

ALMA MATER STUDIORUM • UNIVERSITÀ DI BOLOGNA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

**UN ALGORITMO DI CONTROLLO
OTTIMO DI UN SISTEMA DI
AERODINAMICA MOBILE PER UNA
VETTURA SPORTIVA**

26 Ottobre 2012

A.A. 2011/2012

Relatore:

Chiar.ma Prof.

ELENA LOLI PICCOLOMINI

Studentessa:

FRANCESCA MINCIGRUCCI

Correlatore:

Dr. Ing.

STEFANO VARISCO

A mamma, papà, Riccardo

A Valerio

Indice

1	SISTEMI DI EQUAZIONI DI STATO	5
1.1	Linearizzazione sistemi non lineari	6
1.2	Soluzioni equazioni di stato	8
1.2.1	Soluzioni equazioni differenziali scalari del primo ordine	8
1.2.2	Soluzioni equazioni di stato	9
1.3	Trasformazioni di coordinate	14
2	CONTROLLABILITA', OSSERVABILITA' E STABILITA'	16
2.1	Controllabilità	16
2.2	Osservabilità	23
2.3	Stabilità	30
2.3.1	Stabilità interna	30
2.3.2	Stabilità esterna: stabilità input e output limitati.	34
3	LA TEORIA DEL CONTROLLO OTTIMO	38
3.1	Il controllo ottimo moderno	39
3.2	Problemi di regolazione	40
3.2.1	Risoluzione problema LQR con output feedback	41
3.2.1.1	Dipendenza dalle condizioni iniziali	44
3.2.1.2	Scelta delle matrici Q e R	44
3.2.2	Risoluzione numerica problema LQR con output feedback	45
3.2.2.1	Convergenza dell'algoritmo	46
3.2.2.2	Scelta guadagno iniziale	47
3.2.3	Risoluzione problema LQR con state feedback	47
3.2.3.1	Stabilità ciclo chiuso	50
3.3	Inseguitore di modello	50
3.3.1	Inseguitore di modello esplicito	51

3.3.1.1	Problema di Regolazione	51
3.3.1.2	Inseguimento di un comando specifico: Tracker	52
3.3.2	Inseguitore di modello implicito	55
3.4	Tecnica di controllo ad inseguitore di modello per un sistema di aereodinamica mobile	57
3.4.1	Scelta del modello	57
3.4.1.1	Il modello a bicicletta	57
3.4.1.2	Il modello a bicicletta con lunghezze di rilassamento	61
3.4.2	Modellazione del controllo	63
3.4.3	Il modello di riferimento	65
3.4.4	La legge di controllo	65
4	IMPLEMENTAZIONE NUMERICA E RISULTATI	67
4.1	Implementazione	67
4.2	Convalida della scelta dei parametri	70
4.3	Controllo della coerenza del controllo	72
4.4	Conseguenze della variazione dei parametri per la sintesi del controllo	77
4.4.1	Coefficienti equazione differenziale	77
4.4.2	Grado dell'equazione differenziale	78
4.4.3	Pesi LQR	80
4.5	Normalizzazione del controllo	82
4.6	Le forze controllate	83
4.7	Conclusioni	87
4.8	Eventuali sviluppi futuri	87

Introduzione

Il presente lavoro di tesi è stato sviluppato durante un periodo di stage presso Ferrari Spa in collaborazione con l'Ing. Stefano Varisco. L'obiettivo di tale lavoro è quello di implementare un algoritmo che si occupi di controllare la dinamica laterale di una vettura sportiva attraverso un sistema di aerodinamica mobile. Dopo un iniziale approfondimento teorico delle tecniche di ottimizzazione e di controllo, ho messo a frutto le conoscenze acquisite per la sintesi e l'implementazione dell'algoritmo di controllo ottimo in questione.

La parte sperimentale di tale lavoro che riguarda l'implementazione e il test virtuale dell'algoritmo è stata svolta durante il periodo di stage presso Ferrari Spa.

Nel primo capitolo è presente la teoria dei sistemi di equazioni differenziali in forma di stato che saranno utilizzati per la modellazione della dinamica della vettura. Nel secondo capitolo, invece, ho analizzato le proprietà di osservabilità, controllabilità e stabilità dei sistemi in forma di stato. La verifica di tali proprietà è fondamentale per l'applicazione delle tecniche di controllo approfondite. La teoria del controllo ottimo e le sue linee generali sono analizzate nel capitolo 3 con particolare attenzione al calcolo delle leggi di controllo dipendenti dallo stato o dagli output del sistema. I problemi di controllo approfonditi in questo capitolo sono: il problema di regolazione e il problema di inseguimento di modello. Nel primo si regola il modello rappresentativo del problema reale rendendo minimi gli stati o gli output del sistema con cui è sintetizzato, nel secondo, invece, si impone al modello di replicare gli stati o gli output di un modello di riferimento opportunamente scelto. Infine ho formalizzato, in termini di sistemi in forma di stato, il problema di interesse: una vettura sportiva con un sistema di aerodina-

mica mobile posteriore. In particolare si modella opportunamente la vettura e il sistema di aerodinamica mobile, si sceglie come agire con il controllo e infine si calcola da quantità di controllo da applicare con una legge legata agli stati del sistema. Nell'ultimo capitolo è riportata l'implementazione numerica dell'algoritmo di controllo, tutte le conseguenze dovute alla variazione dei parametri e i risultati virtuali ottenuti con le simulazioni effettuate.

Capitolo 1

SISTEMI DI EQUAZIONI DI STATO

Def 1.1: Sia $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$, sia $y(t) \in \mathbb{R}^p$, $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)]$, e sia $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)]$. Siano inoltre $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$ funzioni continue e differenziabili.

Si definisce il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Def 1.2: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è chiamato *stato del sistema*. $y(t) \in \mathbb{R}^p$ è chiamato *segnale di output*. $u(t) \in \mathbb{R}^m$ è chiamato *segnale di input*.

Def 1.3: Un sistema di tipo 1.1 si dice *lineare e invariante nel tempo* se le funzioni f e g sono lineari e non dipendono dal tempo.

Oss 1.1: Un sistema lineare e invariante nel tempo si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

con $A \in M_{n \times n}$, $B \in M_{n \times m}$, $C \in M_{p \times n}$, $D \in M_{p \times m}$.

1.1 Linearizzazione sistemi non lineari

Consideriamo un segnale nominale di input, $\tilde{u}(t)$, la traiettoria nominale dello stato, $\tilde{x}(t)$, soddisfa l'equazione $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$ e la traiettoria nominale di output soddisfa $\tilde{y} = g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)$. Se $\tilde{u}(t) = \tilde{u}$, vettore costante, il caso speciale è uno stato d'equilibrio \tilde{x} che soddisfa $f(\tilde{x}, \tilde{u}, t) = 0 \forall t$.

Consideriamo ora la deviazione dello stato, dell'input e dell'output dalla loro traiettoria nominale:

$$\begin{aligned} x_\delta(t) &= x(t) - \tilde{x}(t) \\ u_\delta(t) &= u(t) - \tilde{u}(t) \\ y_\delta(t) &= y(t) - \tilde{y}(t) \end{aligned} .$$

Sviluppamo in serie di Taylor nel punto $[\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t]$ le equazioni del sistema 1.1 e otteniamo

$$\begin{aligned} x(t) &= f(x(t), u(t), t) = \\ &= f(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)[x(t) - \tilde{x}(t)] + \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)[u(t) - \tilde{u}(t)] + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= g(x(t), u(t), t) = \\ &= g(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) + \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)[x(t) - \tilde{x}(t)] + \frac{\partial g}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)[u(t) - \tilde{u}(t)] + \mathcal{O}(x^2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Definiamo poi i coefficienti delle matrici

$$\begin{aligned}
A(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \\
B(t) &= \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \\
C(t) &= \frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t) \\
D(t) &= \frac{\partial g}{\partial u}(\tilde{x}(t), \tilde{u}(t), t)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

e, da 1.2 e 1.4, si ha

$$\dot{x}_\delta(t) = \dot{x}(t) - \dot{\tilde{x}}(t) = A(t)x_\delta(t) + B(t)u_\delta(t) + \text{termini ordine maggiore}$$

$$y_\delta(t) = y(t) - \tilde{y}(t) = C(t)x_\delta(t) + D(t)u_\delta(t) + \text{termini ordine maggiore}$$

Assumendo che lo stato, l'input e l'output rimangono vicino alle loro ripetitive traiettorie nominali, i termini di ordine maggiore al primo possono essere trascurati ottenendo le seguenti equazioni di stato lineari

$$\begin{cases} \dot{x}_\delta(t) = A(t)x_\delta(t) + B(t)u_\delta(t) \\ y_\delta(t) = C(t)x_\delta(t) + D(t)u_\delta(t) \end{cases}$$

che sono la linearizzazione del sistema 1.1.

Il sistema linearizzato approssima il comportamento del sistema non lineare a condizione che le variabili x_δ e y_δ restino piccole in norma così da poter trascurare i termini di ordine superiore al primo.

Se le equazioni non lineari del sistema 1.1 non sono esplicitamente dipendenti dal tempo e se la traiettoria nominale è uno stato d'equilibrio per un input nominale costante, allora i coefficienti delle matrici nella forma linearizzata sono costanti.

1.2 Soluzioni equazioni di stato

Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

e assumiamo che le matrici $A \in M_{n \times n}$ del sistema dinamico, $B \in M_{n \times m}$ dell'input, $C \in M_{p \times n}$ dell'output e $D \in M_{p \times m}$ sono costanti.

La prima equazione del sistema rappresenta un n-upla di equazioni differenziali del primo ordine che devono essere risolte per il vettore di stato $x(t)$ con condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$ e input $u(t)$. La seconda equazione, invece, rappresenta una dipendenza statica o istantanea dell'output dallo stato e dall'input.

Prima di costruire un'equazione in forma chiusa del sistema 1.5 per il caso n -dimensionale rivediamo le soluzioni di un'equazione differenziale scalare del primo ordine.

1.2.1 Soluzioni equazioni differenziali scalari del primo ordine

Consideriamo il sistema 1-dimensionale dato dalla seguente equazione differenziale scalare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

con a e b scalari costanti e $u(t)$ un segnale di input scalare.

Un primo approccio per trovare la soluzione consiste nel moltiplicare entrambi i termini dell'equazione per il fattore integrante $e^{-a(t-t_0)}$ avendo così

$$\frac{d}{dt}(e^{-a(t-t_0)}x(t)) = e^{-a(t-t_0)}\dot{x}(t) - e^{-a(t-t_0)}ax(t) = e^{-a(t-t_0)}bu(t).$$

Integriamo poi in $[t_0, t]$ e per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene:

$$e^{-a(t-t_0)}x(t) - e^{-a(t_0-t_0)}x(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} e^{-a(\tau-t_0)}x(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d}{dt} e^{-a(\tau-t_0)}bu(\tau)d\tau$$

quindi

$$e^{-a(t-t_0)}x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-a(\tau-t_0)}bu(\tau)d\tau,$$

quindi

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Quest'ultima espressione è la risposta dello stato $x(t)$ dovuta allo stato iniziale e al segnale di input $u(t)$.

Un secondo approccio possibile si ha utilizzando la trasformazione di Laplace. Supponiamo senza perdita di generalità $t_0 = 0$ e trasformiamo l'equazione differenziale, sfruttando la linearità della trasformata di Laplace si ottiene $sX(s) - x_0 = aX(s) + bU(s)$, quindi $X(s) = \frac{1}{s-a}x_0 + \frac{b}{s-a}U(s)$.

Dalla proprietà di convoluzione della trasformazione di Laplace otteniamo

$$x(t) = e^{at}x_0 + e^{at}bu(t) = e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

che è in accordo con la soluzione trovata con il metodo precedente.

1.2.2 Soluzioni equazioni di stato

Troviamo ora una soluzione in forma chiusa per l'equazione di stato $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ con condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$ e vettore di input $u(t)$.

Caso Omogeneo

Consideriamo l'equazione omogenea

$$\dot{X}(t) = AX(t) \quad X(t_0) = I \tag{1.6}$$

con I matrice identità $n \times n$. Assumiamo la soluzione nella forma di una serie infinita di potenze del tipo

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t-t_0)^k \quad (1.7)$$

ogni termine della serie comporta la determinazione di una matrice X_k di dimensione $n \times n$ e dipendente solo dal tempo trascorso $(t-t_0)$ riflettendo l'invarianza temporale dell'equazione di stato. Derivando e sostituendo 1.7 in 1.6 si ha $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)X_{k+1}(t-t_0)^k = A(\sum_{k=0}^{\infty} X_k(t-t_0)^k) = \sum_{k=0}^{\infty} AX_k(t-t_0)^k$.

Uguagliando poi i coefficienti dello stessa potenza di $(t-t_0)$ otteniamo la seguente relazione ricorsiva $X_{k+1} = \frac{1}{k+1}AX_k$ per $k \geq 0$ e, considerando l'inizializzazione $X_0 = I$, otteniamo $X_k = \frac{1}{k!}A^k$ per $k \geq 0$. Sostituendo quest'ultimo risultato in 1.7 otteniamo $X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k(t-t_0)^k$. Osserviamo che la serie 1.7 ha le proprietà di convergenza necessarie in modo che la serie risultante derivando termine a termine converge a $\dot{X}(t)$.

Ricordiamo che la funzione esponenziale scalare è definita dalla seguente serie: $e^{at} = 1+at+\frac{1}{2}a^2t^2+\frac{1}{6}a^3t^3+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^k t^k$. Analogamente definiamo la serie per la funzione esponenziale matriciale $e^{At} = I+At+\frac{1}{2}A^2t^2+\frac{1}{6}A^3t^3+\dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k t^k$. Da ciò possiamo scrivere la soluzione dell'equazione 1.6 nella forma $X(t) = e^{A(t-t_0)}$.

Inoltre vale

Prop 1.2.2.1 : Per ogni matrice reale A di dimensioni $n \times n$ l'esponenziale di matrice e^{At} ha le seguenti proprietà:

1. e^{At} è l'unica matrice che soddisfa $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ e $e^{At}|_{t=0} = I_n$

2. $\forall t_1, t_2, e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1}e^{At_2}$, quindi $\forall t I = e^{A(0)} = e^{A(t-t)} = e^{At}e^{-At}$. Quindi e^{At} è invertibile per ogni t con inversa $[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$.
3. A e e^{At} commutano con rispetto del prodotto tra matrici, cioè $Ae^{At} = e^{At}A \forall t$.
4. $[e^{At}]^T = e^{A^T t} \forall t$
5. Per ogni matrice reale B di dimensione $n \times n$ vale : $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \forall t \Leftrightarrow AB = BA$.

Per la tesi 1 della proposizione precedente si ha l'unicità della soluzione trovata per l'equazione 1.6.

Caso Generale

Torniamo al caso generale in cui si deve risolvere

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} .$$

Definiamo $z(t) = e^{-A(t-t_0)}x(t)$ e quindi $z(t_0) = e^{-A(t_0-t_0)}x(t_0) = x_0$ e

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{d}{dt} (e^{-A(t-t_0)}) x(t) + e^{-A(t-t_0)} \dot{x}(t) \\ &= (-A)e^{-A(t-t_0)}x(t) + e^{-A(t-t_0)}[Ax(t) + Bu(t)] \\ &= e^{-A(t-t_0)}Bu(t). \end{aligned}$$

Il lato destro dell'equazione non dipende da $z(t)$ possiamo dunque risolvere applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{z}(\tau)d\tau = z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau)d\tau.$$

Poniamo $x(t) = e^{A(t-t_0)}z(t)$ e $x(t_0) = z(t_0)$, quindi

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{A(t-t_0)} \left(z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(\tau-t_0)} Bu(\tau) d\tau \right) \\
&= e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-t_0)} e^{-A(\tau-t_0)} Bu(\tau) d\tau = \\
&= e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Questa è un'espressione in forma chiusa per la soluzione completa dell'equazione di stato lineare tempo invariante. Il primo termine è dovuto allo stato iniziale del sistema $x(t_0) = x_0$ e determina la soluzione nel caso in cui l'input $u(t)$ sia identicamente nullo. Il secondo termine, invece, è dovuto al segnale di input e determina la soluzione nel caso in cui lo stato iniziale sia il vettore nullo.

Oss 1.2.2.1 Facendo la trasformata di Laplace dell'equazione di stato $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ si ottiene $sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = x_0 + BU(s)$. Ora osserviamo che vale $(sI - A)^{-1} = \frac{\text{adj}(sI - A)}{|sI - A|}$ dove $|sI - A|$ è un polinomio monico di grado n .

Possiamo dunque risolvere l'equazione trovando $X(s) = (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s)$ e si dimostra che per ogni stato iniziale $e^{At}x_0 \longleftrightarrow (sI - A)^{-1}x_0$, quindi $e^{At} \longleftrightarrow (sI - A)^{-1}$. Questo ci suggerisce un metodo per il calcolo dell'esponenziale matriciale: si forma prima la matrice inversa $(sI - A)^{-1}$ e poi si applica una parziale espansione in frazioni elemento per elemento per determinare la trasformata inversa di Laplace che è e^{At} .

Esempio: Risolviamo l'equazione differenziale ordinaria, lineare del secondo ordine $\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 12y(t) = u(t)$, con $u(t)$ segnale di input di tipo step di intensità 3 e con condizioni iniziali $y(0) = 0.10$, $\dot{y}(0) = 0.05$. Il polinomio caratteristico dell'equazione è $s^2 + 7s + 12 = (s + 3)(s + 4)$ e gli autovalori del sistema sono $s_1 = -3$, $s_2 = -4$. Questi autovalori sono distinti, negativi e reali. Scegliamo

un opportuno stato $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$, otteniamo quindi la seguente equazione di stato $\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ e $x(0) = [y(0), \dot{y}(0)]^T = [0.10, 0.05]^T$. Risolviamo questo problema nel dominio di Laplace, scriviamo prima

$$X(s) = (sI - A)^{-1}X(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \quad (1.8)$$

con $(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s + 7 \end{bmatrix}$, quindi

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix}.$$

Sostituendo in 1.8 i valori numerici si ottiene

$X(s) = \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.05 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2 + 7s + 12} \begin{bmatrix} s + 7 & 1 \\ -12 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{3}{s}$ dove la trasformata di Laplace di una funzione step unitaria è $\frac{1}{s}$. Semplificando si ha

$$\begin{aligned} X(s) &= \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+3)(s+4)} \begin{bmatrix} 0.10s + 0.75 + \frac{3}{s} \\ 0.05s + 1.80 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{0.10s^2 + 0.75s + 3}{s(s+3)(s+4)} \\ \frac{0.05s + 1.80}{(s+3)(s+4)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Un'espansione parziale della variabile del primo stato dà i residui $C_1 = 0.25$, $C_2 = -0.55$, $C_3 = 0.40$. Per l'output facendo la trasformata inversa si ottiene

$$\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) = L^{-1}\{X_1(s)\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{0.25}{s} - \frac{0.55}{s+3} + \frac{0.40}{s+4}\right\} \\ &= 0.25 - 0.55e^{-3t} + 0.40e^{-4t} \end{aligned}$$

In maniera analoga si troviamo una soluzione per la seconda variabile di stato $x_2(t)$, ora l'espansione parziale in frazione dà i residui $C_1 = 1.65$ e $C_2 = -1.60$. Quindi facendo la trasformata inversa si ottiene

$$\begin{aligned} x_2(t) &= L^{-1}\{X_1(s)\} = \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1.65}{s+3} - \frac{1.60}{s+4}\right\} \\ &= 1.65e^{-3t} - 1.60e^{-4t} \end{aligned}$$

1.3 Trasformazioni di coordinate

Introduciamo, ora, il concetto di cambio di coordinate per lo stato del sistema e vediamo quali conseguenze si hanno nell'equazione di stato. In particolare è degno di nota ciò che non subisce cambiamenti con la trasformazione di coordinate. Ogni matrice $T \in M_{n \times n}$ non singolare definisce una trasformazione di coordinate del tipo

$$x(t) = Tz(t) \Rightarrow z(t) = T^{-1}x(t) \quad (1.9)$$

Associato al vettore $z(t)$ che è lo stato trasformato abbiamo anche l'equazione trasformata: $\dot{z}(t) = T^{-1}\dot{x}(t) = T^{-1}[Ax(t) + Bu(t)] = T^{-1}ATz(t) + T^{-1}Bu(t)$.

Ponendo $\hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{B} = T^{-1}B$ possiamo scrivere
$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t) \\ z(t_0) = T^{-1}x(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Questa similitudine permette al nuovo sistema dinamico dato da \hat{A} di conservare lo stesso polinomio caratteristico e gli stessi autovalori di A . Gli autovettori, invece, sono diversi, ma sono in relazione tra loro con la stessa trasformazione T .

Forma canonica diagonale

Ci sono particolari realizzazioni che si possono ottenere applicando una trasformazione di coordinate di tipo 1.9 ad una data equazione lineare di stato. Vediamo ora la trasformazione in forma canonica diagonale per un sistema con un unico input e un unico output (SISO system).

La forma canonica diagonale è anche chiamata forma modale poichè produce un insieme disaccoppiato di n equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Questo è chiaramente conveniente dal punto di vista risolutivo, poichè in questa forma le soluzioni di n equazioni scalari differenziali del primo ordine possono essere formulate indipendentemente, invece di usare metodi risolutivi per sistemi accoppiati. Ogni sistema di equazioni di stato, con matrice A diagonalizzabile, può essere trasformato in forma canonica diagonale con la trasformazione $x(t) = T_{DCF}z(t)$, dove $T_{DCF} = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$ con v_i autovettori di A . Poichè A è assunta diagonalizzabile gli n autovettori sono linearmente indipendenti, quindi T_{DCF} è non singolare.

Si ottiene dunque:

$$\hat{A} = A_{DCF} = T_{DCF}^{-1}AT_{DCF} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = B_{DCF} = T_{DCF}^{-1}B$$

$$\hat{C} = C_{DCF} = CT_{DCF}$$

$$\hat{D} = D_{DCF} = D$$

con λ_i autovalori di A associati agli autovettori v_i .

Capitolo 2

CONTROLLABILITA', OSSERVABILITA' E STABILITA'

2.1 Controllabilità

Analizziamo ora le interazioni tra input e stato del sistema tralasciando gli output che non sono utili ai fini di questa analisi. Consideriamo dunque il sistema di equazioni in forma di stato stato

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Def 2.1.1: Uno stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è *controllabile nell'origine* se per un certo tempo iniziale t_0 esiste un tempo finale finito $t_f > t_0$ ed esiste un segnale di input continuo $u(\cdot)$ definito in $[t_0, t_f]$ tale che, con stato iniziale $x(t_0) = x$, lo stato finale soddisfi $x(t_f) = e^{A(t_f-t_0)}x + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \underline{0} \in \mathbb{R}^n$.

Def 2.1.2: Il sistema 2.1 si dice *controllabile* se ogni stato $x(t) \in \mathbb{R}^n$ è controllabile nell'origine.

Osservando questa definizioni non è affatto chiaro quali caratteristiche debba avere un segnale di input per avere la controllabilità nello stato del sistema. L'obiettivo principale dunque è quello di tramutare la proprietà di controllabilità

dell'equazione di stato in un'equivalente proprietà algebrica lineare sulle matrici A e B dell'equazione.

Def 2.1.3: Si definisce *matrice di controllabilità* per il sistema 2.1 la seguente matrice: $P = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$.

Oss 2.1.1: Nel caso di sistemi con più input la matrice di controllabilità P è formata da n blocchi matriciali ognuno di dimensione $m \times n$.

Def 2.1.4: Si definisce *matrice di controllabilità Gramian* la seguente $W(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} B B^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \ \forall t_0$ tempo iniziale e $\forall t_f > t_0$ tempo finale finito.

Oss 2.1.2: Tale matrice definita sopra è quadrata di dimensione $n \times n$, simmetrica e semidefinita positiva, infatti:

$$x^T W(t_0, t_f) x = x^T \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} B B^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau x = \int_{t_0}^{t_f} \|B^T e^{A^T(t_0-\tau)} x\|^2 d\tau \geq 0.$$

Un' utile formulazione algebrica per la verifica della controllabilità è data dal seguente

Teorema 2.1.1: *Il sistema lineare di stato 2.1 è controllabile se e sole se $rg(P) = n$, con n dimensione dello stato del sistema.*

Prima di dimostrare il teorema enunciamo e dimostriamo il seguente

Lemma 2.1.1: *$Rg(P) = n$ se e sole se $\forall t_0$ tempo iniziale e $\forall t_f > t_0$ tempo finale finito la matrice di controllabilità Gramian $W(t_0, t_f)$ è non singolare.*

Dim:

$[\Rightarrow]$ Dimostriamo questa implicazione per contrapposizione, cioè dimostriamo che se $W(t_0, t_f)$ è non singolare per qualche t_0 e qualche $t_f > t_0$ finito, allora $rg(P) = n$. Assumiamo dunque $W(t_0, t_f)$ non singolare, quindi $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $W(t_0, t_f)x = 0 \in \mathbb{R}^n$, quindi $x^T W(t_0, t_f)x = 0 \in \mathbb{R}$. Per la def 2.1.4 si ha $0 = x^T \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} B B^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau x = \int_{t_0}^{t_f} \|B^T e^{A^T(t_0-\tau)} x\|^2 d\tau$. Poichè l' integranda non può essere negativa, l'unico modo perchè l'integrale sia nullo in un intervallo di tempo positivo è che anche l'integranda sia identicamente nulla $\forall \tau \in [t_0, t_f]$. Quindi $\|B^T e^{A^T(t_0-\tau)} x\|^2 = 0 \Leftrightarrow B^T e^{A^T(t_0-\tau)} x =$

$0 \in \mathbb{R}^n \forall \tau \in [t_0, t_f]$. Ciò significa che anche la derivata di ogni ordine rispetto a τ di questa espressione deve essere nulla, in particolare per $\tau = t_0$ si ha:
 $0 = \frac{d^k}{d\tau^k} x^T e^{A(t_0-\tau)} B \Big|_{\tau=t_0} = (-1)^k x^T A^k e^{A(t_0-\tau)} B \Big|_{\tau=t_0} = (-1)^k x^T A^k B \quad \forall k \geq 0.$

L'alternanza di segni non interferisce con la conclusione che:

$[00 \dots 0] = [x^T B x^T A B \dots x^T A^{n-1} B] = x^T [B A B \dots A^{n-1} B]$, dunque le componenti del vettore $x \in \mathbb{R}^n$ creano una combinazione di righe della matrice di controllabilità P che produce un vettore nullo. Poichè inizialmente si è supposto x non nullo, almeno una delle sue componenti sarà diversa da 0, quindi abbiamo trovato una combinazione di righe di P con coefficienti non tutti nulli, dunque P ha righe linearmente dipendenti, cioè $rg(P) < n$.

[\Leftarrow] Dimostriamo anche questa implicazione per contrapposizione, cioè dimostriamo che se $rg(P) < n$, allora $W(t_0, t_f)$ è singolare per qualche t_0 e qualche $t_f > t_0$ finito. Assumiamo $rg(P) < n$, allora $\exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ le cui componenti danno una combinazione nulla delle righe di P , cioè: $x^T [B A B \dots A^{n-1} B] = [x^T B x^T A B \dots x^T A^{n-1} B] = [00 \dots 0]$, quindi $x^T A^k B = 0$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Esistono, inoltre, delle funzioni analitiche scalari $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ tali che danno la rappresentazione in serie finita dell'esponenziale di matrice:

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k. \text{ Quindi } x^T e^{At} B = x^T \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \right) B = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) x^T A^k B = 0$$

$\forall t$. Vale anche per la trasposta di questa identità, cioè $B^T e^{At} x = 0 \forall t$. Questo ci permette di mostrare che $\forall t_0$ e $t_f > t_0$ finito si ha:

$$W(t_0, t_f)x = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} B B^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau x = \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} B \left(B^T e^{A^T(t_0-\tau)} x \right) d\tau = 0$$

quindi $W(t_0, t_f)$ ha uno spazio nullo di dimensione almeno 1. Per la legge di Sylvester si ha $rg(W(t_0, t_f)) < n$, quindi $W(t_0, t_f)$ non singolare.

Dim Teorema 2.1.1:

[\Rightarrow] Assumiamo che il sistema 2.1 sia controllabile, quindi, per definizione, ogni stato iniziale è controllabile nell'origine, cioè $\forall x \in \mathbb{R}^n \exists t_f > t_0$ tempo finito e un segnale continuo $u(\cdot)$ definito su $[t_0, t_f]$ tale che, con $x(t_0) = x$,
 $0 = e^{A(t_f-t_0)}x + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} B u(\tau) d\tau.$

Espandendo l'esponenziale di matrice in serie si ha:

$$\begin{aligned}
x &= -e^{-A(t_0-t_f)} \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau = - \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} Bu(\tau) d\tau = \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t_0 - \tau) A^k B u(\tau) d\tau \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A^k B \int_{t_0}^{t_f} \alpha_k(t_0 - \tau) u(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Osserviamo che gli integrali definiti di ogni termine della sommatoria sono tutti dei vettori costanti di dimensione $m \times 1$ che denotiamo con u_k , quindi possiamo scrivere:

$$x = - \sum_{k=0}^{n-1} A^k B u_k = - [B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B] \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Abbiamo quindi ottenuto x come combinazione lineare delle colonne di P . Con l'assunzione della controllabilità dell'equazione una relazione come quella appena scritta deve valere per ogni stato $x \in \mathbb{R}^n$ e ciò implica che il rango dello spazio dato dalla matrice di controllabilità sia tutto \mathbb{R}^n , quindi $rg(P) = n$.

[\Leftarrow] Assumiamo che $rg(P) = n$ quindi, per il Lemma 2.1.1 $\forall t_0$ e $\forall t_f > t_0$ finito la matrice Gramian di controllabilità $W(t_0, t_f)$ è non singolare. Si deve mostrare che ogni stato x è controllabile nell'origine nel senso della definizione 2.1.1. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario e consideriamo il segnale di input definito su $[t_0, t_f]$ da $u(t) = -B^T e^{A^T(t_0-\tau)} W^{-1}(t_0, t_f) x$. La traiettoria di stato con dato iniziale $x(t_0) = x$ soddisfa

$$\begin{aligned}
x(t_f) &= e^{A(t_f-t_0)} x + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_f-\tau)} Bu(\tau) d\tau \\
&= e^{A(t_f-t_0)} \left[x + \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} B \left(-B^T e^{A^T(t_0-\tau)} W^{-1}(t_0, t_f) x \right) d\tau \right] \\
&= e^{A(t_f-t_0)} \left[x - \int_{t_0}^{t_f} e^{A(t_0-\tau)} B B^T e^{A^T(t_0-\tau)} W^{-1}(t_0, t_f) x d\tau \right] \\
&= e^{A(t_f-t_0)} [x - W(t_0, t_f) W^{-1}(t_0, t_f) x] = 0.
\end{aligned}$$

Ciò prova la controllabilità nell'origine per lo stato arbitrario x quindi il sistema è controllabile.

Controllabilità e trasformazione di coordinate.

Proposizione 2.1.1: *Sia T trasformazione di coordinate tale che $x(t) = Tz(t)$ e sia $\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t)$ $z(t_0) = z_0$ il sistema trasformato con $\hat{A} = T^{-1}AT$, $\hat{B} = T^{-1}B$ $z_0 = T^{-1}x_0$. Il sistema trasformato è controllabile se e solo se il sistema in forma di stato originale è controllabile.*

Dim:

Dimostriamo questa proposizione sfruttando il teorema 2.1.1. Sia P la matrice di controllabilità del sistema originario e sia \hat{P} quella del sistema trasformato.

Poichè in generale vale $\hat{A}^k = T^{-1}A^kT \forall k$ intero positivo, si ha: $\hat{P} = [\hat{B} \hat{A}\hat{B} \dots \hat{A}^{n-1}\hat{B}] = [T^{-1}BT^{-1}ATT^{-1}B \dots T^{n-1}A^{n-1}TT^{-1}B] = T^{-1}[BAB \dots A^{n-1}B] = T^{-1}P$.

Poichè moltiplicando la matrice a destra o sinistra per un'altra matrice non singolare non comporta cambiamento di rango si ha $rg(P) = rg(\hat{P})$.

Supponiamo ora che il sistema di stato abbia un solo input e che la matrice A sia diagonalizzabile, possiamo dunque applicare la trasformazione in forma canonica diagonale e si ottiene la seguente matrice di controllabilità:

$$P_{DCF} = \begin{bmatrix} b_1 & \lambda_1 b_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} b_1 \\ b_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & \lambda_n b_n & \dots & \lambda_n^{n-1} b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Poichè abbiamo dimostrato nella Proposizione 2.1.1 che la controllabilità è invariante per trasformazione di coordinate dello stato, possiamo affermare che la controllabilità di un sistema con un solo input può essere valutata ispezionando la sua forma canonica diagonale quando esiste. In particolare per come è fatta P_{DCF} condizione necessaria e sufficiente per la controllabilità è che gli autovalori

di A posti sulla diagonale di A_{DCF} devono essere distinti e ogni elemento di B_{DCF} deve essere non nullo.

Vediamo ora altri modi per caratterizzare la controllabilità di un sistema:

Teorema 2.1.2: *Supponiamo $rg[B AB \dots A^{n-1}B] = q < n$. Allora esiste una trasformazione di coordinate di stato $x(t) = Tz(t)$ tale che il sistema trasformato ha*

$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, $\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dove la coppia (A_{11}, B_1) definisce un sistema controllabile q -dimensionale.

Teorema 2.1.3 (Test controllabilità su autovettori di Popov-Belevitch-Houtus):

Il sistema in forma di stato dato dalla coppia di matrici (A, B) è controllabile se e solo se non esistono autovettori sinistri di A ortogonali alle colonne di B .

Dim:

[\Rightarrow] Dimostriamo la prima implicazione per contrapposizione, cioè se esiste autovettore sinistro di A ortogonale alle colonne di B allora il sistema di stato dato da (A, B) non è controllabile. Sia $w \in \mathbb{C}^n$ autovettore sinistro di A associato a $\lambda \in \sigma(A)$ che è ortogonale alle colonne di B , allora $w \neq 0$, $w^*A = \lambda w^*$ e $w^*B = 0$. Quindi $w^*A^k B = \lambda^k (w^*B) = 0 \forall k \geq 0$ e allora $w^*[B AB \dots A^{n-1}B] = [0 0 \dots 0]$. Poiché $w \neq 0$, l'identità precedente indica l'esistenza di una combinazione lineare non banale delle righe della matrice di controllabilità che dà il vettore nullo, quindi per definizione la matrice di controllabilità ha righe linearmente dipendenti, cioè $rg[B AB \dots A^{n-1}B] < n$, quindi l'equazione data da (A, B) non è controllabile.

[\Leftarrow] Per contrapposizione dimostriamo che se il sistema non è controllabile allora \exists autovettore sinistro di A ortogonale alle colonne di B . Supponiamo, dunque che il sistema non sia controllabile, quindi $rg[B AB \dots A^{n-1}B] = q < n$. Per il Teorema 2.1.2 esiste una trasformazione di coordinate $x(t) = Tz(t)$ tale che il sistema trasformato ha $\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, $\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Sia λ un autovalore della sotto-matrice A_{22} e $w_2 \in \mathbb{C}^{n-q}$ l'associato autovettore sinistro. Definiamo $w = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ w_2 \end{bmatrix} \neq 0$ che soddisfa

$$w^* A = [0 \ w_2] T^{-1} \left(T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} T^{-1} \right) = [0 \ w_2^* A_{22}] T^{-1} = [0 \ \lambda w_2^*] T^{-1} = \lambda w^*$$

e inoltre

$$w^* B = [0 \ w_2^*] T^{-1} \left(T \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = [0 \ w_2^*] \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Quindi w è autovettore sinistro di A ortogonale alle colonne di B .

Teorema 2.1.4 (Test controllabilità sul rango di Popov-Belevitch-Houtus):

Il sistema di stato dato dalla coppia di matrici (A, B) è controllabile se e solo se $rg(\lambda I - A) = n \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

Dim:

Innanzitutto osserviamo che per definizione $rg(\lambda I - A) = n \ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ ad eccezione degli autovalori di A , cioè $rg(\lambda I - A) = n \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$. Resta da mostrare dunque che la condizione del rango vale anche per $\lambda \in \sigma(A)$ se e solo se il sistema di stato è controllabile.

[\Rightarrow] Supponiamo che $rg[\lambda I - A \ B] < n$ per qualche $\lambda \in \sigma(A)$, quindi la matrice $[\lambda I - A \ B]$ di dimensione $n \times (n + m)$ ha righe linearmente dipendenti, quindi $\exists w \in \mathbb{C}^n$ vettore non nullo tale che $w^*[\lambda I - A \ B] = [0 \ 0]$, cioè $w^*(\lambda I - A) = 0$, $w^*B = 0$, ma allora w è autovettore sinistro di A ortogonale alle colonne di B . Per il teorema precedente il sistema non è controllabile.

[\Leftarrow] Supponiamo ora che il sistema non è controllabile, quindi, per il teorema precedente, esiste autovalore λ di A e il corrispondente autovettore sinistro di A che è ortogonale alle colonne di B . Ripercorrendo all'inverso i passaggi precedenti si ha $w^*[\lambda I - A \ B] = [0 \ 0]$. Quindi abbiamo trovato $\lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{C}$ tale che $[\lambda I - A \ B]$ ha righe linearmente dipendenti, quindi $rg[\lambda I - A \ B] < n$.

2.2 Osservabilità

Nei sistemi lineari di stato visti fin'ora il vettore di stato costituisce una quantità interna che è influenzata dal segnale di input u , e, a sua volta, influenza il segnale di uscita. In generale la dimensione del vettore di stato è maggiore del numero di segnali di input o output. Ora ci chiediamo se le misurazioni su un intervallo finito di tempo dei segnali di ingresso e di uscita del sistema di equazioni lineari possono essere elaborate per determinare univocamente lo stato iniziale. Se è così, la conoscenza dello stato iniziale e del segnale di input permette di ricostruire l'intera traiettoria dello stato in accordo con la soluzione dell'equazione di stato. Questa descritta è caratterizzata come la proprietà di osservabilità. L'obiettivo ora è quello di trovare un criterio algebrico che descriva l'osservabilità di un sistema.

Consideriamo il sistema lineare invariante n -dimensionale di equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Assumiamo che i segnali di input e output $u(t)$ e $y(t)$ possano essere misurati su un intervallo di tempo finito e da questi cerchiamo di dedurre lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$. Come detto in precedenza lo stato iniziale può essere determinato univocamente, quindi, conoscendo il segnale di input, si ottiene l'intera traiettoria dello stato con $x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$ per $t \geq t_0$. Poichè $u(t)$ è assunto essere noto, la risposta a stato nullo può essere estratta dalla risposta completa $y(t)$ isolando la risposta a input zero da $y(t) - \left[\int_{t_0}^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t) \right] = Ce^{A(t-t_0)}x_0$ che dipende direttamente dal non noto stato iniziale. In seguito assumiamo, senza perdita di generalità, che $u(t) = 0 \forall t \geq t_0$ e consideriamo l'equazione omogenea

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.3)$$

che ci da direttamente la componente relativa a input zero di 2.2.

Def 2.2.1: Uno stato $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è *non osservabile* se la risposta a input nullo dell'equazione 2.2 con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ è $y(t) = 0 \forall t \geq t_0$.

Def 2.2.2: Il sistema 2.2 è *osservabile* se $0 \in \mathbb{R}^n$ è l'unico stato non osservabile.

Def 2.2.3: Si definisce *matrice di osservabilità* la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che tale matrice Q è formata da n blocchi matriciali ognuno di dimensione $p \times n$, quindi Q è di dimensione $(np) \times n$. Analogamente alla controllabilità si ha il seguente teorema per una caratterizzazione algebrica dell'osservabilità:

Teorema 2.2.1: *Il sistema 2.2 è osservabile se e solo se $rg(Q) = n$, con n dimensione dello stato del sistema.*

Dim:

[\Rightarrow] Dimostriamo per contrapposizione, cioè se $rg(Q) < n$ allora 2.2 non è osservabile. Supponiamo $rg(Q) < n$, quindi esiste una combinazione non banale di colonne di Q con il vettore x_0 tale che dà il vettore nullo, quindi

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} Cx_0 &= CAx_0 = CA^2x_0 = \dots = \\ &= CA^{n-1}x_0 = 0 \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Usando $e^{At} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)A^k$ si ha che la risposta del sistema omogeneo 2.3 con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ soddisfa: $y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 = C \left[\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-t_0)A^k \right] x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t-t_0)(CA^kx_0) = 0 \forall t \geq t_0$. Quindi x_0 è uno stato non osservabile e

$x_0 \neq 0$ quindi il sistema 2.2 è non osservabile.

[\Leftarrow] Per contrapposizione dimostriamo che se 2.2 è non osservabile, allora $rg(Q) < n$. Assumiamo quindi che 2.2 sia non osservabile, allora, per definizione, esiste uno stato non nullo non osservabile, cioè $\exists x_0$ vettore non nullo di dimensione $n \times 1$ tale che $Ce^{A(t-t_0)}x_0 = 0 \forall t \geq t_0$. Derivando più volte questa espressione e valutandola in $t = t_0$ si ha:

$0 = \frac{d^k}{dt^k} (Ce^{A(t-t_0)}x_0) |_{t=t_0} = CA^k e^{A(t-t_0)} |_{t=t_0} = CA^k x_0$ con $k = 0, 1, \dots, n-1$. Possiamo riscrivere in forma compatta questa identità

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cx_0 \\ CAx_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1}x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

che mostra che lo stato non osservabile x_0 sta nello spazio nullo di Q . Questa è una combinazione lineare nulla di colonne di Q con un vettore x_0 non tutto nullo, quindi le colonne di Q sono linearmente dipendenti, dunque $rg(Q) < n$.

Dopo questo teorema possiamo rispondere alla domanda che ci siamo posti all'inizio affermando che : è possibile determinare univocamente lo stato iniziale misurando i segnali di input e output su un intervallo di tempo finito se e solo se l'equazione 2.2 è osservabile.

Per argomentare il fatto che l'osservabilità è condizione necessaria supponiamo che $x(t_0) = x_0$ è uno stato iniziale non nullo e non osservabile, quindi, per definizione l'output in risposta a un segnale input nullo è $y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 = 0 \forall t \geq t_0$. Quindi lo stato iniziale x_0 è indistinguibile dallo stato iniziale nullo e non è possibile eliminare questa ambiguità elaborando la risposta a input nullo.

Per mostrare che l'osservabilità è sufficiente per la ricostruzione in modo univoco dello stato iniziale a partire dai segnali di input e output definiamo prima la matrice di osservabilità Gramian e vediamo alcune proprietà.

Def 2.2.4: $\forall t_0$ tempo iniziale, $\forall t_f > t_0$ finito, definiamo la *matrice di osservabilità Gramian* $M(t_f, t_0) = \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} d\tau$.

Tale matrice è quadrata di dimensione $n \times n$, simmetrica e semi-definita positiva: $x^T M(t_0, t_f)x = x^T \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} d\tau x = \int_{t_0}^{t_f} \| C e^{A(\tau-t_0)} x \|^2 d\tau \geq 0$.

Lemma 2.2.1: $Rg(Q) = n$ se e solo se $\forall t_0$ tempo iniziale, $\forall t_f > t_0$ finito la matrice di osservabilità Gramian $M(t_0, t_f)$ è non singolare.

Dim:

[\Rightarrow] Dimostriamo per contrapposizione, cioè se $M(t_0, t_f)$ è singolare per qualche t_0 e $t_f > t_0$, allora $rg(Q) < n$. Supponiamo $M(t_0, t_f)$ singolare, allora per qualche t_0 e $t_f > t_0$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $M(t_0, t_f)x_0 \in \mathbb{R}^n$ e cioè $x_0^T M(t_0, t_f)x_0 = 0 \in \mathbb{R}$. Per la definizione di matrice di osservabilità Gramian si ha $0 = x_0^T M(t_0, t_f)x_0 = x_0^T \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} d\tau x_0 = \int_{t_0}^{t_f} \| C e^{A(\tau-t_0)} x_0 \|^2 d\tau$.

Analogamente al lemma 2.1.1 l'integranda non può essere negativa quindi necessariamente $\| C e^{A(\tau-t_0)} x_0 \| = 0 \forall \tau \in [t_0, t_f] \Rightarrow C e^{A(\tau-t_0)} x_0 = 0 \in \mathbb{R}^p \forall \tau \in [t_0, t_f]$.

Quindi

$$0 = \frac{d^k}{dt^k} C e^{A(\tau-t_0)} x_0 \Big|_{\tau=t_0} = C A^k e^{A(\tau-t_0)} x_0 \Big|_{\tau=t_0} = C A^k x_0$$

$\forall k \geq 0$.

Concludiamo che

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} Cx_0 \\ CAx_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1}x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

che implica, poichè $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è non nullo, che Q ha colonne linearmente dipendenti, quindi $rg(Q) < n$.

[\Leftarrow] Dimostriamo sempre per contrapposizione. Assumiamo che $rg(Q) < n$, quindi $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che dà una combinazione lineare nulla di colonne di Q ,

cioè

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} Cx_0 \\ CAx_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1}x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

che dimostra che $CA^k x_0 = 0$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Espandendo ora l'esponenziale di matrice con le funzioni scalari $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \dots, \alpha_{n-1}(t)$ si ha $Ce^{At}x_0 = C \left[\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) A^k \right] x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t) (CA^k x_0) = 0 \forall t$.

Quindi $\forall t_0, \forall t_f > t_0$

$$\begin{aligned} M(t_0, t_f)x_0 &= \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} d\tau x_0 = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T (C e^{A(\tau-t_0)} x_0) d\tau = 0 \end{aligned}$$

quindi $M(t_0, t_f)$ è singolare.

Per il lemma appena dimostrato ogni equazione di stato osservabile ha per ogni tempo iniziale t_0 e per ogni $t_f > t_0$ finito una matrice di osservabilità Gramian non singolare. Ciò può essere sfruttato per elaborare le misurazioni dei segnali di output e input per avere lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ nel modo descritto di seguito.

Si crea la risposta a input nullo

$$y_{zi}(t) = y(t) - \left[\int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \right] = C e^{A(t-t_0)} x_0,$$

si elabora e si ottiene univocamente lo stato iniziale:

$$\begin{aligned} M^{-1}(t_0, t_f) \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T y_{zi}(\tau) d\tau &= M^{-1}(t_0, t_f) \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} x_0 d\tau = \\ M^{-1}(t_0, t_f) \int_{t_0}^{t_f} e^{A^T(\tau-t_0)} C^T C e^{A(\tau-t_0)} d\tau x_0 &= M^{-1}(t_0, t_f) M(t_0, t_f) x_0 = x_0. \end{aligned}$$

Osservabilità e controllabilità a confronto

Analizziamo ora un'interessante connessione, chiamata dualità, tra controllabilità e osservabilità. Consideriamo l'equazione di stato

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A^T z(t) + C^T v(t) \\ w(t) = B^T z(t) + D^T v(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

con $z(t)$ vettore di stato n dimensionale, $v(t)$ vettore di input p dimensionale e $w(t)$ output m dimensionale.

L'equazione 2.4 è nota come l'equazione duale di 2.2, notiamo che tra queste due equazioni le dimensioni di input e output sono invertite. Per l'equazione 2.2 originaria avevamo definito le matrici di controllabilità e osservabilità $P_{(A,B)}$ e $Q_{(A,C)}$, analogamente, per l'equazione duale 2.4 definiamo

$$P_{(A^T, C^T)} = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T]$$

$$Q_{(A^T, B^T)} = \begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \cdot \\ \cdot \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Poiché valgono

$$[C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T] = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \cdot \\ \cdot \\ B^T (A^T)^{n-1} \end{bmatrix} = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^T$$

e poichè il rango di una matrice non cambia con la trasposizione si ha:

$$\begin{aligned} \text{rg}(P_{(A^T, C^T)}) &= \text{rg}(Q_{(A, C)}) \\ \text{rg}(Q_{(A^T, B^T)}) &= \text{rg}(P_{(A, B)}). \end{aligned}$$

Queste relazioni implicano:

- l'equazione duale 2.4 è controllabile se e solo se l'equazione originaria 2.2 è osservabile
- l'equazione duale 2.4 è osservabile se e solo se l'equazione originaria 2.2 è controllabile

Ora, dopo aver visto questa dualità tra controllabilità e osservabilità diventa immediata la dimostrazione dei seguenti teoremi.

Teorema 2.2.2 (Test osservabilità su autovettori di Popov-Belevitch-Houtus):

L'equazione di stato data dalla coppia di matrici (A, C) è osservabile se e solo se non esistono autovettori destri di A ortogonali alle righe di C .

Dim:

Per la dualità (A, C) è osservabile se e solo se (A^T, C^T) è controllabile. Per il teorema 2.1.3 la coppia (A^T, C^T) è controllabile se e solo se non esistono autovettori sinistri di A^T ortogonali alle colonne di C^T , quindi equivalentemente non esistono autovettori destri di A ortogonali alle righe di C .

Teorema 2.2.3 (Test osservabilità sul rango di Popov-Belevitch-Houtus):

L'equazione di stato data dalla coppia di matrici (A, C) è osservabile se e solo

$$\text{se } \text{rg} \begin{bmatrix} C \\ \lambda I - A \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dim:

Per dualità (A, C) è osservabile se e solo se (A^T, C^T) è controllabile. Per il teorema 2.1.4 si ha che (A^T, C^T) è controllabile se e solo se $\text{rg} \begin{bmatrix} \lambda I - A^T & C^T \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Poichè $\text{rg} \begin{bmatrix} C \\ \lambda I - A \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} C \\ \lambda I - A \end{bmatrix}^T = \text{rg} \begin{bmatrix} C^T & \lambda I - A^T \end{bmatrix} = \text{rg} \begin{bmatrix} \lambda I - A^T & C^T \end{bmatrix}$, allora vale la tesi.

2.3 Stabilità

Per il sistema di equazioni di stato lineare e invariante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

consideriamo due tipi di stabilità.

La prima è una stabilità interna e coinvolge il comportamento qualitativo della risposta dello stato a input zero. La seconda, invece, punta l'attenzione sul comportamento degli input e degli output ed è per questo denominata stabilità esterna.

2.3.1 Stabilità interna

Punteremo ora l'attenzione sulla stabilità degli stati di equilibrio per un'equazione di stato omogenea. Iniziamo considerando un sistema di stato non lineare:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f[x(t)] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

per il quale gli stati di equilibrio sono dati dai vettori costanti \tilde{x} tali che $f(\tilde{x}) = 0$. La stabilità di uno stato di equilibrio si riferisce al comportamento qualitativo di una traiettoria che ha inizio in un intorno dello stato di equilibrio.

Un'equazione di stato non lineare può avere più stati di equilibrio isolati ognuno con diverse proprietà di stabilità è dunque per questo motivo che si parla di stabilità di un determinato stato di equilibrio e non di tutta l'equazione.

Intuitivamente, come si può vedere dalla figura 2.1 si dice che il punto a) rappresenta un equilibrio instabile, b) un equilibrio stabile e c) equilibrio asintoticamente stabile.

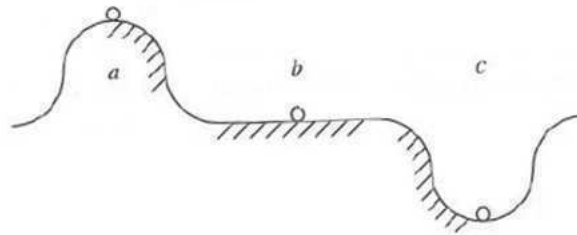


Figura 2.1: Punti di equilibrio

Diamo ora una definizione più formale. Poichè uno stato di equilibrio non nullo può essere traslato nell'origine con un opportuno cambio di coordinate, senza perdita di generalità assumiamo $\tilde{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$ stato di equilibrio.

Def 2.3.1.1: Lo stato di equilibrio $\tilde{x} = 0$ dell'equazione 2.5 è:

- *Stabile:* se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon \forall t \geq 0$
- *Instabile:* se non è stabile

- *Asintoticamente stabile*: se è stabile e se $\exists \delta > 0$ tale che $\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$, cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists T > 0$ tale che la traiettoria corrispondente verifica $\|x(t)\| \leq \varepsilon \forall t \geq T$
- *(Globalmente) asintoticamente stabile*: se è stabile e $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$

Consideriamo ora l'equazione omogenea lineare invariante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

per cui $\tilde{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$ è uno stato di equilibrio, possiamo riformulare la definizione precedente nel seguente modo:

Def 2.3.1.2: Lo stato di equilibrio $\tilde{x} = 0$ dell'equazione 2.6 è:

- *Stabile*: se $\exists \gamma > 0$ tale che $\forall x_0$ stato iniziale la traiettoria corrispondente soddisfa $\|x(t)\| \leq \gamma \|x_0\| \forall t \geq 0$
- *Instabile*: se non è stabile
- *(Globalmente) asintoticamente stabile*: se $\forall \mu > 0 \exists T > 0$ tali che $\forall x_0$ stato iniziale la corrispondente traiettoria soddisfa $\|x(t)\| \leq \mu \|x_0\| \forall t \geq T$.

La traiettoria dell'equazione 2.6 è data da $x(t) = e^{At}x_0$ e, scegliendo $x_0 = e_i$ i-esimo vettore della base standard, considerando la definizione precedente, vediamo che uno stato di equilibrio stabile implica che l'i-esima colonna della matrice esponenziale e^{At} è limitata $\forall t \geq 0$, mentre uno stato di equilibrio asintoticamente stabile implica che l'i-esima colonna della matrice esponenziale tende al vettore nullo per $t \rightarrow \infty$. Quindi ognuno degli elementi dell'i-esima colonna di questa matrice deve essere limitato $\forall t \geq 0$ in caso di stato di equilibrio stabile o deve tendere a zero per $t \rightarrow \infty$ in caso di stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Viceversa se ogni elemento della matrice esponenziale è limitato $\forall t \geq 0$ allora è possibile ottenere la limitazione seguente $\|x(t)\| \leq \mu \|x_0\| \forall t \geq 0$, da cui si conclude che $\tilde{x} = 0$ è uno stato di equilibrio asintoticamente stabile.

Si può analizzare meglio il comportamento della traiettoria e quindi degli elementi della matrice esponenziale usando la forma canonica di Jordan.

Ricordiamo che per ogni matrice quadrata A esiste una matrice T non singolare tale che $J = T^{-1}AT$ per cui J è diagonale a blocchi con ogni blocco del tipo

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Poichè possiamo scrivere $A = TJT^{-1}$ si ha: $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$, quindi le limitazioni o le proprietà asintotiche su elementi di e^{At} possono essere dedotte analizzando le proprietà corrispondenti degli elementi di e^{Jt} . In particolare per ogni sottomatrice del blocco diagonale di J della forma $J_k(\lambda)$ si ha che e^{Jt} contiene il blocco

$$\text{diagonale } e^{J_k(\lambda)t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \dots & \frac{1}{(k-1)!}t^{k-1} \\ 0 & \dots & t & \dots & \dots & \frac{1}{(k-2)!}t^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & t \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si nota inoltre che tutti i blocchi di Jordan associati a un particolare autovalore sono scalari se e solo se le associate molteplicità geometriche e algebriche dell'autovalore sono uguali. Quindi quando $J_1(\lambda) = \lambda$ si ha $e^{J_1(\lambda)t} = e^{\lambda t}$.

Con questi richiami preliminari ora possiamo enunciare il seguente:

Teorema 2.3.1: *Lo stato di equilibrio $\tilde{x} = 0$ dell'equazione 2.6 è:*

- *Stabile: se e solo se ogni autovalore di A ha parte reale non positiva e la molteplicità algebrica di ogni autovalore con parte reale nulla è uguale all'associata molteplicità geometrica.*
- *(Globalmente) Asintoticamente Stabile: se e solo se ogni autovalore di A ha parte reale strettamente negativa.*

Dim:

(Stabilità) Abbiamo visto che ogni blocco di Jordan ha una matrice esponenziale contenente termini limitati a condizione che $Re(\lambda) < 0$, in questo caso i termini della forma $t^j e^{\lambda t}$ sono limitati $\forall t \geq 0$, altrimenti se $Re(\lambda) = 0$ la dimensione di ogni blocco di Jordan corrispondente è 1×1 , quindi $|e^{J_1(\lambda)t}| = |e^{\lambda t}| = e^{Re(\lambda)t} = 1$. Come detto in precedenza ogni blocco di Jordan associato ad un autovalore λ ha dimensione 1 se e solo se la molteplicità geometrica e algebrica di questo autovalore coincidono. Al contrario se esiste autovalore con $Re(\lambda) > 0$ la matrice esponenziale di ogni blocco di Jordan associato termini non limitati, oppure, se $\exists \lambda : Re(\lambda) = 0$ e un blocco di Jordan di dimensione 2 o più, la matrice esponenziale associata contiene termini della forma $t^j e^{\lambda t}$ con $j \geq 1$ tali che $|t^j e^{\lambda t}| = t^j e^{Re(\lambda)t} = t^j$ che aumenta senza limitazioni nonostante $|e^{\lambda t}| = e^{Re(\lambda)t} = 1$.

(Stabilità Asintotica) Ogni blocco di Jordan ha matrice esponenziale con elementi che sono nulli o tendono a zero asintoticamente per $t \rightarrow \infty$ a condizione che $Re(\lambda) < 0$.

Viceversa, anche se esiste un autovalore con $Re(\lambda) = 0$ si hanno blocchi di Jordan scalari ($|e^{J_1(\lambda)t}| = |e^{\lambda t}| = e^{Re(\lambda)t} = 1$) che non tendono asintoticamente a zero per $t \rightarrow \infty$.

2.3.2 Stabilità esterna: stabilità input e output limitati.

Vediamo ora un tipo di stabilità esterna chiamata stabilità input e output limitati. Come detto all'inizio, questo tipo di stabilità si riferisce alla risposta di output a stato nullo.

Def 2.3.2.1: Un segnale $u(t)$ è *limitato* se $\exists \nu$ costante finita positiva tale che $\|u(t)\| \leq \nu \forall t \geq 0$.

Se esiste anche un limite superiore lo denotiamo con $Sup_{t \geq 0} \|u(t)\|$, se invece non può essere limitato in questo modo avremo $Sup_{t \geq 0} \|u(t)\| = \infty$.

Def 2.3.2.2: Il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

si dice *stabile per input e output limitati* se $\exists \eta$ costante finita tale che per ogni input $u(t)$ la risposta dell'output a stato nullo soddisfa $\text{Sup}_{t \geq 0} \|y(t)\| \leq \eta \text{Sup}_{t \geq 0} \|u(t)\|$.

Questa definizione non è molto utile per la determinazione della stabilità in questione poichè richiede una ricerca esaustiva su tutti i segnali di input limitati che è ovviamente impossibile. Vediamo ora un teorema che ci fornisce un criterio più facilmente idagabile.

Teorema 2.3.2.1: *Il sistema 2.7 è stabile per input e output limitati se e solo se la matrice di risposta all'impulso δ , cioè $H(t) = Ce^{At}B + D\delta(t)$, soddisfa $\int_0^\infty \|H(\tau)\| d\tau < \infty$.*

Dim:

[\Leftarrow] Poniamo $\eta = \int_0^\infty \|H(\tau)\| d\tau < \infty$, allora $\forall t \geq 0$ la risposta in output con stato nullo soddisfa: $\|y(t)\| \leq \left\| \int_0^t H(\tau)u(t-\tau)d\tau \right\| \leq \int_0^t \|H(\tau)\| \|u(t-\tau)\| d\tau \leq \int_0^t \|H(\tau)\| d\tau \text{Sup}_{0 \leq \sigma \leq t} \|u(\sigma)\| \leq \int_0^t \|H(\tau)\| d\tau \text{Sup}_{t \geq 0} \|u(t)\| = \eta \text{Sup}_{t \geq 0} \|u(t)\|$ quindi l'equazione 2.7 è stabile per input e output limitati poichè si è dimostrato per un input arbitrario.

[\Rightarrow] Dimostriamo per contrapposizione. Assumiamo che $\forall \eta > 0$ costante finita $\exists T > 0$ tale che $\int_0^T \|H(\tau)\| d\tau > \eta$, quindi $\exists H_{ij}(\tau)$ elemento di $H(\tau)$ e $\exists T_{ij} > 0$ tale che $\int_0^{T_{ij}} |H_{ij}(\tau)| d\tau > \eta$.

Consideriamo l'input limitato dato da $u(t) = 0 \forall t > T_{ij}$ e tale che nell'intervallo $[0, T_{ij}]$ ogni componente di $u(t)$ è zero ad eccezione $u_j(t)$ che è così definito:

$$u_j(t) = \begin{cases} -1 & H_{ij}(T_{ij} - t) > 0 \\ 0 & H_{ij}(T_{ij} - t) = 0 \\ 1 & H_{ij}(T_{ij} - t) < 0 \end{cases}$$

Allora $\|u(t)\| \leq 1 \forall t \geq 0$, ma l'i-esima componente della risposta di output allo stato nullo soddisfa:

$$\begin{aligned} y_i(T_{ij}) &= \int_0^{T_{ij}} H_{ij}(T_{ij} - \sigma) u_j(\sigma) d\sigma = \int_0^{T_{ij}} |H_{ij}(T_{ij} - \sigma)| d\sigma = \\ &= \int_0^{T_{ij}} |H_{ij}(\tau)| d\tau > \eta \geq \eta \sup_{t \geq 0} \|u(t)\|. \end{aligned}$$

Poichè $\|y(T_{ij})\| \geq |y_i(T_{ij})|$ e η è stato scelto arbitrariamente si conclude che l'equazione 2.7 non è stabile per input e output limitati.

Relazione tra stabilità asintotica e stabilità per input e output limitati.

Osserviamo che gli elementi della matrice di risposta all'impulso non sono altro che una combinazione lineare degli elementi della matrice esponenziale premoltiplicata per C e post moltiplicata per B . Per questo motivo è ragionevole aspettarsi che la stabilità asintotica implica la stabilità per input e output limitati. Il viceversa non sempre è vero, infatti:

Controesempio:

Consideriamo il sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio caratteristico è dato da : $|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 - 1 = (s + 1)(s - 1)$, ottemiamo quindi $\lambda_{1,2} = -1, +1$ come autovalori di A e per il teorema 2.3.1 non è asintoticamente stabile. Vediamo ora che invece è stabile per input e output limitati. Osserviamo la matrice esponenziale

$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$. La crescita del termine esponenziale e^t associato all'autovalore positivo di A provoca che ogni elemento di e^{At} diverge al crescere di t .

La funzione di trasferimento è:

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ -1 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s & 1 \\ 1 & s \end{bmatrix}}{s^2 - 1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 1)} = \frac{1}{s + 1} \end{aligned}$$

per cui la risposta all'impulso $h(t) = e^{-t}$, $t \geq 0$ soddisfa $\int_0^\infty |h(\tau)| d\tau = 1$, quindi per il teorema 2.3.2 è stabile per input e output limitati.

Capitolo 3

LA TEORIA DEL CONTROLLO OTTIMO

La teoria dei controlli è una branca della scienza ed ingegneria che studia il comportamento di un sistema di equazioni differenziali come quelli trattati nel capitolo 1 e cerca di controllarlo.

Controllare un dato sistema significa modificarne il comportamento (ovvero le uscite) attraverso la manipolazione delle grandezze d'ingresso.

Considerando il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$, la manipolazione consiste nella costruzione di un così detto controllore che fornisce una legge di controllo in feedback del tipo $u(t) = -Kx(t)$ o $u(t) = -Ky(t)$. Viene chiamata legge di controllo in feedback poichè, una volta calcolata la matrice K , gli stati o gli output del sistema vengono moltiplicati per K e rinviiati indietro come input di controllo al sistema creando il così detto ciclo chiuso.

Graficamente abbiamo una configurazione del tipo riportato in figura 3.1 in cui $u(t)$ è l'input determinato dal controllore

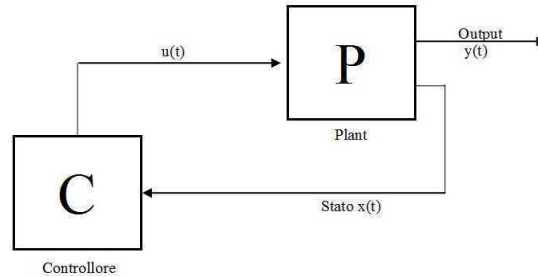


Figura 3.1: Schema controllo

3.1 Il controllo ottimo moderno

Due concetti sono centrali nella progettazione dei controlli moderni. Il primo riguarda la rappresentazione del sistema da controllare, infatti, grazie agli sviluppi teorici da parte del matematico e ingegnere statunitense R. Kalman, attualmente la progettazione è direttamente basata su modelli in forma di stato che contengono tutte le informazioni sul sistema. Il secondo concetto fondamentale consiste nel poter richiedere determinate prestazioni in termini di un preciso criterio matematico di valutazione che porta alla scelta di opportune matrici di guadagno con cui formulare la legge di controllo.

L'obiettivo principale del controllo ottimo è quello di determinare un segnale di controllo tale che il processo dato dal plant soddisfi alcuni vincoli fisici e allo stesso tempo minimizzi (o massimizzi) un indice di performance opportunamente scelto.

Ricapitolando, dunque, la formulazione di un controllore ottimo richiede :

1. **descrizione matematica del processo (modello o plant):** cioè, secondo il problema reale che si deve controllare, si crea un sistema di equazioni differenziali che lo rappresenti in maniera opportuna
2. **scelta dell'indice di performance :** si hanno indici diversi secondo l'obiettivo che si vuole raggiungere e secondo le caratteristiche che si vogliono

ottenere nel ciclo chiuso, nei casi generali si usa una formulazione integrale, lineare, quadratica per l'indice, cioè $J = \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$

3. **scelta della legge di controllo** : le possibilità per una legge di controllo sono due: output feedback ($u(t) = -Ky(t)$) o state feedback ($u(t) = -Kx(t)$). Si sceglie in base al problema che si ha da risolvere, ad esempio nei sistemi reali non sempre si è a conoscenza dei valori che assume lo stato del sistema al variare del tempo, quindi si predilige una legge di output feedback poiché invece gli output sono selezionati in modo da essere noti o misurabili.
4. **risoluzione del problema di minimo** : si deve trovare la matrice di guadagno K ottimale, cioè tale che sia minimo l'indice di performance.

Nel controllo moderno i problemi fondamentali di cui vedremo la progettazione e la risoluzione sono i problemi di regolazione e i problemi di inseguimento di modello.

Il problema di regolazione consiste nel cercare di regolare a zero gli output o gli stati del sistema garantendo anche determinate caratteristiche per il ciclo chiuso, avendo scelto un indice di performance integrale, lineare, quadratico. Mentre il problema di inseguimento di modello consiste nel far sì che gli output o gli stati del modello plant seguano gli output di un determinato modello di riferimento che ha le caratteristiche desiderate utilizzando sempre un indice di performance integrale, lineare quadratico.

3.2 Problemi di regolazione

Vediamo nel dettaglio la formulazione e la risoluzione di problemi di regolazione sia con legge di controllo di tipo output feedback che state feedback. Consideriamo il plant da controllare modellato dal sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ e $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Come già detto i problemi di regolazione consistono nel regolare a zero gli output o gli stati del sistema, ma siamo anche interessati ad avere buone risposte in tempi finiti garantendo alcune caratteristiche, come la stabilità, per il ciclo chiuso. Scegliamo quindi il seguente indice di performance nel dominio temporale:

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (3.2)$$

dove Q e R sono matrici di peso simmetriche e semi-definite positive, tali assunzioni sulle matrici garantiscono che J sia non negativo.

Considerando che per una qualsiasi matrice M simmetrica e semi definita positiva possiamo scrivere $M = \sqrt{M}^T \sqrt{M}$, il nostro indice di performance diventa $J = \int_{t_0}^{t_f} [\|\sqrt{Q}x\|^2 + \|\sqrt{R}u\|^2] dt$ con $\|\cdot\|$ norma euclidea. Se riusciamo a trovare un input di controllo $u(t)$ tale che il minimo di J sia finito, sicuramente la funzione integranda sarà nulla per un grande intervallo di tempo, quindi entrambe le combinazioni lineari dello stato e del controllo, cioè $\sqrt{Q}x(t)$ e $\sqrt{R}u(t)$, saranno nulle. Dunque questa formulazione per l'indice di performance risulta essere appropriata per i problemi di regolazione.

Infine osserviamo che i coefficienti delle matrici Q e R possono essere scelti in modo da ottenere i requisiti richiesti, ad esempio se selezioniamo valori grandi per i coefficienti di R si penalizza il controllo, mentre se vogliamo fare in modo che gli stati convergano a zero velocemente si scelgono grandi valori per i coefficienti di Q . Tale problema di regolazione con indice di performance lineare quadratico è noto in letteratura come problema LQR (Linear Quadratic Regulator problem). Vediamo ora come trovare la matrice K che ci permette di formulare la legge di controllo sia nel caso di output feedback che state feedback.

3.2.1 Risoluzione problema LQR con output feedback

Nel caso di output feedback si sceglie una legge di controllo del tipo $u(t) = -Ky(t)$, quindi si deve cercare l'opportuna matrice K che minimizza

l'indice 3.2. Consideriamo il ciclo chiuso

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) + B(-Ky(t)) = (A - BKC)x(t) = A_C x(t) \quad (3.3)$$

ed esprimiamo 3.2 in termini di K , cioè

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) (Q + C^T K^T R K C) x(t)] dt. \quad (3.4)$$

L'ottimizzazione dinamica che consiste nel minimizzare J soggetto ai vincoli dinamici 3.3 può essere convertita in ottimizzazione statica più semplice da risolvere nel modo seguente.

Supponiamo che esista una matrice P costante, simmetrica, semi-definita positiva tale che $\frac{d}{dt}(x^T P x) = -x^T (Q + C^T K^T R K C) x$, quindi 3.2 diventa $J = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0) - \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} x^T(t) P x(t)$.

Assumiamo che il sistema in ciclo chiuso 3.3 sia asintoticamente stabile quindi all'aumentare del tempo $x(t)$ si annulla, dunque

$$J = \frac{1}{2} x^T(0) P x(0). \quad (3.5)$$

Osserviamo che dalle assunzioni fatte su P e da 3.3 si ha

$$-x^T (Q + C^T K^T R K C) x = \frac{d}{dt}(x^T P x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A_C^T P + P A_C) x$$

ciò deve valere per ogni condizione iniziale e per ogni traiettoria $x(t)$ quindi possiamo scrivere

$$g \equiv A_C^T P + P A_C + Q + C^T K^T R K C = 0. \quad (3.6)$$

Note Q e K questa equazione da risolvere in P è nota come equazione di Lyapunov.

Riassumendo: per ogni matrice di guadagno K fissata, se esiste una matrice P costante, simmetrica e semi-definita positiva che soddisfa 3.6 e se il sistema in ciclo chiuso è stabile, allora il costo J in termini di P è dato da 3.5. L'importanza di

questo risultato sta nel fatto che la matrice P non dipende dallo stato del sistema, quindi data una matrice di guadagno K , la matrice P può essere calcolata con l'equazione 3.6 e sono richieste solo le condizioni iniziali $x(0)$ per calcolare l'indice di performance J sotto l'influenza della legge di controllo $u(t) = -Ky(t)$.

Poniamo $X = x(0)x^T(0)$ e ricordando che $tr(AB) = tr(BA)$ possiamo scrivere 3.5 nel modo seguente

$$J = \frac{1}{2}tr(PX). \quad (3.7)$$

Ora è ovvio che il problema di trovare K tale che minimizzi 3.4 soggetto ai vincoli dinamici 3.3 sugli stati del sistema equivale al problema algebrico di scelta di K tale che minimizzi 3.7 soggetto ai vincoli 3.6 sulla matrice ausiliaria P .

Risolviamo questo problema di minimo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: modifichiamo il problema aggiungendo al costo J il vincolo $g = 0$. Consideriamo, quindi

$$\mathcal{H} = tr(PX) + tr(gS) \quad (3.8)$$

con S matrice simmetrica $n \times n$ dei moltiplicatori di Lagrange, quindi il problema di minimo vincolato che avevamo diventa equivalente a minimizzare 3.8 senza alcun vincolo. Condizione necessaria perchè un punto sia di minimo per \mathcal{H} è che $\nabla \mathcal{H} = 0$, imponiamo dunque che le derivate parziali di \mathcal{H} rispetto alle tre variabili P , K e S si annullino. Ricordando che $\forall A, B, C$ matrici di dimensioni compatibili e $\forall y$ scalare si ha $\frac{\partial}{\partial B}tr(ABC) = A^TC^T$ e $\frac{\partial y}{\partial B^T} = \left[\frac{\partial y}{\partial B} \right]^T$ otteniamo:

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} = g = A_C^T P + P A_C + C^T K^T R K C + Q \quad (3.9)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P} = X + A_C S + S A_C^T \quad (3.10)$$

$$0 = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K} = R K C S C^T - B^T P S C^T \quad (3.11)$$

le prime due equazioni sono dette equazioni di Lyapunov.

Se R è una matrice definita positiva e $C S C^T$ è non singolare, allora possiamo risolvere 3.11 per K ottenendo

$$K = R^{-1}B^T P S C^T (C S C^T)^{-1} \quad (3.12)$$

Per avere che la matrice di guadagno K sia ottima, cioè tale da minimizzare l'indice di performance, si devono risolvere le equazioni 3.9, 3.10 e 3.12. Osserviamo che per il calcolo di K si devono determinare due matrici ausiliarie P e S , tali matrici sono utili nel calcolo del costo ottimo che può essere ottenuto direttamente da P e dal valore dello stato al tempo iniziale sfruttando l'equazione 3.5.

3.2.1.1 Dipendenza dalle condizioni iniziali

La dipendenza del guadagno ottimale dalle condizioni iniziali data da X nell'equazione 3.10 potrebbe essere sconveniente poichè in molte applicazioni non si è a conoscenza dello stato iniziale del sistema. Questo potrebbe creare problemi per il calcolo della matrice K , quindi si elimina la dipendenza dallo stato iniziale minimizzando, invece di J , il suo valore d'aspettazione $E(J)$, così si ha:

$$E(J) = \frac{1}{2} E(x^T(0) P x(0)) = \frac{1}{2} \text{tr}(P \bar{X}) \quad (3.13)$$

con $\bar{X} = E(x(0)x^T(0))$, quindi in questo caso non è necessario conoscere lo stato iniziale, ma basta sapere che è non nullo con una determinata norma Euclidea attesa.

3.2.1.2 Scelta delle matrici Q e R

Una scelta conveniente per le matrici Q e R è suggerita dagli scienziati A. E. Bryson e Y. C. Ho. Supponiamo di avere nel nostro sistema anche degli output di performance $z = Hx$ che devono essere minimi nel ciclo chiuso che si ottiene. Consideriamo l'indice di performance $J = \frac{1}{2} E \int_0^\infty [z \bar{Q} z + u^T R u] dt$ che equivale al classico indice di performance $J = \frac{1}{2} E \int_0^\infty [x Q x + u^T R u] dt$ con $Q = H^T \bar{Q} H$. Per scegliere gli elementi di \bar{Q} e R si considerano le deviazioni massime accettabili per $z(t)$ e $u(t)$, in particolare sia z_{iM} la deviazione massima accettabile della

componente z_i di $z(t)$ e u_{iM} la deviazione massima accettabile della componente u_i di $u(t)$, prendiamo dunque $\bar{Q} = \text{diag}(q_i)$ e $R = \text{diag}(r_i)$ con $q_i = \frac{1}{z_{iM}^2}$ e $r_i = \frac{1}{r_{iM}^2}$.

Ricapitoliamo dunque la procedura risolutiva per questo problema:

- Modello da controllare:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

- Legge di controllo:

$$u = -Ky$$

- Indice di performance:

$$J = \frac{1}{2} E \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \text{ con } Q \geq 0, R > 0$$

- Equazioni per il calcolo di K ottimale:

$$\begin{aligned}A_C^T P + P A_C + C^T K^T R K C + Q &= 0 \\ A_C S + S A_C^T + \bar{X} &= 0 \\ K &= R^{-1} B^T P S C^T (C S C^T)^{-1}\end{aligned}$$

- Costo ottimo:

$$J = \frac{1}{2} \text{tr}(P\bar{X})$$

3.2.2 Risoluzione numerica problema LQR con output feedback

Sono note in letteratura tre tecniche di base per il calcolo della matrice di guadagno K nel caso di output feedback. Il primo algoritmo utilizza l'equazione 3.9 e la formulazione 3.13 per l'indice di performance. In particolare, per una dato valore di K viene risolta l'equazione di Lyapunov in questione e poi viene usata la matrice P nell'equazione dell'indice. Questa procedura viene ripetuta variando i valori di K per minimizzare $E(J)$.

Un secondo approccio per il calcolo di K consiste nell'utilizzare un algoritmo basato sul gradiente, cioè per una dato valore di K si risolvono tutte e due le

equazioni di Lyapunov (3.9 e 3.10) per trovare i valori delle due matrici ausiliarie P e S e infine si usa l'equazione 3.11, che non è nient'altro che il gradiente di $E(J)$ rispetto a K , per aggiornare il valore di K .

Infine vediamo l'ultimo dei tre algoritmi iterativi:

1. Inizializzazione:

Si pone $k = 0$

Si determina un guadagno K_0 tale che $A - BK_0C$ sia stabile

2. k -esima iterazione:

$$A_k = A - BK_kC$$

Si risolve per P_k e S_k

$$A_k^T P_k + P_k A_k + C^T K_k^T R K_k C + Q = 0$$

$$A_k S_k + S_k A_k^T + \bar{X} = 0$$

$$J_k = \frac{1}{2} \text{tr}(P_k \bar{X})$$

Si calcola la direzione di aumento del guadagno

$$\Delta K = R^{-1} B^T P S C^T (C S C^T)^{-1} - K_k$$

Si aggiorna il guadagno

$$K_{k+1} = K_k + \alpha \Delta K$$

dove α è scelto in modo che

$$A - BK_{k+1}C \text{ è asintoticamente stabile}$$

$$J_{k+1} = \frac{1}{2} \text{tr}(P_{k+1} \bar{X}) \leq J_k$$

Se J_{k+1} e J_k distano meno di una tolleranza prestabilita, allora go to 3.

altrimenti $k = k + 1$ e go to 2.

3. Fine:

Si pone $K = K_{k+1}$ e $J = J_{k+1}$

Stop.

3.2.2.1 Convergenza dell'algoritmo

Se una delle seguenti condizioni è verificata si ha la convergenza al minimo locale di J dell'algoritmo precedente:

- Esiste una matrice K tale che A_c è stabile

- La matrice degli output ha tutte le righe linearmente indipendenti, cioè ha rango pari al numero di righe
- La matrice dei pesi del controllo R è definita positiva

Quindi, nel caso vale una delle condizioni, l'algoritmo trova una matrice di guadagno K che stabilizza il plant e minimizza l'indice di performance.

3.2.2.2 Scelta guadagno iniziale

Una questione fondamentale in questi algoritmi iterativi riguarda il guadagno iniziale K_0 da cui partire con le iterazioni, infatti deve essere scelto in modo che $(A - BK_0C)$ sia stabile. Una tecnica abbastanza conveniente per questa scelta consiste nel trovare la matrice di guadagno K per una legge di state feedback, invece che output feedback come in questo caso, e poi sostituire degli zeri nelle componenti che non riguardano gli output misurati nel problema attuale.

3.2.3 Risoluzione problema LQR con state feedback

Fin'ora abbiamo visto come calcolare la matrice di guadagno K per una legge di controllo del tipo $u = -Ky$ ora invece analizziamo il caso in cui $u = -Kx$.

Consideriamo il sistema $\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$, volendo una legge di tipo state feedback, ora si ha il ciclo chiuso dato da

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x \equiv A_C x \quad (3.14)$$

e inoltre osserviamo che questo è solo un caso particolare della risoluzione precedente, infatti basta porre $u = -Ky = -KCx$ ed esaminare il caso in cui

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Anche se in generale gli stati di un sistema reale sono raramente tutti misurabili e utilizzabili per la legge di controllo si hanno dei buoni motivi per l'utilizzo

di questa tecnica. In primo luogo, essendo solo un caso particolare della legge di output feedback e supponendo che tutti gli stati siano misurabili, si può comunque ottenere la migliore performance richiesta. Inoltre le equazioni con cui abbiamo calcolato K nel caso precedente non sono le equazioni di un problema LQR standard, ma vedremo i legami con la formulazione più tradizionale che coinvolge l'equazione di Riccati. Infine anche se non si è a conoscenza di tutto lo stato esistono delle tecniche per stimare quest'ultimo tramite un osservatore dinamico che fornisce uno stato approssimato \hat{x} da utilizzare per la legge di controllo.

Supponiamo di avere degli output di performance $z = Hx$, scegliamo dunque

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt$$

con $Q = H^T H \geq 0$ e $R > 0$.

Ripercorrendo tutta la teoria precedente fatta nel caso di output feedback con $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}$, in particolare sostituendo C in 3.9, 3.10 e 3.12, si ottengono le corrispondenti equazioni per il calcolo di K :

$$0 = A_C^T P + P A_C + Q + K^T R K \quad (3.15)$$

$$0 = \bar{X} + A_C S + S A_C^T \quad (3.16)$$

$$K = R^{-1} B^T P S S^{-1} = R^{-1} B^T P \quad (3.17)$$

con $\bar{X} = E(x(0)x^T(0))$.

I problemi nel caso di output feedback erano legati alla necessità di conoscere \bar{X} e K_0 : correlazione dello stato iniziale e guadagno iniziale per l'algoritmo, invece, nel caso di state feedback, non abbiamo queste difficoltà. Osserviamo innanzi tutto che la matrice K , chiamata in questo caso di state feedback guadagno di Kalman, può essere determinata con l'equazione 3.17 senza la necessità di calcolare la matrice ausiliaria S dato che si semplifica e poi non compare nell'equazione. Quindi, poichè la dipendenza di K dallo stato iniziale era dovuta all'equazione

3.16, non avendo bisogno di S si perde, in questo caso, anche la necessità di conoscere \bar{X} , cosa che, invece, era necessaria per output feedback. Ora sostituendo 3.17 in 3.15 si ha $0 = A_C^T P + P A_C + Q + P B R^{-1} B^T P$, sostituendo ancora 3.14 si ottiene $0 = (A - B R^{-1} B^T P)^T P + P (A - B R^{-1} B^T P) + Q + P B R^{-1} B^T P$, quindi

$$0 = A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P \quad (3.18)$$

Quest'ultima equazione matriciale è nota come l'equazione algebrica di Riccati poichè è legata al matematico che la utilizzo negli studi di flussi di calore. Si può dimostrare che quest'equazione è uguale alla sua trasposta e la soluzione è simmetrica, cioè $P = P^T$.

Concludendo, a differenza di leggi di controllo di tipo output feedback, nel caso di state feedback si deve risolvere una sola equazione algebrica, cioè l'equazione di Riccati, per calcolare il guadagno ottimo di Kalman.

Ricapitoliamo dunque la procedura risolutiva per questo problema:

- Modello da controllare:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

- Legge di controllo:

$$u = -Kx$$

- Indice di performance:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \text{ con } Q \geq 0, R > 0$$

- Equazioni per il calcolo di K ottimale:

$$0 = A^T P + P A + Q - P B R^{-1} B^T P$$

$$K = R^{-1} B^T P$$

- Costo ottimo:

$$J = \frac{1}{2} x^T(0) x(0)$$

3.2.3.1 Stabilità ciclo chiuso

Def 3.2.3.1.1: Una coppia di matrici (A, B) si dice *detectabile* se esiste una matrice L tale che $A - LH$ è stabile, cioè equivale all'osservabilità delle instabilità di A .

Def 3.2.3.1.2: Una coppia di matrici (A, B) si dice *stabilizzabile* se esiste una matrice di guadagno K tale che $A_C = A - BK$ è stabile, cioè equivale alla controllabilità delle instabilità di A .

Teorema 3.2.3.1.1: Sia H una matrice tale che $Q = H^T H$. Supponiamo che (H, A) sia *detectable*, allora (A, B) è *stabilizzabile* se e solo se valgono:

- *Esiste un'unica matrice semidefinita positiva P soluzione dell'equazione di Riccati*
- *Il ciclo chiuso 3.14 è asintoticamente stabile se e solo se il guadagno di Kalman K è calcolato con 3.17 in termini della soluzione P semi definita positiva.*

Questo teorema è il cuore del controllo moderno, infatti ci permette di ottenere anche particolari caratteristiche nel ciclo chiuso con opportuna scelta del guadagno K .

3.3 Inseguitore di modello

Nei problemi di inseguitore di modelli si ha l'obiettivo di trovare una legge di controllo, che può essere sia di output feedback che state feedback, tale che il modello rappresentativo della realtà si comporti come un modello di riferimento.

Esistono due diverse formulazioni per questi problemi: una esplicita e una implicita.

3.3.1 Inseguitore di modello esplicito

Nel caso esplicito abbiamo due problemi fondamentali che analizzeremo: il problema di regolazione e il problema di inseguimento di un comando specifico (tracker), nel dettaglio si ha che il modello di riferimento nel primo caso non ha input, mentre nel secondo caso si.

3.3.1.1 Problema di Regolazione

Consideriamo il seguente sistema come rappresentazione del modello reale da controllare

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \\ z = Hx \end{cases} \quad (3.19)$$

con $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e input di controllo $u(t) \in \mathbb{R}^m$, mentre il modello di riferimento è dato da

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} \\ \underline{y} = \underline{C}\underline{x} \\ \underline{z} = \underline{H}\underline{x} \end{cases}$$

Osserviamo che, come detto, il modello di riferimento non ha input.

L'obiettivo è quello di trovare una legge di controllo $u(t)$ tale che gli output di performance $z(t)$ del modello reale siano il più possibile uguali agli output di performance $\underline{z}(t)$ del modello di riferimento, quindi si vuole minimizzare l'errore

$$e = \underline{z} - z = \underline{H}\underline{x} - Hx.$$

Per ottenere ciò scegliamo come indice di performance

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^T Q e + u^T R u) dt \text{ con } Q > 0 \text{ e } R > 0.$$

Possiamo ricondurre questo problema a un problema di regolazione già visto nella sezione 3.2, definendo, a partire dai due sistemi, un unico sistema di dimensioni maggiori. Poniamo quindi $x' = \begin{bmatrix} x^T \\ \underline{x}^T \end{bmatrix}$ $y' = \begin{bmatrix} y \\ \underline{y} \end{bmatrix}$ e definiamo il sistema

aumentato

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \underline{A} \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u \equiv A' x' + B' u \\ y' &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \underline{C} \end{bmatrix} x' \equiv C' x'\end{aligned}$$

riscriviamo anche l'errore e l'indice di performance in termini del nuovo stato aumentato:

$$e = [-H \quad \underline{H}] x' \equiv H' x'$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left((x')^T Q' x' + u^T R u \right) dt. \quad (3.20)$$

A questo punto è ovvio che ci siamo ricondotti a un problema di regolazione già visto quindi, scelta la legge di controllo di tipo output feedback, troveremo una matrice K' che ci fornisce il controllo $u = -K' y' = -K_m y - K_r \underline{y}$, dove K_m sono i termini della matrice K' relativi al modello reale, mentre K_r quelli relativi al riferimento. Concludendo osserviamo che il modello di riferimento agisce come un compensatore che porta gli stati a zero in modo tale che l'output $z(t)$ segua l'output di riferimento $\underline{z}(t)$.

3.3.1.2 Inseguimento di un comando specifico: Tracker

Nel caso di inseguimento di modello con un comando specifico possiamo sempre considerare 3.19 come sistema rappresentativo della realtà, mentre il modello di riferimento ora è dato da

$$\begin{cases} \dot{x} = \underline{A}x + \underline{B}r \\ y = \underline{C}x \\ z = \underline{H}x \end{cases}$$

quindi è soggetto a un segnale di input esterno $r(t)$. L'obiettivo è sempre quello di minimizzare la differenza tra i due output di performance: $e = \underline{z} - z = \underline{H}x - Hx$. Possiamo ripercorrere l'approccio appena visto nel caso di problemi di regolazione creando un sistema aumentato, poniamo $x' = \begin{bmatrix} x^T \\ \underline{x}^T \end{bmatrix}$ e si ha

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \underline{A} \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{B} \end{bmatrix} r \equiv A'x' + B'u + G'r \quad (3.21)$$

con $e = [-H \ \underline{H}]x' \equiv H'x'$, in questo caso l'analogo dell'indice di performance 3.20 avrà anche un termine legato a r .

Come si può notare, rispetto a prima, anche il sistema ha in più il termine che dipende da r quindi non siamo ancora in grado di risolvere il problema di controllo ottimale utilizzando la strategia vista in precedenza.

Una tecnica conveniente e molto utilizzata, chiamata inseguimento di un comando generato (CGT : command generator tracker), consiste nel convertire questo problema in un problema di regolazione supponendo che, per alcune condizioni iniziali, il comando di riferimento $r(t)$ soddisfi un'equazione differenziale del tipo

$$r^{(d)} + a_1 r^{(d-1)} + \dots + a_d r = 0 \quad (3.22)$$

per un certo grado d e un insieme di coefficienti a_i non tutti nulli.

Definiamo il polinomio caratteristico del comando generato come

$$\Delta(s) = s^d + a_1 s^{d-1} + \dots + a_d,$$

quindi, indicando $D = \frac{d}{dt}$, per la supposizione fatta su r si ha $\Delta(D)r = 0$. Questa assunzione fatta e la definizione del polinomio caratteristico verranno utilizzate per eliminare dal sistema aumentato il comando r in modo da ricondurci a un sistema del tipo 3.1 di cui sappiamo calcolare la legge di controllo sia nel caso di output feedback che state feedback.

Definiamo il nuovo stato ξ e il nuovo controllo μ facendo prima la derivata temporale e poi il polinomio caratteristico dello stato x e del controllo u :

$$\xi := \Delta(D)x' = (x')^{(d)} + a_1 (x')^{(d-1)} + \dots + a_d x'$$

$$\mu := \Delta(D)u = u^{(d)} + a_1 u^{(d-1)} + \dots + a_d u$$

trasformiamo così il sistema 3.21 in

$$\dot{\xi} = A' \xi + B' \mu \quad (3.23)$$

dove non compare il termine dovuto all'input di comando $r(t)$.

Anche per quel che riguarda l'errore facendo le stesse trasformazioni si ha:

$$\Delta(D)e = [-H \quad H] \xi = H' \xi = e^{(d)} + a_1 e^{(d-1)} + \dots + a_d e.$$

Poniamo ora $\epsilon(t) = [e \dot{e} \dots e^{(d-1)}]^T$ il vettore con l'errore e le sue prime $d-1$ derivate, possiamo dunque scrivere

$$\dot{\epsilon} = F \epsilon + \begin{bmatrix} 0 \\ H' \end{bmatrix} \xi, \quad (3.24)$$

dove F è così creata $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ -a_d & \cdot & \cdot & \cdot & -a_1 \end{bmatrix}$.

Unendo le due dinamiche date da 3.23 e 3.24 si ha

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \quad A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B' \end{bmatrix} \mu,$$

cioè, ponendo $\varphi = \begin{bmatrix} \epsilon \\ \xi \end{bmatrix}$ si ha

$$\dot{\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \\ 0 \quad A' \end{bmatrix} \varphi + \begin{bmatrix} 0 \\ B' \end{bmatrix} \mu.$$

Quindi, a questo punto, si ha a disposizione un sistema del tipo richiesto, cioè non guidato dall'input di riferimento $r(t)$ e avremo un indice $J = \int_0^\infty \varphi Q' \varphi + \mu R \mu$. Sofferamoci ora sulla scelta delle matrici di peso in modo che pesando opportunamente lo stato φ si minimizzi l'errore che è la prima componente di φ .

Scegliendo $h = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$, possiamo riscrivere l'errore originario nel seguente modo

$e = h\varphi$, quindi dovremmo scegliere $Q' = h^T Q h$ come peso per lo stato. Ora la procedura per il calcolo della matrici di guadagno K' è del tutto analoga a quella già vista, quindi avremo la legge di controllo $\mu = -K' \varphi$. Scomponendo la matrice K' nelle componenti relative all'errore, allo stato del modello e allo stato del riferimento e integrando indietro d volte si ha la legge di controllo definitiva da applicare al primo sistema preso in esame.

3.3.2 Inseguitore di modello implicito

L'inseguitore di modello implicito, anche chiamato modello nell'indice di performance, ha una formulazione completamente differente dal caso esplicito, infatti il modello di riferimento non compare nella struttura del controllo, ma influisce solo nella scelta delle matrici di peso Q e R all'interno di J .

Consideriamo 3.19 come modello rappresentativo della realtà e richiediamo che l'output $z(t)$ segua il modello di riferimento dato da $\dot{z} = \underline{A}z$. Quando l'obiettivo del controllo è raggiunto l'output z dovrà soddisfare $\dot{z} = \underline{A}z$, quindi possiamo definire l'errore come $e = \dot{z} - \underline{A}z$. Anche in questo caso si minimizza l'indice $J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (e^T Q e + u^T R u) dt$, ma poichè $\dot{z} = H\dot{x} = HAx + HBu$ otteniamo

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [(HAx + HBu - \underline{A}Hx)^T Q (HAx + HBu - \underline{A}Hx) + u^T R' u] dt$$

oppure

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T Q' x + 2x^T W u + u^T R u] dt$$

$$\text{con } Q' = (HA - \underline{A}H)^T Q (HA - \underline{A}H), \quad W = (HA - \underline{A}H)^T Q HB, \\ R' = (B^T H^T Q HB + R).$$

Osserviamo che il problema di regolazione visto nella sezione 3.3 ha indice di performance J del tutto analogo a questo appena visto, ma con $W = 0$, quindi, anche per quel che riguarda le equazioni utilizzate per calcolare K , è sufficiente scrivere le analoghe con $W \neq 0$. Quindi si ha

$$0 = A_C^T P + P A_C + Q + C^T K^T R K C - W K C - C^T K^T W^T$$

$$0 = A_C S + S A_C^T + \bar{X}$$

$$0 = R K C S C^T - (P B + W)^T S C^T$$

e il costo ottimo è dato da $J = \frac{1}{2} \text{tr}(P \bar{X})$. Per trovare la matrice di guadagno K , dunque, è sufficiente risolvere le tre equazioni precedenti usando le matrici di peso Q' , W e R' . Come detto è del tutto analogo ai casi precedenti, possiamo affermare dunque che la tecnica di inseguimento di modello implicita suggerisce una scelta conveniente per le matrici di peso dell'indice di performance.

3.4 Tecnica di controllo ad inseguitore di modello per un sistema di aereodinamica mobile

Dopo aver analizzato le varie tecniche di controllo ho applicato la tecnica di controllo di inseguitore di modello con comando specifico per trovare una legge di controllo che regoli l'apertura e la chiusura di un ala mobile.

Il primo step di lavoro consiste nella scelta del modello che rappresenti una vettura, in seguito si modella il controllo in modo da agire sul sistema di aereodinamica mobile e infine, creando un modello di riferimento opportuno e facendo le dovute supposizioni sul segnale di input, si trova la legge di controllo con la tecnica di inseguitore di modello.

3.4.1 Scelta del modello

La scelta del modello descrittivo della vettura deve essere fatta in modo da avere risultati realistici. Tra i modelli noti in letteratura che descrivono un'automobile ho analizzato il modello a bicicletta e una sua variante che forniscono una buona descrizione della dinamica laterale della vettura, poi tra i due ho scelto quello che meglio approssima i dati sperimentali.

Questi due modelli sono molto interessanti, poichè, nonostante vengano linearizzati a velocità costante e hanno un numero ridotto di gradi di libertà, sono comunque una buona approssimazione della realtà.

3.4.1.1 Il modello a bicicletta

Il modello a bicicletta, è un modello semplificato della vettura reale, in cui la semplificazione maggiore consiste nel rappresentare le due ruote anteriori destra e sinistra come un'unica ruota e analogamente vale per le due ruote posteriori.

Quello che ci interessa è la dinamica laterale dell'auto e il relativo studio della stabilità. Con tale modello è possibile descriverla con soli due gradi di libertà :

1. y : posizione laterale del veicolo
2. ψ : angolo di imbardata.

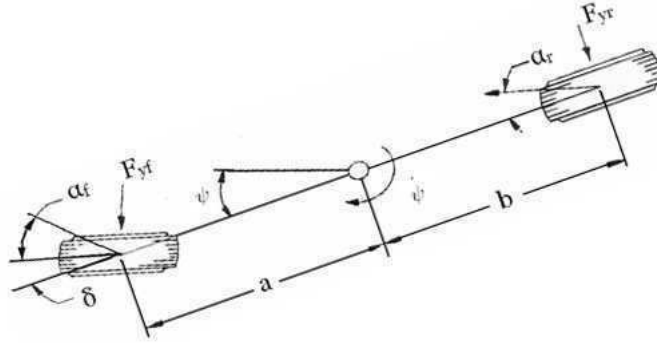


Figura 3.2: Schema modello bicicletta

Indichiamo con V_x la velocità longitudinale del veicolo nel centro di massa. Supponiamo una traiettoria curvilinea e scriviamo le equazioni che descrivono la dinamica laterale. Dalla seconda equazione di Newton si ha: $ma_y = F_{yF} + F_{yR}$, dove a_y è l'accelerazione laterale lungo l'asse y , F_{yF} e F_{yR} sono le forze lungo y della ruota anteriore e posteriore come indicate in figura 3.2. Osserviamo che due termini contribuiscono ad a_y : \ddot{y} dovuto al movimento lungo l'asse y e $V_x \dot{\psi}$ che è l'accelerazione centripeta, quindi

$$m (\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) = F_{yF} + F_{yR} \quad (3.25)$$

Si ha anche un'equazione di bilancio del momento di rotazione lungo l'asse z :

$$I_z \ddot{\psi} = aF_{yF} - bF_{yR} \quad (3.26)$$

Ora il prossimo passo consiste nel modellare le forze laterali. In questo caso si assume, semplificando il modello, che le forze laterali siano proporzionali agli angoli di deriva. In figura 3.3 è riportato l'andamento reale della forza laterale in funzione dell'angolo di deriva dello pneumatico e la sua approssimazione lineare fatta in questo modello.

L'angolo di deriva di un pneumatico è l'angolo compreso tra l'orientazione del pneumatico stesso e il vettore che rappresenta la velocità della ruota. Calcoliamo dunque gli angoli di deriva; in particolare, osservando la figura 3.4 che schematizza la ruota anteriore, possiamo vedere che $\alpha_F = \delta - \theta_{VF}$, dove θ_{VF} è l'angolo che



Figura 3.3: Forza laterale in funzione dell'angolo di deriva

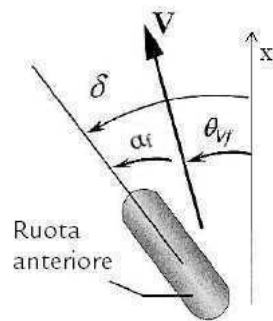


Figura 3.4: Angolo di deriva ruota anteriore

forma la velocità con l'asse longitudinale del veicolo (asse x) quindi $\operatorname{tg}(\theta_{VF}) = \frac{V_y + a\dot{\psi}}{V_x}$. Poichè solo la ruota anteriore risulta sterzata per la ruota posteriore si ha $\alpha_R = -\theta_{VR}$ con $\operatorname{tg}(\theta_{VR}) = \frac{V_y - b\dot{\psi}}{V_x}$. Tali forze dipendono anche dalla rigidezza degli pneumatici, ma approssimando per angoli piccoli, le rigidzze sono costanti, in particolare indichiamo K_F la rigidezza del pneumatico anteriore e K_R quella del pneumatico posteriore, quindi $F_{yF} = 2K_F\alpha_F$ e $F_{yR} = 2K_R\alpha_R$. Si è aggiunto il fattore moltiplicativo 2 poichè, anche se si schematizza con una sola ruota anteriore e una posteriore, il contributo in termini di forze è dato da entrambe con la stessa quantità.

Inoltre, sempre nel caso di angoli di deriva piccoli, si ha $V_y = \dot{y}$ e $\operatorname{tg}(\theta) = \theta$, quindi

$$\alpha_F = \delta - \frac{\dot{y} + a\dot{\psi}}{V_x} \quad (3.27)$$

$$\alpha_R = \frac{b\dot{\psi} - \dot{y}}{V_x} \quad (3.28)$$

Possiamo dunque esprimere le forze laterali su pneumatici con le seguenti relazioni :

$$F_{yF} = 2K_F\alpha_F = 2K_F \left(\delta - \frac{\dot{y} + a\dot{\psi}}{V_x} \right)$$

$$F_{yR} = 2K_R\alpha_R = 2K_F \left(\frac{b\dot{\psi} - \dot{y}}{V_x} \right).$$

Sostituendo le equazioni delle forze in 3.25 e 3.26 si ha:

$$\ddot{y} = -2 \left(\frac{K_F + K_R}{mV_x} \right) \dot{y} + \left[-V_x - 2 \left(\frac{aK_F - bK_R}{mV_x} \right) \right] \dot{\psi} + 2 \frac{K_F}{m} \delta$$

$$\ddot{\psi} = 2 \left(\frac{bK_R - aK_F}{I_z V_x} \right) \dot{y} - 2 \left(\frac{a^2 K_F - b^2 K_R}{I_z V_x} \right) \dot{\psi} + 2 \frac{aK_F}{I_z} \delta$$

e il modello in forma di stato risulterà il seguente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \left(\frac{K_F + K_R}{mV_x} \right) & -V_x - 2 \left(\frac{aK_F - bK_R}{mV_x} \right) \\ 2 \left(\frac{bK_R - aK_F}{I_z V_x} \right) & -2 \left(\frac{a^2 K_F - b^2 K_R}{I_z V_x} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \frac{K_F}{m} \\ 2 \frac{aK_F}{I_z} \end{bmatrix} \delta$$

3.4.1.2 Il modello a bicicletta con lunghezze di rilassamento

Come detto questo modello è una variante del precedente, infatti continuano a valere tutte le assunzioni fatte. La supposizione aggiuntiva che invece li differenzia consiste nel considerare un ritardo tra la variazione nel tempo dell'angolo di deriva dello pneumatico e la corrispondente variazione della forza laterale. Questo comportamento è spesso caratterizzato da una "lunghezza di rilassamento" l che è definita come la distanza che deve compiere una ruota tra l'istante di cambiamento dell'angolo di deriva e l'istante di sviluppo della forza laterale corrispondente. Matematicamente, supponendo un ritardo del primo ordine, possiamo esprimere questa proprietà con la relazione $\frac{\alpha(s)}{\alpha_{SS}} = \frac{1}{1 + l_y s}$, dove α_{SS} è l'angolo nel caso stazionario dato dalle equazioni 3.27 e 3.28, l_y è la lunghezza di rilassamento e s è la variabile di Laplace.

Poichè vale la relazione $\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t))$ dove \mathcal{L} indica la trasformata di Laplace, si ha

$$\alpha(s) + l_y s \alpha(s) = \alpha_{SS} \implies \dot{\alpha}(s) = \frac{\alpha_{SS}}{l_y} - \frac{\alpha(s)}{l_y},$$

sostituendo i valori degli angoli stazionari si ottengono le equazioni che descrivono la dinamica degli angoli di deriva anteriore e posteriore:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_F(t) &= -\frac{1}{l_{yF}} \dot{y} - \frac{a}{l_{yF}} \dot{\psi} - \frac{V_x}{l_{yF}} \alpha_F + \frac{V_x}{l_{yF}} \delta \\ \dot{\alpha}_R(t) &= -\frac{1}{l_{yR}} \dot{y} + \frac{b}{l_{yR}} \dot{\psi} - \frac{V_x}{l_{yR}} \alpha_R \end{aligned}$$

Osservando la figura 3.5 possiamo vedere come in generale viene approssimato l'angolo di deriva del pneumatico al variare del tempo nel caso di modello a bicicletta con lunghezze di rilassamento.

Aggiungendo queste ultime due equazioni e lasciando indicati gli angoli nelle espressioni delle forze laterali delle equazioni 3.25 e 3.26 otteniamo il nuovo sistema in forma di stato in cui ora si hanno quattro gradi di libertà:

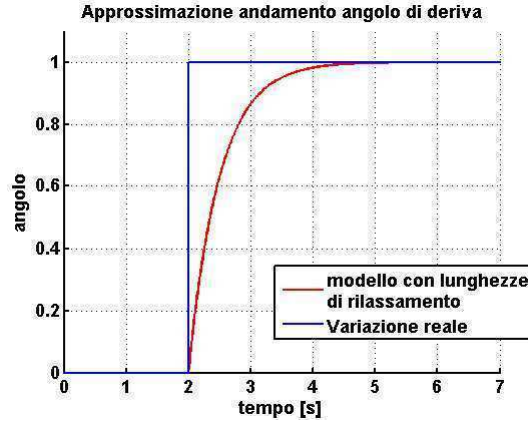


Figura 3.5: Angolo di deriva con lunghezze di rilassamento

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -V_x & \frac{K_F}{aK_F} & \frac{K_R}{-bK_F} \\ 0 & 0 & \frac{I_z}{-V_x} & \frac{I_z}{I_z} \\ -1 & -a & \frac{I_z}{l_{yF}} & 0 \\ \frac{l_{yF}}{l_{yF}} & \frac{l_{yF}}{l_{yF}} & \frac{l_{yF}}{l_{yF}} & \frac{l_{yF}}{l_{yF}} \\ -1 & b & 0 & -V_x \\ \frac{l_{yR}}{l_{yR}} & \frac{l_{yR}}{l_{yR}} & 0 & \frac{l_{yR}}{l_{yR}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V_x}{l_{yF}} \\ 0 \end{bmatrix} \delta.$$

La scelta tra i due modelli è stata fatta dopo un confronto con i dati sperimentali.

In figura 3.6 è riportata, per due diverse vetture, la funzione di trasferimento tra l'input δ che rappresenta il comando volante e $\dot{\psi}$ cioè la variazione di angolo di imbardata calcolta sia con modello bicicletta con lunghezze di rilassamento sia con i dati sperimentali. Come possiamo vedere il modello bicicletta con l'integrazione del rilassamento delle ruote è una buona approssimazione del modello sperimentale, quindi scegliamo questo come modello rappresentativo della realtà.

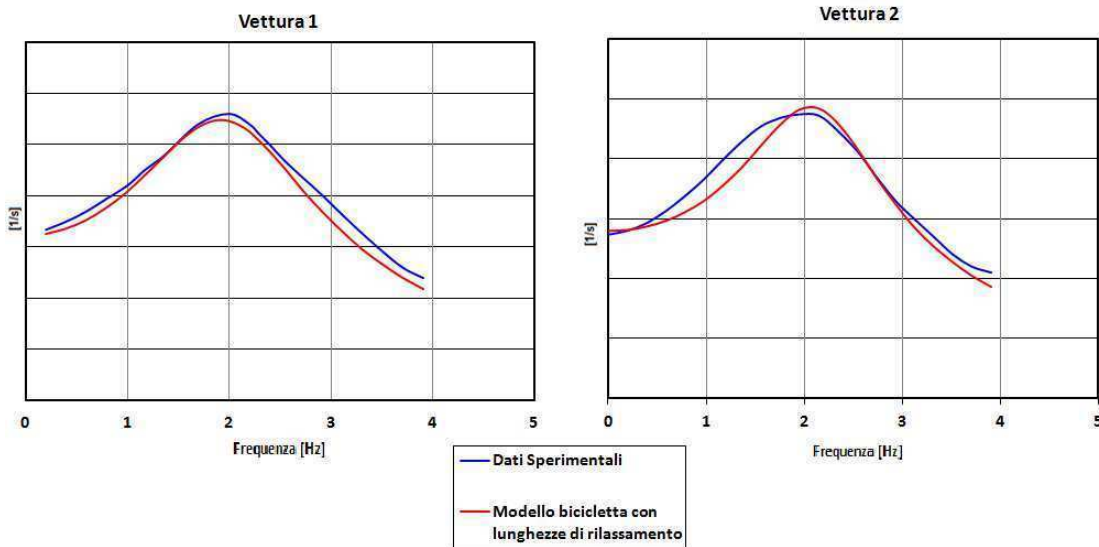


Figura 3.6: Confronto modelli con dati sperimentali

3.4.2 Modellazione del controllo

Creato il modello, si deve scegliere dove agire con il controllo in modo coerente con lo scopo di regolare la dinamica laterale della vettura sfruttando la forza aerodinamica. In generale, l'insieme delle forze aerodinamiche agenti su una vettura stradale è la risultante della distribuzione di pressioni generate dall'aria sulle superfici esposte della vettura stessa.

Le forze possono essere scomposte lungo due direzioni: una parallela alla velocità d'avanzamento e opposta in verso (forza resistente) e una perpendicolare con verso positivo o negativo a seconda dell'interazione del corpo vettura nel mezzo fluido. Si identifica come deportanza quella diretta verso il basso e utile ad aumentare il carico verticale sugli pneumatici, mentre portanza è la condizione opposta chiaramente sfavorevole alla dinamica della vettura. Per coerenza con la trattazione della dinamica di un veicolo stradale, la forza deportante viene scomposta in anteriore e posteriore in modo da poterne valutare separatamente gli effetti.

Poiché la capacità dello pneumatico di generare forza laterale e longitudinale dipende anche dai carichi verticali agenti, la regolazione del carico verticale crea-

to dall'aerodinamica sull'asse anteriore e posteriore si traduce coerentemente in una variazione di forza laterale o longitudinale esercitabile nel contatto ruota strada. Nel caso particolare in questione, poichè il sistema d'ali mobili è regolabile sull'asse posteriore, si aggiunge una forza laterale coerente con la forza normalmente generata da quello pneumatico. Per completezza alla variazione di carico posteriore, corrisponde, in misura molto inferiore, una piccola variazione di carico anteriore, dovuta alla variazione di assetto della vettura. In questa sede, proprio per le scarse differenze, si trascura l'effetto combinato dell'asse posteriore sull'asse anteriore.

Si ottiene quindi:

$$m \left(\ddot{y} + V_x \dot{\psi} \right) = F_{yF} + F_{yR} + u$$

$$I_z \ddot{\psi} = aF_{yF} - bF_{yR} - bu$$

Ora che abbiamo a disposizione il modello in forma di stato completo anche dell'input di controllo, si deve procedere con la scelta degli output che saranno fondamentali nel calcolo del controllo, in quanto come descritto nella sezione 3.3 si minimizzerà la differenza tra gli output del modello reale e quelli del modello di riferimento. Noto che non tutti i segnali sono misurabili nella realtà e ponendoci come obiettivo minimo la stabilità del veicolo, scegliamo come output la variazione dell'angolo di imbardata che è anche uno stato del sistema, ma è misurabile ed è indice della stabilità della vettura.

Il modello completo dunque diventa

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -V_x & \frac{K_F}{aK_F} & \frac{K_R}{-bK_F} \\ 0 & 0 & \frac{I_z}{-V_x} & \frac{I_z}{I_z} \\ \frac{-1}{l_{yF}} & \frac{-a}{l_{yF}} & \frac{-V_x}{l_{yF}} & 0 \\ \frac{-1}{l_{yR}} & \frac{b}{l_{yR}} & 0 & \frac{-V_x}{l_{yR}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V_x}{l_{yF}} \\ 0 \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 1 \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \alpha_F \\ \alpha_R \end{bmatrix}.$$

3.4.3 Il modello di riferimento

Volendo applicare la tecnica di inseguitore di modello abbiamo la necessità di avere anche un modello di riferimento. Tale modello dovrà essere analogo a quello descrittivo della realtà tranne che per i termini dovuti al controllo, infatti sarà utilizzato solo come riferimento di cui si vuole riprodurre la dinamica laterale, quindi non va controllato e risulterà il seguente:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{y}_{rif} \\ \dot{\psi}_{rif} \\ \alpha_{F_{rif}} \\ \alpha_{R_{rif}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -V_{x_{rif}} & \frac{K_{F_{rif}}}{m_{rif}} & \frac{K_{R_{rif}}}{m_{rif}} \\ 0 & 0 & \frac{a_{rif} K_{F_{rif}}}{I_{z_{rif}}} & \frac{-b_{rif} K_{R_{rif}}}{I_{z_{rif}}} \\ \frac{-1}{l_{yF_{rif}}} & \frac{-a_{rif}}{l_{yF_{rif}}} & \frac{-V_{x_{rif}}}{l_{yF_{rif}}} & 0 \\ \frac{-1}{l_{yR_{rif}}} & \frac{b_{rif}}{l_{yR_{rif}}} & 0 & \frac{-V_{x_{rif}}}{l_{yR_{rif}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{rif} \\ \psi_{rif} \\ \alpha_{F_{rif}} \\ \alpha_{R_{rif}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{V_{x_{rif}}}{l_{yF_{rif}}} \\ 0 \end{bmatrix} \delta_{rif}$$

$$z_{rif} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_{rif} \\ \dot{\psi}_{rif} \\ \alpha_{F_{rif}} \\ \alpha_{R_{rif}} \end{bmatrix}.$$

Il modello di riferimento dovrà essere determinato scegliendo in maniera opportuna o conveniente i parametri presenti, infatti tale scelta influenza anche l'output del sistema e quindi la quantità di controllo che si ottiene.

3.4.4 La legge di controllo

In questo caso si è calcolata una legge di controllo proporzionale allo stato del sistema del tipo $u = -Kx$ per poter valutare i risultati virtuali della tecnica anche se non tutti gli stati del sistema saranno misurabili nella realtà, quindi per

un utilizzo pratico, una volta appurata la validità del metodo, sarà necessario implementare il caso con legge di controllo di output feedback.

Capitolo 4

IMPLEMENTAZIONE NUMERICA E RISULTATI

4.1 Implementazione

La prima fase dell'implementazione numerica ha visto la creazione di due funzioni matlab che presi in ingresso i parametri necessari crea le matrici del modello reale e del modello di riferimento, poi, utilizzando la funzione predefinita *ss* del toolbox sui sistemi di controllo, si creano i sistemi di equazioni in forma di stato. La funzione *ss* infatti prende in input le matrici create e restituisce in output il sistema in forma di stato. In seguito ho effettuato i controlli sull'osservabilità, controllabilità e stabilità asintotica dei due sistemi. Le funzioni predefinite *ctrb* e *obsv* dati in ingresso i sistemi in forma di stato restituiscono rispettivamente le matrici C e O di controllabilità e osservabilità per entrambi i sistemi, calcolando il rango si ottiene $rg(C) = 4$ e $rg(O) = 4$, quindi come da teoremi 2.1.1 e 2.2.1 entrambi i sistemi sono osservabili e controllabili. Inoltre ho calcolato gli autovalori delle matrici A e A_{rif} e in entrambi i casi tutti gli autovalori hanno parte reale negativa, quindi i sistemi sono asintoticamente stabili.

Costruiti i modelli e fatte le osservazioni su controllabilità, osservabilità e stabilità ho proseguito con il calcolo della matrice di controllo K sia nel caso di problema di regolazione (quindi con modello di riferimento considerato senza in-

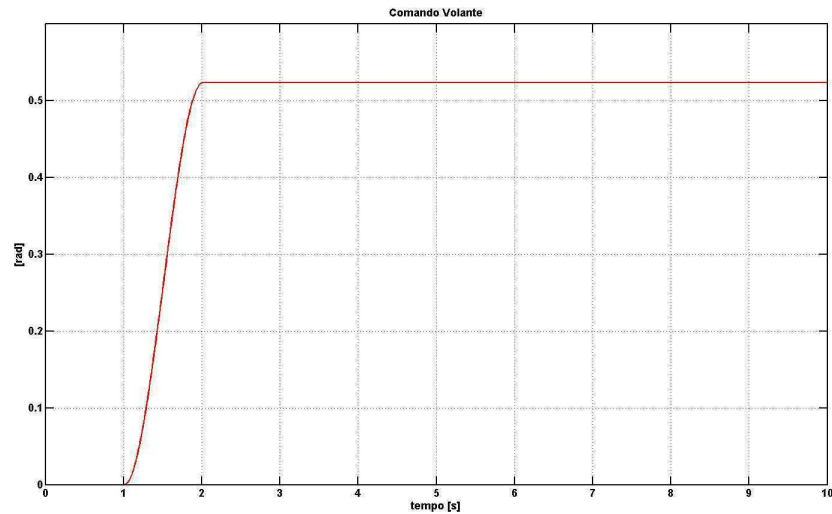
put δ) sia nel caso di inseguimento di un comando specifico. Le due tecniche di controllo differiscono tra loro proprio per il modello di riferimento: nel caso di problema di regolazione non avendo input si lavora in modo da mandare a zero gli stati del modello reale, mentre nell'altro il modello reale tende a riprodurre gli stessi stati del riferimento.

Come descritto nella sezione 3.3.1.2 il controllo a inseguimento di modello con comando specifico è risolvibile supponendo che l'input del sistema di riferimento, che in questo caso è il comando volante, verifichi un'equazione differenziale di un certo ordine d , quindi ho implementato il caso in cui l'equazione differenziale sia di ordine $d = 1$ o $d = 2$ scegliendo poi opportunamente le simulazioni.

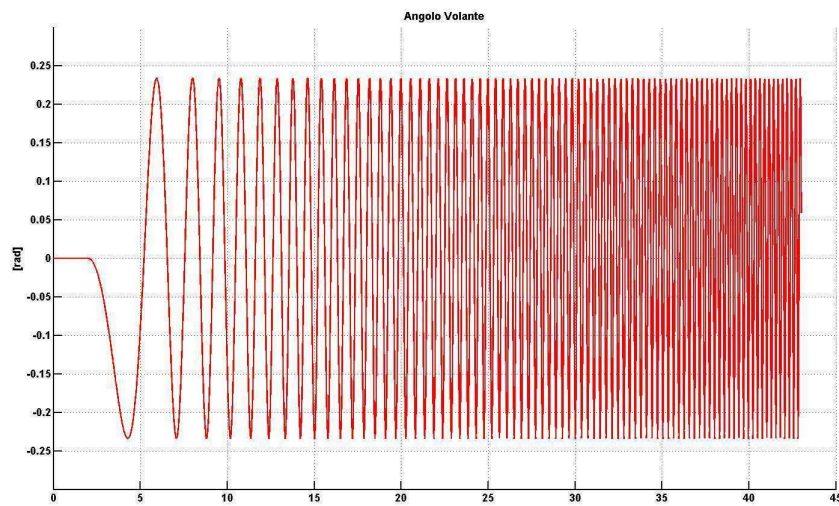
Si creano quindi i sistemi aumentati come descritto nelle sezioni 3.3.1.1 e 3.3.1.2 ottenendo un funzionale $J = \int_0^\infty x'^T Q x' + u^T R u$ da minimizzare. Per fare ciò ho utilizzato la funzione Matlab *lqr* la cui sintassi è la seguente $[K, P, E] = \text{lqr}(Sis, Q, R)$, cioè presi in input il sistema *Sis* e le matrici di peso Q e R si ottiene in output la matrice K ottima, tale che $u = -Kx$, la soluzione P dell'associata equazione matriciale di Riccati $A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$ ed il vettore E degli autovalori del ciclo chiuso $\dot{x} = (A - BK)x$.

Una volta calcolata la matrice K ho implementato un modello Simulink per poter simulare il comportamento del sistema al variare del tempo. Tale modello è composto da un blocco centrale che simula il comportamento della macchina sfruttando un software di simulazione realtime del veicolo, un blocco in cui si calcola il controllo istantaneamente e un blocco in cui si rinvia la forza calcolata come input al blocco che simula il comportamento della macchina.

Per poter valutare la coerenza del controllo, la buona scelta dei parametri e ulteriori caratteristiche è necessario creare degli eventi da simulare. In particolare, utilizzando il software di simulazione, ho creato due eventi a velocità costante. Il primo evento simula un colpo di sterzo, cioè l'input relativo al comando volante è una funzione rampa del tipo rappresentato in figura 4.1a, il secondo, invece, noto come sweep in frequenza ha come input volante un segnale del tipo in figura 4.1b.



(a) Colpo di sterzo



(b) Sweep in frequenza

Figura 4.1: Eventi simulati

Queste due simulazioni sono degli eventi standard che vengono simulati poichè molto utili per la descrizione della dinamica laterale del veicolo. Inoltre il colpo di sterzo può essere considerato come approssimazione del comportamento in curva, mentre il secondo evento è utile per vedere le risposte in frequenza della vettura.

4.2 Convalida della scelta dei parametri

Il modello di riferimento implementato necessita di alcuni parametri in ingresso come massa, momento d'inerzia e altre caratteristiche tipiche della vettura.

Inserendo nel modello di riferimento i parametri riportati in tabella 4.1 ho confrontato i vari stati con le equivalenti variabili ottenute dal software di simulazione per poter avere un'ulteriore convalida del modello bicicletta con lunghezze di rilassamento.

Parametro	Valore
Massa (kg)	1650
Momento d'inerzia ($Kg \cdot m^2$)	3100
K_F (N/rad)	120000
K_R (N/rad)	300000
a (m)	1.59
b (m)	1.06
Lunghezza rilassamento anteriore	1.0
Lunghezza rilassamento posteriore	0.9

Tabella 4.1: Parametri del modello

Il software simula ogni evento utilizzando un modello completo di veicolo, quindi, oltre ai parametri precedenti, necessita di molte più caratteristiche della vettura, ma confrontando le variabili di stato potremmo avere una stima sulla precisione del modello bicicletta utilizzato per la sintesi della tecnica di controllo.

In figura 4.2 e 4.3 sono riportati per entrambe le simulazioni i confronti per tutte le variabili di stato. Come possiamo vedere, per entrambe le simulazioni, la differenza tra il modello di riferimento e il modello completo del software di simulazione a parità di parametri non è tale da influenzare notevolmente il risultato.

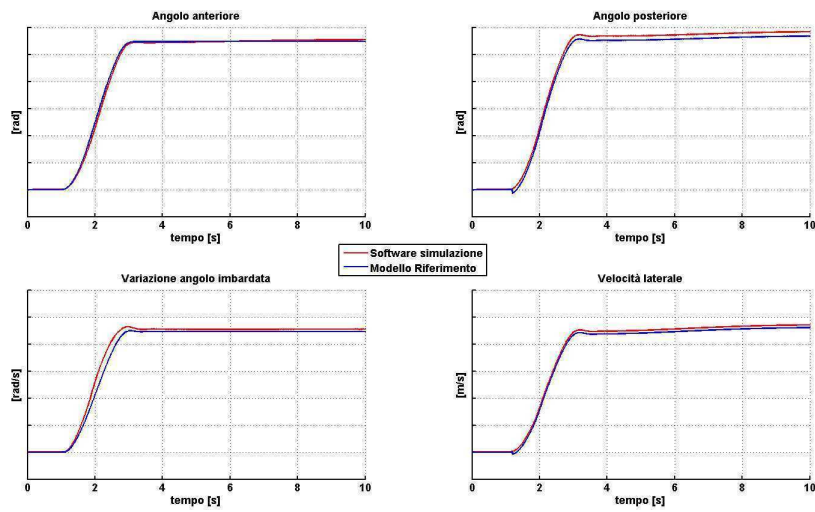


Figura 4.2: Convalida Modello Evento Step

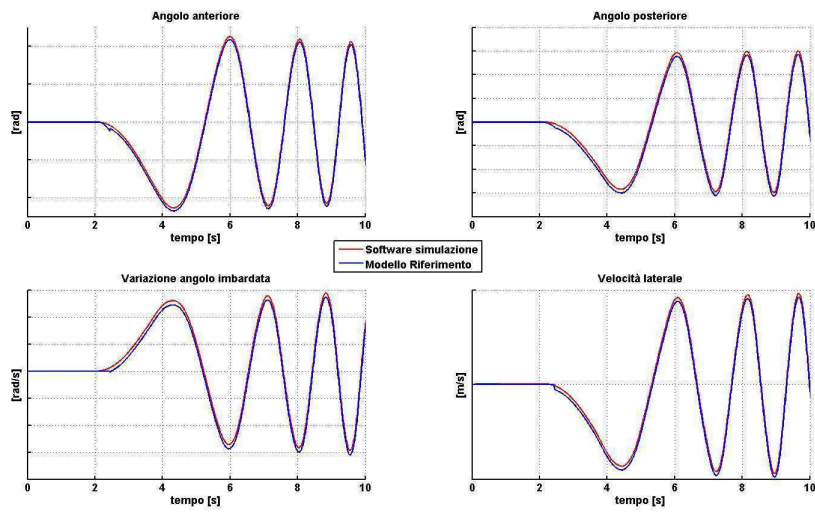


Figura 4.3: Convalida Modello Evento Sweep

4.3 Controllo della coerenza del controllo

Prima di tarare il modello di riferimento ho valutato la coerenza del controllo, cioè in entrambi i casi si vuole verificare che la forza di controllo sia coerente con l'obiettivo da raggiungere.

Per valutare tale coerenza ho ritenuto opportuno variare un solo parametro del modello di riferimento rispetto al modello reale poichè così sono in grado di conoscere quali conseguenze si hanno nella dinamica laterale: in particolare, variando la rigidità dei pneumatici, si ottengono variazioni significative dell'angolo di imbardata. Dunque, assegnando valori diversi alla rigidità del pneumatico anteriore, ho valutato se la forza di controllo u aumenta o diminuisce gli stati del modello reale secondo quanto richiesto dal riferimento; in particolare poniamo l'attenzione sullo stato $\dot{\psi}$ poichè direttamente legato alla variazione di K_A . Consideriamo la simulazione Step e conoscendo le convenzioni di segno con cui si crea la simulazione, cioè l'angolo volante è positivo in senso antiorario e ugualmente la variazione di angolo di imbardata, possiamo affermare che la situazione iniziale è quella riportata in figura 4.4.

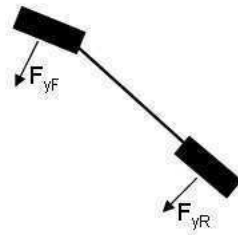


Figura 4.4: Situazione iniziale simulazione

Analizziamo per inseguimento di comando specifico il caso $K_{A_{rif}} > K_A$. In termini pratici significa che la ruota anteriore del modello di riferimento è più performante, equivalentemente possiamo dire che la ruota posteriore, invece, è meno performante, quindi ci aspettiamo una minore stabilità che porta ad una più grande variazione di angolo di imbardata, ciò è confermato in figura 4.5a in cui possiamo vedere che la variazione di angolo di imbardata è maggiore per il modello di riferimento. Poichè lo scopo del controllo è comunque quello di seguire

il riferimento dovremmo ottenere una forza di controllo u che aumenti $\dot{\psi}$ e quindi con verso opposto rispetto alla forza posteriore, infatti, come possiamo vedere in figura 4.5b entrambe le leggi di controllo per $d = 1$ e $d = 2$ sono negative. La situazione che si ha al variare del tempo è quella riportata in figura 4.5c.

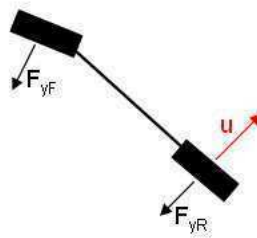
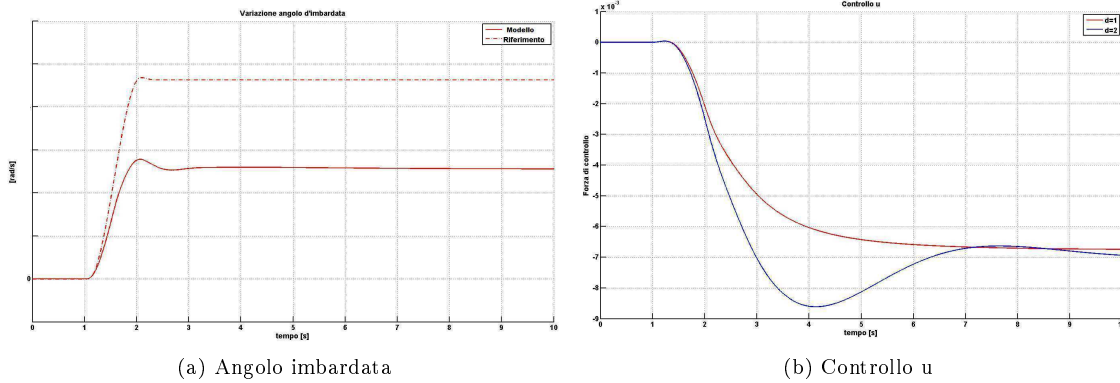
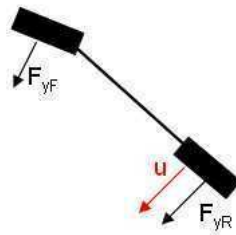
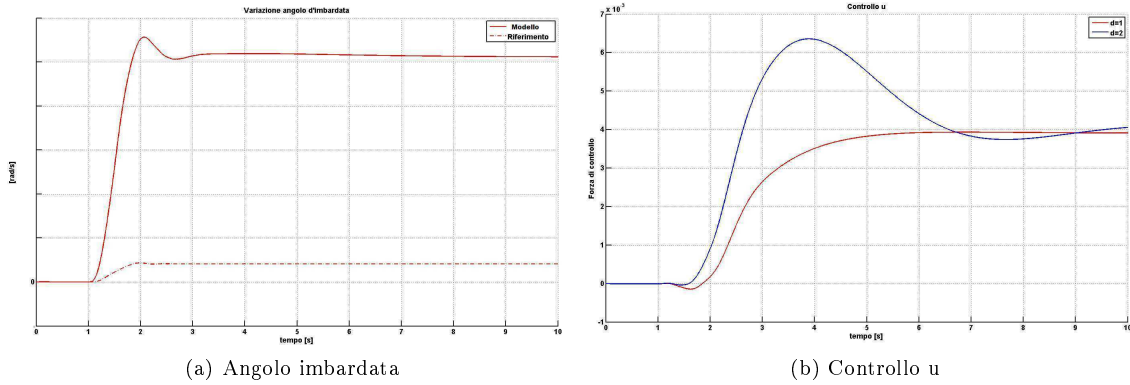


Figura 4.5: Controllo per $K_{A_{rif}} > K_A$

Analogamente nel caso $K_{A_{rif}} < K_A$ avremo la situazione inversa, cioè la variazione di angolo di imbardata è minore per il riferimento come in figura 4.6a e si ha un controllo u positivo che invece tende a diminuire la variazione di imbardata nel caso reale (figura 4.6b). Dunque al variare del tempo avremo la forza di controllo diretta concordemente alla forza posteriore come in figura 4.6c



(c) Direzione controllo

Figura 4.6: Controllo per $K_{A_{rif}} < K_A$

Nel caso del problema di regolazione, invece, il modello di riferimento crea uno stato sempre nullo poichè è un modello privo di input, dunque il controllo che si ottiene, per essere coerente dovrà agire in modo tale da diminuire gli stati fino ad annullarli. Infatti con la variazione di angolo di imbardata riportata in figura 4.7a si ottiene coerentemente il controllo in figura 4.7b .

Essendo u positivo, come nel caso di inseguitore di modello tende a diminuire la variazione di angolo di imbardata del modello reale, in particolare tende ad annullarlo.

Ricapitolando si ha la situazione riportata in tabella

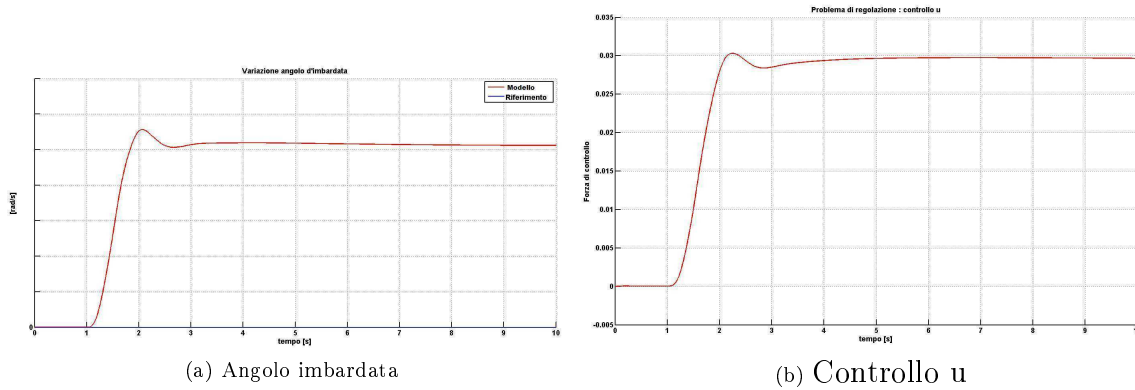


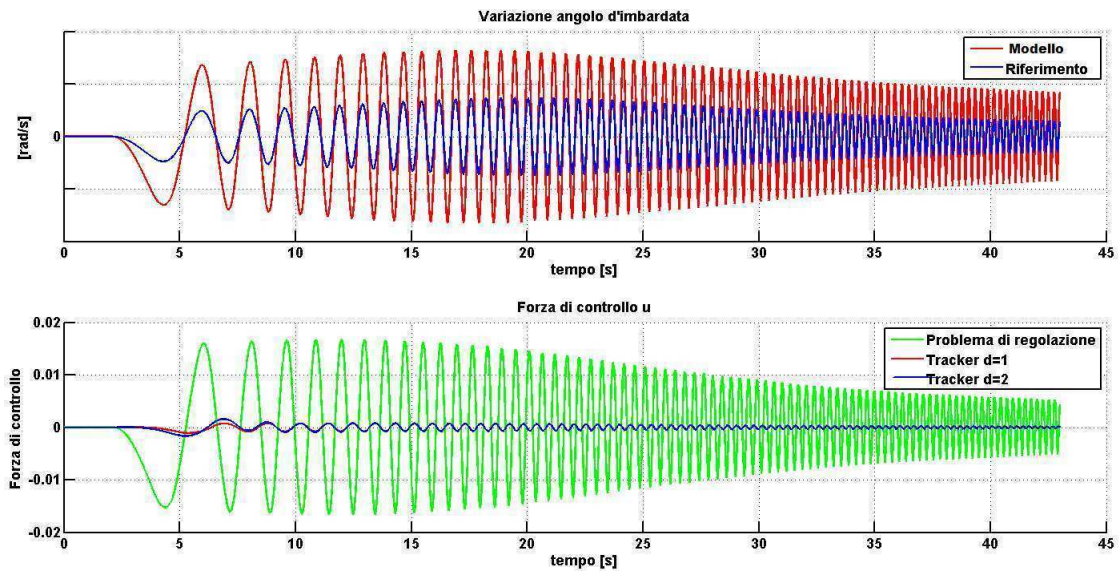
Figura 4.7: Problema di regolazione

Problema	Segno del Controllo	Effetto del controllo
$\dot{\psi}_{rif} < \dot{\psi}$	positivo	Il controllo è diretto come la forza posteriore quindi diminuisce la variazione di angolo di imbardata del modello reale
$\dot{\psi}_{rif} > \dot{\psi}$	negativo	Il controllo è diretto in maniera opposta rispetto alla forza posteriore quindi aumenta la variazione di angolo di imbardata del modello reale

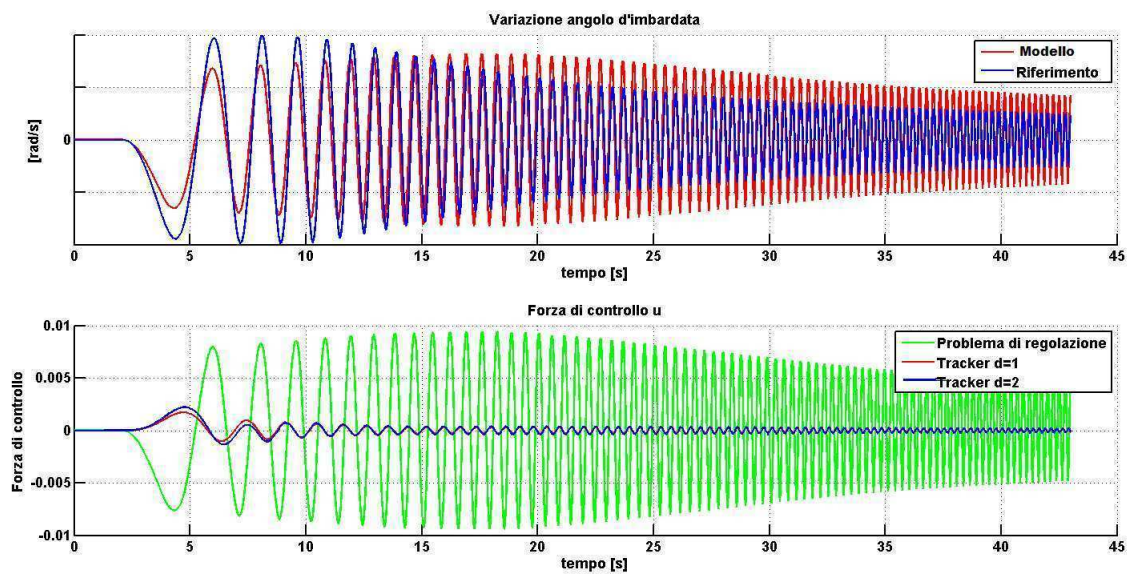
Tabella 4.2: Coerenza segni segnale di controllo

Eseguendo gli stessi controlli per la simulazione sweep si producono risultati completamente analoghi a quelli ottenuti con la simulazione step sia nel problema di regolazione che nel problema di inseguimento di comando specifico.

Osservando la figura 4.8 in cui sono riportati i due casi descritti precedentemente, possiamo notare che le leggi di controllo sono coerenti, a meno di un leggero sfasamento nella legge ottenuta con la tecnica si inseguitore di comando. Tale sfasamento potrebbe essere dovuto a una scelta non troppo precisa dei parametri utilizzati per la sintesi del controllo.



(a) Caso 1: $\dot{\psi}_{rif} < \dot{\psi}$



(b) Caso2: $\dot{\psi}_{rif} > \dot{\psi}$

Figura 4.8: Simulazione Sweep

4.4 Conseguenze della variazione dei parametri per la sintesi del controllo

4.4.1 Coefficienti equazione differenziale

Constata la coerenza del controllo in casi standard ho proseguito analizzando, nel caso di tracker, le conseguenze legate alla variazione di alcuni parametri per la sintesi della matrice di controllo K . Ricordiamo che nel caso di inseguimento di comando specifico si suppone che il segnale di input, cioè il comando volante, verifichi un'equazione differenziale che nella nostra implementazione è $\delta^{(2)} + a_1\delta^{(1)} + a_2\delta = 0$ oppure $\delta^{(1)} + a_1\delta = 0$, quindi ho analizzato come la scelta dei coefficienti a_1 e a_2 influenza il risultato che si ottiene. Tali prove sono state effettuate con la simulazione colpo di sterzo nel caso $\dot{\psi}_{rif} < \dot{\psi}$ sapendo quindi che, per essere coerente, ci si aspetta un controllo positivo.

Ho assegnato ad a_1 i valori 0.001, 0.5, 1, 2 e nel caso di $d = 1$ si ottengono le leggi di controllo riportate in figura 4.9.

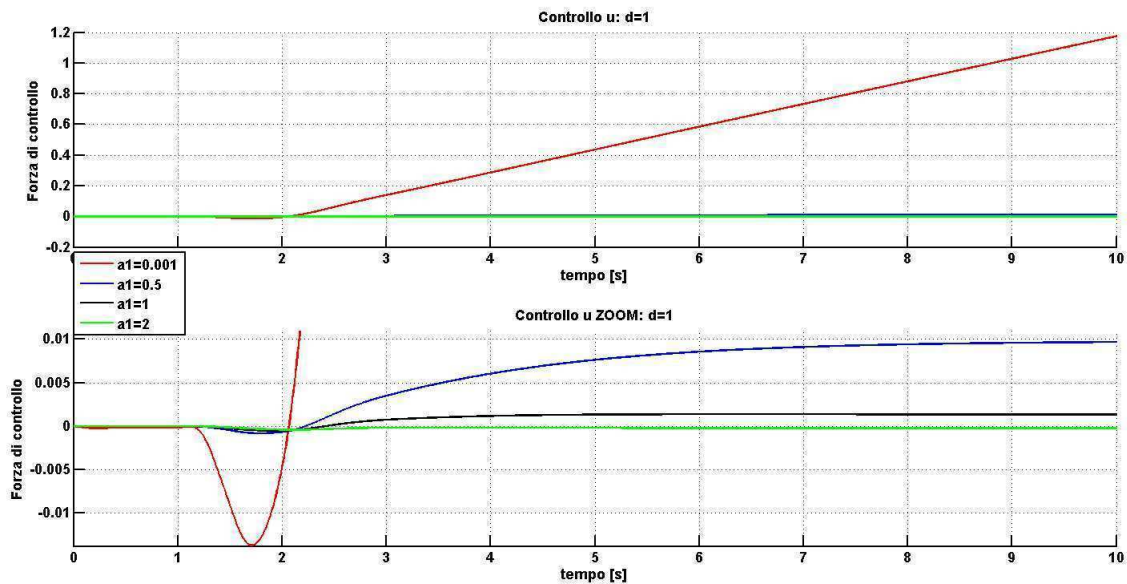


Figura 4.9: Controllo per $d = 1$ al variare di a_1

Come possiamo vedere il caso $a_1 = 0.001$ genera una legge di controllo divergente, mentre nello zoom si nota che il controllo che si ha per $a_1 = 2$ è negativo al contrario di quanto ci si aspettava, dunque in questa simulazione, per $d = 1$, possiamo utilizzare, tra quelli testati, solo i coefficienti $a_1 = 1$ e $a_1 = 0.5$.

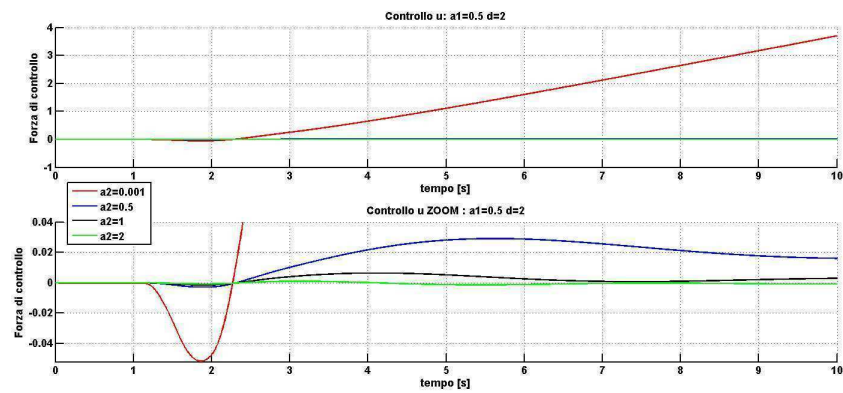
Nel caso $d = 2$ ho fissato $a_1 = 1$, $a_1 = 0.5$ e $a_1 = 2$ e poi ho variato a_2 assegnando i valori 0.001, 0.5, 1,2.

Osservando le figura 4.10 si nota che in ognuna la legge di controllo per $a_2 = 0.001$ è divergente e per $a_2 = 2$ è negativa. Quindi concludendo, per questa simulazione nel caso $d = 2$ per ognuno dei valori fissati di a_1 i valori accettabili per a_2 tra quelli testati sono 0.5 e 1.

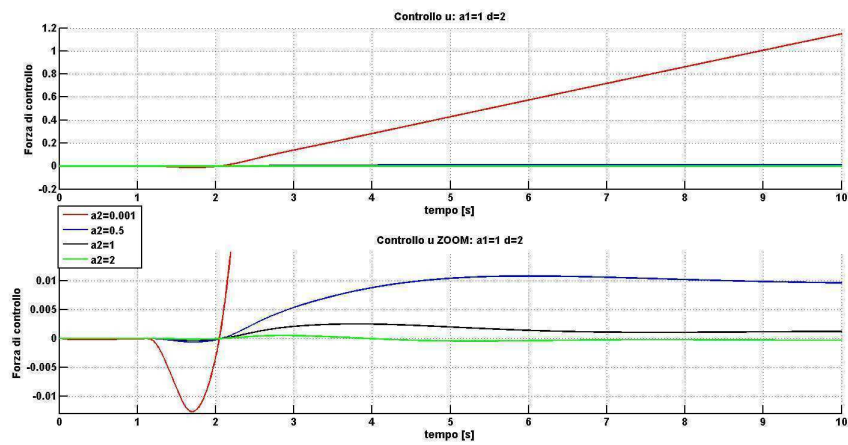
Possiamo dunque affermare che variando i coefficienti si ottengono segnali di controllo diversi che sono strettamente legati alla simulazione in questione proprio perchè sono relativi a ipotesi sul segnale di comando volante passato in input che è diverso per i vari eventi simulati. Si ha anche che le leggi di controllo non sono coerenti per qualsiasi scelta effettuata e quelle coerenti sembrano essere in ritardo o sfasate rispetto all'istante effettivo in cui il modello di riferimento e quello simulato dal software iniziano ad avere variazioni diverse per l'angolo di imbardata. Questo permette di concludere che i parametri visti fin'ora non sono probabilmente quelli ottimali, ma occorre indagare anche la scelta degli altri parametri che intervengono nella sintesi del controllo.

4.4.2 Grado dell'equazione differenziale

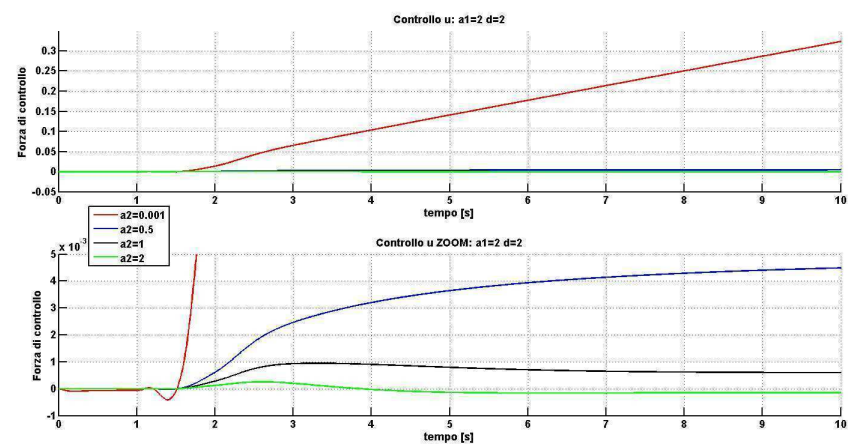
Un'altra possibile variazione ai risultati ottenuti fin'ora si può avere cambiando il grado di equazione differenziale che si utilizza per approssimare il comando volante, per questo ho implementato anche il caso $d = 3$, $d = 5$ e $d = 10$ al fine di valutare se le imprecisioni riscontrate nelle leggi di controllo nella sezione precedente sono dovute a questa scelta. Per entrambe le simulazioni ho dunque simulato anche quest'altri casi e si possono vedere le leggi di controllo relative in figura 4.11



(a) $a_1 = 0.5$

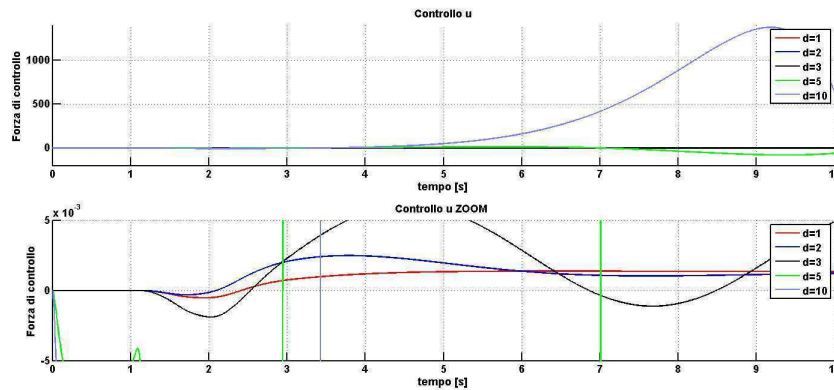


(b) $a_1 = 1$

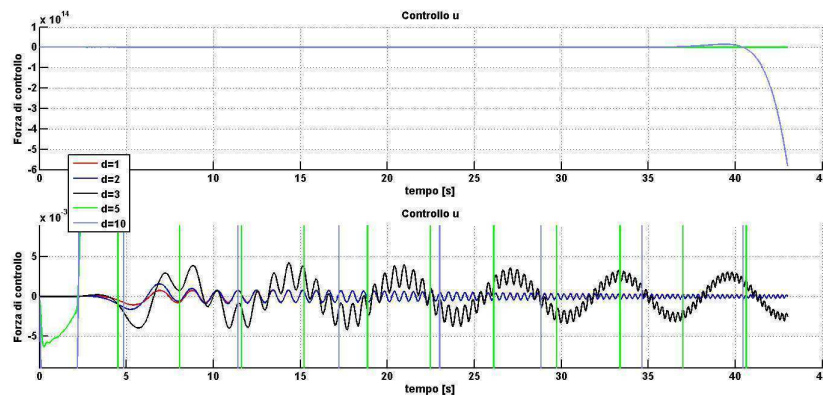


(c) $a_1 = 2$

Figura 4.10: Controllo per $d = 2$ al variare di a_2



(a) Simulazione Step



(b) Simulazione Sweep

Figura 4.11: Leggi di controllo al variare di d

Si nota facilmente che per gradi superiore al secondo le leggi di controllo non sono coerenti, quindi è opportuno scegliere per queste simulazioni grado $d = 2$ poichè genera la migliore legge di controllo.

4.4.3 Pesi LQR

L'ultimo dei parametri modificati è il peso Q che si ha nel funzionale da minimizzare, infatti poichè $J = \int_0^\infty [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$ aumentando o diminuendo Q si pesano più o meno gli stati del sistema, cioè avendo Q con valori grandi si riducono moltissimo gli stati per avere un funzionale J che sia comunque minimo, viceversa se Q ha valori piccoli si ha che lo stato x può assumere anche

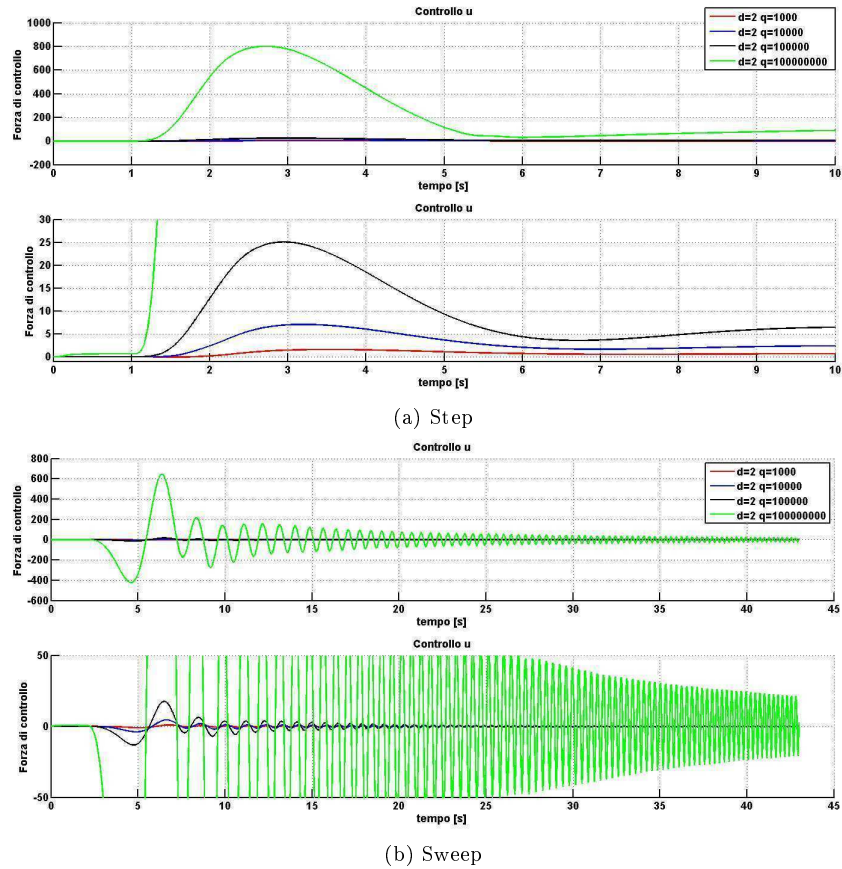


Figura 4.12: Leggi di controllo al variare di Q

valori maggiori per ottenere lo stesso obiettivo. Inizialmente ho calcolato le leggi di controllo con $q = 1$ e coerentemente con quello che ci si aspettava ho trovato quantità di controllo piccole, poichè gli stati possono assumere anche grandi valori; aumentando il peso, invece, si ha la necessità di un'azione di controllo maggiore per vincolare gli stati a valori piccoli tali da minimizzare J .

Fissato il grado dell'equazione differenziale $d = 2$ vediamo in figura 4.12 le leggi di controllo ottenute al variare di Q .

Come detto in precedenza l'azione di controllo aumenta con l'aumentare dei coefficienti di Q . Inoltre si può notare che per i valori più grandi assegnati a Q si perde anche il ritardo dell'azione di controllo notato nella simulazione Step

e lo sfasamento notato nella simulazione Sweep. Per poter effettuare una scelta tra i vari coefficienti utilizzati per i test, oltre alla considerazione appena fatta sul ritardo dell'inizio del controllo, si deve considerare anche che tale legge deve essere utilizzata per un sistema di aereodinamica mobile quindi necessita di un'azione 0-100 che vada dall'apertura massima alla chiusura massima. Quindi, tra quelli provati, i coefficienti più opportuni si hanno per $q = 10^5$, $q = 10^6$ o $q = 10^7$

4.5 Normalizzazione del controllo

La forza di controllo u , generata come descritto precedentemente, deve essere trasformata in una vera e propria azione di controllo che nella pratica regoli l'apertura e la chiusura dell'ala mobile, cioè nell'istante di maggiore controllo si deve avere una forza posteriore che sia vicina alla forza massima possibile, che si ottiene quando l'ala mobile è completamente chiusa (100 %), mentre, per una piccola quantità di controllo, deve avvicinarsi al caso in cui la forza posteriore è minima, quindi l'ala deve rimanere aperta come in posizione iniziale (0%).

Per trasformare il controllo u in una vera e propria azione di controllo, quindi in un segnale che vari nell'intervallo $[0, 100]$, ho eseguito varie simulazioni con diversi valori per q e diverse caratteristiche per il modello di riferimento cercando di valutare nei casi limite, cioè quando c'è maggior differenza tra modello reale e modello di riferimento, qual'è la massima quantità di controllo possibile e, in base a questa, ho normalizzato tutti i segnali u .

Ricordiamo, come già osservato in precedenza, che una quantità di controllo u negativa si ha nel caso in cui il modello di riferimento ha una variazione di angolo di imbardata maggiore del modello reale; tale segno è coerente con l'obiettivo da raggiungere, ma poiché una variazione di carico verticale influenza la generazione di forze laterali e longitudinali in modulo, ma non in segno (non è possibile alterare la direzione della forza), un segno della forza di controllo u negativo corrisponde ad un caso non fisicamente attuabile con gli attuatori in gioco, ovvero deve essere trattato come la richiesta del minimo carico possibile.

Sia con l'evento colpo di sterzo che con l'evento sweep sono stati simulati 3 casi diversi in cui le rigidità dei pneumatici posteriori e anteriori del modello di

riferimento variano generando ogni volta una variazione di angolo di imbardata da inseguire e un segnale u diversi. I risultati ottenuti sono riportati in tabella 4.3.

Il caso limite relativo al massimo valore assunto da u è stato ottenuto con la terza delle simulazioni riportate in tabella, infatti il modello di riferimento ha una variazione di angolo di imbardata molto bassa, che provoca quindi una grande differenza tra riferimento e modello reale, generando necessariamente una grande quantità di controllo.

Per far sì che il massimo valore di u equivalga al 100 % di controllo, al variare di q scegliamo una costante di normalizzazione che ci permette di trasformare il segnale u in modo da essere direttamente fruibile dall'attuatore, quindi, come possiamo osservare dalla tabella seguente, si ha:

	Costante normalizzazione
$q = 10^5$	2.38
$q = 10^6$	0.730
$q = 10^7$	0.233
$q = 10^8$	0.0766

4.6 Le forze controllate

Per ognuna delle tre varianti del modello di riferimento, sia per l'evento colpo di sterzo che per l'evento sweep, ho controllato che le forze anteriore e posteriore lungo l'asse z e la forza di drag, ottenute controllando l'evoluzione della dinamica con il metodo di inseguimento di comando specifico, siano comprese tra la massima forza possibile (configurazione high down force) ottenuta con ala completamente chiusa e la minima forza possibile (configurazione low down force) ottenuta con ala completamente aperta.

Vediamo nelle immagini seguenti i risultati ottenuti per l'evento colpo di sterzo.

	$q = 10^5$		$q = 10^6$	
Modello di Riferimento	Step	Sweep	Step	Sweep
$K_{F_{rif}} = \frac{1}{2}K_F$ $\dot{\psi}_{rif} < \dot{\psi}$	$u \in [0, 23]$	$u \in [-13, 17]$	$u \in [0, 88]$	$u \in [-44, 62]$
$K_{R_{rif}} = \frac{1}{2}K_R$ $\dot{\psi}_{rif} > \dot{\psi}$	$u \in [-44, 0]$	$u \in [-17, 15]$	$u \in [-120, 5]$	$u \in [-52, 40]$
$K_{F_{rif}} = \frac{1}{2}K_F$ $K_{R_{rif}} = 10K_R$ $\dot{\psi}_{rif} \ll \dot{\psi}$	$u \in [0, 42]$	$u \in [-13, 20]$	$u \in [0, 137]$	$u \in [-65, 90]$

	$q = 10^7$		$q = 10^8$	
Modello di Riferimento	Step	Sweep	Step	Sweep
$K_{F_{rif}} = \frac{1}{2}K_F$ $\dot{\psi}_{rif} < \dot{\psi}$	$u \in [0, 245]$	$u \in [-122, 187]$	$u \in [0, 778]$	$u \in [-385, 610]$
$K_{R_{rif}} = \frac{1}{2}K_R$ $\dot{\psi}_{rif} > \dot{\psi}$	$u \in [-320, 12]$	$u \in [-164, 105]$	$u \in [-965, 42]$	$u \in [-542, 350]$
$K_{F_{rif}} = \frac{1}{2}K_F$ $K_{R_{rif}} = 10K_R$ $\dot{\psi}_{rif} \ll \dot{\psi}$	$u \in [0, 430]$	$u \in [-200, 300]$	$u \in [0, 1305]$	$u \in [-600, 950]$

Tabella 4.3: Normalizzazione u

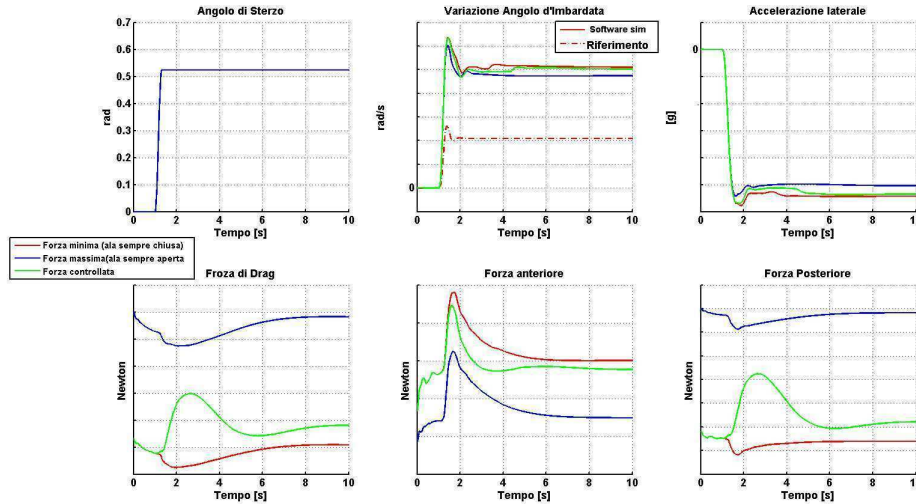


Figura 4.13: Forze controllate per $K_{F_{rif}} = \frac{1}{2}K_F$

In figura 4.13 è riportata la prima delle simulazioni considerate, come possiamo vedere la forza controllata riportata in verde non raggiunge mai la forza massima possibile poichè in questo caso la differenza tra la variazione di angolo d'imbardata reale e di riferimento non è massima, quindi neanche la quantità di controllo sarà massima.

In figura 4.14 invece si vede che $\dot{\psi}_{rif} > \dot{\psi}$, per le considerazioni precedenti, ottenendo $u < 0$, si impone $u = 0$, poichè un controllo negativo, come detto in precedenza, non è fisicamente attuabile. Con un controllo sempre nullo, l'ala mobile resta nella posizione iniziale di completa apertura, infatti la forza posteriore controllata che otteniamo coincide con la forza minima.

Infine nella figura è riportato il caso limite in cui la differenza tra le due variazioni di angolo di imbardata è molto alta, quindi quello che ci si aspetta è che la forza posteriore controllata raggiunga la forza massima possibile.

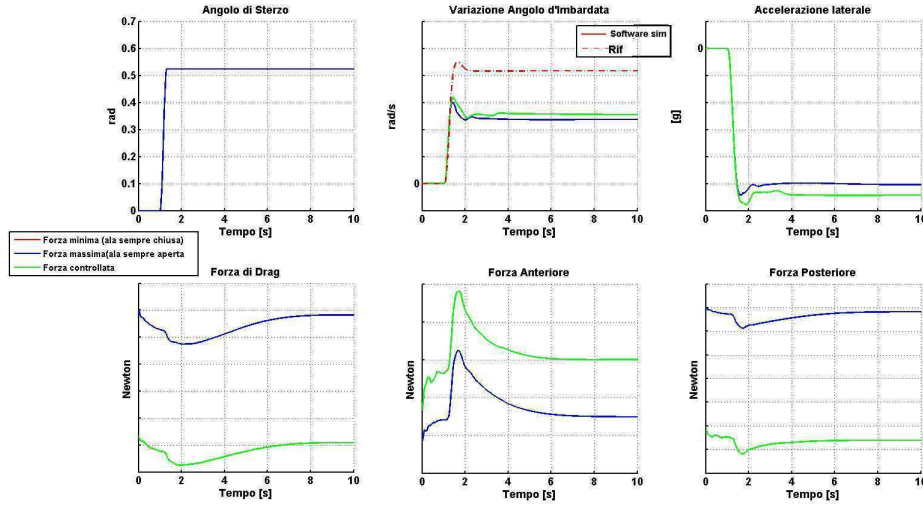


Figura 4.14: Forze controllate per $K_{R_{rif}} = \frac{1}{2}K_R$

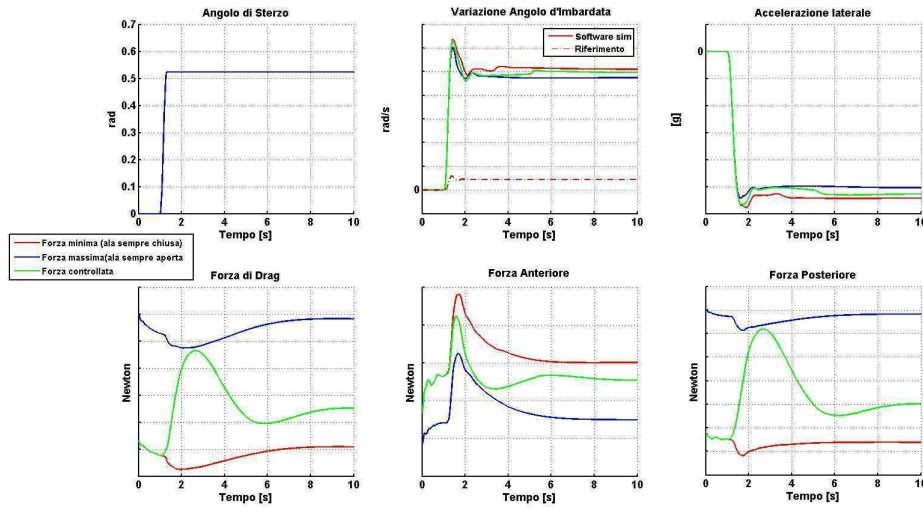


Figura 4.15: Forze contorollate per $K_{F_{rif}} = \frac{1}{2}K_F$ $K_{R_{rif}} = 10K_R$

Concludendo, dunque, per le simulazioni viste le forze controllate sono sempre comprese tra la minima e la massima e anche la normalizzazione scelta risulta coerente poichè la forza di controllo u genera una forza massima e minima nei relativi casi limite.

4.7 Conclusioni

Tra i due problemi analizzati si predilige la formulazione con modello di riferimento con input volante, quindi si sceglie il problema di tracker piuttosto che il problema di regolazione poichè è meglio rappresentativo della realtà. Risulta infatti poco realistico imporre che la dinamica laterale di una vettura replichi la dinamica laterale di un modello senza input volante che genera stati nulli; come abbiamo visto, infatti, in presenza di input volante, la variazione di uno dei parametri del modello genera una variazione di angolo di imbardata che quindi modifica l'errore da minimizzare.

Inoltre dai risultati riportati possiamo affermare che la configurazione migliore si ha assumendo che il comando volante verifichi un'equazione differenziale di grado $d = 2$ e i relativi coefficienti siano $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$.

Infine analizzando le forze aerodinamiche si ha che la tecnica di controllo implementata ci permette di aumentare o diminuire in modo attivo la forza aerodinamica verticale sul posteriore generando così un cambiamento anche della forza laterale sviluppata dal pneumatico e quindi della dinamica laterale della vettura.

4.8 Eventuali sviluppi futuri

I risultati ottenuti fin'ora suggeriscono possibili sviluppi futuri per il sistema di controllo in questione.

Innanzitutto sarebbe necessario implementare il caso in cui la legge di controllo è di tipo output feedback in modo da poter valutare il controllo anche sperimentalmente e non solo virtualmente come è stato fatto fin'ora. Per implementare la legge di tipo output feedback potrebbe essere necessario ricorrere a tecniche di

controllo ottimo come H_2 e H_∞ la cui sintesi, in mancanza delle misurazioni dello stato del modello, ne prevede la stima attraverso il filtro di Kalman.

Un secondo possibile sviluppo consiste nel rendere la tecnica di controllo fruibile a diverse velocità. Poiché tutte le simulazioni e considerazioni viste fin'ora sono state eseguite a velocità costante pari a 150 km/h si dovrebbe valutare se la procedura resta coerente anche per altre velocità.

Sarebbe interessante anche testare la stessa tecnica di controllo su una simulazione che non si limiti ad un evento singolo come il colpo di sterzo, ma che attui il controllo su un giro di pista completo.

Infine, si potrebbe implementare anche la versione della tecnica di inseguimento di modello descritta nella sezione 3.3.2, valutando eventuali vantaggi nel calcolo del controllo e quindi nell'evoluzione della dinamica laterale della vettura.

Ringraziamenti

In primo luogo vorrei ringraziare la Professoressa Elena Loli Piccolomini per la grande disponibilità e l'interesse dimostrato durante l'attività di tesi.

Ringrazio Stefano per il grande contributo, il tempo dedicatomi nonostante i mille impegni e l'infinita pazienza che ha dimostrato per la mia grande inesperienza.

Grazie a mamma, papà e i nonni per tutto l'appoggio che mi hanno dimostrato in ogni momento e per la loro partecipazione sempre attenta e premurosa nella mia vita non solo universitaria.

Ringrazio Richi per i consigli, ma anche gli scontri e le chiacchierate sul futuro.

Grazie a Paolo, Patrizia e Martina che sono stati la mia famiglia Bolognese.

Ringrazio la Fra e Luca che nonostante la distanza sono un punto fermo della mia vita.

Grazie a Claudio, Marco, Andrea, Diego, Valentina, Giovanni e Alessio che mi hanno fatto vivere alla grande l'avventura Bolognese e mi hanno accolta da subito nel loro gruppo.

Grazie a Irene che non è stata solo una semplice coinquilina, ma una vera amica.

Ringrazio tutti i ragazzi dell'ufficio Sperimentazione Veicolo in Ferrari per tutto quello che hanno fatto per me durante il periodo di stage, in particolare Fabio, Marco e Nik.

Infine, un grazie speciale va a Valerio perchè mi è sempre stato vicino e ha condiviso con me tutto. Ha saputo incoraggiarmi, ha calmato le mie innumerevoli ansie e ha appoggiato ogni mia scelta con amore.

Bibliografia

- [1] Williams , R. L., e Lawrence, D. A., *Linear state space control systems*, 2007, Jhon Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey
- [2] Stevens, B. L., e Lewis, F. L., 1939, *Aircraft control and simulation*, Jhon Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey
- [3] Naidu, D. S., *Optimal control system*, CRC press, USA
- [4] Levine, W. S., 1996, *The control hand book*, IEEE press
- [5] Erzberger, H., 1968, On use of Algebraic Methods in the analysis and design of model-following control system, NASA technical note D-4663, Washington D.C.
- [6] Payson, S. S., 1989, *Flight control system for the CRCA using a command generator trackerr with PI feedback and Kalman filter*, School of Engineering of the Air Force Institute of Technology
- [7] Ostroff, A. J., e Proffitt, M. S., 1993, *Longitudinal control design approach for hig angle of attack aircraft*, NASA technical paper 3320, Washington D.C.
- [8] Bucher, R., 2003, *Matlab e Simulink nella regolazione automatica*, Scuola universitaria Professionale delle Svizzera Italiana
- [9] Hespanha, J. P., 2007, *Undergraduate lecture notes on LQG/LQR controller design*
- [10] Rowell, D., 2004, *Discrete Time observer and LQG control*, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering

- [11] Sandhu, J., *Leader following of two aircraft formations*, Department of aeronautics & astronautics, University of Washington, Seattle
- [12] Kozakova, A., *Design of discrete-time compensator for reference tracking with disturbance rejection*, Slovak university of technology
- [13] Swift, D. C., 1992, *Command generator tracker based direct model reference adaptive control of a PUMA 560 manipulator*, Electrical, Computer and system Engineering department, Troy, New York
- [14] Kimmet, J., Valasek, J., e Jinkins, J. L., 2002, *Vision based controller for autonomous aerial refueling*, IEEE International Conference on Control Applications
- [15] Trentini, M., 1999, *Mixed norm control of helicopter*, Department of mechanical and manufacturing engineering, university of Calgary, Alberta, Canada
- [16] Rindi, A., Papini, S., Pugi, L., Auciello, J., 2007, *Appunti del corso di meccanica del veicolo*, Sezione Meccanica Applicata, Università degli studi di Firenze.
- [17] Rajamani, R., 2006, *Vehicle dynamics and control*, Springer
- [18] Karimi, D., Mann, D., *A study of tractor yaw dynamics for application in a tractor driving simulator*, ASABE Section Meeting Paper MBSK 06-113