

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Dinamica della ricchezza in un mercato finanziario con agenti eterogenei

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Nardini Franco
Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Degli Esposti Mirko.

Presentata da:
Pasini Gianluca

Sessione II
2011/2012

...alla mia famiglia

Indice

1	MODELLO AD AGENTI ETEROGENEI	1
1.1	Il modello ad agenti eterogenei	1
1.2	Co-evoluzione della ricchezza e dei prezzi	2
1.3	Funzioni d'investimento	3
1.4	Il processo di dividendo	4
1.5	Dinamica, stati stazionari di equilibrio e sopravvivenza degli agenti	5
2	Dinamiche di mercato con pochi agenti	7
2.1	Un solo agente	7
2.2	Location degli stati di equilibrio	8
2.3	Stabilità locale degli stati di equilibrio per il singolo agente	12
2.4	Il caso di due agenti	13
2.5	Location degli stati di equilibrio per i due agenti	14
2.6	Stabilità locale degli stati di equilibrio per due agenti	15
3	Dinamica con N investitori	18
3.1	Location degli stati stazionari per il sistema ad N agenti	19
3.2	Stabilità locale degli stati di equilibrio per N agenti	20
4	Due tipologie d'investitori	22
4.1	Un esempio di ottimizzatore media-varianza: Il Cartista	22
4.2	Stati all'equilibrio con dividend yield positivo	24
4.3	Caso del dividend yield nullo	27
4.4	Una seconda tipologia d'investitore: Il Fondamentalista	27

5	Processo di linearizzazione per un sistema	30
5.1	Funzioni reali di variabile reale	32
5.2	Funzioni di variabile vettoriale	33
5.3	Il nostro caso	35
5.4	Lo studio degli autovalori per un sistema lineare	36
5.5	Il Polinomio caratteristico	38
5.6	Diagonalizzabilità	38
5.7	Lo studio degli autovalori per la stabilità di un sistema lineare e bacino di attrazione	39
6	Lo studio di stabilità per i due tipi di investitori	41
6.1	Stabilità all'equilibrio per il cartista a memoria unitaria	41
6.2	Stabilità all'equilibrio per il fondamentalista a memoria unitaria	44
7	Lo studio di stabilità per i due investitori a confronto	50
7.1	Stabilità Cartista / Fondamentalista	50
7.2	Biforcazioni del sistema dinamico con due agenti a confronto	56
7.3	La teoria delle biforcazioni: Biforcazione di Neimark-Sacker	59
7.4	Il nostro caso: Biforcazione di Neimark-Sacker per la mappa a due agenti a confronto	62
7.5	La teoria delle biforcazioni: Biforcazione Flip: Raddoppio del periodo	66
8	Appendice	70
	Bibliografia	83

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è quello di studiare la co-evoluzione nei mercati finanziari tra agenti **eterogenei**, e di analizzare l'andamento dei prezzi delle azioni e la ricchezza individuale di ciascun agente dopo un periodo di tempo non specificato.

Il mercato finanziario è costituito da un numero arbitrario di agenti eterogenei che investono sui titoli parte della loro ricchezza adottando, ciascun diversamente dall'altro, strategie che vadano ad ottimizzare il ritorno economico dopo ogni periodo di tempo.

In economia, il concetto di agente rappresentativo è un costrutto teorico, largamente utilizzato nella macroeconomia e nella finanza, che si riferisce a un ipotetico agente che dispone di tutta la ricchezza dell'economia. Una possibile alternativa all'approccio economico fondato su un agente rappresentativo può essere data dai modelli di simulazione basati su agenti multipli, i quali sono in grado di trattare molti agenti eterogenei.

Negli ultimi anni un'attenzione particolare è stata rivolta allo studio della teoria della complessità e alla sua applicazione in campo economico secondo cui il sistema socioeconomico è un sistema adattivo complesso, composto da un elevato numero di individui che interagendo, danno vita a comportamenti imprevedibili. I mercati finanziari sono ambienti unici, perché forniscono una gran varietà di argomenti su cui dibattere, applicazioni, ispirazione per nuovi modelli, ma soprattutto moltissimi dati di ottima qualità. I modelli sono normalmente costruiti per trovare le equazioni per i prezzi in funzione degli stessi e di altre variabili economiche. Questi possono essere analitici o stocastici, sebbene entrambi non abbiano dato risultati predittivi giudicati soddisfacenti.

Nel corso dell'ultimo decennio si sono moltiplicati i tentativi di modellare i mercati con approcci non convenzionali. In particolare con l'approccio dei modelli ad agenti eterogenei, in cui si tiene esplicitamente conto della diversità dei vari operatori del mercato.

I modelli risultanti non sono lineari e ciò implica che né i loro risultati, né il loro funzionamento può essere facilmente modellizzato e riprodotto in un gruppo di equazioni. Essi hanno un grande vantaggio per lo studioso di economia e per chi voglia conoscere i meccanismi del mercato nel dettaglio: consentono di ottenere informazioni anche sul comportamento e sullo stato degli operatori, oltre che sul prezzo.

Le questioni ancora aperte sono quelle di specificare come l'interazione tra agenti influenzino il mercato, e quale tipologia di agenti eterogenei sia favorita, cioè sopravviva dopo un certo lasso di tempo. Nel nostro modello ad agenti facciamo due ipotesi principali:

1. Ogni strategia d'investimento può essere formalizzata come una funzione dei ritorni passati.
2. I dividendi delle azioni rischiose crescono secondo un tasso fisso g , e sono di tipo esogeno, cioè non vengono influenzati passo a passo dall'andamento del mercato.

Gli agenti eterogenei decidono di investire una quota in un titolo privo di rischio, ed una quota complementare in azioni rischiose; Consideriamo un sistema dinamico con uno scheletro deterministico, che andremo successivamente ad esplicitare. Il sistema che descrive questo modello è un sistema di equazioni non lineari che descrivono la quota investita in azioni rischiose, il tasso di crescita del prezzo, la ricchezza relativa ed il cosiddetto dividend yield, cioè il rapporto tra il dividendo ed il prezzo al tempo passato.

Vediamo che questo sistema può portare a diversi risultati, a seconda delle ipotesi che si fanno in partenza; Quando il tasso di crescita del dividendo è più grande del tasso di interessi del titolo senza rischio si arriva ad un tipo di equilibrio in cui il dividend yield è sempre positivo ed il tasso di crescita del prezzo è uguale a quello del dividendo; In questo stato stazionario il ritorno dei titoli rischiosi è più alto e sopravvivono solo alcuni agenti, i cosiddetti 'survivors', i quali investono tutta la stessa quota di ricchezza; Altrimenti si nota che il dividend yield tende a zero ed entrambi i tipi di titoli danno lo stesso ritorno.

Studiamo successivamente le condizioni di stabilità per ciascun stato di equilibrio. Consideriamo in particolare due tipologie di agenti; Il primo, cosiddetto **cartista** che adotta come strategia un'ottimizzazione di una media dei ritorni passati, ottimizzatore **media-varianza** ed il secondo, cosiddetto **fondamentalista**, che guarda alla distanza tra il tasso

di crescita dei prezzi e dei dividendi, agendo di conseguenza.

Il secondo ha come parametro caratterizzante la velocità con cui cambia la sua quota di ricchezza investita nel titolo rischioso in funzione del disequilibrio osservato nei periodi precedenti, mentre il primo ha come parametro l'avversione al rischio; Tutte due le tipologie di agenti si riferiscono ai ritorni passati a seconda di una certa memoria L .

Successivamente ci riferiamo alla teoria delle biforcazioni, cioè allo studio del cambio di stabilità del sistema rispetto ai due parametri, e troverò che al variare del primo avrò una biforcazione cosiddetta di *Neimark-Sacker*, mentre al variare del secondo parametro avrò una biforcazione cosiddetta *Flip*, di raddoppio del periodo. La domanda ora è:

Chi tra i due agenti avrà la meglio?? A quali condizioni sopravviverà l'uno o l'altro??

Le risposte a queste domande e ai quesiti posti in essere troveranno risposta di seguito.

Capitolo 1

MODELLO AD AGENTI ETEROGENEI

1.1 Il modello ad agenti eterogenei

Consideriamo un gruppo N di agenti che investono sul mercato in un tempo discreto t , una parte della loro ricchezza in un titolo privo di rischio, che rende un tasso d'interesse costante $r_f > 0$, e la parte complementare su azioni rischiose che pagano un dividendo d_t in unità di numerario, mentre il prezzo delle azioni rischiose p_t è determinato dall'equilibrio fra domanda ed offerta in ogni periodo.

Chiamiamo $W_{n,t}$ la ricchezza dell'agente n -esimo al tempo t e $x_{n,t}$ la quota di ricchezza investita in azioni rischiose dall' n -esimo agente al tempo t , cosicchè il numero delle azioni rischiose al tempo t comprate dall'agente n -esimo sarà $\frac{x_{n,t}W_{n,t}}{p_t}$.

Il dividendo è pagato prima che il mercato sia aperto e facendo queste ipotesi la ricchezza di ciascun agente cresce secondo questa equazione:

$$W_{n,t+1} = (1 - x_{n,t})W_{n,t}(1 + r_f) + x_{n,t}W_{n,t} \frac{p_{t+1} + d_{t+1}}{p_t} \quad (1.1)$$

Il prezzo dell'azione al tempo $t + 1$ è fissato secondo la seguente legge di mercato:

$$\sum_{n=1}^N \frac{x_{n,t+1}W_{n,t+1}}{p_{t+1}} = 1 \quad (1.2)$$

Vediamo che i prezzi e le ricchezze di ciascun agente coevolvono attraverso l'equazione 1.2 e risolvendo queste equazioni ed esplicitando i prezzi e le ricchezze, assumiamo che il processo del dividendo e le decisioni individuali di investimento di ciascun agente siano date. Successivamente definisco il modello come un sistema dinamico e più tardi definisco la nozione di sopravvivenza per agenti.

1.2 Co-evoluzione della ricchezza e dei prezzi

Per ottenere la soluzione esplicita di p_{t+1} e successivamente di W_{t+1} possiamo usare la 1.1 per riscrivere la 1.2 come:

$$p_{t+1} = \frac{\sum_{n=1}^N x_{n,t+1} W_{n,t} \left((1 - x_{n,t}) (1 + r_f) + x_{n,t} \frac{d_{t+1}}{p_t} \right)}{1 - \frac{1}{p_t} \sum_{n=1}^N W_{n,t} x_{n,t+1} x_{n,t}} \quad (1.3)$$

L'espressione risultante può essere espressa usando dei termini convenzionali che sono il **price return**, cioè il tasso di profitto in conto capitale al tempo $t+1$, il dividend yield, cioè il rapporto tra il dividendo riconosciuto al tempo $t+1$ e il prezzo al tempo precedente, e la **ricchezza relativa**, cioè la ricchezza del singolo agente in rapporto alla ricchezza totale degli agenti al tempo t .

Riporto di seguito la variabili, che saranno poi anche la variabili del nostro sistema dinamico:

$$k_{t+1} = \frac{p_{t+1}}{p_t} - 1 \quad y_{t+1} = \frac{d_{t+1}}{p_t} \quad \varphi_{n,t} = \frac{W_{n,t}}{\sum_m W_{m,t}}$$

Dividendo entrambi i membri di 1.3 per p_t e considerando che $p_t = \sum_{n=1}^N x_{n,t} W_{n,t}$ possiamo riscrivere le espressioni del prezzo di ritorno e della ricchezza relativa per ciascun agente:

$$(1.4) \quad \begin{cases} k_{t+1} = r_f + \frac{\sum_n ((1+r_f)(x_{n,t+1}-x_{n,t})+y_{t+1}x_{n,t}x_{n,t+1})\varphi_{n,t}}{\sum_n x_{n,t}(1-x_{n,t+1})\varphi_{n,t}} \\ \varphi_{n,t+1} = \varphi_{n,t} \frac{(1+r_f)+(k_{t+1}+y_{t+1}-r_f)x_{n,t}}{(1+r_f)+(k_{t+1}+y_{t+1}-r_f)\sum_m x_{m,t}\varphi_{m,t}} \quad \forall n \in 1, \dots, N. \end{cases}$$

La seconda equazione mostra che la ricchezza relativa cresce proporzionalmente alla ricchezza relativa passata in relazione alle performance del portafoglio precedente.

1.3 Funzioni d'investimento

Di seguito definiamo le caratteristiche della funzione d'investimento di ciascun agente, all'inizio ipotizzandola in maniera generica.

Questa funzione dipenderà dagli L tassi passati di crescita del prezzo e dai **dividend yields** passati; La variabile L , indica appunto la memoria con il quale l'agente adotta la sua strategia; Ad esempio, qualora L sia uguale ad 1, l'agente considera solo l'ultimo tasso di profitto in conto capitale e del **dividend yield**, possiede allora una memoria a breve termine; Se L cresce, cresce anche la memoria dell'agente.

Per ciascun agente $n = 1, \dots, N$ esiste una funzione d'investimento che mappa le informazioni dei ritorni in una scelta d'investimento

$$x_{n,t} = f_n(k_{t-1}, k_{t-2}, \dots, k_{t-L}; y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-L})$$

Le decisioni d'investimento degli agenti dipendono da una scelta individuale di strategia ed in generale il set d'informazioni usato per adottare tale strategia contiene il tasso di crescita del prezzo, il cosiddetto **price return** fino al tempo $t - L$ ed il **dividend yield** sempre fino al tempo $t - L$.

Per comodità nei calcoli, in quanto tratteremo un sistema pluridimensionale, restringiamo la scelta della memoria per ogni agente ad un valore finito L , anche se esso può assumere valori molto grandi; Un'altra restrizione è che le stesse informazioni osservate in lassi di tempo diversi vengano mappate nella stessa decisione di quota da investire, inoltre che la decisione non dipenda dalla ricchezza istantanea dell'agente.

Quest'ultima ipotesi sta a significare che il singolo investitore mantiene una proporzione costante di ricchezza investita indipendentemente dalla variazione della ricchezza temporanea, e questo tipo di comportamento può essere definito come avversione relativa al rischio costante. La scelta d'investimento al periodo t deve essere fatta prima che

il mercato cominci, quando il prezzo p_t è ancora sconosciuto, e proprio questa scelta influenzerà il prezzo al tempo successivo.

La generalità della nostra funzione d'investimento può comprendere agenti che guardano nei tempi precedenti alle fluttuazioni dei prezzi, mentre (il quale è un comportamento più fondamentalista) comprende agenti che guardano al rapporto tra dividendo e prezzo, infine ad agenti che adottano sempre una strategia uguale ad ogni apertura del mercato; Nel nostro modello non sono però comprese quelle strategie che guardano alla ricchezza degli agenti ed al prezzo corrente, i quali essi stessi sono un'importante categoria d'investitori; Inoltre, siccome il prezzo di una azione non può mai essere negativo adottiamo la seguente restrizione:

Assunzione 1. Per ogni agente ($n = 1, \dots, N$), la funzione d'investimento f_n è supposta a dare risultati nell'intervallo $(0, 1)$

1.4 Il processo di dividendo

L'ultimo ingrediente del modello è il processo di dividendo; Lo stesso nei modelli di studio precedenti, come *Chiarella and He (2001)*; *Anufriev et Al. (2006)*; *Anufriev (2008)* e *Anufriev and Bottazzi (2009)* veniva studiato come un processo endogeno, cioè che ogni fluttuazione nel prezzo causava un cambiamento nell'assegnazione del dividendo.

Nel nostro studio consideriamo il processo come un processo esogeno, dipendente da una variabile indipendente ed identicamente distribuita nel tempo (*i.i.d.*). Diamo allora la seguente definizione del processo di dividendo:

La realizzazione del dividendo segue una camminata geometrica casuale, in questo modo:

Definizione 1.1. $d_t = d_{t-1}(1 + g_t)$,

dove g_t , che è il tasso di crescita del dividendo è una variabile *i.i.d.* con media g e varianza fissata.

Riscrivendo questa assunzione in termini di **dividend yield** e **price return** la 1.1 diventa:

$$y_{t+1} = y_t \frac{1 + g_{t+1}}{1 + k_t}$$

1.5 Dinamica, stati stazionari di equilibrio e sopravvivenza degli agenti

Le equazioni 1.4 e 1.3 per ogni agente $n = 1, \dots, N$ e 1.1 specificano l'evoluzione delle azioni del mercato con N agenti eterogenei, e la nostra analisi consiste nello studio del sistema composto da queste equazioni; Il sistema ha uno scheletro tipicamente deterministico, e non aleatorio, assumendo il tasso di crescita del dividendo g_t come una costante fissata e non più una variabile aleatoria *i.i.d.*;

Con queste assunzioni il sistema sarà il seguente:

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_{n,t+1} = f_n(k_t, k_{t-1}, \dots, k_{t+1-L}; y_{t+1}, y_{t-1}, \dots, y_{t+1-L}) \quad \forall n \in 1, \dots, N, \\ \varphi_{n,t+1} = \varphi_{n,t} \frac{(1+r_f) + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f)x_{n,t}}{(1+r_f) + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f) \sum_m x_{m,t} \varphi_{m,t}} \quad \forall n \in 1, \dots, N, \\ k_{t+1} = r_f + \frac{\sum_n ((1+r_f)(x_{n,t+1} - x_{n,t}) + y_{t+1} x_{n,t} x_{n,t+1}) \varphi_{n,t}}{\sum_n x_{n,t} (1 - x_{n,t+1}) \varphi_{n,t}}, \\ y_{t+1} = y_t \frac{1+g}{1+k_t}. \end{array} \right.$$

In uno stato stazionario il **dividend yield** ed il **price return** sono costanti e li posso denotare con y^* e k^* rispettivamente; Ogni stato stazionario ha inoltre i due vettori delle scelte d'investimento e delle ricchezze relative costanti che chiamo rispettivamente $(x_1^*, x_2^* \dots x_N^*)$ e $(\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots \varphi_N^*)$.

Sicuramente l'arbitrarietà del numero degli agenti N e del lasso di memoria L non rendono il sistema semplice da usare, tuttavia le restrizioni delle scelte d'investimento e del **dividend yield** e della curva di andamento del mercato rendono più semplice lo studio dello stesso; Inoltre è possibile ricavare delle condizioni per la convergenza a questi stati di equilibrio, le quali andremo successivamente ad esplicitare.

Quando caratterizziamo le ricchezze relative degli agenti è utile dare la seguente definizione:

Definizione 1.2. *Un agente è detto sopravvissuto **'survivor'** in una data traiettoria se e solo se $\limsup_{t \rightarrow \infty} \varphi_{n,t} > 0$ in quella data traiettoria; Altrimenti l'agente n -esimo si dice che svanisce **'vanisher'** per quella traiettoria.*

Notiamo che si definisce il concetto solo per una data traiettoria perchè lo stesso agente potrebbe sopravvivere per una traiettoria ma svanire per un'altra, e possiamo dire inoltre che un agente n sopravvive per una data traiettoria se allo stato d'equilibrio $(x_1^*, \dots, x_N^*, \varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*; k^*, y^*)$ la ricchezza relativa dell'agente è strettamente positiva, $\varphi_n^* > 0$, mentre svanisce se $\varphi_n^* = 0$.

Possiamo dare anche una definizione di stato di equilibrio cosiddetto **stabile** ed **instabile**: Uno stato d'equilibrio stabile è un punto per il quale se partiamo nelle vicinanze da esso, se un agente sopravviveva in quel dato punto di equilibrio, allora sopravvive anche per la nuova traiettoria, invece è instabile quando questo non succede; In altre parole variando di poco la traiettoria vicino ad un punto di instabilità coloro che prima sopravvivevano e svanivano al contrario ora possono svanire o sopravvivere su quella traiettoria.

Il comportamento è allora molto diverso per punti di equilibrio instabili nelle vicinanze del punto di equilibrio.

Capitolo 2

Dinamiche di mercato con pochi agenti

Nella prossima sezione mi occuperò di un mercato con solo uno o due agenti in modo da prendere confidenza con i meccanismi propri del sistema dinamico, facendo questo introduco il concetto di curva di mercato **Equilibrium Market Curve**, (*EMC*), che ci permette di dire di più a riguardo dei punti all'equilibrio.

2.1 Un solo agente

Nel caso del singolo agente il caso dell'equazione relativa può essere ignorata in quanto logicamente essa è sempre fissata ad 1, infatti l'agente possiede tutta la ricchezza disponibile.

Omettendo l'indice n che numera gli agenti, possiamo riscrivere il sistema 1.5 in questo modo:

$$(2.1) \quad \begin{cases} x_{t+1} = f(k_t, k_{t-1}, \dots, k_{t+1-L}; y_{t+1}, y_{t-1}, \dots, y_{t+1-L}) & \forall n \in 1, \dots, N, \\ k_{t+1} = r_f + \frac{(1+r_f)(x_{t+1}-x_t) + y_{t+1}x_t x_{t+1}}{x_t(1-x_{t+1})}, \\ y_{t+1} = y_t \frac{1+g}{1+k_t}. \end{cases}$$

L'ultima equazione suggerisce che si possono individuare due casi di equilibrio, il caso in cui y^* sia positivo o il caso in cui y^* sia nullo.

2.2 Location degli stati di equilibrio

dividend yield positivo:

Assumendo che il **dividend yield** sia positivo, per sostenere questo dalla terza equazione del sistema 2.1 ricaviamo che il tasso di crescita dei prezzi all'equilibrio deve essere uguale al tasso di crescita dei dividendi, ($k^* = g$).

Sostituendo ciò nelle prime due equazioni otteniamo:

$$x^* = f(\underbrace{g, \dots, g}_L; \underbrace{y^*, \dots, y^*}_{L+1}) \quad e \quad x^* = \frac{g - r_f}{y^* + g - r_f} \quad (2.2)$$

dove g ed r_f sono esogeni; Questo rappresenta un sistema con due variabili, che sono rispettivamente x^* e y^* a due equazioni, logicamente una esplicitazione della funzione d'investimento fa ricavare il punto di equilibrio con le restrizioni sempre di $y^* > 0$ e $x^* \in (0, 1)$.

Anche se lasciamo implicita la funzione d'investimento, notiamo che qualora $g \leq r_f$ non ci sono soluzioni per cui $y^* > 0$ e $x^* \in (0, 1)$, allora assumiamo che $g > r_f$; Per trovare in questo caso il punto di equilibrio, andremo a fare l'intersezione della curva d'investimento e della curva di mercato.

Chiamiamo *EIF*, letteralmente **equilibrium investment function** la strategia del singolo agente all'equilibrio e la indichiamo con la tilde $\tilde{\cdot}$:

$$\tilde{f}(y) = f(\underbrace{g, \dots, g}_L; \underbrace{y, \dots, y}_{L+1}) \quad (2.3)$$

In questa equazione per semplicità abbiamo indicato con y la variabile del **dividend yield** y^* , ed indica per ogni valore di y il valore della quota d'investimento tale da avere un dividend yield costante. La seconda funzione invece viene chiamata la curva di mercato all'equilibrio *EMC*, letteralmente **Equilibrium Market Curve** e la indichiamo come:

$$l(y) = \frac{g - r_f}{y + g - r_f} \quad (2.4)$$

Per ogni valore di y , questa curva restituisce il valore della quota da investire x^* in modo tale da avere i prezzi che crescono al tasso g . L'intersezione di queste due curve fornisce il punto di equilibrio, che possiamo mostrare con la figura sottostante: Indichiamo con A il punto di equilibrio dove la quota investita è più alta, l'agente allora investe maggiormente nel titolo rischioso all'equilibrio e con B il punto di equilibrio per una strategia meno aggressiva; Nel punto B la quota investita è più bassa e questo porta ad un abbassamento dei prezzi, quindi ad un dividend yield maggiore.

Al contrario succede per il punto A dove abbiamo un dividend yield minore.

In questi stati di equilibrio, che sono tutti equivalenti notiamo che la ricchezza all'equilibrio dell'agente cresce con tasso g .

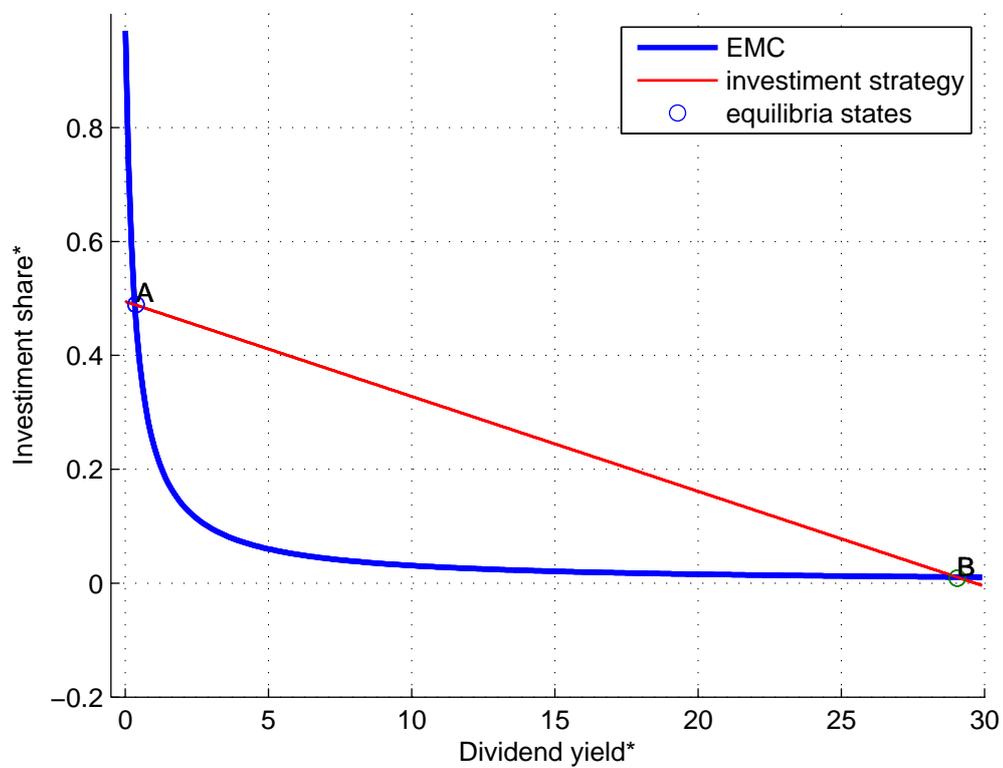


fig:1 Location degli stati di equilibrio per $g > r_f$, i punti A e B rappresentano i punti di equilibrio per una prima strategia d'investimento

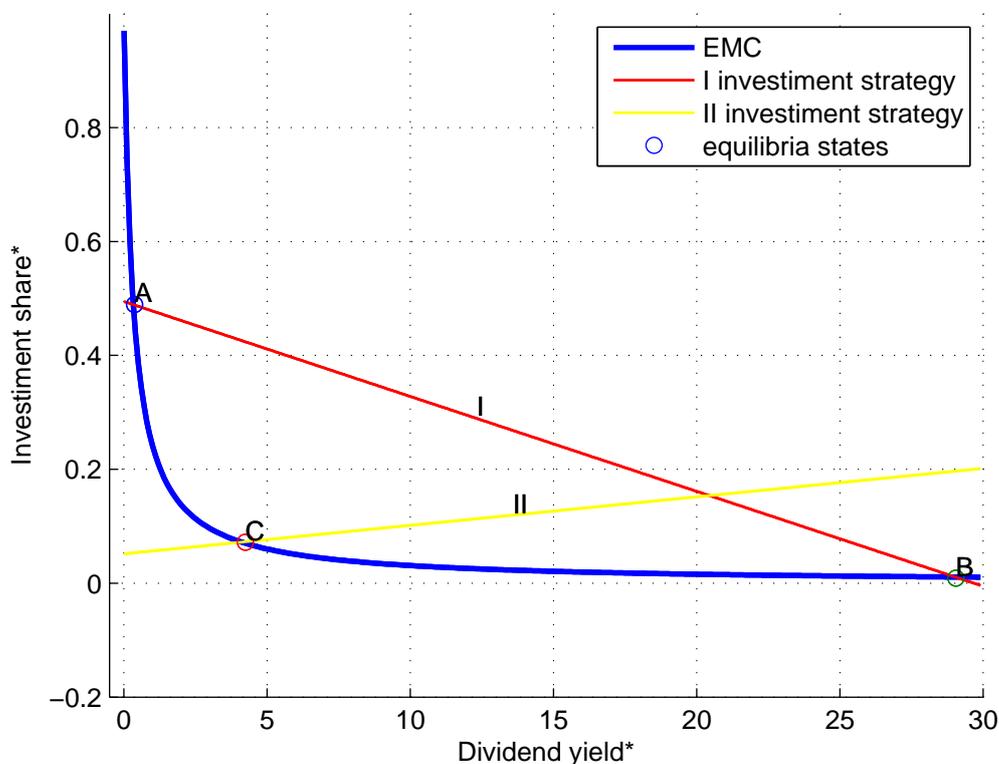


fig:2 Location degli stati di equilibrio per $g > r_f$, i punti A, B e C rappresentano rispettivamente i punti di equilibrio per una prima strategia d'investimento e per una seconda

dividend yield nullo:

$y^* = 0$, implica che $k^* = r_f$ e la quota d'investimento all'equilibrio è determinata da $x^* = f(g, \dots, g; 0, \dots, 0)$; Dal momento che per ogni g ed r_f abbiamo un unico stato di equilibrio ed il profitto per le azioni rischiose e per le azioni prive di rischio è sempre pari ad r_f , anche la ricchezza cresce seguendo questo tasso.

La dinamica generata dal sistema 2.1 presenta allora due tipologie di equilibri: Il primo caso può esistere solo quando $g > r_f$ e abbiamo:

$$k^* = g$$

mentre x^* e y^* risolvono il sistema $x^* = f(y^*) = l(y^*)$

Dipendendo dalla strategia d'investimento (f) sono possibili più stati stazionari nei quali comunque la ricchezza dell'agente cresce a tasso g . Nel secondo caso invece è possibile uno stato di equilibrio in cui la ricchezza dell'agente per titoli rischiosi cresce a tasso r_f , avendo:

$$k^* = r_f, \quad x^* = f(\underbrace{r_f, \dots, r_f}_L; \underbrace{0, \dots, 0}_{L+1}), \quad y^* = 0. \quad (2.5)$$

2.3 Stabilità locale degli stati di equilibrio per il singolo agente

Dal momento che possono esistere diversi stati di equilibrio nel modello la questione della stabilità di ognuno di essi diventa veramente importante; Per descrivere tale stabilità bisogna studiare lo Jacobiano della matrice del sistema e trovare i suoi autovalori. Per la stabilità locale è sufficiente che tutti i $2N + 2L$ autovalori della matrice dello jacobiano del sistema giacciono dentro al cerchio unitario, N indica il numero degli agenti, ed L la memoria degli agenti; Nel nostro caso essendoci un unico agente deve essere che i $2 + 2L$ autovalori verifichino questa condizione.

Qualora la funzione d'investimento sia data esplicitamente possiamo studiare direttamente lo Jacobiano, ma in questo momento siamo interessati nei risultati per funzioni generiche d'investimento.

Prima di tutto, dati i parametri g ed r_f , otteniamo che solo lo stato stazionario di un tipo dei due elencati in precedenza sia stabile, ed ottengo i seguenti risultati:

Considerando la dinamica generata dal sistema 2.1, se $g > r_f$ lo stato d'equilibrio definito nel secondo caso è instabile;

Allora se la dinamica per il singolo agente converge ad uno stato stazionario, questo stato stazionario sarà a dividend yield nullo se $g < r_f$ e a dividend yield positivo qualora $g > r_f$.

Questo mette in evidenza che in uno stato stazionario il tasso di crescita della ricchezza derivante dall'investimento è uguale al massimo tra g ed r_f ; Nella nostra economia quando si converge ad uno stato stazionario dopo lunghi periodi, la ricchezza totale di

ciascun agente cresce come cresce la più grande delle due risorse.

Tecnicamente il risultato precedente succede in quanto nello stato stazionario del secondo tipo esiste un autovalore dello Jacobiano che è uguale ad $\frac{1+g}{1+r_f}$; Invece nel primo caso, che esiste solo quando $g > r_f$ c'è un autovalore del tipo $\frac{1+r_f}{1+g}$, che è sempre più piccolo di uno, così come i restanti $2L + 1$ autovalori del sistema.

Nella risoluzione del sistema almeno $L + 1$ autovalori non sono nulli; Il polinomio da derivare per ricavare le radici, dipende dalle derivate parziali delle funzioni d'investimento rispetto ai loro argomenti ed inoltre per i punti di equilibrio del primo tipo dalla pendenza della curva di mercato, *EMC*, calcolata nello stato stazionario.

Per fare un esempio, per una funzione d'investimento costante, per ciascun tipo di stati stazionari, il polinomio derivante è, $Q(\mu) = \mu^{L+1}$, il che sta a significare che ciascun stato d'equilibrio è stabile, essendo tutte le sue radici nulle.

2.4 Il caso di due agenti

Il caso di due agenti che convivono insieme in un mercato è molto più interessante in quanto entra in gioco anche la ricchezza relativa di ciascun agente; Usando la 1.5, otteniamo per due agenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = f_1(k_t, k_{t-1}, \dots, k_{t+1-L}; y_{t+1}, y_{t-1}, \dots, y_{t+1-L}), \\ x_{2,t+1} = f_2(k_t, k_{t-1}, \dots, k_{t+1-L}; y_{t+1}, y_{t-1}, \dots, y_{t+1-L}), \\ \varphi_{1,t+1} = \varphi_{1,t} \frac{(1+r_f) + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f)x_{1,t}}{(1+r_f) + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f)(\varphi_{1,t}x_{1,t} + \varphi_{2,t}x_{2,t})}, \\ \varphi_{2,t+1} = \varphi_{2,t} \frac{(1+r_f) + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f)x_{2,t}}{(1+r_f) + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f)(\varphi_{1,t}x_{1,t} + \varphi_{2,t}x_{2,t})}, \\ k_{t+1} = r_f + \frac{\sum_{n=1}^2 ((1+r_f)(x_{n,t+1} - x_{n,t}) + y_{t+1}x_{n,t}x_{n,t+1})\varphi_{n,t}}{x_{1,t}(1-x_{1,t+1})\varphi_{1,t} + x_{2,t}(1-x_{2,t+1})\varphi_{2,t}}, \\ y_{t+1} = y_t \frac{1+g}{1+k_t}. \end{array} \right.$$

(2.6)

Uno stato stazionario consiste in valori costanti della quota investita per ogni agente, (x_1^* e x_2^*), della ricchezza relativa di ciascun agente che sarà φ_1^* e $\varphi_2^* = 1 - \varphi_1^*$, del tasso di profitto in conto capitale k^* e del dividend yield y^* .

In questo caso ci possono essere due casi; Il primo caso dove uno dei due agenti sopravvive all'altro, il precitato **survivor**, con ricchezza relativa 1, ed un secondo caso in cui tutti e due gli agenti sopravvivono con una certa ricchezza.

2.5 Location degli stati di equilibrio per i due agenti

Positive yield

Come prima il dividend yield positivo implica che $k^* = g$ e lo stato stazionario esiste solo se $g > r_f$; Assumendo questo, dalla dinamica delle ricchezze otteniamo che la quota investita da ciascun agente che sopravvive al mercato deve essere uguale a $\varphi_{1,t}x_{1,t} + \varphi_{2,t}x_{2,t}$.

Allora, o sopravvive un solo agente o tutti e due hanno la stessa quota investita sul mercato; Nel primo caso qualora $\varphi_1^* = 1$, la sua quota investita ed il dividend yield devono soddisfare contemporaneamente:

$$x_1^* = \tilde{f}_1(y^*) \quad x_1^* = l(y^*) \quad (2.7)$$

Questa soluzione (y^*, x_1^*) è l'intersezione della curva di mercato *EMC* e la prima curva d'investimento all'equilibrio *EIF*.

La seconda possibilità, (la sopravvivenza di entrambi gli agenti), consiste nell'avere $\varphi_1 \in (0, 1)$ ed abbiamo che devono essere soddisfatte queste condizioni:

$$x_1^* = \tilde{f}_1(y^*) \quad x_2^* = \tilde{f}_2(y^*) \quad \text{con} \quad x_1^* = x_2^* = l(y^*) \quad (2.8)$$

Dal momento che $\varphi_1 \in (0, 1)$ ci possono essere una infinità di stati all'equilibrio, in cui k^* e g hanno lo stesso valore.

La seconda figura dà un esempio di **positive yield** e le *EIF* degli agenti *I* e *II* sono disegnate con la linea continua di spessore. Il punto *A* corrisponde al caso in cui solo il primo agente sopravvive al mercato; L'ascissa del grafico corrisponde al dividend yield (y^*) all'equilibrio mentre l'ordinata corrisponde alla quota investita x_1^* .

Il punto *C* invece corrisponde al caso in cui solo il secondo agente sopravvive, e per ottenere la sopravvivenza di tutti e due gli agenti dobbiamo modificare la strategia d'investimento all'equilibrio di un agente in modo da far coincidere in un punto della *EMC* le due curve d'investimento, cioè in modo da soddisfare la 2.8.

Ad esempio dovremo shiftare la curva *II* in modo tale che il punto *C* vada a coincidere col punto *A*.

yield a zero

Nel caso di **zero yield** abbiamo che $k^* = r_f$ e le quote investite sono determinate dalle funzioni $x_n^* = f_n(r_f, \dots, r_f; 0, \dots, 0)$ per $n = 1, 2$;

Questo stato stazionario, dipendentemente dalle condizioni iniziali, esiste per qualsiasi valore di g ed r_f .

Ricapitolando nel caso di dividend yield positivo abbiamo che $k^* = g$ e tutti gli agenti che sopravvivono hanno la stessa quota investita nel titolo rischioso ed un tasso di crescita della ricchezza g .

Nel secondo caso abbiamo che $k^* = r_f$ e tutte le decisioni d'investimento sono equivalenti, dipendentemente dalle scelta iniziale dei valori g ed r_f .

2.6 Stabilità locale degli stati di equilibrio per due agenti

Come nel caso del singolo agente la condizione $g < r_f$ è necessaria per la stabilità nel caso di dividen yield nullo; Un' importante differenza rispetto al singolo agente riguarda la stabilità dei punti del primo tipo e nel caso di due agenti dobbiamo porre un' ulteriore condizione, infatti risulta che quando un agente sopravvive all'altro, per esempio diciamo che questo succeda per il primo, la matrice Jacobiana del sistema ha un autovalore del tipo:

$$\frac{1 + r_f + (g + y^* - r_f)x_2^*}{1 + r_f + (g + y^* - r_f)x_1^*}$$

Il quale implica il seguente risultato:

Consideriamo un punto all'equilibrio con dividend yield positivo, in cui solo un agente sopravvive, diciamo questo sia il primo agente, cioè $\varphi_1^* = 1$; Se:

$$x_1^* = \tilde{f}_1(y^*) < x_2^* = \tilde{f}_2(y^*)$$

Allora lo stato d'equilibrio d'equilibrio è instabile.

Diamo nell'appendice la dimostrazione di tale affermazione ([**Dimostrazione 1**]) nel caso che sia $N = 2$; Mettendo a confronto l'autovalore con quello della dimostrazione vedremo che sostituendo ad x_1^* l'espressione $\frac{g-r_f}{y^*+g-r_f}$, che indica l'appartenenza alla curva di mercato *EMC*, avrò la stessa espressione, cioè:

$$\lambda_2 = \frac{1 + r_f + (g + y^* - r_f)x_2^*}{1 + r_f + (g + y^* - r_f)x_1^*} = \frac{1 + r_f + (g - r_f)(x_2^*/x_1^*)}{1 + g}$$

.

Un agente che sopravvive in uno stato stazionario stabile (e quindi un agente che sopravvive anche se si parte nelle vicinanze dello stato stazionario stesso), non può comportarsi in modo meno aggressivo, investendo meno nei titoli rischiosi, del secondo agente che è il perdente.

Infatti, consideriamo l'esempio dove il sopravvissuto investe meno dell'agente che perde in borsa; Successivamente altero lo stato d'equilibrio, ad esempio ridistribuendo la ricchezza al secondo agente.

Al più presto noteremo che il secondo agente avrà una ricchezza relativa positiva, ed avrà sempre ritorni maggiori investendo maggiormente nel titolo rischioso, allora la dinamica non raggiungerà più lo stesso stato, ma il secondo agente ne avrà un beneficio.

Possiamo illustrare tutto questo discorso con l'aiuto della figura:

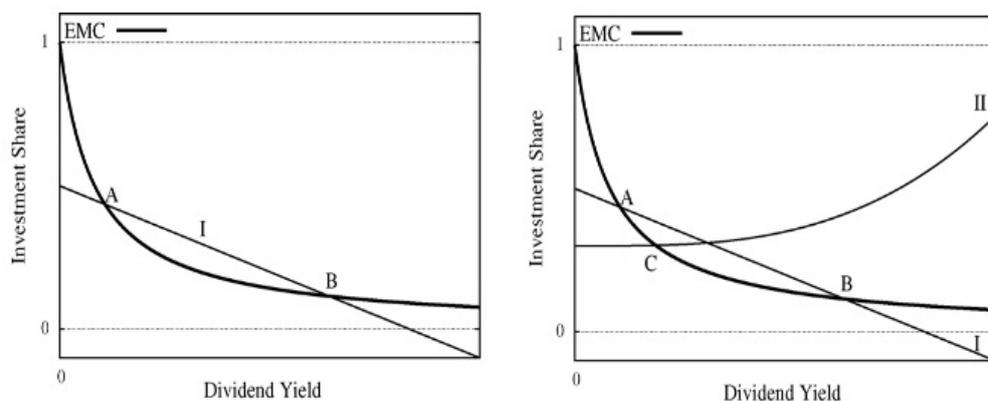


Figura 2.1: **fig:2a** Le figure mostrano due tipologie di investitori a confronto ed i punti contrassegnati dalle lettere possono essere stabili od instabili

Date le due curve d'investimento, solo il punto contrassegnato con la A potrebbe possibilmente essere un punto di equilibrio stabile, infatti gli altri due punti, B e C sono necessariamente instabili.

Ad esempio nel punto B sopravvive il primo agente, ma in questo caso il secondo agente che è colui che scompare dal mercato, investe maggiormente; Nel caso di due agenti il polinomio da studiare dipende dalle medie pesate delle derivate delle funzioni d'investimento, i quali pesi sono la quota di ricchezza nel corrispondente stato d'equilibrio.

Allora, per esempio con due agenti, il primo con funzione d'investimento costante ed il secondo con funzione d'investimento reattiva ai ritorni passati, il punto d'equilibrio dove sopravvivono entrambi, è stabile qualora la maggior quota di ricchezza sia posseduta dal primo agente, ed asintoticamente instabile viceversa.

Riassumendo i risultati del presente capitolo, abbiamo che un punto di equilibrio è stabile quando il prezzo delle azioni all'equilibrio crescono ad un tasso pari al $\max(g, r_f)$; Quando $g > r_f$ le dinamiche sono consistenti solo nel caso di dividend yield positivo, il quale implica un ritorno positivo per le azioni rischiose.

Capitolo 3

Dinamica con N investitori

In questo capitolo generalizziamo il concetto di sistema dinamico con pochi agenti e formalizziamo i risultati che abbiamo già incontrato nel caso di pochi agenti al caso di una popolazione con N agenti che investono sul mercato;

Il primo scopo è quello di restringere le variabili in gioco a valori che fanno diventare il sistema un sistema ben definito, in particolare, la positività dei prezzi, il quale implica che il **price return** non sia mai più piccolo di 1, ed il **dividend yield** sia sempre > 0 . Cominciamo scrivendo questa assunzione:

Assunzione 2. *Il sistema 1.5 definisce un sistema dinamico di dimensione $2N + 2L$ di equazioni del primo ordine; Detto questo l'operatore associato a questo sistema è il seguente:*

$$\tau(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n; k_1, \dots, k_L; y_1, \dots, y_n), \quad (3.1)$$

Esso è ben definito nel seguente dominio:

$$D = (0, 1)^N \times \Delta_N \times (-1, \infty)^L \times (0, \infty)^L \quad (3.2)$$

Che consiste rispettivamente nelle quote di investimento, nella ricchezza relativa, nel tasso di crescita del prezzo e nel dividend yield dove Δ_N è il seguente simpleso N dimensionale:

$$\Delta_N = \left\{ (\varphi_1, \dots, \varphi_N) : \sum_{m=1}^N \varphi_m = 1 \varphi_m \geq 0 \forall m \right\}$$

Il sistema definito con questo dominio è ben definito perchè dal momento che $k_t > -1$ le quattro equazioni del sistema 1.5 sono ben definite in quanto $y_{t+1} > 0$; Come risultato la prima equazione definisce che la quota da investire appartiene a $(0, 1)$ e nella terza equazione del sistema 1.5, siccome il denominatore è sempre positivo, possiamo asserire la seguente disuguaglianza:

$$k_{t+1} > r_f + \sum_m ((1 + r_f)(-1) + 0)\varphi_{m,t} = -1$$

In ultimo è facile vedere che sia il numeratore che il denominatore della seconda equazione sono positivi e che $\sum_m \varphi_{m,t+1} = 1$; inoltre la dinamica è ben definita e rientra nel semplice Δ_N .

Da questo momento si può implementare il sistema dando le condizioni iniziali di ricchezza degli agenti, la prima quota investita e successivamente il primo prezzo azionario.

3.1 Location degli stati stazionari per il sistema ad N agenti

Definiamo lo stato stazionario come uno stato in cui sopravvivono M agenti ($1 \leq M \leq N$): Gli stati stazionari di equilibrio con il dominio definito precedentemente possono esistere solo quando $g > r_f$, in questo caso sia $(x_1^*, \dots, x_n^*; \varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*; k^*; y^*)$ lo stato stazionario del sistema 1.5, allora:

1. Il tasso di crescita del prezzo è uguale al tasso di crescita del dividendo: $k^* = g$
2. Tutti gli agenti che sopravvivono hanno la stessa quota d'investimento x_o^* , che assieme al dividend yield soddisfa:

$$x_o^* = \frac{g - r_f}{y^* + g - r_f} \quad (3.3)$$

Lo ricchezza relativa di tutti gli agenti risulta:

$$\varphi_m^* \in (0, 1) \quad \text{se } m \leq M \quad \varphi_m^* = 0 \quad \text{se } m > M \quad \text{e} \quad \sum_{m=1}^M \varphi_m^* = 1$$

il tasso di crescita di ciascun agente che sopravvive è g

Sarebbe interessante andare a vedere il caso in cui il dividend yield sia nullo, ma questo caso limite non rientra nel dominio del sistema che stiamo considerando, quindi approfondiamo il discorso per questo caso.

L'equazione 3.3 può essere riscritta nei termini della *EMC* e delle rispettive *EIF* degli agenti in questo modo:

$$I(y^*) = \tilde{f}_m(y^*) \quad \forall 1 \leq m \leq M \quad (3.4)$$

Possiamo ritrovare questi risultati graficamente, come scritto in precedenza, nei quali la curva del mercato, la cosiddetta *EMC* non viene influenzata dal comportamento degli agenti in quanto dipende unicamente da parametri esogeni quali g ed r_f .

3.2 Stabilità locale degli stati di equilibrio per N agenti

Il mercato azionario agisce proprio come una forza di selezione naturale, distribuendo la ricchezza ad alcuni agenti, impoverendone altri; Questa prima parte di studio della stabilità si concentra sul meccanismo di questa selezione naturale.

Il risultato seguente stabilisce delle condizioni sufficienti per la stabilità:

Consideriamo lo stato d'equilibrio descritto in 3.2, $(x_1^*, \dots, x_n^*; \varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*; k^*; y^*)$, dove i primi M agenti sopravvivono con una quota investita pari ad x_\circ^* .

Esso è localmente asintoticamente stabile se sono verificate le seguenti due condizioni:

1. La quota investita degli agenti scomparsi sul mercato deve essere:

$$x_m^* < x_\circ^* \quad \forall m \in M + 1, \dots, N \quad (3.5)$$

2. lo stato stazionario $(x_1^* = x_o^*, \dots, x_M^* = x_o^*; \varphi_1^*, \dots, \varphi_M^*; k^*, y^*)$ del sistema ridotto, ottenuto dall'eliminazione di tutti gli agenti che muoiono sul mercato, sia localmente asintoticamente stabile.

La seconda condizione è verificata andando a studiare il sistema ridotto, senza gli agenti vanisher, calcolati sul punto dello stato stazionario. Per la dimostrazione di tale affermazione che è la generalizzazione della dimostrazione della proposizione 2.6 quando $N = 2$, facciamo riferimento all'appendice [**Dimostrazione 1**], prima dei titoli bibliografici.

Capitolo 4

Due tipologie d'investitori

Nel prossimo capitolo andremo ad elencare due tipologie d'investitori, e metteremo a confronto le due strategie d'investimento sul mercato; Passeremo all'analisi di stabilità per entrambi gli investitori, a memoria bassa $L = 1$, utilizzando il processo di linearizzazione del sistema ed andando ad analizzare gli autovalori della matrice associata.

Anticipiamo che una condizione necessaria e sufficiente per la stabilità del punto di equilibrio sarà quella che tutti gli autovalori della matrice associata al sistema lineare approssimato vicino al punto di equilibrio siano in modulo minori di 1; Andremo successivamente nello specifico in tale questione.

La prima tipologia d'investitore, definito cartista, *Chartist*, in lingua inglese è un esempio di ottimizzatore media-varianza.

4.1 Un esempio di ottimizzatore media-varianza: Il Cartista

Un cartista, (anche conosciuto come analista tecnico), è un tipo d'investitore che utilizza i diagrammi, *charts*, o gli istogrammi analitici dell'andamento dei mercati, che potrebbero essere utili nel fare predizioni future sull'andamento degli stessi; In particolare studia i valori passati dei prezzi del mercato e denota un trend di andamento dello stesso, agendo di conseguenza.

Come applicazione della sezione precedente consideriamo un mercato con un singolo

agente, il quale massimizza la funzione di utilità cosiddetta di media-varianza del ritorno futuro; La indichiamo con la lettera U e la definiamo in questo modo:

$$U = E_t[x_t(k_{t+1} + y_{t+1}) + (1 - x_t)r_f] - \frac{\gamma}{2}V_t[x_t(k_{t+1} + y_{t+1})], \quad (4.1)$$

Dove E_t e V_t denotano rispettivamente la media e la varianza condizionale rispetto all'informazione al tempo t , e γ è il coefficiente di avversione al rischio. Assumendo costante la varianza condizionale al tempo t di $k_{t+1} + y_{t+1}$ la frazione d'investimento che massimizza U è la seguente:

$$x_t = \frac{E_t[k_{t+1} + y_{t+1} - r_f]}{\gamma\sigma^2} \quad (4.2)$$

L'agente stima il ritorno futuro come una media dei ritorni passati per il titolo rischioso, in questo modo:

$$E_t[k_{t+1} + y_{t+1}] = \frac{1}{L} \sum_{\tau=1}^L k_{t-\tau} + t_{t-\tau} \quad (4.3)$$

Per dare dei limiti d'investimento e non passare fuori dal dominio diamo dei limiti, dei confini che non facciano investire fuori dall'intervallo $(0, 1)$; Assumiamo per questo che la quota d'investimento deve essere compresa tra $\underline{b}, \bar{b} \subset (0, 1)$. Una funzione d'investimento è data da:

$$f_{\alpha,L} = \min \left\{ \bar{b}, \max \left\{ \underline{b}, \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{L} \sum_{\tau=1}^L (k_{t-\tau} + y_{t-\tau}) - r_f \right) \right\} \right\}, \quad (4.4)$$

dove $\alpha = \gamma\sigma^2$ è l'avversione al rischio normalizzata ed L il lasso di memoria; Questi sono due parametri che contraddistinguono l'agente.

Andiamo di seguito ad elencare i possibili stati di equilibrio, dipendenti dall'avversione al rischio dell'agente.

4.2 Stati all'equilibrio con dividend yield positivo

Abbiamo scoperto che tali stati di equilibrio esistono solo quando $g > r_f$, cosa che supponiamo vera di qui in poi; La *EIF* allo stato d'equilibrio diventa:

$$\tilde{f}_{\alpha,L} = \min \left\{ \bar{b}, \max \left\{ b, \frac{y + g - r_f}{\alpha} \right\} \right\}, \quad (4.5)$$

La quale è mostrata in

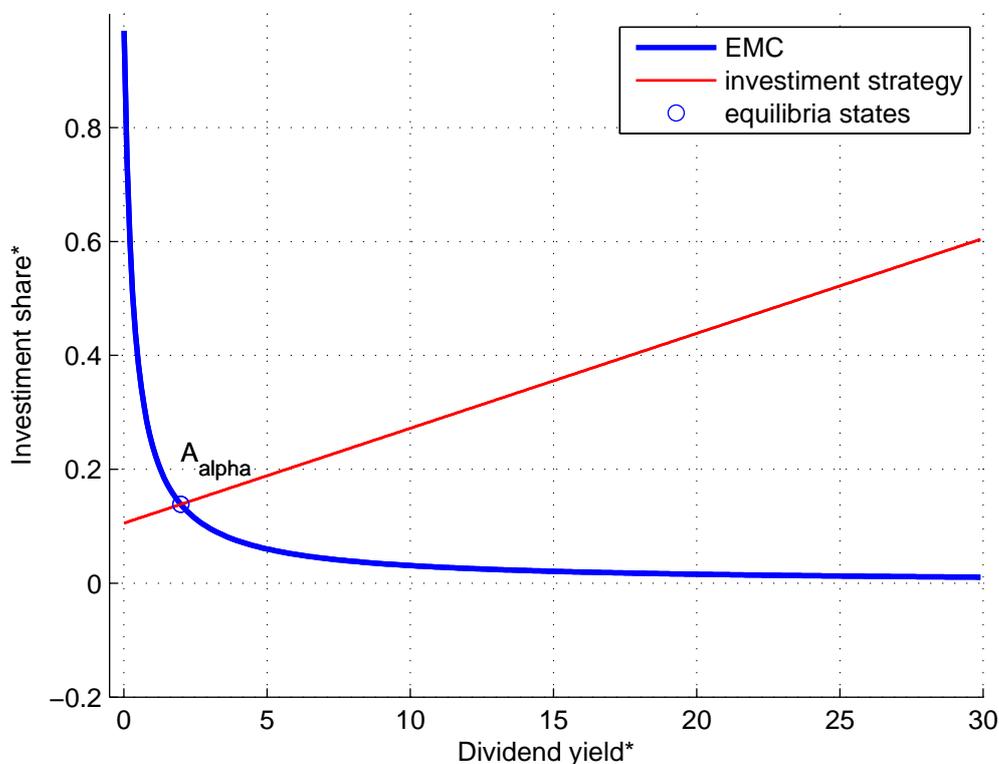


fig:3 Curva d'investimento all'equilibrio per il cartista con $g > r_f$; il punto all'equilibrio viene indicato con A_α .

Notiamo che tale curva è una retta che non dipende dalla memoria L , bensì dall'avversione al rischio dell'agente α , in quanto se l'agente è più avverso al rischio la retta ruota in senso orario, diminuendo la quota d'investimento all'equilibrio; Qualora invece l'agente sia meno avverso al rischio la retta ruoterà in senso antiorario, aumentando la quota d'investimento x^* per un certo valore y^* . Geometricamente tutte le funzioni d'investimento a differente memoria L collassano nella stessa curva d'investimento EIF , e analiticamente gli stati di equilibrio per un singolo agente possono essere derivati, ottenendo:

$$y^* = \frac{(1+\bar{b})(g-r_f)}{\bar{b}}, \quad x^* = \bar{b} \quad \text{per} \quad 0 < \alpha \leq \frac{(g-r_f)}{\bar{b}^2},$$

$$y^* = \sqrt{\alpha(g - r_f)} - (g - r_f), \quad x^* = \sqrt{\frac{g - r_f}{\alpha}} \quad \text{per} \quad \frac{g - r_f}{b^2} < \alpha < \frac{g - r_f}{b^2},$$

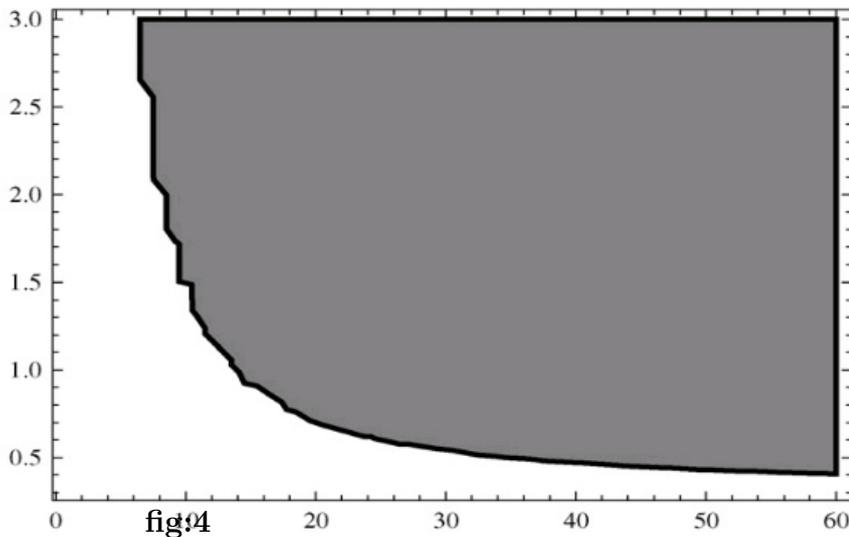
$$y^* = \frac{(1+b)(g - r_f)}{b}, \quad x^* = \underline{b} \quad \text{per} \quad \alpha \geq \frac{g - r_f}{b^2}. \quad (4.6)$$

I risultati in 4.2, cioè l'unicità e l'esistenza degli stati d'equilibrio derivano dalla forma della curva di mercato e dalla curva d'investimento; Per valori bassi o alti dell'avversione al rischio il punto di equilibrio prenderà come ordinata valori alti o bassi di frazione d'investimento, mentre per valori intermedi di α il punto sarà individuato dall'intersezione delle due curve già definite in precedenza.

Il punto A_α giace nell'intersezione delle due curve, la EMC e la EIF , e la corrispettiva ascissa dà il valore del dividend yield all'equilibrio y^* ; La posizione del punto notiamo che non dipende dalla memoria L dell'investitore; E' immediato vedere che quando α aumenta la retta $x = \frac{y + g - r_f}{\alpha}$ ruota in senso orario cosicchè il dividend yield all'equilibrio aumenta, mentre la quota investita diminuisce.

Quindi un agente è meno aggressivo quando ha un'avversione al rischio α maggiore, quindi investe meno in titoli rischiosi di un agente aggressivo.

Noteremo che la stabilità dei punti di equilibrio dipenderà sia dall'avversione al rischio, sia dalla memoria dell'agente, anticipando che un punto di equilibrio sarà stabile per alti valori sia di α che di L , come mostrato in figura :



La figura mostra il grafico di stabilità di un punto all'equilibrio al variare dell'avversione al rischio α (ascissa) e della memoria L (ordinata).

La zona colorata in grigio è la zona dove il punto all'equilibrio A_α è stabile, quindi notiamo da subito che per bassi valori di α e di L il punto all'equilibrio è instabile. Andremo a mostrare tali risultati successivamente.

4.3 Caso del dividend yield nullo

Nel caso di dividend yield all'equilibrio nullo abbiamo che $k^* = r_f$ e $y^* = 0$ e $f_{\alpha,L}(r_f, \dots, r_f; 0, \dots, 0) = \underline{b}$, qualsiasi siano i valori di α e L ; Ogni volta che $g < r_f$ questo punto di equilibrio è stabile dal momento che per $y = 0$, la funzione di investimento è costante.

4.4 Una seconda tipologia d'investitore: Il Fondamentalista

Una seconda tipologia d'investitore è il cosiddetto fondamentalista, il quale guarda ai fondamentali di un'azienda, cioè alla sua costante quotazione sul mercato, stabilendo se le sue azioni sono sottovalutate o sopravvalutate dagli agenti ed agendo di conseguenza, cioè comprando altre azioni nel primo caso o vendendo nel secondo, aspettandosi che le loro quotazioni si alzino o si abbassino.

Un esempio di fondamentalista, in inglese **fundamentalist**, possiamo immaginare che guardi al tasso di crescita del prezzo, quindi a k_t ed alla quota di crescita del dividendo; Quando il prezzo cresce più del dividendo, vuol dire che il titolo è sopravvalutato dal mercato, allora l'agente venderà delle azioni, viceversa, qualora il tasso di crescita del dividendo sia maggiore del tasso di profitto in conto capitale, il titolo azionario sarà sottovalutato, allora l'agente comprerà nuove azioni.

L'agente comprerà tali azioni secondo un fattore che chiamiamo β e la sua funzione d'investimento dipenderà anche dalla quota precedentemente investita, il suo comportamento sul mercato sarà dunque:

$$f_{\beta,L} = x_t \left(1 + \beta \left(g - \frac{\sum_{j=1}^L k_{t+1-j}}{L} \right) \right); \quad (4.7)$$

Notiamo che allo stato d'equilibrio con $g > r_f$, cioè con dividend yield positivo, siccome $k^* = g$ avremo che β verrà moltiplicato per una quantità nulla, in quanto $g - \frac{\sum_{j=1}^L k_{t+1-j}}{L}$ si annulla, ottenendo l'uguaglianza $x_{t+1} = x_t$, che è proprio la condizione d'equilibrio.

Differentemente dal caso del Cartista, la curva all' equilibrio per il fundamentalista non è determinata analiticamente ed esprimibile esplicitamente, ma dipenderà dal parametro β , e dalle condizioni di partenza per il fundamentalista.

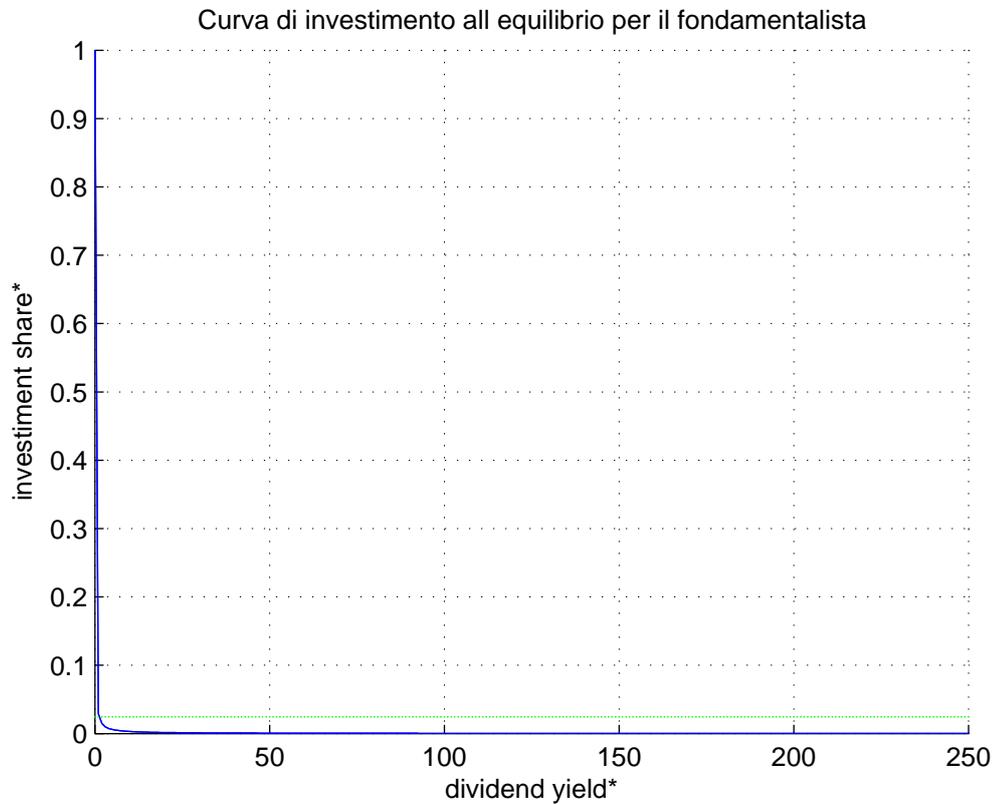


fig:5 *La figura rappresenta la curva di mercato EMC, e l'ultimo valore di equilibrio per il fondamentalista, indicato con una retta costante*

Nel caso di dividend yield nullo avremo che la media del ritorno dei prezzi all'equilibrio sarà uguale ad r_f , allora essendo $g < r_f$ avremo che la quota investita tenderà a zero; Per quanto riguarda la stabilità vedremo che i punti di equilibrio sono stabili per ogni valore della memoria L , in quanto gli autovalori della matrice dello jacobiano sono sempre dentro al cerchio unitario.

Capitolo 5

Processo di linearizzazione per un sistema

In matematica un sistema non lineare è un sistema di equazioni in cui almeno una di esse è non lineare, cioè non esprimibile come combinazione lineare delle incognite presenti e di una costante; Ad esempio potrebbe contenere equazioni algebriche con almeno un termine di grado diverso da uno, o più in generale dei termini non polinomiali. In pratica, ogni sistema di equazioni che non sia lineare è detto non lineare. Un sistema è polinomiale se ogni equazione è un polinomio. In questo caso il grado del sistema è il prodotto dei gradi dei polinomi, ed il sistema è non lineare precisamente quando ha grado maggiore di uno.

Il sistema è lineare se e solo se la funzione f è lineare, ovvero della forma $f(x) = ax + b$ con a e b nel dominio opportuno. In tutti gli altri casi il sistema non è lineare.

Definizione 5.1. *Un'equazione $f(x)$, con $x \in \mathfrak{R}^n$, si dice lineare se e solo se vengono verificate le seguenti condizioni:*

1. $f(ax+by)=f(ax)+f(by) \quad \forall a, b \in \mathfrak{R} \quad f(ax) = af(x) \quad \forall a \in \mathfrak{R}$

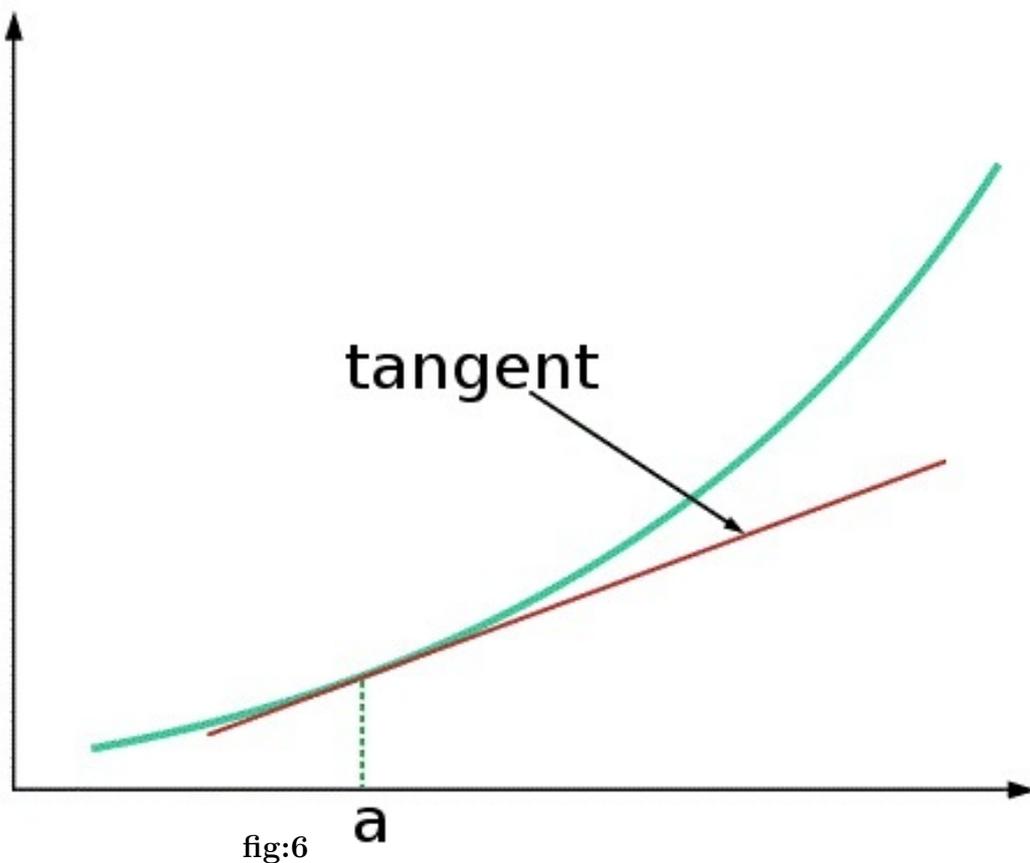
La quale si può semplificare nella seguente condizione:

$$f(ax + by) = af(x) + bf(y) \quad \forall a, b \in \mathfrak{R}$$

La quasi totalità dei sistemi fisici è non lineare, questo rende la ricerca di soluzioni analitiche molto difficile e a volte impossibile. È solitamente possibile trasformare un problema non lineare in un problema localmente lineare, cioè trovare un sistema lineare che approssima, entro un certo raggio, il sistema non lineare originale. A questo scopo si utilizzano vari tipi di espansione in serie, in particolare l'espansione in serie di Taylor (e l'analogo multidimensionale) e l'espansione in serie di Fourier.

In analisi matematica, un'approssimazione lineare è un tipo di approssimazione di una funzione a una retta (cioè a una funzione affine, la traslata di una funzione lineare); questo procedimento è anche detto linearizzazione o sviluppo al primo ordine della funzione. Le approssimazioni lineari sono usate correntemente in molte aree della matematica e della fisica, perché consentono, sotto ipotesi opportune, di semplificare problemi complessi (e talvolta non altrimenti risolvibili per via analitica).

5.1 Funzioni reali di variabile reale



La figura mostra la linearizzazione per una funzione reale ad una variabile reale nel punto indicato con a

Sia $f : E \subseteq \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ una funzione reale di variabile reale derivabile in E ; Possiamo allora scrivere il polinomio di Taylor della funzione centrato in $a \in E$, arrestato al primo ordine:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a), \quad (5.1)$$

dove la notazione o indica che:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o(x - a)}{(x - a)} = 0$$

cioè che il resto trascurato durante l'approssimazione è un infinitesimo di ordine superiore al primo.

Possiamo scrivere l'approssimazione come

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (5.2)$$

che è l'equazione di una retta; Essa viene chiamata retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa a . Questa è la retta che approssima linearmente attorno ad a , ed è definita solo per funzioni derivabili almeno una volta in tale punto; una funzione derivabile in un punto, infatti, può essere vista a ingrandimenti sempre maggiori fino a essere indistinguibile, negli immediati paraggi del punto, da una retta: questa è la retta tangente.

5.2 Funzioni di variabile vettoriale

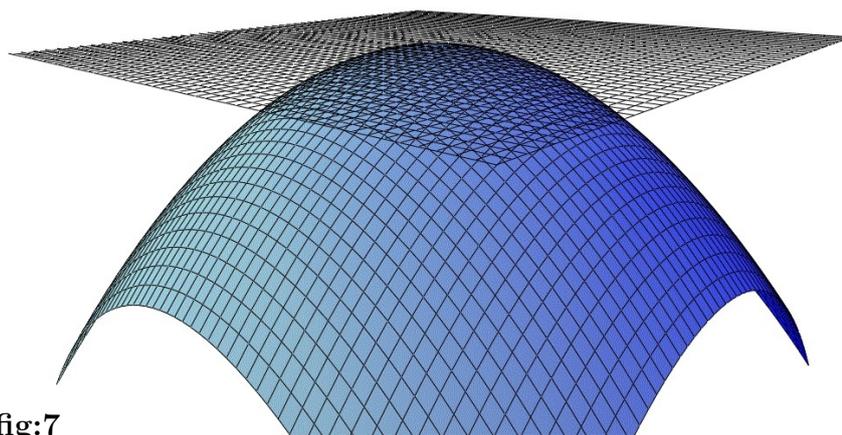


fig:7

La figura mostra la linearizzazione per una funzione reale a variabile vettoriale, la cosiddetta funzione differenziale

Il piano illustrato approssima linearmente la funzione (a due variabili) attorno al punto di tangenza (in questo caso il massimo della funzione). Sia $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una

funzione reale a n variabili reali (x_1, \dots, x_n) , differenziabile in un aperto Ω ; lo sviluppo al primo ordine di f attorno ad un punto $a \in \Omega$ si può scrivere:

$$f(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) + o(\|x - a\|) \quad (5.3)$$

dove

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

è il gradiente di f calcolato nel punto a e

$$\nabla f(a) \cdot (x - a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)$$

Questo prodotto scalare definisce un iperpiano n -dimensionale tangente al grafico (immerso nell' $(n + 1)$ -spazio) della funzione nel punto a ; questo iperpiano (che nel caso $n = 1$ è proprio la retta tangente) approssima linearmente la funzione attorno ad a , e la funzione approssimante:

$$f(x) \approx f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a)$$

è una funzione affine, data la linearità del prodotto scalare.

Nel nostro caso, cioè di funzioni vettoriali del tipo $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ di componenti $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, differenziabili una volta in Ω aperto, è possibile approssimare linearmente la funzione componente per componente, ottenendo (per un $a \in \Omega$):

$$f_i(x) \approx f_i(a) + \nabla f_i(a) \cdot (x - a) \quad (5.4)$$

per ogni i da 1 ad m ; Usando la notazione vettoriale, si può scrivere

$$f(x) \approx f(a) + J_f(a) \cdot (x - a) \quad (5.5)$$

dove

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

è la matrice jacobiana della funzione f calcolata nel punto a , la quale contiene tutti i gradienti delle m componenti di f ; naturalmente, se $n = m = 1$, si ritrova la formula della retta tangente.

5.3 Il nostro caso

Nel nostro caso abbiamo un sistema non lineare di $2N + 2L$ equazioni in altrettante incognite che indico con $X_{t+1} = \tau(x_1, \dots, x_n; \varphi_1, \dots, \varphi_n; k_t, \dots, k_{t-L}; y_{t+1}, \dots, y_{t+1-L})$.

Questo sistema lo possiamo sviluppare con il metodo di approssimazione di Taylor proprio vicino al punto di equilibrio:

$$\chi^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, \varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*; k^*; y^*)$$

Scriviamo in questo modo:

$$X_{t+1} = f(X_t) = f(\chi^*) + J_f(\chi^*)(X_t - \chi^*) + o((X_t - \chi^*)^2) \quad (5.6)$$

portando $f(\chi^*)$ al primo membro avremo:

$$X_{t+1} - f(\chi^*) = J_f(\chi^*)(X_t - \chi^*) + o((X_t - \chi^*)^2) \quad (5.7)$$

Ora avvicinandoci a sufficienza al punto d'equilibrio χ^* , e notando che $f(\chi^*) = \chi^*$, possiamo approssimare in questo modo il mio sistema non lineare con un sistema lineare usando lo Jacobiano del sistema calcolato nel punto d'equilibrio:

$$X_{t+1} - \chi^* \approx J_f(\chi^*)(X_t - \chi^*) \quad (5.8)$$

Assumendo ora $X_{t+1} - \chi^* = Y_{t+1}$, potremo scrivere:

$$Y_{t+1} \approx J_f(\chi^*)Y_t \quad (5.9)$$

Notiamo quindi nell'implementazione del sistema, che il punto di partenza del nostro dominio 2, viene trasformato, ad ogni iterazione secondo il sistema definito dallo Jacobiano, e che all'equilibrio il nostro punto verrà portato nell'origine, in quanto sarà $X_{t+1} = X_t = \chi^*$, e quindi:

$$X_{t+1} - \chi^* = X_t - \chi^* = Y_{t+1} = Y_t = 0$$

.

5.4 Lo studio degli autovalori per un sistema lineare

In questa sezione andremo a definire il concetto di autovalore per poi andare a studiare la nostra matrice Jacobiana calcolata nel punto d'equilibrio. In matematica, in particolare in algebra lineare, un autovettore di una trasformazione lineare tra spazi vettoriali è un vettore la cui immagine è il vettore stesso moltiplicato per uno scalare, detto autovalore.

Si definisce inoltre autospazio il sottospazio generato da tutti gli autovettori aventi in comune lo stesso autovalore.

Il concetto di autovalore-autovettore è fondamentale, e viene utilizzato in molti settori della matematica e della fisica; In meccanica classica gli autovettori delle equazioni che descrivono un sistema fisico corrispondono spesso ai modi di vibrazione di un corpo, e gli autovalori alle loro frequenze. In meccanica quantistica gli operatori corrispondono a variabili osservabili, gli autovettori sono chiamati anche autostati e gli autovalori di un operatore rappresentano quei valori della variabile corrispondente che hanno probabilità non nulla di essere misurati.

Il termine autovettore è stato tradotto dalla parola tedesca *Eigenvektor*, coniata da Hilbert nel 1904. *Eigen* significa proprio, caratteristico. Anche nella letteratura italiana troviamo spesso l'autovettore indicato come vettore proprio, vettore caratteristico o vettore latente.

Dal punto di vista formale, autovettori e autovalori sono definiti come segue: sia V uno spazio vettoriale su un campo K , che può essere ad esempio il campo dei numeri reali \mathbb{R} o il campo dei complessi C . Sia T un endomorfismo di V , cioè una trasformazione lineare:

$$T : V \rightarrow V$$

Se v è un vettore non nullo in V e λ è uno scalare tali che:

$$T(v) = \lambda v$$

allora v è un autovettore della trasformazione T , e λ è il suo autovalore.

Poiché T è lineare, se v è un autovettore con autovalore λ , allora ogni multiplo non-nullo di v è anch'esso un autovettore con lo stesso autovalore. Più in generale, gli autovettori aventi lo stesso fissato autovalore λ , insieme al vettore nullo, generano un sottospazio di V chiamato l'autospazio relativo all'autovalore λ , solitamente indicato con V_λ .

Lo spettro di T è l'insieme dei suoi autovalori ed il raggio spettrale di T è l'estremo superiore dei moduli dei suoi autovalori.

Nel caso in cui sia di dimensione finita, per ogni scelta di basi a T è associata univocamente una matrice, detta matrice di trasformazione. Gli autovettori e autovalori associati ad un'applicazione possono essere associati alla matrice di trasformazione nel medesimo modo.

Sia x il vettore delle coordinate di v rispetto ad una base e sia A la matrice di trasformazione rappresentante T rispetto alla medesima base.

Si ha:

$$Ax = \lambda x \tag{5.10}$$

In particolare, gli autovalori di A non dipendono dalla base scelta.

5.5 Il Polinomio caratteristico

Si definisce polinomio caratteristico $p(\lambda)$ nella variabile λ associato ad una matrice quadrata A il determinante:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

dove I è la matrice identità con lo stesso numero di righe di A . In particolare, le radici del polinomio caratteristico sono tutti gli autovalori di T .

Due matrici che rappresentano un endomorfismo di uno spazio vettoriale a dimensione finita sono simili, ed in particolare hanno il medesimo polinomio caratteristico, e dunque gli stessi autovalori. Si tratta di uno strumento di grande importanza, che ha permesso di sviluppare un metodo generale per l'individuazione di autovalori e autovettori di un endomorfismo nel caso in cui lo spazio vettoriale V abbia dimensione finita.

Il polinomio permette inoltre di stabilire l'esistenza di autovalori e autovettori per un'applicazione lineare:

Il polinomio caratteristico di T ha grado n , e quindi ha al più n radici: segue che T ha al più n autovalori distinti. Se K è algebricamente chiuso allora il polinomio caratteristico ha sempre almeno una radice: segue che T ha almeno un autovalore, e quindi anche almeno un autovettore.

Nel caso reale questo non succede sempre, ad esempio si possono trovare autovalori complessi.

5.6 Diagonalizzabilità

Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V , cioè una trasformazione lineare $T : V \rightarrow V$. Si dice che è diagonalizzabile se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice che rappresenta T è diagonale. In particolare, la base che diagonalizza T è composta da suoi autovettori.

In modo equivalente, una matrice quadrata è diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale; La matrice T è quindi diagonalizzabile nel campo di appartenenza se esiste una matrice invertibile P tale che:

$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

ovvero:

$$TP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Scrivendo P in termini dei vettori colonna:

$$P = (P^1 P^2 \dots P^n)$$

la precedente relazione diventa:

$$TP^i = \lambda_i P^i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.13)$$

I vettori colonna di P sono dunque autovettori di T , ed i corrispondenti elementi della matrice diagonale sono i rispettivi autovalori.

L'invertibilità di P implica inoltre l'indipendenza lineare degli autovettori, che formano una base dello spazio.

5.7 Lo studio degli autovalori per la stabilità di un sistema lineare e bacino di attrazione

Definiamo in questo sottocapitolo le condizioni necessarie e sufficienti, per le quali il nostro punto di equilibrio, sia stabile o instabile; Nel nostro caso il sistema è a tempo discreto ed è del tipo:

$$Y_{t+1} \approx J_f(\chi^*)Y_t \quad (5.14)$$

Daremo allora le seguenti definizioni:

Il sistema definito in 5.14 è:

1. *Asintoticamente stabile* se e solo se $\|\lambda_i\| < 1 \forall i$
2. *Semplicemente stabile* se e solo se $\|\lambda_i\| \leq 1 \forall i$, cioè $\exists i : \|\lambda_i\| = 1$
3. *instabile* se e solo se $\exists i : \|\lambda_i\| > 1$

Queste sono le condizioni che andremo a tenere in considerazione per vedere se un sistema sarà stabile o instabile.

Nello specifico andremo a considerare due semplici casi per $L = 1$, sia del cartista che del fondamentalista; Verificheremo allora che per il fondamentalista, i punti di equilibrio con memoria unitaria saranno tutti stabili, mentre ciò non sarà per il cartista che presenta una instabilità già nel caso $L = 1$.

Ci aspetteremo come detto in precedenza che al crescere di L , il cartista arrivi a dei punti di equilibrio sempre più stabili, ma ciò non sarà facile da analizzare in quanto i calcoli sono lunghi e tediosi.

Definiamo il termine bacino di attrazione, fondamentale successivamente per lo studio delle biforcazioni:

Definizione 5.2. Bacino d'attrazione *Se x^* è un punto di equilibrio, si dice bacino (o anche bacino di attrazione) di x^* l'insieme U delle condizioni iniziali tali che le corrispondenti soluzioni hanno x^* come punto limite.*

x^ stesso appartiene sempre al suo bacino ed è attrattivo se e solo se sta nella parte interna del suo bacino di attrazione. Anche un punto non attrattivo può avere un bacino di attrazione, come nel caso della sella instabile.*

Comincia allora nel prossimo capitolo la nostra analisi di stabilità per questi due tipi di agenti.

Capitolo 6

Lo studio di stabilità per i due tipi di investitori

6.1 Stabilità all'equilibrio per il cartista a memoria unitaria

In questo capitolo prendiamo in considerazione un agente che si comporta come l'ottimizzatore media-varianza definito già in precedenza.

Esso tiene in considerazione solo il tasso di crescita del prezzo e del dividend yield, va cioè a porre attenzione solo al passaggio precedente; Considero, per avere dei risultati significativi un'avversione al rischio intermedia, cioè che non faccia cadere la scelta dell'investimento nei limiti posti da noi precedentemente tra $(0, 1)$, nello specifico mi riferisco alla seconda riga dell'equazione 4.2.

Nel sistema eliminiamo la variabile φ , in quanto, considerando il singolo agente, egli avrà sempre questa variabile uguale ad 1, ($\varphi_1 = 1$).

Scriviamo di seguito le equazioni del sistema, andrò successivamente a calcolarmi lo Jacobiano della matrice della trasformazione nel punto di equilibrio e vedremo computazionalmente che per ogni punto all'equilibrio avremo almeno un autovalore in modulo più grande di 1.

$$(6.1) \quad \begin{cases} x_{t+1} = \frac{1}{\alpha}(k_t + y_t - r_f), \\ k_{t+1} = r_f + \frac{(1+r_f)(x_{t+1}-x_{n,t})+y_{t+1}x_{t+1}}{x_t(1-x_{t+1})}, \\ y_{t+1} = y_t \frac{1+g}{1+k_t}. \end{cases}$$

Andando a sostituire la prima e la terza equazione nella seconda avremo:

$$(6.2) \quad \begin{cases} x_{t+1} = \frac{1}{\alpha}(k_t + y_t - r_f), \\ k_{t+1} = r_f + \frac{(1+r_f)(\frac{1}{\alpha}(k_t+y_t-r_f)-x_{n,t})+y_t \frac{1+g}{1+k_t} x_t \frac{1}{\alpha}(k_t+y_t-r_f)}{x_t(1-\frac{1}{\alpha}(k_t+y_t-r_f))}, \\ y_{t+1} = y_t \frac{1+g}{1+k_t}. \end{cases}$$

Calcoliamo ora lo Jacobiano della trasformazione, cioè una matrice nelle quali righe ci sono le derivate parziali delle equazioni del sistema rispetto a tutte le variabili al tempo precedente, avremo allora il seguente sistema 3×3 :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial x_{t+1}}{\partial k_t} & \frac{\partial x_{t+1}}{\partial y_t} \\ \frac{\partial k_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} & \frac{\partial k_{t+1}}{\partial y_t} \\ \frac{\partial y_{t+1}}{\partial x_t} & \frac{\partial y_{t+1}}{\partial k_t} & \frac{\partial y_{t+1}}{\partial y_t} \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Nel nostro specifico avremo:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1/\alpha & 1/\alpha \\ \langle 1 \rangle & \langle 2 \rangle & \langle 3 \rangle \\ 0 & -\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)^2} & \frac{(1+g)}{(1+k_t)} \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Andiamo di seguito, per semplicità grafica a riportare i termini contrassegnati dai numeri della matrice:

$$\begin{aligned}
\langle 1 \rangle &: \frac{-(1+r_f)x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha})-(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha})(1+r_f(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}-x_t))}{(x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}))^2}; \\
\langle 2 \rangle &: \frac{\frac{1}{\alpha}(1+r_f)x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha})+\frac{1}{\alpha}x_t(1+r_f)(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}-x_t)+(\frac{-\frac{1}{\alpha}x_t y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)+\frac{1}{\alpha}x_t y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)}}{(1+k_t)^2})(x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}))}{(x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}))^2} \\
&+ X_t^2 y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)} (k_t + y_t - r_f) \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{(x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}))^2}; \\
\langle 3 \rangle &: \frac{(1+r_f)\frac{1}{\alpha}x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha})+\frac{1}{\alpha}x_t(1+r_f)(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}-x_t)+(\frac{1}{\alpha}x_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)}(k_t+y_t-r_f)+\frac{1}{\alpha}x_t y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)})(x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}))}{(x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}))^2} \\
&+ X_t^2 y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)} (k_t + y_t - r_f) \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{(x_t(1-\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha}))^2};
\end{aligned}$$

Ora, considerando che all'equilibrio, con $g > r_f$, $k_t = g$, e che $\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha} = x^*$, e che la funzione d'investimento deve contemporaneamente soddisfare la curva di mercato, e chiamando $\tau = \frac{(g-r_f)}{(1+g)}$ avremo:

$$\begin{aligned}
\langle 1e \rangle &: \frac{-(1+r_f)}{x^*(1-x^*)}; \\
\langle 2e \rangle &: \frac{(1+g)}{\alpha(x^*(1-x^*))} - \tau; \\
\langle 3 \rangle &: \frac{\alpha x^{*2} + (\frac{-\alpha g + g + \alpha r_f - r_f}{\alpha}) + \frac{\alpha g - \alpha r_f + 1 + r_f}{\alpha}}{x^*(1-x^*)}.
\end{aligned}$$

Ci andremo a calcolare il polinomio caratteristico di tale matrice, attraverso il determinante della matrice $J(e) - \lambda I$, dove $J(e)$ è lo Jacobiano calcolato nel punto all'equili-

bricio; IL polinomio caratteristico, che indichiamo con $P(\lambda)$ sarà:

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{(1+g)}{\alpha x^*(1-x^*)} - \tau + 1 \right) + \lambda \left(\frac{-(1+g)}{\alpha x^*(1-x^*)} + \tau - \langle 3 \rangle \tau \frac{(1-x^*)}{x^*} - \frac{(1+r_f)}{\alpha x^*(1-x^*)} \right) + \frac{(1+r_f)}{\alpha x^*(1-x^*)} + \frac{\tau(1+r_f)}{\alpha x^{*2}} = 0$$

Dimostriamo tale affermazione nell'appendice, in [**Dimostrazione 2**].

Trovando le soluzioni di tale polinomio caratteristico, avremo che esiste sempre almeno un autovalore più grande in modulo di 1 (lo vediamo computazionalmente), per ogni punto all'equilibrio del sistema; Concludiamo quindi che il cartista a memoria unitaria, presenta sempre dei punti di equilibrio instabili.

Questo fatto comporta che, qualora implementassimo il sistema con un punto nelle vicinanze del punto d'equilibrio, esso non si avvicinerà allo stesso ma si comporterà in maniera molto diversa.

Possiamo anche vedere questo graficamente, in quanto il punto considerato, implementando passo passo il sistema, non si avvicina all'origine, del sistema di riferimento chiamato Y . Andiamo di seguito a studiare il caso del fundamentalista per $L = 1$, e a differenza del cartista noteremo che il punto di equilibrio considerato è sempre stabile.

6.2 Stabilità all'equilibrio per il fundamentalista a memoria unitaria

Studiamo, come fatto in precedenza per il cartista, la stabilità per il fundamentalista, dei suoi punti di equilibrio, andando a studiare gli autovalori della matrice che caratterizza l'approssimazione del sistema non lineare; Andremo quindi a vedere se gli autovalori della matrice sono più piccoli o meno di uno, e daremo una risposta in questo senso.

Questo tipo di investitore è caratterizzato dal fatto che investe meno se il titolo in borsa è sopravvalutato, cioè se il tasso di crescita del dividendo è più piccolo del tasso di crescita del prezzo stesso dell'azione, mentre investe di più se il titolo è sottovalutato.

Andiamo ad elencare di seguito le equazioni del sistema per il fundamentalista, e proce-

6.2 Stabilità all'equilibrio per il fondamentalista a memoria unitaria 15

diamo con i calcoli.

$$(6.5) \quad \begin{cases} x_{t+1} = x_t(1 + \beta(g - k_t)), \\ k_{t+1} = r_f + \frac{(1+r_f)(x_{t+1}-x_t)+y_{t+1}x_t x_{t+1}}{x_t(1-x_{t+1})}, \\ y_{t+1} = y_t \frac{1+g}{1+k_t}. \end{cases}$$

Ed andando a sostituire la prima e terza equazione nella seconda, in modo da avere come variabili, le stesse al tempo t , avremo:

$$(6.6) \quad \begin{cases} x_{t+1} = x_t(1 + \beta(g - k_t)), \\ k_{t+1} = r_f + \frac{(1+r_f)(x_t(1+\beta(g-k_t))-x_t)+y_t \frac{1+g}{1+k_t} x_t^2 (1+\beta(g-k_t))}{x_t(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))}, \\ y_{t+1} = y_t \frac{1+g}{1+k_t}. \end{cases}$$

Andiamo di seguito a calcolare lo Jacobiano del sistema indicando con dei numeri i termini più complicati; Avremo:

$$J = \begin{bmatrix} (1 + \beta(g - k_t)) & -\beta x_t & 0 \\ \langle 1 \rangle & \langle 2 \rangle & \langle 3 \rangle \\ 0 & -\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)^2} & \frac{(1+g)}{(1+k_t)} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Andiamo di seguito ad elencare gli elementi della matrice non riportati esplicitamente:

$$\langle 1 \rangle : \frac{(1+\beta(g-k_t))(1+r_f)(\beta(g-k_t))+y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)}(1+\beta(g-k_t))(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))+(1+\beta(g-k_t))y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)}x_t(1+\beta(g-k_t))}{(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))^2};$$

$$\langle 2 \rangle : \frac{-(1+r_f)\beta(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))-\beta x_t(1+r_f)(\beta(g-k_t))+\left(\frac{-\beta x_t y_t(1+g)(1+k_t)-y_t(1+g)x_t(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)^2}\right)(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))}{(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))^2} - \frac{\beta x_t^2 y_t(1+g)1+k_t(1+\beta(g-k_t))}{(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))^2};$$

$$\langle 3 \rangle : \frac{\frac{(1+g)}{(1+k_t)}x_t(1+\beta(g-k_t))}{(1-x_t(1+\beta(g-k_t)))}.$$

All'equilibrio notiamo che se $g > r_f$, $k^* = g$, ed indichiamo con x^* ed y^* la quota d'investimento ed il dividend yield all'equilibrio; avremo allora che i termini in precedenza saranno: (riportiamo anche i calcoli al seguito e li indichiamo con una e al fianco che sta per equilibrio):

$$\langle 1e \rangle : \frac{y^*(1-x^*)+y^*x^*}{(1-x^*)^2} = \frac{y^*}{(1-x^*)^2};$$

$$\langle 2e \rangle : \frac{-(1+r_f)\beta(1-x^*)+(\beta x^*y^*-\frac{y^*x^*}{(1+g)})(1-x^*)-\beta x^{*2}y^*}{(1-x^*)^2} = \frac{-(1+r_f)\beta(1-x^*)-\beta x^*y^*-\frac{y^*x^*}{(1+g)}+\frac{y^*x^{*2}}{(1+g)}}{(1-x^*)^2};$$

$$\langle 3e \rangle : \frac{x^*}{(1-x^*)}.$$

Ora, considerando che il punto di equilibrio giace sulla curva di mercato avremo che

$$y^* = (g - r_f)\left(\frac{1}{x^*} - 1\right), \text{ e quindi che } x^*y^* = (g - r_f)(1 - x^*), \text{ e rifacendo i calcoli, sostituiamo}$$

6.2 Stabilità all'equilibrio per il fondamentalista a memoria unitaria 17

tuendo queste due espressioni avremo: $\langle 1e \rangle : \frac{(g-r_f)}{x^*(1-x^*)}$;

$$\langle 2e \rangle : \frac{-(1+r_f)\beta - \beta(g-r_f) - \frac{(g-r_f)}{(1+g)} + \frac{(g-r_f)}{(1+g)}x^*}{1-x^*};$$

$$\langle 3e \rangle : \frac{x^*}{(1-x^*)}.$$

Chiamando ora $h = \frac{\beta(1+g)}{(1-x^*)}$ e $\tau = \frac{(g-r_f)}{(1+g)}$, avrò allora la seguente matrice jacobiana calcolata all'equilibrio:

$$Je = \begin{bmatrix} 1 & -\beta x^* & 0 \\ \frac{(g-r_f)}{x^*(1-x^*)} & -h - \tau & \frac{x^*}{(1-x^*)} \\ 0 & -\tau \frac{(1-x^*)}{x^*} & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Vado di seguito a calcolarmi gli autovalori della matrice jacobiana, andandomi a calcolare gli zero del polinomio caratteristico, dato dal determinante della matrice $Je - \lambda I$:

$$Je - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -\beta x^* & 0 \\ \frac{(g-r_f)}{x^*(1-x^*)} & -h - \tau - \lambda & \frac{x^*}{(1-x^*)} \\ 0 & -\tau \frac{(1-x^*)}{x^*} & 1 - \lambda \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Dopo calcoli tediosi avremo che il polinomio caratteristico di tale matrice sarà:

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)[(-h - \tau - \lambda)(1 - \lambda) + \tau + \beta x^* \frac{g - r_f}{x^*(1 - x^*)}] = 0; \quad (6.10)$$

Avremo allora che un autovalore è quello unitario mentre gli altri due saranno dati dalla risoluzione dell'equazione:

$$\lambda^2 + \lambda(h + \tau - 1) - (h - \beta \frac{g - r_f}{1 - x^*}) = 0$$

quindi, risolvendola con la formula di risoluzione per le equazioni di secondo grado avremo i seguenti due autovalori che indico con:

$$\lambda_{+,-} = \frac{-(h + \tau - 1) \pm \sqrt{(h + \tau - 1)^2 + 4(h - \frac{\beta(g-r_f)}{1-x^*})}}{2}$$

Andando ad inserire nel nostro programma tali autovalori, risulterà sempre che saranno in modulo più piccoli di 1 per valori piccoli di β , e lo dimostriamo nell'appendice in [Dimostrazione 3]. Quindi concludiamo che il punto di equilibrio per il fondamentalista con memoria unitaria è sempre stabile; Andiamo ora di seguito a calcolare gli autospazi relativi a tali autovalori e successivamente mostreremo graficamente la progressione del punto nel tempo.

Per ottenere gli autospazi inseriamo nella matrice $J(e) - \lambda I$, l'autovalore che vogliamo considerare, moltiplichiamo tale matrice per il vettore (Y_1, Y_2, Y_3) , e lo poniamo uguale al vettore nullo, in questo modo avremo per il primo autovalore unitario:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\beta x^* & 0 \\ \frac{(g-r_f)}{x^*(1-x^*)} & -h - \tau - 1 & \frac{x^*}{(1-x^*)} \\ 0 & -\tau \frac{(1-x^*)}{x^*} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (6.11)$$

Dove lo zero indica il vettore nullo.

Avremo quindi il seguente sistema lineare da risolvere e di seguito riportiamo le sue soluzioni, cioè l'autospazio relativo all'autovalore unitario che indichiamo con λ_1 :

$$\begin{cases} -\beta x^* Y_2 = 0 \\ \frac{g-r_f}{x^*(1-x^*)} Y_1 - (h + \tau + 1) Y_2 + \frac{x^*}{(1-x^*)} Y_3 = 0 \\ -\tau \frac{1-x^*}{x^*} Y_2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono le seguenti:

$$(Y_1, 0, \frac{g-r_f}{x^{*2}} Y_1)$$

Per quanto riguarda gli autospazi dei successivi due autovalori chiamati $\lambda_{+,-}$, avremo i seguenti sistemi lineari:

6.2 Stabilità all'equilibrio per il fondamentalista a memoria unitaria 19

$$\begin{cases} (1 - \lambda_{+,-})Y_1 - \beta x^* Y_2 = 0 \\ \frac{g-r_f}{x^*(1-x^*)}Y_1 - (h + \tau + \lambda_{+,-})Y_2 + \frac{x^*}{(1-x^*)}Y_3 = 0 \\ -\tau \frac{1-x^*}{x^*}Y_2 + (1 - \lambda_{+,-})Y_3 = 0 \end{cases}$$

E le soluzioni del relativo sistema sono:

$$\left(\frac{\beta x^{*2}}{\tau(1-x^*)}Y_3, \frac{x^*(1-\lambda_{+,-})}{t(1-x^*)}Y_3, Y_3 \right).$$

Essendo tutti gli autovalori della matrice minori di uno in modulo, avremo che qualunque

punto nella direzione degli autospazi precedenti verrà diminuito in modulo secondo la stessa direzione; Notiamo inoltre che prendendo un punto vicino al punto di equilibrio x^* , il sistema porterà proprio il punto nel punto di equilibrio, che secondo la nostra convenzione è l'origine degli assi (Y_1, Y_2, Y_3) .

Capitolo 7

Lo studio di stabilità per i due investitori a confronto

7.1 Stabilità Cartista / Fondamentalista

In questo capitolo andremo a studiare la stabilità per il modello ad agenti eterogenei, con cartista e fondamentalista a confronto; A differenza di prima avremo un sistema dove entrano in gioco due nuove variabili indicanti le ricchezze relative dei singoli agenti φ_1 e φ_2 , ed anche il sistema aumenterà di dimensione diventando un sistema 6×6 , cioè a sei equazioni in sei incognite.

Il procedimento per lo studio di stabilità sarà comunque lo stesso per il caso a singolo agente, infatti andremo a calcolare lo Jacobiano del sistema linearizzato e rispettivi autovalori della matrice calcolata nel punto di equilibrio; Qui sorgono due condizioni, infatti ci potrà essere la sopravvivenza di tutti e due gli agenti, oppure la sopravvivenza di un singolo agente e la rispettiva uscita dal mercato dell'altro;

Il sistema con cui abbiamo a che fare è il seguente, indicando come primo agente il cartista e come secondo agente il fondamentalista, (chiamiamo $\langle x \rangle = \varphi_{1,t}x_{1,t} + \varphi_{2,t}x_{2,t}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,t+1} = \frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha} \\ x_{2,t+1} = x_{2,t}(1 + \beta(g - k_t)) \\ \varphi_{1,t+1} = \varphi_{1,t} \frac{1+r_f + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f)x_{1,t}}{1+r_f + \langle x \rangle (k_t + y_t - r_f)} \\ \varphi_{2,t+1} = \varphi_{2,t} \frac{1+r_f + (k_{t+1} + y_{t+1} - r_f)x_{2,t}}{1+r_f + \langle x \rangle (k_t + y_t - r_f)} \\ k_{t+1} = r_f + \frac{[(1+r_f)(\frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha} - x_{1,t}) + y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)} \frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha} x_{1,t}] \varphi_{1,t}}{x_{1,t}(1 - \frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha}) \varphi_{1,t} + x_{2,t}(1 - x_{2,t}(1 + \beta(g - k_t))) \varphi_{2,t}} + \\ \frac{[(1+r_f)(x_{2,t}(1 + \beta(g - k_t)) - x_{2,t}) + y_t \frac{(1+g)}{1+k_t} x_{2,t}^2 (1 + \beta(g - k_t))] \varphi_{2,t}}{x_{1,t}(1 - \frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha}) \varphi_{1,t} + x_{2,t}(1 - x_{2,t}(1 + \beta(g - k_t))) \varphi_{2,t}} \\ y_{t+1} = y_t \frac{(1+g)}{(1+k_t)} \end{array} \right.$$

Il sistema avrà il seguente Jacobiano, indicando con i numeri i termini più complicati che andremo successivamente ad elencare:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 + \beta(g - k_t) & 0 & 0 & -\beta x_{2,t} & 0 \\ \langle 1 \rangle & \langle 2 \rangle & \langle 3 \rangle \langle 4 \rangle & \langle 5 \rangle & \langle 6 \rangle & \\ \langle 7 \rangle & \langle 8 \rangle & \langle 9 \rangle \langle 10 \rangle & \langle 11 \rangle & \langle 12 \rangle & \\ \langle 13 \rangle & \langle 14 \rangle & \langle 15 \rangle \langle 16 \rangle & \langle 17 \rangle & \langle 18 \rangle & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)^2} & \frac{(1+g)}{(1+k_t)} \end{bmatrix} \quad (7.0)$$

Andiamo di seguito ad elencare gli elementi della matrice non riportati esplicitamente, partendo dalle derivate parziali del **price return** rispetto alle variabili al tempo t precedente; Le stesse verranno inserite nei termini alle derivate parziali delle ricchezze relative rispetto alle variabili al tempo precedente, (indichiamo per semplicità $x_{1,t}(1 - \frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha}) \varphi_{1,t} + x_{2,t}(1 - x_{2,t}(1 + \beta(g - k_t))) \varphi_{2,t} = den$):

$$\begin{aligned} \langle 13 \rangle &= \frac{\partial k_{t+1}}{\partial x_{1,t}} = \frac{[-\varphi_{1,t}(1+r_f) + \frac{\varphi_{1,t} y_t (1+g)(k_t + y_t - r_f)}{\alpha(1+k_t)}] den - (1 - \frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha}) \varphi_{1,t}^2 [(1+r_f)(\frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha} - x_{1,t})]}{den^2} + \\ &\frac{\frac{x_{1,t} y_t (1+g)(k_t + y_t - r_f)}{\alpha(1+k_t)}}{den^2} - \frac{(1 - \frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha}) \varphi_{1,t} \varphi_{2,t} [(1+r_f)(x_{2,t} \beta(g - k_t)) + \frac{y_t (1+g) x_{2,t}^2 (1 + \beta(g - k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2}; \\ \langle 14 \rangle &= \frac{\partial k_{t+1}}{\partial x_{2,t}} = \frac{-\varphi_{2,t} \varphi_{1,t} (1 - x_{2,t}(1 + \beta(g - k_t))) [(1+r_f)(\frac{k_t + y_t - r_f}{\alpha}) + \frac{x_{1,t} y_t (1+g)(k_t + y_t - r_f)}{\alpha(1+k_t)}] + den [\beta(1+r_f)(g - k_t) \varphi_{2,t}]}{den^2} + \end{aligned}$$

$$\frac{2y_t x_{2,t} \varphi_{2,t} \frac{(1+g)(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)} - \varphi_{2,t} [\varphi_{2,t}(1-x_{2,t}(1+\beta(g-k_t))) - \varphi_{2,t} x_{2,t}(1+\beta(g-k_t))] [(1+r_f)(x_{2,t}\beta(g-k_t)) + \frac{y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2};$$

$$\langle 15 \rangle = \frac{\partial k_{t+1}}{\partial \varphi_{1,t}} = \frac{[(1+r_f)(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha} - x_{1,t}) + \frac{x_{1,t}y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)}]den - \varphi_{1,t}x_{1,t}(1 - \frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha})[(1+r_f)(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha} - x_{1,t}) + \frac{x_{1,t}y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)}]}{den^2} +$$

$$\frac{\frac{x_{1,t}y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)} - \varphi_{2,t}x_{1,t}(1 - \frac{(k_t+y_t-r_f)}{\alpha})[(1+r_f)(x_{2,t}\beta(g-k_t)) + \frac{x_{2,t}^2y_t(1+g)(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2};$$

$$\langle 16 \rangle = \frac{\partial k_{t+1}}{\partial \varphi_{2,t}} = \frac{-x_{2,t}\varphi_{1,t}(1-x_{2,t}(1+\beta(g-k_t)))[(1+r_f)(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha} - x_{1,t}) + \frac{x_{1,t}y_t(k_t+y_t-r_f)(1+g)}{\alpha(1+k_t)}] + [(1+r_f)(x_{2,t}\beta(g-k_t)) + \frac{y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2} +$$

$$\frac{\frac{y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}den - \varphi_{2,t}x_{2,t}(1-x_{2,t}(1+\beta(g-k_t)))[(1+r_f)x_{2,t}\beta(g-k_t) + \frac{y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2};$$

$$\langle 17 \rangle = \frac{\partial k_{t+1}}{\partial k_t} = \frac{[\frac{(1+r_f)\varphi_{1,t}}{\alpha} + \varphi_{1,t}(\frac{-x_{1,t}y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)^2} + \frac{x_{1,t}y_t(1+g)}{\alpha(1+k_t)})]den - (x_{2,t}^2\varphi_{2,t}\beta - \frac{x_{1,t}\varphi_{1,t}}{\alpha})\varphi_{1,t}[(1+r_f)(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha} - x_{1,t}) + \frac{x_{1,t}y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)}]}{den^2}$$

$$\frac{\frac{x_{1,t}y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)} + \varphi_{2,t}den[-\beta x_{2,t}(1+r_f) + \frac{-y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))^2}{1+k_t} - \frac{\beta y_t(1+g)x_{2,t}^2}{(1+k_t)}] - \varphi_{2,t}(x_{2,t}^2\varphi_{2,t}\beta - \frac{x_{1,t}\varphi_{1,t}}{\alpha})[(1+r_f)x_{2,t}\beta(g-k_t) + \frac{y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2};$$

$$\frac{y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]den^2;$$

$$\langle 18 \rangle = \frac{\partial k_{t+1}}{\partial y_t} = \frac{\varphi_{1,t}den[\frac{(1+r_f)}{\alpha} + \frac{x_{1,t}(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)} + \frac{x_{1,t}y_t(1+g)}{\alpha(1+k_t)}] + \frac{x_{1,t}\varphi_{1,t}^2}{\alpha}[(1+r_f)(\frac{k_t+y_t-r_f}{\alpha} - x_{1,t}) + \frac{x_{1,t}y_t(1+g)(k_t+y_t-r_f)}{\alpha(1+k_t)}]}{den^2}$$

$$\frac{\varphi_{2,t}den[\frac{(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2} + \frac{\frac{x_{1,t}\varphi_{1,t}\varphi_{2,t}}{\alpha}[(1+r_f)(x_{2,t}\beta(g-k_t)) + \frac{y_t(1+g)x_{2,t}^2(1+\beta(g-k_t))}{(1+k_t)}]}{den^2};$$

Dopo che abbiamo scritto le derivate parziali del **price return** andiamo ad elencare le derivate parziali della ricchezza relativa del primo agente, il cartista, rispetto alle variabili al tempo t ; Nei seguenti termini compariranno le derivate elencate in precedenza che andremo a sottoscrivere solo in maniera implicita, cioè richiamandole numericamente. Per semplicità indichiamo il seguente termine $(1+r_f) + (k_{t+1} + \frac{t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f) < x \rangle = deno$, ed elenchiamo le derivate parziali di seguito:

$$\langle 1 \rangle = \frac{\partial \varphi_{1,t+1}}{\partial x_{1,t}} = \varphi_{1,t} \left(\frac{[<13>x_{1,t} + (k_{t+1} + \frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f)]deno - [<13>x_{1,t}\varphi_{1,t} + \varphi_{1,t}(k_{t+1} + \frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f) + <13>x_{2,t}\varphi_{2,t}]}{deno^2} \right)$$

$$\left. \frac{[1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{\phantom{[1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}} \right);$$

$$\langle 2 \rangle = \frac{\partial \varphi_{1,t+1}}{\partial x_{2,t}} = \varphi_{1,t} \left(\frac{\langle 14 \rangle x_{1,t} deno - [\langle 14 \rangle x_{1,t} \varphi_{1,t} + \langle 14 \rangle x_{2,t} \varphi_{2,t} + \varphi_{2,t} (k_{t+1} + \frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f)]}{deno^2} \frac{[1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{\phantom{[1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}} \right);$$

$$\langle 3 \rangle = \frac{\partial \varphi_{1,t+1}}{\partial \varphi_{1,t}} = \frac{1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)}{1+r_f+\langle x \rangle (k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)} + \varphi_{1,t} \left(\frac{\langle 15 \rangle x_{1,t} deno - [\langle 15 \rangle x_{1,t} \varphi_{1,t} + k_{t+1} x_{1,t} + x_{2,t} \varphi_{2,t} \langle 15 \rangle + x_{1,t} \frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f] [1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{deno^2} \right);$$

$$\langle 4 \rangle = \frac{\partial \varphi_{1,t+1}}{\partial \varphi_{2,t}} = \varphi_{1,t} \left(\frac{\langle 16 \rangle x_{1,t} [1+r_f+\langle x \rangle (k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)] - [\langle 16 \rangle x_{1,t} \varphi_{1,t} + \langle 16 \rangle x_{2,t} \varphi_{2,t} + k_{t+1} x_{2,t} + x_{2,t} (\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f)]}{deno^2} \frac{[1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{\phantom{[1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}} \right);$$

$$\langle 5 \rangle = \frac{\partial \varphi_{1,t+1}}{\partial k_t} = \varphi_{1,t} \left(\frac{\langle 17 \rangle x_{1,t} - \frac{y_t(1+g)x_{1,t}}{(1+k_t)^2} deno - [\langle 17 \rangle \langle x \rangle - \frac{y_t(1+g)\langle x \rangle}{(1+k_t)^2}] [1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{deno^2} \right);$$

$$\langle 6 \rangle = \frac{\partial \varphi_{1,t+1}}{\partial y_t} = \varphi_{1,t} \left(\frac{\langle 18 \rangle x_{1,t} + x_{1,t} \frac{(1+g)}{(1+k_t)} deno - [\langle 18 \rangle + \frac{(1+g)}{(1+k_t)}] \langle x \rangle [1+r_f+x_{1,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{deno^2} \right);$$

Facciamo la stessa cosa con le derivate parziali della ricchezza relativa del secondo agente, il fondamentalista, andando così a completare lo Jacobiano del sistema, del quale successivamente ci andremo a calcolare numericamente gli autovalori.

$$\langle 7 \rangle = \frac{\partial \varphi_{2,t+1}}{\partial x_{1,t}} = \varphi_{2,t} \left(\frac{\langle 13 \rangle x_{2,t} deno - [\langle 13 \rangle x_{1,t} \varphi_{1,t} + k_{t+1} \varphi_{1,t} + \langle 13 \rangle x_{2,t} \varphi_{2,t} + \frac{\varphi_{1,t} y_t (1+g)}{(1+k_t)} - r_f \varphi_{1,t}]}{deno^2} \frac{[1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{\phantom{[1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}} \right);$$

$$\langle 8 \rangle = \frac{\partial \varphi_{2,t+1}}{\partial x_{2,t}} = \varphi_{2,t} \left(\frac{\langle 14 \rangle x_{2,t} + k_{t+1} + \frac{(1+g)y_t}{(1+k_t)} - r_f deno - [\langle 14 \rangle x_{1,t} \varphi_{1,t} + \langle 14 \rangle x_{2,t} \varphi_{2,t} + k_{t+1} \varphi_{2,t} + \frac{y_t(1+g)\varphi_{2,t}}{(1+k_t)} - r_f \varphi_{2,t}]}{deno^2} \frac{[1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{\phantom{[1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}} \right);$$

$$\langle 9 \rangle = \frac{\partial \varphi_{2,t+1}}{\partial \varphi_{1,t}} = \varphi_{2,t} \left(\frac{\langle 15 \rangle x_{2,t} deno - [\langle 15 \rangle x_{1,t} \varphi_{1,t} + k_{t+1} x_{1,t} + \langle 15 \rangle x_{2,t} \varphi_{2,t} + x_{1,t} (\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f)]}{deno^2} \right)$$

$$\left. \frac{[1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{\partial \varphi_{2,t}} \right);$$

$$\langle 10 \rangle = \frac{\partial \varphi_{2,t+1}}{\partial \varphi_{2,t}} = \frac{1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)}{deno} + \varphi_{2,t} \left(\frac{\langle 16 \rangle x_{2,t} deno - [\langle 16 \rangle \varphi_{1,t} x_{1,t} + \langle 16 \rangle x_{2,t} \varphi_{2,t} + x_{2,t}(k_{t+1} + \frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)} - r_f)]}{deno^2} \right);$$

$$\left. \frac{[1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{\partial k_t} \right);$$

$$\langle 11 \rangle = \frac{\partial \varphi_{2,t+1}}{\partial k_t} = \varphi_{2,t} \left(\frac{\langle 17 \rangle x_{2,t} - x_{2,t} \frac{y_t(1+g)x_{2,t}}{(1+k_t)^2} deno - [\langle 17 \rangle - \frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)^2} \langle x \rangle] [1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{deno^2} \right)$$

$$\langle 12 \rangle = \frac{\partial \varphi_{2,t+1}}{\partial k_{y_t}} = \varphi_{2,t} \left(\frac{\langle 18 \rangle + \frac{(1+g)}{(1+k_t)} x_{2,t} deno - [\langle 18 \rangle + \frac{(1+g)}{(1+k_t)} \langle x \rangle] [1+r_f+x_{2,t}(k_{t+1}+\frac{y_t(1+g)}{(1+k_t)}-r_f)]}{deno^2} \right);$$

Ed ecco completato lo Jacobiano.

Ora andremo a calcolare gli autovalori dello stesso nel punto di equilibrio dove il primo agente sopravvive ed il secondo agente muore; Questa infinità numerabile di punti è caratterizzata dal fatto che le coordinate del punto caratterizzate dalla coppia (x^*, y^*) appartengono alla curva di mercato, la cosiddetta *EMC*, mentre la quota investita dal secondo investitore apparterrà all'intervallo $(0, 1)$, dipendente dalla quota di partenza investita dallo stesso.

Per quanto riguarda il **price return** all'equilibrio, avendo assunto il dividend yield, la nostra y^* , all'equilibrio maggiore di zero, avrò che $k^* = g$, mentre ovviamente la ricchezza relativa dei due agenti sarà 1 per il primo agente e 0 per il secondo.

La totalità dei punti all'equilibrio con sopravvivenza del primo agente sarà così data dalla seguente *6 - upla*:

$$\chi(e) = \left(\sqrt{\frac{g-r_f}{\alpha}}, x_2^*, 1, 0, k^* = g, \sqrt{\alpha(g-r_f) - (g-r_f)} \right) \quad (7.0)$$

Dove indichiamo con $\chi(e)$, il punto all'equilibrio del sistema e con $x_2^* \in (0, 1)$.

Andiamo di seguito a scrivere il procedimento per individuare i valori della x_1^* e della y^* in funzione di *alpha*, cioè dell'avversione al rischio del cartista:

Innanzitutto notiamo che la prima e la quinta equazione del sistema ??, all'equilibrio sono:

$$x_1^* = \frac{y^* + g - r_f}{\alpha}; g - r_f = \frac{y^* x_1^{*2}}{x_1^*(1-x_1^*)}$$

Andando a sostituire la prima nella quinta avremo la seguente:

$$g - r_f = \frac{y^* \frac{y^* + g - r_f}{\alpha}}{\frac{y^* + g - r_f}{\alpha} \left(1 - \frac{y^* + g - r_f}{\alpha}\right)} \quad (7.0)$$

Sviluppando tale equazione avremo infine:

$$y^{*2} + y^*(2(g - r_f)) + [(g - r_f)^2 - \alpha(g - r_f)] = 0$$

Utilizzando la formula di risoluzione per le equazioni di secondo grado avremo i seguenti due risultati:

$$y_{+,-}^* = \frac{-2(g - r_f) \pm \sqrt{4(g - r_f)\alpha}}{2}$$

Per ottenere un risultato reale dovremo allora avere che $\alpha \geq 0$ ed otterremo:

$$y_{+,-}^* = (g - r_f) \pm \sqrt{(g - r_f)\alpha}$$

Di cui il valore negativo sarà da escludere, in quanto il dividend yield è definito per valori maggiori o uguali a zero; Andando a sostituire tale valore nella prima equazione del sistema avremo inoltre anche la quota investita del primo agente in relazione all'avversione al rischio.

Andiamo di seguito a riportare il risultato di stabilità variando l'avversione al rischio da valori piccoli a valori grandi e variando la quota d'investimento all'equilibrio per il secondo agente da 0.1 a 0.9 con l'aiuto di Matlab.

Assegnerò inoltre valore 1 se il punto considerato sarà stabile o semplicemente stabile, cioè ogni autovalore della matrice Jacobiana sarà ≤ 1 , e 0 viceversa, cioè esisterà almeno un autovalore tra i 6 sarà strettamente maggiore di 1: Ecco il risultato ottenuto

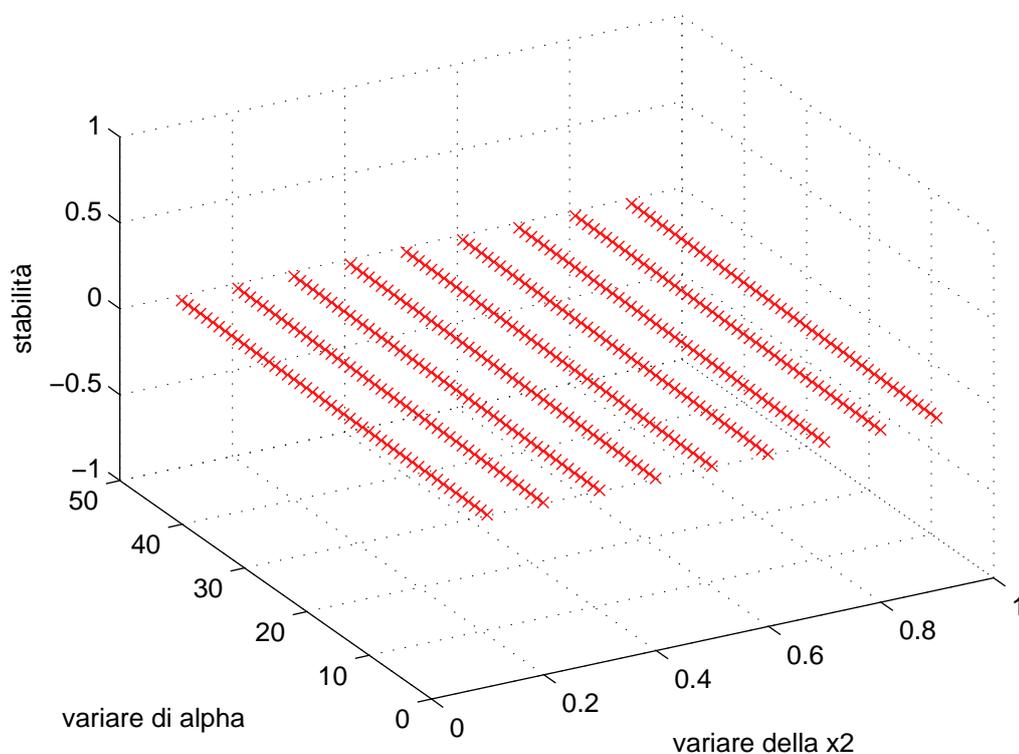


fig:7

La figura 7 rappresenta un insieme di valori in \mathbb{R}^3 le cui coordinate stanno a rappresentare rispettivamente l'avversione al rischio α , la quota d'investimento all'equilibrio del secondo agente x_2^* e la stabilità del rispettivo punto..1 se è stabile..0 viceversa.

Il risultato evidente che la indica la figura 7 è che qualsiasi punto di equilibrio in merito sarà instabile in quanto esisterà sempre almeno un autovalore più grande di 1.

7.2 Biforcazioni del sistema dinamico con due agenti a confronto

In questa sezione andremo a studiare le biforcazioni presenti nel sistema dinamico con i due agenti a confronto, cioè il cartista ed il fondamentalista; Daremo una definizione generale di biforcazione, e nello specifico per quelle riguardanti questo sistema dinamico. Con uno studio approfondito e dai dati costruiti numericamente troveremo che al variare

7.2 Biforcazioni del sistema dinamico con due agenti a confronto 57

dell'avversione al rischio del cartista, fissato il parametro beta per il fundamentalista, il punto all'equilibrio perde di stabilità, e si viene a creare una biforcazione denominata Biforcazione di *Neimark-Sacker*.

Per studiare tale biforcazione dovremo calcolare gli autovalori dello Jacobiano del sistema, calcolati nel punto in cui tutti e due gli agenti sopravvivono, cioè nel caso in cui la quota investita da ogni agente $x_1^* = x_2^* = \frac{\sqrt{g-r_f}}{\alpha}$, $y = \sqrt{\alpha(g-r_f)} - (g-r_f)$ e $k^* = g$; Per quanto riguarda la ricchezza relativa all'equilibrio del primo agente imponiamo la seguente $\varphi_1^* = 0.5$ e del secondo agente sarà la complementare $\varphi_2^* = 1 - \varphi_1^*$. Lo jacobiano calcolato nel suddetto vettore, sarà dunque il seguente, indicando con i numeri i termini più complicati, che andremo di seguito ad elencare:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 + \beta(g - k_t) & 0 & 0 & -\beta x_{1,t} & 0 \\ -\frac{\sqrt{(\alpha(g-r_f))\varphi_1^{*2}}}{(1+g)} & -\frac{\sqrt{(\alpha(g-r_f))\varphi_1^*\varphi_2^*}}{(1+g)} & 1 - \frac{\varphi_1^*(g-r_f)}{(1+g)} & -\frac{\varphi_1^*(g-r_f)}{(1+g)} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{(\alpha(g-r_f))\varphi_1^*\varphi_2^*}}{(1+g)} & -\frac{\sqrt{(\alpha(g-r_f))\varphi_2^{*2}}}{(1+g)} & -\frac{\varphi_2^*(g-r_f)}{(1+g)} & 1 - \frac{\varphi_2^*(g-r_f)}{(1+g)} & 0 & 0 \\ -\frac{\varphi_1^*(1+r_f)}{x_1^*(1-x_1^*)} & \frac{y^*\varphi_2^*}{(1-x_1^*)^2} & 0 & 0 & \langle 17 \rangle & \langle 18 \rangle \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{y^*}{(1+g)} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.0)$$

Di seguito elenco gli elementi contrassegnati dai numeri per semplicità:

$$\langle 17 \rangle = \frac{\varphi_1^*(1+r_f)}{y^*} + \frac{-\beta\varphi_2^*(1+g) - \frac{g-r_f}{(1+g)} + x_1^*\frac{g-r_f}{1+g} + x_1^*\varphi_1^*}{(1-x_1^*)};$$

$$\langle 18 \rangle = \frac{\varphi_1^*(1+r_f)}{y^*} + \frac{x_1^*(1+\varphi_1^*)}{(1-x_1^*)}.$$

Andando a studiare i sei autovalori di tale matrice avremo che due di essi saranno sempre uguali ad 1, mentre il terzo sarà sempre $\frac{(g-r_f)}{(1+g)}$, cioè questi tre autovalori saranno sempre più piccoli o uguali all'unità, imponendo che sia $g > r_f$.

Il calcolo della stabilità consiste dunque nello studiare i rimanente tre autovalori che saranno la risoluzione della seguente equazione di terzo grado, che andremo a risolvere con la formula di risoluzione delle equazioni di terzo grado:

$$\lambda^3 + (-\langle 17 \rangle - 1)\lambda^2 + \left(\frac{\langle 18 \rangle y^*}{(1+g)} + \langle 17 \rangle + \frac{y^* \varphi_2^*}{(1-x_1^*)^2} \beta x_1^* + \frac{\varphi_1^*(1+r_f)}{x_1^*(1-x_1^*)} \right) \lambda + \frac{-\varphi_1^*(1+r_f)}{x_1^*(1-x_1^*)} \left(\frac{y^*}{(1+g)} + 1 \right) = 0 \quad (7.0)$$

Chiamando a, b, c, d i coefficienti di tale equazione e imponendo la seguente trasformazione $y = \lambda + \frac{b}{3}$, ridurremo la stessa in:

$$y^3 + y\left(-\frac{b^2}{3} + c\right) + \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d = 0 \quad (7.0)$$

Chiamando rispettivamente $p = -\frac{b^2}{3} + c$, $q = -\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$, $u = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{1/3}$ e $v = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{1/3}$ avremo che le seguenti tre possibilità:

$$1. \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0:$$

$$y_1 = u + v;$$

$$y_2 = u\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y_3 = u\left(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v\left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$2. \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

trasformando il numero $q_{2+i\sqrt{-\Delta}}$ nella sua forma parametrica $(\cos \theta + i \sin \theta)$, avremo:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\cos \theta}{3} \quad y_2 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\cos \theta + 2\pi}{3} \quad y_3 = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \frac{\cos \theta + 4\pi}{3}$$

$$3. \Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

$$y_1 = -2\sqrt[3]{\frac{q}{2}} \quad y_2 = y_3 = \sqrt[3]{\frac{q}{3}}$$

Ora notiamo che il caso che ci interessa maggiormente per lo studio della biforcazione di Neimark-Sacker è il primo caso in cui $\Delta > 0$, in quanto notiamo che proprio in questo caso abbiamo due autovalori complessi coniugati.

Andando, con l'aiuto di Matlab a disegnare graficamente gli autovalori della matrice al variare del parametro α , vediamo che per quasi tutti i valori possibili per α , cioè per quelli che mi mantengono la scelta dei due investitori nell'intervallo $(0, 1)$, avremo due autovalori complessi coniugati, quindi il nostro delta sarà proprio maggiore di zero.

Per valori piccoli di α avremo che gli autovalori che prima erano complessi coniugati

diventeranno reali, riducendo un Δ minore di 0.

Il fatto interessante sarà per noi solo il caso in cui due autovalori complessi coniugati attraversano il cerchio unitario.

7.3 La teoria delle biforcazioni: Biforcazione di Neimark-Sacker

La teoria delle biforcazioni si occupa dello studio matematico dei cambiamenti qualitativi o della struttura topologica di integrali di un campo vettoriale o, equivalentemente, dalla soluzione di un'equazione differenziale.

Usate soprattutto nello studio dei sistemi dinamici, nonché nei sistemi complessi, si dice che si ha una biforcazione quando una piccola variazione dei valori dei parametri (i parametri di biforcazione) causa un cambiamento qualitativo o topologico del sistema, ovvero un cambiamento del numero di punti di equilibrio o della loro stabilità. Tali cambiamenti possono anche portare ad una catastrofe. I valori per cui si hanno modifiche qualitative al sistema sono detti 'valori critici'.

Le biforcazioni si hanno sia nei sistemi continui, sia in sistemi discreti e l'obiettivo è quello di capire come al variare di un parametro si modifichino i punti di equilibrio e la loro stabilità. Tipicamente si procede linearizzando il sistema e studiando come si modificano gli autovalori della matrice Jacobiana al variare del parametro suddetto, di particolare interesse è il cambio del segno della parte reale degli autovalori stessi.

La biforcazione di Neimark-Sacker consiste nella nascita di una curva chiusa invariante da un punto fisso, quando il punto fisso cambia di stabilità a causa di un paio di autovalori complessi coniugati che passano il cerchio unitario; La biforcazione può essere supercritica o subcritica, risultante in una curva chiusa invariante stabile od instabile rispettivamente.

Definizione 7.1. *Consideriamo una mappa:*

$$x \rightarrow f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Dipendente da un parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, dove f è una funzione regolare, C^∞ .

Supponiamo che per valori di $|\alpha|$ sufficientemente piccoli il sistema abbia una famiglia di

punti fissi $x_0(\alpha)$, dove quindi $f(x) = x$, inoltre assumiamo che lo jacobiano della matrice $A(\alpha) = f_x(x_0(\alpha), \alpha)$ abbia un paio di autovalori complessi coniugati:

$$\lambda_{1,2} = r(\alpha) \exp^{\pm i\theta}$$

Dove $r(0) = 1$ e $0 < \theta(0) < \pi$; Allora genericamente come passa per il punto $\alpha = 0$, il punto fisso cambia di stabilità e si biforca da esso un'unica curva invariante, caratterizzata da un'unica condizione che sarà $|\lambda_{1,2}| = 1$.

Vado ora ad enunciare il teorema classico di Neimark-Sacker, per le funzioni $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

Teorema 7.2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, una famiglia uniparametrica di funzioni del piano reale, $f \in C^6$, che verifica le seguenti condizioni in un intorno di $\alpha = 0$:

1. $f(x_0(\alpha), \alpha) = x_0(\alpha)$, cioè $x_0(\alpha)$, è un punto fisso della famiglia in questo intorno.
2. $Jf_x(x_0(\alpha), \alpha)$ ha autovalori complessi coniugati $\lambda(\alpha)$, e $\overline{\lambda(\alpha)}$ tali che per $\alpha = 0$ il loro modulo è $|\lambda(\alpha)| = |\overline{\lambda(\alpha)}| = 1$
3. $\lambda = \lambda(0)$ non è radice dell'unità per $m = 1, 2, 3, 4$, (Condizione di non risonanza)
4. $\frac{\partial |\lambda(\alpha)|}{\partial \alpha}(0) > 0$, (Condizione di Hopf);

Allora esiste un cambio di coordinate, differenziabile rispetto a α , tale che:

$$f(x, \alpha) \approx g(z, \bar{z}, \alpha) = \lambda(\alpha)z + c(\alpha)z^2\bar{z} + o(|z^4|), \quad , z, \bar{z} \in C, \alpha \in \mathbb{R}$$

Inoltre esistono dei coefficienti e, f, Φ_0, Φ_1 , tali che in coordinate polari la immagine di (r, θ, α) per f viene data da:

- $f(r) = (1 + e)r - er^3 + o(er^3, e^2r, r^5)$
- $f(\theta) = \theta + \Phi_0 + \Phi_1 e + fr^2 + o(e^2, er^2, r^3)$

Se $e > 0$, la famiglia presenta una curva invariante e attrattiva per tutti i valori e positivi sufficientemente piccoli, mentre se $e < 0$, la famiglia presenta una curva invariante e repulsiva per tutti i valori e negativi sufficientemente piccoli.

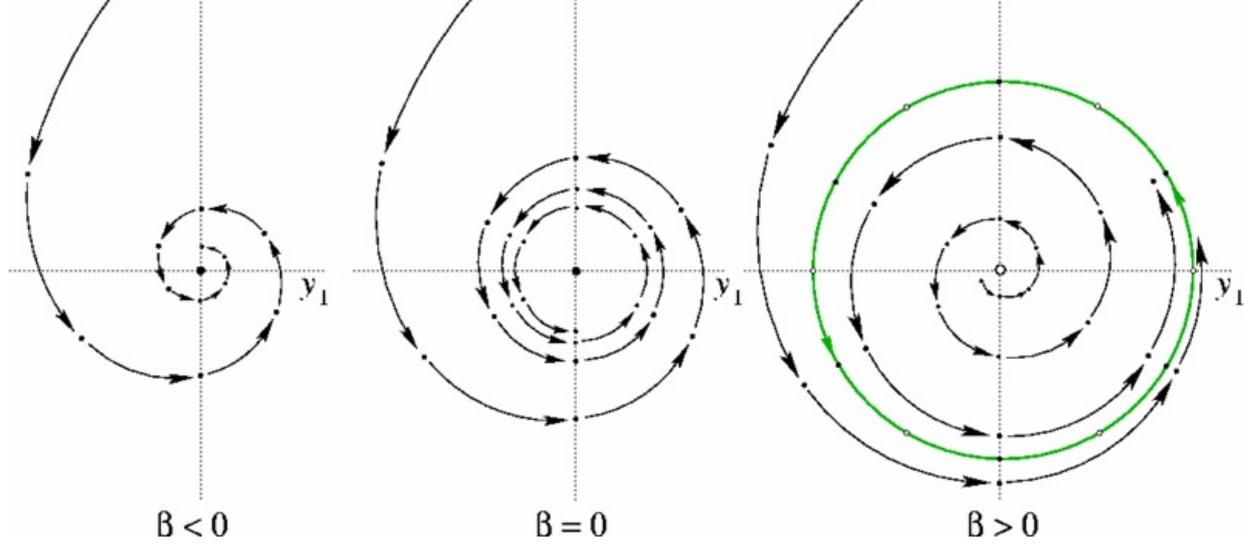


Figura 7.1: fig:8

La figura 8 rappresenta la curva invariante attrattiva, quando il punto all'equilibrio cambia di stabilità e diventa instabile; Ogni punto nelle vicinanze del punto fisso verrà attratto da tale curva

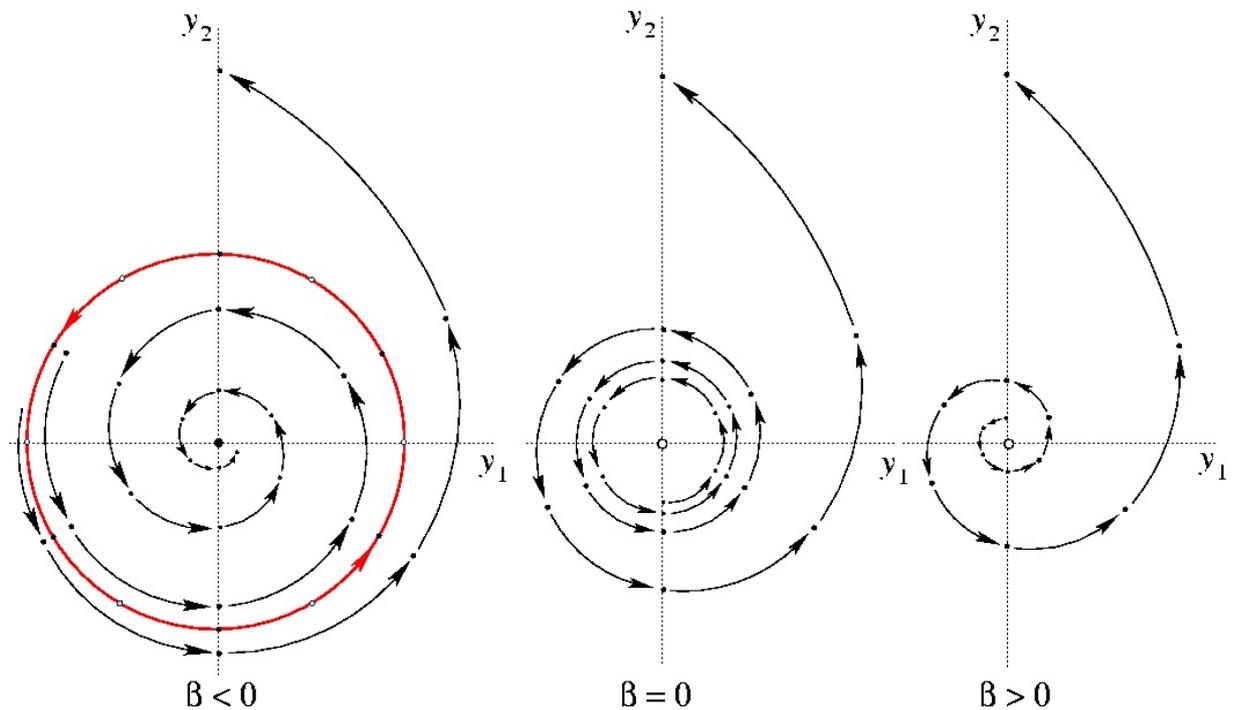


Figura 7.2: fig:9

La figura 9 rappresenta la curva invariante repulsiva, quando il punto all'equilibrio cambia di stabilità e diventa stabile; Qualora il bacino di attrazione collapsi sul punto fisso ogni punto nelle vicinanze del punto fisso verrà respinto da tale curva

7.4 Il nostro caso: Biforcazione di Neimark-Sacker per la mappa a due agenti a confronto

Prendendo in considerazione il nostro caso, abbiamo una mappa a sei equazioni in sei variabili, ed un parametro α , l'avversione al rischio del primo investitore, cioè il cartista; Per andare a vedere gli autovalori al variare di α dovremo utilizzare il metodo descritto all'inizio del capitolo, ed avremo che tali autovalori, che sono sei, saranno dipendenti dal parametro α .

Notiamo che per le convenzioni adottate in precedenza, e per il tetto massimo della quota da investire, nel nostro caso avremo che l'avversione al rischio potrà variare da un massimo di $\frac{(g-r_f)^2}{\underline{b}}$, ad un minimo di $\frac{(g-r_f)}{\bar{b}^2}$, che per le nostre ipotesi, ($\underline{b} = 0.01$ e $\bar{b} = 0.09$) avranno valori pari a 300, e 0.306, rispettivamente.

Consideriamo il caso in cui tutti e due gli agenti sopravvivono nell'equilibrio, quindi $x_1^* = x_2^* = \frac{\sqrt{g-r_f}}{\alpha}$, $y = \sqrt{\alpha(g-r_f)} - (g-r_f)$ e $k^* = g$; Per quanto riguarda la ricchezza relativa all'equilibrio del primo agente imponiamo la seguente $\varphi_1^* = 0.5$ e del secondo agente sarà la complementare $\varphi_2^* = 1 - \varphi_1^*$.

Tale ricchezza resterà la stessa se parto in equilibrio, quindi tutti e due gli agenti guadagneranno la stessa ricchezza;

Al variare dell'avversione al rischio α , e nello specifico al decrescere di questo parametro gli autovalori complessi coniugati, soluzione dell'equazione 7.2, usciranno dal cerchio unitario, come posso vedere in figura:

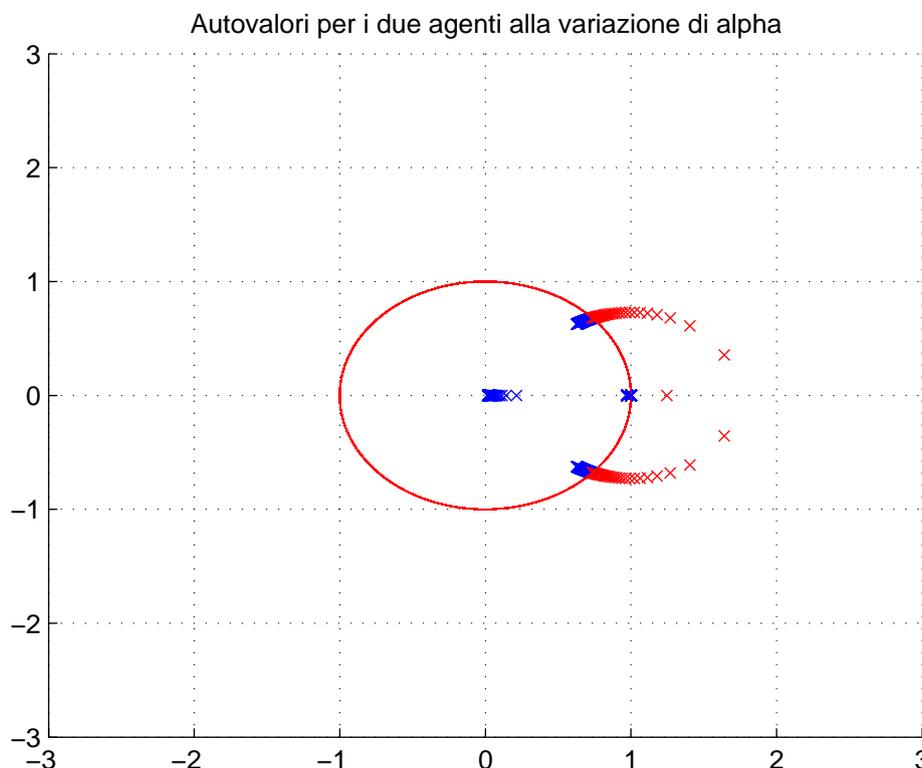


fig:10

La figura 10 rappresenta gli autovalori dello jacobiano del sistema al variare del parametro α ; Vediamo segnati in rosso gli autovalori che escono al decrescere del parametro; In blu quelli dentro al cerchio unitario.

Valore critico: $\alpha \cong 39.6016$

Per valori di α vicini al valore 300 essi si troveranno all'interno di esso, mentre per valori sempre più piccoli si troveranno sempre più vicini al bordo.

Numericamente ponendo $g = 0.06$, e $r_f = 0.03$, e $\beta = 0.02$, (parametro di influenza del fondamentalista), ottengo che per $\alpha = 39.6094$, i due autovalori complessi coniugati si troveranno dentro al cerchio unitario, mentre per il valore di $\alpha = 39.6016$, l'autovalore è fuori dal cerchio unitario;

Saranno allora verificate le ipotesi del teorema di Neimark-Sacker per un valore compreso tra questi due valori, $\alpha \in [39.6016; 39.6094]$.

Il problema allora sarà quello di verificare numericamente e graficamente se la biforcazione in oggetto sarà di tipo supercritico o subcritico; Simulando il comportamento della

trasformazione linearizzata, avrò che, ipotizzando $\alpha = 39.6016$, variando il punto critico di un tasso pari a 0.99, quindi partendo molto vicino al punto critico, essendo i due autovalori complessi coniugati esterni al cerchio unitario, il punto iterato si allontanerà dal punto di equilibrio, e si stabilizzerà dopo circa 10.000 passaggi in una curva invariante, a forma di cerchio nella proiezione del piano $(y - y^*; --)$. dove $--$ indicano rispettivamente le cinque incognite rimanenti rispetto alle variabili all'equilibrio

Per studiare il comportamento del punto dobbiamo proiettare le coordinate del suo vettore nei piani o negli iperspazi dello spazio vettoriale; Solo così possiamo immaginare o intuire il comportamento di tale punto e la sua tendenza, dato che lo spazio in questione è 6-dimensionale.

Notiamo che al variare del tasso del punto di partenza si modifica anche la curva invariante per una data traiettoria; La nostra interpretazione a questo fatto è che il punto all'equilibrio non è unico, ma è un continuo di equilibri, per questo una piccola variazione del punto di partenza fa cadere il punto in un'altra curva invariante, simile a quella precedente, ma con un diverso punto di equilibrio. Il caso non lineare, quindi della nostra

mappa a sei dimensioni, si comporta come il caso appena descritto per valori molto vicini al punto critico, tasso circa pari a $9 \cdot 10^{-6}$, quindi formando le cosiddette curve invarianti. Per tassi più piccoli la parte non lineare prende il sopravvento ed allontana il punto dallo stato all'equilibrio portando la traiettoria a sbattere con la frontiera, (il limite per le funzioni d'investimento); Si crea così un'orbita periodica. Per valori di α che portano gli

autovalori complessi coniugati all'interno del cerchio unitario, il comportamento sarà lo stesso sia per il lineare che per il non lineare; La traiettoria per un punto che parte vicino al punto d'equilibrio finisce proprio nel punto d'equilibrio, quindi rimanendoci; Questo significa che il punto per questi valori di α , (maggiori dell' α critico), è un punto di equilibrio stabile. Concludiamo dicendo che abbiamo trovato una biforcazione **supercritica**,

che sembra cambiare la curva invariante, in quanto sono presenti una varietà continua di punti d'equilibrio; Mostriamo in figura 11, la traiettoria del punto vicino al punto di equilibrio, o meglio la sua proiezione sul piano $(y - y^*, --)$ per un certo $\alpha = 39.6016$ esterno, e per $\alpha = 39.6094$ interno.

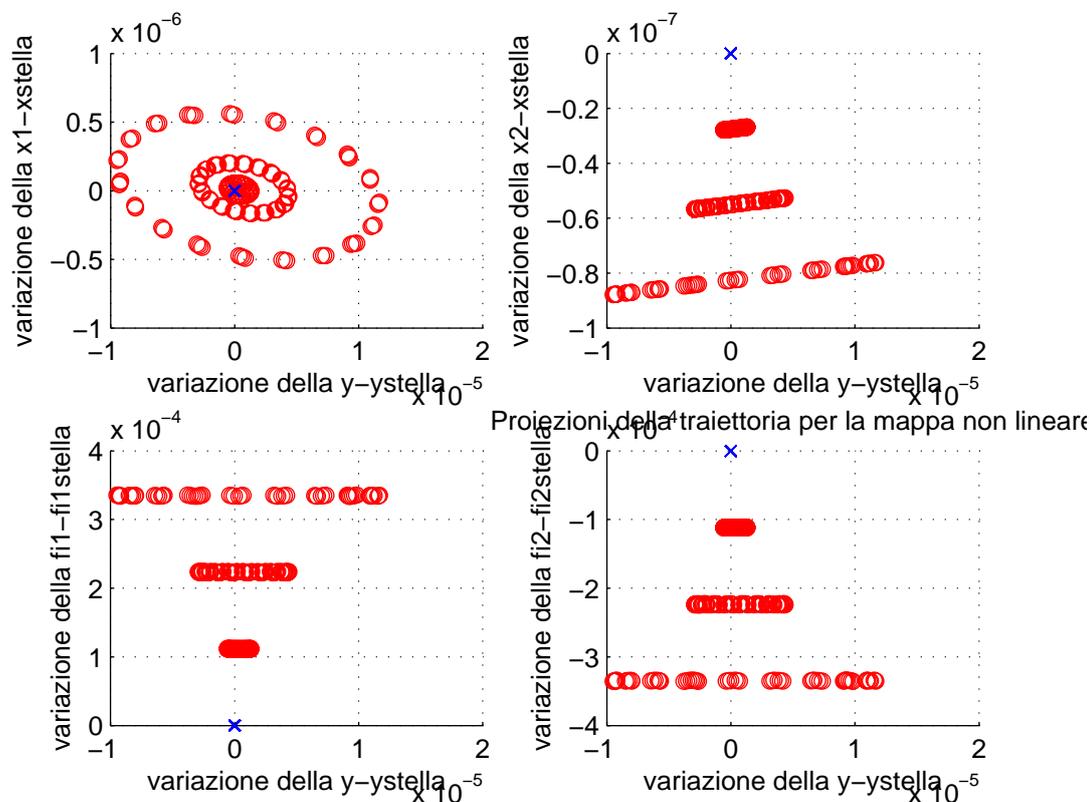


fig:11 La figura 11 rappresenta la proiezione del punto nei piani sopraindicati, e vediamo le curve invarianti alla modifica dei tassi; Per tassi grandi il comportamento è lo stesso nel lineare e non; Per tassi più piccoli il non lineare prende il sopravvento e farà sbattere la traiettoria sulla frontiera.

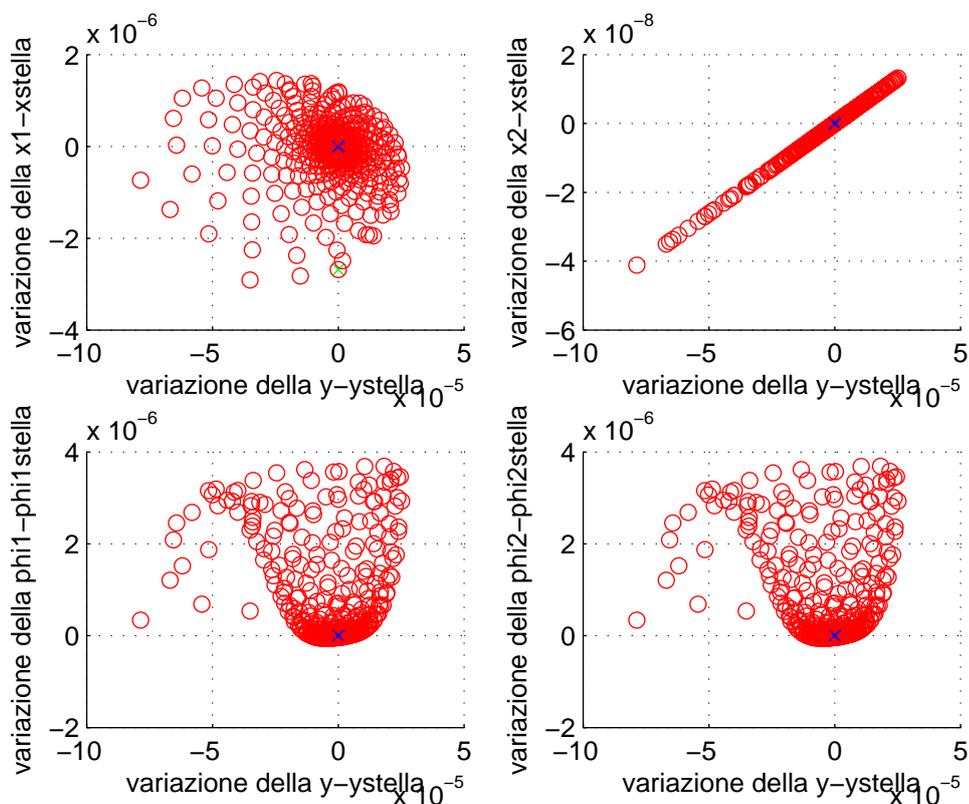


fig:11 La figura 12 rappresenta la proiezione del punto nei piani sopraindicati, e vediamo che la traiettoria si avvicina sempre di più al punto all'equilibrio.

Sarà interessante studiare il comportamento e le biforcazioni per il sistema al variare del parametro β , cioè il fattore di influenza per il fondamentalista e di questo ce ne occuperemo di seguito.

7.5 La teoria delle biforcazioni: Biforcazione Flip: Raddoppio del periodo

Un'altra biforcazione, caratteristica della mappa logistica, è la biforcazione Flip, o di raddoppio del periodo; Essa avviene quando un autovalore, con parte immaginaria nulla attraversa il punto -1 del cerchio unitario. Questo porta ad un cambio di stabilità per

il punto, e per mappe non lineari, come nel caso della mappa logistica, crea lo strano fenomeno di raddoppio del periodo, arrivando al caos più completo.

Nel nostro caso, il parametro che consideriamo è il parametro β , caratteristico del nostro fondamentalista, e lasciamo invariato il parametro di avversione al rischio del cartista, cioè $\alpha =$ fissato a 50.

Vedremo che al calare di β , un autovalore attraverserà il cerchio unitario, entrandoci dentro; questo deve creare una biforcazione flip con conseguente raddoppio del periodo.

In figura 12 mostriamo l'entrata dell'autovalore all'interno del cerchio unitario, e noterò che per $\beta = 4.3331$, l'autovalore sarà all'esterno del cerchio, mentre già per $\beta = 4.3328$, esso sarà all'interno del cerchio; Il valore critico per cui avviene la prima biforcazione sarà quindi per un valore compreso tra questi due valori.

Disegno in rosso gli autovalori esterni al cerchio, ed in blu quelli interni.

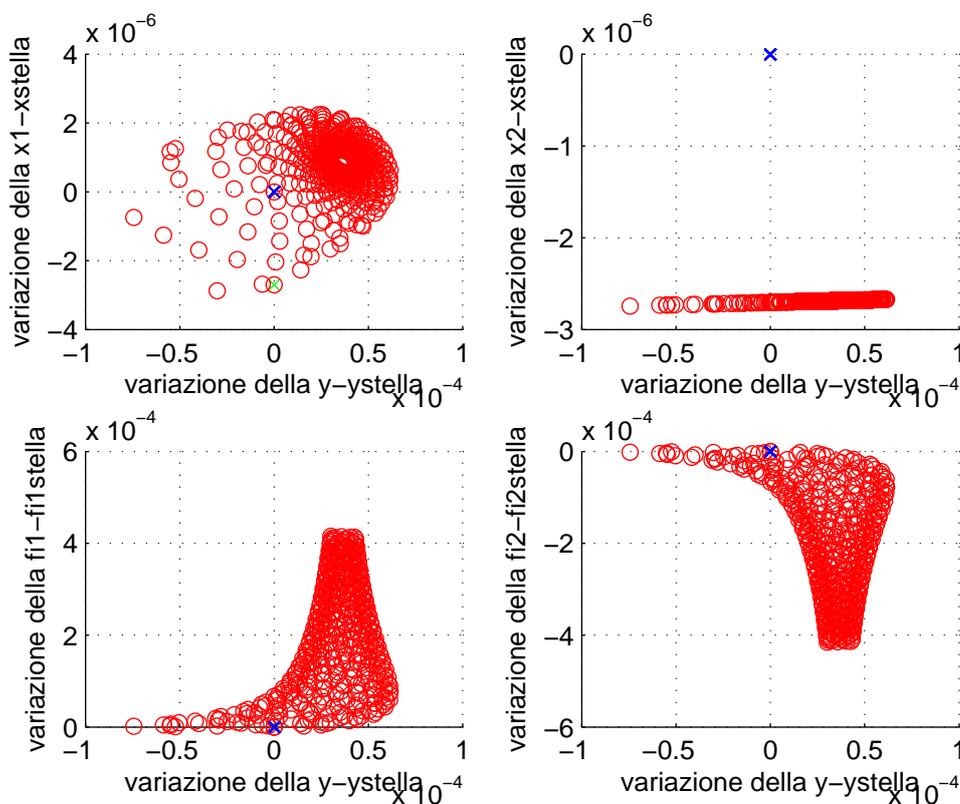


fig:13 La figura 13 rappresenta gli autovalori dello jacobiano del sistema al variare del

parametro β ; Vediamo segnati in rosso gli autovalori che escono al crescere del parametro; In blu quelli dentro al cerchio unitario.

Valore critico: $\beta \cong 4.3331$

Per $\beta = 4.3331$, quindi esterno la mappa lineare si comporta facendo 'saltare' gli iterati del punto da una parte all'altra del punto all'equilibrio, ed allontanando sempre di più il punto da quello di partenza; Il punto all'equilibrio infatti è instabile e seppur per valori piccoli di differenza tra il punto all'equilibrio ed il punto di partenza, vedremo l'allontanarsi dello stesso.

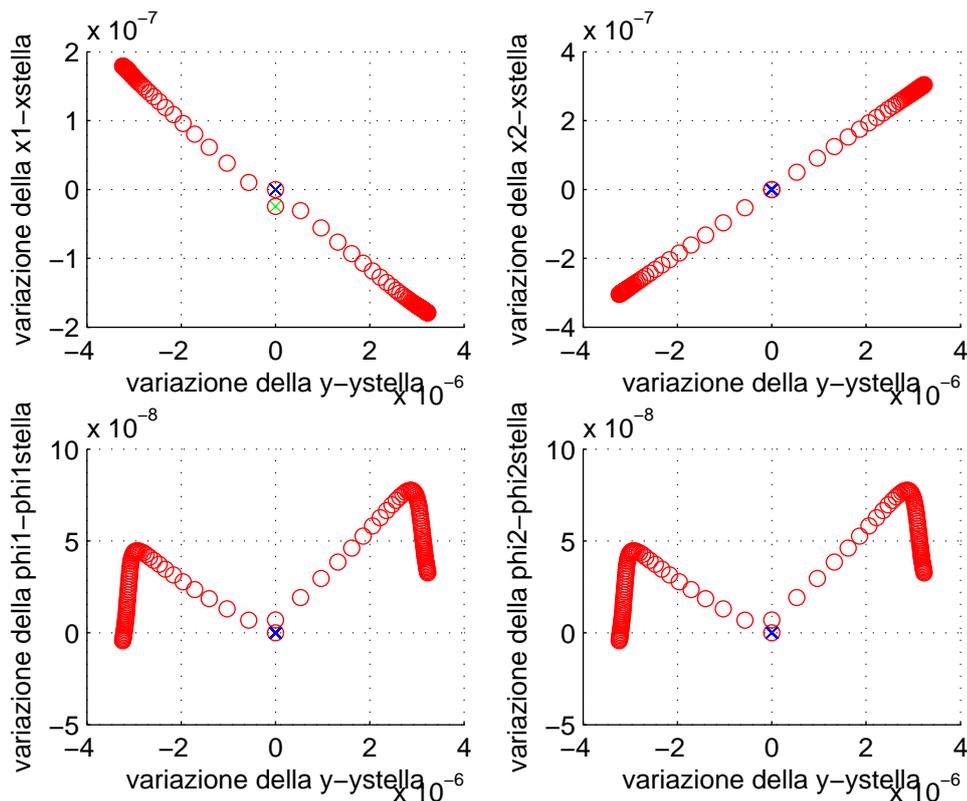


fig:14 La figura 14 rappresenta il comportamento del sistema lineare con autovalore esterno al cerchio; La traiettoria si allontana 'saltando'.

Per la mappa non lineare succede lo stesso e la traiettoria finirà quindi sulla nostra frontiera, creando ovviamente un'orbita periodica come in figura:

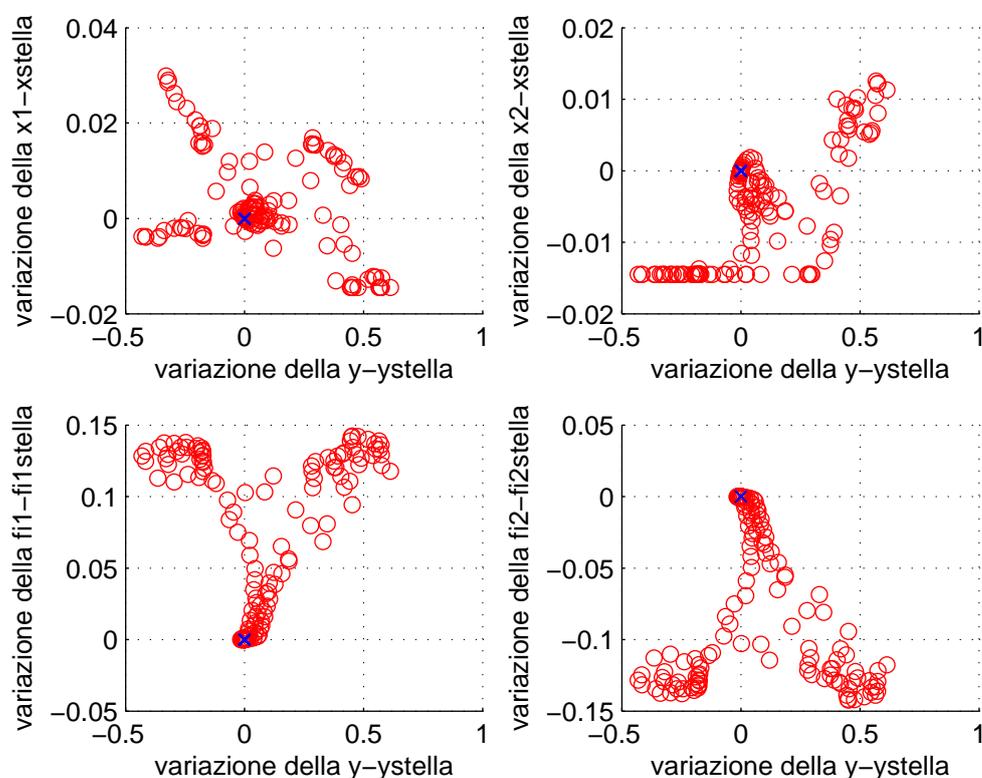


fig:15 La figura 15 rappresenta il comportamento del sistema non lineare con autovalore esterno al cerchio; All'inizio si comporta come il lineare 'saltando' nella traiettoria; Successivamente si allontana troppo e sbatte sulla frontiera.

Ci aspetteremo che variando di poco β , in modo da allontanare sempre di più l'autovalore dal cerchio unitario, si debba creare una biforcazione con raddoppio del periodo; Tutto questo non avviene però perchè la mappa non è C^1 , quindi non possiede derivata continua in tutto il suo dominio, e la divergenza porta comunque alla frontiera, invece di stabilizzarsi in orbite con periodo sempre maggiore.

Per valori di β che fanno risultare l'autovalore dentro al cerchio unitario

Capitolo 8

Appendice

Diamo la dimostrazione della , andando così ad esplicitare lo Jacobiano del sistema di $2N + 2L$ variabili.

Dimostrazione 1. Prima di tutto introduciamo qualche annotazione. Definiamo la decisione d'investimento pesata rispetto alle ricchezze relative come:

$$\langle x_t \rangle_s = \sum_{n=1}^N x_{n,t} \varphi_{n,s},$$

dove il tempo di decisione t , ed il tempo della distribuzione di ricchezza per cui si 'pesa' la quota investita s , possono essere differenti.

Usiamo la seguente notazione per le variabili al tempo t :

$$x_{n,t}, \varphi_{n,t} \quad \forall n \in 1, \dots, N \quad e \quad k_{t,l}, y_{t,l} \quad \forall l \in 0, \dots, L - 1$$

Dove $k_{t,l}$ e $y_{t,l}$ denotano il tasso di crescita del prezzo ed il dividend yield al tempo $t - l$ rispettivamente. Ordiniamo per semplicità le equazioni in quattro blocchi separati: XX, WW, KK, YY .

$$\begin{aligned}
& \text{XX:} \left[\begin{array}{l} x_{1,t+1} = f_1(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}) \\ \vdots \\ x_{N,t+1} = f_N(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}) \end{array} \right. \\
& \text{WW:} \left[\begin{array}{l} \varphi_{1,t+1} = \Phi_1(x_{1,t}, \dots, x_{N,t}; \varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{N,t}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}); K[f_1(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; \\ Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}), \dots, f_N(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}); \\ x_{1,t}, \dots, x_{N,t}; \varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{N,t}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}))]) \\ \vdots \\ \varphi_{N,t+1} = \Phi_N(x_{1,t}, \dots, x_{N,t}; \varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{N,t}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}); K[f_1(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; \\ Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}), \dots, f_N(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}); \\ x_{1,t}, \dots, x_{N,t}; \varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{N,t}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}))]) \end{array} \right. \\
& \text{KK:} \left[\begin{array}{l} k_{t+1,0} = K[f_1(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}), \dots, \\ f_N(k_{t,0}, \dots, k_{t,L-1}; Y(y_{t,0}, k_{t,0}), y_{t,0}, \dots, y_{t,L-1}); x_{1,t}, \dots, x_{N,t}; \varphi_{1,t}, \dots, \varphi_{N,t}; Y(y_{t,0}, k_{t,0})] \\ k_{t+1,1} = k_{t,0} \\ \vdots \\ k_{t+1,L-1} = k_{t,L-2} \end{array} \right. \\
& \text{YY:} \left[\begin{array}{l} y_{t+1,0} = Y(y_{t,0}, k_{t,0}) \\ y_{t+1,1} = y_{t,0} \\ \vdots \\ y_{t+1,L-1} = y_{t,L-2} \end{array} \right.
\end{aligned}
\tag{8.0}$$

Dove la funzione:

$$Y(y, k) = y \frac{1+g}{1+k}$$

restituisce il dividend yield rispetto ai dividend yield ed ai tassi di crescita del prezzo passati. La funzione:

$$K[z_1, \dots, z_N; x_1, \dots, x_N; \varphi_1, \dots, \varphi_N; y] = r_f + \frac{1 + r_f \sum_{m=1}^N (z_m - x_m) \varphi_m + y \sum_{m=1}^N x_m z_m \varphi_m}{\sum_{m=1}^N x_m (1 - z_m) \varphi_m}$$

Restituisce il tasso di profitto in conto capitale in funzione delle scelte d'investimento, delle ricchezze relative e del dividend yield. In fine:

$$\Phi_n(x_1, \dots, x_N; \varphi_1, \dots, \varphi_N; y; k) = \varphi_n \frac{1 + r_f + (k + y - r_f)x_n}{1 + r_f + (k + y - r_f) \sum_{m=1}^N x_m \varphi_m}$$

Restituisce le ricchezze relative degli n agenti in funzione delle scelte d'investimento, delle ricchezze relative stesse, del dividend yield e del tasso di crescita del prezzo.

Denotiamo lo stato del sistema con:

$$\chi^* = (x_1^*, \dots, x_N^*; \varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*; \underbrace{k^*, \dots, k^*}_L; \underbrace{y^*, \dots, y^*}_L)$$

Per derivare le condizioni di stabilità per i differenti equilibri, dobbiamo costruire la matrice Jacobiana del sistema, la quale dipende dalle derivate delle funzioni Y , K e Φ_n , e mostriamo successivamente le derivate di queste funzioni rispetto ai differenti argomenti calcolate nel punto di equilibrio χ^* . Per iniziare introduciamo le derivate della funzione Y :

$$Y^y = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{1 + g}{1 + k^*}, \quad Y^k = \frac{\partial Y}{\partial k} = -y^* \frac{1 + g}{(1 + k^*)^2}$$

Per $1 \leq m \leq N$ abbiamo che la funzione K sarà:

$$\begin{aligned} K^{z_m} &= \frac{\partial K}{\partial z_m} = \varphi_m^* \frac{1 + r_f + (k^* + y^* - r_f)x_m^*}{\langle x^*(1-x^*) \rangle} \\ K^{x_m} &= \frac{\partial K}{\partial x_m} = \varphi_m^* \frac{-1 - k^* + (k^* + y^* - r_f)x_m^*}{\langle x^*(1-x^*) \rangle} \\ K^{\varphi_m} &= \frac{\partial K}{\partial \varphi_m} = x_m^* \frac{r_f - k^* + (k^* + y^* - r_f)x_m^*}{\langle x^*(1-x^*) \rangle} \\ K^y &= \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\langle x^{*2} \rangle}{\langle x^*(1-x^*) \rangle} \end{aligned}$$

In fine abbiamo le derivate parziali di Φ_n , per $1 \leq m \leq N$:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{x_m} &= \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_m} = (k^* + y^* - r_f) \frac{(\delta_n^m - \varphi_m^*) \varphi_n^*}{1 + r_f + (k^* + y^* - r_f) \langle x^* \rangle} \\ \Phi_n^{\varphi_m} &= \frac{\partial \Phi_n}{\partial \varphi_m} = \frac{(\delta_n^m (1 + r_f) + (k^* + y^* - r_f) (\delta_n^m x_n^* - \varphi_n^* x_m^*))}{1 + r_f + (k^* + y^* - r_f) \langle x^* \rangle} \\ \Phi_n^y &= \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} = \varphi_n^* \frac{x_n^* - \langle x^* \rangle}{1 + r_f + (k^* + y^* - r_f) \langle x^* \rangle} \end{aligned}$$

Dove δ_n^m è la cosiddetta Delta di Kronecker, la qual è 1, se $n = m$, e 0 altrimenti, ed usando le annotazioni per i blocchi all'inizio della dimostrazione abbiamo che lo Jacobiano può essere scritto in questo modo:

$$(8.0) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial XX}{\partial XX} & \frac{\partial XX}{\partial WW} & \frac{\partial XX}{\partial KK} & \frac{\partial XX}{\partial YY} \\ \frac{\partial WW}{\partial XX} & \frac{\partial WW}{\partial WW} & \frac{\partial WW}{\partial KK} & \frac{\partial WW}{\partial YY} \\ \frac{\partial KK}{\partial XX} & \frac{\partial KK}{\partial WW} & \frac{\partial KK}{\partial KK} & \frac{\partial KK}{\partial YY} \\ \frac{\partial YY}{\partial XX} & \frac{\partial YY}{\partial WW} & \frac{\partial YY}{\partial KK} & \frac{\partial YY}{\partial YY} \end{bmatrix}$$

Il blocco $\frac{\partial XX}{\partial XX}$ è una matrice $N \times N$ contenenti le derivate parziali delle quote d'investimento presenti degli N agenti, rispetto alle stesse quote al tempo precedente; Dal momento che le quote d'investimento di ogni agente non dipendono esplicitamente dalle scelte d'investimento passate nel periodo precedente abbiamo che: $\left[\frac{\partial XX}{\partial XX} \right]_{n,m} = 0, \quad 1 \leq$

$n, m \leq N$

e questo blocco è una matrice nulla. Il blocco $\frac{\partial XX}{\partial WW}$ è una matrice $N \times N$ contenente le derivate parziali delle scelte d'investimento degli N agenti rispetto alle ricchezze relative di tali agenti al tempo precedente, ed anche questo blocco è un blocco di zeri perchè le scelte d'investimento non dipendono per nostra scelta del modello dalle ricchezze relative di ciascun agente: $\left[\frac{\partial XX}{\partial WW} \right]_{n,m} = 0, \quad 1 \leq n, m \leq N$

Il blocco $\frac{\partial XX}{\partial KK}$ è una matrice $N \times L$ contenente le derivate parziali delle funzioni d'investimento rispetto al tasso di crescita passato del prezzo. Introduciamo una notazione speciale per le derivate parziali delle funzioni d'investimento:

$$\frac{\partial f_n}{\partial k_{t-l}} = f_n^{kl}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y_{t+1}} = f_n^Y, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y_{t-l}} = f_n^y, \quad 1 \leq n \leq N, 0 \leq l \leq L-1$$

Allora avremo:

$$\left[\frac{\partial XX}{\partial KK} \right]_{n,l} = \begin{cases} f_n^{k_0} + f_n^{Y^k} & \text{per } l = 0 \quad (\text{la prima colonna}) \\ f_n^{k_l} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il blocco $\frac{\partial XX}{\partial YY}$, è una matrice $N \times L$, contenente le derivate parziali delle scelte d'investimento per gli agenti rispetto al dividend yield passato ed il blocco è dato da:

$$\left[\frac{\partial XX}{\partial YY} \right]_{n,l} = \begin{cases} f_n^{y_0} + f_n^{Y^y} & \text{per } l = 0 \quad (\text{la prima colonna}) \\ f_n^{y_l} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il blocco $\frac{\partial WW}{\partial XX}$, è una matrice $N \times N$, contenente le derivate parziali delle ricchezze relative degli agenti rispetto alle quote d'investimento degli agenti, ed avremo:

$$\left[\frac{\partial WW}{\partial XX} \right]_{n,m} = \Phi_n^{x_m} + \Phi_n^k \cdot K^{x_m}, \quad 1 \leq n, m \leq N$$

Il blocco $\frac{\partial WW}{\partial WW}$, è una matrice $N \times N$, contenente le derivate parziali delle ricchezze relative degli agenti rispetto alle ricchezze relative stesse, ed avremo:

$$\left[\frac{\partial WW}{\partial WW} \right]_{n,m} = \Phi_n^{\varphi_m} + \Phi_n^k \cdot K^{\varphi_m}, \quad 1 \leq n, m \leq N$$

Il blocco $\frac{\partial WW}{\partial KK}$, è una matrice $N \times L$, contenente le derivate parziali delle ricchezze relative degli agenti rispetto ai tassi di crescita del prezzo passati, e per $1 \leq n \leq N$ e $0 \leq l \leq L - 1$ avremo:

$$\left[\frac{\partial WW}{\partial KK} \right]_{n,l} = \begin{cases} \Phi_n^k \cdot (\sum_m K^{z_m} (f_m^{k_0} + f_m^{Y^k}) + K^y Y^k) + \Phi_n^y \cdot Y^k & \text{per } l = 0 \\ \Phi_n^k \cdot \sum_m K^{z_m} f_m^{k_l} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il blocco $\frac{\partial WW}{\partial YY}$ è un blocco $N \times L$ contenente le derivate parziali delle ricchezze relative degli N agenti rispetto ai dividend yield passati ed avremo per $1 \leq n \leq N$ e $0 \leq l \leq L - 1$:

$$\left[\frac{\partial WW}{\partial YY} \right]_{n,l} = \begin{cases} \Phi_n^k \cdot (\sum_m K^{z_m} (f_m^{y_0} + f_m^Y Y^y) + K^y Y^y) + \Phi_n^y \cdot Y^y & \text{per } l = 0 \\ \Phi_n^k \cdot \sum_m K^{z_m} f_m^{y_l} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il blocco $\frac{\partial KK}{\partial XX}$, è una matrice $L \times N$ contenenti la derivate parziali dei tassi di crescita del prezzo rispetto alle scelte d'investimento passate degli N agenti; La sua struttura è semplice perchè solo la prima riga contiene degli elementi diversi da zero, ed avremo:

$$\left[\frac{\partial KK}{\partial XX} \right]_{n,l} = \begin{cases} K^{x_n} \text{ per } l = 0, \text{ (la prima riga)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad 0 \leq l \leq L - 1, 1 \leq n \leq N$$

Il blocco $\frac{\partial KK}{\partial WW}$, è una matrice $L \times N$ contenenti la derivate parziali dei tassi di crescita del prezzo rispetto alle ricchezze relative passate degli N agenti; La sua struttura è semplice perchè possiede $L - 1$ righe nulle, ed avremo:

$$\left[\frac{\partial KK}{\partial WW} \right]_{n,l} = \begin{cases} K^{\varphi_n} \text{ per } l = 0, \text{ (la prima riga)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad 0 \leq l \leq L - 1, 1 \leq n \leq N$$

Il blocco $\frac{\partial KK}{\partial KK}$, è una matrice $L \times L$ contenenti la derivate parziali dei tassi di crescita del prezzo rispetto agli stessi nei tempi precedenti; Ha una tipica struttura con tutti 1 sulla diagonale principale, ed avremo:

$$\left[\frac{\partial KK}{\partial KK} \right]_{n,l} = \begin{pmatrix} \sum K^{z_m} (f_m^{k_0} + f_m^y Y^k) + K^y Y^k & \sum K^{z_m} f_m^{k_1} & \dots & \sum K^{z_m} (f_m^{k_{L-2}}) & \sum K^{z_m} (f_m^{k_{L-1}}) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il blocco $\frac{\partial KK}{\partial YY}$, è una matrice $L \times L$ contenenti la derivate parziali dei tassi di crescita del prezzo rispetto ai dividend yield nei tempi precedenti; E' data da:

$$\left[\frac{\partial KK}{\partial YY} \right]_{n,l} = \begin{vmatrix} \sum K^{z_m}(f_m^{y_0} + f_m^y Y^y) + K^y Y^y & \sum K^{z_m} f_m^{y_1} & \dots & \sum K^{z_m}(f_m^{y_{L-2}}) & \sum K^{z_m}(f_m^{y_{L-1}}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Il blocco $\frac{\partial YY}{\partial XX}$, è una matrice $L \times N$, contenente le derivate parziali del dividend yield rispetto alle scelte d'investimento degli N agenti, ed avremo una matrice di tutti 0:

$$\left[\frac{\partial YY}{\partial XX} \right]_{l,m} = 0 \quad 0 \leq n \leq L-1, 1 \leq m \leq N$$

Il blocco $\frac{\partial YY}{\partial WW}$, è una matrice $L \times N$, contenente le derivate parziali del dividend yield rispetto alle ricchezze relative degli N agenti, ed avremo una matrice di tutti 0:

$$\left[\frac{\partial YY}{\partial WW} \right]_{l,m} = 0 \quad 0 \leq n \leq L-1, 1 \leq m \leq N$$

Il blocco $\frac{\partial YY}{\partial KK}$, è una matrice $L \times L$ contenenti la derivate parziali dei dividend yield rispetto ai tassi di crescita passati del prezzo. Avremo:

$$\left[\frac{\partial YY}{\partial KK} \right]_{l,j} = \begin{cases} Y^k & \text{per } l = j = 0, \text{ (la prima riga e la prima colonna)} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infine il blocco $\frac{\partial YY}{\partial YY}$, è una matrice $L \times L$ contenenti la derivate parziali dei dividend yield rispetto a loro stessi ai tempi passati. Avremo:

$$\left[\frac{\partial YY}{\partial YY} \right]_{l,j} = \begin{vmatrix} Y^y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Con tutte queste definizioni, otteniamo il seguente lemma rispetto allo Jacobiano calcolato nel punto di equilibrio: Sia χ^* uno stato d'equilibrio del sistema descritto nella proposizione 8 e siano M gli agenti che sopravvivono a tale stato; La matrice Jacobiana $J(x^*)$, ha la seguente struttura dove gli elementi non zero sono indicati con *

Incominciamo con il primo blocco di N righe. I primi due blocchi di colonne $\frac{\partial XX}{\partial XX}$ e $\frac{\partial XX}{\partial WW}$, sono sempre 0; Gli altri due blocchi $\frac{\partial XX}{\partial KK}$ e $\frac{\partial XX}{\partial YY}$ in generale non contengono elementi zero perchè all'equilibrio $k^* = g$, in più $y^y = 1$. e $Y^k = \frac{-y^*}{(1+g)}$.

Per semplificare la seconda riga notiamo che $\Phi_n^k = \Phi_n^y = 0$ in questo equilibrio; allora il numeratore dei corrispondenti corrispondenti nella ?? sono 0, in quanto all'equilibrio avremo $x_n^* = \langle x^* \rangle = x_o^* \quad \forall n \leq M$, mentre per gli agenti che non sopravvivono $\varphi_n^* = 0$. Questo porta immediatamente che i due blocchi $\frac{\partial WW}{\partial KK}$ e $\frac{\partial WW}{\partial YY}$ contengono solo degli zero. Inoltre dalla curva di equilibrio del mercato, la cosiddetta *EMC*, otteniamo:

$$1 + r_f + (g + y^* - r_f)x_o^* = 1 + g \quad (8.0)$$

Allora in questo equilibrio avrò:

$$\left[\frac{\partial WW}{\partial XX} \right]_{n,m} = \Phi_n^{x_m} = \begin{cases} \varphi_n^*(\delta_n^m - \varphi_m^*)(y^* + g - r_f)/(1 + g) & \text{per } n \leq M \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e tutte le righe corrispondenti ai non sopravvissuti sono 0 in questo blocco. In più tutte le colonne corrispondenti ai 'non survivor', contengono tutti elementi 0 in quanto $\delta_n^m = \varphi_m^* = 0$; Abbiamo denotato con Φ^x gli elementi rimanenti non zero di tale blocco. La semplificazione nel blocco successivo porterà a tale risultato

$$\left[\frac{\partial WW}{\partial WW} \right]_{n,m} = \Phi_n^{\varphi_m} = \begin{cases} \delta_n^m - \varphi_m^* \frac{(g-r_f)}{(1+g)} & \text{per } n, m \leq M \\ \varphi_n^* x_m^* \frac{(y^*+g-r_f)}{(1+g)} & \text{per } n \leq M, m > M \\ \delta_n^m \frac{(1+r_f+x_n^*(y^*+g-r_f))}{(1+g)} & \text{per } n > M \end{cases}$$

Il blocco di elementi della prima riga è denotato con Φ_S^φ e della seconda riga con Φ_{NS}^φ , mentre il blocco della terza riga ($n > M$) ha elementi non nulli soltanto sulla diagonale. E' ovvio che il successivo blocco di L righe ha elementi nulli in tutte le linee tranne che nella prima. L'unica eccezione da questo stato sono gli elementi sotto la diagonale nel blocco $\frac{\partial KK}{\partial KK}$ che sono tutti uguali ad 1.

Per calcolare la prima riga consideriamo l'espressione data per le derivate parziali rispetto

alle quote d'investimento e notiamo che per gli agenti che non sopravvivono avremo $K^{x_m} = 0$, mentre per i sopravvissuti, ($n \leq M$) avremo:

$$k^{x_m} = -\varphi_m^* \frac{1 + r_f}{(1 - x_o^*)x_o^*}. \quad (8.0)$$

Analogamente, per il blocco $\frac{\partial KK}{\partial WW}$, mentre per i sopravvissuti $K_m^\varphi = 0$, per i restanti agenti $m > M$ gli elementi saranno dati da:

$$k^{\varphi_m} = x_{*m} \frac{r_f - g + x_m^*(y^* + g - r_f)}{(1 - x_o^*)x_o^*} = x_m^* \frac{(x_m^* - x_o^*)(y^* + g - r_f)}{(1 - x_o^*)x_o^*}. \quad (8.0)$$

. Le semplificazioni nel blocco $\frac{\partial KK}{\partial KK}$ e $\frac{\partial KK}{\partial YY}$ sono minori. Notiamo che tutte le derivate K^{z_m} per tutti i non sopravvissuti sono zero mentre per i sopravvissuti ($n \leq M$) sono date da:

$$k^{z_m} = \varphi_m^* \frac{1 + g}{(1 - x_o^*)x_o^*}. \quad (8.0)$$

. Il resto della dimostrazione è allora chiara. Consideriamo la matrice Jacobiana scritta precedentemente calcolata nel punto di equilibrio descritto in precedenza. Le ultime $N - M$ colonne del blocco di sinistra contengono solo degli zeri allora la matrice possiede autovalori nulli con molteplicità almeno $N - M$.

Questi autovalori non condizionano la stabilità; In più queste colonne e le corrispondenti righe possono essere eliminate dallo Jacobiano.

Analogamente gli elementi delle ultime $N - M$ righe del secondo blocco rispetto alle righe sono non zero solo sulla diagonale principale, allora conseguentemente a questo che $\Phi_n^{\varphi_n}$ per $n > M$ sono gli autovalori della matrice con molteplicità almeno 1, e le righe con le corrispondenti colonne possono essere eliminate dallo Jacobiano. Usando la terza riga delle espressioni per le derivate parziali delle ricchezze relative avremo:

$$\lambda_n = \frac{1 + r_f + x_n^*(y^* + g - r_f)}{1 + g} = \frac{1 + r_f + (g - r_f)(x_n^*/x_o^*)}{1 + g} \quad (8.0)$$

In fine con un pò di Algebra andremo a dimostrare proprio il 3.2, cioè che giacciono nell'intervallo $(-1, 1)$ proprio in base alla 8.

□

Dimostrazione 2. Per dimostrare la veridicità di tale polinomio caratteristico riporto il calcolo del determinante della matrice $J(e) - \lambda I$, posto uguale a 0:

$$J(e) - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{-(1+r_f)}{x^*(1-x^*)} & \frac{1+g}{\alpha x^*(1-x^*) - \tau - \lambda} & < 3e > \\ 0 & \frac{-\tau(1-x^*)}{x^*} & 1 - \lambda \end{bmatrix} \quad (8.0)$$

Dove $\tau = \frac{g-r_f}{1+g}$.

Avrò allora che il determinante di tale matrice sarà:

$$\det(J(e) - \lambda I) = -\lambda \det \begin{bmatrix} \frac{1+g}{\alpha x^*(1-x^*) - \tau - \lambda} & < 3e > \\ \frac{-\tau(1-x^*)}{x^*} & 1 - \lambda \end{bmatrix} + \frac{1+r_f}{x^*(1-x^*)} \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{-\tau(1-x^*)}{x^*} & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Continuando con i calcoli avrò:

$$-\lambda \left(\frac{1+g}{\alpha x^*(1-x^*) - \tau - \lambda} (1-\lambda) + < 3e > \frac{\tau(1-x^*)}{x^*} \right) + \frac{1+r_f}{x^*(1-x^*)} \left(\frac{1-\lambda}{\alpha} + \frac{\tau(1-x^*)}{\alpha x^*} \right) = 0$$

continuando con i calcoli proviamo proprio la nostra affermazione per il polinomio caratteristico per il cartista a memoria unitaria. \square

Dimostrazione 3. Andiamo ora a dimostrare che per valori di β piccoli, gli autovalori per il fondamentalista a memoria unitaria saranno sempre compresi nell'intervallo $(-1, 1)$: Possiamo riscrivere i due autovalori $\lambda_{+,-}$ in questo modo, raccogliendo il termine $h + \tau - 1$ dalla radice, ed avrò:

$$\lambda_{+,-} = \frac{-(h + \tau - 1) \left(1 \mp \sqrt{1 + \frac{4(h - \frac{\beta(g-r_f)}{1-x^*})}{(h+\tau-1)^2}} \right)}{2}$$

Andando ad esplicitare i termini h e τ , già indicati nel capitolo riguardante tale dimostrazione avremo:

$$\begin{aligned} \frac{4 \left(h - \frac{\beta(g-r_f)}{1-x^*} \right)}{(h + \tau - 1)^2} &= \frac{4 \left(\beta \frac{1+g}{1-x^*} - \frac{\beta(g-r_f)}{1-x^*} \right)}{\left(\beta \frac{1+g}{1-x^*} + \frac{g-r_f}{1+g} - 1 \right)^2} = \\ &= \frac{4\beta \frac{1+r_f}{1-x^*}}{\left(\beta \frac{1+g}{1-x^*} + \frac{g-r_f}{1+g} - 1 \right)^2} \end{aligned}$$

Utilizzando lo sviluppo in serie di Taylor, fermandoci al primo grado, della $\sqrt{1+x}$ avremo:

$$\lambda_{+,-} = \frac{1}{2}(1 - \tau - h)[1 \mp (1 + \frac{1}{2}4\beta\frac{1+r_f}{1-x^*}(\beta\frac{1+g}{1-x^*} + \frac{g-r_f}{1+g} - 1)^2 + O(\beta))] \quad (8.0)$$

allora avremo:

$$\lambda_{+,-} = \frac{1}{2}(1 - \tau - h)[1 \mp (1 + \frac{1}{2}4\beta\frac{1+r_f}{1-x^*}(\beta\frac{1+g}{1-x^*} + \frac{g-r_f}{1+g} - 1)^2 + O(\beta))] \quad (8.0)$$

$$\lambda_- = -\beta\frac{\frac{1+r_f}{1-x^*}}{(\beta\frac{1+g}{1-x^*} + \frac{g-r_f}{1+g} - 1)} + O(\beta) \quad (8.0)$$

$$\lambda_+ = (1 - \tau - h) + \beta\frac{\frac{1+r_f}{1-x^*}}{(\beta\frac{1+g}{1-x^*} + \frac{g-r_f}{1+g} - 1)} + O(\beta). \quad (8.0)$$

I quali per $\beta \rightarrow 0$ sono valori compresi nell'intervallo $(-1, 1)$.

□

Bibliografia

- [1] MIKHAIL ANUFRIEV, PIETRO DINDO (2010), *Wealth-driven selection in a financial market with heterogeneous agents*, Journal of Economic Behavior Organization 73 (2010) 327358;
- [2] CARS HOMES (2005), *Heterogeneous agent models in economics and finance*, Tinbergen Institute Discussion Paper;
- [3] <http://it.wikipedia.org/wiki/Sistemanonlineare>;
- [4] <http://www.dm.unito.it/personalpages/console/MatriciNat.pdf> ;
- [5] <http://home.dei.polimi.it/guariso/appunti/teoria/b11/b11.html>;
- [6] <http://it.wikipedia.org/wiki/Teoriadellebiforcazioni>;
- [7] <http://home.dei.polimi.it/rinaldi/tds/07biforcazioni.pdf>;