

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Triennale in Matematica

**MODELLI DISCRETI  
PER OPZIONI ASIATICHE**

Tesi di Laurea in Matematica  
per le Applicazioni Economiche e Finanziarie

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
ANDREA PASCUCCI

**Presentata da:**  
ANNA GALLUCCI

II Sessione  
Anno Accademico 2011-2012



*Questa non é una casa qualunque,  
questo é un travolgente vortice di entropia!  
The big bang theory*



# Indice

<b>1</b>	<b>I teoremi di Dynkin sulle classi monotone</b>	<b>1</b>
1.1	Il primo teorema . . . . .	1
1.2	Il secondo teorema . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Il modello binomiale</b>	<b>5</b>
2.1	Introduzione . . . . .	5
2.2	Proprietá di Markov . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Le opzioni path-dependent</b>	<b>11</b>
3.1	Premessa . . . . .	11
3.2	Le opzioni asiatiche . . . . .	11
3.3	Valutazione . . . . .	13
3.4	Le opzioni look-back . . . . .	19
	<b>Bibliografia</b>	<b>23</b>



# Capitolo 1

## I teoremi di Dynkin sulle classi monotone

I teoremi che andiamo ora ad affrontare sono inseriti in quanto propedeutici allo studio della proprietà di Markov per i processi stocastici, argomento sul quale verte principalmente questo lavoro. Essi sono enunciati nel contesto della teoria della misura, i cui principali concetti vengono considerati noti.

### 1.1 Il primo teorema

**Definizione 1.** Sia  $\Omega$  un insieme diverso dal vuoto. Una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  è detta  $\pi$ -sistema (o  $\cap$ -stabile) se è chiusa rispetto all'intersezione cioè se:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A} \quad (1.1)$$

**Definizione 2.** Una famiglia  $\mathcal{A}$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  è detta  $\lambda$ -sistema (o monotona) se:

1.  $\Omega \in \mathcal{A}$
2. Se  $B$  e  $C \in \mathcal{A}$  con  $B \subseteq C \Rightarrow B \setminus C \in \mathcal{A}$
3. Data una successione crescente  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  di elementi di  $\mathcal{A}$  si ha che:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

**Osservazione 1.** Ogni  $\sigma$ -algebra è un  $\pi$ -sistema ma non vale il viceversa.

**Esempio 1.** Sia  $\Omega = \{a, b, c, d\}$ .  $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$  è un  $\lambda$ -sistema ma non una  $\sigma$ -algebra.

**Lemma 1.** Ogni  $\pi$ - $\lambda$ -sistema  $\mathcal{A}$  é una  $\sigma$ -algebra.

*Dimostrazione.* Se  $\mathcal{A}$  é un  $\lambda$ -sistema allora verifica le prime due condizioni della definizione di  $\sigma$ -algebra. Se  $A$  e  $B \in \mathcal{A}$  allora  $A \cup B \in \mathcal{A}$ , infatti:

$$A^c \in \mathcal{A}; B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \cap B^c \in \mathcal{A} \Rightarrow (A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{A}$$

$$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$$

Ora se  $(A_n)$  é una successione di elementi di  $\mathcal{A}$ , poniamo

$$B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

Cosí  $B_n$  é una successione crescente di elementi di  $\mathcal{A}$  dunque per la terza condizione della def

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

□

**Definizione 3.** La famiglia monotona generata da  $\mathcal{A}$  é la piú piccola famiglia monotona che contiene  $\mathcal{A}$ . La indicheremo con  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ .

**Teorema 1. Primo teorema di Dynkin:** Se  $\mathcal{A}$  é un  $\pi$ -sistema allora:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \tag{1.2}$$

*Dimostrazione.* Ricordiamo che essendo ogni  $\sigma$ -algebra una famiglia monotona abbiamo:

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$$

Cominciamo ponendo

$$\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid A \cap I \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad \forall I \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_1$ :  $A, I \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ,  $\Rightarrow A \cap I \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$  perché  $\mathcal{A}$  é un  $\pi$ -sistema. Proviamo che  $\mathcal{M}_1$  é un  $\lambda$ -sistema.

- $\Omega \in \mathcal{M}_1$
- $A, B \in \mathcal{M}_1$  con  $A \subseteq B$ , allora

$$(B \setminus A) \cap I = (B \cap I) \setminus (A \cap I) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

- Sia  $(A_n)$  una successione crescente in  $\mathcal{M}_1$  e indichiamo con  $A$  l'unione degli  $A_n$ ; Allora  $\forall I \in \mathcal{A}$  si ha:

$$A \cap I = \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap I) \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Quindi  $\mathcal{M}_1$  é una famiglia monotona e  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_1$ .

Poniamo ora

$$\mathcal{M}_2 = \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \mid A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) \quad \forall B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

Per quanto dimostrato  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}_2$ ; inoltre con lo stesso procedimento si prova che  $\mathcal{M}_2$  é una famiglia monotona; allora  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}_2$ .

Abbiamo cosí dimostrato che  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  é un  $\pi$ -sistema.

Questo, grazie al lemma precedente, conclude la dimostrazione in quanto  $\mathcal{M}(\mathcal{A})$  é una  $\sigma$ -algebra e quindi  $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ .  $\square$

## 1.2 Il secondo teorema

**Definizione 4.** Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia di funzioni limitate su  $\Omega$  a valori reali. Si dice che  $\mathcal{H}$  é una famiglia monotona di funzioni se:

1.  $\mathcal{H}$  é uno spazio vettoriale
2.  $\mathcal{H}$  contiene la funzione costante uguale a 1
3. Se  $(f_n)$  é una successione crescente di funzioni non negative in  $\mathcal{H}$  avente limite puntuale la funzione limitata  $f \Rightarrow f \in \mathcal{H}$

**Teorema 2. Secondo teorema di Dynkin:** Sia  $\mathcal{H}$  una famiglia monotona di funzioni. Se  $\mathcal{H}$  contiene le funzioni caratteristiche degli elementi di una famiglia  $\cap$ -stabile  $\mathcal{A}$  allora contiene anche ogni funzione limitata e misurabile rispetto  $\sigma(\mathcal{A})$ .

*Dimostrazione.* Iniziamo provando che  $\mathbb{I}_A \in \mathcal{H} \quad \forall A \in \sigma(\mathcal{A})$ . Poniamo

$$\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) \text{ tale che } \mathbb{I}_A \in \mathcal{H}\}$$

Allora  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$  per ipotesi e  $\mathcal{M}$  é una famiglia monotona infatti:

1.  $\mathbb{I}_\Omega \in \mathcal{H} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{M}$
2. Dati  $A$  e  $B \in \mathcal{M}$  con  $B \subseteq A$  vogliamo dimostrare che  $A \setminus B \in \mathcal{M}$  cioé che  $\mathbb{I}_{A \setminus B} \in \mathcal{H}$ ; questo é vero poiché  $\mathbb{I}_A$  e  $\mathbb{I}_B \in \mathcal{H} \Rightarrow \mathbb{I}_{A \setminus B} = \mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B \in \mathcal{H}$  perché  $\mathcal{H}$  é uno spazio vettoriale

3. Sia  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione crescente di elementi in  $\mathcal{M}$  e sia

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n)$$

Vogliamo dimostrare che  $U \in \mathcal{M}$  cioè che  $\mathbb{I}_U \in \mathcal{H}$ . Per il teorema di Lebesgue esiste una successione di funzioni semplici  $f_n$  combinazione delle funzioni caratteristiche tale che:

$$f_n \longrightarrow f$$

Ora per l'ipotesi  $\mathcal{H}$  famiglia monotona di funzioni  $f \in \mathcal{H}$  e quindi  $U \in \mathcal{M}$ .

Per il primo teorema di Dynkin si ha  $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{A})$  e quindi le funzioni caratteristiche di insiemi misurabili rispetto a  $\sigma(\mathcal{A})$  appartengono ad  $\mathcal{H}$ .

La dimostrazione si conclude ora facilmente utilizzando i risultati standard di approssimazione puntuale di funzioni misurabili; in particolare è noto che se  $f$  è una funzione  $\sigma(\mathcal{A})$ -misurabile non negativa e limitata esiste una successione crescente  $\varphi_n$  di funzioni non negative semplici e  $\sigma(\mathcal{A})$ -misurabili, e quindi in  $\mathcal{H}$ , che converge a  $f$ .

Dunque per il punto 3 della definizione di famiglia monotona di funzioni si ha che  $f \in \mathcal{H}$ .  $\square$

# Capitolo 2

## Il modello binomiale

### 2.1 Introduzione

Il modello binomiale é un modello di mercato composto da un titolo non rischioso  $B$  e da un titolo rischioso  $S$

Se indichiamo con  $\rho_n$  il tasso di interesse semplice nell'intervallo  $[t_n, t_{n+1}]$  e con  $B_n$  e  $S_n$  rispettivamente i valori del bond e dello stock al tempo  $t_n$ , otteniamo:

$$B_{n+1} = B_n(1 + \rho_n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (2.1)$$

Supponiamo che gli intervalli abbiano tutti la stessa lunghezza  $\frac{T}{N}$  e il tasso sia costante durante tutto il periodo  $[0, T]$ ,  $\rho_n = \rho$  per ogni  $n$ .

Ora, noto  $B_0 > 0$ , la dinamica del bond é deterministica perché  $B_n = B_0(1 + \rho)^n$ .

Per il titolo rischioso assumiamo invece una dinamica stocastica; assumiamo che nel passaggio dal tempo  $t_n$  al tempo  $t_{n+1}$  l'azione possa solo aumentare o diminuire il suo valore con tassi di crescita e decrescita costanti:

$$S_{n+1} = \xi_{n+1} S_n \quad (2.2)$$

dove  $\xi_1, \dots, \xi_N$  sono variabili aleatorie indipendenti e identicamente distribuite su uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$  aventi come distribuzione una delta di Dirac  $\xi_n \sim p\delta_u + (1 - p)\delta_d$  per  $n = 1, \dots, N$   $p \in [0, 1]$ ;  $u$  e  $d$  indicano rispettivamente il tasso di crescita e decrescita dello stock nel periodo  $[t_n, t_{n+1}]$  e assumiamo  $0 < d < u$ . Nel modello binomiale la definizione della filtrazione  $F_n$  diventa:

$$F_n = \sigma(S_0, \dots, S_n) = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Osserviamo che

$$S_{n+1} = \begin{cases} uS_n & \text{con probabilità } p \\ dS_n & \text{con probabilità } 1 - p \end{cases}$$

In base alle ipotesi sulle  $\xi_n$  possiamo calcolare per  $n = 1, \dots, N$  la probabilità

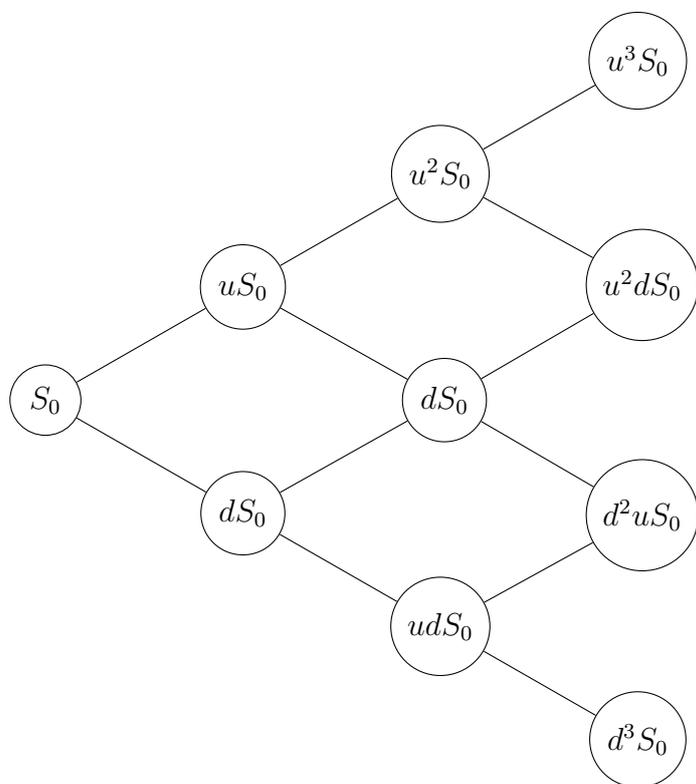
$$P(S_n = u^j d^{n-j} S_0) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \quad j = 0, \dots, n \quad (2.3)$$

L'equazione corrisponde alla distribuzione binomiale che rappresenta la probabilità di avere  $j$  successi su  $n$  prove essendo  $p$  la probabilità di successo della prova singola.

Così una traiettoria dell'azione è un vettore, per esempio, del tipo

$(S_0, uS_0, udS_0, u^2dS_0)$  o equivalentemente  $(u, ud, u^2d)$  Dunque possiamo assumere che lo spazio  $\Omega$  sia la famiglia

$$\{(e_1, \dots, e_n) \mid e_k = u \text{ oppure } e_k = d\} \quad (2.4)$$



## 2.2 Proprietá di Markov

Nella teoria della probabilitá un processo stocastico gode della proprietá di Markov se il futuro é indipendente dal passato, una volta assegnata la situazione del presente. In altre parole, questa proprietá ci consente di parlare di *assenza di memoria* in quanto ai fini dell'indagine sul futuro non si é piú interessati a conoscere i comportamenti progressi. In particolare, l'indipendenza dal passato porta, come conseguenza, una notevole semplificazione dello studio di tale processo soprattutto dal punto di vista computazionale. Infatti, a paritá di passi della discretizzazione, per calcolare il prezzo al tempo  $t_n$  di un derivato path-dependent é necessario risolvere  $2^n$  equazioni, mentre per quello path-independent solo  $n + 1$  equazioni, cioé la complessitá computazionale cresce linearmente e non esponenzialmente.

Vediamo ora in termini piú rigorosi come si definisce un processo di Markov.

**Definizione 5.** Diciamo che un processo stocastico discreto  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  su uno spazio di probabilitá  $(\Omega, F, P)$  con filtrazione  $(F_n)$  gode della proprietá di Markov se:

1.  $X$  é adattato a  $(F_n)$
2. per ogni  $n$  e  $f$  funzione  $\mathcal{B}$ -misurabile e limitata vale:

$$E[f(X_{n+1}) | F_n] = E[f(X_{n+1}) | X_n] \quad (2.5)$$

**Proposizione 1.** Siano  $X, Y$  variabili aleatorie su  $(\Omega, F, P)$ . Allora  $X$   $\sigma(Y)$ -misurabile  $\iff$  esiste una funzione  $\mathcal{B}$ -misurabile  $f$  tale che  $X = f(Y)$

*Dimostrazione.* É sufficiente considerare il caso in cui  $X$  é limitata. Inoltre é sufficiente provare che se  $X$  é  $\sigma(Y)$ -misurabile allora  $X = f(Y)$  con  $f \in \mathcal{B}$  poiché il viceversa é immediato. Utilizziamo il secondo teorema di Dynkin e poniamo

$$\mathcal{H} = \{f(Y) | f \in \mathcal{B}\}$$

Allora  $\mathcal{H}$  é una famiglia monotona di funzioni, infatti  $\mathcal{H}$  é uno spazio vettoriale che contiene le funzioni costanti. Inoltre se  $(f_n(Y))_{n \in \mathbb{N}}$  é una successione in  $\mathcal{H}$  monotona crescente di funzioni non negative e tali che  $f_n(Y) \leq C$  per una data costante  $C$ , allora posto

$$f = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$$

si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f(Y)$$

Infine mostriamo che  $\mathcal{H}$  contiene le funzioni caratteristiche di elementi di  $\sigma(Y)$ .

Se  $F \in \sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{B})$  allora esiste  $H \in \mathcal{B}$  tale che  $F = Y^{-1}(H)$  e quindi vale  $\mathbb{I}_F = \mathbb{I}_H(Y)$  da cui deduciamo che  $\mathbb{I}_F \in \mathcal{H} \quad \forall F \in \sigma(Y)$   $\square$

Come conseguenza di ciò esiste una funzione misurabile  $g$  tale che

$$E[f(X_{n+1}) | F_n] = g(X_n) \quad (2.6)$$

**Lemma 2.** Siano  $X, Y$  due variabili aleatorie su uno spazio di probabilità  $(\Omega, F, P)$ . Sia  $\mathcal{G} \subseteq F$  una  $\sigma$ -algebra tale che:

1.  $X$  é indipendente da  $\mathcal{G}$
2.  $Y$  é  $\mathcal{G}$ -misurabile

allora per ogni funzione  $h$   $\mathcal{B}$ -misurabile e limitata vale:

$$E[h(X, Y) | \mathcal{G}] = g(Y) \quad \text{dove} \quad g(y) = E[h(X, y)] \quad (2.7)$$

Equivalentemente:

$$E[h(X, Y) | \mathcal{G}] = E[h(X, y) | \mathcal{G}] |_{y=Y} \quad (2.8)$$

*Dimostrazione.* Occorre provare che la variabile aleatoria  $g(Y)$  é una versione dell'attesa condizionata di  $h(X, Y)$

Usando la notazione  $P^W$  per indicare la distribuzione di una data variabile aleatoria  $W$  si ha

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} h(x, y) P^X dx \quad (2.9)$$

Allora per il teorema di Fubini e Tonelli  $g$  é una funzione  $\mathcal{B}$ -misurabile e di conseguenza per l'ipotesi 2) é misurabile.

Inoltre dato  $G \in \mathcal{G}$  e posto  $Z = \mathbb{I}_G$  si ha

$$\begin{aligned} \int_G H(X, Y) dP &= \int_{\Omega} h(X, Y) dP = \\ &= \iiint h(x, y) z^{P^{X, Y, Z}} d(x, y, z) = \iiint h(x, y) z^{P^X} dx P^{Y, Z} d(y, z) = \\ &= \iint g(y) z^{P^{Y, Z}} d(y, z) = \int_G g(y) dP \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.** Nel modello binomiale il processo stocastico  $S$  gode della proprietá di Markov e per ogni funzione  $f$  vale

$$E[f(S_{n+1}) | F_n] = E[f(S_{n+1}) | S_n] = pf(uS_n) + (1-p)f(dS_n) \quad (2.10)$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $\omega \in \Omega$  si ha:

$$E[f(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n](\omega) = E[f(S_n \xi_{n+1}) | \mathcal{F}_n](\omega) =$$

appliciamo il lemma con  $X = \xi_{n+1}$ ,  $Y = S_n$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{F}_n$ ,  $h(X, Y) = f(XY)$

$$= E[f(S_n(\omega) \xi_{n+1})] = pf(uS_n(\omega)) + (1-p)f(dS_n(\omega))$$

Applicando l'attesa condizionata a  $\sigma(S_n)$  alla precedente uguaglianza e utilizzando le proprietà dell'attesa condizionata otteniamo:

$$E[f(S_{n+1}) | S_n] = pf(uS_n) + (1-p)f(dS_n)$$

□

Osserviamo che la proprietà di Markov dipende dalla misura di probabilità sulla quale stiamo lavorando; vogliamo ora dimostrare che il processo  $S$  continua a godere di tale proprietà nella misura Martingala. Introduciamo quindi la misura di Martingala  $Q$  che, nel modello binomiale, sappiamo esistere e essere unica se  $d < 1 + \rho < u$

$$q = Q(\xi_n = u) = \frac{1 + \rho - d}{u - d} \quad (2.11)$$

**Proposizione 2.** *Nell'ipotesi  $d < 1 + \rho < u$  sia  $Q$  la misura martingala appena definita. Le variabili aleatorie  $\xi_1, \dots, \xi_n$  sono indipendenti in  $Q$  e il processo  $S$  gode della proprietà di Markov nello spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, Q, \mathcal{F}_n)$ .*

*Per ogni funzione  $f$  vale:*

$$E^Q[f(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n] = E^Q[f(S_{n+1}) | S_n] = qf(uS_n) + (1-q)f(dS_n) \quad (2.12)$$

*Dimostrazione.* Imponiamo che valga la proprietà di Martingala:

$$\frac{S_{n-1}}{(1+\rho)^{n-1}} = E^Q \left[ \frac{S_{n-1}}{(1+\rho)^n} | \mathcal{F}_{n-1} \right]$$

$$(1+\rho) = E^Q[\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}]$$

$$E^Q[\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}] = E^Q[\xi_n]$$

Poniamo  $A = \{\xi_n = u\}$ . Allora per quanto visto e per la definizione di attesa condizionata, per ogni  $B \in \mathcal{F}_{n-1}$  vale:

$$\begin{aligned} E^Q[\xi_n] &= E^Q[\xi_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \frac{1}{Q(B)} \int_B \xi_n dQ \\ \Rightarrow \int_B \xi_n dQ &= Q(B) E^Q[\xi_n] = Q(B) (uQ(A) + d(1-Q(A))) \end{aligned}$$

$$= (u - d) Q(A) Q(B) + dQ(B)$$

D'altra parte vale

$$\begin{aligned} \int_B \xi_n dQ &= uQ(\xi_n = u \cap B) + dQ(\xi_n = d \cap B) = (u - d) Q(A \cap B) + dQ(B) \\ &\Rightarrow Q(A \cap B) = Q(A) Q(B) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo provato l'indipendenza di  $\xi_n$  e  $\mathcal{F}_n$  in  $Q$ .

Abbiamo così le ipotesi per applicare il lemma 3 e dimostrare in modo analogo al teorema 2 che  $S$  gode della proprietà di Markov anche nello spazio  $(\Omega, \mathcal{F}, Q, \mathcal{F}_n)$ .  $\square$

**Osservazione 2.** *Se  $X$  è un processo di Markov allora vale:*

$$E[f(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) | \mathcal{F}_n] = E[f(X_{n+1}, \dots, X_{n+k}) | X_n] \quad (2.13)$$

$\forall n, k \geq 1$  e  $f$  funzione misurabile tale che  $f(X_{n+1}, \dots, X_{n+k})$  sia sommabile o non negativa.

*Dimostrazione.* Consideriamo il caso  $k = 2$ .

Siano  $H, K \in \mathcal{B}$ , posto  $f(x, y) = \mathbb{I}_H(x) \mathbb{I}_K(y)$ , poiché la filtrazione è una famiglia crescente, vale:

$$E[\mathbb{I}_H(x_{n+1}) \mathbb{I}_K(x_{n+2}) | \mathcal{F}_n] = E[E[\mathbb{I}_H(x_{n+1}) \mathbb{I}_K(x_{n+2}) | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] =$$

applichiamo ora la proprietà dell'attesa condizionata e ricordiamo che  $X_n$  adattato quindi  $\mathcal{F}_n$ -misurabile  $\forall n$

$$= E[\mathbb{I}_H(x_{n+1}) E[\mathbb{I}_K(x_{n+2}) | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] =$$

inseriamo l'ipotesi X processo di Markov

$$= E[\mathbb{I}_H(x_{n+1}) E[\mathbb{I}_K(x_{n+2}) | X_{n+1}] | \mathcal{F}_n] = E[\mathbb{I}_H(x_{n+1}) E[\mathbb{I}_K(x_{n+2}) | X_{n+1}] | X_n] =$$

procediamo a ritroso

$$= E[E[\mathbb{I}_H(x_{n+1}) \mathbb{I}_K(x_{n+2}) | X_{n+1}] | X_n] = E[\mathbb{I}_H(x_{n+1}) \mathbb{I}_K(x_{n+2}) | X_n]$$

Con il secondo teorema di Dynkin generalizziamo il risultato al caso di  $f$  misurabile e limitata. Con il teorema di Beppo Levi otteniamo la tesi per  $f$  misurabile e non negativa.  $\square$

# Capitolo 3

## Le opzioni path-dependent

### 3.1 Premessa

Indichiamo il prezzo del derivato al tempo  $n$  con  $k$  movimenti di crescita con la seguente notazione:

$$H_n(k) = H_n(S_{n,k}) \quad (3.1)$$

La proprietà di Markov studiata fino ad ora dá luogo alle cosiddette opzioni path-independent, cioè a quei derivati il cui prezzo al tempo  $t_n$  é funzione solo del prezzo del sottostante al tempo  $t_n$  e non dipende dai prezzi precedenti, cioè dalla traiettoria del titolo sottostante. In particolare, per calcolare il prezzo  $H_n(k)$  con  $k = 0, \dots, n$  si devono risolvere solo  $n + 1$  equazioni, dunque la complessità computazionale cresce linearmente col numero dei passi della discretizzazione.

Consideriamo invece ora le opzioni path-dependent, cioè, come ci suggerisce il nome, i derivati il cui prezzo al tempo  $t_n$  dipende dalla traiettoria del titolo sottostante  $(S_0, S_1, \dots, S_n)$ . Le possibili traiettorie del titolo sono  $2^n$  e quindi il numero delle equazioni da risolvere cresce esponenzialmente col numero dei passi della discretizzazione rendendo arduo trovare una soluzione. Le opzioni di questo tipo piú conosciute sono le Asiatiche, le look-back e quelle con barriera.

### 3.2 Le opzioni asiatiche

Il payoff di una opzione asiatica dipende dalla media dei prezzi del bene sottostante calcolata in un particolare periodo che precede la scadenza dell'opzione: solitamente tale periodo é uguale alla durata dell'opzione stessa. La determinazione del valore medio dei prezzi del sottostante é operata sulla base dei seguenti fattori:

- Intervallo temporale di rilevazione;
- Il tipo di media che può essere aritmetica o geometrica;

- Il peso assegnato a ciascun prezzo a seconda dell'importanza del periodo;

Per queste loro caratteristiche, le opzioni asiatiche sono molto trattate nei mercati finanziari sia perché riducono la possibilità di manipolazioni del prezzo del bene sottostante, sia perché molto spesso risultano meno costose rispetto alle opzioni standard. A volte aggiungendo una variabile di stato che incorpora le informazioni del passato (la variabile path-dependent), è possibile rendere Markoviano il processo. Noi ora concentreremo l'attenzione proprio su questo.

Consideriamo i seguenti payoff:

$$F(S_n, A_n) = \begin{cases} (S_n - A_n)^+ & \text{call con strike variabile} \\ (A_n - k)^+ & \text{call con strike fisso } k \end{cases} \quad (3.2)$$

dove  $A$  indica la variabile path-dependent

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k & \text{asiatica con media aritmetica} \\ \left( \prod_{k=0}^n S_k \right)^{\frac{1}{n+1}} & \text{asiatica con media geometrica} \end{cases}$$

Nel passaggio dal tempo  $t_{n-1}$  al tempo  $t_n$  si ha:

$$S_n = uS_{n-1} \quad \text{oppure} \quad S_n = dS_{n-1}$$

e di conseguenza  $A_n$  assume i valori  $A_n^{(u)}$  o  $A_n^{(d)}$  dove:

$$A_n^{(u)} = \begin{cases} \frac{nA_{n-1} + uS_{n-1}}{n+1} \\ \left( (A_{n-1})^n uS_{n-1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \end{cases} \quad (3.3)$$

e analogamente:

$$A_n^{(d)} = \begin{cases} \frac{nA_{n-1} + dS_{n-1}}{n+1} \\ \left( (A_{n-1})^n dS_{n-1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \end{cases} \quad (3.4)$$

**Lemma 3.** Il processo stocastico  $(S, A)$  adattato alla filtrazione  $\mathcal{F}_n$  gode della proprietà di Markov e per ogni funzione  $f$  vale:

$$\begin{aligned} E^Q [f(S_{n+1}, A_{n+1}) | \mathcal{F}_n] &= E^Q [f(S_{n+1}, A_{n+1}) | (S_n, A_n)] = \\ &= qf(uS_n, A_n^{(u)}) + (1 - q)f(dS_n, A_n^{(d)}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

*Dimostrazione.* Procediamo analogamente alla dimostrazione del teorema 3.  $\forall \omega \in \Omega$  si ha:

$$E^Q [f(S_{n+1}, A_{n+1}) | \mathcal{F}_n](\omega) = E^Q [f(\xi_{n+1} S_n, A_n) | \mathcal{F}_n](\omega) =$$

possiamo ora applicare il lemma 2 poiché  $\xi_{n+1}$  indipendenti da  $\mathcal{F}_n$  e  $(S_n, A_n)$  é un processo  $\mathcal{F}_n$ -misurabile

$$= E^Q [f(S_n(\omega) \xi_{n+1}, A_n)] = qf(uS_n(\omega), A_n^{(u)}) + (1 - q)f(dS_n(\omega), A_n^{(d)})$$

D'altra parte per le proprietà dell'attesa condizionata:

$$E^Q [E^Q [f(S_{n+1}, A_{n+1}) | \mathcal{F}_n] | (S_n, A_n)] = E^Q [f(S_{n+1}, A_{n+1}) | (S_n, A_n)]$$

□

### 3.3 Valutazione

In questa sezione vedremo come si possono valutare i derivati path-dependent estendendo gli alberi binomiali. Definito  $S_n = S_{n,k} = u^k d^{n-k} S_0$  indichiamo con  $A_{n,k}(j)$  i possibili valori della variabile path-dependent corrispondenti a  $S_{n,k}$  per  $0 \leq j \leq J(n, k)$  opportuno e poniamo:

$$H_n(k, j) = H_n(S_{n,k}, A_{n,k}(j))$$

Poiché

$$H_n = \frac{1}{1 + \rho} E^Q [H_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

possiamo valutare un derivato path-dependent con il seguente schema iterativo:

$$H_N(k, j) = F(S_{N,k}, A_{N,k}(j)) \quad 0 \leq k \leq N \quad 0 \leq j \leq J(N, k)$$

$$H_{n-1}(k, j) = \frac{1}{1 + \rho} \left[ qH_n(uS_{n-1,k}, A_{n-1,k}^{(u)}(j)) + (1 - q)H_n(dS_{n-1,k}, A_{n-1,k}^{(d)}(j)) \right] \quad (3.6)$$

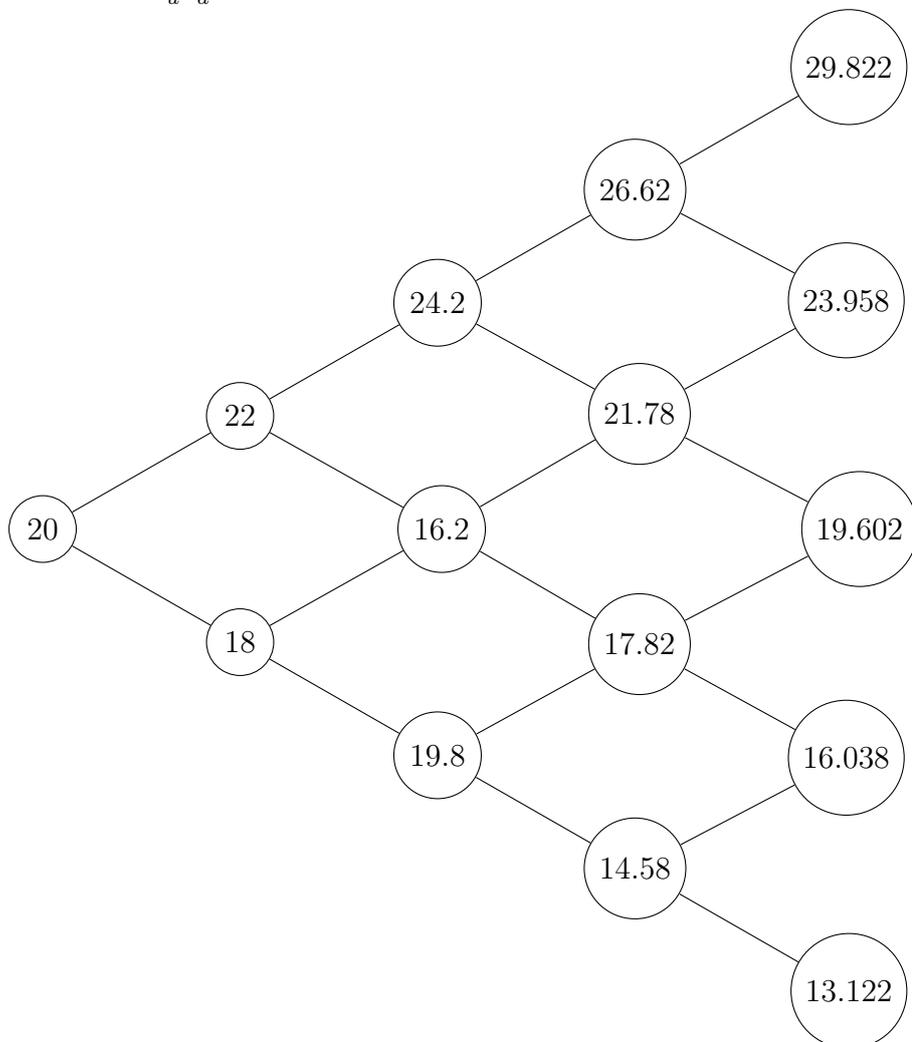
Troviamo infine che la strategia di copertura é data da:

$$\alpha_n(k, j) = \frac{H_n(k+1, j) - H_n(k, j)}{(u - d) S_{n-1,k}} \quad (3.7)$$

$$\beta_n(k, j) = \frac{uH_n(k, j) - dH_n(k+1, j)}{u - d} \quad (3.8)$$

per  $n = 1, \dots, N \quad k = 0, \dots, n-1 \quad j = 0, \dots, J(n, k)$

**Esempio 2.** Consideriamo un'opzione call con  $S_0 = 20$ ,  $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$  e  $\rho = 0.05$ .  
Ne viene  $q = \frac{1+\rho-d}{u-d} = 0.75$



Vogliamo ora calcolare il valore iniziale di un'opzione asiatica con media aritmetica. Ricordiamo che avevamo definito il payoff come:

$$F(S_n, A_n) = (S_n - A_n)^+ \quad \text{per un'opzione call con strike variabile}$$

Nonostante risultino decisamente poco interessanti, riportiamo per completezza i calcoli effettuati partendo dalle medie aritmetiche per poi arrivare ai valori dei payoff.

Riportiamo la doppia notazione della variabile path-dependent perché vogliamo mettere in evidenza sia il percorso seguito sia la variabile  $j$ .

$$n = 1$$

$$A_1^{(u)} = A_{1,1}(0) = \frac{20+22}{2} = 21$$

$$A_1^{(d)} = A_{1,0}(0) = \frac{20+18}{2} = 19$$

$$n = 2$$

$$A_2^{(uu)} = A_{2,2}(0) = \frac{2 \cdot 21 + 24.2}{3} = 22.07$$

$$A_2^{(ud)} = A_{2,1}(0) = \frac{2 \cdot 21 + 19.8}{3} = 20.6$$

$$A_2^{(du)} = A_{2,1}(1) = \frac{2 \cdot 19 + 19.8}{3} = 19.27$$

$$A_2^{(dd)} = A_{2,0}(0) = \frac{2 \cdot 19 + 16.2}{3} = 18.07$$

$$n = 3$$

$$A_3^{(uuu)} = A_{3,3}(0) = \frac{3 \cdot 22.07 + 26.62}{4} = 23.21$$

$$A_3^{(uud)} = A_{3,2}(0) = \frac{3 \cdot 22.07 + 21.78}{4} = 21.99$$

$$A_3^{(udu)} = A_{3,2}(1) = \frac{3 \cdot 20.06 + 21.78}{4} = 20.90$$

$$A_3^{(udd)} = A_{3,1}(0) = \frac{3 \cdot 20.06 + 17.83}{4} = 19.91$$

$$A_3^{(duu)} = A_{3,2}(2) = \frac{3 \cdot 19.27 + 21.78}{4} = 19.90$$

$$A_3^{(dud)} = A_{3,1}(1) = \frac{3 \cdot 19.27 + 17.82}{4} = 18.91$$

$$A_3^{(ddu)} = A_{3,1}(2) = \frac{3 \cdot 18.07 + 17.82}{4} = 18.01$$

$$A_3^{(ddd)} = A_{3,0}(0) = \frac{3 \cdot 18.07 + 14.58}{4} = 17.20$$

$$n = 4$$

$$A_4^{(uuuu)} = A_{4,4}(0) = \frac{4 \cdot 23.21 + 29.822}{5} = 24, 53$$

$$A_4^{(uuud)} = A_{4,3}(0) = \frac{4 \cdot 23.21 + 23.958}{5} = 23.36$$

$$A_4^{(uudu)} = A_{4,3}(1) = \frac{4 \cdot 21.988 + 23.958}{5} = 22.38$$

$$A_4^{(uudd)} = A_{4,2}(0) = \frac{4 \cdot 21.988 + 19.602}{5} = 21.51$$

$$A_4^{(uduu)} = A_{4,3}(2) = \frac{4 \cdot 20.90 + 23.958}{5} = 21.50$$

$$A_4^{(udud)} = A_{4,2}(1) = \frac{4 \cdot 20.90 + 19.602}{5} = 20.64$$

$$A_4^{(uddu)} = A_{4,2}(2) = \frac{4 \cdot 19.91 + 19.602}{5} = 19.85$$

$$A_4^{(uddd)} = A_{4,1}(0) = \frac{4 \cdot 19.91 + 16.038}{5} = 19.136$$

$$A_4^{(duuu)} = A_{4,3}(3) = \frac{4 \cdot 19.91 + 23.958}{5} = 20.71$$

$$A_4^{(duud)} = A_{4,2}(2) = \frac{4 \cdot 19.9 + 19.602}{5} = 19.85$$

$$A_4^{(dudu)} = A_{4,2}(3) = \frac{4 \cdot 18.91 + 19.602}{5} = 19.05$$

$$A_4^{(dudd)} = A_{4,1}(1) = \frac{4 \cdot 18.91 + 16.038}{5} = 18.34$$

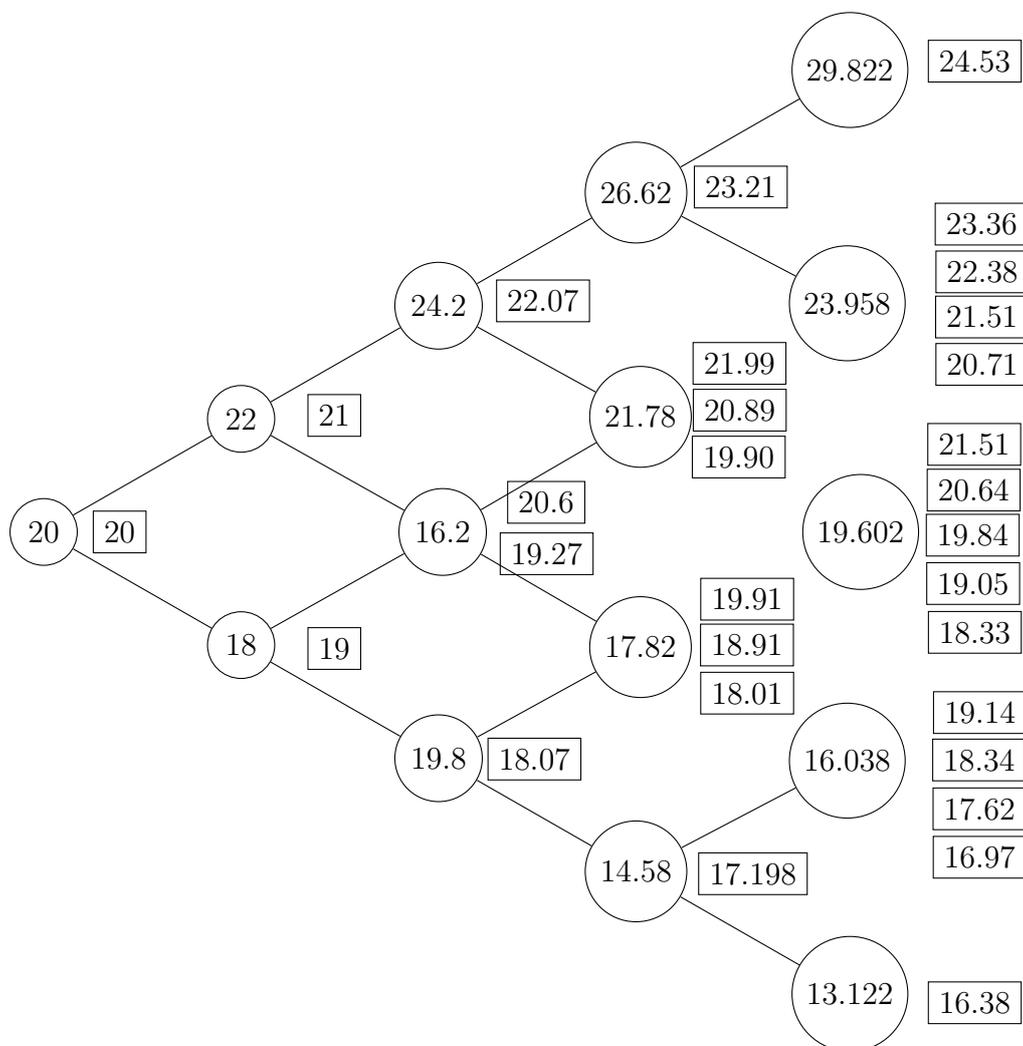
$$A_4^{(dduu)} = A_{4,2}(4) = \frac{4 \cdot 18.01 + 19.602}{5} = 18.33$$

$$A_4^{(ddud)} = A_{4,1}(2) = \frac{4 \cdot 18.01 + 16.038}{5} = 17.62$$

$$A_4^{(dddu)} = A_{4,1}(3) = \frac{4 \cdot 17.20 + 16.038}{5} = 19.966$$

$$A_4^{(dddd)} = A_{4,0}(2) = \frac{4 \cdot 17.20 + 13.122}{5} = 16.38$$

Figura 3.1: Grafico dei valori della variabile path-dependent media aritmetica



Applichiamo ora lo schema iterativo 3.6:

$$H_4(4, 0) = 29.822 - 24.53 = 5.292$$

$$H_4(3, 0) = 23.958 - 23.36 = 0.598$$

$$H_4(3, 1) = 23.958 - 22.38 = 1.578$$

$$H_4(3, 2) = 23.958 - 21.508 = 2.45$$

$$H_4(3, 3) = 23.958 - 20.71 = 3.248$$

$$H_4(2, 0) = 19.602 - 21.51 = -1.908 \rightarrow 0$$

$$H_4(2, 1) = 19.602 - 20.64 = -1.038 \rightarrow 0$$

$$H_4(2, 2) = 19.602 - 19.84 = -0.238 \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned}
H_4(2,3) &= 19.602 - 19.05 = 0.552 \\
H_4(2,4) &= 19.602 - 18.33 = -1.272 \\
H_4(1,0) &= 16.038 - 19.136 = -3.098 \rightarrow 0 \\
H_4(1,1) &= 16.038 - 18.34 = -2.302 \rightarrow 0 \\
H_4(1,2) &= 16.038 - 17.62 = -1.582 \rightarrow 0 \\
H_4(1,3) &= 16.038 - 16.97 = -0.932 \rightarrow 0 \\
H_4(0,0) &= 13.122 - 16.38 = -3.258 \rightarrow 0
\end{aligned}$$

*Procediamo a ritroso:*

$$H_3(3,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 5.292) + (0.25 \cdot 0.598)) = 3.92$$

$$H_3(2,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 1.578) + (0.25 \cdot 0)) = 1.13$$

$$H_3(2,1) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 2.45) + (0.25 \cdot 0)) = 1.75$$

$$H_3(2,2) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 3.248) + (0.25 \cdot 0)) = 2.32$$

$$H_3(1,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 0) + (0.25 \cdot 0)) = 0$$

$$H_3(1,1) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 0.552) + (0.25 \cdot 0)) = 0.39$$

$$H_3(1,2) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 1.272) + (0.25 \cdot 0)) = 0.91$$

$$H_3(0,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 0) + (0.25 \cdot 0)) = 0$$

*Quindi:*

$$H_2(2,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 3.92) + (0.25 \cdot 1.13)) = 3.07$$

$$H_2(1,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 1.75) + (0.25 \cdot 0)) = 1.25$$

$$H_2(1,1) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 2.32) + (0.25 \cdot 0.39)) = 1.75$$

$$H_2(0,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 0.91) + (0.25 \cdot 0)) = 0.65$$

$$H_1(1,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 3.07) + (0.25 \cdot 1.25)) = 2.49$$

$$H_1(0,0) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 1.75) + (0.25 \cdot 0.65)) = 1.4$$

*E infine il risultato che cercavamo:*

$$H_0(1) = \frac{1}{1.05} ((0.75 \cdot 2.49) + (0.25 \cdot 1.4)) = 2.12$$



### 3.4 Le opzioni look-back

Le opzioni look-back sono un altro esempio di opzioni path-dependent. In questo caso la variabile path-dependent  $A$  dipende da un estremo:

$$A_n = \begin{cases} \min_{0 \leq k \leq n} S_k & \text{look-back con strike variabile} \\ \max_{0 \leq k \leq n} S_k & \text{look-back con strike fisso} \end{cases}$$

I payoff sono definiti analogamente a quanto già visto:

$$F(S_n, A_n) = \begin{cases} (S_n - A_n)^+ & \text{call con strike variabile} \\ (A_n - k)^+ & \text{call con strike fisso } k \end{cases}$$

Le look-back calls consentono di comprare l'attività sottostante al prezzo minimo raggiunto durante la vita dell'opzione. Per queste opzioni continuano a valere tutti i risultati che abbiamo analizzato per le opzioni asiatiche; a differenza, però, di queste ultime, le opzioni look-back sono un esempio dell'efficacia del modello binomiale per la valutazione del valore iniziale dell'opzione. Inserendo infatti la variabile path-dependent che ci rende Markoviano il processo, è possibile utilizzare l'approccio descritto dall'algoritmo ricorsivo 3.6, in quanto il numero di valori alternativi del massimo o del minimo del prezzo nel nodo considerato non è mai maggiore del numero dei periodi. Chiariamo meglio con un esempio.

**Esempio 3.** Riprendiamo la situazione dell'esempio 2.

Analizziamo un'opzione call con  $S_0 = 20$ ,  $u = 1.1$ ,  $d = 0.9$  e  $\rho = 0.05$ .

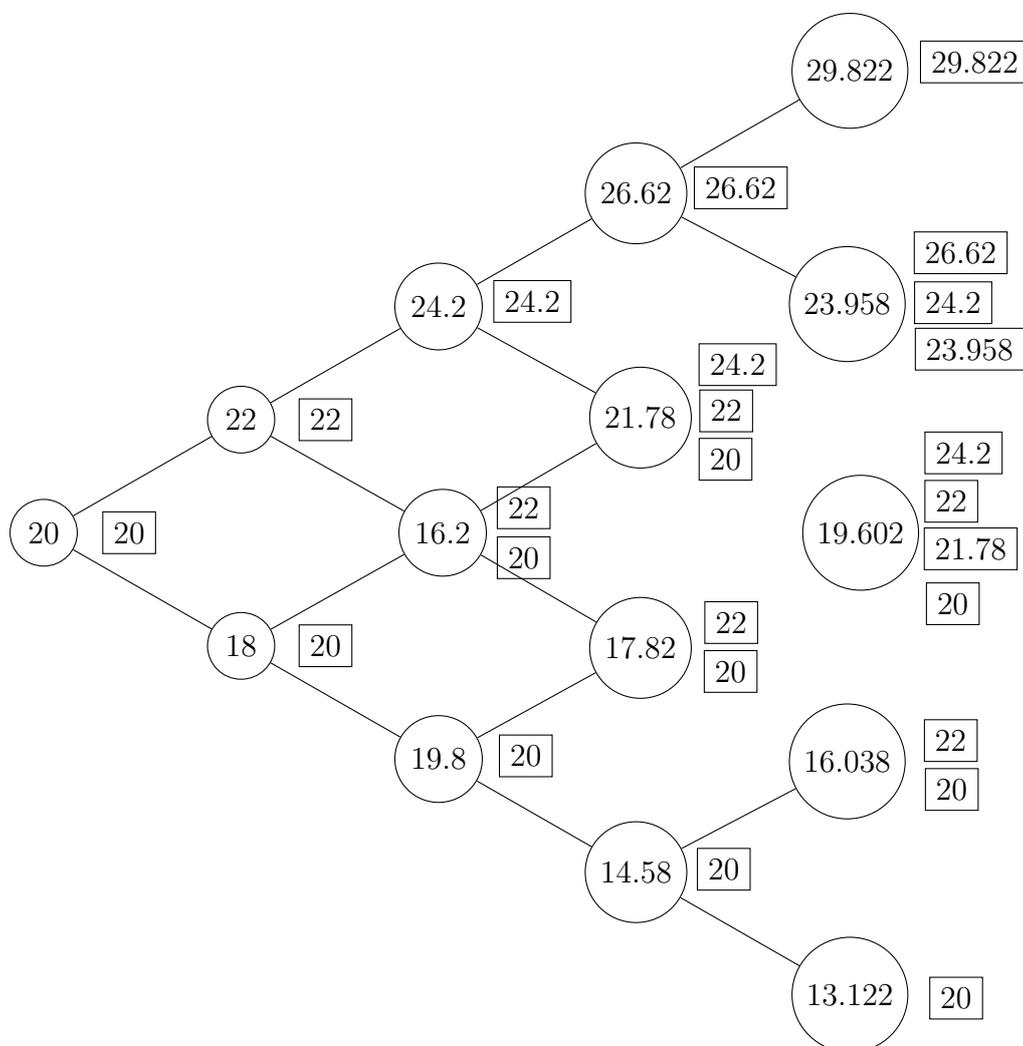
Ne viene  $q = \frac{1+\rho-d}{u-d} = 0.75$ .

Consideriamo questa volta il caso in cui lo strike sia fisso:  $K = 21$ .

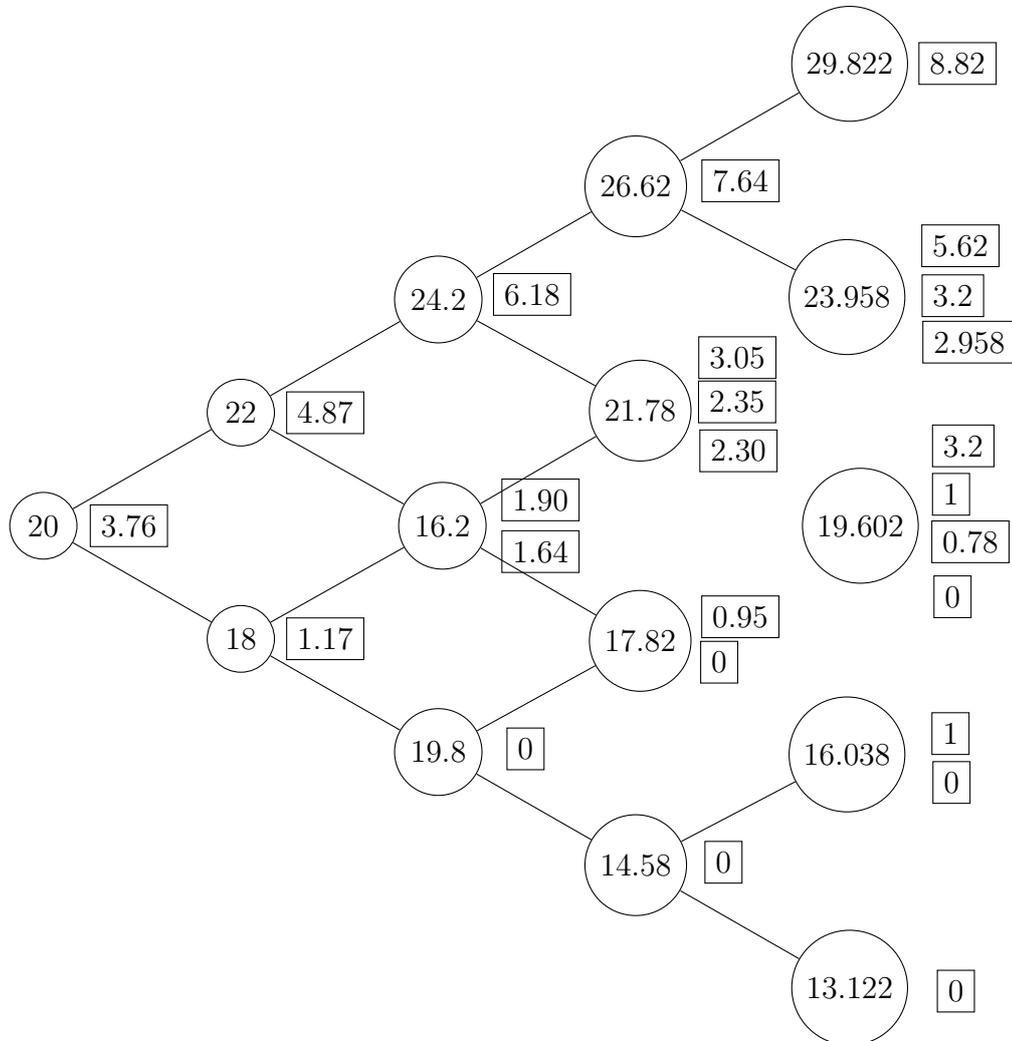
Calcoliamo i valori della variabile path-dependent che sono riportati nelle caselle rettangolari del grafico.

Confrontando i due esempi, osserviamo che nel secondo ad ogni nodo i possibili valori di  $A_n$  diversi fra loro sono in numero minore rispetto a quelli trovati nel primo. Procedendo poi nei passi si può notare questa differenza sia ancora più accentuata.

Figura 3.3: Grafico dei valori della variabile path-dependent in un'opzione look-back



*Procedendo come nell'esempio precedente, andiamo a calcolare prima i valori dei payoff relativi ad ogni nodo e, in seguito, a ritroso calcoliamo il valore iniziale del derivato considerato. Riportiamo i risultati sul grafico.*

Figura 3.4: Grafico dei payoff per l'opzione call look-back con strike fisso  $K=21$ 

Osserviamo che il numero di valori delle variabili path-dependent ad ogni passo  $n$  non é mai maggiore di  $n^2$ . Da ciò consegue che anche i risultati dei pay-off, essendo tanti quanti quelli della variabile  $A$  da cui dipendono, non sono mai maggiori di  $n^2$ . Così l'algoritmo che abbiamo usato per valutare l'opzione ha una complessità computazionale al passo  $n$  dell'ordine di  $n^2$ . Se il processo  $(S_n, A_n)$  non godesse della proprietà di Markov, i possibili diversi valori della variabile path-dependent sarebbero tanti quante le diverse traiettorie, cioè al tempo  $n$  sarebbero  $2^n$ , rendendo in tal modo l'analisi dell'opzione davvero complessa.



# Bibliografia

- [1] A. Pascucci, *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*
- [2] J.C.Hull, *Opzioni futures e altri derivati*, Pearson