzione NO COMPRESSION nel menu *Elasticity*.

2 Caratterizzazione della geometria

Gli elementi strutturali che sono stati modellati con il codice ad elementi finiti sono: i montanti, le funi longitudinali e la rete. Tra gli elementi elencati, gli unici che hanno rigidità torsionale sono i montanti, mentre gli altri sono in grado di opporsi solo a sforzi assiali di trazione.

Nel modello numerico sono stati pertanto utilizzati due tipologie di elementi finiti: l'elemento *beam*, utilizzato per descrivere il comportamento dei montanti, che è un'elemento definito da due nodi alle estremità, con 3 gradi di libertà per ogni nodo ed in grado di supportare sollecitazioni sia di sforzo

normale, sia di taglio, sia di momento e l'elemento *truss*, utilizzato per descrivere il comportamento dei cavi, che è un elemento definito da due nodi alle estremità, in grado di supportare solo sollecitazioni assiali a trazione. Le piastre di ancoraggio dei montanti ed i vari elementi di collegamento e ancoraggio dei cavi fra loro e con il terreno (morsetti, redance, golfari, copiglie e spinotti di collegamento) non sono stati modellati in dettaglio, ma sono state utilizzate delle tipologie di connessione più semplici.

2.1 Pannello di rete

Per avere informazioni migliori e più dettagliate sul comportamento della rete durante la caduta di un masso, sono state svolte delle prove su un pannello di rete singola. Il pannello è stato considerato inizialmente in piano e caricato al centro perpendicolarmente.

Il pannello misura 4 metri per lato, le funi che costituiscono la parte centrale del pannello sono disposte con una maglia a rombi 30x30 con diametro delle funi pari a 8 mm e area effettiva uguale $27,5 \text{ mm}^2$, lungo il perimetro del pannello c'è un cavo di 16 mm di diametro con area effettiva uguale a $106,5 \text{ mm}^2$ (fig.3.9).

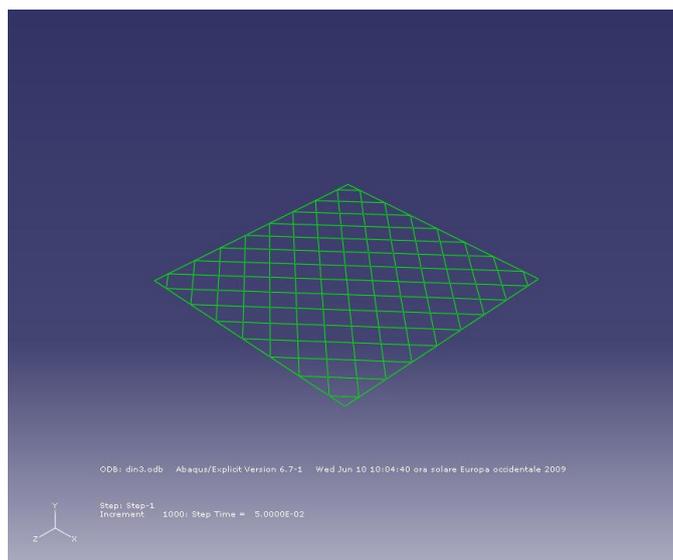


Figura 3.9: Geometria pannello di prova

Elemento	Diametro(ϕ) (mm)	Area nominale (m ²)	Area efficace (m ²)
Tirante	16	0,00020096	0,0001065
Rete	8	5,24E-5	2,75E-5
freno	16	0,00020096	0,0001065

Il materiale è stato modellato scegliendo i valori studiati in precedenza. Nella prova il pannello è stato fissato direttamente a tutti i vertici esterni delle maglie perimetrali. Questo sistema di vincolo è il più rigido realizzabile e consente di valutare le prestazioni del pannello svincolandolo da quelle che sono le reali condizioni d'uso.

La generazione della mesh avviene utilizzando elementi T3D2 (*truss three-dimensional two node*) e la lunghezza è pari a quella di ogni maglia (fig.3.10). L'analisi è stata svolta applicando un carico lineare verso l'alto applicato al centro del pannello[9].

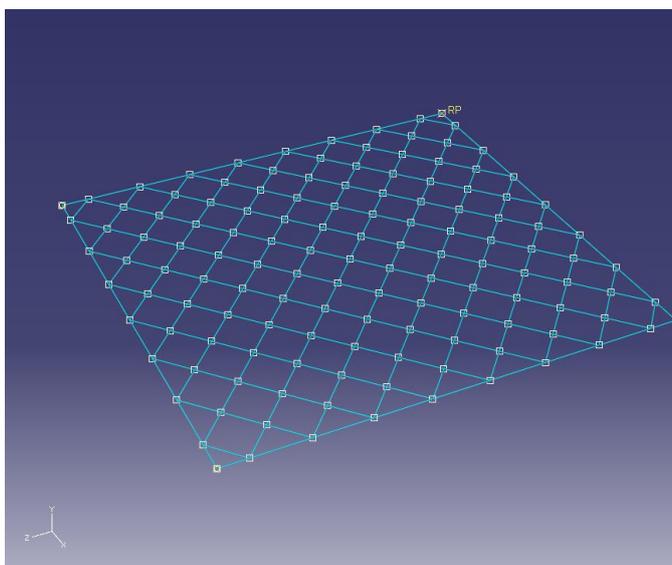


Figura 3.10: Mesh pannello

I vincoli maggiormente sollecitati sono quelli posti in corrispondenza della diagonale principale, questo si nota valutando come cala il valore delle reazioni vincolari mano a mano che ci allontaniamo dai cavi costituenti la diagonale principale. Inoltre si noti come le tensioni maggiori (in rosso ed arancione) si

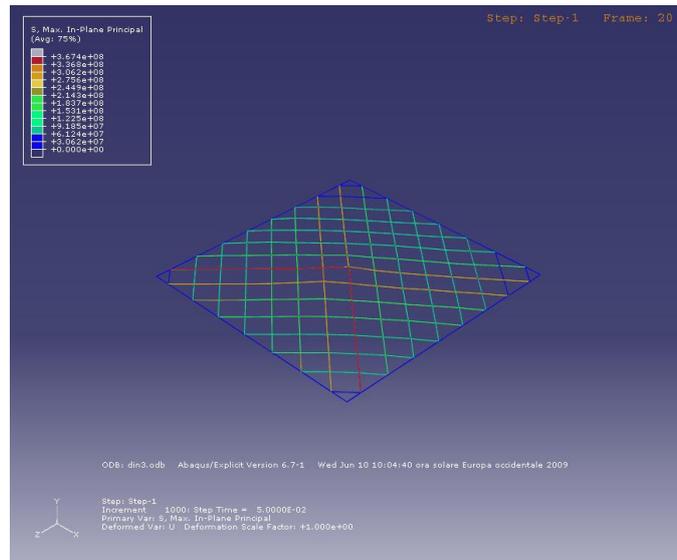


Figura 3.11: Sviluppo delle tensioni nel pannello

sviluppano maggiormente lungo le diagonali principali con un comportamento a ‘croce’ (fig.3.11). Questo fatto, considerando anche la forma e il punto di applicazione del carico, porta a dedurre che non ci sia redistribuzione di carico tra funi costituenti maglie adiacenti. Pur essendo il pannello costituito come un’unica fune, di fatto, è come se da ogni vincolo ne partissero due, ognuna soggetta ad una propria tensione, questo giustifica la scelta fatta nel modello 2D di adoperare solo un’area doppia per modellare il cavo di rete. Dopo alcuni esperimenti nei quali si è spostato il punto di applicazione del carico, si è notato come lo sforzo maggiore sia sempre assorbito dalla fune che attraversa il centro di carico.

2.2 Modello 2D

Per il modello 2D è stata usata una geometria molto semplice, composta da 5 nodi e 4 elementi (fig.3.12). Le coordinate (in metri) x,y dei nodi sono: *nodo 1* (0;3,5), *nodo 2* (3;0,52), *nodo 3* (1,5;0), *nodo 4* (0;0) e il *nodo 5* (0;0,05). Il modello è solo sul piano x,y e si è deciso di modellare con un singolo elemento *truss* (nodi 1-2) tutte le funi di ancoraggio a monte, i montanti sono stati modellati utilizzando un singolo elemento *beam* (nodi 2-5), mentre per modellare la rete sono stati usati 2 elementi *truss*, uno dal nodo 4 al

nodo 3 e l'altro dal nodo 3 al nodo 2, questa soluzione è stata adottata per meglio simulare il comportamento reale della rete, che come visto nei capitoli precedenti, è lasca e quindi non agganciata al montante se non alle sue estremità. Nel modello 2D non vengono presi in considerazione i dissipatori.

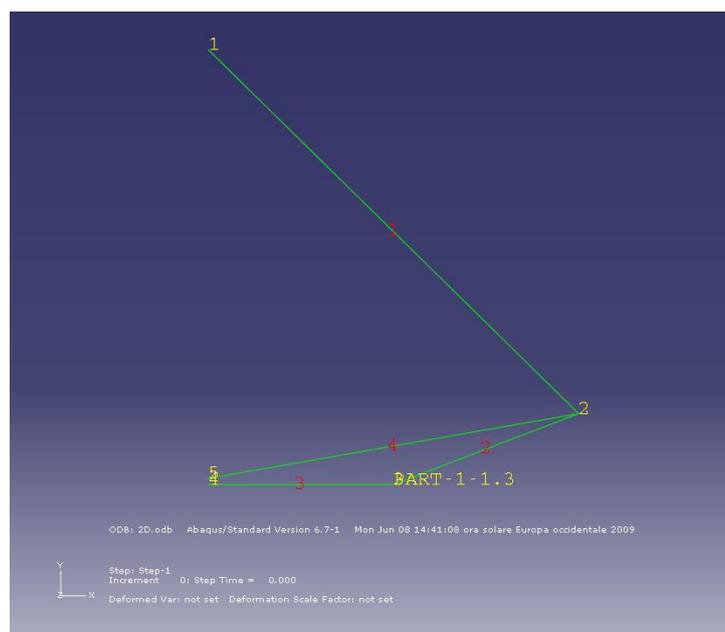


Figura 3.12: Geometria modello 2D

Il diametro dei montanti è di 114,3 mm con spessore di 4 mm, per il modello 2D si è assegnata ad un singolo elemento l'area di tutti i suoi corrispettivi, quindi l'area del montante sarà moltiplicata per 4 e l'area dei tiranti sarà moltiplicata per 8.

Il diametro dei cavi di ancoraggio (tiranti) è di 16 mm, e dato che si tratta di trefoli, la loro area efficace, a causa dei vuoti presenti tra fili diversi, è pari all'85% di quella effettiva [].

Anche i cavi che costituiscono la rete sono dei trefoli di diametro 8 mm, la loro area efficace quindi è pari all'85% di quella effettiva. Per modellare la rete nel modello 2D è stata considerata un'area doppia, [come visto in precedenza sul modello del pannello].

Per simulare la caduta della roccia è stata applicata una massa di 1610 kg (prova MEL) sul nodo 3, proprio all'incrocio tra i 2 elementi che descrivono la rete, ed è stata applicata una velocità pari a 25,44 m/s².

La mesh è stata semplificata al massimo ed ogni elemento non è stato suddiviso. Gli elementi *truss* sono stati modellati come T2D2 (*truss two-dimensional two-node*) mentre l'elemento *beam* per il montante è stato modellato con un elemento B31 (*2 node linear beam in plane*)[10].

Il collegamento dei tiranti al terreno e la piastra alla base del montante sono stati simulati applicando dei carrelli che vincolano gli spostamenti lungo x e y nei nodi 1, 5, e 4.

Il tempo preso in analisi è stato di 0,3 secondi e sono state svolte sia un'analisi di tipo esplicito (ABAQUS-Explicit) sia una di tipo implicito (ABAQUS-Standard) (il tempo di analisi è risultato breve in entrambi i casi) [9].

Elemento	(ϕ) (mm)	Area nominale (A_n)(m ²)	Area effettiva (A_{eff})(m ²)	Area equivalente (A_e)(m ²)
Montante	114,3 (sp 4mm)	0.0014n	1* A_n	4* A_{eff}
Tirante	16	0,0002	0,85* A_n	8* A_{eff}
Rete	8	5E-5	0,85* A_n	2* A_{eff}

La sua deformata si presenta in questo modo:



Figura 3.13: Deformata

2.2.1 Risultati

I risultati dell'analisi sono i seguenti:

Abbassamento:

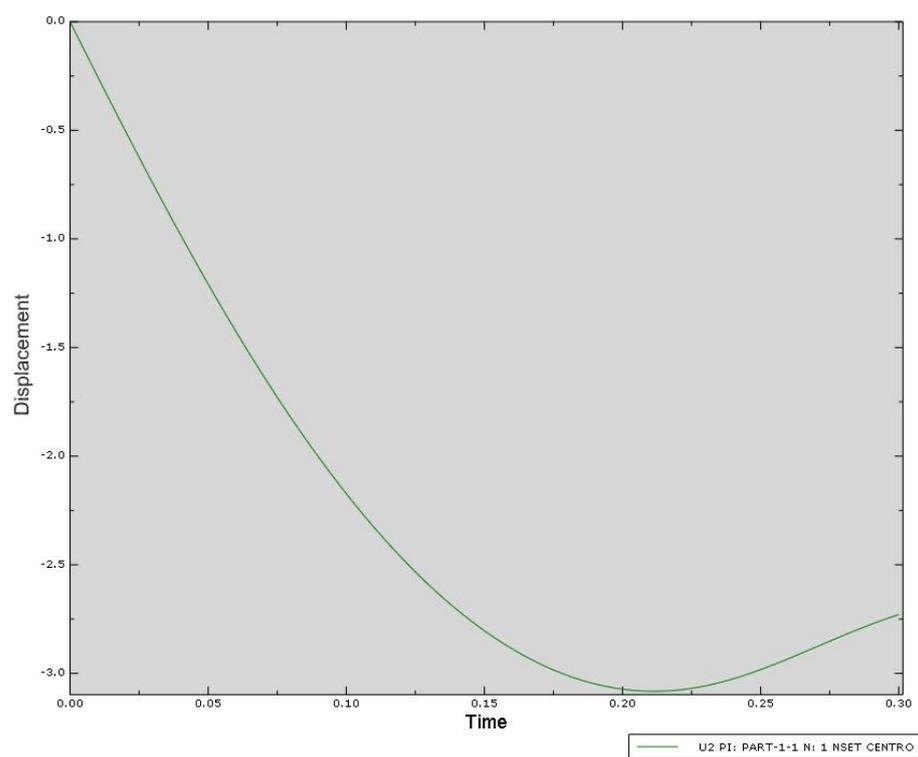


Figura 3.14: Abbassamento

Come si può notare in figura 3.14 i valori dell'abbassamento sono risultati molto simili (leggermente più alti) a quelli forniti dai dati sperimentali. Questo è dovuto al fatto che nel modello 2D non vengono considerati i dissipatori.

Velocità:

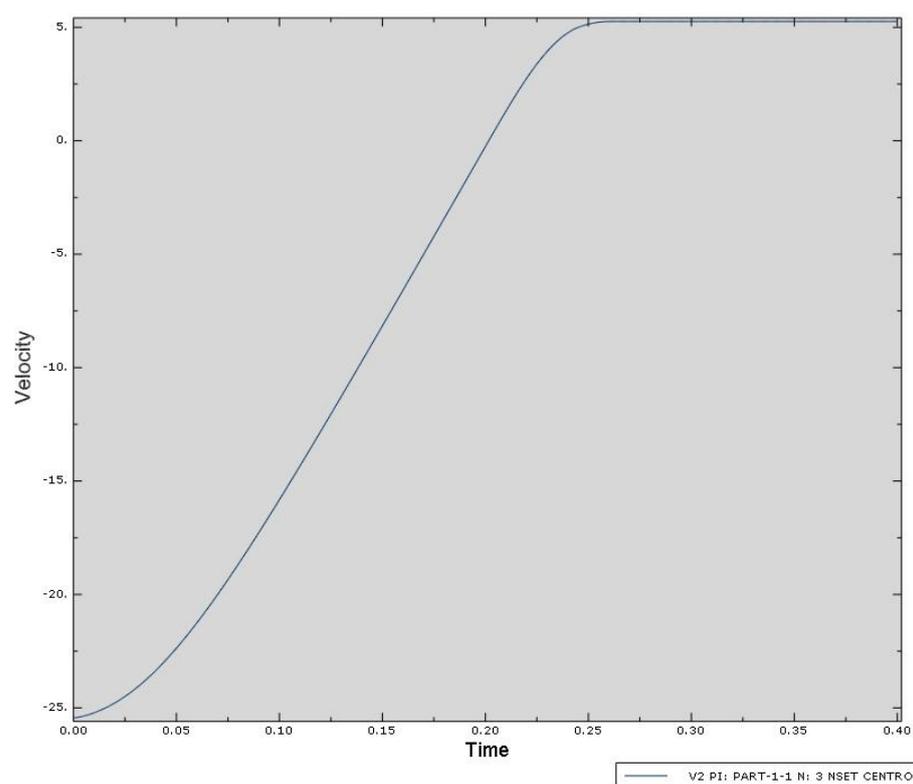


Figura 3.15: Velocità

La velocità ha un comportamento molto simile a quello fornito dai dati sperimentali solo fino al raggiungimento del punto di picco poi il valore rimane costante, ciò dipende dal fatto che la massa della roccia è stata assegnata direttamente alla rete e di conseguenza quest'ultima non riesce a simulare nel modo più corretto il comportamento post-urto.

Forze agli ancoraggi:

Il valore riferito al grafico è stato ottenuto dividendo il valore massimo della forza di trazione raggiunto dal modello per il numero degli ancoraggi.

Questa operazione non permette però di cogliere la differenza di valori che vengono ottenuti nel caso reale, ci consegna solo una media delle forze sugli ancoraggi.

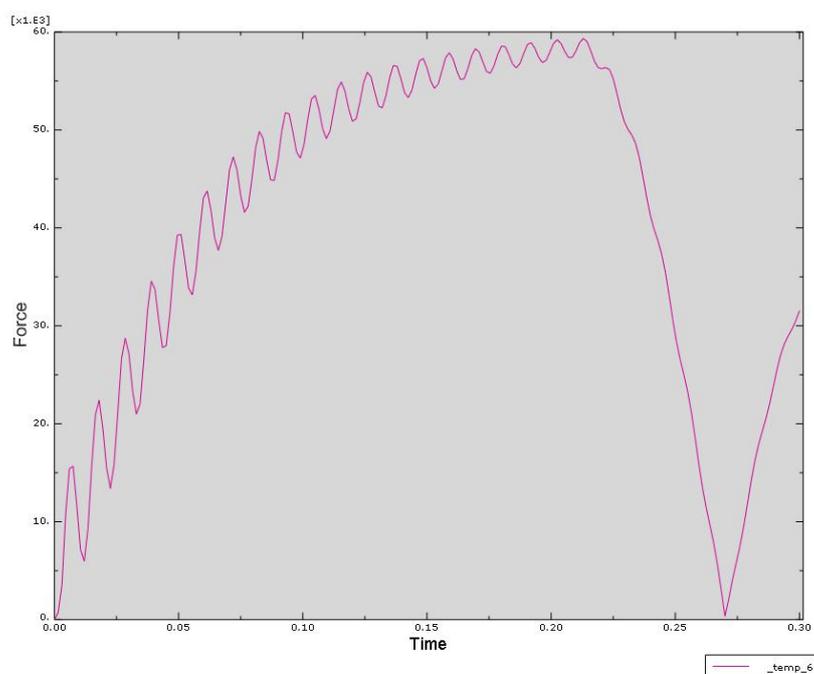


Figura 3.16: Forza agli ancoraggi

Per i valori di forza alla base del montante vale lo stesso discorso fatto per gli ancoraggi, il valore massimo ottenuto è stato diviso per il numero delle piastre di base. Questi valori, in termini di forza massima, sono molto simili ai valori sperimentali ottenuti nel campo prove, ma anche qui non si nota la giusta ripartizione delle forze.

Il tirante come si può notare dal grafico $\sigma - \epsilon$ non raggiunge mai il valore di snervamento indicato in precedenza, rimane sempre in campo elastico, e cosa molto importante non fornisce alcuna resistenza a compressione come si vede nella parte bassa del grafico. Il comportamento è quindi proprio quello di una fune.

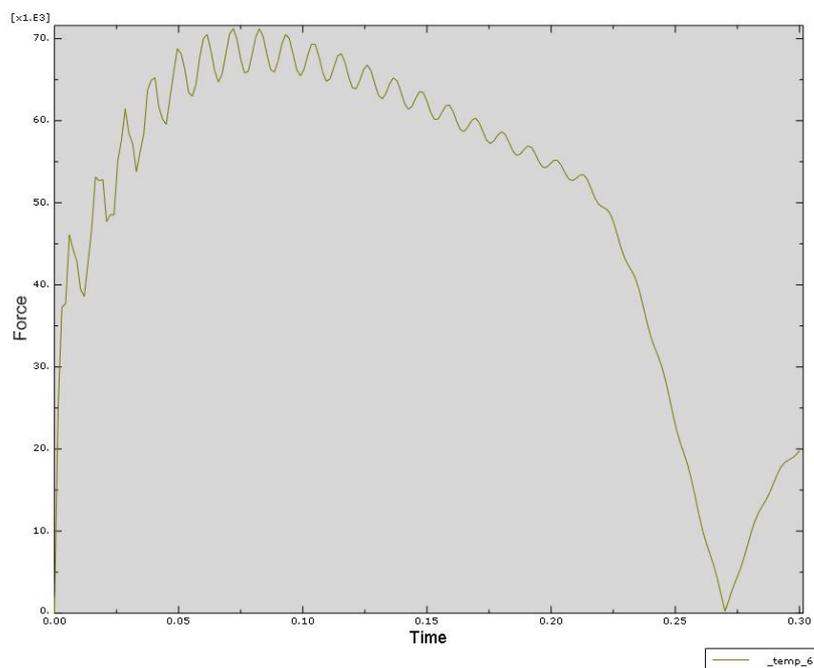


Figura 3.17: Forza base del montante

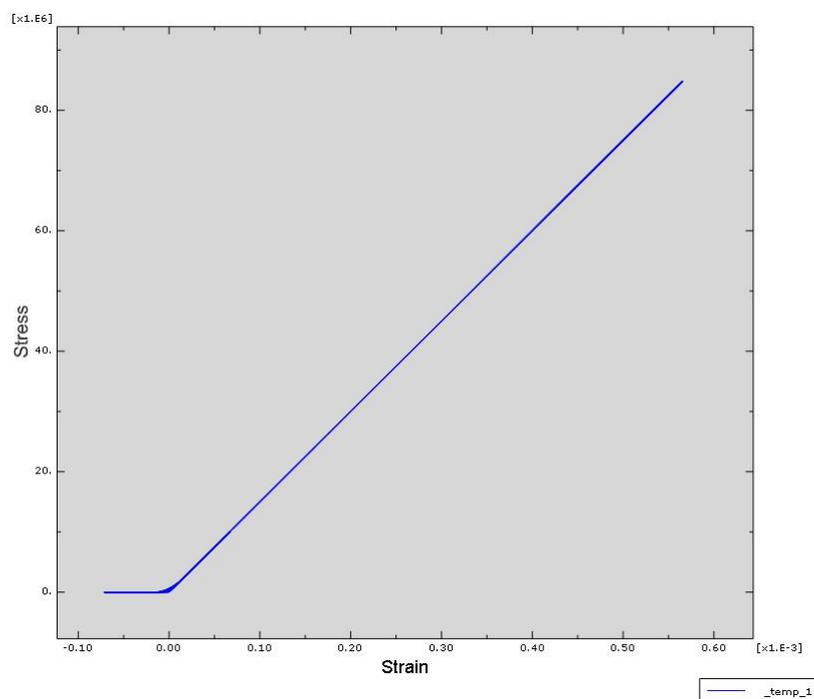


Figura 3.18: Legame costitutivo tirante

Legame costitutivo della rete:

La rete, al contrario del tirante, come si vede nel grafico, ha un comporta-

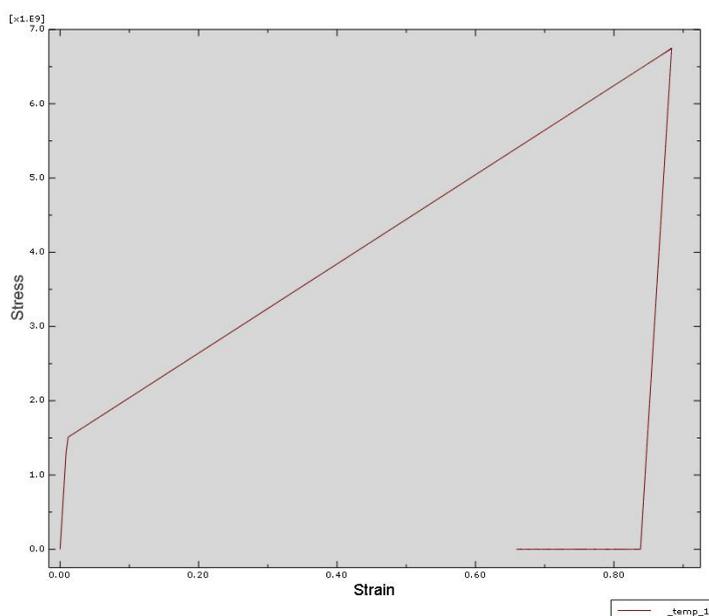


Figura 3.19: Legame costitutivo della rete

mento elasto-plastico non lineare; raggiunge il suo valore di snervamento e presenta una fase di scarico una volta che il masso inizia la sua risalita.

2.3 Modello 3D

Per realizzare il modello 3D, si è operato per gradi: Siamo partiti dal caso semplice con una barriera costituita da una sola campata ed una rete modellata solo da 6 bielle (fig.3.20), successivamente abbiamo inserito una rete più complessa, studiata nel caso del pannello, sempre su una sola campata (fig.3.21), per valutare il comportamento e eventuali problemi sia di natura geometrica che analitica, infine una volta che il modello ad una sola campata si è rivelato stabile e rappresentativo abbiamo esteso il caso alle tre campate cercando di rendere il modello più vicino possibile al caso reale (fig.3.22 3.23).

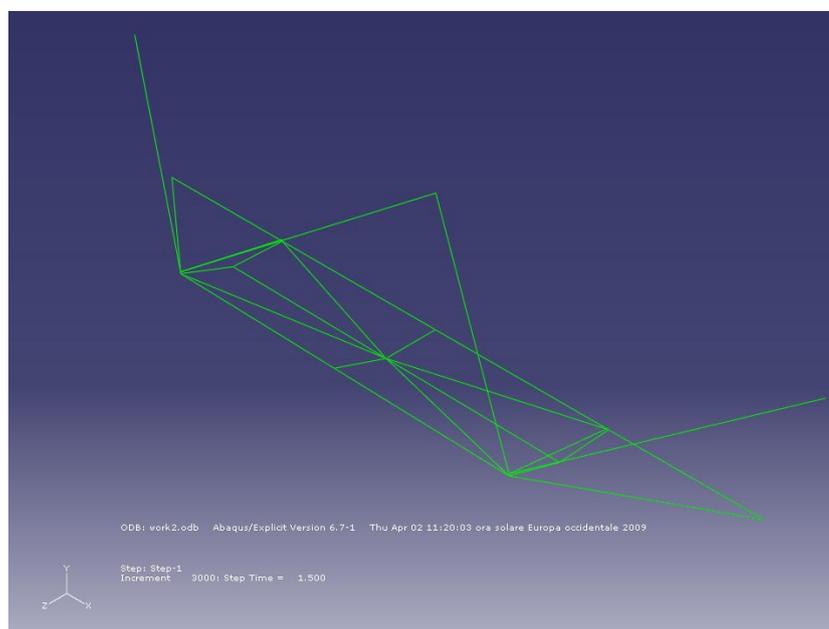


Figura 3.20: Modello 3D unica campata (rete a 6 elementi)

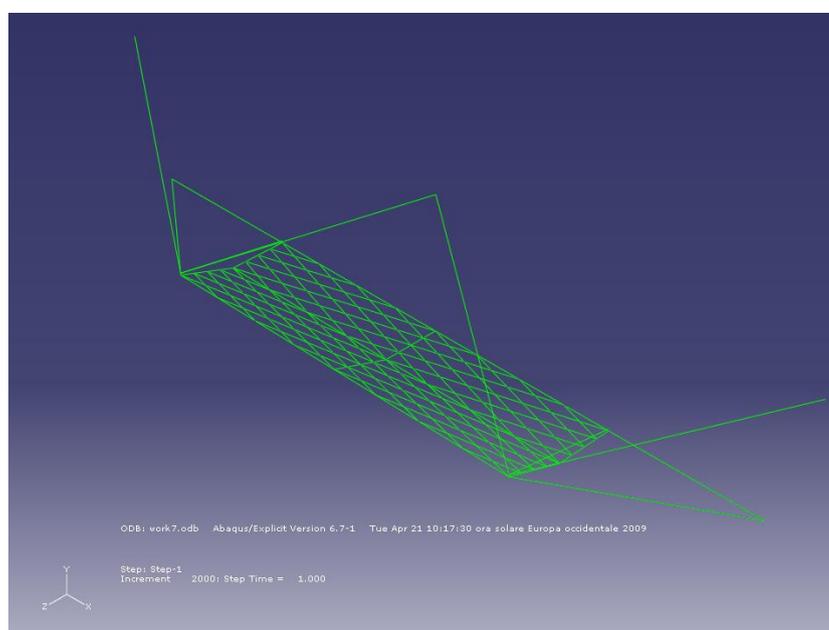


Figura 3.21: Modello 3D unica campata con rete più fitta

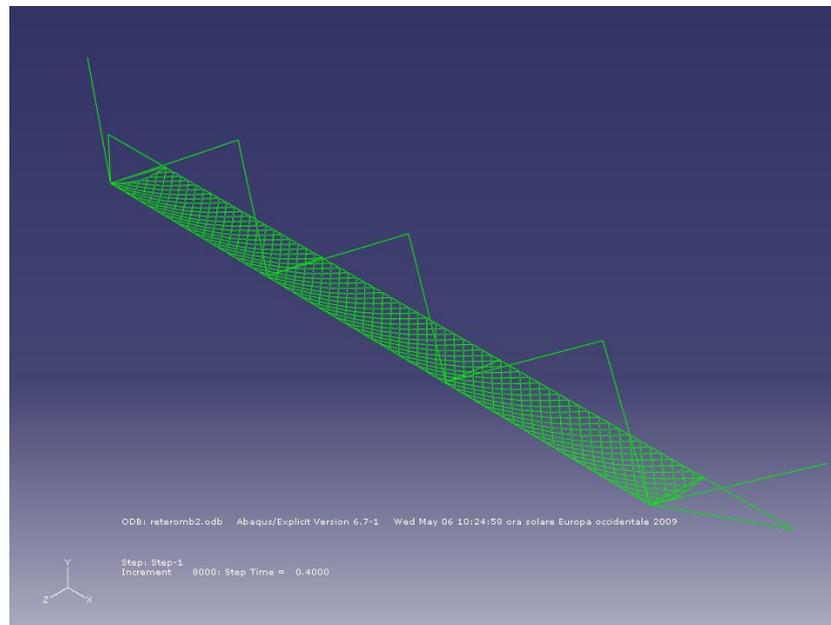


Figura 3.22: Rete completa



Figura 3.23: Particolare rete reale

Le coordinate dei nodi principali, dove sono sistemate le celle di carico, sono riassunte nella seguente tabella:

N° Punti	X (m)	Y (m)	Z (m)
11	0	3,5	0
12	10	3,5	0
13	20	3,5	0
15	19	-1	0
10	-10	3,5	0
9	-20	3,5	0
14	-19	-1	0

2.3.1 Materiale

Per quel che riguarda il materiale per calibrare il modello sono stati presi gli stessi valori studiati e commentati sia nello studio del pannello singolo che nel caso bidimensionale, di seguito sono comunque riassunti i legami costitutivi che interessano la modellazione 3D.

Nell'assegnare le caratteristiche del materiale non bisogna assolutamente scordare la funzione NO COMPRESSION che risulta determinante per avere un comportamento di tipo *cavo* dei tiranti, della rete e del dissipatore [8].

Montante	
Density (Kg/m ³)	Modulo di Young E (GPa)
7800	210

Rete e Ancoraggi	
Density (Kg/m ³)	Modulo di Young E (GPa)
7800	150

Dissipatore	
Density (Kg/m ³)	Modulo di Young E (GPa)
7800	150

2.3.2 Sezioni

Le sezioni utilizzate nel modello non sono quelle nominali, ma bensì quelle effettive, questo perchè i cavi considerati sono dei trefoli e presentano una non continuità di materiale con annessi vuoti al loro interno, per tenere conto di ciò si utilizza la formula della normativa [11] per il calcolo dell'area efficace:

$$A_m = \frac{\pi d^2}{4} f \quad (3.14)$$

dove f indica un valore 'di riempimento', adimensionale, che nel caso dei trefoli misura 0,56.

Si fornisce una tabella riassuntiva delle Aree utilizzate per la modellazione del modello 3D.

Elemento	(ϕ) (mm)	Area nominale (A_n)(m ²)	Area effettiva (A_{eff})(m ²)
Montante	114,3 (sp 4mm)	0,00138n	0,00138
Tirante	16	0,00020096	0,0001065
Rete	8	5E-5	2,75E-5

2.3.3 Mesh

Una volta esaurito lo studio del materiale e delle sezioni siamo passati alla generazione della mesh; tutti gli elementi cavi (tiranti, rete e dissipatori) sono stati modellati con degli elementi di tipo *truss* (T3D2 Three-dimensional Two-nodes), questi elementi molto semplici sono definiti solo dai due nodi alle estremità e sono in grado di opporsi solo a sforzi assiali di trazione, per i montanti si sono utilizzati invece degli elementi *beam* (B31 2-node linear beam in space) questi elementi sono definiti da due nodi alle estremità, con 3 gradi di libertà per ogni nodo e sono in grado di supportare sollecitazioni sia di sforzo normale, sia di taglio che di momento [9].

Nella figura 3.24 si vede come la configurazione della mesh sia molto semplice, nel particolare ingrandito si può vedere come gli elementi della rete non siano stati divisi ma hanno la lunghezza della maglia, così come anche i montanti e i tiranti hanno mantenuto la loro lunghezza nominale(fig.3.25).

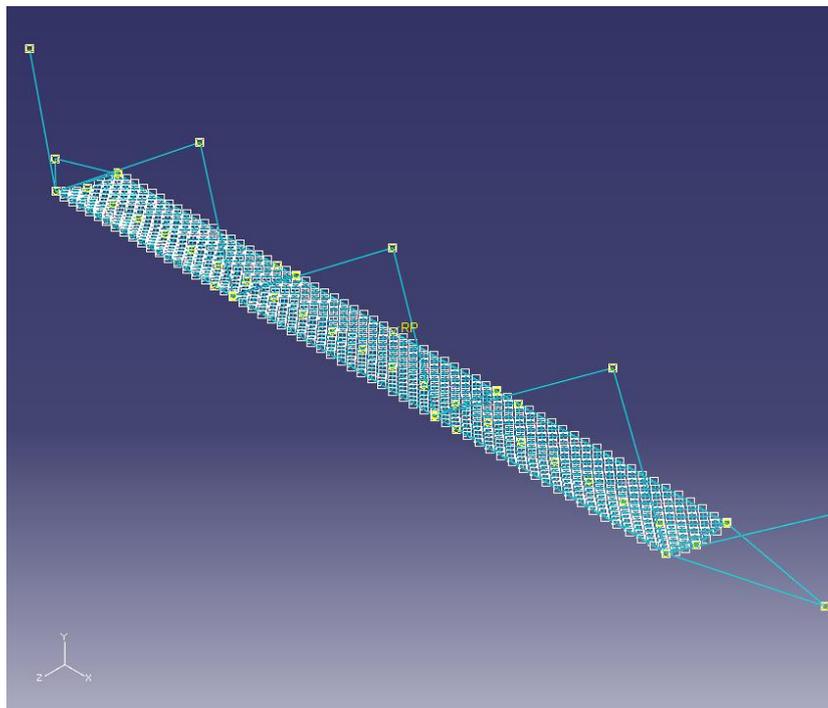


Figura 3.24: Crezione della MESH

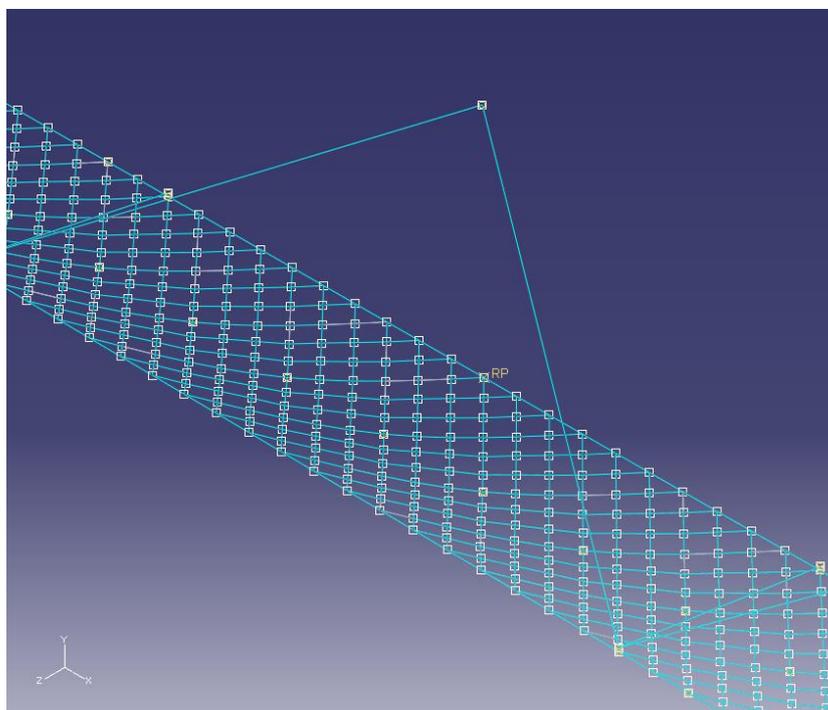


Figura 3.25: Particolare MESH

2.3.4 Vincolamento e carico

L'aggancio dei tiranti e del dissipatore al terreno (fig.3.26) è modellato con delle cerniere che ne impediscono lo spostamento in tutte le direzioni, per quanto riguarda le rotazioni ed i momenti, non sono stati considerati dato che i tiranti sono modellati come degli elementi Truss; la modellazione della piastra di base (fig.3.27), invece si è dovuta realizzare con un incastro, questo perchè il montante è modellato con degli elementi Beam, e quindi bisogna tenere in considerazione anche i momenti e le rotazioni.



Figura 3.26: Ancoraggio con cella di carico



Figura 3.27: Piastra di base

La simulazione della caduta del blocco di roccia avviene, come già accaduto per le prove precedenti, ponendo una massa ed una velocità iniziale al centro della campata centrale. In questo caso per rendere più veritiero il modello, la massa è stata suddivisa sui nove punti centrali della rete, e ad ogni punto di applicazione è stata assegnata la velocità di $25,44 \text{ m/s}^2$ (fig.3.283.29).

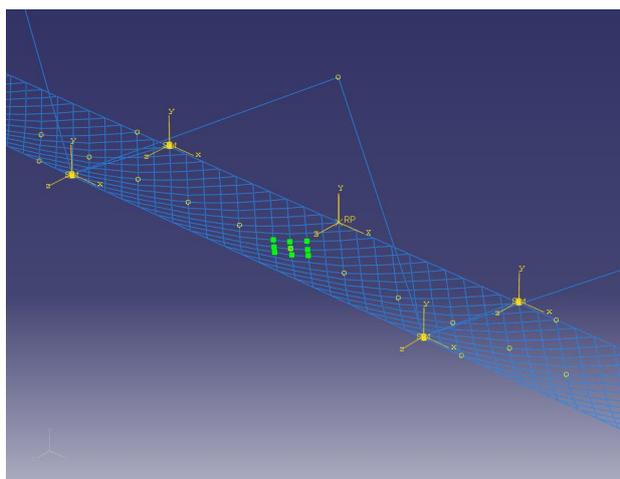


Figura 3.28: Massa distribuita

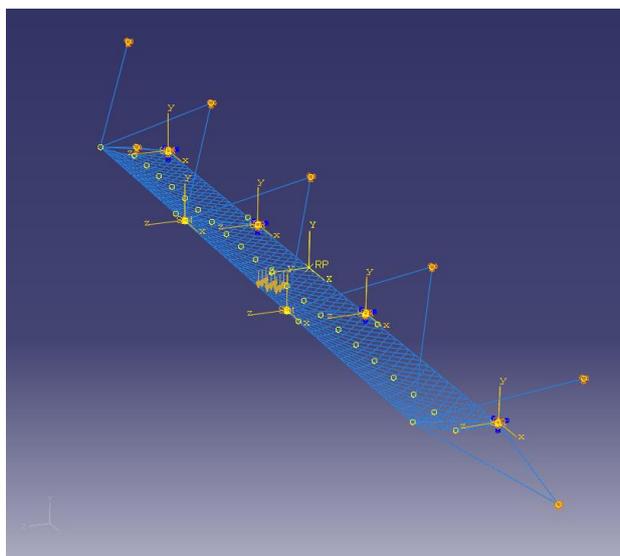


Figura 3.29: Vincoli e Velocità iniziale

2.3.5 Particolari costruttivi

Nella composizione del modello tridimensionale, la modellazione dei particolari costruttivi è risultata determinante. Per particolari costruttivi si intendono le piastre di base e i collegamenti fra i montanti ed il tirante esterno (perimetro) della rete (chiamati per semplicità ‘connettori’).

Il collegamento fra il tirante esterno della rete e il montante esterno non presenta particolari problemi, infatti come si può vedere dalla foto (fig.3.30), alla testa del montante tutti i tiranti hanno un cappio che non permette scorrimenti relativi, questo ne facilità la modellazione, infatti la soluzione adottata è quella di far convergere tutti gli elementi in un unico punto alla testa dell'elemento montante (fig.3.31). La soluzione adottata si è rivelata essere buona.



Figura 3.30: Particolare montante esterno

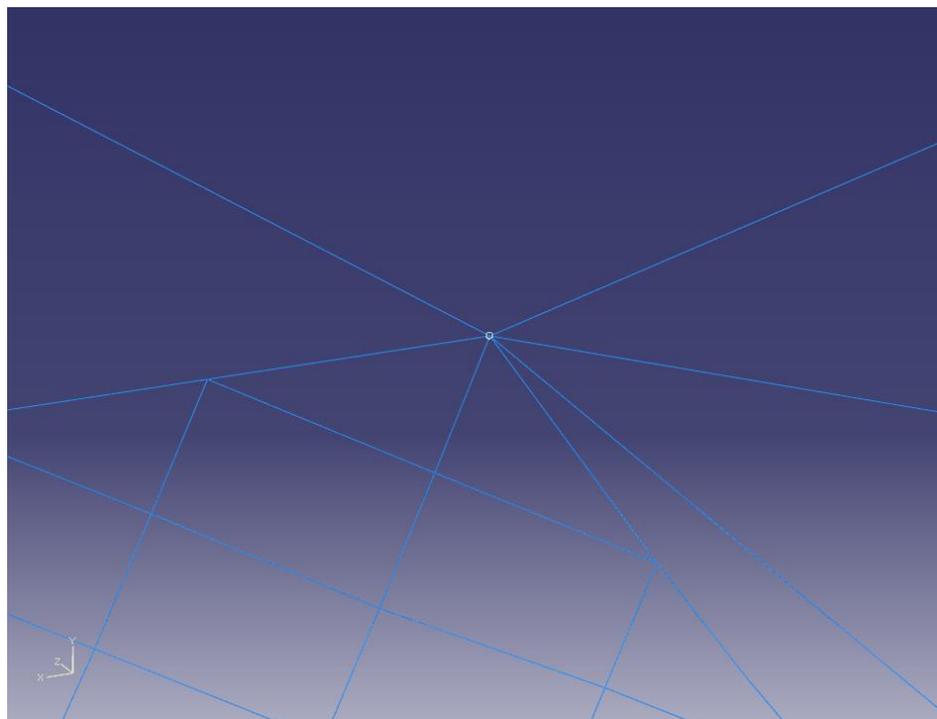


Figura 3.31: Modellazione montante esterno

La modellazione degli elementi di connessione sotto i montanti centrali e sulle piastre di base ha richiesto un'attenzione particolare, in questi punti infatti il tirante esterno della rete passa all'interno di anelli fissati sulla piastra o saldati sotto la testa del montante (fig.3.32 3.27).

Le prime soluzioni di tentativo sono state quelle di vincolare, per il modello della piastra di base, la rete con dei carrelli che permettessero solo lo scorrimento lungo la direzione x (lungo la congiungente delle basi dei montanti), mentre, per quel che riguarda gli anelli alla testa dei montanti, si era pensato di modellarli con una biella avente rigidezza uguale a quella dei montanti.

Queste soluzioni non hanno prodotto risultati soddisfacenti soprattutto a causa dell'elemento biella, su questo elemento infatti, si sviluppavano troppe tensioni che, oltre a deformare troppo l'elemento stesso, si andavano a scaricare solo sugli ancoraggi centrali (10,11,12) lasciando praticamente scarichi quelli laterali (9,13), veniva inoltre limitato moltissimo lo scorrimento della rete, rendendo quasi del tutto scarichi i dissipatori (14,15).

La scelta del connettore è quindi caduta su un particolare elemento denomi-

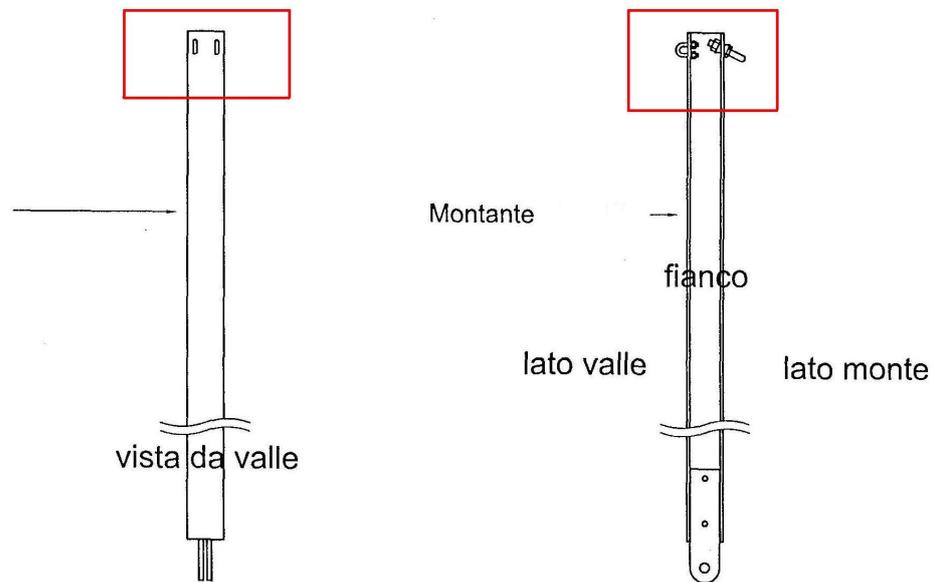


Figura 3.32: Particolare anello alla testa del montante

nato **SLOT** (fig.3.33), questo elemento (*connection type*) fa parte della categoria dei connettori *Translational type* e permette lo scorrimento lungo $u_1(x)$ mantenendo la distanza (y_0) fra i due punti a e b inalterata fino al raggiungimento di un determinato valore di tensione (D11) che ne provoca una deformazione lungo (y_0) comunque controllata. Su questo elemento inoltre è possibile far intervenire un coefficiente d'attrito per la parte scorrevole, ideale per simulare lo scorrimento relativo tra la rete ed il suo tirante di bordo. Poichè anche alla base del montante, sulla piastra, avviene uno scorrimento del tirante dentro a degli anelli si è deciso di adoperare anche qui l'elemento **SLOT**.

2.3.6 Risultati dell'analisi

In questa ultima parte saranno ora esposti i risultati ottenuti dall'analisi effettuata con il modello implementato. I valori usciti dall'analisi sono stati riportati in MATLAB così da poter meglio valutare le differenze con i dati raccolti sul campo prove. Il confronto è avvenuto in prima battuta analizzando se il valore massimo dato dalla cella di carico era dello stesso ordine di grandezza di quello ottenuto dall'analisi al calcolatore e in seguito sono stati

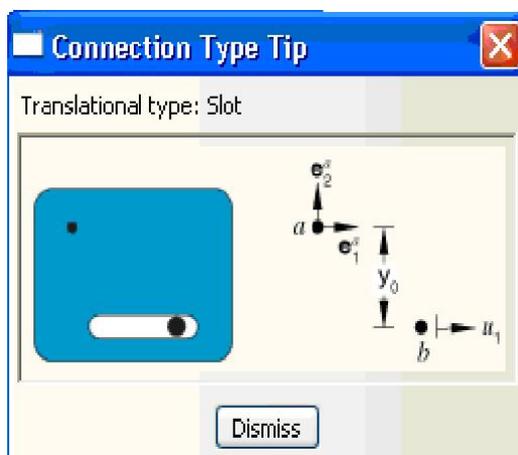


Figura 3.33: Slot

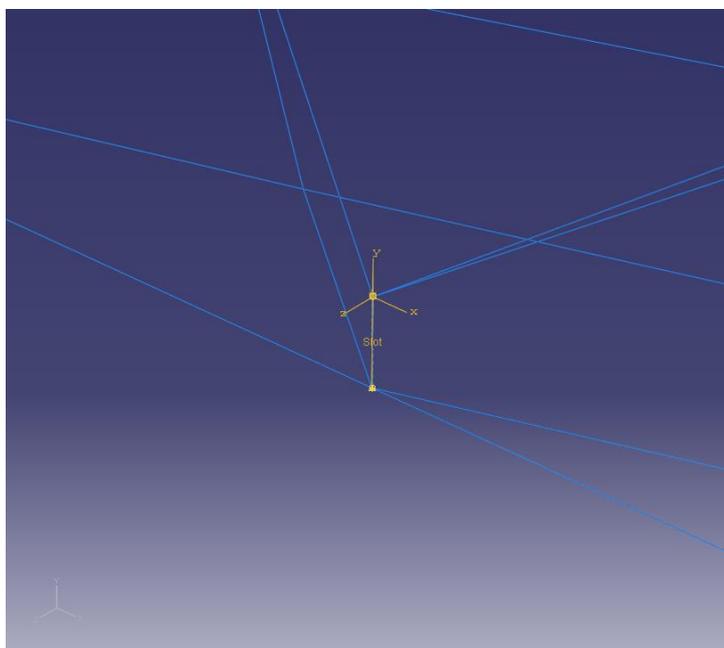


Figura 3.34: Slot inserito tra montante e rete

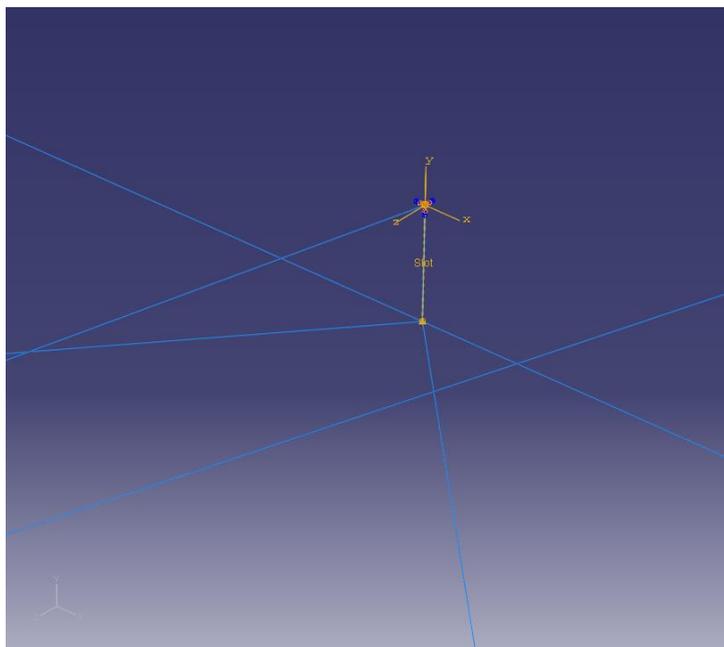


Figura 3.35: Slot alla base del montante

confrontati gli andamenti nel tempo grazie alla sovrapposizione dei grafici.

Come si può vedere dalla figura 3.36 il valore massimo di tensione ottenuto dal calcolatore è molto simile a quello misurato sul campo, pari all'incirca a 50 kN. La differenza principale risulta essere però l'andamento del grafico, infatti il caso reale (non tratteggiato) presenta una salita di carico graduale verso il picco mentre la curva ricavata dal calcolatore è quasi una linea verticale; la seconda differenza che si nota subito è la diversa durata del picco di carico, che nel caso sperimentale è molto più ampio rispetto al caso reale.

I valori misurati sugli ancoraggi intermedi (fig. 3.37) risultano essere invece troppo alti, anche se l'andamento della curva ottenuta con il modello risulta essere abbastanza simile a quella del caso reale. Infatti il tempo in cui viene raggiunto il picco di carico è lo stesso del caso reale e la durata di tutta la fase di carico e scarico è molto simile.

L'ancoraggio laterale alto del modello (linea tratteggiata) presenta dei valori di picco leggermente più alti rispetto al caso reale anche se come si può vedere nella figura 3.38 il primo picco di carico viene simulato molto bene.

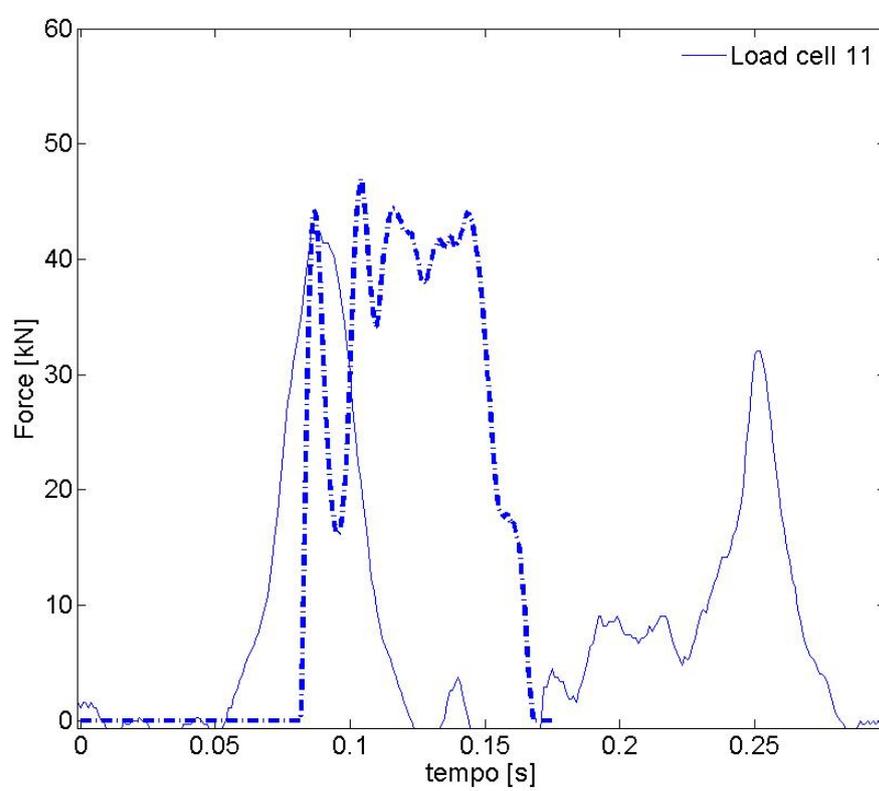


Figura 3.36: Confronto ancoraggio centrale

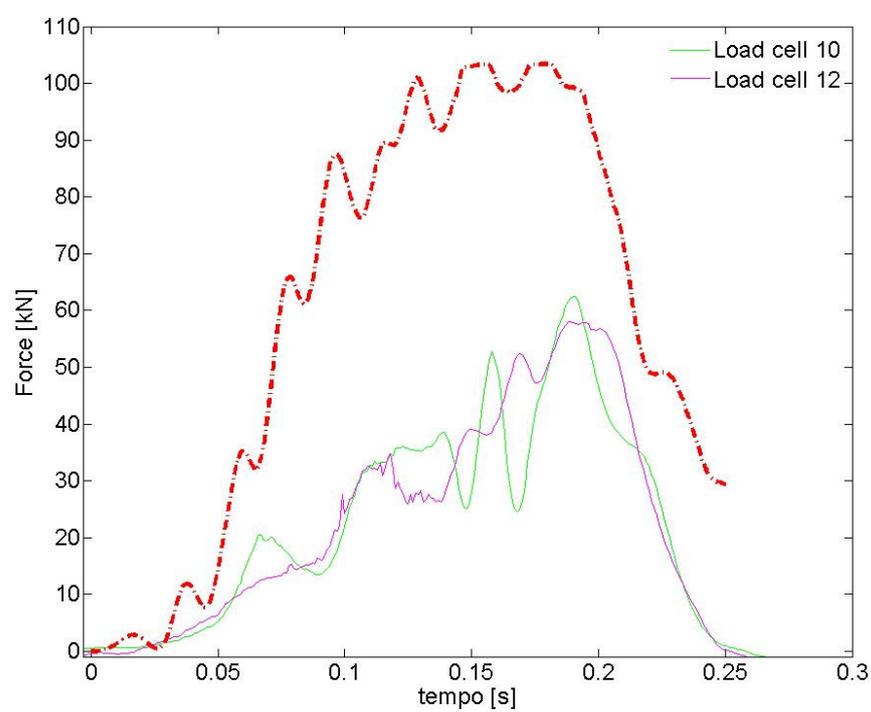


Figura 3.37: Confronto ancoraggio intermedio

Il caso reale presenta delle asimmetrie di carico dovute al non perfetto impatto del blocco di roccia.

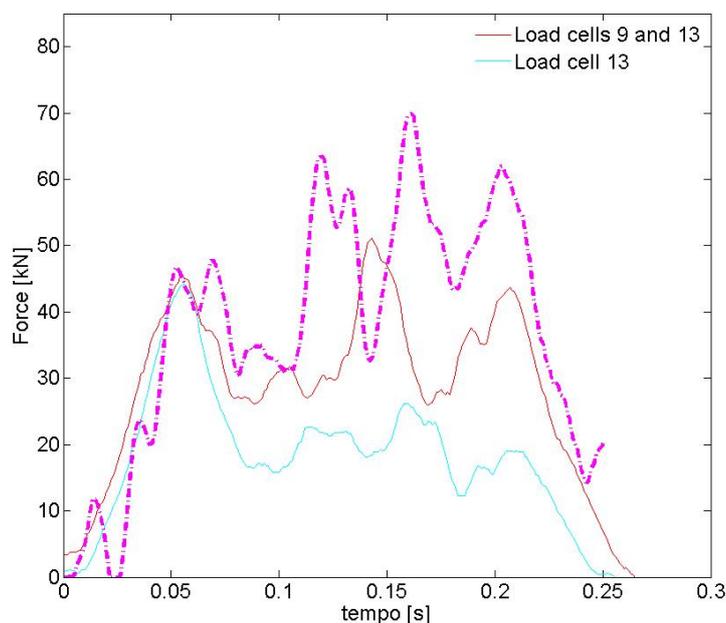


Figura 3.38: Confronto ancoraggio laterale alto

Il valore di carico misurato nella cella relativa all'ancoraggio laterale (con dissipatore) presenta, come si vede in figura 3.39 un valore massimo molto simile al caso reale, la differenza è nelle tempistiche di attivazione, il caso calcolato con il calcolatore presenta un'incremento di carico poco graduale e delle discontinuità una volta raggiunto il valore massimo.

Il valore dell'abbassamento, figura 3.40, misurato nel punto centrale presenta dei valori leggermente superiori ma il raggiungimento del massimo valore avviene negli stessi tempi del caso reale.

La causa principale di questa discordanza tra i valori reali e quelli del modello è da ricercarsi nella ancora non perfetta calibrazione dell'elemento di collegamento (slot), questo elemento è quello che finora a permesso risultati migliori ma presenta comunque ancora dei parametri da tarare, Lo slot trasferisce ancora troppe tensioni sui montanti e sui cavi, soprattutto per quel che riguarda

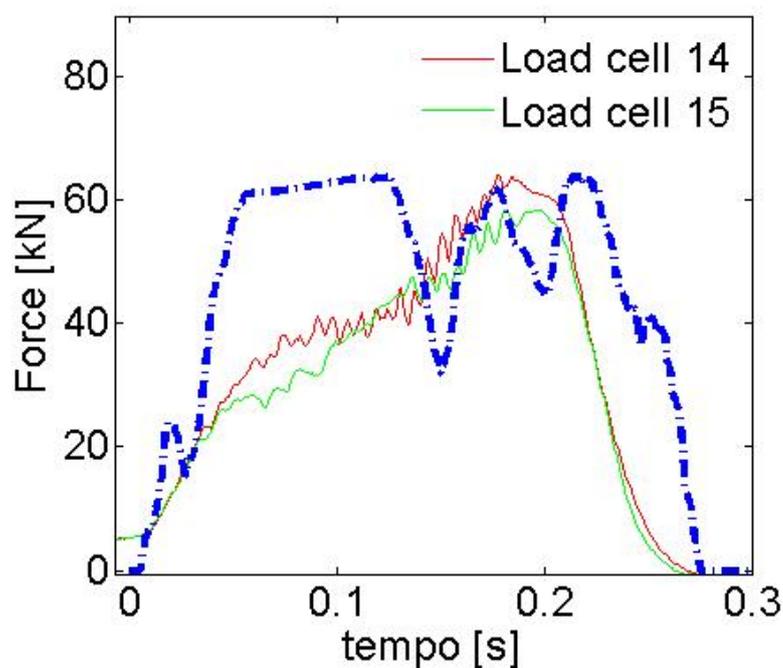


Figura 3.39: Confronto dissipatore

il tirante intermedio che presenta valori eccessivi.

Un'altro fattore di disuguaglianza dai valori reali è quello di non essere riusciti a modellare adeguatamente l'attrito tra la rete ed i tiranti esterni, questo come si vede nel caso dei dissipatori e nel caso del tirante centrale provoca dei picchi di carico troppo ripidi. Per modellare l'attrito si sarebbe dovuto staccare la rete e collegarla con tanti elementi di connessione (probabilmente Slot), questo però non è stato possibile perchè il nostro modello era oramai imm modificabile perchè impostato come un blocco unico.

DI seguito sono inserite alcune immagini che mostrano la deformata (fig.3.41) del modello e lo sviluppo delle tensioni durante la fase di abbassamento (fig. 3.42, 3.43, 3.44 e 3.45).

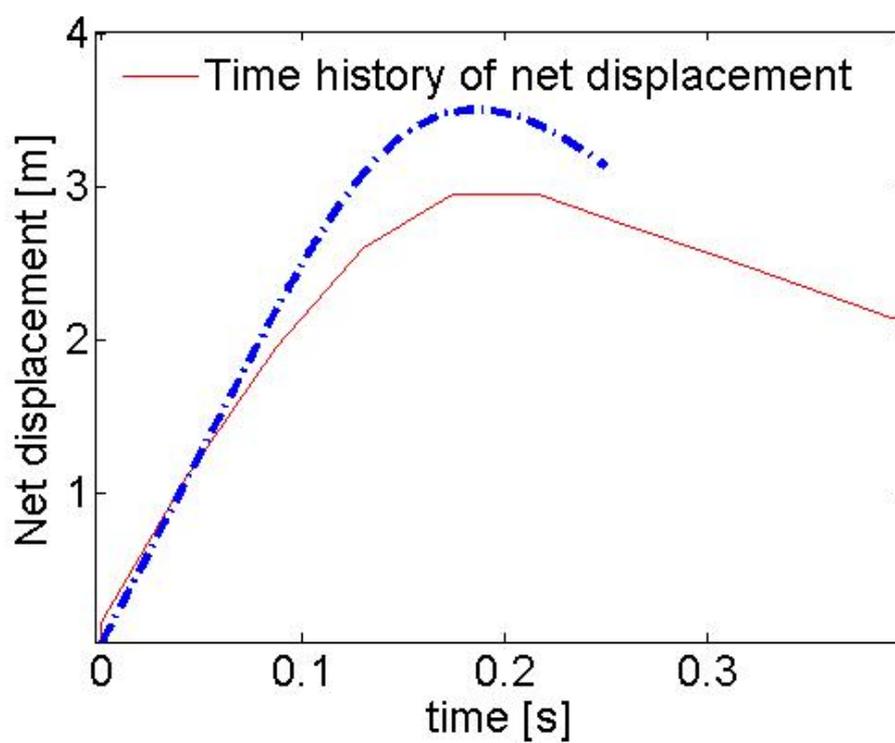


Figura 3.40: Confronto abbassamento

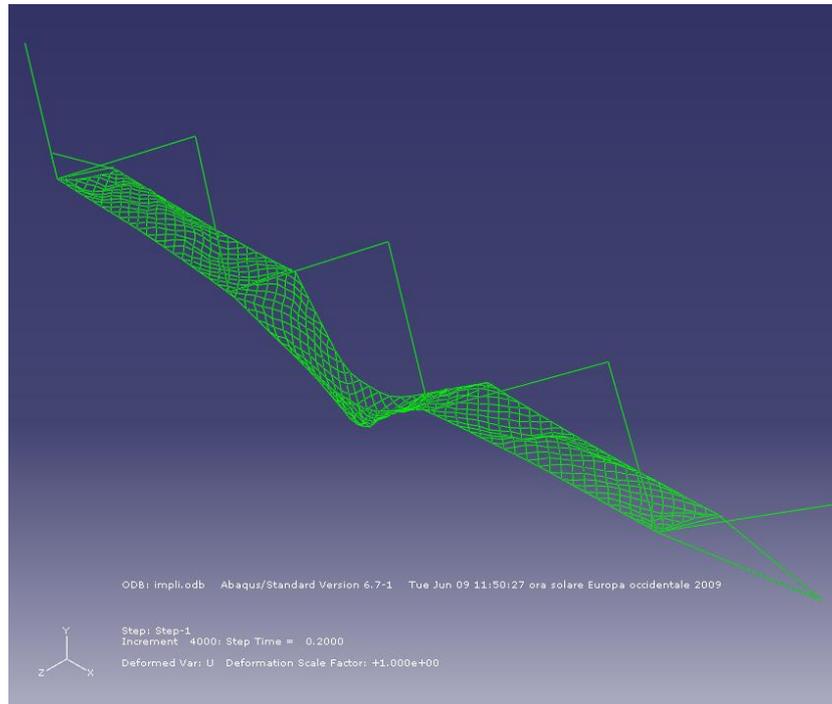


Figura 3.41: Deformata

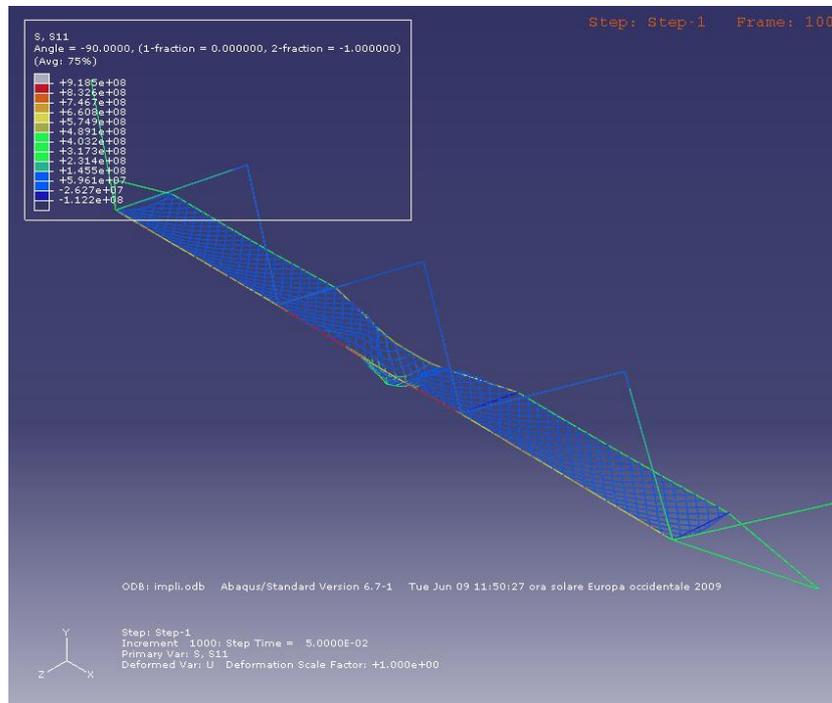


Figura 3.42: Tensioni 100 Frame

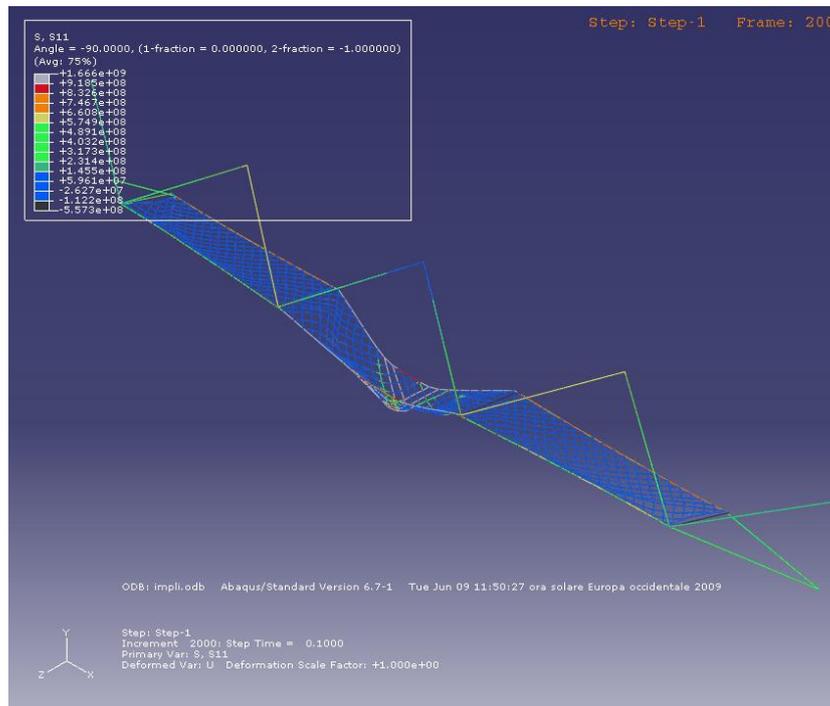


Figura 3.43: Tensioni 200 Frame

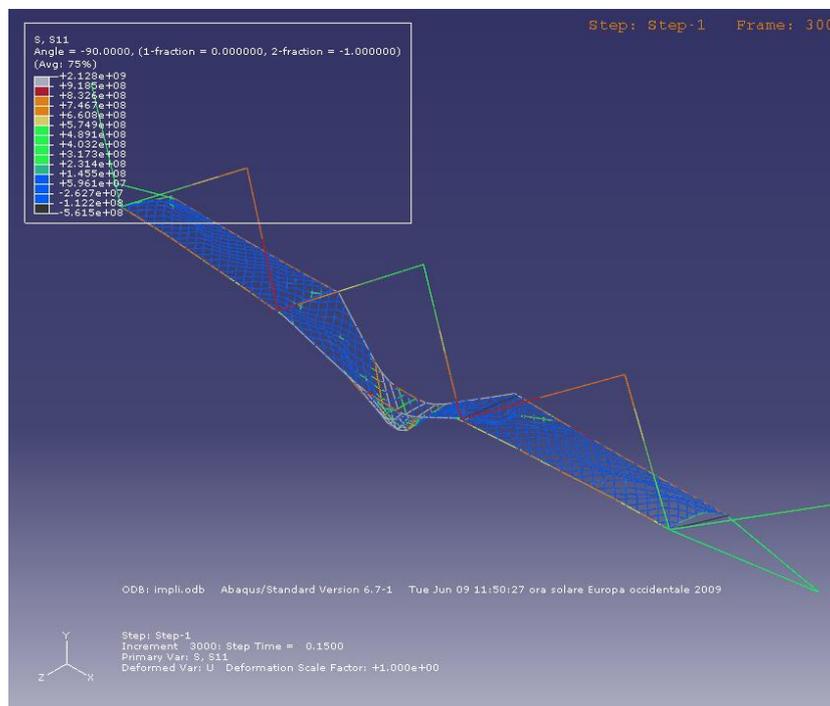


Figura 3.44: Tensioni 300 Frame

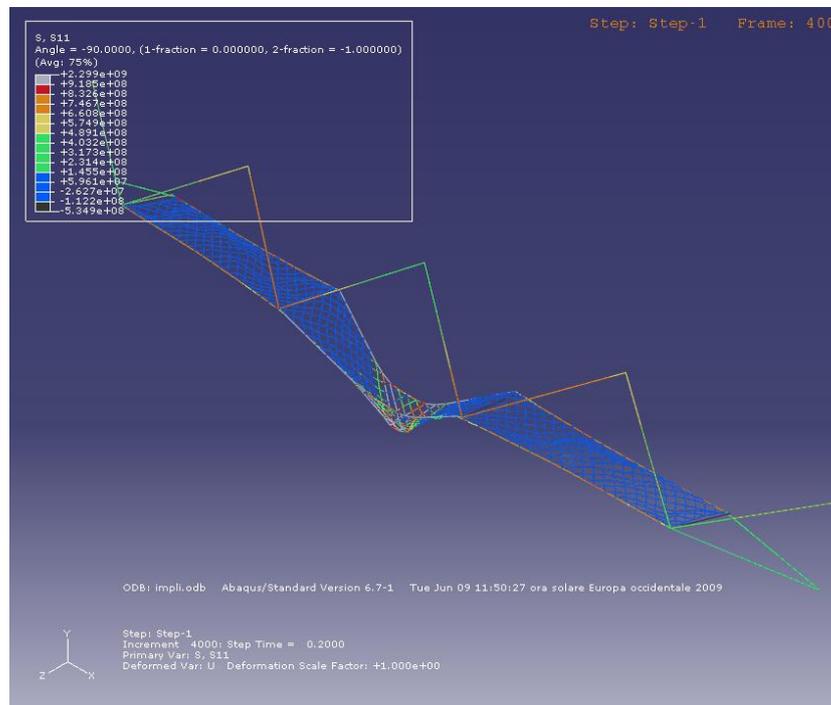


Figura 3.45: Tensioni 400 Frame

Capitolo 4

Conclusioni

La modellazione numerica di un sistema a protezione passiva contro la caduta massi si è rivelata essere molto complessa nella sua interezza. Lo studio svolto nella tesi ha cercato di evidenziare l'estrema complessità della questione, dovuta principalmente al carattere dinamico dell'evento e alla forte non linearità di comportamento geometrico e meccanico del sistema.

Nella prima parte è stato affrontato uno studio ed una descrizione delle caratteristiche fisiche del problema per inquadrare meglio l'argomento, nella seconda parte siamo passati ad un approfondimento di tipo teorico sulla dinamica non lineare nel campo dei grandi spostamenti ed infine nell'ultima parte del lavoro è stato sviluppato il problema della modellazione numerica con il software di calcolo ABAQUS.

La modellazione è stata svolta per gradi, si è partiti da un grado di dettaglio basso, modello molto semplice, per passare poi alla modellazione sempre più precisa e dettagliata di alcuni particolari costruttivi di fondamentale importanza.

I risultati ottenuti nella modellazione sono stati incoraggianti, in quanto soprattutto per il caso semplice si è ottenuta un'ottima rispondenza tra simulazione e valori misurati nel corso delle prove in sito, mentre per il caso tridimensionale complesso si sono riscontrate alcune difficoltà nella modellazione di alcuni particolari risultati poi determinanti ai fini della ottimale riuscita del modello.

Uno sviluppo futuro della tesi potrà approfondire meglio e più nel dettaglio la modellazione di questi particolari al fine di ottenere risultati ancora più efficaci rispetto a quelli già ottenuti.

Bibliografia

- [1] EOTA (European Organisation for Technical Approvals) *ETAG 27-Guideline for European technical approval of falling rock protection kits*, Brussels, 2008.
- [2] UNI ISO 2408, *Funi di acciaio per usi generali. Caratteristiche UNI*, Giugno 1992.
- [3] Peila D., Pelizza S., Sassudelli F., *Evaluation of behaviour of rockfall restraining nets by full scale test* Rock Mech Rock Eng, 1998;31:1-24.
- [4] A.Cazzani, L.Mongiovì, T.Frenez (2002):*Dynamic finite element analysis of interceptive devices for falling rocks*, International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences, 39 (2002) 303-321.
- [5] K.J. Bathe,*Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [6] L.E.Malvern,*Introduction on the Mechanics of a Continuous Medium* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1969.
- [7] Clough R.W. & Penzien J., *Dynamics of structures*, Mc-Graw Hill, 1975.
- [8] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc.,*Abaqus Analysis User's Manual: vol 3* ABAQUS Inc. or DS, 2007.
- [9] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc.,*Abaqus Analysis User's Manual: vol 2* ABAQUS Inc. or DS, 2007.
- [10] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc.,*Abaqus Theory Manual: Version 6.7* ABAQUS Inc. or DS, 2007.

- [11] UNI EN 1993-1-11, *Progettazione delle strutture di acciaio: parte 1-11, progettazione di strutture con elementi tesi* UNI, Gennaio 2007.