

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

**SULLA
TRASFORMATA DI LAPLACE
E SUE APPLICAZIONI**

Tesi di Laurea in Analisi Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
ERMANNANO LANCONELLI

Presentata da:
STEFANO GARDENGHI

Sessione II
Anno Accademico 2011/2012

a tutti coloro che mi vogliono bene

Introduzione

In questa tesi verrà analizzata la *trasformazione di Laplace*, con grande interesse alle sue applicazioni. Tale operatore associa ad una funzione di variabile reale una funzione di variabile complessa e rientra nella categoria delle trasformate integrali: i suoi vantaggi più significativi sono legati al fatto che muta le equazioni differenziali lineari in equazioni algebriche, molto più semplici da risolvere. Anche la soluzione di alcune famose equazioni integrali è resa più semplice attraverso l'uso di questa trasformazione.

Il primo capitolo è dedicato ad essenziali richiami sulla derivabilità in senso complesso e sulla teoria delle *funzioni olomorfe*, con riguardo al teorema integrale di Cauchy, che è fondamentale per determinare l'antitrasformata. Nel secondo capitolo verrà trattata la trasformazione vera e propria, esaminando in dettaglio le sue caratteristiche principali e dimostrando i teoremi più importanti che la riguardano. Il terzo ed ultimo capitolo è invece dedicato alle applicazioni che questo strumento introdotto da Laplace ha avuto nella risoluzione di alcuni problemi di natura differenziale.

Per non appesantire troppo il capitolo iniziale, sono state incluse anche due brevi appendici finali: la prima cita alcune nozioni di topologia generale utilizzate nella Sezione 1.3 e nell'enunciato del teorema integrale di Cauchy, mentre la seconda contiene due dimostrazioni molto belle e costruttive sulle *1-forme differenziali* e la dimostrazione elementare del teorema di Stokes.

Indice

Introduzione	i
1 Richiami	1
1.1 Derivabilità in senso complesso	1
1.2 Funzioni olomorfe	8
1.3 Forme differenziali	15
1.4 Teoremi di Cauchy	22
1.5 Analiticità ed olomorfia	27
2 Trasformata di Laplace	29
2.1 Definizione e prime proprietà	29
2.2 Ascissa di convergenza	32
2.3 Risultati fondamentali	37
2.4 Antitrasformata	51
2.5 Esempi	61
2.5.1 Funzioni polinomiali	61
2.5.2 Funzioni trigonometriche	62
2.5.3 Funzioni esponenziali	64
2.5.4 Funzioni iperboliche	65
2.5.5 Funzioni varie	67
2.5.6 Calcolo di un'antitrasformata	70
2.6 Un'ulteriore proprietà	71
2.7 Tavole di trasformazione	72

3 Applicazioni	73
3.1 Un esempio introduttivo	73
3.2 Sistemi dinamici	76
3.2.1 Decadimento radioattivo	76
3.2.2 Circuiti RC	78
3.2.3 Circuiti RL	79
3.2.4 Circuiti RLC	81
3.2.5 Oscillatore armonico	84
3.3 Equazione integrale di Volterra	85
3.4 Equazione integrale di Abel	87
3.5 Sistemi di equazioni differenziali	89
A Spazi Connessi	91
B Dimostrazioni (Sezione 1.3)	93
Bibliografia	99
Ringraziamenti	101

Elenco delle figure

1.1	Teorema integrale di Cauchy	23
1.2	Dischi concentrici (teorema torinese di Cauchy)	25
2.1	Dominio di <i>convergenza uniforme</i> per $\mathcal{L}\{f\}$	45
2.2	Teorema di Bromwich	53
2.3	Successione di poligoni chiuse	55
2.4	Cammini chiusi nel campo complesso	58
3.1	Decadimento radioattivo	77
3.2	Circuito RC con generatore di tensione (costante)	78
3.3	Circuito RL con generatore di tensione (costante)	80
3.4	Circuito RLC con generatore di tensione (costante)	81
3.5	Oscillatore armonico semplice (molla)	84
A.1	Omotopia tra archi	92
A.2	Sottoinsieme di \mathbb{R}^2 non semplicemente connesso	92
B.1	Arco che collega i punti (x_0, y_0) e (x, y)	94
B.2	Rettangolo chiuso in disco aperto	95
B.3	Teorema di Stökes	97

Elenco delle tabelle

1.1	Derivate complesse fondamentali	7
1.2	Regole di derivazione complessa	7
2.1	Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace	72
2.2	Alcune trasformate fondamentali	72

Capitolo 1

Richiami

1.1 Derivabilità in senso complesso

Definizione 1.1. Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^n con $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione e sia $x_0 \in A$. Si dice che f è *differenziabile nel punto* x_0 se esistono un'applicazione lineare $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ed un opportuno intorno dell'origine in \mathbb{R}^n tali che, per ogni h appartenente a tale intorno valga:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T(h) + \|h\| \omega(h)$$

con $\omega(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$. Si dice semplicemente che una funzione f è *differenziabile* se tale risulta in ogni punto del suo dominio.

Una funzione differenziabile in un punto è quindi una funzione che, in un opportuno intorno del punto, può essere approssimata da una trasformazione lineare. Ricordo che se f è differenziabile in x_0 allora esistono e sono finiti i limiti dei rapporti incrementali calcolati lungo le direzioni individuate dai vettori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ e che, in particolare, la trasformazione lineare T è rappresentata nella suddetta base canonica di \mathbb{R}^n dalla matrice jacobiana di f calcolata in x_0^\dagger . Viceversa, se f ammette tutte le derivate parziali nel punto x_0 non è detto in generale che sia ivi differenziabile. Ad esempio, la funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x, y) := \sqrt{|xy|}$ è derivabile parzialmente

[†] le dimostrazioni si possono trovare nel libro [1] della bibliografia

sia rispetto a x che rispetto a y nel punto $(0, 0)$ ma non differenziabile, infatti:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0+t, 0) - \varphi(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t, 0) - \varphi(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) &:= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0, 0+t) - \varphi(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(0, t) - \varphi(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t} = 0\end{aligned}$$

e se, per assurdo, φ fosse effettivamente differenziabile nell'origine, dovrebbe esistere un intorno $U_{(0,0)}$ in \mathbb{R}^2 tale che, $\forall h = (h_1, h_2) \in U_{(0,0)}$ risulti:

$$\sqrt{|h_1 h_2|} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \omega(h_1, h_2) \quad \text{con} \quad \omega(h_1, h_2) \xrightarrow{h_1, h_2 \rightarrow 0} 0 \quad (1.1)$$

ma questa richiesta non si può soddisfare in alcun modo poiché non può esistere nessun intorno dell'origine in \mathbb{R}^2 su cui la (1.1) sia verificata, infatti l'infinitesimo ω su tutto l'ipotetico intorno individuato, esclusa al più la coppia $(0, 0)$, resterebbe determinato come:

$$\omega(h_1, h_2) = \sqrt{\frac{|h_1 h_2|}{h_1^2 + h_2^2}}$$

d'altra parte, qualsiasi intorno dell'origine in \mathbb{R}^2 contiene coppie del tipo $(\epsilon, 0)$ e coppie del tipo (ϵ, ϵ) con ϵ abbastanza piccolo ed in relazione a tali coppie ω avrebbe due comportamenti ben diversi:

$$\begin{aligned}\omega(\epsilon, 0) &= 0 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \\ \omega(\epsilon, \epsilon) &= \frac{|\epsilon|}{\sqrt{2}|\epsilon|} \stackrel{(\epsilon \neq 0)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0\end{aligned}$$

Un'eventuale scelta di $\omega(h_1, h_2) \equiv 0$ renderebbe inconsistente l'equazione (1.1), per cui in definitiva la funzione $\varphi(x, y) = \sqrt{|xy|}$ non è differenziabile nell'origine, pur ammettendo entrambe le derivate parziali rispetto ad x e y .

Osservazione 1. Si osservi che se una funzione è differenziabile in un dato punto del suo dominio, ivi è anche necessariamente continua e la giustificazione di questo semplice risultato segue direttamente dalla definizione iniziale e dalla continuità delle trasformazioni lineari.

Ricordo infine che una condizione sufficiente che garantisca la differenziabilità di una funzione è l'essere di classe \mathcal{C}^1 . In particolare, se f è continua con derivata prima continua intorno al punto x_0 allora sicuramente risulta differenziabile in x_0 e, globalmente, è sufficiente avere una funzione di classe \mathcal{C}^1 sul dominio di definizione per essere certi della sua differenziabilità.[†]

Essendo \mathbb{C} un campo con una topologia metrica (topologia euclidea), il processo di derivazione che si definisce per funzioni di variabile reale si può estendere naturalmente anche alle funzioni di variabile complessa:

□ **Definizione 1.2.** Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $A \neq \emptyset$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Si dice che f ha *derivata complessa* in $z_0 \in A$ se esiste il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \quad (1.2)$$

ed in questo caso il valore del limite (1.2) viene comunemente indicato con il simbolo $f'(z_0)$ oppure con il simbolo $Df(z_0)$.

Posto $z = z_0 + h$ abbiamo che $z \rightarrow z_0$ se e solo se $h \rightarrow 0$, per cui possiamo esprimere il limite (1.2) anche come:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (1.3)$$

quindi, in definitiva:

$$f'(z_0) = Df(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad (h \in \mathbb{C})$$

Osservazione 2. Se f è derivabile in senso complesso nel punto z_0 allora è anche necessariamente continua in z_0 , infatti dall'esistenza del limite (1.2) ricaviamo che, almeno in un intorno del punto z_0 vale l'uguaglianza:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0)$$

pertanto

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0) \right) = f(z_0)$$

[†] si veda il libro [1] della bibliografia per la dimostrazione di questo fatto

Esempio 1.1. Alcuni esempi importanti di derivazione complessa:[†]

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z$ è derivabile in senso complesso in ogni punto:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h-z}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ ammette derivata complessa in ogni punto:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[z^n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} z^{n-j} h^j - z^n \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[h \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-1} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-1} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} n z^{n-1} + \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-1} = n z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

- $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$ non ammette derivata complessa in alcun punto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{z} + \bar{h} - \bar{z}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h}$$

ma tale limite, chiaramente indipendente da z , non è determinato, infatti quando il numero complesso h è del tipo $(\lambda, 0) \equiv \lambda$ si ottiene $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\lambda} = 1$, mentre quando il numero complesso h è del tipo $(0, \lambda) \equiv i\lambda$ si ottiene $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-i\lambda}{i\lambda} = -1 \neq 1$.

A seguito degli esempi visti, si deduce che la sola differenziabilità non permette di concludere nulla riguardo l'esistenza della derivata complessa, infatti tutte le funzioni che abbiamo esaminato sono addirittura di classe \mathcal{C}^∞ dunque sicuramente differenziabili come funzioni definite su un aperto di \mathbb{R}^2 a valori in \mathbb{R}^2 , ma solo le prime due sono anche derivabili in senso complesso. Per essere sicuri che la derivata complessa esista, c'è un'ulteriore condizione che deve essere verificata, come dichiara il teorema seguente:

[†]userò in questi esempi il limite del rapporto incrementale espresso nella forma (1.3)

Teorema 1.1.1 (Cauchy-Riemann).

Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione e $z_0 \in A$.
 f ha derivata complessa in $z_0 \iff f$ è differenziabile in z_0 e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \quad (1.4)$$

L'equazione (1.4) è universalmente chiamata equazione di *Cauchy-Riemann*.

Dimostrazione. \Rightarrow Per ipotesi, esiste $\alpha \in \mathbb{C}$ tale che:

$$\alpha = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \alpha =: \omega(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Ora, con semplici passaggi algebrici si ricava che:

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \alpha h + \omega(h) h \quad \text{con} \quad \omega(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Posto $\alpha = a + ib$, $h = h_1 + ih_2$ e proseguendo i calcoli:

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) - f(z_0) &= (a + ib)(h_1 + ih_2) + \omega(h) h = \\ &= ah_1 - bh_2 + i(bh_1 + ah_2) + |h| \frac{\omega(h) h}{|h|} = \\ &= (ah_1 - bh_2, bh_1 + ah_2) + |h| \frac{\omega(h) h}{|h|} = \\ &= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h| \frac{\omega(h) h}{|h|} \quad \text{con} \quad \frac{\omega(h) h}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

quindi f risulta differenziabile in z_0 con matrice jacobiana data da:

$$J_f(z_0) := \dagger \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

per cui, in definitiva:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = (-b, a) \equiv -b + ia = i(a + ib) \equiv i(a, b) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

[†] $f = f_1 + if_2 \equiv (f_1, f_2)$

⊞ Per ipotesi la funzione f è differenziabile in z_0 e vale l'equazione (1.4). Sia $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che approssima f intorno al punto z_0 come indicato dalla **Definizione 1.1**. Considero il rapporto incrementale di f centrato in z_0 espresso nella forma (1.3) e mostro che ha limite per $h \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{T(h) + |h|\omega(h)}{h} = \frac{J_f(z_0) \times h + |h|\omega(h)}{h} = \dagger \\ &= \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{h} + \frac{|h|\omega(h)}{h} \quad \text{con} \quad \frac{|h|\omega(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Il fatto che f sia differenziabile in z_0 assicura che in tale punto esistano entrambe le derivate rispetto alle direzioni degli assi cartesiani ed inoltre l'equazione (1.4) stabilisce il tipo di legame che le correla. Denotata dunque $\partial_x f(z_0) = a + ib$ si ha di conseguenza $\partial_y f(z_0) = i \partial_x f(z_0) = i(a + ib) = -b + ia$ pertanto, riprendendo i calcoli da dove sono stati interrotti:

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \frac{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}{h} + \frac{|h|\omega(h)}{h} = \\ &= \frac{(ah_1 - bh_2, bh_1 + ah_2)}{h} + \frac{|h|\omega(h)}{h} = \frac{(a + ib)(h_1 + ih_2)}{h} + \frac{|h|\omega(h)}{h} = \\ &= \frac{(a + ib)h}{h} + \frac{|h|\omega(h)}{h} = * a + ib + \frac{|h|\omega(h)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} a + ib \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

□

Osservazione 3. Nelle stesse notazioni del teorema di *Cauchy-Riemann*, se la funzione f ha derivata complessa in z_0 allora vale in particolare che:

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

e la motivazione di questa importante uguaglianza è evidentemente contenuta nella dimostrazione della prima implicazione del teorema precedente.

† con il simbolo \times ho indicato il prodotto "righe per colonne"

* $h \neq 0$

Nel caso complesso, la funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche vengono definite attraverso una serie di potenze:

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Le definizioni date valgono per ogni $z \in \mathbb{C}$ infatti si può provare che i raggi di convergenza delle serie precedenti sono tutti uguali a $+\infty$.

Riporto, senza dimostrazioni, una tabella con alcune importanti derivate complesse, che vanno ad integrare i tre esempi visti, ed una tabella con le basilari regole di derivazione sul campo complesso:

Funzione	Dominio di definizione	Derivata complessa
$f(z) \equiv \text{cost}$	\mathbb{C}	0
$f(z) = z$	\mathbb{C}	1
$f(z) = z^n$	\mathbb{C}	nz^{n-1}
$f(z) = \frac{1}{z}$	$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$	$-\frac{1}{z^2}$
$f(z) = e^z$	\mathbb{C}	e^z
$f(z) = \cos z$	\mathbb{C}	$-\sin z$
$f(z) = \sin z$	\mathbb{C}	$\cos z$

Tabella 1.1: Derivate complesse fondamentali

Funzione	Regola di derivazione
$c f(z)$	$c f'(z)$
$f(z) + g(z)$	$f'(z) + g'(z)$
$f(z)g(z)$	$f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
$f(z)g(z)^{-1}$	$(f'(z)g(z) - f(z)g'(z))[g(z)]^{-2}$
$g(f(z))$	$g'(f(z)) f'(z)$

Tabella 1.2: Regole di derivazione complessa

1.2 Funzioni olomorfe

! **Definizione 1.3.** Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $A \neq \emptyset$, sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione e sia infine $z_0 \in A$. Si dice che f è *olomorfa in z_0* se in tale punto è derivabile in senso complesso, ovvero se $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$. Si dice semplicemente che f è **olomorfa** se tale risulta in ogni punto del suo dominio di definizione.

Proposizione 1.2.1.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa differenziabile.

Posto $f = f_1 + if_2 \equiv (f_1, f_2)$, vale il seguente fatto:

$$f \text{ è olomorfa} \iff \underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} \quad e \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\frac{\partial f_1}{\partial y}}_{\text{equazioni di omogeneità}}$$

Dimostrazione. La differenziabilità viene già assunta come ipotesi principale, quindi, per il teorema di *Cauchy-Riemann*, f è olomorfa se e solo se l'equazione (1.4) è verificata punto per punto, ovvero se e solo se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \quad \forall z_0 \in A$$

Utilizzando la notazione indicata, tale condizione si può tradurre in due differenti richieste sulle componenti della funzione, infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \quad \forall z_0 \in A \iff \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}$$

ora, passando in forma algebrica:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \iff \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} + i \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = 0^\dagger$$

e l'ultima uguaglianza sussiste chiaramente se e solo se:

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) = 0 \quad e \quad \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) = 0$$

dalle quali si ricavano immediatamente le due equazioni di omogeneità. \square

[†] $i^2 = -1$ dunque $i = -\frac{1}{i}$

Corollario 1.2.2. *Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Vale il seguente risultato:*

$$|f'(z_0)|^2 = \det [J_f(z_0)] \quad \forall z_0 \in A$$

Dimostrazione. Poniamo come sempre $f = f_1 + if_2 \equiv (f_1, f_2)$, prendiamo un punto $z_0 \in A$ ad arbitrio e studiamo il determinante della matrice jacobiana di f calcolata in z_0 , sfruttando le equazioni di omogeneità:

$$\begin{aligned} \det [J_f(z_0)] &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) & -\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) \end{pmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) \right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \right)^2 = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}(z_0), \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \right\rangle = \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \right|^2 = |f'(z_0)|^2 \end{aligned}$$

□

Esempio 1.2. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f(z) = 3z^2$. La funzione f è olomorfa con $f'(z) = 6z$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Posto $z = x + iy \equiv (x, y)$ abbiamo che:

$$|f'(z)|^2 = |6(x, y)|^2 = 36(x^2 + y^2)$$

Ora, $f(z) = 3z^2 = (3x^2 - 3y^2, 6xy)$ quindi:

$$\det [J_f(z)] = \det \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ -6y & 6x \end{pmatrix} = 36(x^2 + y^2)$$

Corollario 1.2.3. *Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto e connesso del campo complesso. Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, di classe \mathcal{C}^1 ed a valori reali è necessariamente costante.*

Dimostrazione. Si ponga $f = f_1 + if_2 \equiv (f_1, f_2)$ con $f_2 \equiv 0$ per ipotesi. Essendo f olomorfa, valgono le equazioni di omogeneità, quindi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} = 0$$

per cui $\operatorname{Re}(f)$ è costante su tutto A (connesso) $\Rightarrow f$ costante.[†] □

[†] se A non fosse connesso sarebbe esprimibile come unione di aperti disgiunti sui quali f potrebbe avere valori diversi (pur restando costante, ma solo su ogni “pezzo” di A)

Si ricordi che, data una funzione differenziabile, si definisce *differenziale* di f l'espressione formale

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1.5)$$

Posto $z = x + iy \equiv (x, y)$ e prendendo in esame le due funzioni complesse $f(z) = z$ e $g(z) = \bar{z}$, possiamo fare le seguenti considerazioni:

$$dz := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (1, 0) dx + (0, 1) dy = dx + i dy$$

$$d\bar{z} := \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy = (1, 0) dx + (0, -1) dy = dx - i dy$$

pertanto, sommando e sottraendo membro a membro le due precedenti uguaglianze, è possibile esprimere dx e dy in funzione di dz e $d\bar{z}$:

$$dx = \frac{1}{2} (dz + d\bar{z}) \quad dy = \frac{1}{2i} (dz - d\bar{z})$$

e sfruttando queste ultime uguaglianze nella (1.5) si ottiene:

$$\begin{aligned} df &:= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} (dz + d\bar{z}) + \frac{1}{2i} \frac{\partial f}{\partial y} (dz - d\bar{z}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z} \end{aligned}$$

Tutto il discorso fatto giustifica distintamente la seguente definizione:

Definizione 1.4. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione differenziabile definita su un sottoinsieme aperto del campo complesso. Si pone:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\text{derivata formale in } z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{\text{derivata formale in } \bar{z}}$$

Come conseguenza, si può ora avere un'altra bella espressione formale per il *differenziale* di una funzione complessa differenziabile:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad (1.6)$$

Osservazione 4. Le derivate formali in z e \bar{z} di una funzione complessa differenziabile sono a loro volta funzioni complesse e la loro definizione prescinde dal fatto che l'equazione (1.4) sia verificata, quindi esistono e sono ben definite anche per le funzioni non olomorfe. Possiamo dunque scrivere:

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \quad \forall f : A \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \text{ differenziabile}$$

Osservazione 5. Una funzione complessa differenziabile $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa se e solo se la sua derivata formale in \bar{z} è identicamente nulla su A ed in questo caso derivata complessa e derivata formale in z coincidono, infatti:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

e per l'*Osservazione 3* sappiamo che:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = f'(z_0) \quad \forall z_0 \in A$$

È interessante analizzare come si comportano le derivate formali con la relazione di coniugio sul campo complesso:

Proposizione 1.2.4.

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa differenziabile con A aperto non vuoto in \mathbb{C} . Valgono le seguenti due uguaglianze:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad (1.7)$$

Dimostrazione. Indichiamo $f = f_1 + if_2$ e riportiamo per semplicità le definizioni delle derivate formali:

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Per mostrare la prima relazione si procede in questo modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right] \end{aligned}$$

e, parallelamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - i \frac{\partial f_2}{\partial x} - i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

Riassumendo, abbiamo ottenuto che:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right] \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial y} - i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

ed a questo punto dovrebbe essere chiara la validità della prima uguaglianza.

Per provare la seconda relazione è sufficiente analizzare il suo primo membro:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} - i \frac{\partial f_2}{\partial x} + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

d'altra parte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + i \frac{\partial f_2}{\partial x} - i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} + i \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} - i \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) \right]\end{aligned}$$

ed ora dovrebbe essere chiara anche la validità della seconda uguaglianza. \square

Proposizione 1.2.5.

Siano $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni complesse differenziabili con domini aperti non vuoti in \mathbb{C} . Si supponga che $f(A) \subseteq B$. Allora[†]:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \quad e \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Dimostrazione. Si veda il libro [2] della bibliografia. \square

[†]riferisco la funzione f alla variabile complessa z e la funzione g alla variabile w

Corollario 1.2.6. *La composizione di funzioni ologomorfe è ologomorfa.*

Dimostrazione. Nelle stesse ipotesi e notazioni della proposizione precedente, se f e g sono entrambe ologomorfe allora:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} = 0$$

quindi grazie alla seconda delle due uguaglianze deduciamo che:

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \Rightarrow \quad g \circ f \text{ ologomorfa}$$

□

In questo primo capitolo dedicato ad alcuni richiami sulla teoria delle funzioni ologomorfe, non posso escludere un risultato di fondamentale importanza:

Teorema 1.2.7 (Invertibilità locale).

Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $A \neq \emptyset$, e sia $z_0 \in A$. Se la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ è ologomorfa in z_0 con $f'(z_0) \neq 0$ allora f è localmente invertibile. Denotata con g l'inversa locale di f , risulta g ologomorfa nel punto $f(z_0)$ e, in particolare, vale la seguente relazione tra le derivate complesse:

$$g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Dimostrazione. Poiché per ipotesi $f'(z_0) \neq 0$, per quanto dimostrato nel **Corollario 1.2.2**, sicuramente $\det [J_f(z_0)] \neq 0$ e quindi f è localmente invertibile con inversa locale *differenziabile*. Più precisamente, esiste un intorno U_{z_0} di z_0 in A ed esiste $V_{f(z_0)}$ intorno di $f(z_0)$ in \mathbb{C} tali che $f : U_{z_0} \rightarrow V_{f(z_0)}$ sia biunivoca. Chiamata g l'inversa locale di f , resta da provare che g è ologomorfa in $f(z_0)$ e vale la relazione sulle derivate complesse che ho specificato. Consideriamo la derivata formale della funzione $g \circ f$ in \bar{z} (è perfettamente lecito in quanto $g \circ f$ è sicuramente *differenziabile*):

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \dagger \underbrace{\frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}_{=0} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \quad (1.8)$$

† riferisco g alla variabile complessa w e sfrutto le **Proposizioni 1.2.5** e **1.2.4**.

D'altra parte, la funzione $g \circ f$ ristretta all'intorno U_{z_0} è l'identità, pertanto, posto come al solito $z = x + iy \equiv (x, y)$, abbiamo che:

$$g \circ f(x, y) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in U_{z_0}$$

per cui il valore della derivata formale che stiamo considerando può essere calcolato esplicitamente sull'intorno U_{z_0} :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left((1, 0) - \frac{1}{i} \overbrace{(0, 1)}^i \right) = 0$$

Utilizzando quanto appena ottenuto nella (1.8) si ricava che:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z_0)) \underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}(z_0)}_{\neq 0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z_0)) = 0 \quad \Rightarrow \quad g \text{ olomorfa in } f(z_0)$$

Consideriamo adesso la derivata formale della funzione $g \circ f$ in z , sfruttando nuovamente la **Proposizione 1.2.5**:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial \bar{w}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \quad (1.9)$$

e, come prima, determiniamo numericamente tale derivata sull'intorno U_{z_0} , dove l'applicazione $g \circ f$ è l'identità:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial(g \circ f)}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left((1, 0) + \frac{1}{i} \overbrace{(0, 1)}^i \right) = 1$$

Ora, avendo già provato che g è olomorfa in $f(z_0)$ sappiamo che per tale funzione derivata complessa e derivata formale in w coincidono ed inoltre:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{w}}(f(z_0)) = 0$$

pertanto, sfruttando queste ultime due uguaglianze nella (1.9) si ha:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z}(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

ed essa è la relazione tra le derivate complesse che volevamo dimostrare. \square

1.3 Forme differenziali

In questa sezione richiamerò le definizioni ed i risultati sostanziali sulle *1-forme differenziali*, entità di fondamentale importanza in tantissimi settori dell'analisi matematica ed in particolare nell'analisi complessa, come si vedrà dimostrando il teorema integrale di Cauchy, oggetto della prossima sezione.

Definizione 1.5. Si chiama *curva differenziabile* un'applicazione $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ con I intervallo reale e con entrambe le componenti di classe \mathcal{C}^1 su tutto I .

Definizione 1.6. Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 , $A \neq \emptyset$. Si definisce *1-forma differenziale* l'espressione formale:

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

dove P e Q sono funzioni complesse definite su A . Se ambedue le funzioni P e Q sono di classe \mathcal{C}^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) oppure analitiche, si dice che ω è, rispettivamente, di classe \mathcal{C}^k oppure analitica. Sotto l'ipotesi che ω sia almeno continua, data una *curva differenziabile* $\gamma : [a, b] \rightarrow A^\dagger$ si definisce integrale di ω lungo la curva γ la quantità seguente:

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b [P(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + Q(\gamma(t)) \gamma_2'(t)] dt$$

essendo γ_1 e γ_2 le componenti della curva, ovvero $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ $t \in I$.

Definizione 1.7. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subseteq \mathbb{R}^2$ una *curva differenziabile*. Si dice che γ è di classe \mathcal{C}^1 a tratti se è continua ed esiste una decomposizione finita

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

dell'intervallo $[a, b]$ tale per cui $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{C}^1$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$. Sotto tali ipotesi, data una *1-forma differenziale* ω continua su A , si pone:

$$\int_{\gamma} \omega := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} \omega$$

essendo γ_i la restrizione della curva γ al sottointervallo chiuso $[x_i, x_{i+1}]$.

[†] la traccia della curva deve essere contenuta in A affinché la definizione abbia senso.

Definizione 1.8. Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 , $A \neq \emptyset$, e sia F una funzione complessa di classe \mathcal{C}^1 definita su A . Come già ricordato nella (1.5), si definisce *differenziale* di F l'espressione formale:

$$dF := \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$$

Osservazione 6. Con il nuovo linguaggio introdotto, il *differenziale* di una funzione risulta essere proprio una *1-forma differenziale* e la richiesta sulla regolarità di F serve per essere sicuri che dF sia almeno continuo, quindi integrabile su una qualsiasi *curva differenziabile* del suo dominio.

Teorema 1.3.1.

Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 e sia $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione di classe \mathcal{C}^1 . Data una curva differenziabile $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ risulta:

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \quad (1.10)$$

La relazione (1.10) sussiste anche se la curva γ è di classe \mathcal{C}^1 a tratti.

Dimostrazione. Prima di tutto, dimostro la (1.10) per le curve *differenziabili*: posto $\gamma \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$, è sufficiente applicare la **Definizione 1.6** e ricordare il teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dF &= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(\gamma(t)) \gamma_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(\gamma(t)) \gamma_2'(t) \right] dt = \int_a^b (F \circ \gamma)' dt = \\ &= \int_a^b \operatorname{Re}(F \circ \gamma)' dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(F \circ \gamma)' dt = \\ &= \left[(F \circ \gamma)_1(t) \right]_{t=a}^{t=b} + i \left[(F \circ \gamma)_2(t) \right]_{t=a}^{t=b} = \\ &= F_1(\gamma(b)) - F_1(\gamma(a)) + i F_2(\gamma(b)) - i F_2(\gamma(a)) = \\ &= \underbrace{[F_1(\gamma(b)) + i F_2(\gamma(b))]}_{F(\gamma(b))} - \underbrace{[F_1(\gamma(a)) + i F_2(\gamma(a))]}_{F(\gamma(a))} \end{aligned}$$

per cui la prima parte del teorema è provata. Per dimostrare che la (1.10) vale anche per curve regolari a tratti, si sfrutta quanto appena visto applicando la **Definizione 1.7**: infatti, presa una scomposizione finita dell'intervallo $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

tale per cui $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{C}^1$ per ogni $i = 0, 1, \dots, n-1$, si ha:

$$\int_{\gamma} dF := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} dF \stackrel{th.}{=} \sum_{i=0}^{n-1} [F(\gamma(x_{i+1})) - F(\gamma(x_i))] = F(\gamma(x_n)) - F(\gamma(x_0))$$

infatti la sommatoria da calcolare è semplicemente una somma telescopica in cui si semplificano a due a due tutti i termini tranne quelli relativi all'ultimo ed al primo punto della scomposizione finita dell'intervallo $[a, b]$. \square

Corollario 1.3.2. *Nelle medesime ipotesi e notazioni del teorema precedente, valgono i seguenti fatti:*

- se γ è una curva chiusa, ovvero se $\gamma(a) = \gamma(b)$, allora $\int_{\gamma} dF = 0$
- se A è connesso e $dF \equiv 0$, allora F è costante su A

Dimostrazione. La prima implicazione è ovvia, infatti se $\gamma(a) = \gamma(b)$ allora:

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0$$

La seconda implicazione è invece meno immediata ma comunque semplice da dimostrare. Sia $(x_0, y_0) \in A$ scelto ad arbitrio; poiché per ipotesi A è connesso (A aperto), comunque prenda un altro punto $(x, y) \in A$ esiste una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ di classe \mathcal{C}^1 a tratti tale che $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x, y)^\dagger$. Integrando il *differenziale* di F lungo tale curva otteniamo:

$$\int_{\gamma} dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(x, y) - F(x_0, y_0) = 0$$

infatti per ipotesi $dF \equiv 0$, dunque anche l'integrale che abbiamo calcolato deve essere nullo. Ne segue che $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ per ogni $(x, y) \in A$. \square

[†] negli aperti di \mathbb{R}^2 la connessione equivale alla connessione per archi

È stato precedentemente osservato che il *differenziale* di una funzione complessa di classe \mathcal{C}^1 è in particolare una *1-forma differenziale* continua. Questo fatto stimola naturalmente a porsi la seguente domanda: data una qualsiasi *1-forma differenziale* continua, esiste una funzione complessa F di classe \mathcal{C}^1 di cui sia il *differenziale*?

Definizione 1.9. Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 e sia inoltre ω una *1-forma differenziale* continua su A . Si dice che ω è **esatta** se esiste una funzione complessa F di classe \mathcal{C}^1 definita su tutto A tale per cui $dF = \omega$. In questo caso, F viene detta *primitiva* di ω .

I prossimi due teoremi assegnano una caratterizzazione delle *1-forme differenziali* esatte, ma richiedono come ipotesi fondamentale un dominio connesso. Le dimostrazioni sono riportate nella seconda appendice finale.

Teorema 1.3.3.

Sia $D \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto e connesso di \mathbb{R}^2 e sia ω una *1-forma differenziale* continua su D . La forma ω è **esatta** se e solo se, comunque si prenda una curva chiusa $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ regolare a tratti, vale:

$$\int_{\gamma} \omega = 0$$

Teorema 1.3.4.

Sia $D \neq \emptyset$ un disco aperto di \mathbb{R}^2 e sia ω una *1-forma differenziale* continua su D . La forma ω è **esatta** se e solo se, comunque si prenda un rettangolo $\mathcal{R} \subseteq D$, chiuso e con i lati paralleli agli assi, vale:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = 0$$

Definizione 1.10. Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 e sia inoltre $\omega = P dx + Q dy$ una *1-forma differenziale* di classe \mathcal{C}^1 su A^\dagger . Si dice che ω è **chiusa** se le derivate parziali incrociate delle componenti sono uguali, cioè:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{1.11}$$

[†] viene richiesta questa regolarità perché si ha bisogno di poter derivare le componenti

L'importanza della definizione precedente è spiegata dal prossimo teorema:

Teorema 1.3.5 (Stokes).

Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 , sia $\mathcal{R} \subseteq A$ un rettangolo chiuso con i lati paralleli agli assi e sia infine $\omega = P dx + Q dy$ una 1-forma differenziale di classe \mathcal{C}^1 su A . Risulta:

$$\int_{\partial \mathcal{R}} \omega = \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Dimostrazione. È riportata dettagliatamente nell'Appendice B. □

Corollario 1.3.6. Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 e sia data una 1-forma differenziale ω di classe \mathcal{C}^1 su A . Valgono le seguenti implicazioni:

1. se ω è esatta, allora ω è chiusa
2. se A è un disco e ω è chiusa, allora ω è esatta

Dimostrazione. Si ponga, per fissare le idee, $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

1. se ω è esatta allora, per definizione, esiste una funzione complessa F di classe \mathcal{C}^2 su tutto A tale che $dF = \omega$, ovvero tale da aversi $\partial_x F = P$ e $\partial_y F = Q$. Ora, P e Q sono per ipotesi derivabili con continuità, quindi:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Grazie al teorema di Schwartz[†] si può concludere che la relazione (1.11) è verificata e quindi in definitiva la forma differenziale ω è chiusa.

2. Sia $R \subseteq A$ un rettangolo chiuso con i lati paralleli agli assi, scelto arbitrariamente. Per il teorema di Stokes:

$$\int_{\partial R} \omega = \iint_R \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)}_{=0} dx dy = 0$$

dunque, applicando il **Teorema 1.3.4**, si deduce che ω è esatta.* □

[†] si veda il libro [1] della bibliografia per enunciato e dimostrazione

* si osservi che è il **Teorema 1.3.4** a richiedere l'ipotesi che A sia un disco (aperto)

Il secondo punto del corollario precedente può essere in realtà generalizzato ad una classe di insiemi molto più ampia dei soli dischi aperti:

Teorema 1.3.7.

Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso di \mathbb{R}^2 con ω una 1-forma differenziale di classe C^1 su A . Vale il seguente risultato:

$$\omega \text{ è esatta su } A \iff \omega \text{ è chiusa in } A$$

Dimostrazione. È contenuta in entrambi i libri [1] e [2] della bibliografia. \square

La nozione di esattezza per una *forma differenziale* che è stata data nella **Definizione 1.9** è molto onerosa, infatti si richiede l'esistenza di una primitiva definita globalmente su tutto l'aperto A e per poter passare dalla chiusura all'esattezza è necessario avere come insieme di lavoro un disco aperto o, più in generale, un insieme semplicemente connesso. Per poter utilizzare la chiusura in modo più stringente (cioè senza particolari proprietà topologiche sull'insieme A) si deve introdurre la nozione di *locale esattezza*:

Definizione 1.11. Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 e sia ω una 1-forma differenziale continua su A . Si dice che ω è **localmente esatta** se in ogni punto di A esiste un suo intorno su cui la restrizione di ω sia *esatta*.

Teorema 1.3.8.

Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{R}^2 e sia ω una 1-forma differenziale di classe C^1 su A . Vale il seguente risultato:

$$\omega \text{ è localmente esatta} \iff \omega \text{ è chiusa in } A$$

Dimostrazione. Si veda il libro [2] della bibliografia. \square

Osservazione 7. Il **Teorema 1.3.8** non richiede nessuna ipotesi particolare sull'insieme A , ma solo il fatto che sia un aperto di \mathbb{R}^2 . Questo fatto consente di sfruttare la nozione di *chiusura* in modo assai più potente rispetto al **Teorema 1.3.7** (si noti che verificare se una 1-forma differenziale sia chiusa o meno richiede solo il calcolo di due derivate parziali, quindi è una verifica abbastanza semplice paragonata a quella che si dovrebbe fare per constatare se è localmente esatta oppure, ancora peggio, esatta).

Teorema 1.3.9.

Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $A \neq \emptyset$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa di classe \mathcal{C}^1 . La forma differenziale $f(z) dz$ è chiusa in A .

Dimostrazione. Posto $z = x + iy \equiv (x, y)$ si ha:

$$f(z) dz = \underbrace{f(x, y)}_{P(x,y)} dx + \underbrace{if(x, y)}_{Q(x,y)} dy$$

pertanto su tutto l'insieme A vale che $\partial_x Q = i \partial_x f$ e $\partial_y P = \partial_y f$ quindi, essendo f olomorfa, grazie alla (1.4) si ricava che $\partial_x Q = \partial_y P$. \square

Corollario 1.3.10. Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso del campo complesso e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa di classe \mathcal{C}^1 . Sotto queste ipotesi, esiste sicuramente una funzione olomorfa $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $F'(z) = f(z) \forall z \in A$.

Dimostrazione. Per il teorema precedente, la forma differenziale $f(z) dz$ è chiusa, dunque esatta su A essendo per ipotesi un insieme *semplicemente connesso*. Di conseguenza, esiste un funzione complessa $F : A \rightarrow \mathbb{C}$ tale da aversi $dF = f(z) dz$ ovvero tale per cui:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial z} dz + \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = f(z) dz \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial z} = f \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$$

e dall'*Osservazione 3* segue immediatamente la tesi. \square

In realtà, nei due risultati precedenti, l'ipotesi sulla continuità della derivata complessa di f non è indispensabile, ma semplifica molto le dimostrazioni. Si può provare che è sufficiente la sola *olomorfia* per avere la chiusura della forma $f(z) dz$ in A e questa è una proprietà molto importante delle funzioni *olomorfe* (per la dimostrazione si veda il libro [2] della bibliografia).

Osservazione 8. Nel **Corollario 1.3.10**, se non viene supposto che f sia *olomorfa* non possiamo essere certi a priori che esista una primitiva della forma $f(z) dz$. Tuttavia, con una dimostrazione analoga e sotto la sola ipotesi che la funzione f sia continua, si posso caratterizzare le eventuali primitive della forma $f(z) dz$ come quelle funzioni *olomorfe* F tali che $F' = f$.

1.4 Teoremi di Cauchy

Questa sezione è dedicata a due teoremi cardine dell'analisi complessa, dovuti al matematico *Augustin-Louis Cauchy*.

Definizione 1.12. Sia $A \neq \emptyset$ un aperto di \mathbb{C} e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa. Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ differenziabile, si definisce integrale di f lungo γ la quantità seguente:

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

dove con il simbolo \cdot viene indicato il prodotto interno di \mathbb{C} . La definizione si estende naturalmente anche alle curve regolari a tratti, in modo analogo a quanto visto nella **Definizione 1.7**.

Posto $f = f_1 + if_2 \equiv (f_1, f_2)$ e $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 \equiv (\gamma_1, \gamma_2)$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &:= \int_a^b \left(f_1(\gamma(t)) + if_2(\gamma(t)) \right) \cdot \left(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t) \right) dt = \\ &= \int_a^b \left(f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) - f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right) dt + \\ &\quad + i \int_a^b \left(f_1(\gamma(t))\gamma_2'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_1'(t) \right) dt = \\ &= \int_a^b \left[\left(f_1(\gamma(t)) + if_2(\gamma(t)) \right) \gamma_1'(t) + i \left(f_1(\gamma(t)) + if_2(\gamma(t)) \right) \gamma_2'(t) \right] dt = \\ &= \int_a^b \left[f(\gamma(t))\gamma_1'(t) + if(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right] dt \end{aligned}$$

pertanto, posto $P = f$, $Q = if$ e presa la 1-forma differenziale ω data da:

$$\omega = P dx + Q dy,$$

abbiamo che l'integrale della **Definizione 1.12** si può esprimere come:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \omega$$

[†] leggeremo d'ora in poi $f(z) dz$ come una 1-forma differenziale complessa

Lemma 1.4.1. (*Cauchy - Goursat*)

Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso di \mathbb{C} e sia infine $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Comunque si prenda una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ chiusa e regolare a tratti, vale che:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Dimostrazione. Si veda il libro [2] della bibliografia. \square

! **Teorema 1.4.2** (teorema integrale di Cauchy).

Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto e semplicemente connesso del campo complesso, sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia γ una curva regolare a tratti, chiusa in A . Si prenda infine $a \in A$ e si assuma che γ non passi per il punto a . Vale la seguente uguaglianza:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = I(\gamma, a) f(a) \quad (1.12)$$

essendo $I(\gamma, a)$ l'indice del cammino γ rispetto al punto a .

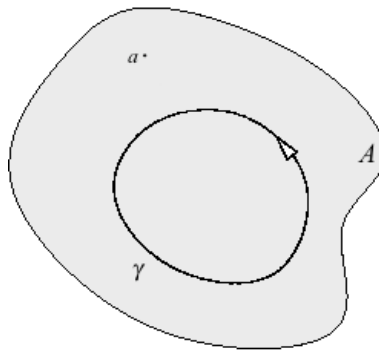


Figura 1.1: Teorema integrale di Cauchy

Dimostrazione. Si consideri la funzione ausiliaria $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ così definita:

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} & \text{se } z \neq a \\ f'(a) & \text{se } z = a \end{cases}$$

In termini semplici, la funzione φ restituisce in a la derivata complessa di f ivi calcolata, mentre in ogni altro punto diverso da a restituisce il rapporto incrementale della f centrato in a . Ora, sicuramente sull'insieme $A \setminus \{a\}$ la funzione φ è *olomorfa* per le ipotesi sulla f , ma una semplice osservazione permette di concludere che lo è anche nel punto a , infatti:

$$\frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z - a} = \frac{1}{z - a} \underbrace{\left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right)}_{o(z-a)} \xrightarrow{z \rightarrow a} 0$$

dunque φ è *olomorfa* su tutto A e per il lemma precedente abbiamo che:

$$\oint_{\gamma} \varphi(z) dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = 0^{\dagger}$$

d'altra parte:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} dz = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz - f(a) \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

pertanto:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = f(a) \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - a} = f(a)(2\pi i)I(\gamma, a)$$

□

Corollario 1.4.3. *Nelle stesse ipotesi e notazioni del teorema precedente, se la curva γ è semplice come curva chiusa (cioè iniettiva a meno degli estremi), allora:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz \quad (1.13)$$

Dimostrazione. È immediata, infatti se γ è semplice allora $I(\gamma, a) = 1$. □

Osservazione 9. Le uguaglianze (1.12) e (1.13), chiamate *formule integrali di Cauchy*, mettono in relazione il valore di una funzione *olomorfa* in un punto con un integrale di linea lungo una curva chiusa. Da esse discendono le proprietà più importanti delle funzioni *olomorfe*, come l'*analiticità*, il teorema del massimo modulo, della media integrale ed il teorema di *Liouville*.

[†] per ipotesi, il cammino γ non passa per il punto a

! **Teorema 1.4.4** (teorema torinese di Cauchy).

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $f : B(z_0, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Se f è olomorfa, allora è sviluppabile in serie di potenze su ogni disco di centro z_0 e raggio $r < \rho$.

Dimostrazione. Si fissi arbitrariamente $r > 0$ con $r < \rho$ e si prenda un altro numero reale $\bar{r} > 0$ tale da aversi $r < \bar{r} < \rho$. Comunque si scelga un punto $z \in \overline{B(z_0, r)}$ vale, per il teorema integrale di Cauchy[†]:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

avendo chiamato γ la frontiera di $B(z_0, \bar{r})$ percorsa una sola volta, ovvero:

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow B(z_0, \rho) \quad \text{tale che} \quad \gamma(\theta) = z_0 + \bar{r}e^{i\theta}$$

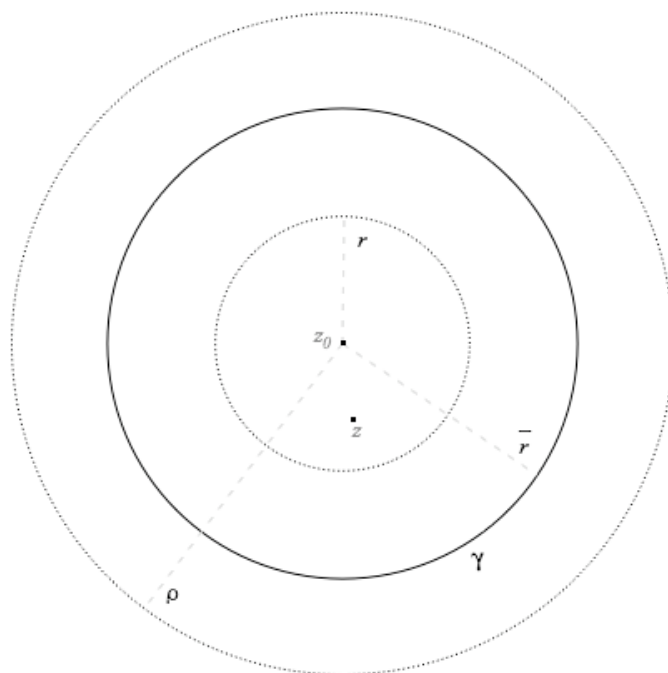


Figura 1.2: Dischi concentrici (teorema torinese di Cauchy)

[†] il dominio di definizione di f è semplicemente connesso

Si noti che, per costruzione, comunque si prenda il punto $z \in \overline{B(z_0, r)}$ il cammino γ non passa per z (infatti $r < \bar{r}$). Ora, sia $w \in B(z_0, \rho) \setminus \overline{B(z_0, r)}$ (tutti i punti della curva γ soddisfano questa condizione). Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{(w-z_0)-(z-z_0)} = \\ &= \frac{1}{(w-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)} = \frac{1}{w-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-z_0}{w-z_0}} \quad \text{con} \quad \left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right| < 1 \end{aligned}$$

infatti, per l'ipotesi di scelta fatta sul punto w , vale che $|z-z_0| < |w-z_0|$. Tutto il calcolo precedente serve per poter sfruttare i risultati sulle serie di potenze e scrivere di conseguenza il rapporto $\frac{1}{w-z}$ come somma di una serie di potenze convergente centrata in z_0 e precisamente:

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}}$$

ma allora:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(w) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \dagger \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{\gamma} f(w) \frac{(z-z_0)^n}{(w-z_0)^{n+1}} dw = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right) (z-z_0)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw \right)}_{a_n} (z-z_0)^n \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si noti la non dipendenza da r dei coefficienti a_n della serie di potenze. \square

\dagger la convergenza uniforme della serie di potenze sul compatto $\overline{B(z_0, r)}$ viene mantenuta, essa non è stata alterata dall'aver moltiplicato ogni termine per $f(w)$

1.5 Analiticità ed olomorfia

Questa quinta ed ultima sezione del primo capitolo è dedicata ad alcune cruciali conseguenze dei due teoremi di Cauchy appena dimostrati.

Definizione 1.13. Sia $A \neq \emptyset$ un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa e sia $z_0 \in A$. Si dice che f è *analitica in* z_0 se esiste un opportuno intorno di z_0 in A su cui f sia sviluppabile in serie di potenze, ovvero si possa esprimere nel seguente modo:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in U_{z_0} \quad (a_n \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N})$$

Si dice semplicemente che f è *analitica su* A se tale risulta in ogni suo punto.

Grazie ai risultati sulle serie formali di potenze (si veda libro [2] della bibliografia) si può dimostrare facilmente che somma, prodotto e composizione di funzioni analitiche restano funzioni analitiche. Analogamente, se f è una funzione analitica che non si annulla mai, allora $1/f$ è una funzione analitica. Un semplice esempio di funzioni analitiche è dato dai polinomi, per i quali l'espansione in serie di potenze ha solo un numero finito di termini non nulli. Ricordo che tutte le funzioni *analitiche* in un punto sono derivabili infinite volte nel disco di convergenza della serie di potenze ed inoltre, nella stessa regione, la derivata della funzione coincide proprio con la serie delle derivate. A livello globale, l'analiticità di una funzione implica immediatamente il fatto che essa sia di classe \mathcal{C}^∞ , cioè *liscia*, ma ricordo anche che per le funzioni reali il viceversa è falso, infatti se una funzione reale è di classe \mathcal{C}^∞ non è detto che sia sviluppabile in serie di potenze in ogni punto del suo dominio. Per esempio, la funzione:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ma non è sviluppabile in serie di potenze nel punto $x_0 = 0$. Per le funzioni complesse vale invece un risultato sorprendente, che segue direttamente dal teorema torinese di Cauchy:

Teorema 1.5.1.

Sia A un sottoinsieme aperto di \mathbb{C} , $A \neq \emptyset$, e sia $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione.

$$f \text{ è } \mathbf{olomorfa} \text{ su } A \iff f \text{ è } \mathbf{analitica} \text{ su } A$$

Dimostrazione.

\Rightarrow Si scelga $z_0 \in A$ ad arbitrio: poiché A è per ipotesi aperto, $\exists \rho > 0$ tale che $B(z_0, \rho) \subseteq A$. Si prenda poi $r \in \mathbb{R}$ tale che $0 < r < \rho$. Sfruttando l'ipotesi che f sia *olomorfa*, per il teorema torinese di Cauchy, su tutto il disco $B(z_0, r)$ vale uno sviluppo in serie di potenze centrato in z_0 e dato dalla (1.14), dunque f risulta in particolare analitica in z_0^\dagger . L'arbitrarietà di z_0 ci permette di ripetere il medesimo ragionamento $\forall z_0 \in A$, da cui la tesi.

\Leftarrow Segue dal teorema di derivazione termine a termine delle serie di potenze, valido anche nel campo complesso. Scelto liberamente un punto z_0 in A , esiste per ipotesi un intorno $U_{z_0} \subseteq A$ su cui la funzione f è sviluppabile in serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in U_{z_0}$$

Per definizione di intorno, possiamo affermare con certezza che $\exists r > 0$ tale che $B(z_0, r) \subseteq U_{z_0}$ e su tutto l'insieme $B(z_0, r)$ continua ovviamente a valere lo sviluppo indicato. Posto $\delta = \frac{r}{2}$, sul disco compatto $\overline{B(z_0, \delta)}$ la serie di potenze che rappresenta la funzione f converge uniformemente, per cui la sua derivata complessa può essere calcolata derivando termine a termine:

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1} \quad \forall z \in \overline{B(z_0, \delta)}$$

quindi $f'(z_0) = a_1 \in \mathbb{C}$. Ripetendo il medesimo ragionamento al variare del punto $z_0 \in A$, deduciamo che $\exists f'(z_0) \in \mathbb{C}$ per ogni $z_0 \in A$, da cui la tesi. \square

Corollario 1.5.2. *Sia A un aperto non vuoto di \mathbb{C} . Se f è olomorfa su A , allora $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ e tutte le sue derivate di ogni ordine sono olomorfe.*

Dimostrazione. Segue subito come conseguenza del teorema precedente. \square

† infatti $B(z_0, r)$ è un intorno del punto z_0

Capitolo 2

Trasformata di Laplace

2.1 Definizione e prime proprietà

Consideriamo una funzione complessa di variabile reale $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(t)$, localmente sommabile. Se, preso $z \in \mathbb{C}$, la moltiplichiamo per e^{-zt} ed integriamo il risultato rispetto a t nell'intervallo $[0, +\infty)$ otteniamo una nuova funzione nella variabile z , laddove l'integrale esiste: infatti, chiamato $A \subseteq \mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi z per i quali l'integrale indicato sussiste, si può definire un'applicazione su A ponendo:

$$z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

Questa nuova funzione è detta *trasformata di Laplace di f* . Precisamente:

□ **Definizione 2.1.** Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione localmente sommabile. Se nel punto $z \in \mathbb{C}$ esiste nel campo complesso il limite:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt \tag{2.1}$$

si dice che in z esiste la **trasformata di Laplace di f** e tale limite si denota equivalentemente con il simbolo $\mathcal{L}\{f\}(z)$ oppure con il simbolo $\hat{f}(z)$. Quindi:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \hat{f}(z)$$

Proposizione 2.1.1. *Nelle medesime notazioni della definizione precedente, posto $z = x + iy$, l'esistenza della trasformata di Laplace in z è assicurata se la funzione $t \mapsto e^{-xt}f(t)$ è sommabile sull'intervallo $[0, +\infty)$.*

Dimostrazione. Se vale l'ipotesi assunta, allora:

$$\int_0^\lambda |e^{-zt}f(t)| dt = \int_0^\lambda |e^{-xt}e^{-iyt}f(t)| dt = \int_0^\lambda |e^{-xt}f(t)| dt$$

e passando al limite per $\lambda \rightarrow +\infty$ si ottiene immediatamente la tesi. \square

Proposizione 2.1.2. *Nelle medesime notazioni della definizione precedente, se esistono $\mathcal{L}\{f\}(z)$ e $\mathcal{L}\{g\}(z)$ allora esistono anche $\mathcal{L}\{kf\}(z)$ essendo k una costante complessa arbitraria e $\mathcal{L}\{f+g\}(z)$ con, in particolare:*

$$\mathcal{L}\{kf\}(z) = k \mathcal{L}\{f\}(z)$$

$$\mathcal{L}\{f+g\}(z) = \mathcal{L}\{f\}(z) + \mathcal{L}\{g\}(z)$$

Dimostrazione. Segue subito dalle proprietà degli integrali, infatti:

$$\mathcal{L}\{kf\}(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt}(kf(t)) dt = k \int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t) dt = k \mathcal{L}\{f\}(z)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f+g\}(z) &:= \int_0^{+\infty} e^{-zt}(f(t)+g(t)) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-zt}g(t) dt = \mathcal{L}\{f\}(z) + \mathcal{L}\{g\}(z) \end{aligned}$$

\square

Osservazione 10. La proposizione precedente assicura che la *trasformazione di Laplace* sia un operatore lineare. Si presti attenzione ai termini usati: con *trasformata di Laplace di f* è stata indicata la funzione di variabile complessa

$$z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-zt}f(t) dt$$

mentre con *trasformazione di Laplace* indichiamo l'operatore lineare che associa ad una funzione localmente sommabile la sua *trasformata di Laplace*:

$$f \mapsto \mathcal{L}\{f\}$$

Teorema 2.1.3.

Se $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile ed esiste $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$ allora esiste anche $\mathcal{L}\{f\}(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.

Dimostrazione. Si consideri la funzione ausiliaria:

$$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \varphi(t) := \int_0^t e^{-z_0\tau} f(\tau) d\tau$$

Ora, essendo $\varphi'(t) = e^{-z_0t} f(t)$, per ogni $\lambda > 0$ si ha:

$$\int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt = \int_0^\lambda e^{-(z-z_0)t} \varphi'(t) dt$$

ed il secondo membro può essere riscritto attraverso un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda \varphi'(t) e^{-(z-z_0)t} dt &= [\varphi(t) e^{-(z-z_0)t}]_{t=0}^{t=\lambda} + (z-z_0) \int_0^\lambda \varphi(t) e^{-(z-z_0)t} dt \\ &= e^{-(z-z_0)\lambda} \varphi(\lambda) + (z-z_0) \int_0^\lambda e^{-(z-z_0)t} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Se $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, passando al limite per $\lambda \rightarrow +\infty$ si ha:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z-z_0) \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \varphi(t) dt \quad (2.2)$$

infatti:

$$|e^{-(z-z_0)\lambda} \varphi(\lambda)| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

poiché $|e^{-(z-z_0)\lambda}| = e^{-\lambda \operatorname{Re}(z-z_0)} \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$ (si sta supponendo $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$) ed inoltre per ipotesi esiste $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) \in \mathbb{C}$. L'esistenza dell'integrale al secondo membro della (2.2) è assicurata dal fatto che φ è limitata[†], per cui:

$$|e^{-(z-z_0)t} \varphi(t)| = |e^{-t \operatorname{Re}(z-z_0)}| |\varphi(t)| \leq M |e^{-t \operatorname{Re}(z-z_0)}|$$

e la funzione $t \mapsto M |e^{-t \operatorname{Re}(z-z_0)}|$ è sommabile sull'intervallo $[0, +\infty)$. \square

Osservazione 11. Se $t \mapsto e^{-z_0t} f(t)$ è sommabile sull'intervallo $[0, +\infty)$, allora lo è anche la funzione $t \mapsto e^{-zt} f(t)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, infatti:

$$|e^{-zt} f(t)| = |e^{-(z-z_0)t}| |e^{-z_0t} f(t)| \leq e^{-t \operatorname{Re}(z-z_0)} |e^{-z_0t} f(t)| \leq |e^{-z_0t} f(t)|$$

[†] φ è limitata in quanto è continua essendo una funzione integrale ed esiste $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t)$

2.2 Ascissa di convergenza

Il **Teorema 2.1.3** assicura che, se esiste un numero $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che il limite (2.1) sia finito, allora la trasformata di Laplace esiste sull'intero semipiano aperto del campo complesso descritto da $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0\}$. Ovviamente, non è detto a priori che tale regione sia l'unica in cui è possibile calcolare la trasformata: la nozione di *ascissa di convergenza*, che seguirà dopo la dimostrazione del prossimo teorema, chiarisce ogni dubbio.

! Teorema 2.2.1.

Se $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile[†], posto:

$$F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad F(t) := \int_0^t f(\tau) d\tau$$

e

$$F(\infty) := \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) & \text{se questo limite esiste in } \mathbb{C} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora, posto:

$$a_c := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |F(t) - F(\infty)|$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f\}(z) \text{ esiste } \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} z > a_c \text{ e non esiste } \forall z \in \mathbb{C} \text{ con } \operatorname{Re} z < a_c}$$

Dimostrazione. Poiché risulta $F'(t) = f(t)$ si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt &= [F(t) e^{-zt}]_{t=0}^{t=\lambda} + z \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt = \\ &= e^{-z\lambda} F(\lambda) + z \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt \end{aligned}$$

Valendo inoltre che:

$$\begin{aligned} z \int_0^\lambda e^{-zt} [F(t) - F(\infty)] dt &= z \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt + F(\infty) \int_0^\lambda (-z) e^{-zt} dt = \\ &= z \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt + F(\infty) [e^{-zt}]_{t=0}^{t=\lambda} = z \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt + F(\infty) e^{-z\lambda} - F(\infty) \end{aligned}$$

[†] $f \in \mathbb{L}_{loc}^1[0, +\infty)$ se è integrabile su ogni compatto dell'intervallo $[0, +\infty)$

possiamo riscrivere l'integrale iniziale in questo modo:

$$\int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt = F(\infty) + e^{-z\lambda} [F(\lambda) - F(\infty)] + z \int_0^\lambda e^{-zt} [F(t) - F(\infty)] dt$$

[1] Supponiamo $a_c \in \mathbb{R}$. Per le proprietà del limite superiore, comunque si scelga un numero reale $\epsilon > 0$ esiste in corrispondenza $m_{(\epsilon)} > 0$ tale che:

$$\frac{1}{t} \log |F(t) - F(\infty)| \leq m_{(\epsilon)} (a_c + \epsilon) \quad \forall t > 0$$

e ciò implica che, per ogni $t > 0$:

$$|F(t) - F(\infty)| \leq M_{(\epsilon)} e^{(a_c + \epsilon)t} \quad (2.3)$$

dove è stato posto $M_{(\epsilon)} = e^{m_{(\epsilon)}}$ ed inoltre la disuguaglianza (2.3) si può estendere anche al caso $t = 0$ pertanto, sotto l'ipotesi che $a_c \in \mathbb{R}$, per ogni possibile scelta di $\epsilon > 0$ esiste in corrispondenza $M_{(\epsilon)} > 0$ tale che:

$$|F(t) - F(\infty)| \leq M_{(\epsilon)} e^{(a_c + \epsilon)t} \quad \forall t \geq 0$$

Preso ora un numero complesso z con $\operatorname{Re} z > a_c + \epsilon$, risultando:

$$|e^{-zt} [F(t) - F(\infty)]| \leq e^{-t \operatorname{Re} z} M_{(\epsilon)} e^{(a_c + \epsilon)t} = M_{(\epsilon)} e^{-t[\operatorname{Re} z - (a_c + \epsilon)]}$$

si ha che la funzione $t \mapsto e^{-zt} [F(t) - F(\infty)]$ è sommabile sull'intervallo $[0, +\infty)$ e converge chiaramente a zero per $t \rightarrow +\infty$, perciò:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) := \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt = F(\infty) + z \int_0^{+\infty} e^{-zt} [F(t) - F(\infty)] dt$$

e quindi, per l'arbitrarietà di $\epsilon > 0$, $\mathcal{L}\{f\}(z)$ esiste $\forall z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > a_c$.

[2] Supponiamo $a_c = -\infty$. Sotto questa ipotesi abbiamo che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |F(t) - F(\infty)| = -\infty$$

e quindi, per ogni $\mu > 0$ esiste in corrispondenza $M_{(\mu)} > 0$ tale che:

$$|F(t) - F(\infty)| \leq M_{(\mu)} e^{-\mu t} \quad \forall t \geq 0$$

e lo stesso ragionamento precedente assicura che $\mathcal{L}\{f\}(z)$ esiste $\forall z \in \mathbb{C}$.

[3] Provo ora che se esiste $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$ allora, necessariamente, $a_c \leq \operatorname{Re} z_0$. Fatto questo, resterà assicurato che $\mathcal{L}\{f\}(z)$ non esiste $\forall z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < a_c$. Distinguiamo due casi: (i) $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$ e (ii) $\operatorname{Re} z_0 < 0$.

(i) Se $\operatorname{Re} z_0 \geq 0$, poniamo:

$$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \varphi(t) = \int_0^t e^{-z_0\tau} f(\tau) d\tau$$

Poiché risulta $\varphi'(t) = e^{-z_0 t} f(t)$ si ha, ricordando la definizione di F ed effettuando un'altra integrazione per parti:

$$\begin{aligned} F(t) &:= \int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t e^{z_0\tau} \varphi'(\tau) d\tau = [\varphi(\tau) e^{z_0\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} - z_0 \int_0^t \varphi(\tau) e^{z_0\tau} d\tau = \\ &= e^{z_0 t} \varphi(t) - z_0 \int_0^t e^{z_0\tau} \varphi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Valendo inoltre che:

$$\begin{aligned} z_0 \int_0^t e^{z_0\tau} [\varphi(\tau) - F(\infty)] d\tau &= z_0 \int_0^t e^{z_0\tau} \varphi(\tau) d\tau + F(\infty) \int_0^t z_0 e^{z_0\tau} d\tau = \\ &= z_0 \int_0^t e^{z_0\tau} \varphi(\tau) d\tau + F(\infty) [e^{z_0\tau}]_{\tau=0}^{\tau=t} = z_0 \int_0^t e^{z_0\tau} \varphi(\tau) d\tau + F(\infty) e^{z_0 t} - F(\infty) \end{aligned}$$

unendo le ultime due uguaglianze ricaviamo:

$$F(t) - F(\infty) = e^{z_0 t} [\varphi(t) - F(\infty)] - z_0 \int_0^t e^{z_0\tau} [\varphi(\tau) - F(\infty)] d\tau$$

per cui, moltiplicando ambo i membri per $e^{-z_0 t}$:

$$e^{-z_0 t} [F(t) - F(\infty)] \stackrel{*}{=} [\varphi(t) - F(\infty)] - z_0 \int_0^t e^{-z_0(t-\tau)} [\varphi(\tau) - F(\infty)] d\tau$$

Ora, poiché per ipotesi esiste $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$, la funzione φ è limitata dunque esiste una costante reale $M > 0$ tale che:

$$|\varphi(t) - F(\infty)| \leq M \quad \forall t \geq 0$$

pertanto dall'uguaglianza \star , considerando i valori assoluti, si trae:

$$e^{-t \operatorname{Re} z_0} |F(t) - F(\infty)| \leq M + |z_0| M \int_0^t e^{-(t-\tau) \operatorname{Re} z_0} d\tau \quad (2.4)$$

Studiamo adesso come maggiorare l'integrale al secondo membro della (2.4); se $\operatorname{Re} z_0 = 0$, allora, banalmente:

$$\int_0^t e^{-(t-\tau)\operatorname{Re} z_0} d\tau = \int_0^t d\tau = t \leq t \quad \forall t \geq 0$$

se invece $\operatorname{Re} z_0 \neq 0$, vale comunque la stessa disuguaglianza, infatti:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-(t-\tau)\operatorname{Re} z_0} d\tau &= e^{-t\operatorname{Re} z_0} \int_0^t e^{\tau\operatorname{Re} z_0} d\tau = e^{-t\operatorname{Re} z_0} \left[\frac{e^{\tau\operatorname{Re} z_0}}{\operatorname{Re} z_0} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \\ &= e^{-t\operatorname{Re} z_0} \left[\frac{e^{t\operatorname{Re} z_0}}{\operatorname{Re} z_0} - \frac{1}{\operatorname{Re} z_0} \right] = \frac{1}{\operatorname{Re} z_0} (1 - e^{-t\operatorname{Re} z_0}) \end{aligned}$$

e

$$\frac{1}{\operatorname{Re} z_0} (1 - e^{-t\operatorname{Re} z_0}) \leq t \quad \forall t \geq 0 \quad \text{poiché} \quad 1 - e^{-\xi} \leq \xi \quad \forall \xi \geq 0^\dagger$$

pertanto, maggiorando ulteriormente il secondo membro della disuguaglianza (2.4) si ottiene:

$$e^{-t\operatorname{Re} z_0} |F(t) - F(\infty)| \leq M (1 + t |z_0|) \quad \forall t \geq 0 \quad (2.5)$$

Si osservi che entrambi i membri della (2.5) sono positivi e non nulli se $t \neq 0$ dunque, valutando i logaritmi:

$$-t \operatorname{Re} z_0 + \log |F(t) - F(\infty)| \leq \log M (1 + t |z_0|) \quad \forall t > 0$$

e con semplici passaggi algebrici si ricava: ($t \neq 0$)

$$\frac{1}{t} \log |F(t) - F(\infty)| \leq \operatorname{Re} z_0 + \frac{1}{t} \log M (1 + t |z_0|) \quad \forall t > 0$$

Passando ora ai limiti superiori per $t \rightarrow +\infty$ segue immediatamente la tesi, infatti in particolare vale che:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log M (1 + t |z_0|)}{t} = 0$$

dunque anche $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log M (1 + t |z_0|) = 0$ per cui in definitiva $a_c \leq \operatorname{Re} z_0$.

[†] si può dimostrare questo fatto utilizzando tecniche elementari di calcolo differenziale

(ii) Se $\operatorname{Re} z_0 < 0$, poniamo:

$$\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \phi(t) := \int_t^{+\infty} e^{-z_0\tau} f(\tau) d\tau$$

Supposto che esista $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) \in \mathbb{C}$ si ha:

$$\begin{aligned} |F(t) - F(\infty)| &= \left| \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^{+\infty} f(\tau) d\tau \right| = \\ &= \left| \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_t^{+\infty} f(\tau) d\tau \right| = \left| \int_t^{+\infty} f(\tau) d\tau \right| \end{aligned}$$

Essendo $\phi'(t) = -e^{-z_0 t} f(t)$ ed effettuando un'altra integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} f(\tau) d\tau &= \int_{+\infty}^t e^{z_0\tau} \phi'(\tau) d\tau = [\phi(\tau) e^{z_0\tau}]_{\tau \rightarrow +\infty}^t - z_0 \int_{+\infty}^t \phi(\tau) e^{z_0\tau} d\tau = \\ &= e^{z_0 t} \phi(t) + z_0 \int_t^{+\infty} e^{z_0\tau} \phi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

L'ipotesi che esista $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$ assicura che la funzione ϕ sia limitata, per cui esiste un numero reale $N > 0$ tale che $|\phi(t)| \leq N$ per ogni $t \geq 0$, pertanto:

$$|F(t) - F(\infty)| \leq N e^{t \operatorname{Re} z_0} + |z_0| \int_t^{+\infty} |e^{z_0\tau} \phi(\tau)| d\tau$$

ora:

$$\begin{aligned} \int_t^{+\infty} |e^{z_0\tau} \phi(\tau)| d\tau &\leq N \int_t^{+\infty} |e^{z_0\tau}| d\tau = N \int_t^{+\infty} e^{\tau \operatorname{Re} z_0} d\tau = \\ &= N \left[\frac{e^{\tau \operatorname{Re} z_0}}{\operatorname{Re} z_0} \right]_{\tau=t}^{\tau \rightarrow +\infty} = N \left(-\frac{e^{t \operatorname{Re} z_0}}{\operatorname{Re} z_0} \right) = N \frac{e^{t \operatorname{Re} z_0}}{|\operatorname{Re} z_0|} \end{aligned}$$

Si noti che l'ipotesi $\operatorname{Re} z_0 < 0$ ha giocato un ruolo cruciale per la convergenza dell'integrale calcolato. Ricapitolando:

$$|F(t) - F(\infty)| \leq N e^{t \operatorname{Re} z_0} + |z_0| N \frac{e^{t \operatorname{Re} z_0}}{|\operatorname{Re} z_0|} = e^{t \operatorname{Re} z_0} \left(N + \frac{N|z_0|}{|\operatorname{Re} z_0|} \right)$$

Passando prima ai logaritmi e dividendo poi ambo i membri per $\frac{1}{t}$ si ottiene:

$$\frac{1}{t} \log |F(t) - F(\infty)| \leq \operatorname{Re} z_0 + \frac{1}{t} \log \left(N + \frac{N|z_0|}{|\operatorname{Re} z_0|} \right) \quad \forall t > 0$$

e la conclusione è quella di prima. \square

! **Definizione 2.2.** Nelle medesime notazioni e ipotesi del teorema precedente, a_c viene chiamata **ascissa di convergenza**.

Osservazione 12. Se $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ è localmente sommabile, posto:

$$H : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad H(t) := \int_0^t |f(\tau)| d\tau$$

e

$$H(\infty) := \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} H(t) & \text{se questo limite esiste in } \mathbb{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

allora, posto:

$$a_{|c|} := \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |H(t) - H(\infty)|$$

la funzione $t \mapsto e^{-zt}f(t)$ è sommabile sull'intervallo $[0, +\infty)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > a_{|c|}$ mentre non lo è per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z < a_{|c|}$. La quantità $a_{|c|}$ viene di conseguenza chiamata **ascissa di convergenza assoluta**. Evidentemente, vale che $-\infty \leq a_c \leq a_{|c|} \leq +\infty$ ma in alcuni casi può essere $a_c < a_{|c|}$ e addirittura $a_c = -\infty$ e $a_{|c|} = +\infty$.

2.3 Risultati fondamentali

Teorema 2.3.1.

Se $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ è localmente assolutamente continua[†] e se esiste $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$ con $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-z_0 t} f(t) = 0$, allora esiste $\mathcal{L}\{f'\}(z_0)$ e, in particolare:

$$\mathcal{L}\{f'\}(z_0) = -f(0) + z_0 \mathcal{L}\{f\}(z_0)$$

Dimostrazione. Per ogni $\lambda > 0$ risulta, effettuando un'integrazione per parti:

$$\int_0^\lambda e^{-z_0 t} f'(t) dt = [f(t)e^{-z_0 t}]_{t=0}^{t=\lambda} + z_0 \int_0^\lambda f(t)e^{-z_0 t} dt$$

[†] ciò significa che è assolutamente continua su $[0, \lambda]$ per ogni $\lambda > 0$ e si ricordi che l'assoluta continuità è una condizione necessaria e sufficiente alla validità del teorema fondamentale del calcolo integrale nell'ambito della teoria dell'integrale di Lebesgue.

quindi:

$$\int_0^\lambda e^{-z_0 t} f'(t) dt = e^{-z_0 \lambda} f(\lambda) - f(0) + z_0 \int_0^\lambda e^{-z_0 t} f(t) dt$$

e passando al limite per $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-z_0 t} f'(t) dt = -f(0) + z_0 \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-z_0 t} f(t) dt$$

Dalla definizione di trasformata di Laplace segue immediatamente la tesi. \square

Teorema 2.3.2.

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione localmente sommabile e si supponga inoltre che esista $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$. Posto:

$$F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

allora esiste $\mathcal{L}\{F\}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ ($\operatorname{Re} z > 0$) e, in particolare:

$$\mathcal{L}\{F\}(z) = \frac{1}{z} \mathcal{L}\{f\}(z)$$

Dimostrazione. Essendo $F'(t) = f(t)$, eseguendo la solita integrazione per parti, si ha, per ogni $\lambda > 0$ ($z \neq 0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} \int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt &= \frac{1}{z} [F(t)e^{-zt}]_{t=0}^{t=\lambda} - \frac{1}{z} \int_0^\lambda (-z)F(t)e^{-zt} dt = \\ &= \left(\frac{e^{-z\lambda}}{z} F(\lambda) - 0 \right) + \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt = \\ &= \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt + \frac{e^{-z\lambda}}{z} \int_0^\lambda f(t) dt \end{aligned}$$

pertanto, $\forall \lambda > 0$ vale che:

$$\int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt = \frac{1}{z} \int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt - \underbrace{\frac{e^{-z\lambda}}{z} \int_0^\lambda f(t) dt}_* \quad (2.6)$$

Posto:

$$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \varphi(t) := \int_0^t e^{-z_0 \tau} f(\tau) d\tau$$

studiamo il comportamento di \star al tendere di λ all'infinito. Innanzitutto:

$$\frac{e^{-z\lambda}}{z} \int_0^\lambda f(t) dt = \frac{1}{z} \int_0^\lambda e^{-z\lambda} f(t) dt$$

sfruttando la definizione della funzione φ :

$$\begin{aligned} \int_0^\lambda e^{-z\lambda} f(t) dt &= \int_0^\lambda e^{-z\lambda+z_0t} \varphi'(t) dt = \\ &= [\varphi(t)e^{-z\lambda+z_0t}]_{t=0}^{t=\lambda} - z_0 \int_0^\lambda \varphi(t)e^{-z\lambda+z_0t} dt = \\ &= \varphi(\lambda)e^{-(z-z_0)\lambda} - z_0 \int_0^\lambda \varphi(t)e^{-z\lambda+z_0t} dt \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $\varphi(t)$ converge per $t \rightarrow +\infty$, esiste una costante $M > 0$ tale che $|\varphi(t)| \leq M$ per ogni $t \geq 0$ (ovvero φ è limitata), perciò:

$$\left| \int_0^\lambda e^{-z\lambda} f(t) dt \right| \leq M e^{-\lambda \operatorname{Re}(z-z_0)} + M |z_0| e^{-\lambda \operatorname{Re} z} \int_0^\lambda e^{t \operatorname{Re} z_0} dt$$

Ora non resta che stimare l'ultimo integrale:

$$\int_0^\lambda e^{t \operatorname{Re} z_0} dt = \left[\frac{e^{t \operatorname{Re} z_0}}{\operatorname{Re} z_0} \right]_{t=0}^{t=\lambda} = \left(\frac{e^{\lambda \operatorname{Re} z_0}}{\operatorname{Re} z_0} - \frac{1}{\operatorname{Re} z_0} \right) = \frac{1}{\operatorname{Re} z_0} (e^{\lambda \operatorname{Re} z_0} - 1)$$

si presentano due casi:

$$\frac{1}{\operatorname{Re} z_0} (e^{\lambda \operatorname{Re} z_0} - 1) \leq \lambda \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} z_0 \leq 0 \quad \text{infatti} \quad e^x - 1 + x \leq 0 \quad \forall x \leq 0$$

$$\frac{1}{\operatorname{Re} z_0} (e^{\lambda \operatorname{Re} z_0} - 1) < \lambda e^{\lambda \operatorname{Re} z_0} \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} z_0 > 0$$

$$\text{infatti} \quad e^x - 1 - x e^x < 0 \quad \forall x > 0$$

pertanto, qualunque sia la parte reale di z_0 :

$$\int_0^\lambda e^{t \operatorname{Re} z_0} dt \leq \lambda + \lambda e^{\lambda \operatorname{Re} z_0} = \lambda (1 + e^{\lambda \operatorname{Re} z_0})$$

ma allora:

$$\left| \int_0^\lambda e^{-z\lambda} f(t) dt \right| \leq M e^{-\lambda \operatorname{Re}(z-z_0)} + \lambda M |z_0| e^{-\lambda \operatorname{Re} z} + \lambda M |z_0| e^{-\lambda \operatorname{Re}(z-z_0)}$$

Sotto l'ipotesi che $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ ($\operatorname{Re} z > 0$) tutti gli addendi del secondo membro della precedente disuguaglianza vanno a zero per $\lambda \rightarrow +\infty$, perciò:

$$\left| \int_0^\lambda e^{-z\lambda} f(t) dt \right| \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{z} \int_0^\lambda e^{-z\lambda} f(t) dt = 0$$

e passando al limite per $\lambda \rightarrow +\infty$ nella (2.6) otteniamo:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-zt} F(t) dt = \frac{1}{z} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\lambda e^{-zt} f(t) dt$$

Dalla definizione di trasformata e dal **Teorema 2.1.3** segue la tesi. \square

Corollario 2.3.3. *Nelle medesime ipotesi del teorema precedente, posto:*

$$F_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

risulta:

$$\mathcal{L}\{F_n\}(z) = \frac{1}{z^n} \mathcal{L}\{f\}(z)$$

Dimostrazione. Basta procedere per induzione su $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. \square

Prima di enunciare il prossimo teorema è necessaria una definizione:

Definizione 2.3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa localmente sommabile e sia $z \in \mathbb{C}$. Se esiste nel campo complesso il limite:

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \rightarrow -\infty \\ \lambda_2 \rightarrow +\infty}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} e^{-zt} f(t) dt$$

si dice che nel punto z esiste la **trasformata bilatera di Laplace** ed essa si indica con il simbolo $\mathcal{L}_1\{f\}(z)$ oppure con il simbolo $\mathcal{L}_b\{f\}(z)$. Quindi:

$$\mathcal{L}_1\{f\}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \mathcal{L}_b\{f\}(z)$$

Quella definita all'inizio di questo capitolo viene parallelamente chiamata pure **trasformata unilatera di Laplace** e si può indicare anche con il simbolo $\mathcal{L}_u\{f\}(z)$. Pertanto, sotto le opportune ipotesi:

$$\mathcal{L}_u\{f\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \mathcal{L}\{f\}(z)$$

Teorema 2.3.4.

Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni tali che le corrispondenti applicazioni $t \mapsto e^{-x_0 t} f(t)$ e $t \mapsto e^{-x_0 t} g(t)$ siano entrambe sommabili su \mathbb{R} . Allora esiste $\mathcal{L}_b\{f * g\}(z)$ per ogni numero complesso z con $\operatorname{Re} z = x_0$ e, in particolare:

$$\mathcal{L}_b\{f * g\}(z) = \mathcal{L}_b\{f\}(z) \cdot \mathcal{L}_b\{g\}(z)$$

Dimostrazione. La convoluzione delle funzioni f e g è l'applicazione:

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \quad t \in \mathbb{R}$$

e la sua trasformata bilatera di Laplace nel punto $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z = x_0$ è:

$$z \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) dt$$

Ora:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} f(t - \tau)g(\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t - \tau)e^{-z\tau} g(\tau) d\tau \right) dt \end{aligned}$$

pertanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_b\{f * g\}(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t - \tau)e^{-z\tau} g(\tau) d\tau \right) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t - \tau)e^{-z\tau} g(\tau) dt \right) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\tau} g(\tau) \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z(t-\tau)} f(t - \tau) dt \right)}_{\mathcal{L}_b\{f\}(z)} d\tau = \\ &= \mathcal{L}_b\{f\}(z) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z\tau} g(\tau) d\tau = \mathcal{L}_b\{f\}(z) \cdot \mathcal{L}_b\{g\}(z) \end{aligned}$$

□

Osservazione 13. La convoluzione delle funzioni f e g esiste quasi dappertutto sul campo complesso nell'ipotesi dichiarata e si noti che tale ipotesi non richiede che f e g siano singolarmente sommabili su \mathbb{R} .

Osservazione 14. Se f e g sono due funzioni definite sull'intervallo $[0, +\infty)$ a valori complessi tali che le corrispondenti applicazioni $t \mapsto e^{-x_0 t} f(t)$ e $t \mapsto e^{-x_0 t} g(t)$ siano sommabili su $[0, +\infty)$, allora prolungate con la funzione identicamente nulla per $t < 0$ risulta:

$$f * g(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

e per le relative trasformate unilateri di Laplace vale una relazione analoga a quella del teorema precedente:

$$\mathcal{L}\{f * g\}(z) = \mathcal{L}\{f\}(z) \cdot \mathcal{L}\{g\}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \operatorname{Re} z \geq x_0$$

Osservazione 15. Denotiamo con Ψ l'insieme delle funzioni ciascuna delle quali è la trasformata (unilatera) di Laplace di una funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $t \mapsto e^{-zt} f(t)$ sia sommabile su $[0, +\infty)$ per $\operatorname{Re} z > 0$. Come conseguenza della **Proposizione 2.1.2** e della precedente osservazione, possiamo affermare che Ψ è uno spazio vettoriale rispetto alla somma di funzioni ed alla moltiplicazione per scalari, mentre è un'algebra lineare rispetto alla somma ed alla convoluzione di funzioni.

! Teorema 2.3.5.

Siano $f_1, f_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni complesse localmente sommabili. Si supponga che $\mathcal{L}\{f_1\}(z)$ e $\mathcal{L}\{f_2\}(z)$ esistano per ogni numero complesso z con $\operatorname{Re} z > x_0$ e che, laddove esistano, valga $\mathcal{L}\{f_1\}(z) = \mathcal{L}\{f_2\}(z)$. Allora:

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \text{quasi dappertutto}$$

Dimostrazione. Posto $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ con $f := f_1 - f_2$ risulta dalle ipotesi che f è localmente sommabile e trasformabile secondo Laplace per ogni numero complesso z tale che $\operatorname{Re} z > x_0$. In particolare:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f_1(t) dt - \int_0^{+\infty} e^{-zt} f_2(t) dt = 0$$

$$\text{per cui } \mathcal{L}\{f\}(z) = 0 \quad \forall z \text{ con } \operatorname{Re} z > x_0$$

Si ponga ora:

$$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \varphi(t) := \int_0^t e^{-(x_0+1)\tau} f(\tau) d\tau$$

Essendo una funzione integrale, φ è continua sull'intervallo $[0, +\infty)$ ed inoltre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$$

infatti $\forall t \geq 0$ vale che:

$$\int_0^t e^{-(x_0+1)\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^t e^{-(x_0+1)\tau} f_1(\tau) d\tau - \int_0^t e^{-(x_0+1)\tau} f_2(\tau) d\tau$$

quindi passando al limite per $t \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x_0+1)\tau} f(\tau) d\tau = \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-(x_0+1)\tau} f_1(\tau) d\tau}_{\mathcal{L}\{f_1\}(z) \text{ con } z=x_0+1 \in \mathbb{R}} - \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-(x_0+1)\tau} f_2(\tau) d\tau}_{\mathcal{L}\{f_2\}(z) \text{ con } z=x_0+1 \in \mathbb{R}}$$

e dalle ipotesi iniziali del teorema segue che la differenza al secondo membro della precedente uguaglianza è nulla, quindi effettivamente $\varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Essendo $\varphi'(t) = e^{-(x_0+1)t} f(t)$, comunque si prenda $n \in \mathbb{N}$ si ha, per ragioni analoghe alle precedenti ed effettuando un'integrazione per parti:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} e^{-(x_0+1+n)t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-nt} \varphi'(t) dt = \\ &= [\varphi(t) e^{-nt}]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + n \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-nt} dt = n \int_0^{+\infty} e^{-nt} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Ora, posto $\tau = \frac{1}{e^t} \iff t = \log \frac{1}{\tau}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-nt} \varphi(t) dt &= \left[\begin{array}{l} t = \log \frac{1}{\tau} \\ dt = -\frac{1}{\tau} d\tau \end{array} \right] = \int_1^0 e^{-n \log \frac{1}{\tau}} \varphi \left(\log \frac{1}{\tau} \right) \left(-\frac{1}{\tau} \right) d\tau = \\ &= \int_0^1 e^{-n \log \frac{1}{\tau}} e^{\log \frac{1}{\tau}} \underbrace{\varphi \left(\log \frac{1}{\tau} \right)}_{h(\tau)} d\tau = \int_0^1 e^{(1-n) \log \frac{1}{\tau}} h(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^1 \left(e^{\log \frac{1}{\tau}} \right)^{1-n} h(\tau) d\tau = \int_0^1 \left(\frac{1}{\tau} \right)^{1-n} h(\tau) d\tau = \int_0^1 \tau^{n-1} h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

quindi:

$$\int_0^1 \tau^{n-1} h(\tau) d\tau = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

e, di conseguenza:

$$\int_0^1 p(\tau) h(\tau) d\tau = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}[\tau]$$

La funzione h è sicuramente continua su $(0, 1]$ in quanto è stata definita attraverso una composizione di funzioni continue. Grazie all'analisi precedente sulla funzione φ , possiamo estendere con continuità h anche nello zero ponendo $h(0) := 0$ per cui, a seguito di questa estensione, posto $h = h_1 + ih_2$, entrambe le componenti h_1 e h_2 sono continue sull'intervallo compatto $[0, 1]$. Esistono allora due successioni di funzioni polinomiali:

$$(p_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{e} \quad (p_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$$

che convergono uniformemente su $[0, 1]$ rispettivamente ad h_1 e h_2 . Perciò:

$$\int_0^1 [h_1(\tau)]^2 d\tau = \int_0^1 [h_2(\tau)]^2 d\tau = 0$$

e quindi $h_1(\tau) = h_2(\tau) = 0$ per ogni $\tau \in [0, 1]$. Ne segue che $h \equiv 0$ e quindi $\varphi(t) = 0$ per ogni $t \in [0, +\infty)$ da cui $f(t) = 0$ quasi dappertutto.[†] \square

Il teorema precedente asserisce una proprietà molto importante: **se due funzioni complesse localmente sommabili hanno la medesima trasformata di Laplace nella sua regione di esistenza, allora sono necessariamente uguali quasi ovunque**. Ciò significa che non possono esistere due funzioni complesse sostanzialmente diverse che abbiano la medesima trasformata, ovvero, se si conosce una funzione che abbia una data trasformata, questa è unica a meno di sottoinsiemi di misura nulla nell'intervallo $[0, +\infty)$. Dalle proprietà basilari dell'integrale di Lebesgue, dovrebbe essere evidente che un risultato più forte di questo non si può avere, infatti basta solo modificare f in un numero finito di punti per avere formalmente una funzione diversa, ma per la quale l'integrale (2.1) restituisce lo stesso risultato.

[†] $\varphi(t) = 0$ per ogni $t \in [0, +\infty)$ implica che $\underbrace{e^{-(x_0+1)t}}_{\neq 0} f(t) = 0$ quasi dappertutto

!! **Teorema 2.3.6.**

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa localmente sommabile e sia inoltre $a_c < +\infty$ l'ascissa di convergenza della sua trasformata di Laplace. Fissati ad arbitrio $\alpha, \delta > 0$ con $\alpha < \frac{\pi}{2}$ e posto:

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg(z - a_c - \delta) \right| < \frac{\pi}{2} - \alpha \right\}$$

vale che $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$ **converge uniformemente** sulla chiusura di A .

Dimostrazione. Poniamo $z_0 = a_c + \delta$ (si osservi che $z_0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) e definiamo:

$$\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \phi(t) := \int_0^t e^{-z_0\tau} f(\tau) d\tau$$

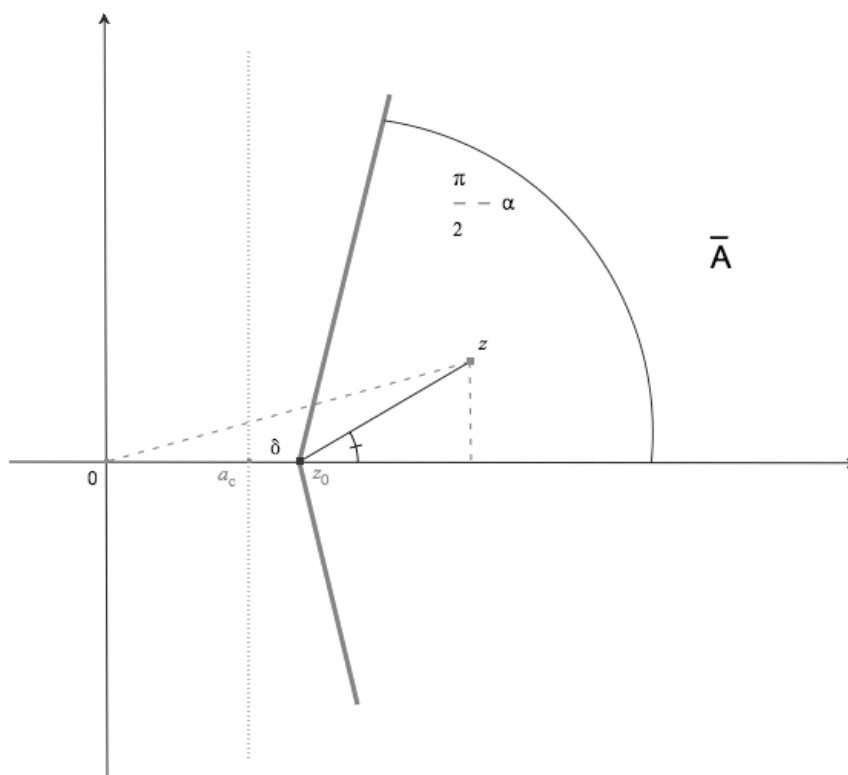


Figura 2.1: Dominio di *convergenza uniforme* per $\mathcal{L}\{f\}$

Poiché $\operatorname{Re} z_0 = z_0 > a_c$ esiste sicuramente $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$ ed essendo, in particolare:

$$\mathcal{L}\{f\}(z_0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t)$$

si può affermare che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una costante $T_{(\epsilon)} > 0$ tale che:

$$|\phi(t) - \mathcal{L}\{f\}(z_0)| < \epsilon \quad \forall t > T_{(\epsilon)}$$

Inoltre, preso $z \in \mathbb{C}$ ad arbitrio con $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0^\dagger$ si ha:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(z-z_0)t} = 0 \quad \text{infatti} \quad |e^{-(z-z_0)t}| = e^{-t \operatorname{Re}(z-z_0)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

dunque esiste anche una costante reale $\tilde{T} > 0$ tale che:

$$|e^{-(z-z_0)t}| < 1 \quad \forall t > \tilde{T}$$

Ora, essendo ϕ limitata con $\phi'(t) = e^{-z_0 t} f(t)$, per ogni $T \geq 0$ risulta:

$$\begin{aligned} \int_T^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt &= \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \phi'(t) dt = \\ &= [\phi(t) e^{-(z-z_0)t}]_{t=T}^{t \rightarrow +\infty} + (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \phi(t) dt = \\ &= -\phi(T) e^{-(z-z_0)T} + (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \phi(t) dt \end{aligned}$$

d'altra parte:

$$\begin{aligned} (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} [\phi(t) - \mathcal{L}\{f\}(z_0)] dt &= \\ = (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \phi(t) dt - (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \mathcal{L}\{f\}(z_0) dt &= \\ = (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \phi(t) dt + \mathcal{L}\{f\}(z_0) \int_T^{+\infty} -(z - z_0) e^{-(z-z_0)t} dt &= \\ = (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \phi(t) dt + \mathcal{L}\{f\}(z_0) [e^{-(z-z_0)t}]_{t=T}^{t \rightarrow +\infty} &= \\ = (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} \phi(t) dt - \mathcal{L}\{f\}(z_0) e^{-(z-z_0)T} \end{aligned}$$

[†] d'ora in avanti questa ipotesi verrà mantenuta

In definitiva, per ogni $T \geq 0$ vale la seguente uguaglianza:

$$\int_T^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} [\phi(t) - \mathcal{L}\{f\}(z_0)] dt + e^{-(z-z_0)T} [\mathcal{L}\{f\}(z_0) - \phi(T)]$$

Adesso, fissato $\epsilon > 0$ (arbitrariamente piccolo) e posto $\hat{T}(\epsilon) = \max\{T(\epsilon), \tilde{T}\}$, comunque si prenda $T > \hat{T}(\epsilon)$ valgono le seguenti stime:

$$\begin{aligned} |e^{-(z-z_0)T} [\mathcal{L}\{f\}(z_0) - \phi(T)]| &= \underbrace{|e^{-(z-z_0)T}|}_{<1} \underbrace{|[\mathcal{L}\{f\}(z_0) - \phi(T)]|}_{<\epsilon} < \epsilon \\ \left| (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} [\phi(t) - \mathcal{L}\{f\}(z_0)] dt \right| &\leq |z - z_0| \epsilon \int_T^{+\infty} |e^{-(z-z_0)t}| dt \\ &= |z - z_0| \epsilon \int_T^{+\infty} e^{-t \operatorname{Re}(z-z_0)} dt \leq |z - z_0| \epsilon \int_0^{+\infty} e^{-t \operatorname{Re}(z-z_0)} dt = \epsilon \frac{|z - z_0|}{\operatorname{Re}(z - z_0)} \end{aligned}$$

Qualsiasi sia z appartenente alla chiusura di A , posto $\theta = \arg(z - z_0)$:

$$\frac{\operatorname{Re}(z - z_0)}{|z - z_0|} = \dagger \cos \theta \geq \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

ovvero:

$$\frac{|z - z_0|}{\operatorname{Re}(z - z_0)} \leq \frac{1}{\sin \alpha}$$

per cui la seconda stima può essere ulteriormente affinata:

$$\left| (z - z_0) \int_T^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} [\phi(t) - \mathcal{L}\{f\}(z_0)] dt \right| \leq \frac{\epsilon}{\sin \alpha}$$

Da tutto il ragionamento fatto segue la tesi del teorema, infatti si conclude che per ogni $\epsilon > 0$ esiste in corrispondenza $\hat{T}(\epsilon) > 0$ tale che:

$$\left| \int_T^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \right| < \epsilon \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right) \quad \forall T > \hat{T}(\epsilon)$$

e la disuguaglianza vale qualunque sia z appartenente alla chiusura di A . \square

[†] si ricordino i teoremi di trigonometria sui triangoli rettangoli (Figura 2.1)

!! Teorema 2.3.7.

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa localmente sommabile e sia inoltre $a_c < +\infty$ l'ascissa di convergenza della sua trasformata di Laplace. La funzione $z \mapsto \mathcal{L}\{f\}(z)$ è **olomorfa** sul semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a_c\}$ e **converge uniformemente a zero** se $|z| \rightarrow +\infty$ con z appartenente alla chiusura di A , avendo A lo stesso significato datogli dal teorema precedente.

Dimostrazione. Sia K un sottoinsieme compatto di \mathbb{C} tale che:

$$K \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a_c\}$$

Chiaramente, si possono scegliere $\alpha, \delta > 0$ in modo tale che sia $K \subset A$. Consideriamo ora la successione di funzioni $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da:

$$\phi_n : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a_c\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad \phi_n(z) = \int_0^n e^{-zt} f(t) dt$$

Il rapporto incrementale di ϕ_n espresso nella forma (1.3) è:

$$\begin{aligned} \frac{\phi_n(z+h) - \phi_n(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left(\int_0^n e^{-(z+h)t} f(t) dt - \int_0^n e^{-zt} f(t) dt \right) = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^n [e^{-(z+h)t} - e^{-zt}] f(t) dt = \int_0^n \frac{e^{-(z+h)t} - e^{-zt}}{h} f(t) dt \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-(z+h)t} - e^{-zt}}{h} &= \frac{1}{h} e^{-zt} (e^{-ht} - 1) = \frac{1}{h} e^{-zt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ht)^k}{k!} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{h} e^{-zt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-ht)^k}{k!} = \frac{1}{h} e^{-zt} \sum_{k=1}^{\infty} (-ht) \frac{(-ht)^{k-1}}{k!} = \\ &= \frac{1}{h} e^{-zt} (-ht) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-ht)^{k-1}}{k!} = (-t) e^{-zt} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-ht)^{k-1}}{k!} = \\ &= (-t) e^{-zt} \left(1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-ht)^{k-1}}{k!} \right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \dagger (-t) e^{-zt} \end{aligned}$$

[†] la convergenza è uniforme $\forall z \in K$ e $\forall t \in [0, n]$

pertanto:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi_n(z+h) - \phi_n(z)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^n \frac{e^{-(z+h)t} - e^{-zt}}{h} f(t) dt = \\ &= \int_0^n \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-(z+h)t} - e^{-zt}}{h} f(t) dt = \int_0^n (-t) e^{-zt} f(t) dt \end{aligned}$$

e l'ultimo integrale esiste sicuramente nelle ipotesi del teorema. Segue che:

$$\exists \phi'_n(z) = \int_0^n (-t) e^{-zt} f(t) dt \quad \forall z \in K$$

ovvero ϕ_n è *olomorfa* su K per ogni $n \in \mathbb{N}$. Grazie al teorema precedente sappiamo che $\phi_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \mathcal{L}\{f\}(z)$ *uniformemente* su K e quindi $\mathcal{L}\{f\}(z)$ è *olomorfa* su K in quanto limite uniforme di una successione di funzioni olomorfe. Per l'arbitrarietà di K si deduce che $\mathcal{L}\{f\}(z)$ è **olomorfa** sull'intero semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > a_c\}$. La prima parte del teorema è provata. Fissiamo ora $\epsilon > 0$ piccolo a piacere; posto $z_0 = a_c + \delta$ esiste $T_1 > 0$ tale che:

$$\int_0^{T_1} |e^{-z_0 t} f(t)| dt < \frac{\epsilon}{3} \quad (2.7)$$

Preso arbitrariamente $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ si ha:

$$|e^{-zt} f(t)| \leq |e^{-z_0 t} f(t)| \quad \text{infatti} \quad e^{-t \operatorname{Re} z} \leq e^{-t \operatorname{Re} z_0} \quad (t \geq 0)$$

per cui anche:

$$\left| \int_0^{T_1} e^{-zt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{T_1} |e^{-zt} f(t)| dt \leq \int_0^{T_1} |e^{-z_0 t} f(t)| dt < \frac{\epsilon}{3}$$

Per il **Teorema 2.3.6** esiste inoltre una costante reale $T_2 > 0$ tale che:

$$\left| \int_{T_2}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$ appartenente alla chiusura dell'insieme A (vedi Figura 2.1). Supposto $T_1 < T_2$ (non è restrittivo, in quanto se fosse $T_1 > T_2$ si può ridurre

[†] infatti la funzione integrale $g(x) = \int_0^x |e^{-z_0 t} f(t)| dt$ è continua in $x_0 = 0$ e $g(0) = 0$

la costante T_1 mantenendo valida la (2.7), essendo la funzione integranda non negativa, fino ad ottenere la disuguaglianza voluta) si ha:

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-zt} f(t) dt \right| \leq \int_{T_1}^{T_2} |e^{-zt} f(t)| dt = \int_{T_1}^{T_2} e^{-t \operatorname{Re} z} |f(t)| dt$$

Ora:

$$\int_{T_1}^{T_2} e^{-t \operatorname{Re} z} |f(t)| dt \leq \dagger (e^{-T_1 \operatorname{Re} z} + e^{-T_2 \operatorname{Re} z}) \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt$$

pertanto:

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-zt} f(t) dt \right| \leq (e^{-T_1 \operatorname{Re} z} + e^{-T_2 \operatorname{Re} z}) \int_{T_1}^{T_2} |f(t)| dt$$

Se $|z| \rightarrow +\infty$ con z che si mantiene dentro la chiusura dell'insieme A , allora anche $\operatorname{Re} z \rightarrow +\infty$ e quindi esiste $\rho(\epsilon) > 0$ tale che:

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-zt} f(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{se } |z| > \rho(\epsilon)$$

In definitiva, essendo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = \int_0^{T_1} e^{-zt} f(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-zt} f(t) dt + \int_{T_2}^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt$$

si conclude che:

$$\left| \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt \right| < \epsilon$$

per ogni z appartenente alla chiusura di A con $|z| > \rho(\epsilon)$. Ne segue la tesi. \square

Osservazione 16. Se esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che l'applicazione $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ sia sommabile sull'intervallo $[0, +\infty)$ allora, tenendo presente tutti i risultati ottenuti e la dimostrazione del teorema precedente, si ha che $\mathcal{L}\{f\}(z)$ converge uniformemente a zero per $|z| \rightarrow +\infty$ sull'insieme $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0\}$.

Osservazione 17. Se f e g sono due funzioni sommabili sull'intervallo $[0, +\infty)$ e se $f * g(t) = 0$ q.d. allora $f(t) = 0$ q.d. oppure $g(t) = 0$ q.d. Infatti, fissato un compatto $K \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ esistono infiniti punti di K in cui $\mathcal{L}\{f\}(z) = 0$ oppure $\mathcal{L}\{g\}(z) = 0$: ne segue che per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z > 0$ è $\mathcal{L}\{f\}(z) = 0$ oppure $\mathcal{L}\{g\}(z) = 0$. Sia, per fissare le idee, $\mathcal{L}\{f\}(z) = 0$: per il **Teorema 2.3.5** risulta allora $f(t) = 0$ quasi ovunque (infatti $\mathcal{L}\{0\} \equiv 0$).

$\dagger e^{-\lambda x} \leq e^{-\lambda a} + e^{-\lambda b} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \forall x \in [a, b]$

2.4 Antitrasformata

Come si vedrà nel prossimo capitolo, nell'applicazione della *trasformata di Laplace* si incontra spesso il problema di dover determinare quale funzione abbia una data trasformata. A tal proposito, viene universalmente utilizzata la notazione $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ per indicare la trasformata inversa di Laplace della funzione di variabile complessa F , ovvero:

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \iff F = \mathcal{L}\{f\}$$

e la funzione f viene di solito chiamata *antitrasformata* della funzione F . Sotto le opportune ipotesi, per determinare l'antitrasformata di una funzione F è quindi necessario trovare una funzione f che soddisfi l'equazione integrale:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt = F(z) \quad (2.8)$$

Grazie al **Teorema 2.3.5** sappiamo che, a meno di sottoinsiemi di misura nulla nell'intervallo $[0, +\infty)$, la soluzione dell'equazione (2.8) è univocamente determinata. Come già osservato, è chiaro infatti che se consideriamo ad esempio una funzione che differisca da f in un numero finito di punti allora anch'essa è una soluzione dell'equazione (2.8), ma tali soluzioni artificiose non sono di alcuna utilità nelle applicazioni. Si osservi inoltre che non tutte le funzioni complesse sono trasformate di Laplace: affinché possano esserlo è necessario che siano *olomorfe* ed uniformemente convergenti a zero in un opportuno intorno dell'infinito (**Teorema 2.3.7**). Per esempio, data:

$$F : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad F(z) = z^3$$

sicuramente non esiste alcuna funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\mathcal{L}\{f\} = F$, infatti, pur essendo olomorfa, $|F(z)| = |z^3| = |z|^3 \not\rightarrow 0$ $_{|z| \rightarrow \infty}$. Lo stesso discorso vale anche per la funzione:

$$F : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tale che} \quad F(z) = e^z$$

Si osservi infine che se l'ascissa di convergenza $a_c = -\infty$ allora la trasformata di Laplace è una costante (segue dal teorema di Liouville) ed inoltre, essendo uniformemente convergente a zero, è necessariamente la costante nulla.

! **Teorema 2.4.1** (Bromwich).

Siano x_0, x_1 due numeri reali con $x_0 < x_1$ e sia $z \mapsto F(z)$ una funzione olomorfa sulla striscia $\{z \in \mathbb{C} : x_0 < \operatorname{Re} z < x_1\}$. Esistano $\epsilon > 0$ tale che $\epsilon < \frac{x_1 - x_0}{2}$ ed una funzione non negativa G , sommabile su \mathbb{R} e tale che risulti:

$$|F(x + iy)| \leq G(y) \quad \forall x \in [x_0 + \epsilon, x_1 - \epsilon] \quad e \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Allora esiste $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile tale che:

$$F(z) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-zt} f(t) dt \quad \forall z : x_0 + \epsilon \leq \operatorname{Re} z \leq x_1 - \epsilon$$

In particolare, se $x_1 = +\infty$ con:

$$|F(x + iy)| \leq G(y) \quad \forall x \in [x_0 + \epsilon, +\infty) \quad e \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

allora F è una trasformata unilatera di Laplace, cioè esiste $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ localmente sommabile tale che $F(z) = \mathcal{L}\{f\}(z)$.

Dimostrazione. La funzione $y \mapsto F(x + iy)e^{(x+iy)t}$ è sommabile su tutto \mathbb{R} qualunque sia t e qualunque sia $x \in (x_0 + \epsilon, x_1 - \epsilon)$, infatti:

$$|F(x + iy)e^{(x+iy)t}| = |F(x + iy)| |e^{(x+iy)t}| \leq e^{xt} G(y)$$

quindi:

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x + iy)e^{(x+iy)t}| dy \leq e^{xt} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) dy \in \mathbb{R}$$

Ora, si consideri per ogni $x \in (x_0 + \epsilon, x_1 - \epsilon)$ la retta Γ_x del piano complesso parallela all'asse immaginario e passante per il punto $(x, 0) \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma_x : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad \Gamma_x(\tau) = (x, \tau)$$

Grazie all'osservazione preliminare che abbiamo fatto, la funzione:

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} F(z) e^{zt} dz \quad t \in \mathbb{R}$$

è sicuramente ben definita, infatti:

$$\int_{\Gamma_x} F(z) e^{zt} dz = i \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{F(x + i\tau) e^{(x+i\tau)t}}_{\text{sommabile su } \mathbb{R} \ \forall t} d\tau$$

ed è inoltre indipendente da x . Per verificarlo, si prenda un ulteriore numero reale x' scelto in modo tale che risulti $x_0 + \epsilon < x' < x < x_1 - \epsilon$ e siano poi $y, y' \in \mathbb{R}$ con $y' < 0 < y$. Sia γ la poligonale chiusa di vertici, rispettivamente:

$$A = x' + iy' \quad B = x + iy' \quad C = x + iy \quad D = x' + iy$$

e siano poi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ e γ_4 i suoi singoli segmenti orientati indicati in figura[†]:

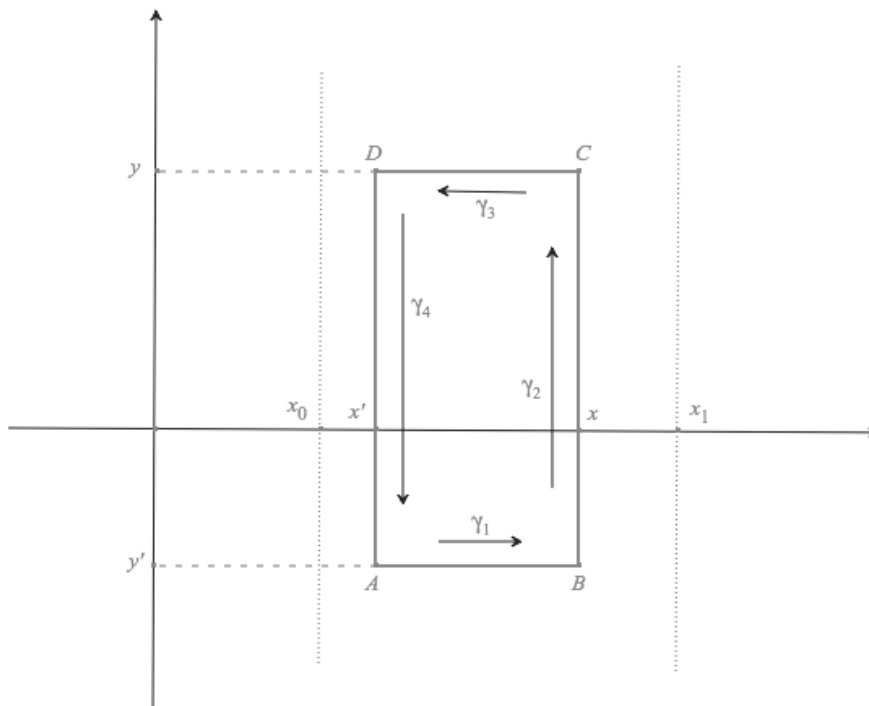


Figura 2.2: Teorema di Bromwich

Per ipotesi, F è *olomorfa* sulla striscia $\{z \in \mathbb{C} : x_0 < \operatorname{Re} z < x_1\}$ quindi ivi lo sarà anche la funzione $F(z)e^{zt}$. Per il lemma di *Cauchy-Goursat*:

$$\int_{\gamma} F(z)e^{zt} dz = 0$$

ovvero:

$$\int_{\gamma_1} F(z)e^{zt} dz + \int_{\gamma_2} F(z)e^{zt} dz + \int_{\gamma_3} F(z)e^{zt} dz + \int_{\gamma_4} F(z)e^{zt} dz = 0$$

[†] per fissare le idee, si pensino x e x' fissati, mentre y e y' variabili

da cui:

$$\int_{-\gamma_4} F(z)e^{zt} dz = \int_{\gamma_2} F(z)e^{zt} dz + \int_{\gamma_1} F(z)e^{zt} dz - \int_{-\gamma_3} F(z)e^{zt} dz$$

essendo $-\gamma_4$ e $-\gamma_3$, rispettivamente, i segmenti γ_4 e γ_3 percorsi in senso opposto rispetto a quello indicato nella Figura 2.2. Posto:

$$\gamma_1(\tau) = (x' + \tau(x - x'), y') \quad - \quad \gamma_3(\tau) = (x' + \tau(x - x'), y) \quad \tau \in [0, 1]$$

risulta:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_1} F(z)e^{zt} dz \right| &= \left| \int_0^1 F(x' + \tau(x - x') + iy') e^{[x' + \tau(x - x') + iy']t} \cdot (x - x') d\tau \right| \\ &\leq (x - x') \int_0^1 |F(x' + \tau(x - x') + iy')| e^{[x' + \tau(x - x')]t} d\tau \\ &\leq (x - x') G(y') \int_0^1 e^{[x' + \tau(x - x')]t} d\tau \end{aligned}$$

con:

$$e^{[x' + \tau(x - x')]t} \leq e^{xt} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad e^{[x' + \tau(x - x')]t} \leq e^{x't} \quad \forall t < 0 \quad (\tau \in [0, 1])$$

pertanto, in definitiva:

$$\left| \int_{\gamma_1} F(z)e^{zt} dz \right| \leq \begin{cases} G(y')(x - x')e^{xt} & t \geq 0 \\ G(y')(x - x')e^{x't} & t < 0 \end{cases}$$

e con un ragionamento analogo si ottiene anche la seguente stima:

$$\left| \int_{-\gamma_3} F(z)e^{zt} dz \right| \leq \begin{cases} G(y)(x - x')e^{xt} & t \geq 0 \\ G(y)(x - x')e^{x't} & t < 0 \end{cases}$$

Si osservi che, una volta fissati x e x' , il segmento γ_1 dipende effettivamente solo da y' mentre il segmento $-\gamma_3$ solo da y , ecco spiegato il motivo delle stime. Poiché la funzione $G \geq 0$ è per ipotesi sommabile su \mathbb{R} ed essendo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(y) dy = \int_{-\infty}^0 G(y) dy + \int_0^{+\infty} G(y) dy = \dagger \int_0^{+\infty} [G(y) + G(-y)] dy$$

[†] basta effettuare nel primo integrale il cambio di variabile $y = -\sigma$

esiste di sicuro una successione non negativa $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tale che:

$$y_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{e} \quad G(y_m) + G(-y_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

Si prendano adesso tutte le poligonali chiuse $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ottenute in corrispondenza dei punti della successione $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$, come indicato in figura:

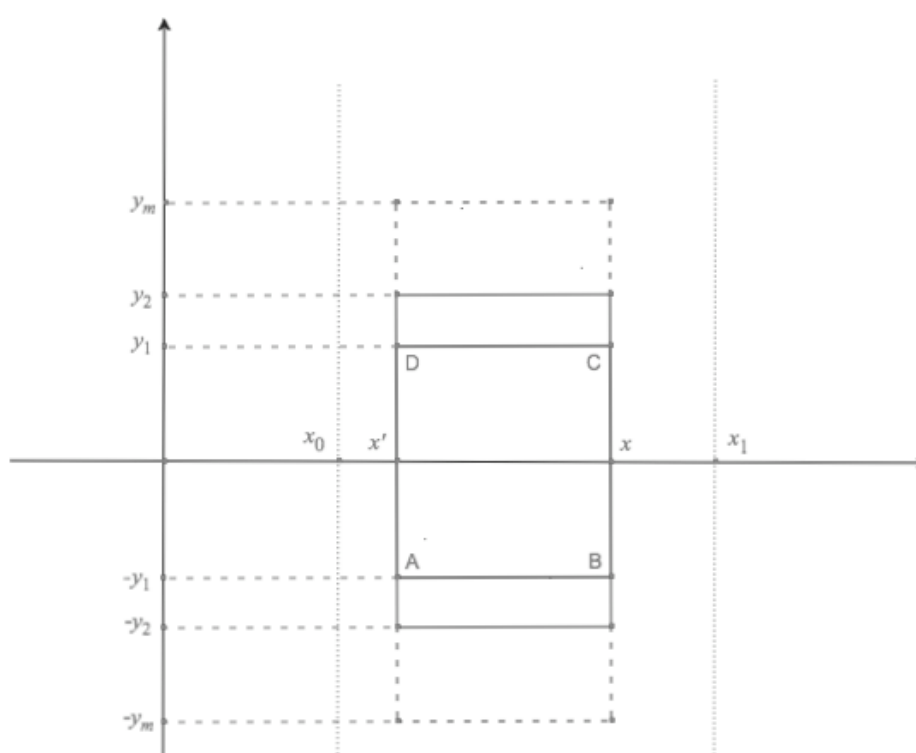


Figura 2.3: Successione di poligonali chiuse

Tutte le poligonali sono da intendersi percorse in senso positivo (antiorario), come quella della Figura 2.2. Chiamati γ_j^m $j = 1, \dots, 4$ i quattro segmenti orientati che costituiscono la poligonale γ_m risulta, $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\gamma_4^m} F(z)e^{zt} dz = \int_{\gamma_2^m} F(z)e^{zt} dz + \int_{\gamma_1^m} F(z)e^{zt} dz - \int_{-\gamma_3^m} F(z)e^{zt} dz$$

Le stime ottenute in precedenza sussistono ovviamente anche in ognuno dei casi che stiamo attualmente esaminando, perciò:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\int_{\gamma_1^m} F(z) e^{zt} dz - \int_{-\gamma_3^m} F(z) e^{zt} dz \right) = 0$$

infatti:

$$\left| \int_{\gamma_1^m} F(z) e^{zt} dz - \int_{-\gamma_3^m} F(z) e^{zt} dz \right| \leq (x - x')(e^{xt} + e^{x't}) [G(y_m) + G(-y_m)]$$

ed il secondo membro della disuguaglianza tende a zero per $m \rightarrow +\infty$, qualunque sia $t \in \mathbb{R}$ ed in qualunque modo si fossero fissati fin dall'inizio x e x' .

Da tutto il ragionamento fatto segue che:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-\gamma_4^m} F(z) e^{zt} dz = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_2^m} F(z) e^{zt} dz$$

ovvero, con un piccolo abuso di notazione:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{x' - iy_m}^{x' + iy_m} F(z) e^{zt} dz = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{x - iy_m}^{x + iy_m} F(z) e^{zt} dz$$

e questo significa esattamente che:

$$\int_{\Gamma_{x'}} F(z) e^{zt} dz = \int_{\Gamma_x} F(z) e^{zt} dz$$

Dall'arbitrarietà di x e x' deduciamo quindi che:

$$t \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} F(z) e^{zt} dz \quad t \in \mathbb{R}$$

è effettivamente una funzione indipendente da x . Si chiami f tale funzione:

$$f : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} F(z) e^{zt} dz$$

Sappiamo già che, posto $\Gamma_x : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ $\Gamma_x(\tau) = (x, \tau)$, si ha:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_x} F(z) e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + i\tau) e^{(x+i\tau)t} d\tau$$

ovvero:

$$2\pi e^{-xt} f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + i\tau)^{i\tau t} d\tau = \dagger \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy)^{iyt} dy \quad (2.9)$$

D'altra parte, le applicazioni $y \mapsto \operatorname{Re} F(x + iy)$ e $y \mapsto \operatorname{Im} F(x + iy)$ sono localmente a variazione limitata (ovvero lo sono su ogni intervallo compatto) e quindi come conseguenza della (2.9) e del teorema di Jordan (si veda il libro [3] della bibliografia, Capitolo I, paragrafo 2.6) si ha la tesi, infatti:

$$F(z) = F(x + iy) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-(x+iy)t} f(t) dt = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{-m}^m e^{-zt} f(t) dt$$

Se poi $x_1 = +\infty$, poiché $\forall x \in [x_0 + \epsilon, +\infty)$ vale:

$$|f(t)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + iy) e^{(x+iy)t} dy \right| \leq \frac{e^{xt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(y) dy$$

passando al limite per $x \rightarrow +\infty$ si trae $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$ cioè $F = \mathcal{L}\{f\}$. \square

! Teorema 2.4.2.

Sia γ una curva di \mathbb{C} , regolare a tratti, semplice e chiusa e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ con $\operatorname{Re} z < x_0$ per ogni $z \in \gamma$. Sia poi F una funzione olomorfa su un aperto contenente la chiusura della componente connessa non limitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma$ con

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} F(z) = 0$$

$$|F(x + iy)| \leq G(y) \quad \forall x \geq x_0 \quad e \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

essendo G una funzione non negativa e sommabile su \mathbb{R} . Allora:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) e^{zt} dz \quad \forall t > 0$$

Dimostrazione. Sia $\rho > 0$ tale che tutti i punti di γ appartengano all'insieme:

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < \rho, \operatorname{Re} z < x_0\}$$

e sia σ la curva parametrizzata da $\sigma : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$ con $\sigma(\theta) = x_0 + \rho e^{i(\theta+\pi)}$.

[†] la variabile di integrazione è una variabile muta, sostituisco τ con y

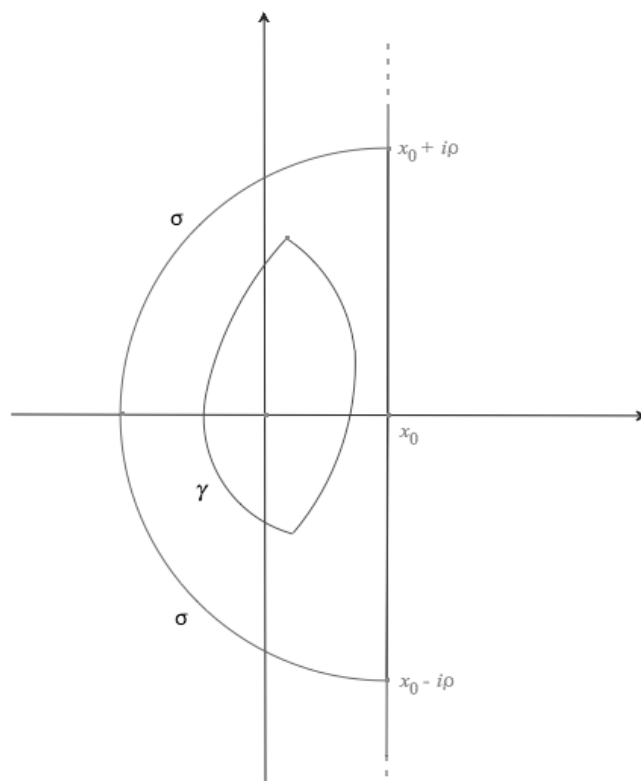


Figura 2.4: Cammini chiusi nel campo complesso

Per ipotesi F è *olomorfa* su un aperto contenente la chiusura della componente connessa non limitata di $\mathbb{C} \setminus \gamma$ quindi ivi sarà *olomorfa* anche la funzione $F(z)e^{zt}$. Considerato il cammino chiuso e regolare a tratti ottenuto a partire dal punto $x_0 - i\rho$ percorrendo prima il segmento verticale indicato in Figura 2.4 e poi l'arco σ , dal lemma di *Cauchy-Goursat* si ha:

$$\int_{\gamma} F(z)e^{zt} dz = 0 \quad \text{e} \quad \int_{x_0 - i\rho}^{x_0 + i\rho} F(z)e^{zt} dz + \int_{\sigma} F(z)e^{zt} dz = 0$$

per cui:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z)e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0 - i\rho}^{x_0 + i\rho} F(z)e^{zt} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} F(z)e^{zt} dz \quad (2.10)$$

Si osservi che, per ipotesi, la funzione F è sicuramente definita sull'arco σ e quindi ha senso definire $\mu_\rho := \sup_{|z-x_0|=\rho} |F(z)|$. Preso $t > 0$ ad arbitrio, si ha:

$$\left| \int_\sigma F(z) e^{zt} dz \right| = \left| \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F(x_0 + \rho e^{i(\theta+\pi)}) e^{(x_0 + \rho e^{i(\theta+\pi)})t} \rho i e^{i(\theta+\pi)} d\theta \right|$$

Ora:

$$e^{i(\theta+\pi)} = \cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi) = -\cos \theta - i \sin \theta$$

perciò, ricordando che $|i| = 1$ ed anche $|e^{i(\theta+\pi)}| = 1$:

$$\left| \int_\sigma F(z) e^{zt} dz \right| \leq \rho \mu_\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |e^{(x_0 - \rho \cos \theta - i \rho \sin \theta)t}| d\theta$$

d'altra parte $|e^{(x_0 - \rho \cos \theta - i \rho \sin \theta)t}| = e^{x_0 t - \rho t \cos \theta}$ pertanto, in prima analisi:

$$\left| \int_\sigma F(z) e^{zt} dz \right| \leq \rho \mu_\rho e^{x_0 t} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \cos \theta} d\theta \quad (2.11)$$

Adesso si noti che la funzione $\theta \mapsto e^{-\rho t \cos \theta}$ è non negativa e *pari*, quindi essendo l'intervallo di integrazione simmetrico rispetto all'origine vale che:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \cos \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \cos \theta} d\theta$$

ed inoltre:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \sin \theta} d\theta$$

infatti, preso arbitrariamente $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$ risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\xi \cos \theta} - e^{-\xi \sin \theta} d\theta &= \dagger \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-\xi \cos(\varphi + \frac{\pi}{4})} - e^{-\xi \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})} d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \xi (\cos \varphi - \sin \varphi)} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \xi (\cos \varphi + \sin \varphi)} d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \xi \cos \varphi}}_{\text{pari}} \left(\underbrace{e^{\frac{\sqrt{2}}{2} \xi \sin \varphi} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2} \xi \sin \varphi}}_{\text{dispari}} \right) d\varphi = 0 \end{aligned}$$

[†] $\theta = \varphi + \frac{\pi}{4}$, $d\theta = d\varphi$

di conseguenza:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \cos \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \sin \theta} d\theta \quad (2.12)$$

La funzione integranda al secondo membro della (2.12) sull'intervallo $[0, \frac{\pi}{2}]$ può essere maggiorata da $e^{-\frac{2}{\pi}\rho t \theta}$ infatti[†]:

$$e^{-\rho t \sin \theta} \leq e^{-\frac{2}{\pi}\rho t \theta} \iff -\rho t \sin \theta \geq -\frac{2}{\pi}\rho t \theta \iff \sin \theta \leq \frac{2}{\pi}\theta$$

e l'ultima disuguaglianza può essere provata con tecniche elementari di calcolo differenziale. Ne segue che:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \sin \theta} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi}\rho t \theta} d\theta = \left[-\frac{\pi}{2\rho t} e^{-\frac{2}{\pi}\rho t \theta} \right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2\rho t} (1 - e^{-\rho t})$$

e, chiaramente:

$$\frac{\pi}{2\rho t} (1 - e^{-\rho t}) < \frac{\pi}{2\rho t}$$

quindi, in definitiva:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho t \cos \theta} d\theta < \frac{\pi}{\rho t}$$

pertanto la stima (2.11) può essere ulteriormente affinata in questo modo:

$$\left| \int_{\sigma} F(z) e^{zt} dz \right| < \pi \frac{e^{x_0 t}}{t} \mu_{\rho} \quad t > 0$$

e poiché $\mu_{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0$ per l'ipotesi su F , da tutto il ragionamento fatto si ha:

$$\int_{\sigma} F(z) e^{zt} dz \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 0 \quad \forall t > 0$$

Ora, l'uguaglianza (2.10) non è detto che valga per ogni $\rho > 0$, però sicuramente vale per ogni $\rho \geq \rho_0$ essendo ρ_0 il minimo tra tutti i numeri reali che soddisfano la richiesta iniziale della dimostrazione, per cui l'uguaglianza (2.10) si mantiene valida passando al limite per $\rho \rightarrow +\infty$, ottenendo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} F(z) e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{x_0}} F(z) e^{zt} dz$$

essendo Γ_{x_0} la retta parallela all'asse immaginario passante per il punto $(x_0, 0)$ e grazie al teorema di Bromwich si ottiene la tesi. \square

[†] si osservi che $\sin \theta \geq 0$ per ogni $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ed inoltre per ipotesi $t > 0$

Teorema 2.4.3 (Paley-Wiener).

Sia F olomorfa sull'insieme $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ e sia:

$$\eta := \sup_{x \in \mathbb{R}, x > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x + iy)|^2 dy < +\infty$$

Allora $\exists f \in L^2(0, +\infty)$ tale che $F(z) = \mathcal{L}\{f\}(z)$ per ogni z con $\operatorname{Re} z > 0$ e:

$$2\pi \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt \leq \eta$$

Dimostrazione. Si veda il libro [3] della bibliografia, Capitolo I (3-13). \square

2.5 Esempi

In questa sezione calcolo le trasformate di Laplace per alcune funzioni utili nelle applicazioni. Per semplificare i calcoli ed anticipare le situazioni che verranno affrontate nel prossimo capitolo, considero funzioni a valori reali.

2.5.1 Funzioni polinomiali

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) \equiv 1$. Risulta:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \int_0^t d\tau = t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

quindi in questo caso $a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |t|$. Ora, poiché $t \geq 0$, si ha:

$$\frac{1}{t} \log |t| = \frac{1}{t} \log t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad a_c = 0$$

Non resta che calcolare esplicitamente la trasformata:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) \stackrel{\operatorname{Re} z > 0}{=} \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \left[-\frac{e^{-zt}}{z} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{z}$$

Osservazione 18. Il dominio naturale della funzione $z \mapsto \frac{1}{z}$ è \mathbb{C}^* ma se essa viene considerata come trasformata di Laplace della funzione costante uguale ad 1, allora necessariamente esso va ristretto al semipiano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Sia $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = t^n$ con $n \in \mathbb{N}$. Risulta:

$$\int_0^t g(\tau) d\tau = \int_0^t \tau^n d\tau = \left[\frac{\tau^{n+1}}{n+1} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{t^{n+1}}{n+1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

quindi in questo caso $a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|$. Poiché $t \geq 0$, si ha:

$$\frac{1}{t} \log \left| \frac{t^{n+1}}{n+1} \right| = \frac{1}{t} \log \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{n+1}{t} \log t - \frac{\log(n+1)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

perciò $a_c = 0$. Ora, si può dimostrare per induzione su $n \geq 0$ che, in generale:

$$g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = t^n \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{g\}(z) = \frac{n!}{z^{n+1}} \quad \text{Re } z > 0$$

infatti per $n = 0$ l'affermazione è già stata provata ed infine:

$$\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-zt} dt = \left[-\frac{e^{-zt}}{z} t^{n+1} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + \frac{n+1}{z} \int_0^{+\infty} t^n e^{-zt} dt = \frac{(n+1)!}{z^{n+2}}$$

Come conseguenza di quanto ottenuto e della linearità della trasformazione di Laplace, si può facilmente calcolare la trasformata di una qualsiasi funzione polinomiale $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$. Essa è, per $\text{Re } z > 0$:

$$\mathcal{L}\{p\}(z) = a_n \frac{n!}{z^{n+1}} + a_{n-1} \frac{(n-1)!}{z^n} + \dots + a_1 \frac{1}{z^2} + a_0 \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^n a_k \frac{k!}{z^{k+1}}$$

2.5.2 Funzioni trigonometriche

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sin(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta:

$$\int_0^t \sin(\lambda \tau) d\tau = \left[-\frac{\cos(\lambda \tau)}{\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{\lambda} [1 - \cos(\lambda t)]$$

Poiché $\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} [1 - \cos(\lambda t)]$ si ha:

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{\lambda} [1 - \cos(\lambda t)] \right| = 0$$

Ora, per calcolare la trasformata di f , servono due integrazioni per parti:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin(\lambda t) dt = \underbrace{\left[-\frac{e^{-zt}}{z} \sin(\lambda t) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}}_{=0} + \frac{\lambda}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \cos(\lambda t) dt$$

d'altra parte:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} \cos(\lambda t) dt = \underbrace{\left[-\frac{e^{-zt}}{z} \cos(\lambda t) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}}_{=\frac{1}{z}} - \frac{\lambda}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin(\lambda t) dt$$

e dai due calcoli fatti segue che:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin(\lambda t) dt = \frac{\lambda}{z} \left(\frac{1}{z} - \frac{\lambda}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin(\lambda t) dt \right)$$

Attraverso semplici passaggi algebrici si ricava in definitiva:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin(\lambda t) dt = \frac{\lambda}{z^2} \left(\frac{z^2 + \lambda^2}{z^2} \right)^{-1} = \frac{\lambda}{z^2 + \lambda^2}$$

Sia $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \cos(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta:

$$\int_0^t \cos(\lambda \tau) d\tau = \left[\frac{\sin(\lambda \tau)}{\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$$

Poiché $\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda}$ si ha:

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \right| = 0$$

ed in questo caso la trasformata di Laplace può essere ottenuta rapidamente come conseguenza dei calcoli già eseguiti, infatti:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} \cos(\lambda t) dt = \frac{1}{z} - \frac{\lambda}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin(\lambda t) dt = \frac{1}{z} - \frac{\lambda^2}{z(z^2 + \lambda^2)} = \frac{z}{z^2 + \lambda^2}$$

Si osservi che, in particolare, quando $\lambda = 1$, si ha:

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(z) = \frac{1}{1 + z^2} \quad \mathcal{L}\{\cos t\}(z) = \frac{z}{1 + z^2}$$

ed entrambe le trasformate sono da intendersi definite sul semipiano $\operatorname{Re} z > 0$.

2.5.3 Funzioni esponenziali

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta:

$$\int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau = \left[\frac{e^{\lambda \tau}}{\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1)$$

- $\boxed{\lambda > 0}$ $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) = +\infty$ perciò:

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right|$$

Ora:

$$\frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \right| = \frac{1}{t} \log \frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} = \frac{\log(e^{\lambda t} - 1)}{t} - \frac{\log \lambda}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda$$

infatti:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^{\lambda t} - 1)}{t} \stackrel{H}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t} - 1} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda}{1 - \frac{1}{e^{\lambda t}}} = \lambda$$

dunque in questo caso $a_c = \lambda$.

- $\boxed{\lambda < 0}$ $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) = -\frac{1}{\lambda}$ perciò:

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \right|$$

Ora:

$$\frac{1}{t} \log \left| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \right| = \frac{1}{t} \log \frac{e^{\lambda t}}{|\lambda|} = \frac{\log(e^{\lambda t})}{t} - \frac{\log |\lambda|}{t} = \lambda - \frac{\log |\lambda|}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda$$

dunque anche in questo caso $a_c = \lambda$.

Adesso non rimane che determinare la trasformata di Laplace:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{\lambda t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(z-\lambda)} dt = \left[-\frac{e^{-t(z-\lambda)}}{z-\lambda} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = \frac{1}{z-\lambda}$$

Si osservi che, in particolare, quando $\lambda = \pm 1$, si ha:

$$\mathcal{L}\{e^t\}(z) = \frac{1}{z-1} \quad \operatorname{Re} z > 1 \quad \mathcal{L}\{e^{-t}\}(z) = \frac{1}{z+1} \quad \operatorname{Re} z > -1$$

Un esempio calcolabile semplicemente per linearità è il seguente:

$$\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = -\frac{e^{-\lambda t} - e^{-\mu t}}{\lambda - \mu} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}^*, \quad \lambda \neq \mu$$

Posto $\sigma = \max\{\lambda, \mu\}$ si ha $\mathcal{L}\{\varphi\} : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \sigma\} \rightarrow \mathbb{C}$ con:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \frac{1}{\mu - \lambda} \left(\frac{1}{z + \lambda} - \frac{1}{z + \mu} \right) = \frac{1}{(z + \lambda)(z + \mu)}$$

2.5.4 Funzioni iperboliche

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \sinh(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^t \sinh(\lambda \tau) d\tau &= \int_0^t \frac{e^{\lambda \tau} - e^{-\lambda \tau}}{2} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\lambda \tau}}{\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\lambda \tau}}{-\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} - 2) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

perciò:

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} - 2) \right|$$

- $\boxed{\lambda > 0}$ In questo caso vale che:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} - 2) \right| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} - 2) \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{e^{\lambda t} - 2}{2\lambda} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(e^{\lambda t} - 2)}{t} - \frac{\log(2\lambda)}{t} \right) = \lambda \end{aligned}$$

pertanto $a_c = \lambda$.

- $\boxed{\lambda < 0}$ In questo caso vale che:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} + e^{-\lambda t} - 2) \right| &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{2\lambda} (e^{-\lambda t} - 2) \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \frac{e^{-\lambda t} - 2}{2|\lambda|} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(e^{-\lambda t} - 2)}{t} - \frac{\log(2|\lambda|)}{t} \right) = -\lambda \end{aligned}$$

pertanto $a_c = -\lambda$.

In definitiva, l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace per la funzione $t \mapsto \sinh(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$ è $a_c = |\lambda|$. Ora:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \sinh(\lambda t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left(\frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{\lambda t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{-\lambda t} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \lambda} - \frac{1}{z + \lambda} \right) = \frac{\lambda}{z^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

Sia $g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) = \cosh(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^t \cosh(\lambda \tau) d\tau &= \int_0^t \frac{e^{\lambda \tau} + e^{-\lambda \tau}}{2} d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t e^{\lambda \tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda \tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{\lambda \tau}}{\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\lambda \tau}}{-\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

perciò:

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{1}{2\lambda} (e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}) \right|$$

e con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che anche per la funzione g l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace è $a_c = |\lambda|$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g\}(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-zt} \cosh(\lambda t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} \left(\frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{\lambda t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-zt} e^{-\lambda t} dt \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z - \lambda} + \frac{1}{z + \lambda} \right) = \frac{z}{z^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

Si osservi che, in particolare, quando $\lambda = 1$, si ha:

$$\mathcal{L}\{\sinh t\}(z) = \frac{1}{z^2 - 1} \quad \operatorname{Re} z > 1 \quad \mathcal{L}\{\cosh t\}(z) = \frac{z}{z^2 - 1} \quad \operatorname{Re} z > 1$$

2.5.5 Funzioni varie

Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t \sin(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau) d\tau &= \int_0^t \tau \sin(\lambda \tau) d\tau = \left[-\frac{\cos(\lambda \tau)}{\lambda} \tau \right]_{\tau=0}^{\tau=t} + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \cos(\lambda \tau) = \\ &= -t \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{\sin(\lambda \tau)}{\lambda} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \frac{1}{\lambda^2} [\sin(\lambda t) - \lambda t \cos(\lambda t)] \end{aligned}$$

e, qualunque sia $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\nexists \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda^2} [\sin(\lambda t) - \lambda t \cos(\lambda t)]$ perciò:

$$a_c = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \left| \frac{\sin(\lambda t) - \lambda t \cos(\lambda t)}{\lambda^2} \right|$$

Ora:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \log \left| \frac{\sin(\lambda t) - \lambda t \cos(\lambda t)}{\lambda^2} \right| &= \frac{\log |\sin(\lambda t) - \lambda t \cos(\lambda t)|}{t} - \frac{2 \log |\lambda|}{t} = \\ &= \frac{\log |t|}{t} + \frac{\log \left| \frac{\sin(\lambda t)}{t} - \lambda \cos(\lambda t) \right|}{t} - \frac{2 \log |\lambda|}{t} \Rightarrow a_c = 0 \end{aligned}$$

Essendo $f'(t) = \sin(\lambda t) + \lambda t \cos(\lambda t)$ si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t \sin(\lambda t) dt &= \underbrace{\left[-\frac{e^{-zt}}{z} t \sin(\lambda t) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}}_{=0} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} f'(t) dt = \\ &= \frac{1}{z} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-zt} \sin(\lambda t) dt}_{\frac{\lambda}{z^2 + \lambda^2}} + \frac{\lambda}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t \cos(\lambda t) dt \end{aligned}$$

Posto $\varphi(t) = t \cos(\lambda t)$, risulta $\varphi'(t) = \cos(\lambda t) - \lambda t \sin(\lambda t)$ quindi:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-zt} t \cos(\lambda t) dt &= \underbrace{\left[-\frac{e^{-zt}}{z} t \cos(\lambda t) \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}}_{=0} + \frac{1}{z} \int_0^{+\infty} e^{-zt} \varphi'(t) dt = \\ &= \frac{1}{z} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-zt} \cos(\lambda t) dt}_{\frac{z}{z^2 + \lambda^2}} - \frac{\lambda}{z} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-zt} t \sin(\lambda t) dt}_{\mathcal{L}\{f\}(z)} \end{aligned}$$

Pertanto, dalle due integrazioni per parti che ho effettuato, segue che:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \frac{1}{z} \frac{\lambda}{z^2 + \lambda^2} + \frac{\lambda}{z} \left(\frac{1}{z} \frac{z}{z^2 + \lambda^2} - \frac{\lambda}{z} \mathcal{L}\{f\}(z) \right)$$

e, sviluppando i calcoli:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \frac{2\lambda}{z(z^2 + \lambda^2)} \left(\frac{z^2 + \lambda^2}{z^2} \right)^{-1} = \frac{2\lambda}{z(z^2 + \lambda^2)} \frac{z^2}{z^2 + \lambda^2} = \frac{2\lambda z}{(z^2 + \lambda^2)^2}$$

Sia $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t \cos(\lambda t)$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Con un ragionamento analogo a quello precedente, si dimostra che anche per la funzione φ l'ascissa di convergenza della trasformata di Laplace è $a_c = 0$ ed il suo calcolo esplicito segue direttamente da tutti i risultati già ottenuti:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} t \cos(\lambda t) dt = \frac{1}{z} \frac{z}{z^2 + \lambda^2} - \frac{\lambda}{z} \frac{2\lambda z}{(z^2 + \lambda^2)^2} = \frac{z^2 - \lambda^2}{(z^2 + \lambda^2)^2}$$

Osservazione 19. Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione localmente sommabile e sia $-\infty < a_c < +\infty$ l'ascissa di convergenza della sua trasformata di Laplace. Data la funzione $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ con $\phi(t) = e^{\lambda t} f(t)$ si ha che anche ϕ è trasformabile secondo Laplace con ascissa di convergenza $a_c^\phi = a_c + \lambda$ e vale inoltre la seguente relazione tra le trasformate:

$$\mathcal{L}\{\phi\}(z) = \mathcal{L}\{f\}(z - \lambda)$$

infatti:

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} \phi(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-zt} (e^{\lambda t} f(t)) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t(z-\lambda)} f(t) dt$$

posto $w = z - \lambda$, l'ultimo integrale scritto converge se $\operatorname{Re} w > a_c$ ovvero se $\operatorname{Re} z - \lambda > a_c \Rightarrow \operatorname{Re} z > a_c + \lambda$.

Sfruttando l'osservazione precedente e tutti i risultati già ottenuti, si possono determinare facilmente le trasformate di Laplace per molte funzioni utili nelle applicazioni, senza dover calcolare nessun integrale. Ad esempio:

- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t^n e^{\lambda t}$ con $n \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta $a_c = \lambda$ e:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \mathcal{L}\{t \mapsto t^n\}(z - \lambda) = \frac{n!}{(z - \lambda)^{n+1}}$$

- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. Risulta $a_c = \lambda$ e:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \mathcal{L}\{t \mapsto \sin \mu t\}(z - \lambda) = \frac{\mu}{(z - \lambda)^2 + \mu^2}$$

- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. Risulta $a_c = \lambda$ e:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \mathcal{L}\{t \mapsto \cos \mu t\}(z - \lambda) = \frac{z - \lambda}{(z - \lambda)^2 + \mu^2}$$

- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t e^{\lambda t} \sin \mu t$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. Risulta $a_c = \lambda$ e:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \mathcal{L}\{t \mapsto t \sin \mu t\}(z - \lambda) = \frac{2\mu(z - \lambda)}{(z^2 - 2\lambda z + \lambda^2 + \mu^2)^2}$$

- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t e^{\lambda t} \cos \mu t$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$. Risulta $a_c = \lambda$ e:

$$\mathcal{L}\{f\}(z) = \mathcal{L}\{t \mapsto t \cos \mu t\}(z - \lambda) = \frac{(z - \lambda)^2 - \mu^2}{(z^2 - 2\lambda z + \lambda^2 + \mu^2)^2}$$

Molto importanti sono anche i seguenti due casi:

- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t \sinh \lambda t$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta $a_c = |\lambda|$ e:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(z) &= \mathcal{L}\left\{t \mapsto \frac{1}{2}(te^{\lambda t} - te^{-\lambda t})\right\}(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(z - \lambda)^2} - \frac{1}{(z + \lambda)^2} \right] = \\ &= \frac{(z + \lambda)^2 - (z - \lambda)^2}{2(z - \lambda)^2(z + \lambda)^2} = \frac{2\lambda z}{(z - \lambda)^2(z + \lambda)^2} = \frac{2\lambda z}{(z^2 - \lambda^2)^2} \end{aligned}$$

- $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t \cosh \lambda t$ con $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Risulta $a_c = |\lambda|$ e:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(z) &= \mathcal{L}\left\{t \mapsto \frac{1}{2}(te^{\lambda t} + te^{-\lambda t})\right\}(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(z - \lambda)^2} + \frac{1}{(z + \lambda)^2} \right] = \\ &= \frac{(z + \lambda)^2 + (z - \lambda)^2}{2(z - \lambda)^2(z + \lambda)^2} = \frac{z^2 + \lambda^2}{(z - \lambda)^2(z + \lambda)^2} = \frac{z^2 + \lambda^2}{(z^2 - \lambda^2)^2} \end{aligned}$$

2.5.6 Calcolo di un'antitrasformata

Si supponga di dover determinare un'antitrasformata di Laplace per la funzione di variabile complessa data da:

$$F(z) = \frac{3z + 7}{z^2 - 2z - 3}$$

I teoremi visti assicurano che la ricerca non è vana e per evitare il calcolo di integrali complessi si può percorrere una strada più semplice scrivendo:

$$F(z) = \frac{3z + 7}{(z + 1)(z - 3)} = \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z - 3} = \frac{A(z - 3) + B(z + 1)}{(z + 1)(z - 3)}$$

e l'uguaglianza impostata dà luogo al sistema lineare:

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ -3A + B &= 7 \end{aligned}$$

la cui soluzione è data chiaramente dalla coppia $A = -1$ e $B = 4$. Segue che:

$$F(z) = \frac{3z + 7}{(z + 1)(z - 3)} = -\frac{1}{z + 1} + \frac{4}{z - 3}$$

e sfruttando i risultati ottenuti nella **Sezione 2.5.3** ricaviamo che:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t) = -e^{-t} + 4e^{3t}$$

dunque $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = -e^{-t} + 4e^{3t}$ è una funzione la cui trasformata di Laplace coincide con F . Si tenga presente che essa non è l'unica applicazione che soddisfa questa richiesta, da qui l'uso dell'articolo indeterminativo; tuttavia, come già sappiamo, una qualunque altra applicazione che abbia F come trasformata differisce necessariamente da f solo su un sottoinsieme di misura nulla nell'intervallo $[0, +\infty)$. Pertanto, posto:

$$\Psi = \{f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : \mathcal{L}\{f\} = F\}$$

e considerata la relazione di equivalenza \sim definita su Ψ ponendo:

$$f \sim g \iff f = g \quad \text{quasi dappertutto}$$

si ha:

$$\Psi / \sim = [-e^{-t} + 4e^{3t}]_{\sim}$$

2.6 Un'ulteriore proprietà

Il **Teorema 2.3.1** asserisce una proprietà molto importante della trasformata di Laplace, ma a volte nelle applicazioni non è sufficiente fermarsi alla derivata prima di f , in quanto si può aver bisogno di determinare anche la trasformata della derivata seconda o, in generale, della derivata n -esima.

Proposizione 2.6.1. *Sia $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione complessa di classe \mathcal{C}^∞ e si supponga che esista $\mathcal{L}\{f\}(z_0)$ con $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-z_0 t} f^{(k)}(t) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, esiste $\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(z_0)$ e, in particolare:*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(z_0) = z_0^n \hat{f}(z_0) - \sum_{j=1}^n z_0^{n-j} f^{(j-1)}(0) \quad (2.13)$$

Dimostrazione. Si procede per induzione su $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

- se $n = 1$ l'affermazione segue direttamente dal **Teorema 2.3.1**
- supposto che la (2.13) valga per un certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f^{(n+1)}(t) dt &= [e^{-z_0 t} f^{(n)}(t)]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + z_0 \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f^{(n)}(t) dt \\ &= -f^{(n)}(0) + z_0 \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f^{(n)}(t) dt}_{\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(z_0)} \end{aligned}$$

ed applicando l'ipotesi induttiva otteniamo che:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-z_0 t} f^{(n+1)}(t) dt &= -f^{(n)}(0) + z_0 \left(z_0^n \hat{f}(z_0) - \sum_{j=1}^n z_0^{n-j} f^{(j-1)}(0) \right) \\ &= z_0^{n+1} \hat{f}(z_0) - z_0 \sum_{j=1}^n z_0^{n-j} f^{(j-1)}(0) - f^{(n)}(0) = \\ &= z_0^{n+1} \hat{f}(z_0) - \sum_{j=1}^{n+1} z_0^{(n+1)-j} f^{(j-1)}(0) \end{aligned}$$

L'uguaglianza (2.13) resta quindi verificata per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. \square

Osservazione 20. Sotto opportune ipotesi, tutte le derivate di f ammettono trasformata, che ha la stessa ascissa di convergenza della trasformata di f .

2.7 Tavole di trasformazione

Tutte le funzioni sono da intendersi definite sull'intervallo $[0, +\infty)$ mentre le rispettive trasformate su un opportuno semipiano del campo complesso.

<i>Funzione</i>	<i>Trasformata</i>
$\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)$	$\lambda_1 \hat{f}(z) + \lambda_2 \hat{g}(z)$
$f^{(n)}(t)$	$z^n \hat{f}(z) - \sum_{j=1}^n z^{n-j} f^{(j-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{z} \hat{f}(z)$
$e^{\lambda t} f(t)$	$\hat{f}(z - \lambda)$
$\int_0^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$	$\hat{f}(z) \cdot \hat{g}(z)$

Tabella 2.1: Proprietà fondamentali della trasformata di Laplace

<i>Funzione $t \mapsto f(t)$</i>	<i>Trasformata $z \mapsto \hat{f}(z)$</i>
1	$\frac{1}{z}$
t^n	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$\sin \lambda t$	$\frac{\lambda}{z^2 + \lambda^2}$
$\cos \lambda t$	$\frac{z}{z^2 + \lambda^2}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{z - \lambda}$
$\sinh \lambda t$	$\frac{\lambda}{z^2 - \lambda^2}$
$\cosh \lambda t$	$\frac{z}{z^2 - \lambda^2}$
$t \sin \lambda t$	$\frac{2\lambda z}{(z^2 + \lambda^2)^2}$
$t \cos \lambda t$	$\frac{z^2 - \lambda^2}{(z^2 + \lambda^2)^2}$
$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(z - \lambda)^{n+1}}$
$e^{\lambda t} \sin \mu t$	$\frac{\mu}{(z - \lambda)^2 + \mu^2}$
$e^{\lambda t} \cos \mu t$	$\frac{z - \lambda}{(z - \lambda)^2 + \mu^2}$
$t \sinh \lambda t$	$\frac{2\lambda z}{(z^2 - \lambda^2)^2}$
$t \cosh \lambda t$	$\frac{z^2 + \lambda^2}{(z^2 - \lambda^2)^2}$

Tabella 2.2: Alcune trasformate fondamentali

Capitolo 3

Applicazioni

3.1 Un esempio introduttivo

La *trasformata di Laplace* trova naturale applicazione nella risoluzione di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Tali equazioni descrivono tipicamente l'andamento nel tempo di un sistema dinamico: è chiaro dunque come, almeno da un punto di vista fisico, tale trasformazione sia di grande utilità pratica. Le proprietà più importanti che rendono la trasformata di Laplace un potente mezzo risolutivo per questo tipo di equazioni sono la sua linearità e le formule per trasformare derivate ed integrali di funzioni, dimostrate nei **Teoremi 2.3.1, 2.3.2** e nella più generale **Proposizione 2.6.1**. Si supponga ad esempio di dover determinare una funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale da soddisfare la seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2f(t) = \sin 3t \quad (3.1)$$

con valori iniziali dati da $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Sicuramente, trasformando entrambi i membri, la (3.1) implica che:

$$\mathcal{L}\{f^{(2)}(t) + 2f(t)\}(z) = \mathcal{L}\{\sin 3t\}(z) \quad (3.2)$$

e, prima di procedere nei calcoli, si osservi che le equazioni (3.1) e (3.2) sono equivalenti a meno di sottoinsiemi di misura nulla nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Ora:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f^{(2)}(t) + 2f(t)\}(z) &= \mathcal{L}\{f^{(2)}(t)\}(z) + 2\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \dagger \\ &= z^2\mathcal{L}\{f(t)\}(z) - zf(0) - f'(0) + 2\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \mathcal{L}\{f(t)\}(z) \cdot (z^2 + 2)\end{aligned}$$

ed inoltre, grazie alla Tabella 2.2 si ha subito che:

$$\mathcal{L}\{\sin 3t\}(z) = \frac{3}{z^2 + 9}$$

pertanto l'equazione (3.2) diventa:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) \cdot (z^2 + 2) = \frac{3}{z^2 + 9} \quad (3.3)$$

Il problema iniziale è quindi diventato un problema legato alla determinazione di un'*antitrasformata di Laplace*, infatti la soluzione dell'equazione differenziale (3.1) è data da una funzione $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(z) = \frac{3}{(z^2 + 2)(z^2 + 9)}$$

Applichiamo il metodo delle frazioni parziali, già descritto nella Sezione 2.5.6:

$$\frac{3}{(z^2 + 2)(z^2 + 9)} = \frac{A}{z^2 + 2} + \frac{B}{z^2 + 9} = \frac{A(z^2 + 9) + B(z^2 + 2)}{(z^2 + 2)(z^2 + 9)}$$

e dalle relazioni precedenti si ricava il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 9A + 2B = 3 \end{cases}$$

la cui soluzione è data dalla coppia $A = \frac{3}{7}$, $B = -\frac{3}{7}$. A questo punto, con una piccola manipolazione e tenendo sempre in considerazione la Tabella 2.2:

$$\frac{3}{(z^2 + 2)(z^2 + 9)} = \frac{3}{7} \frac{1}{z^2 + 2} - \frac{3}{7} \frac{1}{z^2 + 9} = \frac{3}{7\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{z^2 + 2} - \frac{1}{7} \frac{3}{z^2 + 9}$$

perciò la soluzione dell'equazione (3.1) è data da:

$$f(t) = \frac{3}{7\sqrt{2}} \sin t\sqrt{2} - \frac{1}{7} \sin 3t, \quad t \geq 0$$

[†] si supponga che le ipotesi della Proposizione 2.6.1 siano verificate

Il procedimento che abbiamo seguito per risolvere la (3.1) si può formalizzare al caso generale, infatti, data una funzione $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ trasformabile secondo Laplace e data l'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$\sum_{k=0}^n a_k f^{(k)}(t) = \varphi(t) \quad (3.4)$$

con valori iniziali $f^{(k)}(0) = c_k \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$, trasformando ambo i membri della (3.4) ed utilizzando la linearità si ha:

$$a_0 \mathcal{L}\{f(t)\} + \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$$

e, supponendo che le ipotesi della **Proposizione 2.6.1** siano verificate:

$$a_0 \mathcal{L}\{f(t)\} + \sum_{k=1}^n a_k \left(z^k \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{j=1}^k z^{k-j} f^{(j-1)}(0) \right) = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$$

ovvero:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \sum_{k=0}^n a_k z^k - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_k z^{k-j} f^{(j-1)}(0) = \mathcal{L}\{\varphi(t)\}$$

Ora, esplicitando $\mathcal{L}\{f(t)\}$ e sostituendo i valori iniziali si ottiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{\varphi(t)\} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_k c_{j-1} z^{k-j}}{\sum_{k=0}^n a_k z^k}$$

dunque, in definitiva, la soluzione per $f(t)$ si ricava applicando la trasformata inversa al secondo membro della precedente equazione:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{\varphi(t)\} + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k a_k c_{j-1} z^{k-j}}{\sum_{k=0}^n a_k z^k} \right\} \quad (3.5)$$

Se tutti i valori iniziali sono nulli, ovvero $f^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n-1$, allora la formula ottenuta si semplifica molto, diventando:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{\varphi(t)\}}{\sum_{k=0}^n a_k z^k} \right\} \quad (3.6)$$

Di solito, con una certa dose di manipolazione e calcolo, le soluzioni di (3.5) e di (3.6) si possono ottenere senza ricorrere ad onerose integrazioni complesse.

3.2 Sistemi dinamici

In Fisica, il concetto di *sistema dinamico* si sviluppa dalla necessità di elaborare un modello matematico in grado di descrivere nel tempo tutte le grandezze utili alla rappresentazione e comprensione di un certo fenomeno. In generale, si cerca di individuare delle equazioni che leghino lo stato iniziale agli stati futuri ed in molti casi esse sono proprio equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti che, come è stato già osservato, si prestano molto bene ad essere risolte sfruttando la trasformazione oggetto di questa tesi. È mia intenzione mostrare in questa sezione alcuni casi significativi, risolti proprio attraverso l'ausilio della *trasformata di Laplace*.

3.2.1 Decadimento radioattivo

La radioattività è un insieme di processi atomici a seguito dei quali alcuni atomi instabili decadono in atomi di energia inferiore, raggiungendo così uno stato di maggiore stabilità. Durante il fenomeno vengono emesse delle radiazioni in accordo con le celeberrime leggi di conservazione della massa/energia e della quantità di moto. Il processo continua nel tempo fino a quando gli elementi che vengono prodotti (che possono essere a loro volta radioattivi) non raggiungono una condizione di stabilità permanente. Il momento esatto in cui un atomo instabile subisce il processo di decadimento è casuale e non prevedibile, di conseguenza è aleatorio anche l'intervallo di tempo che separa due decadimenti successivi. Quello che però si osserva è che, dato un campione di un particolare isotopo, il numero di decadimenti rispetta una stringente legge statistica: dato un intervallo di tempo Δt , il numero di decadimenti che avvengono è proporzionale al numero di atomi presenti nel campione considerato. Tale legge viene matematicamente descritta dalla ben nota equazione differenziale:

$$\dot{N} = -\lambda N \quad (3.7)$$

dove $\lambda \neq 0$ è la costante di decadimento mentre N esprime il numero di atomi presenti al tempo t (\dot{N} indica la derivata prima di N rispetto al tempo).

Riscrivendo la (3.7) in modo più formale otteniamo:

$$\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t) = 0$$

che è un'equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti costanti.

Trasformando, si ha:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dN(t)}{dt} + \lambda N(t)\right\} = 0$$

da cui, posto N_0 il numero di atomi presenti nel campione al tempo $t = 0$:

$$-N_0 + z \mathcal{L}\{N(t)\} + \lambda \mathcal{L}\{N(t)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{N(t)\} = \frac{N_0}{z + \lambda}$$

Uno sguardo alla Tabella 2.2 permette immediatamente di concludere che:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad t \geq 0^\dagger \quad (3.8)$$

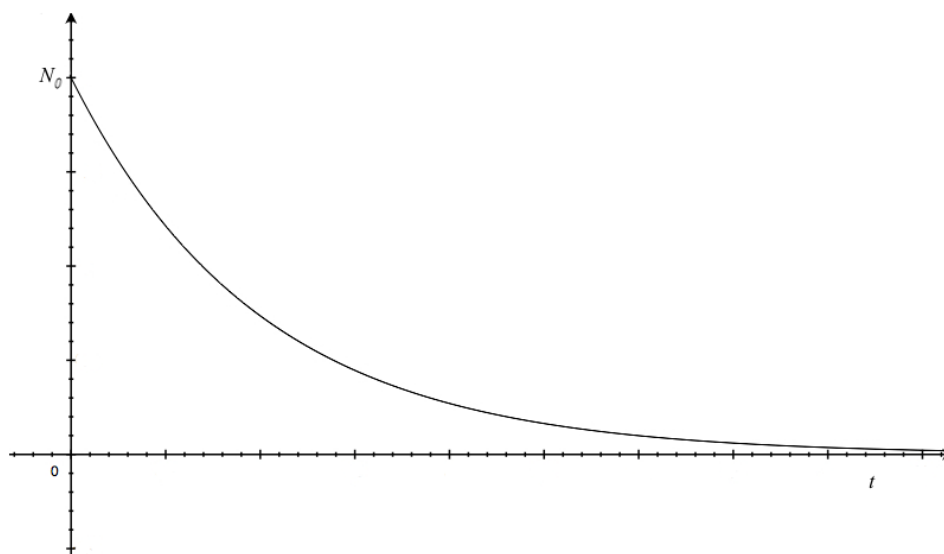


Figura 3.1: Decadimento radioattivo

[†] la soluzione trovata modella un fenomeno continuo, mentre il decadimento reale è un fenomeno discreto: tuttavia, nella maggioranza dei casi, il numero N è estremamente grande e quindi la (3.8) fornisce un'ottima approssimazione.

3.2.2 Circuiti RC

Un circuito RC è un circuito elettrico basato sulla presenza di una resistenza (R) e di un condensatore (C) e viene spesso utilizzato nei sintetizzatori. Tali circuiti possono essere considerati in evoluzione libera oppure con un generatore di tensione costante: in questa sezione, voglio descrivere l'andamento nel tempo delle grandezze fisiche che descrivono un circuito RC a cui è applicato un generatore di tensione costante, come ad esempio una pila.

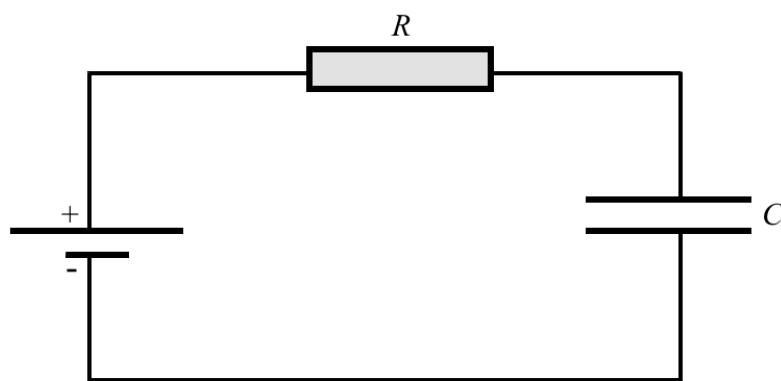


Figura 3.2: Circuito RC con generatore di tensione (costante)

Supponiamo che all'istante $t = 0$ il circuito si attivi (attraverso la chiusura di un interruttore) e chiamiamo \mathcal{E} la tensione costante ai capi del generatore. Dalla legge di Kirchhoff sugli sbalzi di tensione si ricava che:

$$\mathcal{E} = R \cdot i(t) + V(t) \quad (3.9)$$

essendo R il valore della resistenza, mentre $i(t)$ e $V(t)$ sono, rispettivamente, la corrente elettrica circolante e la tensione ai capi del condensatore all'istante temporale t . Chiamata C la capacità del condensatore, si ha:

$$i(t) = C \cdot V'(t)$$

quindi la (3.9) diventa un'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$\lambda V'(t) + V(t) - \mathcal{E} = 0^\dagger$$

[†] $\lambda = RC \neq 0$ (costante caratteristica del circuito).

Trasformando ambo i membri secondo Laplace si ottiene:

$$\mathcal{L}\{\lambda V'(t) + V(t) - \mathcal{E}\} = 0$$

da cui, posto $V_0 = V(0)$:

$$-\lambda V_0 + \lambda z \mathcal{L}\{V(t)\} + \mathcal{L}\{V(t)\} - \frac{\mathcal{E}}{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{V(t)\} = \frac{\lambda V_0 z + \mathcal{E}}{z(1 + \lambda z)}$$

ovvero:

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \frac{\lambda V_0}{1 + \lambda z} + \frac{\mathcal{E}}{z(1 + \lambda z)}$$

e con qualche manipolazione algebrica:

$$\mathcal{L}\{V(t)\} = \frac{\lambda V_0}{1 + \lambda z} + \frac{\mathcal{E}}{z} - \frac{\lambda \mathcal{E}}{1 + \lambda z} = \frac{V_0}{z + \frac{1}{\lambda}} - \frac{\mathcal{E}}{z + \frac{1}{\lambda}} + \frac{\mathcal{E}}{z} = \frac{V_0 - \mathcal{E}}{z + \frac{1}{\lambda}} + \frac{\mathcal{E}}{z}$$

Dalla Tabella 2.2 segue che:

$$V(t) = (V_0 - \mathcal{E})e^{-\frac{t}{\lambda}} + \mathcal{E}, \quad t \geq 0 \quad (3.10)$$

e, conseguentemente, la corrente elettrica circolante al tempo t è:

$$i(t) = -\frac{V_0 - \mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (3.11)$$

La presenza del generatore di tensione costante fa crescere nel tempo la tensione ai capi del condensatore, che parte dal valore V_0 e tende alla tensione costante \mathcal{E} del generatore; viceversa, la corrente elettrica nel circuito decresce esponenzialmente da un certo valore iniziale fino a tendere al valore $i = 0$.

3.2.3 Circuiti RL

Un circuito RL è un circuito elettrico basato sulla presenza di una resistenza (R) e di un induttore (L). Un induttore è un elemento dinamico che genera un campo magnetico al passaggio di corrente e nella pratica viene comunemente realizzato attraverso l'avvolgimento di un filo conduttore. Gli induttori sono impiegati in moltissimi dispositivi elettronici, come i trasformatori ed i motori elettrici. Come i circuiti RC, anche i circuiti RL possono essere considerati in evoluzione libera oppure con un generatore di tensione.

Sia dato un circuito RL come indicato in figura:

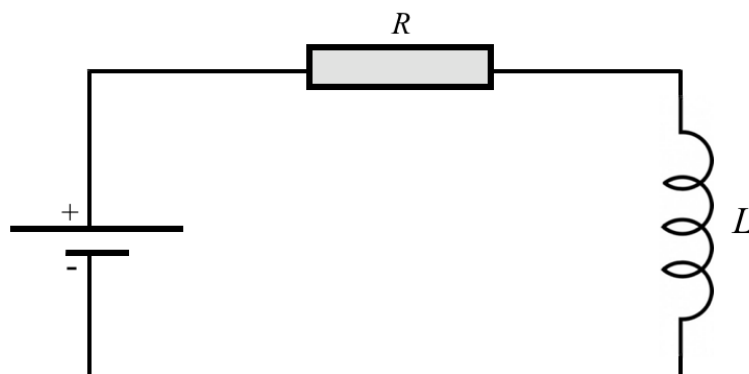


Figura 3.3: Circuito RL con generatore di tensione (costante)

Supponiamo che inizialmente l'induttore sia scarico: ciò significa che per $t < 0$ la corrente che circola nella maglia è nulla, mentre per $t > 0$, ovvero dopo l'attivazione del circuito a seguito della chiusura di un interruttore, si può scrivere, applicando sempre la legge di Kirchhoff sugli sbalzi di tensione ed usando la medesima notazione precedente:

$$\mathcal{E} = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} \dagger \quad (3.12)$$

Posto $\lambda = \frac{L}{R} \neq 0$ (costante di tempo caratteristica del circuito), l'equazione differenziale (3.12) assume la forma:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda} i(t) - \frac{\mathcal{E}}{L} = 0$$

Trasformando ambo i membri secondo Laplace ed esplicitando $\mathcal{L}\{i(t)\}$ si ha:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{\frac{\mathcal{E}}{Lz} + i(0)}{z + \frac{1}{\lambda}} = \frac{\mathcal{E} + i(0)Lz}{Lz(z + \frac{1}{\lambda})} \quad (3.13)$$

e la condizione richiesta che l'induttore sia inizialmente scarico comporta fisicamente che $i(0) = 0$, dunque la (3.13) diventa:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{\mathcal{E}}{Lz(z + \frac{1}{\lambda})}$$

[†] ho espresso con la lettera L il valore dell'induttanza

Ora effettuiamo le solite manipolazioni algebriche:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{\mathcal{E}}{Lz(z + \frac{1}{\lambda})} = \frac{\mathcal{E}\lambda}{Lz} - \frac{\mathcal{E}\lambda}{L(z + \frac{1}{\lambda})} = \frac{\mathcal{E}}{Rz} - \frac{\mathcal{E}}{R(z + \frac{1}{\lambda})}$$

pertanto:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}}\right)$$

La tensione ai capi dell'induttore si ricava semplicemente dalla relazione:

$$V_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = -L \frac{\mathcal{E}}{R} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{\lambda}}\right) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\lambda}}$$

3.2.4 Circuiti RLC

Un circuito RLC è un circuito elettrico che contiene, oltre al resistore, anche un induttore ed un condensatore, entrambi in grado di immagazzinare energia. Gli elementi del circuito possono essere disposti in serie oppure in parallelo: esaminerò il caso della disposizione in serie. Sia dato dunque un circuito RLC con un generatore di tensione costante, come indicato in figura:

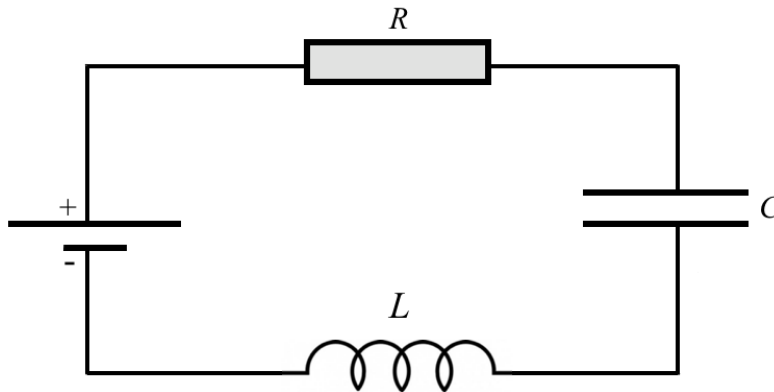


Figura 3.4: Circuito RLC con generatore di tensione (costante)

Applicando la legge di Kirchhoff sugli sbalzi di tensione e sostituendo le relazioni costitutive degli elementi che sono presenti nel circuito, si ottiene:

$$\mathcal{E} = R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_0 + L \frac{di(t)}{dt}, \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

dove ho usato le medesime notazioni precedenti. L'equazione (3.14) contiene un termine integrale, ma si presta comunque bene ad essere risolta attraverso l'ausilio della trasformata di Laplace, infatti trasformando ambo i membri:

$$\mathcal{L}\left\{R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_0 + L \frac{di(t)}{dt}\right\} = \frac{\mathcal{E}}{z}$$

e, posto $i_0 = i(0)$, applicando le proprietà dimostrate nella Sezione 2.3 si ha:

$$R \mathcal{L}\{i(t)\} + \frac{\mathcal{L}\{i(t)\}}{Cz} + \frac{V_0}{z} + L(-i_0 + z \mathcal{L}\{i(t)\}) = \frac{\mathcal{E}}{z}$$

ovvero, moltiplicando per z ed esplicitando $\mathcal{L}\{i(t)\}$:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{\mathcal{E} - V_0 + i_0 L z}{\frac{1}{C} + Rz + L z^2} \quad (3.15)$$

Dividendo per il valore dell'induttanza e definendo i parametri:

$$\alpha := \frac{R}{2L} \quad \omega := \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

detti, rispettivamente, *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione di risonanza*, la (3.15) assume la forma seguente:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1} + i_0 z}{\frac{1}{LC} + \frac{R}{L}z + z^2} = \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1} + i_0 z}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} \quad (3.16)$$

Per trovare una funzione $i(t)$ che soddisfi la (3.16) si procede in questo modo:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1} + i_0 z}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} = \underbrace{\frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1}}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}}_{\star} + \underbrace{\frac{i_0 z}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}}_{\diamond}$$

ora, supponendo che $\omega^2 - \alpha^2 > 0$:[†]

$$\star = \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1}}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} = \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1}}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2}$$

$$\diamond = i_0 \left[\frac{z + \alpha}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}{(z + \alpha)^2 + \omega^2 - \alpha^2} \right]$$

[†] si noti che, a priori, non è garantito che sia $\omega^2 - \alpha^2 > 0$

per cui, in definitiva, sempre dalla Tabella 2.2 si ha:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\star\} = \frac{\mathcal{E} - V_0}{L\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin t\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\diamond\} = i_0 e^{-\alpha t} \cos t\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} - \frac{i_0 \alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} e^{-\alpha t} \sin t\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$$

Ne segue che, con un semplice calcolo algebrico:

$$i(t) = \left(\frac{2\mathcal{E} - 2V_0 - Ri_0}{2L\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} \sin t\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} + i_0 \cos t\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} \right) e^{-\alpha t}$$

Se invece avessimo avuto $\omega^2 - \alpha^2 = 0$, la (3.16) sarebbe diventata:

$$\mathcal{L}\{i(t)\} = \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1} + i_0 z}{(z + \alpha)^2} = \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1}}{(z + \alpha)^2} + i_0 \frac{z}{(z + \alpha)^2}$$

con:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{(\mathcal{E} - V_0)L^{-1}}{(z + \alpha)^2} \right\} = [(\mathcal{E} - V_0)L^{-1}] te^{-\alpha t}$$

Ora, poiché risulta $te^{-\alpha t}|_{t=0} = 0$, dal **Teorema 2.3.1** segue che:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ i_0 \frac{z}{(z + \alpha)^2} \right\} = i_0 \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{d}{dt} te^{-\alpha t} \right\} = i_0 (e^{-\alpha t} - \alpha te^{-\alpha t})$$

pertanto, in definitiva:

$$i(t) = [(\mathcal{E} - V_0)L^{-1} - i_0 \alpha] te^{-\alpha t} + i_0 e^{-\alpha t}$$

Con un procedimento analogo si ottiene la soluzione della (3.14) anche nel restante caso in cui $\omega^2 - \alpha^2 < 0$. Si noti come le soluzioni trovate dipendano dalla corrente e della tensione ai capi del condensatore all'istante iniziale: note fisicamente queste due quantità si riesce ad attribuire alla soluzione dell'equazione (3.14) una forma univoca ed una volta stabilito l'andamento nel tempo della corrente elettrica si possono determinare le altre grandezze importanti per il circuito. Adesso, da un punto di vista fisico, bisognerebbe analizzare il comportamento del circuito in base ad ulteriori considerazioni, ma ciò va oltre gli obbiettivi di questa tesi.

3.2.5 Oscillatore armonico

Il moto armonico è un particolare moto unidimensionale descritto da un sistema meccanico che reagisce ad una perturbazione dall'equilibrio con un'accelerazione di richiamo proporzionale allo spostamento subito. Da un punto di vista dinamico, una possibile causa per questo tipo di moto è la ben nota forza di Hooke: se tale forza è l'unica agente, il sistema è detto *oscillatore armonico semplice* e la sua equazione differenziale è:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \quad (3.17)$$

Esempi di oscillatori armonici semplici sono dati dal pendolo (nel limite delle piccole oscillazioni) e da una massa attaccata ad una molla, come in figura:

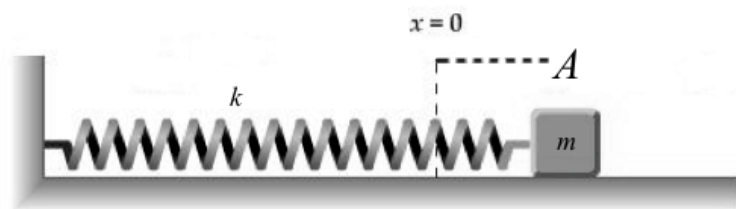


Figura 3.5: Oscillatore armonico semplice (molla)

Sistemi analoghi fuori del contesto meccanico sono, per esempio, i sistemi acustici vibranti e gli oscillatori armonici elettrici, tra cui il circuito RLC. Supponiamo, come indicato in Figura 3.5, che la massa m si trovi all'istante $t = 0$ in posizione $x(0) = A$ e che la sua velocità iniziale sia $\dot{x}(0) = v_0$. Trasformando la (3.17) si ottiene l'equazione algebrica:

$$-zx(0) - \dot{x}(0) + z^2 X(z) + \omega^2 X(z) = 0$$

ovvero, sostituendo le condizioni iniziali ed esplicitando $X(z)$:

$$X(z) = \frac{v_0 + Az}{z^2 + \omega^2} = \frac{v_0}{z^2 + \omega^2} + A \frac{z}{z^2 + \omega^2} \Rightarrow x(t) = v_0 \omega^{-1} \sin(\omega t) + A \cos(\omega t)$$

che rappresenta la classica legge oraria del moto armonico semplice.[†]

[†] nel caso esaminato vale la relazione $\omega^2 = km^{-1}$

3.3 Equazione integrale di Volterra

La *trasformata di Laplace* trova applicazione anche nella risoluzione di alcune importanti equazioni integrali, come mostrerò nelle prossime due sezioni. In generale, si chiama *equazione integrale* un'equazione funzionale in cui l'applicazione incognita compare sotto il segno di integrale. Tali equazioni sono molto importanti poiché hanno una forte relazione con le equazioni differenziali: in alcune circostanze fisiche, i problemi possono essere formulati in entrambi i modi (si vedano ad esempio le equazioni di Maxwell).

Il problema che porta il nome del matematico italiano Vito Volterra è il seguente: siano $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ due funzioni localmente sommabili. Trovare, se esiste, una funzione $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tale che:

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad t > 0 \quad (3.18)$$

Si osservi come prima cosa che, a seguito dell'*Osservazione 14*, fatti i dovuti prolungamenti con la funzione identicamente nulla nel semiasse negativo dei numeri reali, la (3.18) può essere riscritta nel seguente modo:

$$\varphi(t) = f(t) + g * \varphi(t), \quad t > 0$$

Se esistono $\mathcal{L}\{f\}$ e $\mathcal{L}\{g\}$ su un opportuno semipiano del campo complesso, trasformando ambo i membri della precedente uguaglianza si ottiene:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \mathcal{L}\{f\}(z) + \mathcal{L}\{g\}(z) \cdot \mathcal{L}\{\varphi\}(z)$$

da cui si ricava:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \frac{\mathcal{L}\{f\}(z)}{1 - \mathcal{L}\{g\}(z)}$$

perciò, se l'applicazione:

$$z \mapsto \frac{\mathcal{L}\{f\}(z)}{1 - \mathcal{L}\{g\}(z)}$$

è una trasformata di Laplace allora la soluzione dell'equazione (3.18) si ottiene antitrasformando:

$$\varphi = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{f\}}{1 - \mathcal{L}\{g\}} \right\}$$

Esempio 3.1. Si consideri l'equazione integrale:

$$\varphi(t) = \sin 2t + \int_0^t e^{t-\tau} \varphi(\tau) d\tau$$

Si ha:

$$\varphi(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{t \mapsto \sin 2t\}(z)}{1 - \mathcal{L}\{t \mapsto e^t\}(z)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2(z-1)}{(z^2+4)(z-2)} \right\}$$

Per determinare la funzione φ si procede in questo modo:

$$\frac{2(z-1)}{(z^2+4)(z-2)} = \frac{2z}{(z^2+4)(z-2)} - \frac{2}{(z^2+4)(z-2)}$$

Dai risultati sulla convoluzione abbiamo che:

$$\frac{2}{(z^2+4)(z-2)} = \frac{2}{z^2+4} \cdot \frac{1}{z-2} = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t \sin 2(t-\tau) e^{2\tau} d\tau \right\}$$

e, con un paio di integrazioni per parti, si ottiene:

$$\int_0^t \sin 2(t-\tau) e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{4} (e^{2t} - \sin 2t - \cos 2t)$$

Ora, poiché $\frac{1}{4} (e^{2t} - \sin 2t - \cos 2t)_{t=0} = 0$, dal **Teorema 2.3.1** ricaviamo:

$$\frac{2z}{(z^2+4)(z-2)} = \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{e^{2t} - \sin 2t - \cos 2t}{4} \right\} = \frac{1}{2} (e^{2t} - \cos 2t + \sin 2t)$$

pertanto, in definitiva:

$$\varphi(t) = \frac{e^{2t}}{4} + \frac{3}{4} \sin 2t - \frac{1}{4} \cos 2t$$

Osservazione 21. La (3.18) si può trovare anche nella forma seguente:

$$f(t) = \int_0^t g(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t > 0^\dagger \quad (3.19)$$

In tal caso, valgono le medesime considerazioni precedenti, ottenendo:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \frac{\mathcal{L}\{f\}(z)}{\mathcal{L}\{g\}(z)}$$

[†] la (3.18) si chiama anche equazione integrale di Volterra di 2^a specie, mentre la (3.19) viene chiamata equazione integrale di Volterra di 1^a specie

3.4 Equazione integrale di Abel

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$ e sia $f \in \mathcal{C}^1[0, +\infty)$ con $f(0) = 0$. Trovare, se esiste, una funzione φ tale che sia verificata la seguente uguaglianza:

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = f(t), \quad t > 0 \quad (3.20)$$

Sempre come conseguenza dell'*Osservazione 14*, fatti i dovuti prolungamenti, si ha che il primo membro della (3.20) non è altro che la convoluzione tra $t^{-\alpha}$ e φ per cui, supponendo verificate le dovute ipotesi, otteniamo:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau\right\}(z) = \mathcal{L}\{t \mapsto t^{-\alpha}\}(z) \cdot \mathcal{L}\{\varphi\}(z)$$

con:

$$\mathcal{L}\{t \mapsto t^{-\alpha}\}(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{-\alpha} dt \stackrel{\star}{=} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{z^{1-\alpha}} \quad \text{Re } z > 0$$

Osservazione 22. Se $v > -1$ vale che:

$$\Gamma(v) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{v-1} dx = \dagger \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} (\lambda t)^{v-1} dt = \lambda^v \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{v-1} dt$$

e quindi:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{v-1} dt = \frac{\Gamma(v)}{\lambda^v}$$

Si può dimostrare che la stessa uguaglianza vale anche nel caso in cui λ sia un numero complesso con parte reale strettamente positiva e da ciò, posto $v = 1 - \alpha$, segue l'uguaglianza \star dichiarata in precedenza.

Ora, trasformando secondo Laplace ambo membri della (3.20) si ha:

$$\Gamma(1-\alpha) \frac{\mathcal{L}\{\varphi\}(z)}{z^{1-\alpha}} = \mathcal{L}\{f\}(z) \quad \text{Re } z > 0$$

ovvero:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \frac{\mathcal{L}\{f\}(z)}{\Gamma(1-\alpha)} z^{1-\alpha} = \frac{\mathcal{L}\{f\}(z)}{\Gamma(1-\alpha) z^{\alpha-1}} = \frac{z \mathcal{L}\{f\}(z)}{\Gamma(1-\alpha) z^\alpha}$$

[†] $x = \lambda t, dx = \lambda dt \quad (\lambda > 0)$

Si consideri ora la funzione φ così definita:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad t > 0 \quad (3.21)$$

Essa verifica la richiesta sulle trasformate di Laplace, infatti:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right\}(z)$$

e, sottintendendo sempre i soliti prolungamenti, la trasformata che resta da determinare è quella della convoluzione tra $t^{\alpha-1}$ e $f'(t)$, per cui:

$$\mathcal{L}\left\{ \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right\}(z) = \mathcal{L}\{t \mapsto t^{\alpha-1}\}(z) \cdot \mathcal{L}\{f'(t)\}(z)$$

Si noti che, come conseguenza dell'ipotesi iniziale, risulta $\alpha > -1$ quindi:

$$\mathcal{L}\{t \mapsto t^{\alpha-1}\}(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} t^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{z^\alpha} \quad \operatorname{Re} z > 0$$

ed inoltre:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(z) = -f(0) + z \mathcal{L}\{f(t)\}(z) = z \mathcal{L}\{f(t)\}(z)$$

per cui, in definitiva:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}\left\{ \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \right\}(z) = \frac{z \mathcal{L}\{f\}(z)}{\Gamma(1-\alpha) z^\alpha}$$

Si può verificare direttamente che la funzione φ data nella (3.21) è soluzione dell'equazione di Abel anche se f non è trasformabile secondo Laplace: ciò significa che l'uso della trasformazione è stato puramente strumentale.

Esempio 3.2. La soluzione dell'equazione integrale:

$$\int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = 2t, \quad t > 0$$

è:

$$\varphi(t) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})(\sqrt{\pi})} \int_0^t \frac{2}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \frac{4}{\pi} \sqrt{t}$$

3.5 Sistemi di equazioni differenziali

La *trasformata di Laplace* è particolarmente utile anche nel caso in cui sia necessario risolvere un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Descriverò il metodo attraverso un esempio particolare e, per non appesantire troppo la notazione, indicherò con opportune lettere maiuscole le trasformate di Laplace. Sia dato il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - y(t) = e^t \\ x(t) + \dot{y}(t) = \sin t \end{cases}$$

scritto nella classica notazione della fisica matematica e che vogliamo risolvere secondo le condizioni iniziali $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$ [†]. Trasformando entrambe le equazioni del sistema si ha:

$$\begin{cases} -1 + zX(z) - Y(z) = \frac{1}{z-1} \\ X(z) + zY(z) = \frac{1}{z^2+1} \end{cases}$$

ed esplicitando le due trasformate si ottiene:

$$\begin{cases} X(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} + \frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{(z^2+1)^2} \\ Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} - \frac{1}{z^2+1} + \frac{1}{(z^2+1)^2} \end{cases}$$

Usando il metodo delle frazioni parziali, già spiegato in precedenza, si ricava:

$$X(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1} + \frac{2}{(z^2+1)^2} \right]$$

$$Y(z) = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1} + \frac{2z}{(z^2+1)^2} \right]$$

pertanto:

$$x(t) = \frac{1}{2} (e^t + 2 \sin t + \cos t - t \cos t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} (-e^t - \sin t + \cos t + t \sin t)$$

[†] $x, y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

È importante ricordarsi di controllare che le soluzioni verifichino le condizioni iniziali, infatti nella risoluzione di questo tipo di sistemi possono capitare alcuni casi eccezionali in cui si riesce a trovare una soluzione anche se il problema è mal posto. Si consideri per esempio il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + y(t) = 0 \\ \ddot{x}(t) + \dot{y}(t) + y(t) = e^t \end{cases}$$

a cui si richiede di soddisfare le condizioni iniziali:

$$x(0) = 1 \quad \dot{x}(0) = 0 \quad y(0) = 0$$

Il sistema delle equazioni trasformate è:

$$\begin{cases} zX(z) + Y(z) = 1 \\ z^2X(z) + (z+1)Y(z) = z + \frac{1}{z-1} \end{cases}$$

dalle quali, risolvendo, segue che:

$$X(z) = \frac{2}{z} - \frac{1}{z-1} \quad Y(z) = \frac{1}{z-1}$$

dunque:

$$x(t) = 2 - e^t \quad y(t) = e^t$$

Ora, il sistema sembrerebbe risolto, tuttavia le funzioni trovate non verificano le condizioni iniziali, infatti $y(0) = 1 \neq 0$. Risolvendo il sistema con i metodi tradizionali, senza fare uso della trasformata di Laplace, si ottiene:

$$x(t) = C - e^t \quad y(t) = e^t$$

e ciò significa che solo il valore iniziale di $x(t)$ è arbitrario, dunque il problema, per come l'abbiamo impostato, non è risolubile. Quest'ultimo esempio, molto importante, mostra chiaramente che, nel caso di sistemi di equazioni differenziali lineari, sebbene attraverso la trasformata di Laplace si arrivi alla soluzione corretta, se questa esiste, il metodo seguito può dare luogo a soluzioni erronee che non soddisfano le condizioni iniziali. In sostanza, nei casi dubbi, bisogna sempre controllare che le condizioni iniziali siano soddisfatte.

Appendice A

Spazi Connessi

Definizione A.1. Uno spazio topologico non vuoto (X, τ) si dice *connesso* se l'unica coppia di sottoinsiemi aperti e disgiunti la cui unione sia tutto lo spazio è data dalla sola coppia $\{\emptyset, X\}$. Un sottoinsieme $S \subseteq X$ si dice *connesso* se tale risulta rispetto alla topologia indotta da X .

Definizione A.2. Un *arco* in uno spazio topologico (X, τ) è una funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow X$. I punti $f(0)$ e $f(1)$ sono chiamati, rispettivamente, *punto iniziale* e *punto finale* dell'arco. Lo spazio topologico (X, τ) si dice *connesso per archi* se esiste sempre un *arco* che colleghi due punti arbitrariamente scelti, ovvero se $\forall x, y \in X$ esiste una funzione continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ con $f(0) = x$ e $f(1) = y$. Un sottoinsieme $S \subseteq X$ si dice *connesso per archi* se tale risulta rispetto alla topologia indotta da X .

Proposizione A.0.1. *Uno spazio topologico connesso per archi è connesso.*

Dimostrazione. Per assurdo, sia $X = A \cup B$ con A e B aperti non vuoti e disgiunti di X . Si prendano $a \in A$ e $b \in B$: per ipotesi, esiste un'applicazione continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ con $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Ora, dovrebbe valere che $f([0, 1]) = (A \cap f([0, 1])) \cup (B \cap f([0, 1]))$ quindi $f([0, 1])$ sarebbe esprimibile come unione di due aperti non vuoti e disgiunti, ma ciò è assurdo in quanto, essendo $[0, 1]$ connesso in \mathbb{R} , $f([0, 1])$ è un sottoinsieme connesso in X . \square

Definizione A.3. Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : [0, 1] \rightarrow X$ due *archi* che collegano i punti $x, y \in X$. Una *omotopia* tra f e g è una funzione continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che $H(t, 0) = f(t)$ e $H(t, 1) = g(t) \forall t$. Si dice che gli archi f e g sono *omotopi* se esiste un'omotopia tra loro.

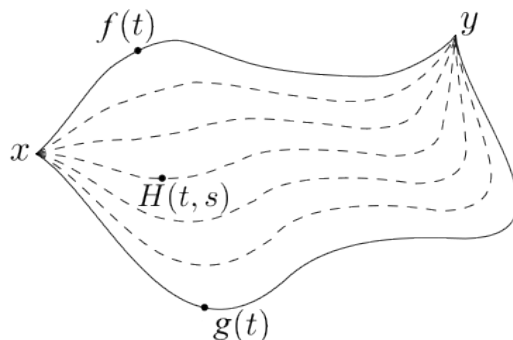


Figura A.1: Omotopia tra gli archi f e g

Definizione A.4. Sia (X, τ) uno spazio topologico non vuoto. Si dice che X è *semplicemente connesso* se è *connesso per archi* ed ogni arco chiuso è *omotopo* ad un punto (arco costante). Un sottoinsieme $S \subseteq X$ viene detto *semplicemente connesso* se tale risulta rispetto alla topologia indotta da X .

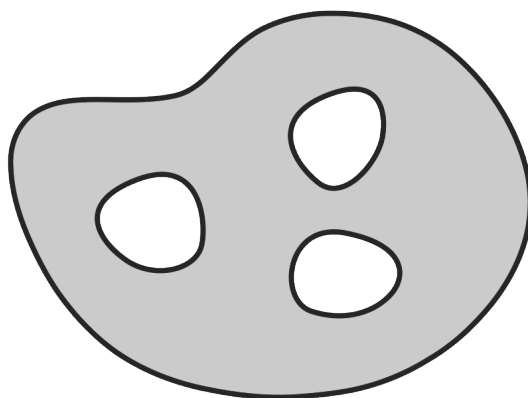


Figura A.2: Sottoinsieme di \mathbb{R}^2 non semplicemente connesso

Appendice B

Dimostrazioni (Sezione 1.3)

Dimostrazione. (**Teorema 1.3.3**)

\Rightarrow Se ω è esatta, allora per definizione $\exists F \in \mathcal{C}^1(D)$ tale che $dF = \omega$ quindi, preso un qualsiasi cammino γ chiuso e differenziabile a tratti, risulta:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} dF = 0$$

dove l'ultima uguaglianza segue immediatamente dal **Corollario 1.3.2**.

\Leftarrow Sia $(x_0, y_0) \in D$ scelto ad arbitrio. Osserviamo preliminarmente che se $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \rightarrow D$ sono due cammini differenziabili a tratti che collegano il punto (x_0, y_0) al generico punto (x, y) di D , cioè tali per cui:

$$\gamma_1(a) = \gamma_2(a) = (x_0, y_0) \quad \text{e} \quad \gamma_1(b) = \gamma_2(b) = (x, y)$$

allora vale che:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Infatti, posto $\tilde{\gamma}_2$ il cammino inverso di γ_2 , ovvero la curva:

$$\tilde{\gamma}_2 : [a, b] \rightarrow D \quad \text{tale che} \quad \tilde{\gamma}_2(t) := \gamma_2(a + b - t)$$

si ha che il cammino σ ottenuto concatenando γ_1 e $\tilde{\gamma}_2$ è differenziabile a tratti e chiuso, pertanto grazie all'ipotesi che assumiamo in questa implicazione:

$$0 \stackrel{hp.}{=} \int_{\sigma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\tilde{\gamma}_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Ora, poiché l'insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto connesso, $\forall (x, y) \in D$ esiste un cammino $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, differenziabile a tratti, che collega il punto (x_0, y_0) al punto (x, y) , cioè tale per cui $\gamma(a) = (x_0, y_0)$ e $\gamma(b) = (x, y)$. Si ponga:

$$F(x, y) := \int_{\gamma} \omega \quad (\text{B.1})$$

Si osservi che, per quanto preliminarmente osservato, la definizione è ben posta in quanto l'integrale che definisce F non dipende dalla scelta di γ . Resta da provare che $dF = \omega$, ovvero, posto $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, dobbiamo mostrare che $\partial_x F = P$ e $\partial_y F = Q$. Ora, per h abbastanza piccolo, essendo D aperto, il segmento s che collega il punto (x, y) al punto $(x+h, y)$ è interamente contenuto in D e può essere parametrizzato nel modo seguente: $s : [0, 1] \rightarrow D$, $s(t) = (x + ht, y)$. La figura successiva chiarisce le idee:

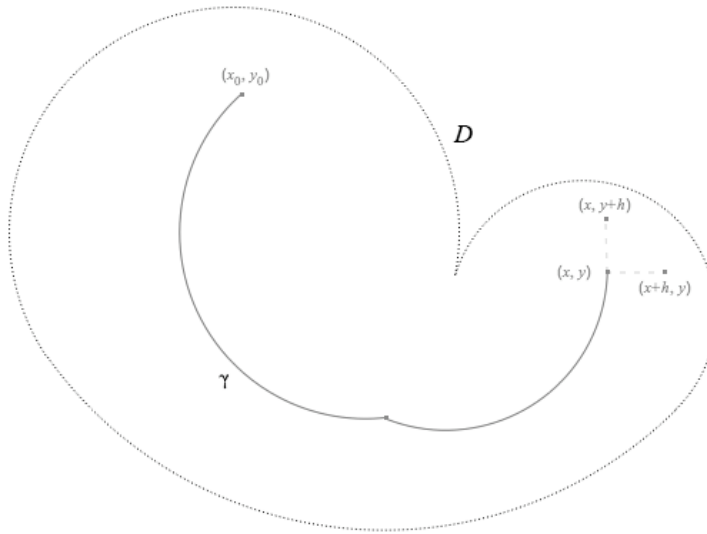


Figura B.1: Arco che collega i punti (x_0, y_0) e (x, y)

Chiamato τ il cammino ottenuto concatenando γ con s , risulta, per la (B.1):

$$\begin{aligned} F(x+h, y) - F(x, y) &= \int_{\tau} \omega - \int_{\gamma} \omega = \int_s \omega = \int_s P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_0^1 [P(x+ht, y) \cdot h + Q(x+ht, y) \cdot 0] dt = h \int_0^1 P(x+ht, y) dt \end{aligned}$$

Dunque, in definitiva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 P(x+ht, y) dt = \dagger \\ &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} P(x+ht, y) dt = \int_0^1 P(x, y) dt = P(x, y) \int_0^1 dt = P(x, y) \end{aligned}$$

In modo analogo, prendendo un opportuno segmentino verticale di lunghezza $h > 0$, si verifica che $\partial_y F(x, y) = Q(x, y)$ e ciò termina la dimostrazione. \square

Dimostrazione. (**Teorema 1.3.4**)

\Rightarrow L'implicazione è ovvia, segue direttamente dal **Teorema 1.3.3** in quanto la frontiera del rettangolo R è un particolare cammino chiuso e differenziabile a tratti (si ricordi che i dischi aperti in \mathbb{R}^2 sono sottoinsiemi connessi).

\Leftarrow Sia $O = (x_0, y_0)$ il centro del disco D e siano γ e σ i due cammini che collegano il punto O al generico punto $(x, y) \in D$, come indicato in figura:

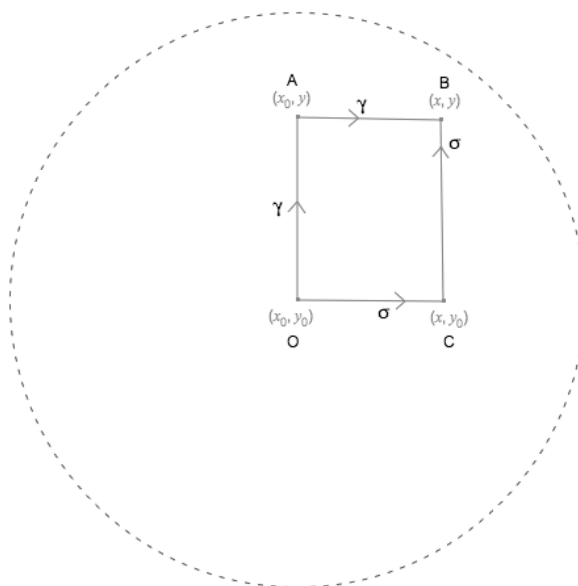


Figura B.2: Rettangolo chiuso in disco aperto

\dagger si può passare al limite sotto il segno di integrale perché c'è convergenza uniforme

Vale che:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\sigma} \omega$$

infatti, se si considera il rettangolo che ha per vertici i punti O , A , B e C (con i lati paralleli agli assi), posto $\tilde{\sigma}$ il cammino inverso di σ e chiamata τ la curva chiusa che si ottiene concatenando γ con $\tilde{\sigma}$, si ha:

$$0 \stackrel{hp.}{=} \int_{\tau} \omega = \int_{\gamma} \omega + \int_{\tilde{\sigma}} \omega = \int_{\gamma} \omega - \int_{\sigma} \omega \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma} \omega = \int_{\sigma} \omega$$

Per ogni $(x, y) \in D$ definiamo:

$$F(x, y) := \int_{\gamma} \omega \tag{B.2}$$

essendo γ il cammino differenziabile a tratti che collega il centro del disco D al punto (x, y) percorrendo una qualsiasi delle due metà del bordo del rettangolo di cui (x_0, y_0) e (x, y) sono due vertici opposti (l'osservazione preliminare assicura che la definizione sia ben posta). Resta da verificare che $dF = \omega$, ovvero, posto $\omega = P dx + Q dy$, dobbiamo provare che $\partial_x F = P$ e $\partial_y F = Q$. Per $h > 0$ abbastanza piccolo, il punto $(x+h, y)$ si troverà ancora nell'interno del disco (aperto) e quindi, chiamato s il segmento orizzontale che collega (x, y) a $(x+h, y)$ parametrizzato da $s : [0, 1] \rightarrow D$, $s(t) = (x+ht, y)$, si ha:

$$\begin{aligned} F(x+h, y) - F(x, y) &= \dagger \int_s \omega = \int_s P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \\ &= \int_0^1 [P(x+ht, y) \cdot h + Q(x+ht, y) \cdot 0] dt = h \int_0^1 P(x+ht, y) dt \end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &:= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h, y) - F(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 P(x+ht, y) dt = \\ &= \int_0^1 \lim_{h \rightarrow 0} P(x+ht, y) dt = \int_0^1 P(x, y) dt = P(x, y) \int_0^1 dt = P(x, y) \end{aligned}$$

Analogamente, si verifica che $\partial_y F(x, y) = Q(x, y)$ e ciò termina la prova. \square

\dagger il calcolo è analogo a quello fatto nella dimostrazione precedente

Osservazione 23. Entrambe le dimostrazioni precedenti sono costruttive, in quanto contengono un metodo per determinare concretamente una funzione complessa F di cui ω sia il *differenziale* (F non è univocamente determinata).

Osservazione 24. Nella dimostrazione del **Teorema 1.3.4**, se il punto (x, y) appartiene alla retta $x = x_0$ oppure $y = y_0$, allora nella (B.2) il cammino γ è dato dal segmento orizzontale o verticale che collega (x_0, y_0) con (x, y) .

Dimostrazione. (Teorema di Stökes)

Sia \mathcal{R} il generico rettangolo nel piano euclideo assegnato nel modo seguente:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq a_2 \text{ e } b_1 \leq y \leq b_2\}$$

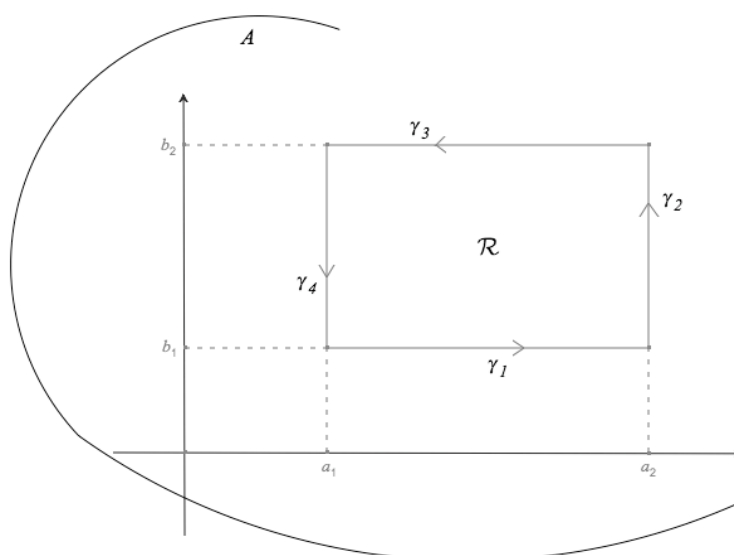


Figura B.3: Teorema di Stökes

$$\gamma_1 : [a_1, a_2] \rightarrow A : \gamma_1(t) = (t, b_1) \quad \gamma_2 : [b_1, b_2] \rightarrow A : \gamma_2(t) = (a_2, t)$$

$$\gamma_3 : [a_1, a_2] \rightarrow A : \gamma_3(t) = (a_1 + a_2 - t, b_2)$$

$$\gamma_4 : [b_1, b_2] \rightarrow A : \gamma_4(t) = (a_1, b_1 + b_2 - t)$$

Si ha:

$$\int_{\partial\mathcal{R}} \omega = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \omega \quad (\text{B.3})$$

con:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_{a_1}^{a_2} P(t, b_1) dt & \int_{\gamma_2} \omega &= \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, t) dt \\ \int_{\gamma_3} \omega &= - \int_{a_1}^{a_2} P(a_1 + a_2 - t, b_2) dt & \int_{\gamma_4} \omega &= - \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, b_1 + b_2 - t) dt \end{aligned}$$

Ora calcoliamo l'integrale doppio su \mathcal{R} , usando il teorema di *Fubini/Tonelli*:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{b_1}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{a_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \right] dy = \\ &= \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx - \int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx \right) dy = \\ &= \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right) dy - \int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial P}{\partial y} dx \right) dy = \\ &= \int_{b_1}^{b_2} [Q(x, y)]_{x=a_1}^{x=a_2} dy - \int_{a_1}^{a_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \\ &= \int_{b_1}^{b_2} [Q(x, y)]_{x=a_1}^{x=a_2} dy - \int_{a_1}^{a_2} [P(x, y)]_{y=b_1}^{y=b_2} dx = \\ &= \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y) - Q(a_1, y) dy - \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_2) - P(x, b_1) dx = \\ &= \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_1) dx - \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_2) dx - \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, y) dy + \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y) dy \end{aligned}$$

Chiaramente:

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_1) dx \quad \int_{\gamma_2} \omega = \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y) dy$$

d'altra parte:

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_2) dx &= \left[\begin{array}{l} x = a_1 + a_2 - t \\ dx = -dt \end{array} \right] = \int_{a_1}^{a_2} P(a_1 + a_2 - t, b_2) dt \\ \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, y) dy &= \left[\begin{array}{l} y = b_1 + b_2 - t \\ dy = -dt \end{array} \right] = \int_{b_1}^{b_2} Q(a_1, b_1 + b_2 - t) dt \end{aligned}$$

pertanto la (B.3) è proprio uguale all'integrale doppio che ho calcolato. \square

Bibliografia

- L1 [1] Lanconelli, E. (2001) *Lezioni di Analisi Matematica 2* (Prima Parte), Pitagora Editrice Bologna

- L2 [2] Cartan, E.P. (1995) *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, New York, Dover Publications, Inc.

- L3 [3] Pini, B. (1983) *Terzo corso di Analisi Matematica* (1. Operatori Lineari negli Spazi L^p), Clueb Bologna

- L4 [4] Borchini, E. / Nicoletti, R. (1999) *Circuiti Elettrici Lineari* (1° Volume), Società Editrice Esculapio, Bologna[†]

[†] il testo non è più disponibile in commercio ma, grazie al consenso dell'Editore, è consultabile gratuitamente in formato pdf presso il sito web:

<http://www.borchinicoletti.it/libro%20circuiti.htm>

Ringraziamenti

Ringrazio innanzitutto il *Prof. Ermanno Lanconelli*, per avermi guidato ed aiutato durante la realizzazione di questa tesi e per la disponibilità e la cortesia che mi ha dedicato durante l'intera attività di tirocinio.

Ora che guardo alla vita con occhi diversi, non riesco a trovare parole migliori di quelle uscite dalla penna del geniale Charles Monroe Schulz per esprimere come desidero sia il mio futuro:



Un riconoscimento particolare va ai miei genitori, senza il cui supporto economico non sarei mai riuscito a raggiungere questo importante traguardo.

Dedico infine un pensiero speciale anche a mia zia Lorenza ed a mio cugino Enzo: senza la vostra generosa ospitalità avrei fatto molta fatica ad iniziare e portare a termine questo lavoro.