

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITA' DI BOLOGNA

SECONDA FACOLTA' DI INGEGNERIA
CON SEDE A CESENA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE
Classe 10

Sede di Forlì

ELABORATO FINALE DI LAUREA
IN CONROLLI AUTOMATICI

**SVILUPPO DI UN AUTOPILOTA “AUTO-THROTTLE” PER
VELIVOLI ULTRALEGGERI**

CANDIDATO

Giorgia Zafferani

RELATORE

Prof. Ing. Matteo Zanzi

CORRELATORE

Ing. Nicola Mimmo

Anno accademico 2011/2012
Sessione I

Indice

Introduzione	1
1. Modelli del sistema, scelta e applicazione delle tecniche di controllo	6
1.1. <i>Descrizione dei modelli matematici.....</i>	6
1.1.1. Loop interno: stepper motor	6
1.1.2. Loop esterno: engine	11
1.2. <i>Scelta delle tecniche di controllo</i>	14
1.2.1. Loop interno: stepper motor	14
1.2.1.1. Analisi del comportamento a regime	15
1.2.1.2. Analisi della stabilità	22
1.2.2. Loop esterno: engine	31
1.2.2.1. Progetto analitico dei regolatori.....	32
1.2.2.2. Analisi del comportamento a regime	36
1.2.2.3. Analisi della stabilità	39
1.3. <i>Applicazione delle tecniche di controllo</i>	43
1.3.1. Loop esterno: engine	44
1.3.2. Loop interno:stepper motor	54
1.3.2.1. Discretizzazione del segnale di controllo ωc	65
1.3.3. Loop complessivo.....	71
2. Sensibilità alla variazione dei parametri: analisi del comportamento a regime e della stabilità.....	79
2.1. <i>Analisi della stabilità</i>	80
2.2. <i>Analisi del comportamento a regime</i>	111
3. Risultati sperimentali	116
4. Conclusioni.....	134
5. Appendici.....	137
APPENDICE A	137
APPENDICE B	139
APPENDICE C	141
APPENDICE D	142
APPENDICE E.....	143

<i>APPENDICE F</i>	145
<i>APPENDICE G</i>	146
Riferimenti bibliografici	149

Indice delle figure

Figura 1: Loop interno di posizione.....	2
Figura 2: Loop esterno di velocità.....	3
Figura 3: Loop interno e loop esterno	4
Figura 4: Motore passo-passo.....	6
Figura 5: A riluttanza variabile	6
Figura 6: A magnete permanente	7
Figura 7: Modello stepper.....	10
Figura 8: Modello finale stepper.....	11
Figura 9: Modello engine	12
Figura 10: Modelli di stepper e engine	13
Figura 11: Regolatore loop interno.....	15
Figura 12: P.....	16
Figura 13: I.....	17
Figura 14: PI.....	18
Figura 15: PID	20
Figura 16: Luogo delle radici, $ \tau \ll T_i $	26
Figura 17: Luogo delle radici, $ \tau \gg T_i $	27
Figura 18: Bode, $ \tau \ll T_i $	28
Figura 19: Nyquist, $ \tau \ll T_i $	29
Figura 20: Particolare Nyquist, $ \tau \ll T_i $	29
Figura 21: Regolatore loop esterno	31
Figura 22: Schema di riferimento per la sintesi diretta	32
Figura 23: Schema di riferimento per la sintesi diretta con ritardo finito.....	33
Figura 24: Realizzazione del regolatore per un sistema con ritardo finito.....	34
Figura 25: Nyquist senza ritardo	40
Figura 26: Nyquist con ritardo	42
Figura 27: Particolare Nyquist con ritardo.....	42
Figura 28: Legame tra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione	47
Figura 29: Nyquist, Bode, Rlocus del loop esterno	50
Figura 30: Poli dell'approssimante di Padè, ordine 3	52
Figura 31: Risposta del sistema al gradino unitario	53
Figura 32: Sovraelongazione e tempo di assestamento	53
Figura 33: Legame tra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione	59
Figura 34: Nyquist, Bode, Rlocus del loop interno.....	61
Figura 35: Risposta del sistema al gradino unitario	65
Figura 36: Tick del clock del sistema computazionale	66
Figura 37: Schema a blocchi loop interno.....	67

Figura 38: Frequenze del segnale ω_c	68
Figura 39: Livelli di discretizzazione del segnale ω_c	70
Figura 40: Loop totale	71
Figura 41: Nyquist loop totale.....	72
Figura 42: Particolare Nyquist, loop totale	72
Figura 43: Rlocus, loop totale	74
Figura 44: Rlocus, loop engine	74
Figura 45: Rlocus, loop engine+stepper.....	75
Figura 46: Risposta del sistema al gradino, con e senza loop interno	75
Figura 47: Risposta del sistema al gradino, particolare	76
Figura 48: Risposta del sistema al gradino unitario con e senza loop interno	77
Figura 49: Particolare, risposta del sistema al gradino unitario con e senza loop interno	77
Figura 50: Funzione di sensibilità del guadagno d'anello	86
Figura 51: Diagrammi di Bode di G_a e $1+G_a$	87
Figura 52: Funzione di sensibilità della funzione di trasferimento complessiva	88
Figura 53: Funzioni di sensibilità e $1+G_a$	89
Figura 54: Nyquist, variazione di t_0	91
Figura 55: Particolare di Nyquist con variazione di t_0	92
Figura 56: Funzione di sensibilità del guadagno d'anello	96
Figura 57: Diagrammi di Bode di G_a e $1+G_a$	97
Figura 58: Funzione di sensibilità della funzione di trasferimento complessiva	98
Figura 59: Funzioni di sensibilità e $1+G_a$	99
Figura 60: Nyquist, variazione di τ_e	100
Figura 61: Particolare di Nyquist con variazione di τ_e	101
Figura 62: Funzione di sensibilità del guadagno d'anello	105
Figura 63: Diagrammi di Bode di G_a e $1+G_a$	106
Figura 64: Funzione di sensibilità della funzione di trasferimento complessiva	107
Figura 65: Funzioni di sensibilità e $1+G_a$	108
Figura 66: Nyquist, variazione di k_e	109
Figura 67: Particolare di Nyquist con variazione di k_e	110
Figura 68: Risposta del sistema al gradino unitario con valore nominale di t_0	117
Figura 69: Risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione del tempo di ritardo t_0	118
Figura 70: Particolare, risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione di t_0	118
Figura 71: Errore in risposta alla rampa con t_0 nominale e con variazione di t_0	119
Figura 72: Risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione del tempo di ritardo t_0	120
Figura 73: Particolare, risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione di t_0	120
Figura 74: Errore in risposta alla rampa con t_0 nominale e con variazione di t_0	121
Figura 75: Nyquist con variazione di t_0 del 100%.....	122

Figura 76: Risposta del sistema al gradino unitario con variazione di t_0 del 100%	123
Figura 77: Risposta del sistema al gradino unitario con τ_e nominale e con variazione della costante di tempo τ_e	124
Figura 78: Errore in risposta alla rampa con τ_e nominale e con variazione di τ_e	125
Figura 79: Risposta del sistema al gradino unitario con τ_e nominale e con variazione della costante di tempo τ_e	126
Figura 80: Errore in risposta alla rampa con τ_e nominale e con variazione di τ_e	127
Figura 81: Risposta del sistema al gradino unitario con k_e nominale e con variazione della costante k_e	128
Figura 82: Errore in risposta alla rampa con k_e nominale e con variazione di k_e	129
Figura 83: Risposta del sistema al gradino unitario con k_e nominale e con variazione della costante di tempo k_e	130
Figura 84: Errore in risposta alla rampa con k_e nominale e con variazione di k_e	131
Figura 85: Errore a regime, effetto combinato variazione parametri	132
Figura 86: Loop interno hardware	135
Figura 87: Loop esterno con simulatore hardware di motore e ruota fonica	136
Figura 88: Sistema reale	136
Figura 89: Funzionamento stepper	139
Figura 90: Modello Simulink di stepper	139
Figura 91: Schema elettrico con componente 555	146
Figura 92: Potenzziometro	147

Introduzione

Il presente elaborato di tesi nasce con l'obiettivo di illustrare il progetto e lo sviluppo di un sistema di controllo automatico per la gestione del numero di giri del motore di un aereo ultraleggero.

In particolare, come oggetto di studio, si è preso in esame il velivolo LAURA, disponibile presso il Laboratorio di Sistemi per l'Info Mobilità, LASIM, dell'Università di Bologna. LAURA, Laboratorio Universitario Ricerche Aerospaziali, è un ultraleggero N3-2 PUP Preceptor equipaggiato per la ricerca (per le specifiche tecniche vedere Appendice A).

La variabile di ingresso del plant, costituito dal gruppo motore-elica, è la posizione angolare della farfalla, agendo sulla quale è possibile controllare il valore dell'uscita del sistema e cioè il numero di giri del motore dell'aereo. Come attuatore si utilizza uno stepper motor comandato in velocità: imponendo la velocità del motore passo-passo (variabile di ingresso dell'attuatore) si può gestire la posizione angolare della farfalla.

Si è quindi scelto di progettare un sistema di controllo di tipo SISO (Single Input-Single Output) che presenta due anelli di retroazione: uno interno (per il controllo della posizione dell'angolo di apertura della farfalla motore) ed uno esterno (per il controllo della velocità del motore). Fissato il segnale di riferimento sul numero di giri, n_{rif} , cioè il valore che si vuole far assumere alla variabile di uscita del sistema complessivo, l'azione del controllore del loop esterno (C_{engine}) si esplica attraverso l'azionamento dello stepper motor, regolato dal controllore del loop interno ($C_{stepper}$). La posizione angolare dell'attuatore determina, attraverso un braccetto meccanico che converte il moto rotatorio dello stepper in moto rettilineo, la minore o maggiore apertura della farfalla alla quale il manovellismo è collegato e, quindi, il numero di giri del motore dell'aereo.

I modelli matematici scelti per rappresentare i due sistemi da controllare, stepper motor e motore dell'aereo, costituiscono un compromesso tra precisione e semplicità. Le esigenze applicative del progetto non richiedono l'utilizzo di modelli troppo sofisticati e ricercati: è stato possibile modellare lo stepper motor con un integratore mentre per la modellizzazione del motore dell'aereo si è ritenuto opportuno non trascurare il ritardo finito introdotto nella realtà dal plant. Tipicamente, infatti, nei sistemi motore-elica l'uscita risponde dopo un tempo finito dall'applicazione dell'ingresso. Si mostrerà come la presenza di tali ritardi finiti abbia un'influenza notevole sulla stabilità dei sistemi in retroazione.

La realizzazione del sistema di controllo complessivo viene a definirsi attraverso il progetto di due controllori, uno per il loop interno, relativo allo stepper motor, e l'altro per il loop esterno, relativo al motore stesso. Si dimostrerà, nel corso dell'elaborato, che i controllori progettati sono tali da poter trascurare, in prima approssimazione, la dinamica del loop interno nello svolgimento delle analisi finali condotte sul sistema totale.

Per favorire una più immediata comprensione del problema, si riportano di seguito le rappresentazioni dei due anelli di retroazione con schemi a blocchi.

➤ Loop interno

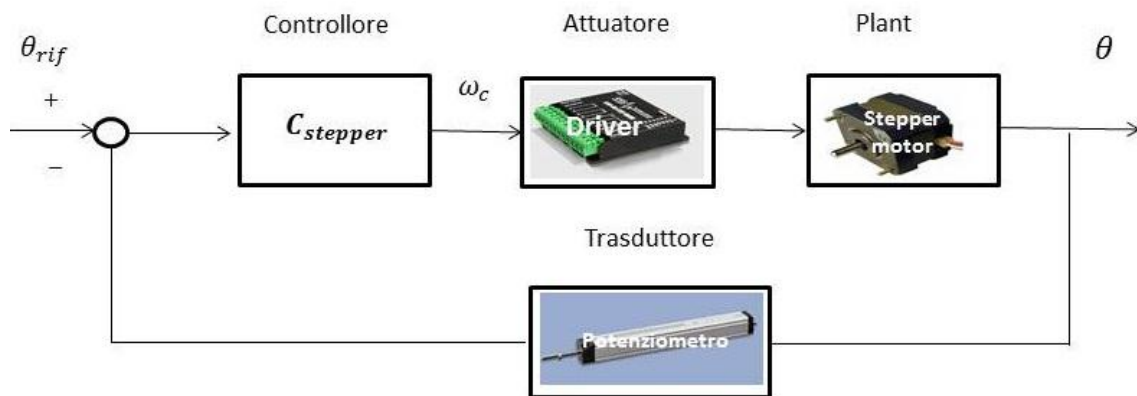


Figura 1: Loop interno di posizione

La variabile di uscita sulla quale si vuole intervenire (variabile controllata) è la posizione angolare dello stepper motor che determina uno spostamento del cursore del potenziometro e quindi un valore di tensione diverso a seconda della posizione angolare stessa. Il potenziometro rappresenta il trasduttore, cioè il dispositivo che trasforma una grandezza in un'altra di diversa natura fisica (Volt).

Fissato il segnale di riferimento θ_{rif} , cioè il valore che si vuole far assumere all'uscita del sistema, il controllore ($C_{stepper}$), mediante un attuatore (Driver), agisce sulla variabile manipolabile (velocità angolare ω_c), cioè la variabile il cui intervento modifica la variabile controllata.

➤ Loop esterno

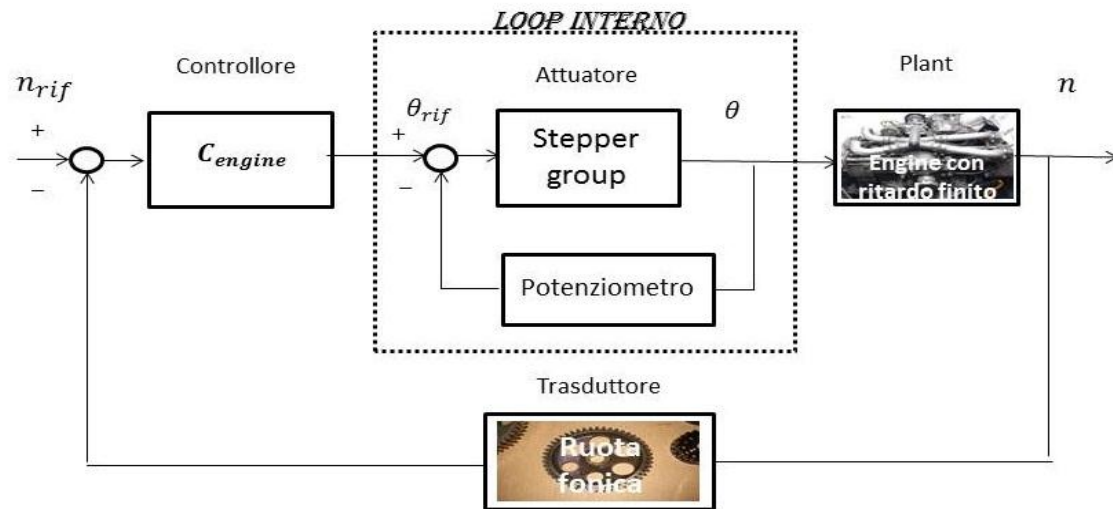


Figura 2: Loop esterno di velocità

La variabile di uscita che si vuole controllare è il numero di giri del motore dell'ultraleggero. La ruota fonica, analogamente al potenziometro per l'anello di retroazione interno, rappresenta il trasduttore del loop esterno.

Fissato il segnale di riferimento n_{rif} , cioè il valore che si vuole far assumere alla variabile di uscita, il controllore (C_{engine}), mediante lo stepper group, agisce sulla variabile manipolabile (θ), cioè la variabile il cui intervento modifica la variabile controllata.

➤ Esploso del sistema di controllo

Dalla rappresentazione dei due anelli di retroazione con schemi a blocchi, si ricava quella del sistema di controllo complessivo per la gestione del numero di giri dell'ultraleggero:

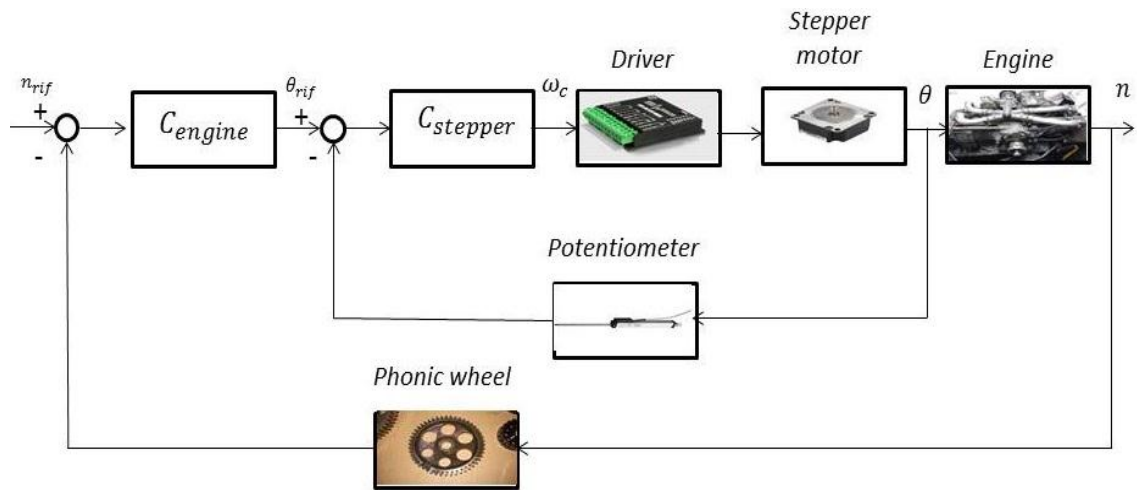


Figura 3: Loop interno e loop esterno

Allo stato dell'arte, nel controllo dei processi industriali i regolatori più diffusi sono di tipo PID che, nella loro configurazione classica, combinano azioni di controllo proporzionale, integrale e derivativo:

- azione proporzionale all'errore: P
- azione proporzionale all'integrale dell'errore: I
- azione proporzionale alla derivata dell'errore: D

La taratura dei parametri del PID viene, in molti casi, effettuata ricorrendo a metodologie empiriche tra cui le più diffuse sono quelle di Ziegler-Nichols. Tali regole di taratura non sono, però, sempre universalmente applicabili al fine di ottenere la soluzione ottimale per il progetto del regolatore: per questo motivo, si è scelto un criterio progettuale diverso, che si è rivelato migliore in relazione alle esigenze specifiche del progetto in questione. In particolare, le tecniche classiche di progetto non si sono dimostrate altresì efficaci nel caso di plant caratterizzati da ritardi finiti: non potendo ricorrere all'uso del PID si è resa quindi necessaria un'indagine che conducesse ad una tecnica di controllo alternativa per il controllo del numero di giri del motore. Si è scelto di applicare il progetto analitico dei regolatori che, nonostante richieda una conoscenza relativamente accurata del modello matematico del sistema controllato, consente di progettare un regolatore corrispondente ad un sistema in retroazione che si comporti esattamente come un modello di riferimento dato, scelto in modo da riprodurre il comportamento ideale voluto. Il limite del criterio progettuale adottato risiede nel fatto che la sua efficacia può essere compromessa qualora non siano noti con precisione i valori dei parametri del plant: tenendo in considerazione che, nel passaggio dal progetto teorico ad una futura realizzazione fisica, i parametri ipotizzati possano discostarsi da quelli reali, si è condotta un'analisi finale sulla robustezza del sistema alla variazione dei parametri che ha fornito

risultati incoraggianti in merito alla bontà del progetto.

In conclusione, attraverso i criteri progettuali scelti è stato possibile lo sviluppo del sistema di controllo complessivo attraverso il progetto, separato, dei controllori relativi alle due catene di retroazione, con l'obiettivo finale di rendere trascurabile la dinamica dell'anello interno rispetto a quella del sistema di controllo totale.

Nel capitolo 1 si fornisce la descrizione dei modelli adottati ed, in seguito, delle considerazioni che hanno portato alla scelta di determinate tecniche di controllo, studiate anche per far fronte al problema del ritardo finito introdotto dai sistemi esaminati, in particolare dal motore dell'aereo. Si conclude il primo capitolo con l'applicazione delle tecniche progettuali al loop esterno e a quello interno.

Nel capitolo 2 si illustrano le analisi condotte sulla robustezza del sistema alla variazione dei parametri, verificando che tali variazioni parametriche non conducano il sistema ad una condizione di instabilità e che gli errori a regime siano paragonabili a quelli desiderati per il sistema nominale.

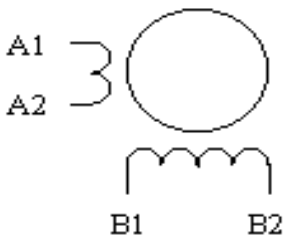
Nel capitolo 3 saranno mostrati i risultati sperimentali, effettuando simulazioni al variare dei parametri caratteristici dei sistemi e del tempo di ritardo.

In conclusione, nel capitolo 4, verranno richiamati i risultati ottenuti, rispondenti a quelli attesi relativamente alle specifiche di progetto assegnate e saranno delineati i possibili sviluppi futuri.

Si è posta anche l'attenzione e si sono indagati alcuni degli aspetti preliminari alla messa in pratica di quanto progettato in linea teorica (creazione del simulatore hardware del motore dell'aereo, discretizzazione del segnale di controllo, settaggio dei parametri del driver, impostazione del fine corsa dello stepper motor). Installare l'attuatore (stepper group) a bordo del velivolo e implementare il software necessario al funzionamento del sistema di controllo saranno gli step successivi da compiere per portare a termine il progetto con la sua realizzazione fisica.

1. Modelli del sistema, scelta e applicazione delle tecniche di controllo

1.1. Descrizione dei modelli matematici



1.1.1. Loop interno: stepper motor

Figura 4: Motore passo-passo

Il motore passo-passo (stepper motor) è un particolare tipo di motore elettrico in corrente continua particolarmente adatto al controllo di posizione. La sua capacità di realizzare posizionamenti veloci e precisi ne ha determinato un vasto impiego: nelle stampanti, macchine fotografiche, macchine utensili a controllo numerico, valvole a farfalla delle autovetture, negli orologi, nella robotica, nei controlli aerospaziali e in numerose altre applicazioni di piccola potenza.

È costituito da un circuito magnetico e da un circuito elettrico, detto di eccitazione, collocato sullo statore. Il circuito di eccitazione, formato dalle spire di un determinato numero di bobine disposte in serie tra loro e avvolte su una successione di espansioni polari, è alimentato con impulsi elettrici generati da un circuito elettronico di pilotaggio dell'hardware (driver): ad ogni commutazione dei segnali di comando il rotore si sposta di un angolo fisso chiamato passo angolare.

Da un punto di vista costruttivo, esistono due tipi fondamentali di motori passo passo:

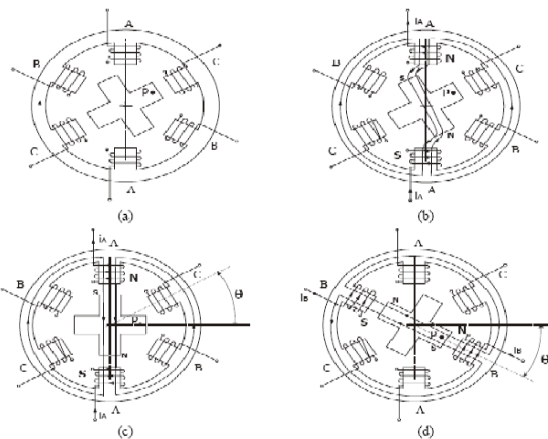


Figura 5: A riluttanza variabile

- *Motori a riluttanza variabile*: il principio di funzionamento è quello della minima riluttanza cioè quando la corrente di eccitazione percorre l'avvolgimento statorico, il rotore, costituito da un cilindro ferromagnetico dentato, si dispone in modo da offrire la minima riluttanza magnetica (massimo flusso). In seguito alla magnetizzazione dei denti del rotore si genera infatti una coppia che fa ruotare il rotore stesso in modo tale da allinearne i poli con

quelli di segno opposto dello statore. Il numero di denti del rotore differisce da quello dello statore così da evitare la situazione in cui i denti di rotore sono già allineati a quelli della fase che deve essere alimentata (se si verificasse ciò non si avrebbe alcuna rotazione).

- *Motori a magnete permanente*: basati esclusivamente sulle azioni di attrazione e repulsione tra poli magnetici dovute all'interazione tra il campo elettromagnetico generato dal circuito di eccitazione e il campo magnetico del rotore, costituito da un magnete permanente.

Ciò che aziona lo stepper motor è il driver: esso rappresenta l'insieme di procedure che permette ad un sistema software di pilotare un dispositivo hardware, convertendo i segnali di comando in ingresso generati da un dispositivo software nella corrente necessaria per azionare il motore. Tra gli ingressi del driver di cui si dispone vi sono i segnali STEP e DIR: il primo controlla il movimento del motore (un valore positivo avvia la rotazione del motore mentre un valore pari a zero la blocca) mentre il secondo controlla il verso di rotazione (un valore positivo determina una rotazione in un senso mentre un valore pari a zero determina la rotazione in senso opposto).

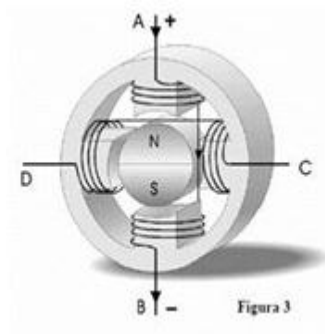


Figura 6: A magnete permanente

Per rendere più agevole la determinazione delle equazioni che descrivono il comportamento del motore elettrico, si fa riferimento a un caso semplificato di stepper motor a magnete permanente con quattro espansioni polari dello statore a due fasi (passo di 90°).

Il rotore, essendo un magnete permanente, è provvisto di un polo Nord e di un polo Sud. Gli avvolgimenti A e B sono in serie quindi consentono il passaggio della corrente da A a B, polarizzando in tal modo entrambe le espansioni polari. Analogamente per gli avvolgimenti C e D.

Ad esempio, se si invia corrente nell'avvolgimento A si creano delle polarità statoriche il cui corrispondente flusso magnetico determina una rotazione del rotore in seguito all'azione di attrazione o repulsione dei relativi poli. Alimentando, quindi, le fasi secondo una data sequenza il rotore si muove di un numero di passi angolari corrispondente alla successione di impulsi ricevuta dal circuito di pilotaggio dello stepper motor. Per mantenere, invece, il rotore in una data posizione, una volta raggiunta quella desiderata, si deve bloccare la sequenza e mantenere l'alimentazione sulla fase appropriata.

Analizzato il comportamento fisico dello stepper motor e stabilite le variabili di ingresso e uscita del sistema, si ricerca la relazione che ne costituisce il legame (modello matematico). In particolare, si considera un modello matematico dinamico (ossia un modello matematico che fornisce informazioni anche sul transitorio) espresso dalle seguenti equazioni differenziali:

$$V_e = RI_e + L \frac{dI_e}{dt} - e_m \quad \text{con } e_{m_j} = k_m \omega \sin(N\theta + \varphi_j)$$

dove:

R = resistenza del circuito di eccitazione

L = induttanza del circuito di eccitazione

e_m = forza contro elettromotrice indotta dalla variazione del flusso del campo magnetico (e_m determina una corrente indotta che scorre nel verso che si oppone alla variazione che l'ha causata)

k_m = costante che dipende dal design del motore

Ω = velocità angolare del rotore

N = numero di coppie di poli del rotore

θ = posizione angolare del rotore (se $\theta = 0$ il polo del rotore è allineato con il dente della fase quindi la e_m è nulla)

φ_j = posizione della bobina j-esima nello statore.

Tale equazione deve essere scritta per ogni fase presente. Ipotizzando di avere una fase A e una fase B poste a 0 e a $\frac{\pi}{2}$ ($\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$) si ottiene quindi:

$$V_A = RI_A + L \frac{dI_A}{dt} - k_M \omega \sin(N\theta)$$

$$V_B = RI_B + L \frac{dI_B}{dt} + k_M \omega \cos(N\theta)$$

La relazione di equilibrio tra la coppia motrice e la coppia di carico complessiva fornisce la seguente equazione:

$$c_m = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

dove $J \frac{d\omega}{dt}$ rappresenta la coppia di inerzia del rotore e $B\omega$ la coppia di attrito viscoso.

Per quanto riguarda la coppia motrice c_m , essa è data dalla somma delle coppie dovute alle due fasi in funzione dell'angolo del rotore θ :

$$c_{m_A} = -k_m I_A \sin(N\theta)$$

$$c_{m_B} = k_m I_B \cos(N\theta)$$

L'espressione finale diventa quindi:

$$-k_m I_A \sin(N\theta) + k_m I_B \cos(N\theta) = J \frac{d\omega}{dt} + B\omega$$

da cui si ricava l'accelerazione angolare:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{-k_m I_A \sin(N\theta) + k_m I_B \cos(N\theta) - B\omega}{J}$$

Il modello matematico complessivo è quindi fornito dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{dI_A}{dt} &= \frac{V_A - RI_A + k_M \omega \sin(N\theta)}{L} \\ \frac{dI_B}{dt} &= \frac{V_B - RI_B - k_M \omega \cos(N\theta)}{L} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{-k_m I_A \sin(N\theta) + k_m I_B \cos(N\theta) - B\omega}{J} \end{aligned}$$

Essendo ora note le equazioni che regolano il comportamento fisico dello stepper motor e imponendo come variabile di ingresso la corrente di eccitazione I_e , che individua in uscita determinati valori della posizione angolare θ , diventa possibile determinare la funzione di trasferimento (rapporto tra la trasformata di Laplace, per condizioni iniziali nulle, di una delle

grandezze in uscita e l'analogica trasformata di una delle grandezze di ingresso) $G(s) = \frac{\theta(s)}{I_e(s)}$, ricordando che $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.

È evidente come questo modo di procedere porterebbe alla definizione di un modello matematico molto accurato. Inoltre, procedendo con lo stesso approccio, così come per lo stepper motor, risulterebbe indispensabile ricavare il modello matematico per il driver: come sottolineato nell'introduzione, la ricerca di modelli così sofisticati in relazione alla semplicità di funzionamento del sistema dello stepper motor, inserito nel contesto utilizzato, esula dagli obiettivi del presente elaborato (un modello del blocco relativo a driver e stepper motor è possibile implementarlo in ambiente Simulink: per la descrizione vedere Appendice B).

Quindi, per poter usufruire di un modello semplice ma allo stesso tempo efficace per descrivere la dinamica dello stepper motor voluta, ci si è avvalsi dei risultati di test di laboratorio sulla base dei quali è stata determinata una funzione di trasferimento generale e complessiva di stepper motor e driver, che ne fornisce una buona approssimazione.

Si dimostra che la dinamica del sistema è ben rappresentata da una funzione di trasferimento del primo ordine e di tipo 0 (nessun polo nell'origine): $G_p(s) = \frac{k}{1+\tau s}$ dove τ è la costante di tempo che caratterizza il comportamento dinamico del sistema e k è la costante di guadagno. Il loop interno di posizione si può quindi schematizzare nel seguente modo:

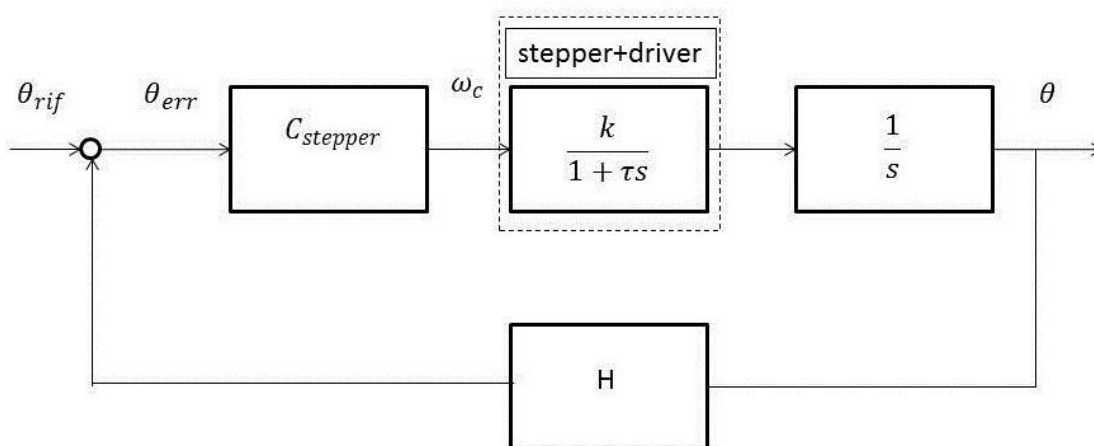


Figura 7: Modello stepper

La variabile controllata è la variabile di posizione, θ , quindi è necessario inserire sull'uscita dello stepper motor un integratore ricordando che:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ da cui } \theta(t) = \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau + \theta(t_0).$$

Per il potenziometro si assume $H=1$ quindi si analizza il caso di retroazione unitaria seguente, con $G_P(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)}$:

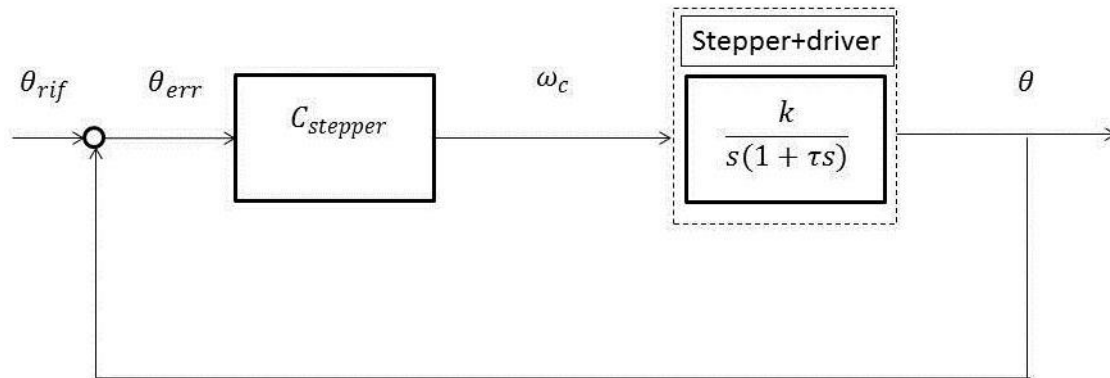


Figura 8: Modello finale stepper

1.1.2. Loop esterno: engine

La determinazione del modello matematico di un sistema presuppone la conoscenza di tutti i sottosistemi che lo costituiscono e delle relazioni, qualitative e quantitative, che ne regolano il comportamento, ossia l'evoluzione temporale di alcune grandezze (di uscita) a fronte dello stimolo ricevuto da parte di altre grandezze (di ingresso). Considerato l'elevato numero di sottosistemi che intervengono nel funzionamento di un motore, risulta evidente come la costruzione di un suo modello matematico, a partire dallo studio della fenomenologia che lo contraddistingue, richieda un'attenta analisi che consenta di avanzare ipotesi tali da rendere trascurabili alcuni fenomeni rispetto ad altri. Si tratta di un lavoro oneroso che conduce ad un modello tanto più complesso quanti più fenomeni si ritengono "dominanti" durante lo studio del sistema.

Per ciò che si propone questo lavoro, le potenzialità e l'efficacia di un tale modello non sarebbero sfruttate in maniera opportuna, in relazione alle esigenze applicative richieste, quindi si è deciso di seguire un modus operandi di tipo sperimentale, che si basa cioè su test di laboratorio, analogamente a quanto fatto per la determinazione del modello matematico dello stepper motor.

Si dimostra che la dinamica del sistema dell'engine è ben approssimata da una funzione di

trasferimento del primo ordine e di tipo 0 (nessun polo nell'origine): $G_P(s) = \frac{k}{1+\tau s}$ dove τ è la costante di tempo che caratterizza il comportamento dinamico del sistema e k è la costante di guadagno.

Nella dinamica di sistemi di questo tipo incidono molto gli effetti introdotti dal ritardo finito. Si definisce tempo di ritardo t_0 il tempo che si deve attendere affinché una variazione del segnale di ingresso si manifesti in una corrispondente variazione del segnale d'uscita. Quindi, nonostante per la rappresentazione del motore dell'aereo sia stato preferito un modello semplice ad un modello complesso, durante il progetto del sistema si è ritenuto fondamentale non trascurare gli effetti del ritardo finito introdotto da sistemi di questo tipo, a differenza di quanto fatto per la modellazione dello stepper motor: per quest'ultimo, infatti, la dinamica non è influenzata in maniera significativa da ritardi di propagazione del segnale.

La funzione di trasferimento di un ritardo finito di entità t_0 è fornita dalla funzione esponenziale e^{-st_0} in base alle seguenti relazioni:



$$y(t) = u(t - t_0)$$

$$y(s) = \mathcal{L}[u(t - t_0)] = u(s)e^{-st_0}$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = G(s) = e^{-st_0}$$

Ponendo, quindi, la funzione di trasferimento del ritardo finito in cascata alla $G_P(s) = \frac{k}{1+\tau s}$ ipotizzata per il sistema si ottiene:

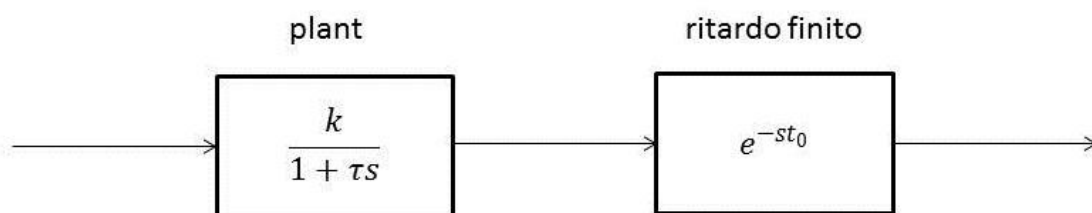


Figura 9: Modello engine

con una funzione di trasferimento $G_P(s) = \frac{k}{1+\tau s} e^{-st_0}$ che tiene conto anche dell'effetto del ritardo.

Il loop esterno di velocità, con l'ipotesi di retroazione unitaria, si può quindi schematizzare nel seguente modo:

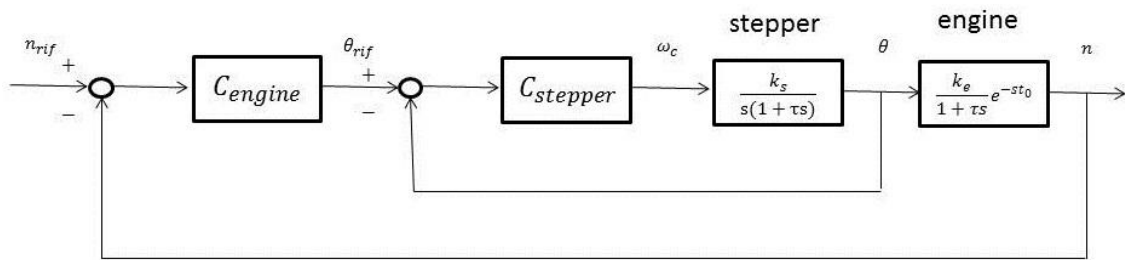


Figura 10: Modelli di stepper e engine

Ciò che rimane ora da determinare, dopo aver ricavato i modelli matematici dei due plant del sistema, sono i controllori sia del loop interno sia di quello esterno.

Si procede, quindi, con la descrizione e giustificazione delle tecniche di controllo scelte.

1.2. Scelta delle tecniche di controllo

La scelta delle leggi di controllo si basa sull'analisi del comportamento a regime e sull'analisi della stabilità: dopo aver esaminato l'andamento dell'errore, in risposta ai segnali tipici, si sceglie il regolatore che garantisce il comportamento a regime voluto e se ne verifica, infine, la stabilità.

1. Analisi del comportamento a regime

Il comportamento a regime si caratterizza con riferimento all'analisi dell'errore in risposta ai segnali tipicamente usati (gradino, rampa, parabola). Su questa analisi si basa il criterio per la scelta del regolatore: si utilizzerà quello in grado di garantire un comportamento a regime soddisfacente i dati di specifica imposti (massimo errore finito ammissibile o nullo). Nei sistemi di controllo, infatti, l'obiettivo è quello di far coincidere, per quanto possibile, il segnale di riferimento r con l'uscita y (inseguimento). Per l'inevitabile presenza di disturbi e di ritardo nella risposta del sistema controllato, tale obiettivo può essere raggiunto a meno di un errore esprimibile come $e(t) \triangleq r(t) - y(t)$ tale che $e(t) \rightarrow 0$ a regime. La bontà di un sistema di controllo si determina, quindi, in base all'andamento nel tempo dell'errore e al suo valore in condizioni di regime.

2. Analisi della stabilità

Il primo requisito che il progetto di un sistema di controllo deve verificare è la stabilità: in seguito ad una perturbazione, il sistema deve essere in grado di riacquistare una condizione di equilibrio, cioè di fornire una risposta che non diverga al crescere del tempo. L'analisi della stabilità può essere effettuata nel dominio del tempo (massima sovraelongazione, tempo di assestamento, tempo di salita) o nel dominio delle frequenze (margine di fase, margine di ampiezza, picco di risonanza). I criteri progettuali adottati prevedono, come dati di specifica, quelli inerenti al dominio del tempo, massima sovraelongazione ($S\%$) e tempo di assestamento (T_a), imponendo i quali si ricavano i valori di progetto dei parametri T_i e k_i , e δ e ω_n , rispettivamente del sistema di controllo stepper motor e engine.

1.2.1. Loop interno: stepper motor

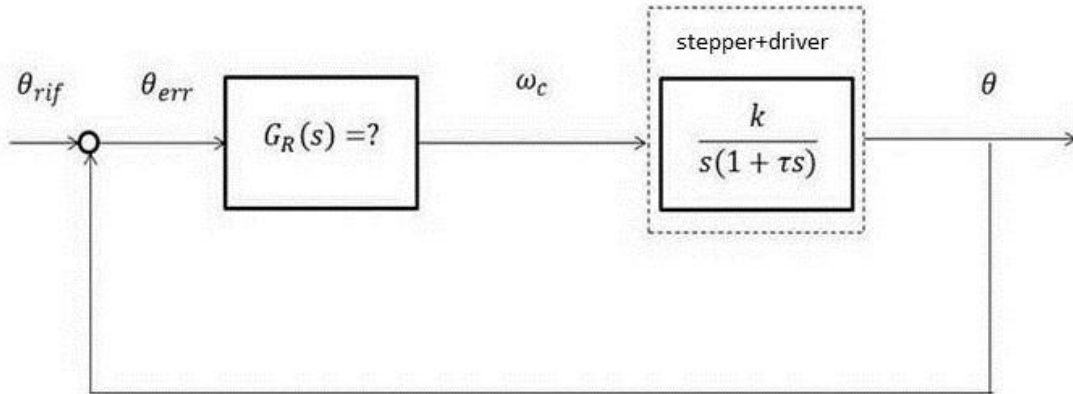


Figura 11: Regolatore loop interno

1.2.1.1. Analisi del comportamento a regime

Per conoscere il comportamento a regime del sistema

$$G_{TOT} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

con:

$$G(s) = G_R(s) \frac{k}{s(1 + \tau s)} = G_a(s)$$

se ne studia l'andamento dell'errore in risposta ai segnali tipici: gradino, rampa, parabola.

$$e(t) = \theta_{rif}(t) - \theta(t)$$

$$e(s) = \theta_{rif}(s) - \theta(s)$$

$$\frac{e(s)}{\theta_{rif}(s)} = 1 - \frac{\theta(s)}{\theta_{rif}(s)} = 1 - \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} \Rightarrow e(s) = \frac{1}{1 + G_a(s)} \theta_{rif}(s)$$

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Rightarrow \theta_{rif}(t) = \theta(t) \text{ per } t \rightarrow \infty \text{ (errore a regime)}$$

E per il teorema del valore finale (vedere Appendice C),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s).$$

Regolatore proporzionale P: $G_R(s) = k_P$

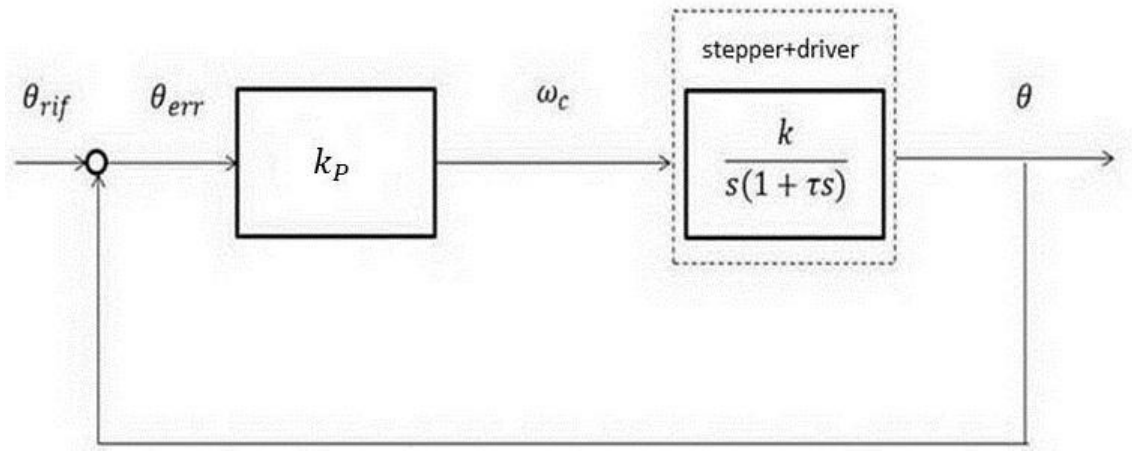


Figura 12: P

$$G_a(s) = \frac{k_P k}{s(1 + \tau s)}$$

$$e(s) = \theta_{rif}(s) - \theta(s) = \theta_{err}$$

$$\theta(s) = e(s) \frac{k_P k}{s(1 + \tau s)} \Rightarrow e(s) = \theta_{rif}(s) - e(s) \frac{k_P k}{s(1 + \tau s)} \Rightarrow e(s) \left[1 + \frac{k_P k}{s(1 + \tau s)} \right] = \theta_{rif}(s)$$

$$e(s) = \frac{\theta_{rif}(s)}{1 + \frac{k_P k}{s(1 + \tau s)}} \Rightarrow e(s) = \frac{s(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s) + k_P k} \theta_{rif}(s)$$

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s) + k_P k} \theta_{rif}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s) + k_P k} \theta_{rif}(s)$$

1) **Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s) + k_P k} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s) + k_P k} = 0$$

ERRORE NULLO

2) **Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^2}$

Scelta delle tecniche di controllo

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s) + k_p k} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + \tau s}{s(1 + \tau s) + k_p k} = \frac{1}{k_p k} \quad \text{ERRORE FINITO}$$

3) **Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^3}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(1 + \tau s)}{s(1 + \tau s) + k_p k} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1 + \tau s}{s(1 + \tau s) + k_p k} \frac{1}{s} = \infty \quad \text{ERRORE INFINITO}$$

Regolatore integrale I: $G_R(s) = \frac{k_p}{sT_i}$

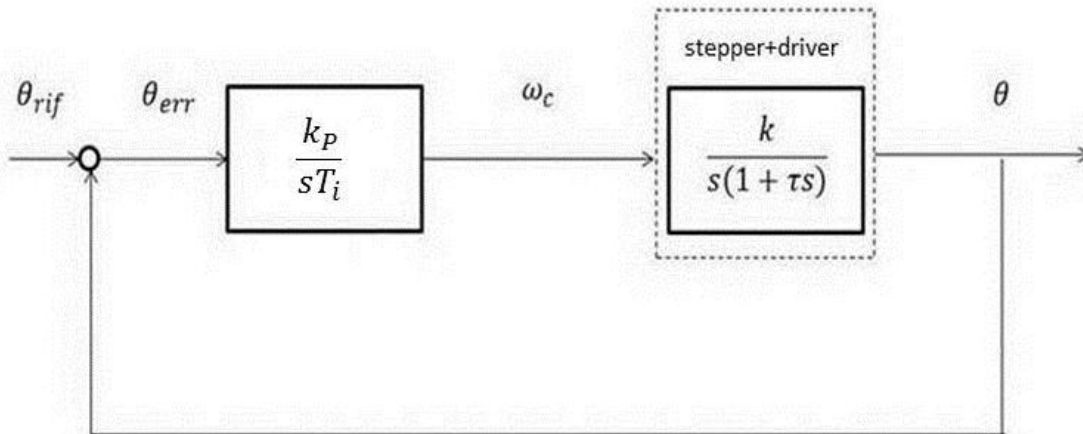


Figura 13: I

$$G_a(s) = \frac{k_p k}{s^2 T_i (1 + \tau s)}$$

$$e(s) = \theta_{rif}(s) - \theta(s) = \theta_{err}$$

$$\theta(s) = e(s) \frac{k_p k}{s^2 T_i (1 + \tau s)} \Rightarrow e(s) = \theta_{rif}(s) - e(s) \frac{k_p k}{s^2 T_i (1 + \tau s)}$$

$$\Rightarrow e(s) \left[1 + \frac{k_p k}{s^2 T_i (1 + \tau s)} \right] = \theta_{rif}(s)$$

$$e(s) = \frac{\theta_{rif}(s)}{1 + \frac{k_p k}{s^2 T_i (1 + \tau s)}} \Rightarrow e(s) = \frac{s^2 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k} \theta_{rif}(s)$$

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} se(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} \theta_{rif}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} \theta_{rif}(s)$$

1) **Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} = 0 \quad \text{ERRORE NULLO}$$

2) **Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} = 0 \quad \text{ERRORE NULLO}$$

3) **Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^3}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_i(1 + \tau s)}{s^2 T_i(1 + \tau s) + k_p k} = \frac{T_i}{k_p k} \quad \text{ERRORE FINITO}$$

Regolatore proporzionale-integrale PI: $G_R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$

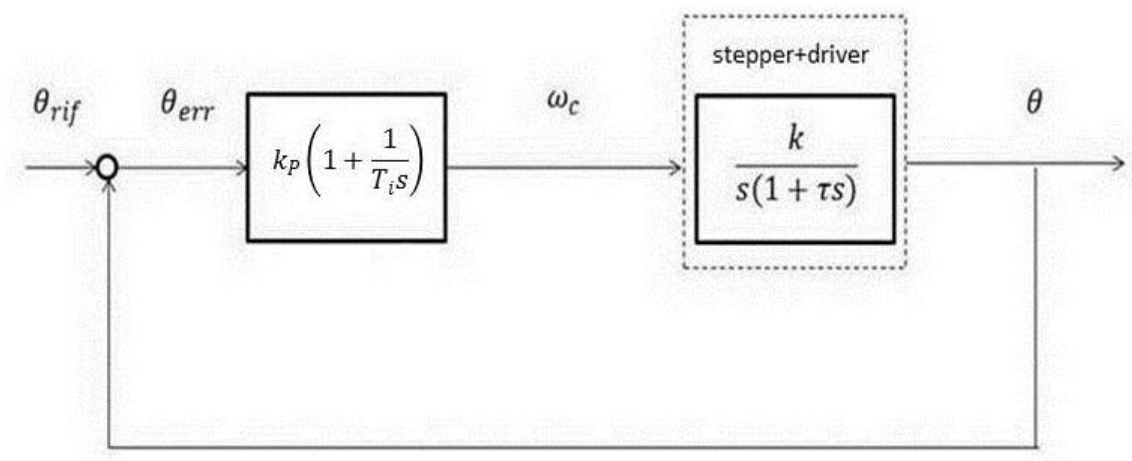


Figura 14: PI

$$G_a(s) = \frac{k_p k (1 + T_i s)}{s^2 T_i (1 + \tau s)}$$

$$e(s) = \theta_{rif}(s) - \theta(s) = \theta_{err}$$

$$\theta(s) = e(s) \frac{k_p k (1 + T_i s)}{s^2 T_i (1 + \tau s)} \Rightarrow e(s) = \theta_{rif}(s) - e(s) \frac{k_p k (1 + T_i s)}{s^2 T_i (1 + \tau s)}$$

$$\Rightarrow e(s) \left[1 + \frac{k_p k (1 + T_i s)}{s^2 T_i (1 + \tau s)} \right] = \theta_{rif}(s)$$

$$e(s) = \frac{\theta_{rif}(s)}{1 + \frac{k_p k (1 + T_i s)}{s^2 T_i (1 + \tau s)}} \Rightarrow e(s) = \frac{s^2 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} \theta_{rif}(s)$$

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} \theta_{rif}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} \theta_{rif}(s)$$

1) *Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione* $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} = 0 \quad \text{ERRORE NULLO}$$

2) *Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità* $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)}$$

$$= 0 \quad \text{ERRORE NULLO}$$

3) **Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^3}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} \frac{1}{s^3}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (1 + T_i s)} = \frac{T_i}{k_p k} \quad \text{ERRORE FINITO}$$

Regolatore proporzionale-integrale-derivativo PID: $G_R(s) = k_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$

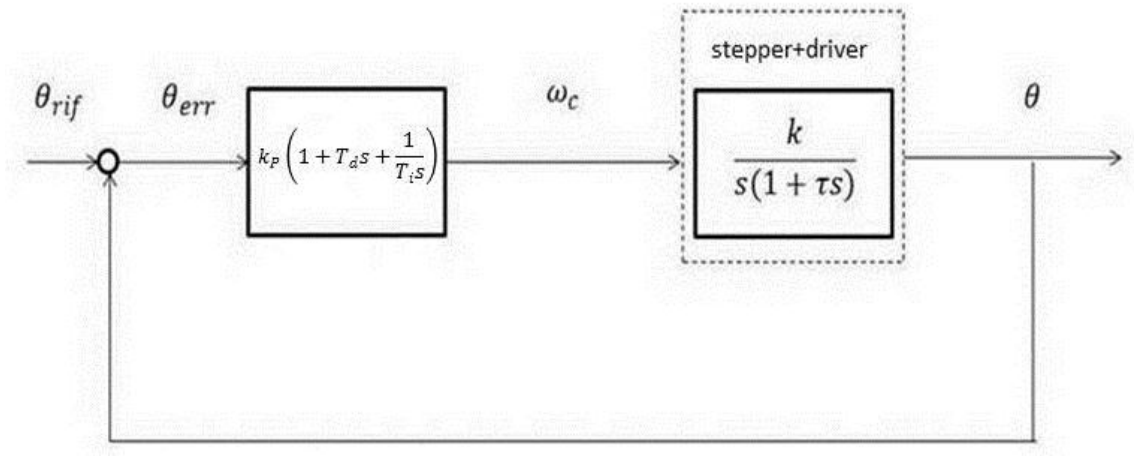


Figura 15: PID

$$G_a(s) = \frac{k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)}{s^2 T_i (1 + \tau s)}$$

$$e(s) = \theta_{rif}(s) - \theta(s) = \theta_{err}$$

$$\theta(s) = e(s) \frac{k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)}{s^2 T_i (1 + \tau s)} \Rightarrow e(s) = \theta_{rif}(s) - e(s) \frac{k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)}{s^2 T_i (1 + \tau s)}$$

$$\Rightarrow e(s) \left[1 + \frac{k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)}{s^2 T_i (1 + \tau s)} \right] = \theta_{rif}(s)$$

$$e(s) = \frac{\theta_{rif}(s)}{1 + \frac{k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)}{s^2 T_i (1 + \tau s)}} \Rightarrow e(s) = \frac{s^2 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} \theta_{rif}(s)$$

$$e_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} \theta_{rif}(s)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} \theta_{rif}(s)$$

1) **Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} \frac{1}{s}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} = 0 \quad \text{ERRORE NULLO}$$

2) **Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} = 0 \quad \text{ERRORE NULLO}$$

3) **Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione** $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^3}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} \frac{1}{s^3}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_i (1 + \tau s)}{s^2 T_i (1 + \tau s) + k_p k (T_i T_d s^2 + T_i s + 1)} = \frac{T_i}{k_p k} \quad \text{ERRORE FINITO}$$

In conclusione, l'errore dipende dal tipo di sistema, cioè dal numero di poli nell'origine della funzione di trasferimento $G(s)$: per un sistema $G(s)$ di tipo 0 l'errore di posizione è finito mentre quello di velocità e accelerazione infinito; per un sistema $G(s)$ di tipo 1 l'errore di posizione è nullo, quello di velocità finito e di accelerazione infinito; per un sistema $G(s)$ di tipo 2 gli errori di posizione e di velocità sono nulli, quello di accelerazione finito.

Considerato che il regolatore proporzionale non influisce sul tipo di sistema che caratterizza il plant $G_p(s)$, i risultati ottenuti sono quelli previsti per un sistema di tipo 1; analogamente, i regolatori I, PI, PID aggiungono un polo nell'origine al sistema $G_p(s)$ quindi il comportamento a regime è quello caratteristico di un sistema di tipo 2.

Dall'analisi condotta si evince che, al fine di ottenere un errore nullo, non è possibile l'utilizzo di un regolatore proporzionale se il segnale d'ingresso non è a gradino a differenza di quanto avviene per i restanti regolatori che, aggiungendo un polo nell'origine, generano errori nulli (in risposta al gradino e alla rampa) o finiti (in risposta alla parabola).

Quindi, per l'applicazione considerata, si è deciso di utilizzare un regolatore PI, considerato che un PID non è fisicamente realizzabile e un I conserva una minor banda passante e quindi una minor prontezza di risposta.

1.2.1.2. *Analisi della stabilità*

Si verifica la condizione di stabilità del sistema, con l'introduzione del regolatore PI scelto, attraverso la determinazione qualitativa e l'analisi del luogo delle radici, dei diagrammi di Bode e di Nyquist.

- *Luogo delle radici*

Nel caso di sistemi lineari stazionari con funzioni di trasferimento razionali fratte, la stabilità è legata alla posizione dei poli della funzione di trasferimento. Infatti, la risposta di tali sistemi ad una perturbazione consiste in una somma di termini che si dicono modi del sistema, dove con modo si intende una funzione $f(t) = At^m e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i)$ con $m = 0 \div r_i - 1$ (r_i molteplicità, σ_i parte reale, ω_i parte immaginaria, φ_i fase del polo i - simo).

Considerando il comportamento dei modi per $t \rightarrow \infty$, si distinguono i seguenti casi:

$$\sigma \text{ nulla: } f(t) = At^m \cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\text{se } r_i = 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \text{modo limitato}$$

Scelta delle tecniche di controllo

se $r_i > 1 \Rightarrow m = 0 \Rightarrow \text{modo illimitato}$

σ positiva: $f(t) = At^m e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \Rightarrow \text{modo illimitato}$

σ negativa: $f(t) = At^m e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \Rightarrow \text{modo nullo}$

Da cui, si deduce il seguente teorema :

'per la stabilità di un sistema lineare stazionario è necessario e sufficiente che la funzione di trasferimento non presenti alcun polo a parte reale positiva e che gli eventuali poli a parte reale nulla siano semplici. Per la stabilità asintotica è necessario e sufficiente che tutti i poli abbiano parte reale negativa'.

Stabile \Leftrightarrow i poli con σ nulla hanno molteplicità pari a uno e i restanti polo hanno σ negativa;

Asintoticamente stabile \Leftrightarrow i poli hanno σ negativa;

Instabile \Leftrightarrow un polo ha σ positiva oppure σ nulla con molteplicità maggiore di uno.

Nasce quindi l'esigenza del progettista di conoscere i poli del sistema in retroazione per poter trarre conclusioni sulla stabilità. La costruzione del luogo delle radici risponde a tale esigenza: esso, infatti, consiste in un procedimento grafico per la determinazione di un tracciato descritto nel piano complesso dalle radici dell'equazione caratteristica del sistema in retroazione al variare della costante di guadagno di anello.

L'equazione caratteristica di un sistema in retroazione:

$$G_T(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}$$

è rappresentata dal denominatore $1 + H(s)G(s)$, dove si suppone che:

$$H(s)G(s) = G_a(s)$$

sia una funzione razionale fratta del tipo:

$$H(s)G(s) = k_1 G_1(s) = k_1 \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

con $n \geq m$.

Al variare del parametro k_1 nell'intervallo $[0; \infty)$, le radici dell'equazione caratteristica descrivono una curva nel piano complesso (luogo delle radici) da cui, dalla conoscenza della posizione dei poli, si evincono informazioni sulla stabilità del sistema in retroazione.

- Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode consentono la rappresentazione della funzione di risposta armonica $F(\omega)$, legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ dalla relazione $F(\omega) = G(j\omega)$ se il sistema è lineare stazionario con funzione di trasferimento razionale fratta e poli a parte reale negativa. Essendo la funzione di risposta armonica a valori complessi, si utilizzano due diagrammi differenti, uno dei quali, detto diagramma delle ampiezze o dei moduli o diagramma α , riporta il logaritmo del modulo della risposta armonica in funzione del logaritmo della pulsazione ω e l'altro, detto diagramma delle fasi o degli argomenti o diagramma β , riporta l'argomento della risposta armonica in funzione del logaritmo della pulsazione ω .

Per valutare la bontà del comportamento dinamico del sistema in retroazione si introducono due parametri detti margini di stabilità, uno dei quali, margine di ampiezza, è definito come l'inverso del modulo del guadagno di anello alla pulsazione corrispondente alla fase $-\pi$:

$$M_A = \frac{1}{|G_a(j\omega_\pi)|}$$

mentre l'altro, chiamato margine di fase, è definito come l'angolo che occorre sottrarre alla fase del guadagno d'anello alla pulsazione di incrocio ω_i corrispondente al valore unitario del modulo per ottenere $-\pi$:

$$\varphi - M_F = -\pi \Rightarrow M_F = \arg\{G_a(j\omega_i)\} + \pi.$$

Quindi, con l'analisi dei diagrammi di Bode della funzione di guadagno di anello è possibile determinare tali margini di stabilità. Valori tipici del margine di fase e di ampiezza per un buon comportamento di un sistema in retroazione sono: $M_F = 45 \div 60$ *deg* e $M_A = 12 \div 16$ *dB*.

- Diagramma di Nyquist

Per la rappresentazione della funzione di risposta armonica, in alternativa ai diagrammi di Bode, si possono utilizzare i diagrammi di Nyquist. Essi forniscono la curva che rappresenta, nel piano complesso, il variare di $G(j\omega)$ per ω che varia nell'intervallo $[0; \infty)$, in termini di modulo e argomento, in funzione della pulsazione ω , i cui valori, corrispondenti ai vari punti, sono specificati sulla curva stessa. I diagrammi di Nyquist sono utili per la determinazione dei margini di stabilità e, se tracciati per ω che varia nell'intervallo $(-\infty; +\infty)$, consentono l'utilizzo del criterio di Nyquist che fornisce informazioni relative alla stabilità del sistema chiuso in retroazione.

Si riporta il criterio di Nyquist per sistemi stabili ad anello aperto:

'nell'ipotesi che la funzione guadagno di anello $G_a(s)$ abbia tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un eventuale polo nullo semplice o doppio, condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G_a(j\omega)$ non circonda né tocchi il punto critico $-1 + j0$ '

In particolare, quanto più il diagramma di Nyquist di un sistema stabile ad anello aperto si svolge lontano dal punto critico, tanto più lontano dall'instabilità è il sistema: quindi, la maggiore o minore vicinanza al punto critico è un indice della maggiore o minore criticità o tendenza all'instabilità del sistema in retroazione.

Mediante i classici tool di analisi per sistemi lineari sopra descritti, si esaminano ora le caratteristiche di stabilità del loop interno. L'analisi si effettua ipotizzando il caso in cui sia $|\tau| \ll |T_i|$ e il caso in cui sia $|\tau| \gg |T_i|$: questo perché la relazione tra le costanti di tempo del polo e dello zero della funzione di trasferimento, quindi la loro reciproca posizione nel piano complesso, influenza significativamente la stabilità del sistema.

Regolatore proporzionale-integrale PI: $G_a(s) = G_R(s)G_P(s) = \frac{k_P k(1+T_i s)}{s^2 T_i (1+\tau s)}$

1. LUOGO DELLE RADICI

Si considera la funzione di trasferimento:

$$k_1 \frac{k_p k (1 + T_i s)}{s^2 T_i (1 + \tau s)}$$

con $k_1 > 0$ e si suppone per semplicità $\bar{k} = k_p k = 1$.

Si analizza il caso in cui $|\tau| \ll |T_i|$.

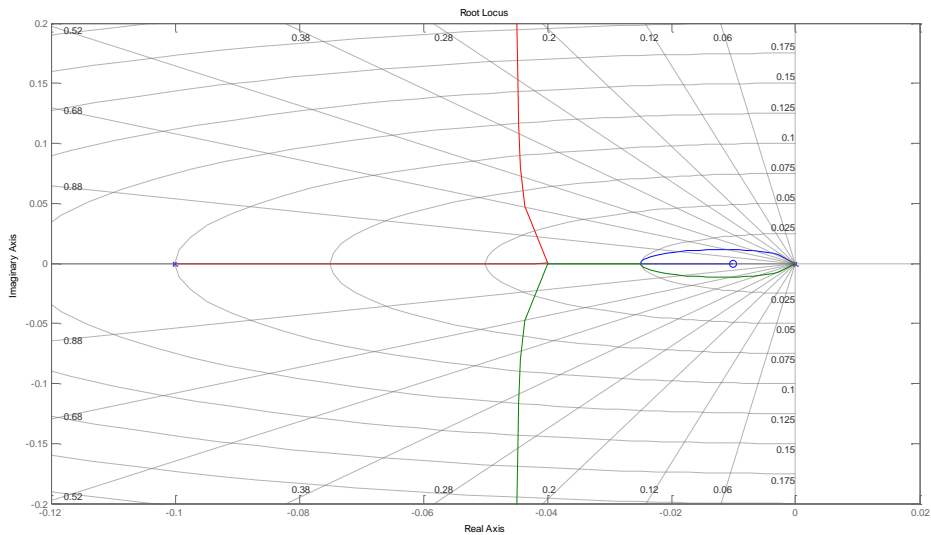


Figura 16: Luogo delle radici, $|\tau| \ll |T_i|$

I poli sono $N = 3$ e pari a $p_{1,2} = 0$ doppio e $p_3 = -\frac{1}{\tau}$.

Gli zeri sono $M = 1$ e pari a $z_1 = -\frac{1}{T_i}$.

Essendo $|\tau| \ll |T_i|$, la posizione del polo p_3 sull'asse reale è più distante dall'origine rispetto alla posizione dello zero.

Il luogo delle radici presenta N rami: il ramo che parte da uno dei due poli nell'origine finisce nello zero e gli altri due rami, che partono uno dal restante polo nell'origine e l'altro da polo p_3 , finiscono entrambi all'infinito.

Si analizza il caso in cui $|\tau| \gg |T_i|$.

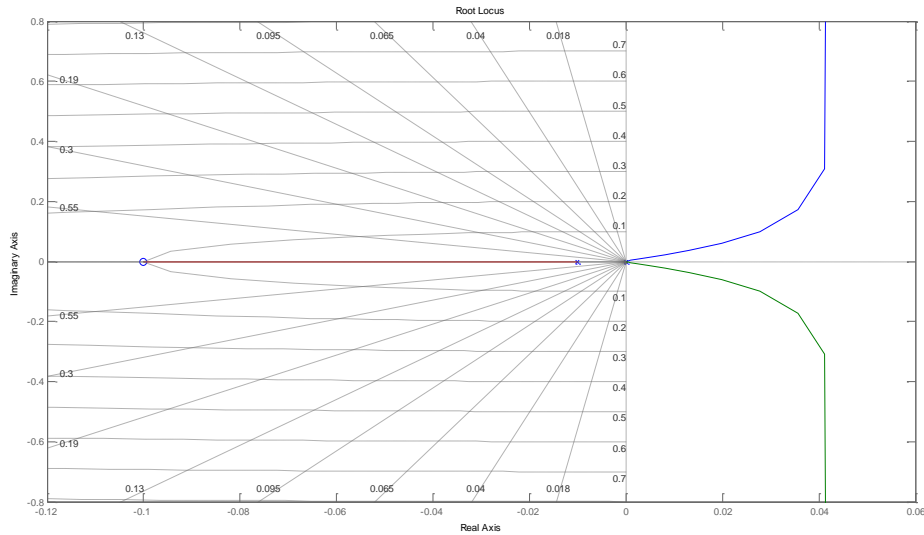


Figura 17: Luogo delle radici, $|\tau| \gg |T_i|$

Si nota come per valori di $|\tau| \gg |T_i|$, il polo p_3 è più vicino all'origine rispetto allo zero. Il ramo che parte dal polo p_3 finisce nello zero mentre i rami che partono dai due poli nell'origine finiscono entrambi agli asintoti. In particolare, si evince come i poli del sistema si muovano verso la parte positiva dell'asse reale portando così all'instabilità del sistema.

Si procede, quindi, l'analisi considerando soltanto valori di $|\tau| \ll |T_i|$, scelta che troverà poi una giustificazione nella sua determinazione sperimentale. La scelta del valore di progetto di T_i rappresenta una guida per il progettista: fare in modo che si verifichi sempre la condizione $|T_i| \gg |\tau|$ garantisce, come dimostrato, la stabilità del sistema.

2. DIAGRAMMI DI BODE

Si analizza il caso in cui $|\tau| \ll |T_i|$.

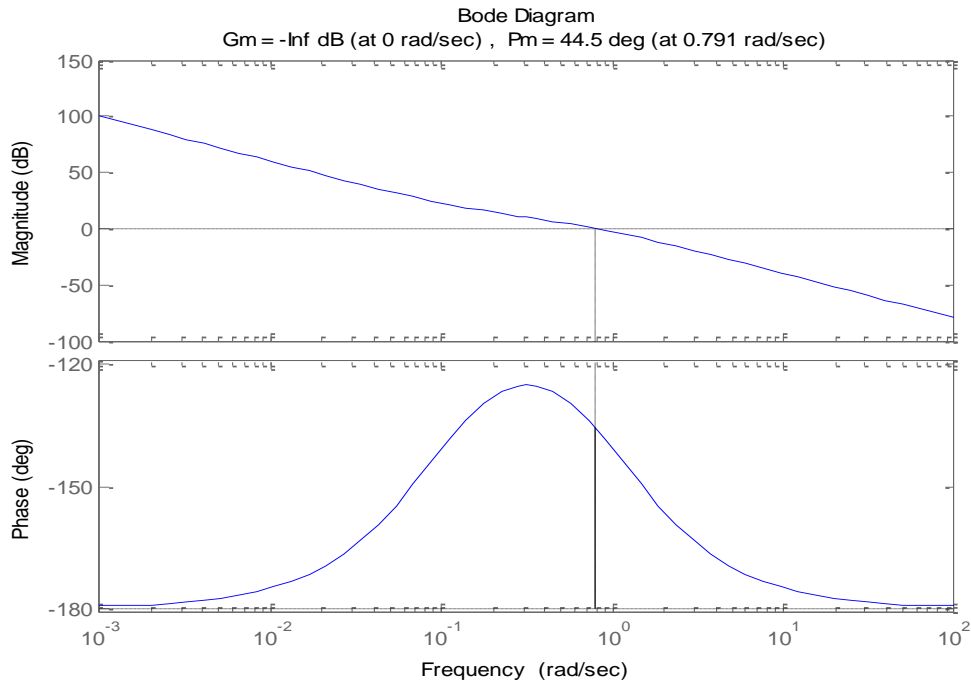


Figura 18: Bode, $|\tau| \ll |T_i|$

L'effetto iniziale del regolatore PI, cioè per pulsazioni piccole rispetto a ω_i di incrocio, è quello di introdurre un ritardo che porta la fase da valori di -90° (sfasamento introdotto dal polo nell'origine del plant) a valori di -180° : allo sfasamento di -90° introdotto dal polo nell'origine del plant si somma quello introdotto dal polo nell'origine del PI. In seguito, l'ulteriore ritardo determinato dal polo del plant $p = -\frac{1}{\tau}$ viene compensato dall'anticipo dello zero $z = -\frac{1}{T_i}$ del PI per cui l'effetto complessivo è quello di portare la fase da un valore di -180° a un valore più piccolo in modulo (se tale aumento di fase avviene in corrispondenza del valore di ω_i si hanno benefici in termini di margine di fase). Infine, esaurito l'effetto introdotto dallo zero del PI, la fase si stabilizza nuovamente a valori di -180° .

3. DIAGRAMMA DI NYQUIST

Si analizza il caso in cui $|\tau| \ll |T_i|$.

Scelta delle tecniche di controllo

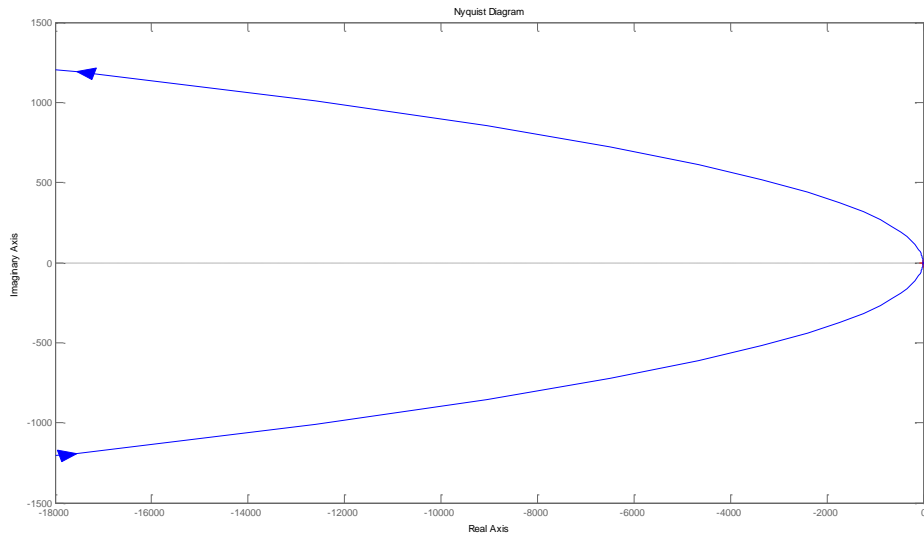


Figura 19: Nyquist, $|\tau| \ll |T_i|$

Si deduce che il sistema è asintoticamente stabile non circondando il punto critico nemmeno una volta (per convenzione i rami all'infinito si chiudono in senso orario). E' possibile verificarlo dal seguente grafico ottenuto aumentando ancora il valore di T_i rispetto al valore di τ .

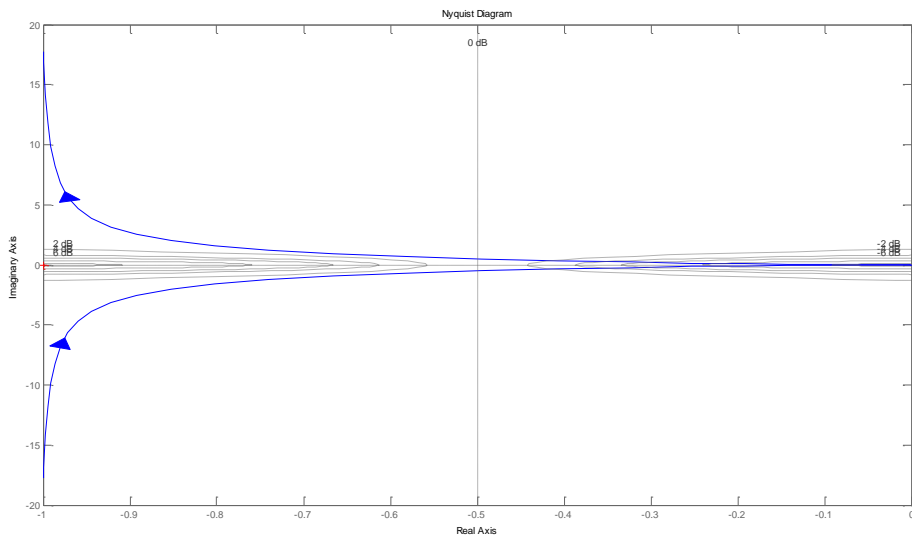


Figura 20: Particolare Nyquist, $|\tau| \ll |T_i|$

Per ricondurre l'analisi teorica della stabilità alla realtà è necessario determinare il valore del parametro τ del plant per fare in modo che la condizione per la quale la stabilità è verificata sia soddisfatta.

1.2.1.2.1. *Analisi sperimentale per la determinazione di τ*

Il plant è caratterizzato dalla funzione di trasferimento $G_P(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)}$, con valore di k noto e dipendente dal settaggio dei parametri del driver $\left(k = k_s = \frac{1}{full\ steps * microsteps\ resolution} = \frac{1}{\frac{360^\circ}{1.8^\circ} * \frac{1}{16}} = 0.08 \frac{rad}{cicli} \right)$.

Rimane da determinare la costante di tempo τ indice della velocità con la quale la risposta del sistema converge al valore di regime: per valori elevati di τ la risposta impegna più tempo per raggiungere il valore di regime mentre per τ piccoli il sistema è veloce. Tanto più il sistema è veloce, quindi τ è piccolo, tanto più il polo è grande in valore assoluto essendo $p = -\frac{1}{\tau}$.

A tal scopo, si osserva che, variando la frequenza del segnale di comando del driver (da cui dipende la velocità dello stepper motor) da un valore minimo di 1 *mHz* ad un massimo di 100 *KHz*., non risulta sperimentalmente apprezzabile il tempo che lo stepper impiega per andare da una velocità di rotazione all'altra: cambia velocità istantaneamente ogni volta che cambia la frequenza del segnale in ingresso. Per questo motivo, si ritiene valida l'approssimazione per la quale il plant nominale, cioè il plant in cui si pone $\tau = 0$, viene fatto coincidere con il plant reale.

Si può porre quindi:

$$G_P(s) = \frac{k}{s(1+\tau s)} \cong \frac{k}{s}.$$

Si ha inoltre che, con $T_i > 0$, la relazione $\tau < T_i$ risulterà sempre soddisfatta.

Trascurando la costante di tempo τ del plant, si può realisticamente supporre di avere accelerazioni infinite essendo la variazione di velocità dello stepper motor istantanea. Per tale ragione, è lecito pensare di poter sollecitare il sistema con un ingresso a rampa, piuttosto che a parabola, in accordo con il funzionamento osservato.

In questo caso, considerando il comportamento a regime con la presenza di un PI, si aggiunge il vantaggio di poter ottenere la condizione desiderabile di errore a regime nullo.

La funzione di trasferimento del loop interno si può quindi scrivere nella forma:

$$G_{TOTstepper} = \frac{G_{stepper}(s)}{1 + G_{stepper}(s)}$$

con:

$$G_{stepper}(s) = G_R(s)G_R(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{k_s}{s} = \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2},$$

avendo posto $k_i = \frac{k_p}{T_i}$ e avendo indicato con k_s la costante k dello stepper motor.

1.2.2. Loop esterno: engine

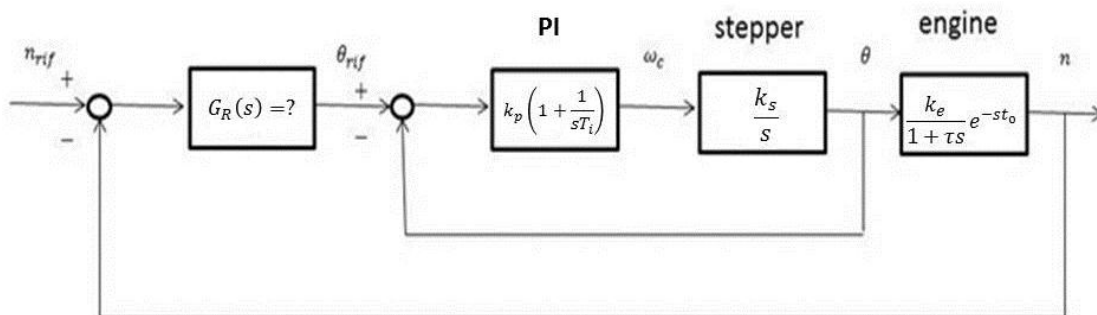


Figura 21: Regolatore loop esterno

Nella scelta della tecnica di controllo del motore si deve considerare l'intervento del ritardo finito nella dinamica del sistema: il regolatore deve essere progettato in modo da compensare l'effetto negativo in termini di stabilità introdotto da tale ritardo.

Anche per il motore si è valutata la possibilità di poter impiegare un controllo di tipo PI: infatti, l'introduzione del polo nell'origine consentirebbe di annullare l'errore a regime nella risposta al gradino mentre una progettazione specifica dello zero del regolatore potrebbe portare vantaggi in termini di stabilità. Per una prima scelta dei parametri del regolatore è stato utilizzato il metodo di Ziegler-Nichols che, nel caso specifico, non si è però rivelato efficace, fornendo un valore della sovraelongazione nella risposta al gradino di poco inferiore all'80%.

Per tale ragione, si è optato per un procedimento di sintesi diretta rispetto ai procedimenti classici di sintesi per tentativi finora considerati. Adottando questa tecnica di progetto, la funzione di trasferimento del regolatore viene determinata con un calcolo immediato in base al procedimento di seguito riportato.

1.2.2.1 Progetto analitico dei regolatori

Si considera un sistema con retroazione unitaria e ci si propone di determinare la funzione di trasferimento $G_R(s)$ di un regolatore che, posto in cascata ad un sistema avente funzione di trasferimento $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, genera, considerato il sistema complessivo in retroazione, un dato modello di riferimento o funzione di trasferimento campione $G_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)}$ scelto in base alle specifiche imposte.

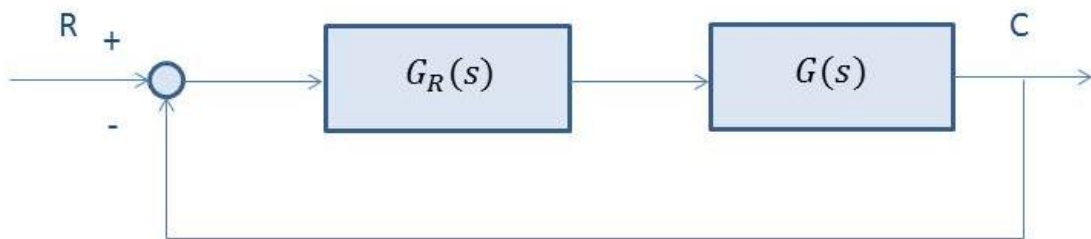


Figura 22: Schema di riferimento per la sintesi diretta

Si ha che:

$$G_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)} = \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)}$$

da cui,

$$\begin{aligned} G_0(s)[1 + G_R(s)G(s)] &= G_R(s)G(s) \\ \Rightarrow G_R(s)G(s)[1 - G_0(s)] &= G_0(s) \end{aligned}$$

ed infine,

$$G_R(s) = \frac{G_0(s)}{1 - G_0(s)} \frac{1}{G(s)}$$

con:

$$G_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)}$$

e

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

La funzione di trasferimento del regolatore si ricava direttamente a partire dalla funzione di trasferimento desiderata per il sistema complessivo e di quella del sistema controllato.

Si prende ora in esame il caso specifico di sintesi diretta di regolatori per sistemi con ritardo finito.

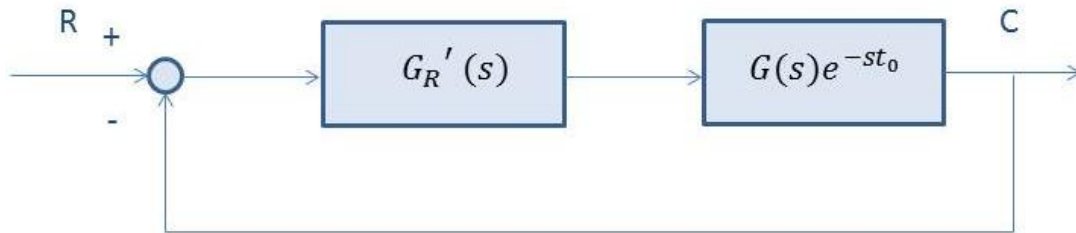


Figura 23: Schema di riferimento per la sintesi diretta con ritardo finito

Il plant ha come funzione di trasferimento:

$$G'(s) = G(s)e^{-st_0} = \frac{P(s)}{Q(s)}e^{-st_0}$$

Si assume un modello di riferimento con lo stesso ritardo che caratterizza il plant:

$$G'_0(s) = \frac{P_0(s)}{Q_0(s)}e^{-st_0} = \frac{G'_R(s)G'(s)}{1 + G'_R(s)G'(s)}$$

Quindi, si ricava la funzione di trasferimento del regolatore $G'_R(s)$:

$$\begin{aligned} G'_0(s)[1 + G'_R(s)G'(s)] &= G'_R(s)G'(s) \\ \Rightarrow G'_R(s)G'(s)[1 - G'_0(s)] &= G'_0(s) \end{aligned}$$

ed infine

$$G'_R(s) = \frac{G'_0(s)}{1 - G'_0(s)} \frac{1}{G'(s)} = \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)e^{-st_0}} \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Il regolatore $G'_R(s)$ si può progettare prescindendo dal ritardo in base al seguente schema (predittore di Smith):

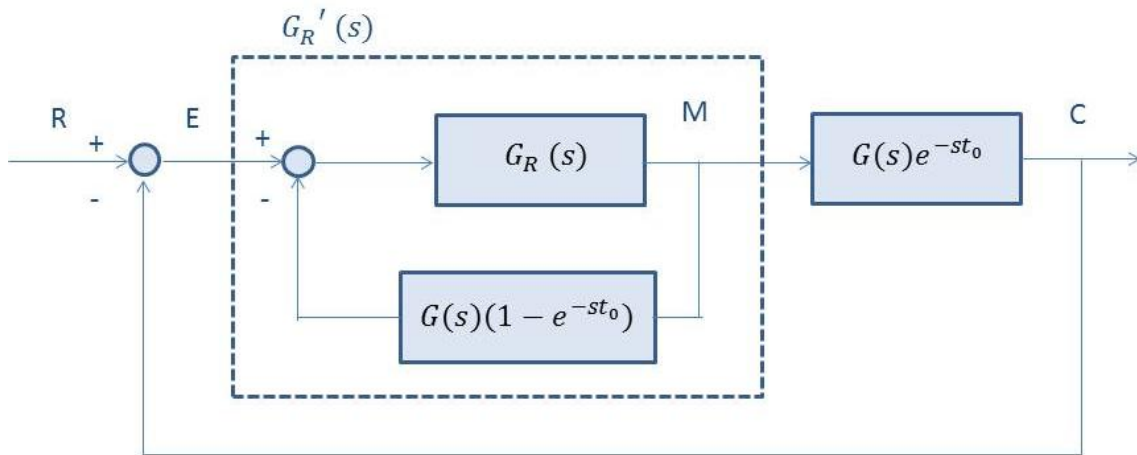


Figura 24: Realizzazione del regolatore per un sistema con ritardo finito

Risulta infatti

$$G'_R(s) = \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)G(s)(1 - e^{-st_0})} = \frac{P_0(s)}{[Q_0(s) - P_0(s)]G(s) + P_0(s)G(s)[1 - e^{-st_0}]}$$

$$= \frac{P_0(s)}{Q_0(s) - P_0(s)e^{-st_0}} \frac{1}{G(s)}$$

Sostituendo a $G(s)$ il rapporto $\frac{P(s)}{Q(s)}$ si trova l'espressione del regolatore $G'_R(s)$ precedentemente ricavata.

Riconducendo l'analisi al caso specifico di regolatore del plant dell'engine, trascurando in prima approssimazione la dinamica dello stepper motor (scelta che troverà una giustificazione nel capitolo successivo inerente all'applicazione delle tecniche progettuali) si ha:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{k_e}{1 + \tau s}$$

$$G'(s) = G(s)e^{-st_0} = \frac{k_e}{1 + \tau s} e^{-st_0}$$

$$G'_0(s) = G_0(s)e^{-st_0} = \frac{G_R(s)G(s)}{1 + G_R(s)G(s)} e^{-st_0} = \frac{G_R(s) \frac{k_e}{1 + \tau s}}{1 + G_R(s) \frac{k_e}{1 + \tau s}} e^{-st_0} = \frac{G_R(s)k_e}{1 + \tau s + G_R(s)k_e} e^{-st_0}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow G_0'(s)[1 + \tau s + G_R(s)k_e] = G_R(s)k_e e^{-st_0} \\ &\Rightarrow G_R(s)[G_0'(s)k_e - k_e e^{-st_0}] = -G_0'(s) - G_0'(s)\tau s \\ &\Rightarrow G_R(s) = \frac{G_0'(s)[1 + \tau s]}{k_e[e^{-st_0} - G_0'(s)]} = \frac{G_0'(s)}{e^{-st_0} - G_0'(s)} \frac{1}{G(s)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G_R'(s) &= \frac{G_R(s)}{1 + G_R(s)G(s)(1 - e^{-st_0})} = \frac{\frac{G_0'(s)}{e^{-st_0} - G_0'(s)} \frac{1}{G(s)}}{1 + \frac{G_0'(s)}{e^{-st_0} - G_0'(s)} \frac{1}{G(s)} G(s)(1 - e^{-st_0})} \\ &= \frac{G_0'(s)}{1 - G_0'(s)G(s)e^{-st_0}} = \frac{G_0'(s)}{1 - G_0'(s)G'(s)} \end{aligned}$$

Per determinare la funzione di trasferimento del regolatore relativo al plant con ritardo, è necessario conoscere il modello di riferimento $G_0(s)$ da cui $G_0'(s) = G_0(s)e^{-st_0}$.

Come funzione di trasferimento per il modello di riferimento si impiega quella del sistema elementare del secondo ordine:

$$G_0(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}$$

dove k_0 rappresenta il guadagno statico del sistema (si assume $k_0 = 1$ se si vuole imporre un regolatore di tipo 1), i parametri δ e ω_n sono invece determinati in base ai dati di specifica (δ è legato alla massima sovraelongazione nella risposta al gradino, ω_n al tempo di assestamento).

Si ricava dunque

$$G_R'(s) = \frac{\frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} e^{-st_0}}{1 - \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2} e^{-st_0}} \frac{1}{\frac{k_e}{1 + \tau s}} = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau s}{k_e}$$

Come si dimostra di seguito, il modello di riferimento è stato scelto al fine di ottenere un comportamento a regime soddisfacente in relazione al segnale d'ingresso del sistema.

1.2.2.2 Analisi del comportamento a regime

Analogamente a quanto fatto per lo stepper motor, si studia l'andamento dell'errore in risposta ai segnali tipici del sistema complessivo:

$$G_{TOT} = \frac{G_{aTOT}(s)}{1 + G_{aTOT}(s)}$$

con

$$\begin{aligned} G_{aTOT}(s) &= G_R'(s) \frac{G_{a stepper}(s)}{1 + G_{a stepper}(s)} G'(s) \\ &= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2} e^{-st_0} \frac{1 + \tau s}{k_e} \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i} \frac{k_e}{1 + \tau s} e^{-st_0} \\ &= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2} e^{-st_0} \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i} e^{-st_0} \end{aligned}$$

$$e(t) = n_{rif}(t) - n(t)$$

$$e(s) = n_{rif}(s) - n(s)$$

$$\frac{e(s)}{n_{rif}(s)} = 1 - \frac{n(s)}{n_{rif}(s)} = 1 - \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} \Rightarrow e(s) = \frac{1}{1 + G_a(s)} n_{rif}(s)$$

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Rightarrow n_{rif}(t) = n(t) \text{ per } t \rightarrow \infty \text{ (errore a regime)}$$

E per il teorema del valore finale (vedere Appendice C), $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$.

Ovviamente,

$$G_a(s) = G_{aTOT}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2} e^{-st_0} \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i} e^{-st_0} \text{ con } k_0 = 1.$$

Considerato però che l'errore a regime nella risposta al gradino e alla rampa dello stepper

motor è nullo, nello studio degli errori della funzione $G_{TOT} = \frac{G_{aTOT}(s)}{1+G_{aTOT}(s)}$ relativi a questi due segnali, non si considera la funzione di trasferimento totale del loop interno, cioè si considera

$$G_{aTOT}(s) = G_{aEngine}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} e^{-st_0}.$$

Questa operazione è lecita in quanto, si può verificare che, con e senza la funzione di trasferimento del loop interno, il risultato ottenuto è lo stesso: tra i parametri da cui dipende il valore finale dell'errore non compaiono, in entrambi i casi, quelli che caratterizzano lo stepper motor (vedere Appendice E).

1) Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} e^{-st_0}} \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} = \frac{\omega_n^2 - k_0 \omega_n^2}{\omega_n^2} = \frac{\omega_n^2 - \omega_n^2}{\omega_n^2} \\ &= 0 \qquad \qquad \qquad \text{ERRORE NULLO} \end{aligned}$$

2) Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} e^{-st_0}} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \text{con de l'Hôpital } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} t_0}{3s^3 + 4\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0) + k_0 \omega_n^2 (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0)} \\ &= \frac{2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 t_0}{\omega_n^2} = \frac{2\delta \omega_n + \omega_n^2 t_0}{\omega_n^2} \qquad \qquad \qquad \text{ERRORE FINITO} \end{aligned}$$

Per il teorema di de l'Hôpital vedere Appendice D.

3) Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^3}$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i}} \frac{1}{s^3}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i)}{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i) + k_0 \omega_n^2 k_s k_i (1 + T_i s) e^{-st_0}} \frac{1}{s^2}$$

$$= \left[\frac{k_s k_i (\omega_n^2 - k_0 \omega_n^2)}{0} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \text{con de l'Hôpital}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2s + 2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i) + (s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(2s + k_s k_i T_i) + k_0 \omega_n^2 k_s k_i [(3T_i s^2 + 2s)e^{-st_0} - (T_i s^3 + s^2)e^{-st_0}]}{[4s^3 + 6\delta \omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s - k_0 \omega_n^2 (2s e^{-st_0} - s^2 e^{-st_0 t_0})](s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i) + (s^4 + 2\delta \omega_n s^3 + \omega_n^2 s^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} s^2)(2s + k_s k_i T_i) + k_0 \omega_n^2 k_s k_i [(3T_i s^2 + 2s)e^{-st_0} - (T_i s^3 + s^2)e^{-st_0 t_0}]}$$

= ∞

ERRORE INFINITO

Per il teorema di de l'Hôpital vedere appendice D. Si giunge allo stesso risultato non considerando, nella funzione di guadagno d'anello del sistema complessivo, la funzione di trasferimento del loop interno $G_{TOT\ stepper} = \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i}$ (vedere appendice E).

1.2.2.2.1 Analisi del segnale d'ingresso

La variabile n costituisce il segnale d'ingresso che può assumere l'andamento nel tempo caratteristico dei segnali tipici: gradino, rampa, parabola.

$$u(t) = n_{rif} = f(\omega) \text{ [RPM]}$$

$$a = \frac{d\omega}{dt} \left[\frac{rad}{s^2} \right]$$

$$\theta(t) = \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau + \theta(t_0)$$

La dinamica del motore, al contrario di quella dello stepper motor, è piuttosto lenta, quindi le variazioni delle grandezze si verificano in un tempo maggiore. In particolare, la variazione di n , introdotta con lo spostamento della manetta, avviene in un certo tempo che rende sufficiente l'applicazione in ingresso di un segnale a gradino e l'annullamento soltanto dell'errore di posizione. La dinamica dello stepper motor, invece, non permette di considerare soltanto l'errore di posizione che, proprio a causa della dinamica veloce, si discosta in maniera considerevole dall'errore di

velocità.

Infatti, ipotizzare che il segnale di riferimento n_{rif} sia una variabile molto lenta, per cui $\frac{dn_{rif}}{dt} \cong 0$, significa ipotizzare un segnale di ingresso costante (a gradino): ciò implica che si accetta l'errore finito per un ingresso a rampa che risulta, però, essere molto piccolo, considerato che $n_{rif} = \frac{u}{s^2}$ con $u \cong 0$.

Considerando, quindi, un ingresso a gradino, con il modello di riferimento scelto, si ottiene il voluto errore nullo.

1.2.2.3 Analisi della stabilità

Per comprendere come influisce un ritardo finito sulla stabilità di un sistema chiuso in retroazione si analizzano di seguito, a modello esemplificativo, i diagrammi di Nyquist del plant engine senza e con ritardo.

- *Engine senza ritardo*

La forma del plant che non considera l'effetto del ritardo finito è la seguente: $G_P(s) = \frac{k_e}{1+\tau s}$, con valori di k_e e τ dipendenti dalle caratteristiche del motore e pari a $k_e = 2000$ e $\tau = \tau_e = 1$ (si illustrerà in seguito il procedimento seguito per ricavare tali valori).

Per tracciare il diagramma di Nyquist si ricava la funzione di risposta armonica $G_P(j\omega) = \frac{k_e}{1+\tau j\omega}$ e se ne calcola il modulo e l'argomento:

$$|G_P(j\omega)| = \frac{k_e}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}$$

$$\arg\{G_P(j\omega)\} = -\tan^{-1}(\tau\omega)$$

Si analizza l'andamento di modulo e argomento per ω variabile nell'intervallo $[0; \infty)$:

$$\rightarrow \omega = 0 \Rightarrow |G_P(j\omega)| = k_e, \arg\{G_P(j\omega)\} = 0$$

$$\rightarrow \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G_P(j\omega)| = 0, \arg\{G_P(j\omega)\} = -\frac{\pi}{2}$$

Il diagramma di Nyquist completo è il seguente:

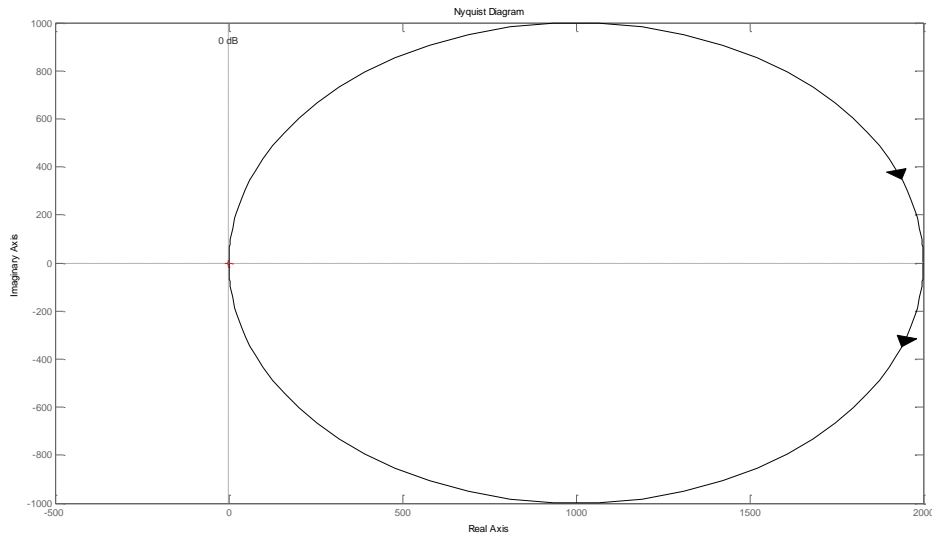


Figura 25: Nyquist senza ritardo

- *Engine con ritardo*

La forma del plant che considera l'effetto del ritardo finito introduce il termine esponenziale e^{-st_0} per una funzione di trasferimento complessiva uguale a:

$$G_P(s) = \frac{k_e}{1 + \tau s} e^{-st_0}$$

Sperimentalmente si determina che valori tipici del ritardo introdotto da questo tipo di sistemi è dell'ordine di $t_0 = 0.1$ s (Koziol J.S. Jr. (1971), *Simulation Model for the Piper PA-30 Light Maneuverable Aircraft in the Final Approach*, technical report N.A.S.A. DOT-TSC-FAA-71-11).

È conveniente l'utilizzo di un'approssimazione razionale della funzione e^{-st_0} per poter applicare le tecniche usuali nello studio di un sistema. A tal fine si usano le approssimazioni di Padè: una funzione razionale $\frac{P(s)}{Q(s)}$, in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi di gradi generici p e q , è un'approssimante di Padè della funzione $f(s)$, sviluppabile in serie di potenze, se la serie di potenze di s ottenuta dividendo i polinomi per potenze decrescenti ha i primi $p + q + 1$ termini uguali a quelli dello sviluppo in serie di Maclaurin di $f(s)$.

Scelta delle tecniche di controllo

Nel caso della funzione esponenziale

$$f(s) = e^{-s} = 1 - s + \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3!} + \dots$$

si verifica che,

$$\text{posto } P(s) = b_p s^p + b_{p-1} s^{p-1} + \dots + b_0, Q(s) = a_q s^q + a_{q-1} s^{q-1} + \dots + a_0,$$

i coefficienti delle approssimanti di Padè sono legati ai valori di p e q dalle relazioni:

$$b_k = \frac{(p+q-k)! p!}{(p+q)! k! (p-k)!} (-1)^k (k = 0, \dots, p),$$

$$a_k = \frac{(p+q-k)! q!}{(p+q)! k! (q-k)!} (k = 0, \dots, q).$$

In particolare, per $p = q = 3$ si ottiene

$$G_{3,3}(s) = \frac{1 - \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 - \frac{1}{120}s^3}{1 + \frac{1}{2}s + \frac{1}{10}s^2 + \frac{1}{120}s^3} = \frac{120 - 60s + 12s^2 - s^3}{120 + 60s + 12s^2 + s^3}$$

e, quindi,

$$G_P(s) = \frac{k_e}{1 + \tau s} \frac{120 - 60s + 12s^2 - s^3}{120 + 60s + 12s^2 + s^3}$$

Le approssimanti di e^{-st_0} si ottengono sostituendo st_0 ad s ed aggiungono, al plant considerato senza ritardo, un numero di zeri pari all'ordine dello sviluppo in serie al quale ci si ferma. In particolare, per $p = q = 3$, si ottengono due zeri complessi coniugati a parte reale positiva e uno zero reale positivo che rendono il sistema a fase non minima. Ciò significa che al variare del parametro k_1 dell'equazione caratteristica $1+k_1G_1(s)$ con $k_1G_1(s) = H(s)G_P(s)$ del sistema in retroazione unitaria $G_T(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_P(s)}$, la curva nel piano complesso descritta dalle radici si trova, in parte, nel semipiano positivo. La stabilità risulta quindi condizionata dal valore che assume la costante di guadagno del plant.

Questo si evince anche dal diagramma di Nyquist ottenuto implementando in Matlab la funzione di trasferimento $G_P(s) = \frac{k_e}{1+\tau s} \frac{120-60s+12s^2-s^3}{120+60s+12s^2+s^3}$.

Scelta delle tecniche di controllo

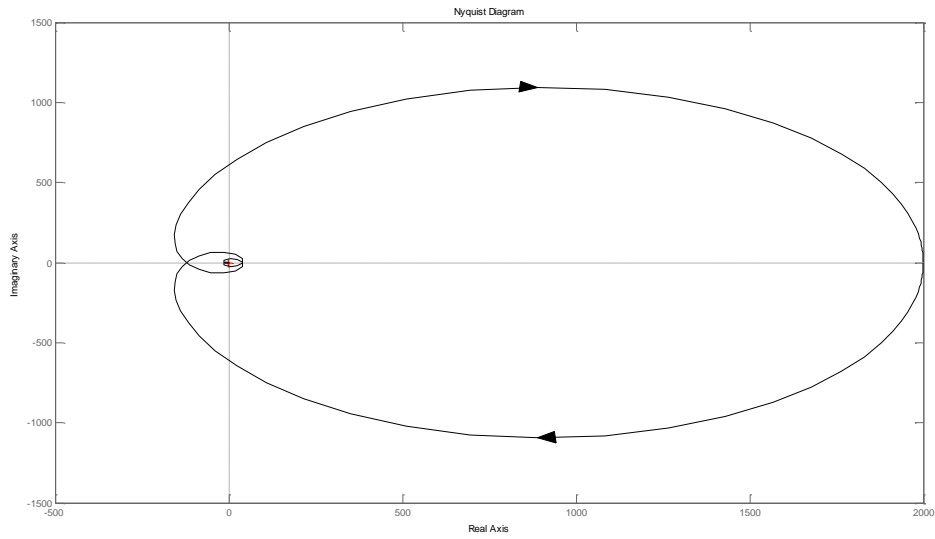


Figura 26: Nyquist con ritardo

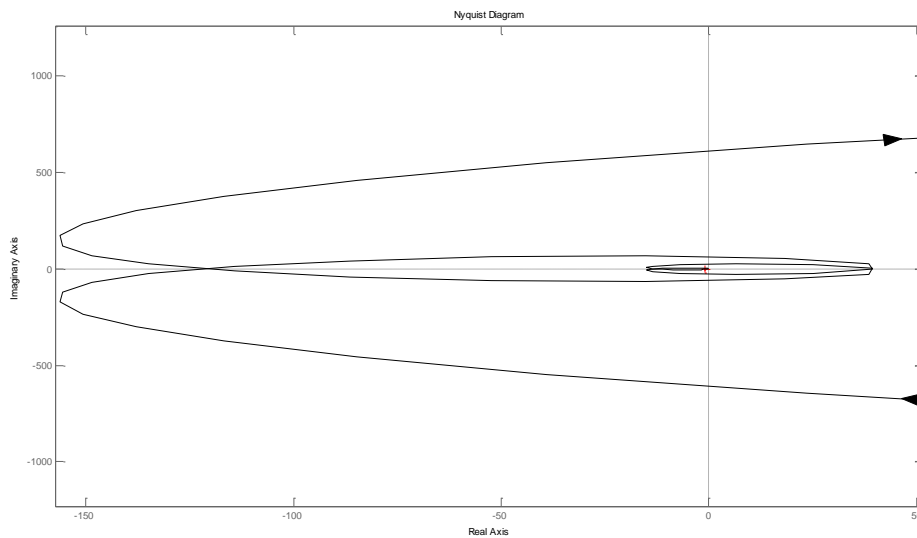


Figura 27: Particolare Nyquist con ritardo

Dal confronto dei due diagrammi, del plant senza e con ritardo, si nota come la presenza di un ritardo finito introduca modifiche di notevole significato: ogni vettore viene sfasato in ritardo dell'angolo ωt_0 ($e^{-j\omega t_0} = \rho e^{j\varphi}$ con modulo pari a $\rho = 1$ e argomento $\varphi = -\omega t_0$) e il diagramma assume un andamento a spirale, tanto più accentuato quanto più elevato è il valore della costante di guadagno del plant, che, facendo avvicinare il diagramma al punto critico, conduce all'instabilità del sistema.

1.3. Applicazione delle tecniche di controllo

I dati di specifica sui quali si basa il progetto di un sistema di controllo riguardano la precisione, la stabilità, la prontezza e la sensibilità ai disturbi.

I dati che riguardano la precisione sono gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di determinati disturbi e determinate variazioni di parametri; i dati che riguardano la stabilità, intesa nel senso lato di “comportamento dinamico soddisfacente”, sono la massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti; i dati che riguardano la prontezza sono il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante; i dati che riguardano la sensibilità ai disturbi sono i valori delle funzioni di sensibilità a diversi tipi di disturbi e a diverse frequenze.

Per la determinazione dei parametri k_i , T_i e δ , ω_n del regolatore, rispettivamente, dello stepper motor e dell'engine, si sono valutate le specifiche sulla stabilità, prendendo in considerazione la massima sovraelongazione in risposta ad un gradino unitario, e sulla prontezza, esaminando il tempo di assestamento.

La massima sovraelongazione viene indicata con S ed è la differenza tra il valore massimo raggiunto dall'uscita e il valore finale di regime; normalmente è fornita in % del valore finale.

Il tempo di assestamento si indica con T_a ed è il tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale.

Imporre una condizione sulla massima sovraelongazione equivale a limitare la posizione dei poli in un dato semipiano delimitato da due semirette mentre il vincolo sul tempo di assestamento equivale a limitare la posizione dei poli a sinistra di una retta verticale. Infatti, se il valore della massima sovraelongazione non deve superare un certo valore assegnato, i poli del sistema devono essere compresi nel semipiano individuato dalle rette che formano con l'asse reale un angolo $\alpha = \cos^{-1} \delta$ (essendo $\delta = \cos \alpha$), con δ valore del coefficiente di smorzamento che garantisce il valore di sovraelongazione richiesto; invece, poiché il tempo di assestamento non superi un valore assegnato T_a , dovrà verificarsi la condizione per la quale $\delta \omega_n \geq \frac{3}{T_a}$ (essendo $T_a = \frac{3}{\delta \omega_n}$), con parte reale del polo $\sigma = -\delta \omega_n$ e quindi $\sigma \leq \frac{3}{T_a}$ che equivale a limitare la posizione dei poli a sinistra della retta verticale $\frac{3}{T_a}$.

Nello sviluppo del progetto del sistema di controllo complessivo, l'applicazione delle

tecniche di controllo scelte avviene separatamente per il loop esterno e per quello interno. È lecito condurre lo studio separato per i due loop in quanto, la dinamica dello stepper motor, essendo nella realtà molto veloce, può, in prima approssimazione, essere trascurata. Per farlo, si progetta prima il regolatore del loop esterno relativo al motore dell'aereo trascurando il loop interno, ponendo cioè

$$G_{TOT_{stepper}}(s) = \frac{G_{a_{stepper}}(s)}{1+G_{a_{stepper}}(s)} = 1;$$
 in seguito, dopo aver calcolato i poli della funzione di

trasferimento totale del loop esterno $G_{TOT_{engine}}(s) = \frac{G_{a_{engine}}(s)}{1+G_{a_{engine}}(s)}$, si determina la dinamica più veloce del sistema engine considerando il polo con parte reale negativa più grande in modulo.

La fase progettuale si conclude infine imponendo, per il loop interno, che la parte reale del polo più lento del sistema stepper motor in retroazione, cioè del polo con parte reale negativa più piccola in modulo, sia almeno dieci volte il valore della parte reale del polo più veloce del loop esterno.

In conclusione, analizzando i diagrammi di Nyquist, di Bode, il luogo delle radici e la simulazione della risposta al gradino del sistema con e senza loop interno, si verifica che, con la tecnica progettuale adottata, lo stepper motor non influisce sulla stabilità e sul comportamento dinamico del sistema di controllo complessivo.

1.3.1. Loop esterno: engine

Si vuole progettare il regolatore dell'engine in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- $S = 10\%$ (massima sovraelongazione nella risposta al gradino uguale al 10%)
- $T_a = 1 \text{ sec}$ (tempo di assestamento uguale a 1 sec)

La funzione di trasferimento totale del sistema in retroazione unitaria, come precedentemente illustrato, è data da:

$$G'_0(s) = G_0(s)e^{-st_0}$$

con

$$G_0(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}$$
 funzione di trasferimento del modello di riferimento scelto.

Per determinare la funzione di trasferimento del sistema engine con ritardo in retroazione, $G'_0(s)$, è sufficiente calcolare i parametri della funzione di trasferimento $G_0(s)$, del sistema engine

in retroazione considerato senza ritardo.

La risposta al gradino unitario della $G_0(s)$ è data da:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(G_0(s) \frac{1}{s} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k_0 \omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)} \right]$$

e, per il tipico sistema del secondo ordine, considerando $k_0 = 1$, è fornita dalla seguente relazione:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi),$$

in cui è:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} = \sin^{-1} \sqrt{1 - \delta^2} = \cos^{-1} \delta$$

Specifica sulla massima sovraelongazione

Per determinare la sovraelongazione, è prima di tutto necessario determinare il valore massimo della funzione $y(t)$ calcolandone la derivata rispetto al tempo e ponendola uguale a zero.

Dall'espressione $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ si ottiene:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d(1 - A e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} &= A \delta \omega_n e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) - A e^{-\delta \omega_n t} \cos(\omega t + \varphi) \omega \\ &\Rightarrow \delta \omega_n \sin(\omega t + \varphi) - \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}$$

da cui

$$\omega t + \varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} + \pi \Rightarrow \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} t + \varphi = \varphi + n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

e quindi

$$t = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

che sostituito nell'espressione di $y(t)$ restituisce:

$$y(t) = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) = 1 - \frac{e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(n\pi + \varphi) = 1 - (-1)^n e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

È ora possibile calcolare la sovraelongazione come differenza tra y_M , valore massimo di $y(t)$ pari a $y_M = 1 + e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$, e il valore finale dell'uscita:

$$S(\%) = 100(y_M - 1) = 100e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 10\% \text{ (da specifica)}$$

$$\begin{aligned} 0,1 &= e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \Rightarrow \ln 0,1 = \frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\delta^2} \ln 0,1 = -\pi\delta \Rightarrow (1-\delta^2) \ln^2 0,1 = \pi^2 \delta^2 \\ &\Rightarrow \delta^2 (\ln^2 0,1 + \pi^2) = \ln^2 0,1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\ln^2 0,1}{\ln^2 0,1 + \pi^2}} = 0,5911$$

Si ottiene quindi $\delta = 0.5911$.

Inoltre, si riporta il legame tra il coefficiente di smorzamento δ e la massima

sovraelongazione S , espressa in percentuale:

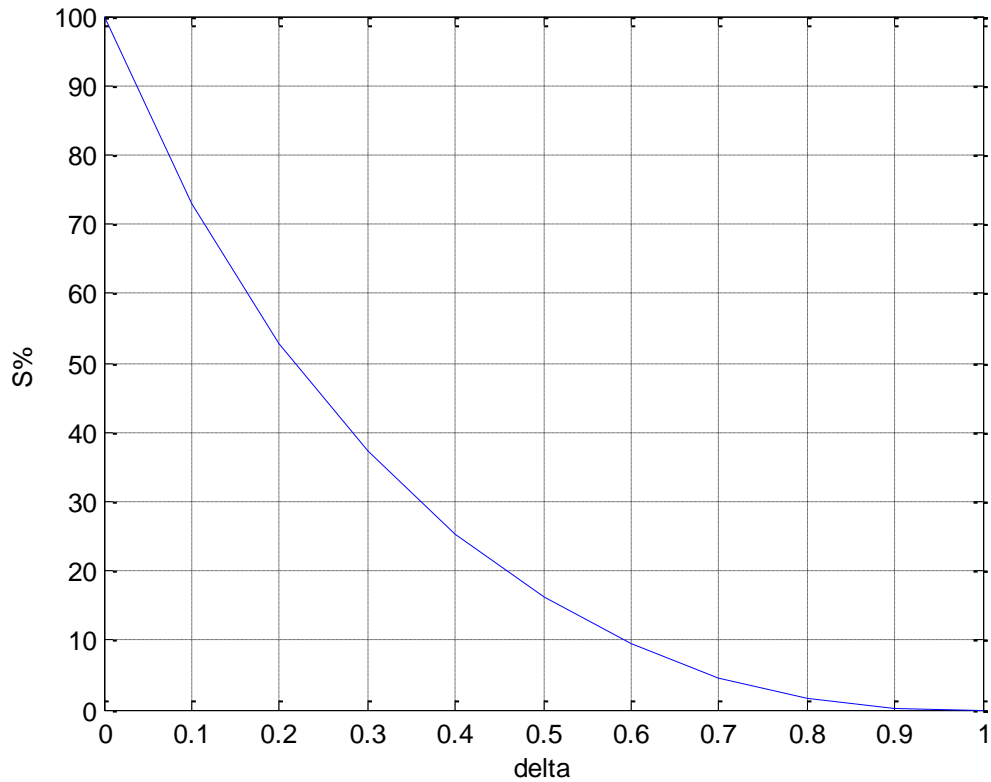


Figura 28: Legame tra il coefficiente di smorzamento e la massima sovraelongazione

Specifica sul tempo di assestamento

La specifica sul tempo di assestamento è soddisfatta quando è verificata la relazione seguente:

$$1 - e^{-\delta\omega_n T_a} = 0,95 \Rightarrow e^{-\delta\omega_n T_a} = 0.05 \Rightarrow -\delta\omega_n T_a = \ln 0.05 \Rightarrow$$

$$T_a = -\frac{\ln 0.05}{\delta\omega_n}$$

quindi

$$\omega_n = -\frac{\ln 0.05}{\delta T_a}$$

da cui, ponendo $T_a = 1 \text{ sec}$, come da specifica, si ricava:

$$\omega_n = 5.068 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Sostituendo i valori di δ e ω_n nella funzione di trasferimento del modello di riferimento

$$G_0(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}$$

si ottiene:

$$G_0(s) = \frac{25.68}{s^2 + 6s + 25.68}$$

e quindi

$$G'_0(s) = \frac{25.68}{s^2 + 6s + 25.68} e^{-st_0}$$

con un valore del tempo di ritardo t_0 pari a 0.1 sec .

È ora possibile calcolare la funzione di trasferimento $G_R'(s)$ del regolatore del loop esterno con ritardo finito:

$$G_R'(s) = \frac{G'_0(s)}{1 - G'_0(s)} \frac{1}{G'(s)} = \frac{\frac{25.68}{s^2+6s+25.68} e^{-st_0}}{1 - \frac{25.68}{s^2+6s+25.68} e^{-st_0}} \frac{1 + \tau s}{k e^{-st_0}} = \frac{25.68}{s^2 + 6s + 25.68 - 25.68 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau s}{k}$$

I parametri che caratterizzano il plant dell'engine sono:

$$\tau = \tau_e = 1 \text{ sec}$$

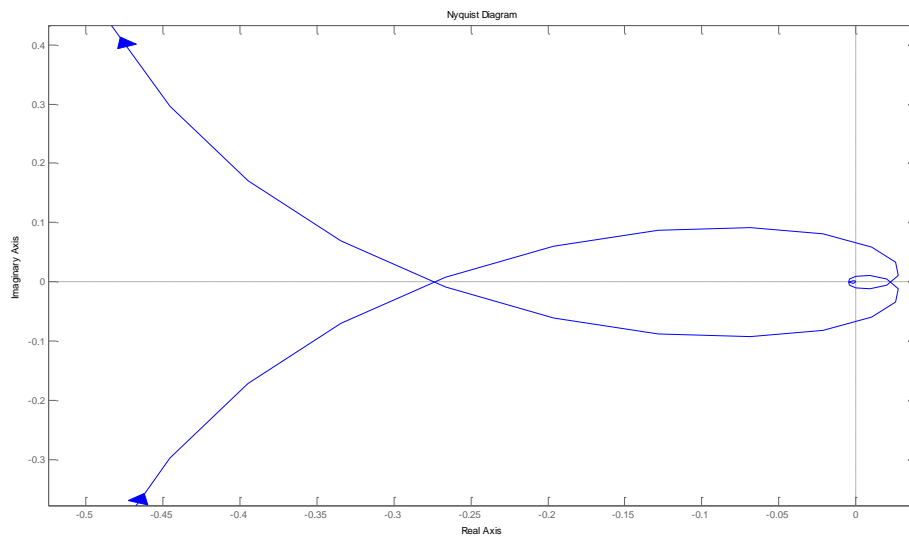
$$k = k_e = \frac{C_0}{M}$$

dove C_0 è la risposta del sistema quando si applica in ingresso un gradino di ampiezza M_0 : in particolare, si assume $C_0 = 2700 \text{ RPM}$, relativo al valore massimo di coppia, in corrispondenza del quale la farfalla è tutta aperta con posizione angolare $M_0 = 1.35 \text{ rad}$ (77.35 deg).

La funzione guadagno di anello del loop esterno è uguale a:

$$\begin{aligned}
 G_{aEngine}(s) &= G_R'(s) \frac{k}{1 + \tau s} e^{-st_0} \\
 &= \frac{25.68}{s^2 + 6s + 25.68 - 25.68e^{-st_0}} \frac{1 + \tau s}{k} \frac{k}{1 + \tau s} e^{-st_0} \\
 &= \frac{25.68e^{-st_0}}{s^2 + 6s + 25.68 - 25.68e^{-st_0}}
 \end{aligned}$$

da cui, con un'implementazione in Matlab, si ricavano il luogo delle radici, i diagrammi di Bode e Nyquist.



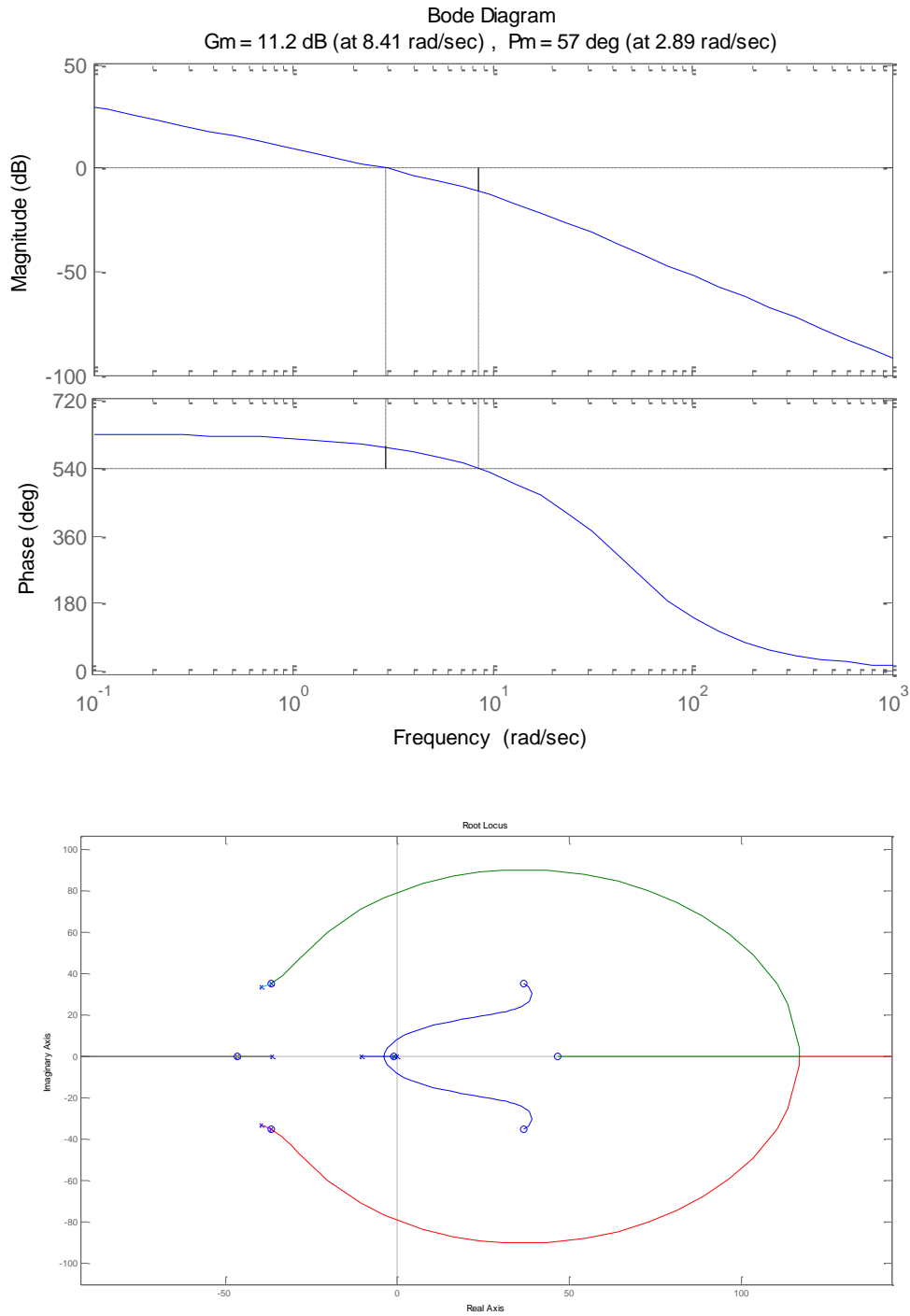


Figura 29: Nyquist, Bode, Rlocus del loop esterno

Come risulta dall'analisi del diagramma di Nyquist il sistema chiuso in retroazione è asintoticamente stabile, non circondando nemmeno una volta il punto critico $-1 + j0$.

Dai diagrammi di Bode è possibile ricavare il valore del margine di ampiezza ($M_A = 11.2 \text{ dB}$) e del margine di fase ($M_F = 57 \text{ deg}$), che non si discostano dai valori tipici per un buon comportamento di un sistema in retroazione.

Dal luogo delle radici, si evince, però, che, per la presenza del ritardo, i rami si spostano verso il semipiano positivo: le approssimanti di Padè del terzo ordine introducono, infatti, tre zeri, dei quali due coniugati complessi con parte reale positiva e uno reale positivo:

$$z_1 = 36.7781 + 35.0876i$$

$$z_2 = 36.7781 - 35.0876i$$

$$z_3 = 46.4437$$

In particolare, l'approssimante introduce tanti più zeri al sistema quanto più elevato è il suo ordine (numero degli zeri uguale all'ordine): si avranno coppie di zeri coniugati complessi se l'ordine è pari, se dispari, invece, agli zeri complessi coniugati si aggiunge uno zero reale positivo.

Essendo, quindi, il sistema a fase non minima per la presenza di zeri positivi, il concetto di margine di fase, come criterio per la valutazione della bontà di progetto, non è applicabile.

La stabilità del sistema risulta condizionata: per un particolare valore di k_1 dell'equazione

caratteristica $1 + k_1 G_1(s)$ con $G_1(s) = \frac{25.68e^{-st_0}}{s^2 + 6s + 25.68 - 25.68e^{-st_0}}$,

si ha il passaggio dei poli da stabili (semipiano negativo) a instabili (semipiano positivo). In particolare, affinché il sistema sia stabile $k_1 < 3.64$. Ponendo $k_1 = 1$, si trovano le radici dell'equazione caratteristica $1 + G_1(s)$ che corrispondono ai poli della funzione di trasferimento

totale del loop esterno $G'_0(s) = \frac{25.68}{s^2 + 6s + 25.68} e^{-st_0}$. Essi sono:

$$p_1 = -36.7781 + 35.0876i$$

$$p_2 = -36.7781 - 35.0876i$$

$$p_3 = -46.4437$$

$$p_4 = -3 + 4.084i$$

$$p_5 = -3 - 4.084i$$

I poli del sistema in retroazione, tutti a parte reale negativa, sono quelli introdotti dall'approssimante di Padè (p_1, p_2, p_3) e quelli introdotti da $G_0(s)$ (p_4 e p_5), funzione di trasferimento complessiva del loop esterno considerata senza ritardo.

Aumentando l'ordine dell'approssimante, aumenta il numero di poli complessi coniugati, che si dispongono sempre più lontani dall'origine (poli sempre più veloci) e ai quali corrispondono modi oscillatori il cui intervento nella dinamica complessiva del sistema non è caratterizzante.

Implementando il loop esterno in Simulink, con un segnale di ingresso a gradino che fa variare il numero di giri del motore da 1200 RPM a 2000 RPM, è possibile visualizzare, effettuando uno zoom, come le frequenze caratteristiche dell'approssimante di Padè non siano rappresentative nella dinamica complessiva del sistema:

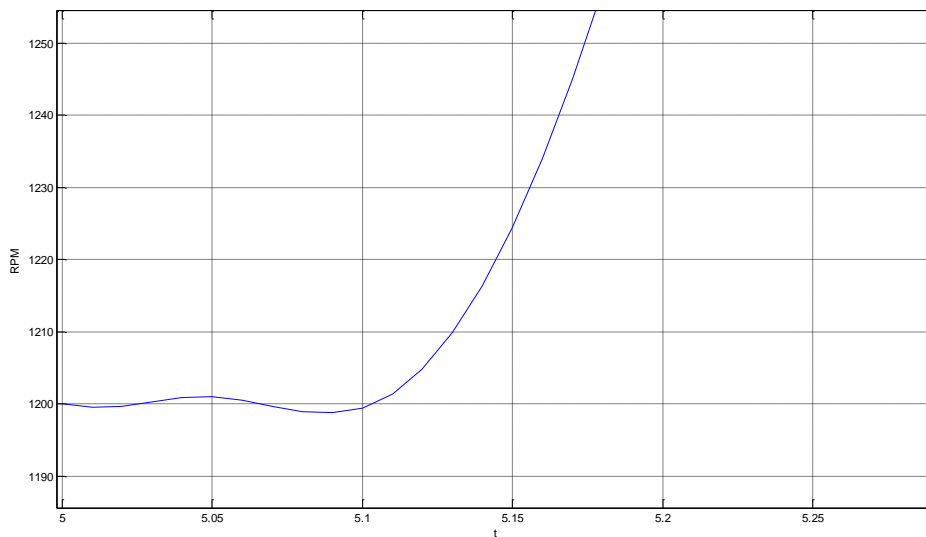


Figura 30: Poli dell'approssimante di Padè, ordine 3

I poli dell'approssimante del ritardo finito, essendo molto veloci in relazione ai poli del sistema, danno luogo ad oscillazioni che si esauriscono in un tempo breve, come possibile verificare dal grafico riportato sopra. La frequenza di tali oscillazioni è tanto maggiore quanto maggiore è il grado dell'approssimante in quanto i poli introdotti, avendo parte reale sempre più grande in modulo, danno origine a dinamiche oscillatorie sempre più veloci e quindi sempre più trascurabili nella dinamica complessiva.

In conclusione, si riporta la risposta del sistema al gradino unitario e si verifica che le specifiche siano effettivamente rispettate ($S\% = 10\%$, $T_a = 1 \text{ sec}$).

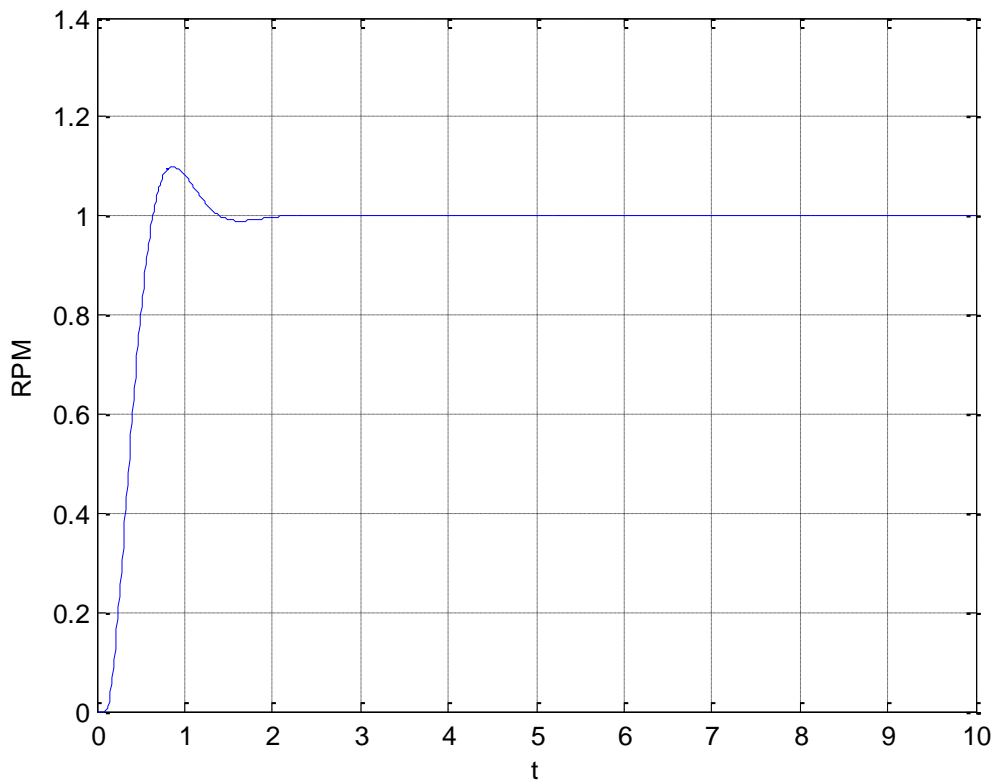


Figura 31: Risposta del sistema al gradino unitario

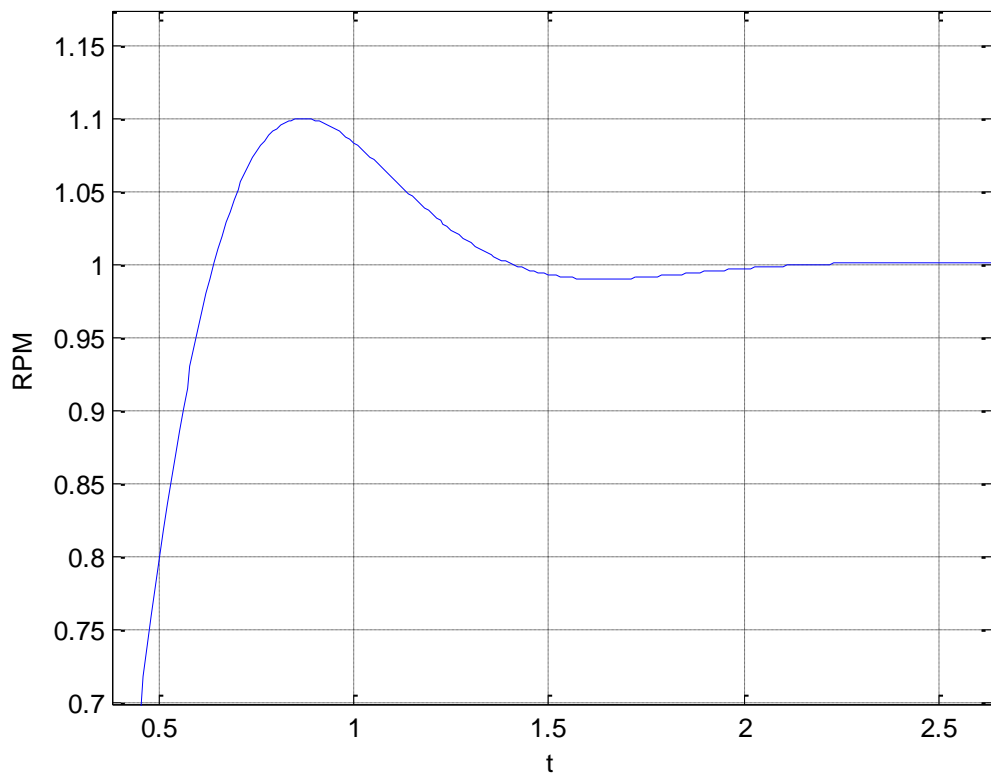


Figura 32: Sovraelongazione e tempo di assestamento

Le specifiche sulla sovraelongazione e sul tempo di assestamento sono rispettate.

1.3.2. Loop interno:stepper motor

Si è scelto di progettare il loop interno in funzione di quello esterno, per rendere la dinamica dello stepper motor trascurabile rispetto a quella dell'engine, così come effettivamente si verifica nella realtà.

Per realizzare questa condizione, si impone che la parte reale del polo più lento del sistema stepper motor in retroazione, cioè del polo con parte reale negativa più piccola in modulo, sia almeno dieci volte il valore della parte reale del polo più veloce del loop esterno.

È importante sottolineare che la frequenza rispetto alla quale si progetta il loop interno non deve essere quella caratteristica delle oscillazioni introdotte dall'approssimante di Padè: come già dimostrato, infatti, i poli introdotti per la presenza del ritardo finito non sono rappresentativi della dinamica del sistema.

Lo sono invece i poli complessi coniugati $p_4 = -3 + 4.084i$ e $p_5 = -3 - 4.084i$. La parte reale da considerare per il progetto del regolatore dello stepper motor è $\sigma = -3$ e, quindi, imponendo che la parte reale del polo del loop interno sia almeno dieci volte più grande di tale valore, si ottiene come prima specifica di progetto $\sigma = -30$, che equivale, come si mostrerà, a imporre un limite sul tempo di assestamento. L'altra specifica sulla quale si basa il progetto riguarda la sovraelongazione.

Quindi, si progetta il regolatore dello stepper motor in modo da soddisfare le seguenti specifiche:

- $S = 20\%$ (massima sovraelongazione nella risposta al gradino uguale al 20%)
- $\sigma = -30$ (parte reale del polo uguale a -30)

Il guadagno d'anello del sistema è uguale a:

$$G_a(s) = G_{a_{stepper}}(s) = G_R(s)G_P(s) = k_P \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) \frac{k_s}{s(1 + \tau s)} = \frac{k_P}{T_i} \frac{1 + T_i s}{s} \frac{k_s}{s(1 + \tau s)}$$

Ponendo $k_i = \frac{k_P}{T_i}$ e $\tau = 0$, per le considerazioni fatte in precedenza, si ottiene:

$$G_a(s) = \frac{k_i k_s (1 + T_i s)}{s^2} = \frac{k^* (1 + T_i s)}{s^2}$$

con $k^* = k_i k_s$.

La funzione di trasferimento totale del sistema in retroazione unitaria è data da:

$$G_{TOT_{stepper}} = \frac{G_{stepper}(s)}{1 + G_{stepper}(s)} = \frac{k^* (1 + T_i s)}{s^2 + k^* T_i s + k^*}$$

La risposta al gradino unitario della $G_{TOT_{stepper}}(s)$ è data da:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(G_{TOT_{stepper}}(s) \frac{1}{s} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k^* (1 + T_i s)}{s(s^2 + k^* T_i s + k^*)} \right]$$

Essendo nota l'antitrasformata di Laplace della risposta al gradino unitario per un sistema con due poli complessi, un polo reale e uno zero, si riconduce il caso preso in esame a quest'ultimo con un'opportuna assegnazione dei parametri. In particolare, data:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\omega_n^2 (1 + T s)}{s(1 + \tau s)(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)} \right] = 1 - A e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) + B e^{-\frac{t}{\tau}}$$

e ponendo

$$\omega_n^2 = k^*$$

$$T = T_i$$

$$\tau = 0$$

$$2\delta \omega_n = k^* T_i \Rightarrow \delta = \frac{k^* T_i}{2\omega_n} = \frac{\omega_n^2 T}{2\omega_n} = \frac{T}{2} \omega_n$$

si ricava

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(G_{TOT_{stepper}}(s) \frac{1}{s} \right) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k^* (1 + T_i s)}{s(s^2 + k^* T_i s + k^*)} \right] = 1 - A e^{-\delta \omega_n t} \sin(\omega t + \varphi)$$

che è proprio l'antitrasformata della risposta al gradino unitario per il sistema in retroazione unitaria di regolatore, driver e stepper motor.

I parametri A , ω , φ sono forniti dalle seguenti relazioni:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sqrt{\frac{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}}$$

$$B = \frac{\omega_n^2 \tau (T - \tau)}{1 - 2\delta\omega_n \tau + \omega_n^2 \tau^2}$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\varphi = \arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2}) + \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}) - \arg(1 - \delta\omega_n \tau + j\omega_n \tau\sqrt{1 - \delta^2})$$

Specializzando tali relazioni al caso in esame si ha che:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$B = 0$$

$$\omega = \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

$$\varphi = \arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2}) + \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2})$$

Specifica sulla massima sovraelongazione

Per determinare la sovraelongazione si ricerca il valore massimo della funzione $y(t)$

calcolandone la derivata rispetto al tempo e ponendola uguale a zero. Dall'espressione $\frac{dy(t)}{dt} = 0$, con $\tau = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{d(1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi))}{dt} = 0 \\ &= A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\omega t + \varphi) - Ae^{-\delta\omega_n t} \cos(\omega t + \varphi) \omega \\ &\Rightarrow \delta\omega_n \sin(\omega t + \varphi) - \omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\omega t + \varphi) = 0 \\ &\Rightarrow \tan(\omega t + \varphi) = \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta}\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\omega t + \varphi &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} + \pi \Rightarrow \\ \omega t &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} + \pi - \arg(\delta + j\sqrt{1 - \delta^2}) - \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}) \\ &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} + \pi - \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} - \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}) \\ &= \pi - \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2}) \\ &\Rightarrow \omega t = \pi - \arg(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T\sqrt{1 - \delta^2})\end{aligned}$$

che sostituito nell'espressione di $y(t)$ restituisce

$$y(t) = 1 - \frac{e^{\frac{-\delta\omega t}{\sqrt{1 - \delta^2}}}}{\sqrt{1 - \delta^2}} \sin(\omega t + \varphi)$$

È ora possibile calcolare la sovralongazione come differenza tra y_M , valore massimo di

$y(t)$ pari a $y_M = 1 + e^{\frac{-\delta\omega t}{\sqrt{1-\delta^2}}}$, e il valore finale dell'uscita:

$$S(\%) = 100(y_M - 1) = 100e^{\frac{-\delta\omega t}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 20\% \text{ (da specifica)}$$

$$0,2 = e^{\frac{-\delta\omega t}{\sqrt{1-\delta^2}}} \Rightarrow \ln 0.2 = - \left[\pi - \arg \left(1 - \delta\omega_n T + j\omega_n T \sqrt{1 - \delta^2} \right) \right] \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

e ricordando che:

$$\delta = \frac{T}{2} \omega_n \Rightarrow T = \frac{2\delta}{\omega_n}$$

si ha:

$$\begin{aligned} \ln 0.2 &= - \left[\pi - \arg \left(1 - 2\delta^2 + 2\delta j \sqrt{1 - \delta^2} \right) \right] \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \\ \Rightarrow \ln 0.2 &= \left[-\pi + \tan^{-1} \frac{2\delta \sqrt{1 - \delta^2}}{1 - 2\delta^2} \right] \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}} \end{aligned}$$

Si tratta di un'equazione trascendente in un'unica incognita δ risolvibile con metodo iterativo.

Per trovare il valore di δ che soddisfa questa specifica si è utilizzata la funzione fzero di Matlab:

`delta=fzero('zero', 0.4)` il primo campo della quale è la function:

```
((-pi+atan2((2*delta*sqrt(1-delta^2)), (1-2*delta^2)))*(delta/sqrt(1-delta^2)))-log(0.2)
```

che rappresenta l'equazione della quale si vuole calcolare lo zero e cioè:

$$\ln 0.2 = \left[-\pi + \tan^{-1} \frac{2\delta \sqrt{1 - \delta^2}}{1 - 2\delta^2} \right] \frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

Il secondo campo è il valore di tentativo di δ con il quale il programma inizia il processo di iterazione, per arrivare al valore corretto della variabile indipendente.

Si ottiene $\delta = 0.7312$.

Inoltre, si riporta il legame tra il coefficiente di smorzamento δ e la massima sovralongazione S , espressa in percentuale:

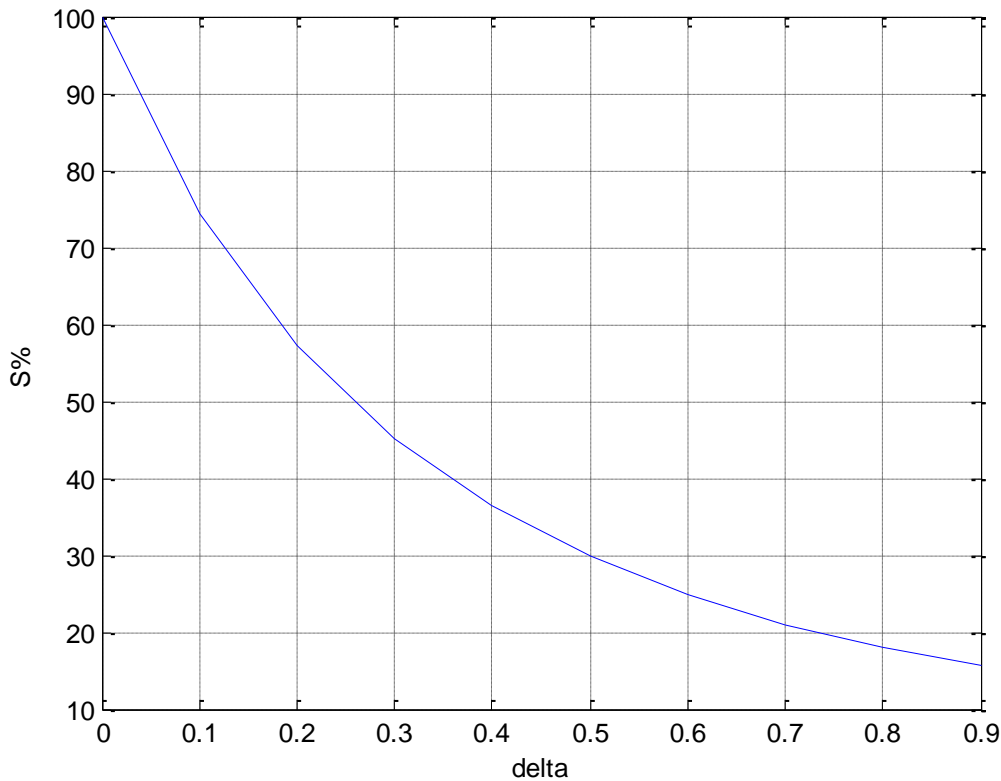


Figura 33: Legame tra il coefficiente di smorzamento e la massima sovralongazione

In realtà, il legame tra il coefficiente di smorzamento e la massima sovralongazione per un sistema del secondo ordine del tipo preso in esame non è rappresentato da un'unica curva ma da curve diverse al variare dei parametri $\omega_n T$: in questo caso, tutte le curve si riducono all'unica sopra graficata in quanto il legame tra δ e ω_n , esplicitato dalla relazione $\delta = \frac{T}{2} \omega_n$, elimina la dipendenza diretta della sovralongazione dai parametri $\omega_n T$. Inoltre, si nota che per il loop interno non è possibile realizzare la condizione per la quale $S\% = 10\%$: infatti, all'aumentare di δ la sovralongazione diminuisce senza però mai raggiungere il valore del 10%.

Specifiche sul tempo di assestamento

Imporre che la parte reale del polo più lento del sistema in retroazione dello stepper motor sia dieci volte più grande della parte reale del polo più veloce del loop esterno, equivale a imporre una condizione sul tempo di assestamento. Infatti, la parte reale σ di un polo è uguale al prodotto,

con segno opposto, $\delta\omega_n$, che è funzione del tempo di assestamento.

Quindi, dalla relazione

$$\sigma = -\omega_n \cos \alpha = -\omega_n \delta = -30$$

si ricava, essendo δ noto, il valore di ω_n :

$$\omega_n = -\frac{\sigma}{\delta} = \frac{30}{0.7312} = 41.03 \frac{rad}{s}$$

che equivale ad avere un tempo di assestamento $T_a = -\frac{\ln 0.05}{\delta\omega_n} = 0.1 \text{ sec}$.

Essendo ora noti i valori di δ e ω_n , si calcolano i parametri caratteristici del plant k^* e T_i .

$$k^* = \omega_n^2 = 1683 \frac{rad^2}{s^2} \Rightarrow k_i = \frac{k^*}{k_s} = 21037 \frac{rad}{s^2} \text{ cicli}$$

$$\delta = \frac{T}{2}\omega_n \Rightarrow T = \frac{2\delta}{\omega_n} = 0.03564 \text{ sec}$$

$$T_i = T = 0.03564 \text{ sec}$$

Sostituendo i valori trovati nella funzione di guadagno d'anello si ottiene la seguente funzione di trasferimento:

$$G_{\text{stepper}}(s) = \frac{k^*(1 + T_i s)}{s^2} = \frac{1683(1 + 0.03564s)}{s^2}$$

E quindi una funzione di trasferimento complessiva del loop interno uguale a:

$$G_{TOT\text{stepper}}(s) = \frac{k^*(1 + T_i s)}{s^2 + k^*T_i s + k^*} = \frac{1683(1 + 0.03564s)}{s^2 + 60s + 1683}$$

Implementando in Matlab la funzione di guadagno d'anello, si ricavano il luogo delle radici, i diagrammi di Bode e Nyquist.

Applicazione delle tecniche di controllo

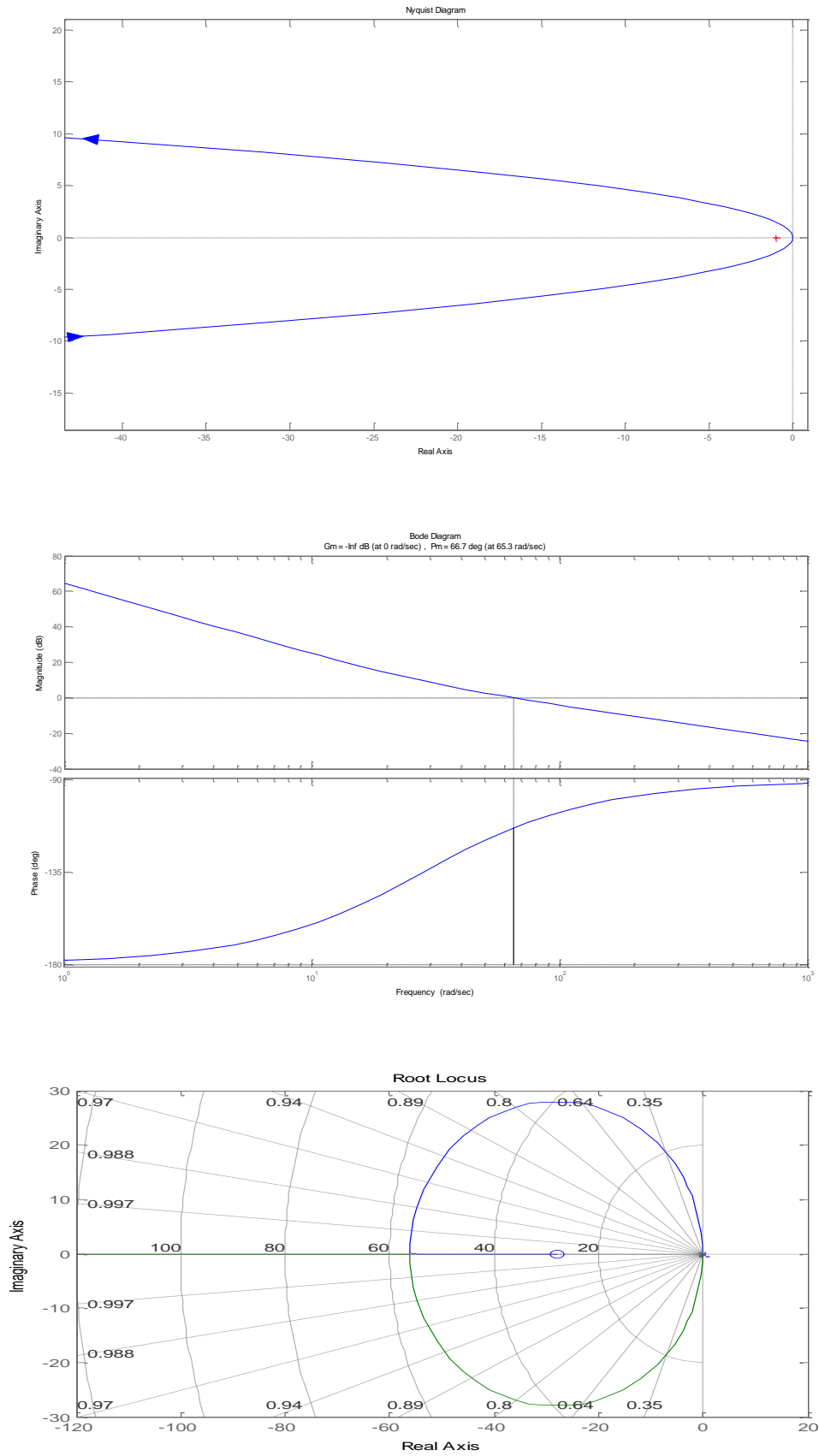


Figura 34: Nyquist, Bode, Rlocus del loop interno

- Nyquist

Essendo

$$G_{a_{stepper}}(s) = \frac{k^*(1 + T_i s)}{s^2}$$

si ricava:

$$G_{a_{stepper}}(j\omega) = \frac{k^*(1 + T_i j\omega)}{(j\omega)^2} = \frac{k^*T_i j\omega + k^*}{-\omega^2}$$

$$|G_{a_{stepper}}(j\omega)| = \frac{\sqrt{(k^*T_i\omega)^2 + k^{*2}}}{\omega^2}$$

$$\arg\{G_{a_{stepper}}(j\omega)\} = \tan^{-1}\left(\frac{k^*T_i\omega}{k^*}\right) - \pi$$

Si analizza l'andamento di modulo e argomento per ω variabile nell'intervallo $[0; \infty)$:

$$\rightarrow \omega = 0 \Rightarrow |G_{a_{stepper}}(j\omega)| \rightarrow \infty, \arg\{G_{a_{stepper}}(j\omega)\} = -\pi$$

$$\rightarrow \omega \rightarrow \infty \Rightarrow |G_{a_{stepper}}(j\omega)| = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(k^*T_i\omega)^2 + k^{*2}}}{\omega^2} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{\omega \sqrt{(k^*T_i)^2 + \left(\frac{k^*}{\omega}\right)^2}}{\omega^2} = 0,$$

$$\arg\{G_{a_{stepper}}(j\omega)\} = -\frac{\pi}{2}$$

Come risulta dall'analisi del diagramma di Nyquist il sistema chiuso in retroazione è asintoticamente stabile, non circondando nemmeno una volta il punto critico $-1 + j0$.

- Bode

Essendo

$$G_{\text{stepper}}(j\omega) = \frac{k^*(1 + T_i j\omega)}{(j\omega)^2}$$

si ricava:

$$|k^*|_{dB} = 20 \text{Log}(k^*) = 64.52 \text{ dB}$$

$$\tau'_1 = T_i \Rightarrow \omega_{c1} = \frac{1}{\tau'_1} = \frac{1}{T_i} = 28.06 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\rightarrow |G_{\text{stepper}}(j1)|_{dB} = 20 \text{Log}(k^*) = 64.52 \text{ dB}$$

$$\rightarrow |G_{\text{stepper}}(j\omega_{c1})|_{dB} = 20 \text{Log}(k^*) - 40 \text{Log} \frac{\omega_{c1}}{1} = 5.5965 \text{ dB}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow |G_{\text{stepper}}(j\omega_i)|_{dB} = 0 &\Rightarrow |G_{\text{stepper}}(j\omega_i)|_{dB} = |G_{\text{stepper}}(j\omega_{c1})|_{dB} - 20 \text{Log} \frac{\omega_i}{\omega_{c1}} \\ &= 5.5965 - 20 \text{Log} \frac{\omega_i}{28.06} = 0 \Rightarrow \text{Log} \frac{\omega_i}{28.06} = \frac{5.5965}{20} \Rightarrow \omega_i = 28.06 * 10^{\frac{5.5965}{20}} \\ &= 53.45 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{aligned}$$

Per trovare il margine di fase, si calcola prima l'argomento del guadagno d'anello alla pulsazione ω_i :

$$\rightarrow \arg \{G_{\text{stepper}}(j\omega_i)\} = \tan^{-1} \left(\frac{k^* T_i \omega_i}{k^*} \right) - \pi = -117.7 \text{ deg}$$

$$\Rightarrow M_F = \arg \{G_{\text{stepper}}(j\omega_i)\} + \pi = 62.30 \text{ deg}$$

Si nota inoltre che, avendo trascurato la costante di tempo τ dello stepper motor, rispetto al diagramma delle fasi qualitativo ricavato nella sezione relativa alla scelta delle tecniche di controllo per il loop interno (1.2.1.), si elimina lo sfasamento introdotto dal polo del plant $p = -\frac{1}{\tau}$ per cui la fase, per frequenze maggiori di quella di incrocio, si stabilizza a valori di -90° piuttosto che a -180° .

Il margine di ampiezza, invece, tende ad infinito, non raggiungendo la fase mai il valore di π .

- Luogo delle radici

Si ha che

$$G_{a_{stepper}}(s) = \frac{k^*(1 + T_i s)}{s^2}$$

quindi, sul luogo delle radici si posizionano i due poli nell'origine $p_1 = p_2 = 0$ e lo zero

$$z_1 = -\frac{1}{T_i} = -28.06.$$

Un polo finirà nello zero mentre il restante all'asintoto. Per qualsiasi valore di k_1 dell'equazione caratteristica del sistema in retroazione, il sistema risulta stabile.

I poli del loop interno

$$G_{TOT_{stepper}}(s) = \frac{G_{a_{stepper}}(s)}{1 + G_{a_{stepper}}(s)} = \frac{k^*(1 + T_i s)}{s^2 + k^* T_i s + k^*} = \frac{1683(1 + 0.03564s)}{s^2 + 60s + 1683}$$

ottenuti ponendo $k_1 = 1$ nell'equazione caratteristica $1 + k_1 G_{a_{stepper}}(s)$, sono:

$$p_1 = -30 + 27.9821i$$

$$p_2 = -30 - 27.9821i$$

Implementando il loop interno in Simulink, con un segnale di ingresso a gradino unitario, è possibile verificare che le specifiche sono rispettate:

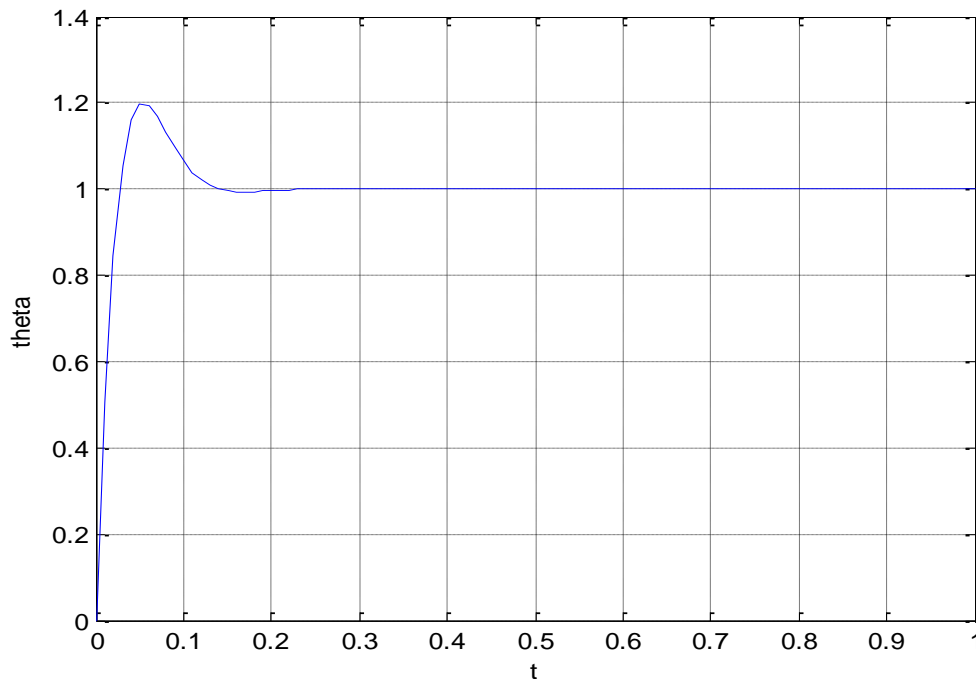


Figura 35: Risposta del sistema al gradino unitario

1.3.2.1 Discretizzazione del segnale di controllo ω_c

Il segnale ω_c di comando che si deve fornire al driver per l'azionamento dello stepper motor, viene generato da un sistema hardware dedicato (FPGA). Tale segnale, fornito su livelli quantizzati e quindi discreto, differisce da quello continuo ottenuto attraverso le simulazioni in ambiente Simulink.

Per verificare se risulta possibile assimilare il segnale discreto generato con quello continuo simulato, si procede con la discretizzazione del segnale di velocità ω_c .

La base temporale che consente la rappresentazione della frequenza è il tick generato dal clock del sistema computazionale: la massima frequenza del clock è di 40 MHz che equivale alla generazione di un tick ogni 25 nsec ($1 \text{ tick} = \frac{1}{40000000} = 2.5 \times 10^{-8} \text{ sec}$). La frequenza massima del segnale ottenibile è l'inverso del periodo che corrisponde temporalmente a due tick del clock quindi si può ricavare dalla seguente relazione: $f_{max} = \frac{1}{T_{min}} = \frac{1}{2 \times tick} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{40000000}} = 20 \text{ MHz}$.

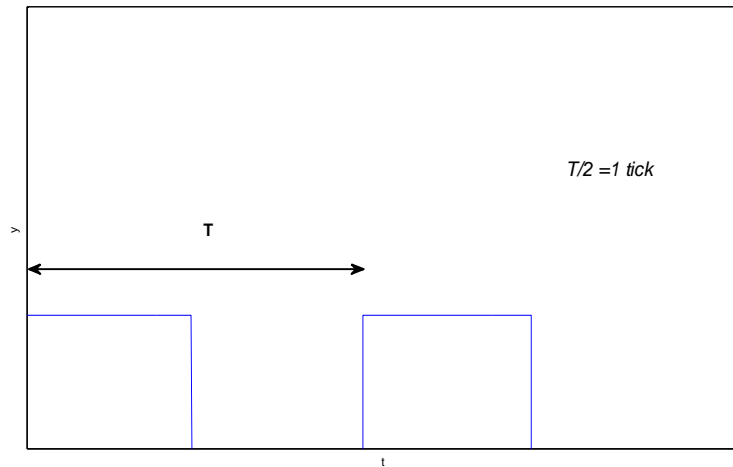


Figura 36: Tick del clock del sistema computazionale

Se $T = T_{min}$ allora $\frac{T}{2} = 1 \text{ tick}$; analogamente, se il periodo raddoppia quindi $\frac{T}{2} = 2 \text{ tick}$ la frequenza diminuisce della metà, se $\frac{T}{2} = 3 \text{ tick}$ allora $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{6 \times \text{tick}} = \frac{1}{6 \times \frac{1}{40000000}} \cong 6.7 \text{ MHz}$ e così via.

Risulta evidente come vi siano dei gap di frequenza per i quali il segnale non può essere definito e come la frequenza di controllo influisca sull'approssimazione di controllo, tanto migliore quanto minore è la frequenza. In particolare, i livelli quantizzati non sono equamente distribuiti: i gap di frequenza diminuiscono al diminuire della frequenza stessa.

Si rende, quindi, necessario stabilire quali sono le frequenze caratteristiche del controllo progettato.

Per farlo, si sollecita il sistema con un gradino $\theta_{rif} = \frac{\theta_{rif}^*}{s}$ e si analizzano le frequenze del segnale ω_c . La funzione di trasferimento che lega l'ingresso a gradino θ_{rif} al segnale in uscita dal regolatore ω_c è la seguente:

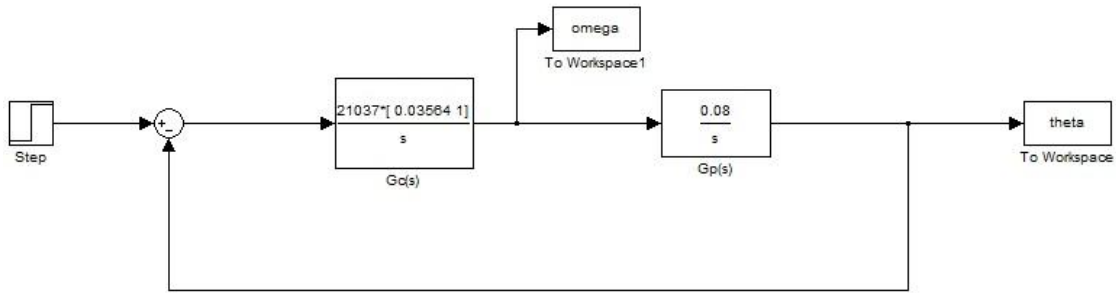


Figura 37: Schema a blocchi loop interno

$$\begin{aligned} \omega_c(s) &= G_c(s)\theta_{err}(s) \\ \theta_{err}(s) &= \theta_{rif}(s) - \theta(s) \\ \theta(s) &= G_p(s)\omega_c(s) \\ \Rightarrow \theta_{err}(s) &= \theta_{rif}(s) - G_p(s)\omega_c(s) \\ \Rightarrow \omega_c(s) &= G_c(s)[\theta_{rif}(s) - G_p(s)\omega_c(s)] \\ \Rightarrow \omega_c(s)[1 + G_c(s)G_p(s)] &= G_c(s)\theta_{rif}(s) \\ \Rightarrow \frac{\omega_c(s)}{\theta_{rif}(s)} &= \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \end{aligned}$$

Il plot delle frequenze del segnale ω_c in funzione del tempo è di seguito riportato:

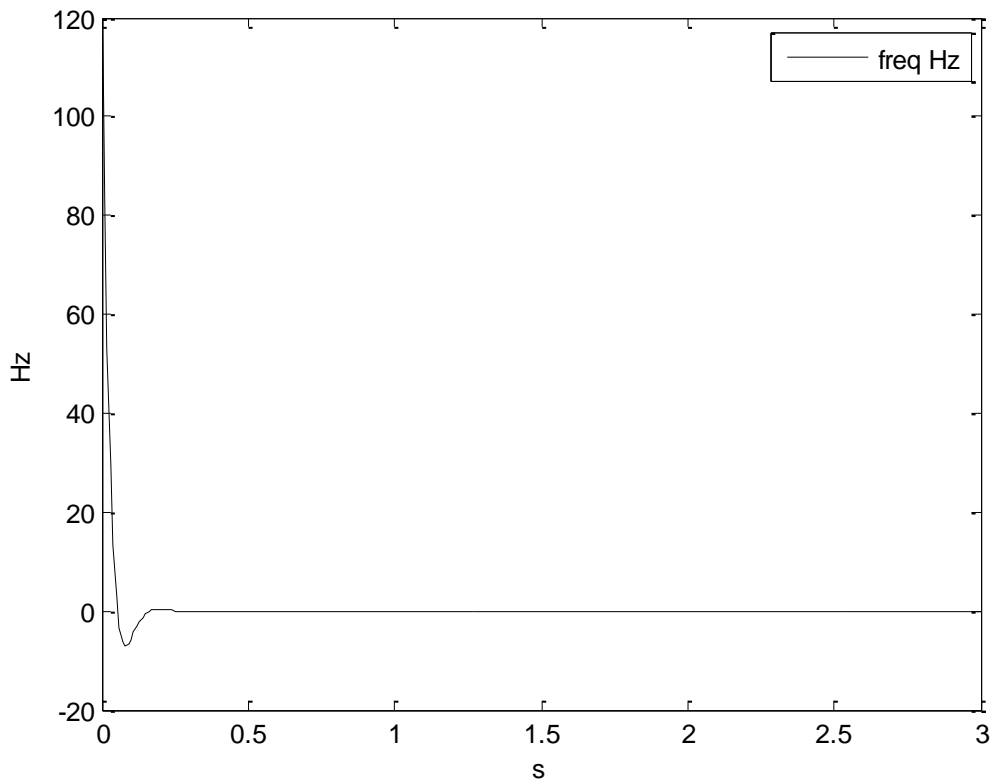


Figura 38: Frequenze del segnale ω_c

Fornendo in ingresso un segnale di step unitario $\theta_{rif} = \frac{1}{s} = 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} = 57.29^\circ$ si ottengono frequenze caratteristiche di circa 120 Hz.

Se dal segnale di step unitario si passa ad uno step $\theta_{rif} = \frac{\theta_{rif}^*}{s}$ generico, ad esempio, $\theta_{rif} = \frac{\theta_{rif}^*}{s} = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 90^\circ$, la frequenza massima raggiunta è di circa 190 Hz, valore ancora molto lontano da quelli che determinerebbero condizioni critiche nell'approssimazione del segnale ($\cong 20 \text{ MHz}$).

Non rimane che visualizzare sul grafico del segnale i diversi livelli di frequenza possibili che ne consentono la discretizzazione: più essi sono fitti, maggiore è la precisione della discretizzazione stessa.

Per ottenere i livelli di discretizzazione si procede nel seguente modo:

```
t=0:0.01:10;
plot(t,omega/2/pi, 'k')
legend('freq Hz');
```

Applicazione delle tecniche di controllo

```
fmax=119.325; %hz

Tfmax=1/fmax/10; % s
tickTfmax=round(40000000*Tfmax)
T1=tickTfmax;
T2=1.001*T1;
ticks=[T1:2:T2];

f=40000000./ticks;

%t=2*fmax; %fmax=1/Tmin=1/2tick=1/(2*1/t)
for i=1:length(f);
%     f=1/((2*ti)/t);
    figure(1)
    hold on
    plot(t,f(i).*ones(1,length(t)), 'r')
end
```

Assegnato un intervallo di tempo, si graficano i valori di frequenza del segnale ω_c ottenuti dividendo lo stesso segnale per 2π , considerato che $1 \text{ Hz} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Dal grafico, si nota che la frequenza massima è di $f_{max} = 119.325 \text{ Hz}$ da cui si ricava il periodo $T_{fmax} = \frac{1}{f_{max}}$. È ora facile trovare il numero di tick nel periodo: infatti, sapendo che in 1 sec ci sono 40000000 tick, nel periodo T_{fmax} ci saranno $40000000 \times T_{fmax}$ tick. Infine, si trovano i diversi livelli di frequenza dividendo 40000000 per l'intervallo di tick appena calcolato, ricordando che $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2 \times \text{tick} \times \frac{1}{40000000}}$.

Si ottiene:

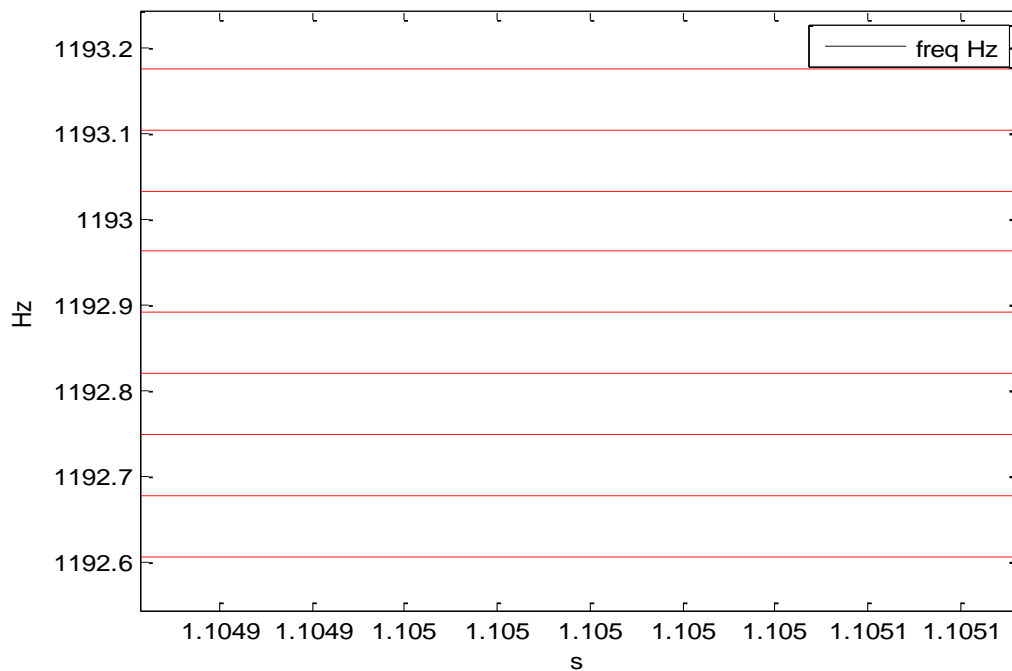


Figura 39: Livelli di discretizzazione del segnale ω_c

I livelli di frequenza graficati, variabili nell'intervallo $1 \div 1200 \text{ Hz}$, sono fitti a sufficienza per poter considerare trascurabili gli effetti di discretizzazione del segnale nel progetto di controllo complessivo: infatti, si ha un salto di discretizzazione pari a 0.08 Hz per frequenze di 1200 Hz che diminuisce, inoltre, al diminuire della frequenza stessa.

Quindi, essendo la frequenza di lavoro del DAC (Digital to Analog Converter) dell' FPGA molto maggiore rispetto al doppio della frequenza massima del segnale ω_c (teorema di Shannon, vedere appendice F), si conclude la presente analisi affermando che è possibile l'approssimazione del segnale discreto con quello continuo senza commettere significativi errori.

1.3.3. Loop complessivo

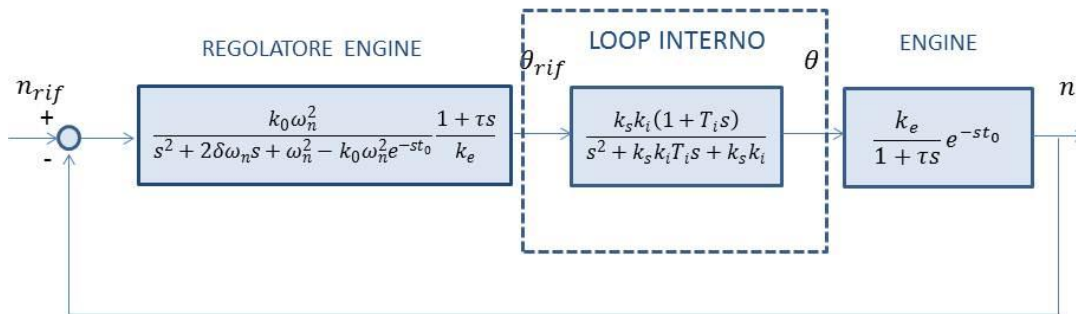


Figura 40: Loop totale

Si introduce, in conclusione, il loop interno nell'analisi del sistema complessivo per verificare che la scelta progettuale adottata, che si basa sul progetto separato dei due loop, sia legittima.

Analizzando, infatti, i diagrammi di Nyquist e del luogo delle radici e risposta al gradino unitario del sistema complessivo di loop interno ed esterno, il risultato che si ottiene è quello atteso sulla base della tecnica progettuale sviluppata: la presenza dello stepper motor non influisce in modo sostanziale sulla stabilità e non modifica la dinamica del sistema complessivo.

Per il loop totale si considera un guadagno d'anello

$$G_{aTOT}(s) = G_R'(s) \frac{G_{a stepper}(s)}{1 + G_{a stepper}(s)} G'(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau s}{k_e} \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i} \frac{k_e}{1 + \tau s} e^{-st_0}$$

con

$$\frac{G_{a stepper}(s)}{1 + G_{a stepper}(s)}$$

funzione di trasferimento del sistema dello stepper motor in retroazione,

$G_R'(s)$ e $G'(s)$ rispettivamente regolatore, stimato senza la presenza del loop interno, e plant dell'engine.

Il diagramma di Nyquist che si ottiene, implementando in Matlab, la funzione di guadagno d'anello è il seguente:

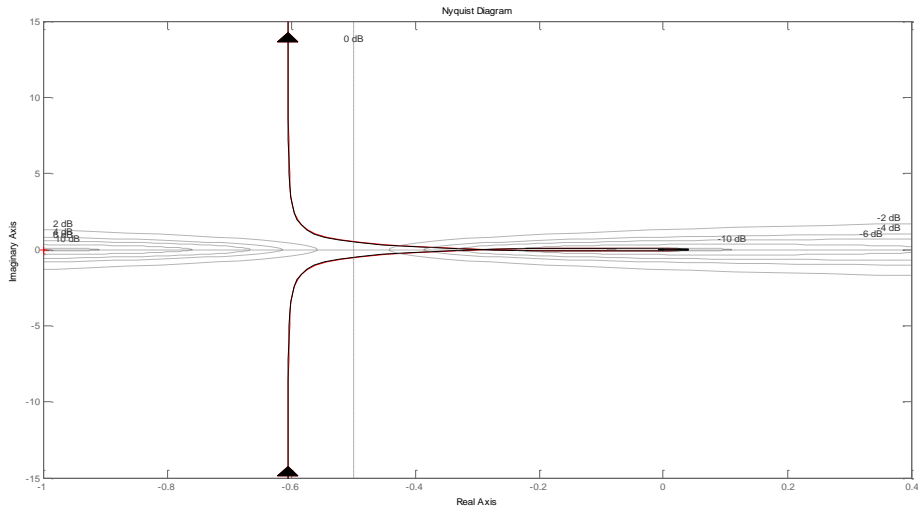


Figura 41: Nyquist loop totale

Sullo stesso diagramma si è eseguito il plot delle funzioni di guadagno d'anello con la presenza del loop interno (in nero) e trascurandolo (in rosso). Con uno zoom è possibile osservare che, la presenza dell'anello di retroazione interno, non apporta modifiche sostanziali al diagramma di Nyquist ottenuto trascurandolo, se non quella di accentuare, seppur in maniera non compromettente, l'andamento a spirale del diagramma stesso.

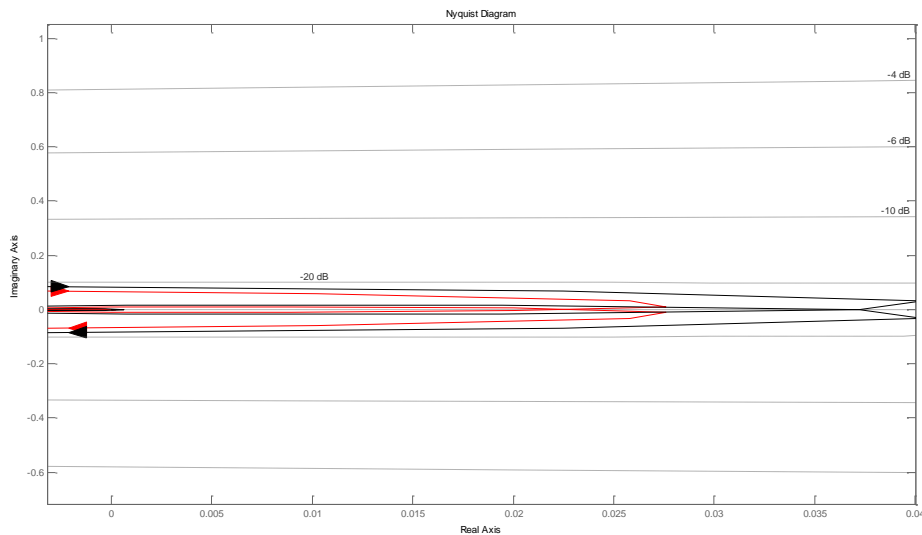


Figura 42: Particolare Nyquist, loop totale

Si analizza, ora, il luogo delle radici: la presenza dello stepper group introduce due poli complessi coniugati in più rispetto al numero di poli che si hanno trascurandolo. In particolare, per

la funzione di trasferimento del sistema in retroazione, comprensiva di loop interno ed esterno, si calcolano i seguenti:

$$p_1 = -47.2246 + 30.8112i$$

$$p_2 = -47.2246 - 30.8112i$$

$$p_3 = -26.7432 + 34.8719i$$

$$p_4 = -26.7432 - 34.8719i$$

$$p_5 = -31.9513$$

$$p_6 = -3.0433 + 4.1446i$$

$$p_7 = -3.0433 - 4.1446i$$

I poli introdotti dall'approssimante di Padè sono tre, due complessi coniugati e uno reale, le restanti due coppie di poli complessi coniugati dipendono invece dal loop dell'engine e dello stepper motor.

Trascurando il loop interno, si ottengono i poli del sistema in retroazione dell'engine:

$$p_1 = -36.7781 + 35.0876i$$

$$p_2 = -36.7781 - 35.0876i$$

$$p_3 = -46.4437$$

$$p_4 = -3 + 4.084i$$

$$p_5 = -3 - 4.084i$$

In verde, è rappresentato il luogo delle radici per il loop comprensivo di stepper motor e engine, mentre, in rosso, quello relativo all'engine soltanto:

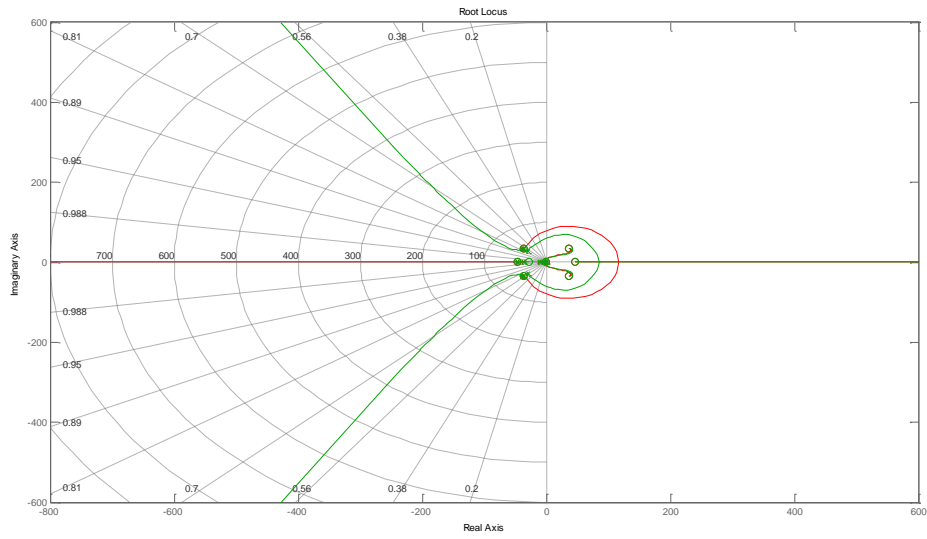


Figura 43: Rlocus, loop totale

Dagli zoom seguenti si osserva meglio come l'aggiunta di uno zero e due poli complessi coniugati dovuti alla presenza del loop interno modifichi, in maniera non significativa, l'andamento del luogo delle radici:

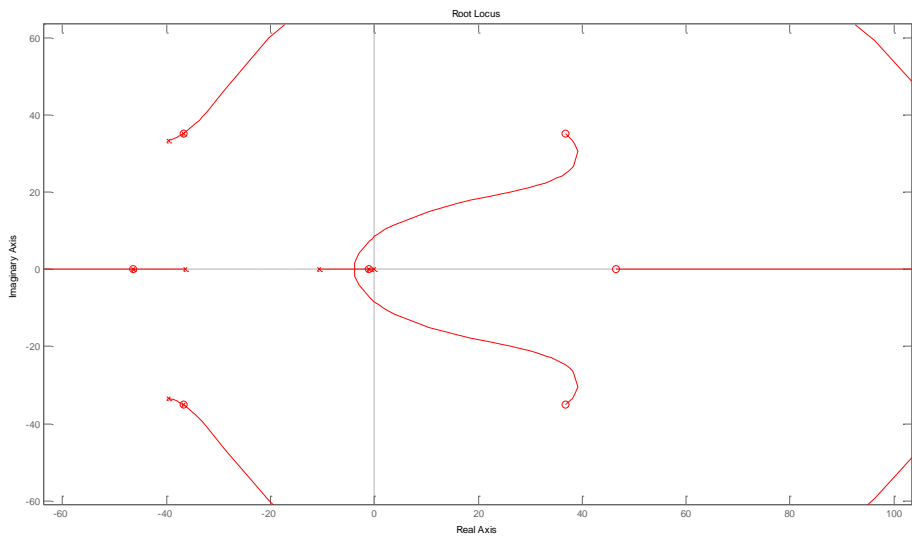


Figura 44: Rlocus, loop engine

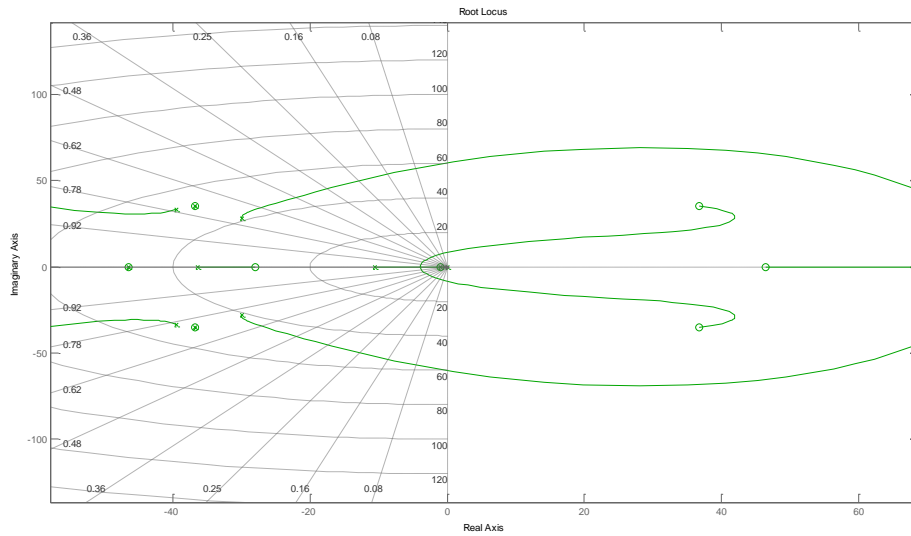


Figura 45: Rlocus, loop engine+stepper

I rami sui quali si trovano i poli che caratterizzano la dinamica del sistema e, cioè, quelli che non dipendono dall'approssimante di Padè, non differiscono.

La dinamica del sistema non viene, infatti, modificata dalla presenza del loop dello stepper motor, come si evince dalla risposta al gradino, con ingresso variabile da 1200 RPM a 2000 RPM, di seguito riportata:

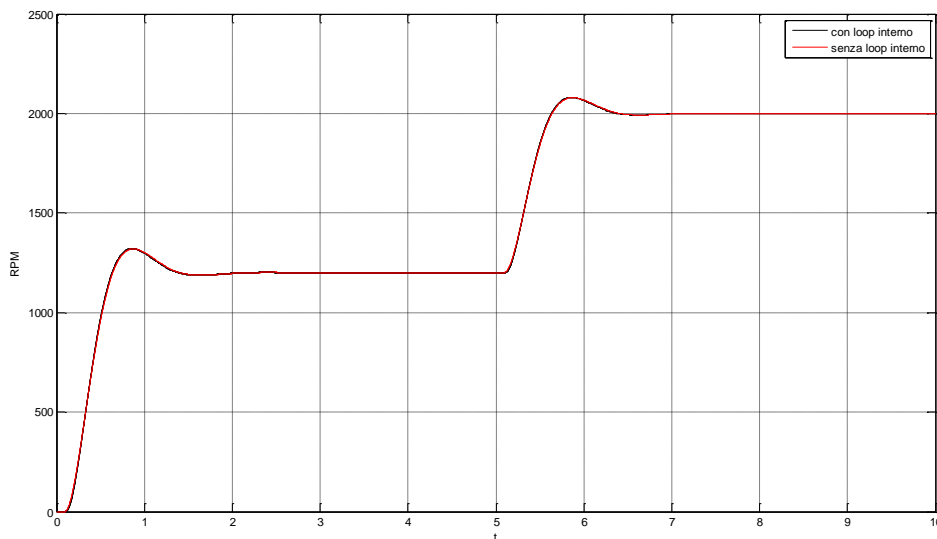


Figura 46: Risposta del sistema al gradino, con e senza loop interno

La presenza del loop interno introduce dei poli con parte reale maggiore, in modulo, rispetto

a quella dei poli del sistema considerato senza il loop interno. Dalla relazione $p = -\frac{1}{\tau}$, si deduce che tanto più piccolo è il valore di τ quindi più grande è il polo in valore assoluto, tanto più veloce è il sistema. Dallo zoom seguente si può osservare la differenza di velocità di risposta del sistema al gradino, in entrambi i casi, con e senza loop interno:

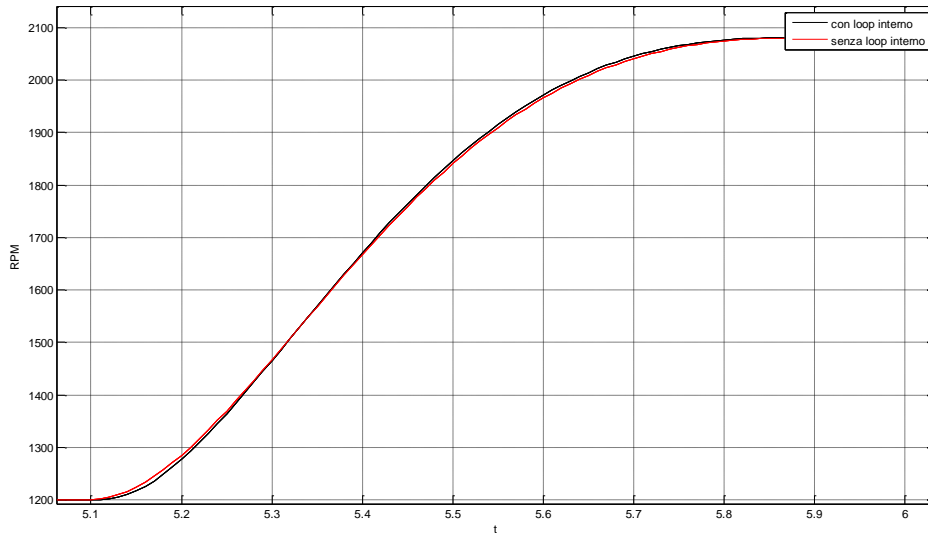


Figura 47: Risposta del sistema al gradino, particolare

Si riporta anche l'andamento della risposta del sistema, con e senza loop interno, al gradino unitario per verificare che le specifiche di progetto del loop esterno siano, in entrambi i casi, soddisfatte:

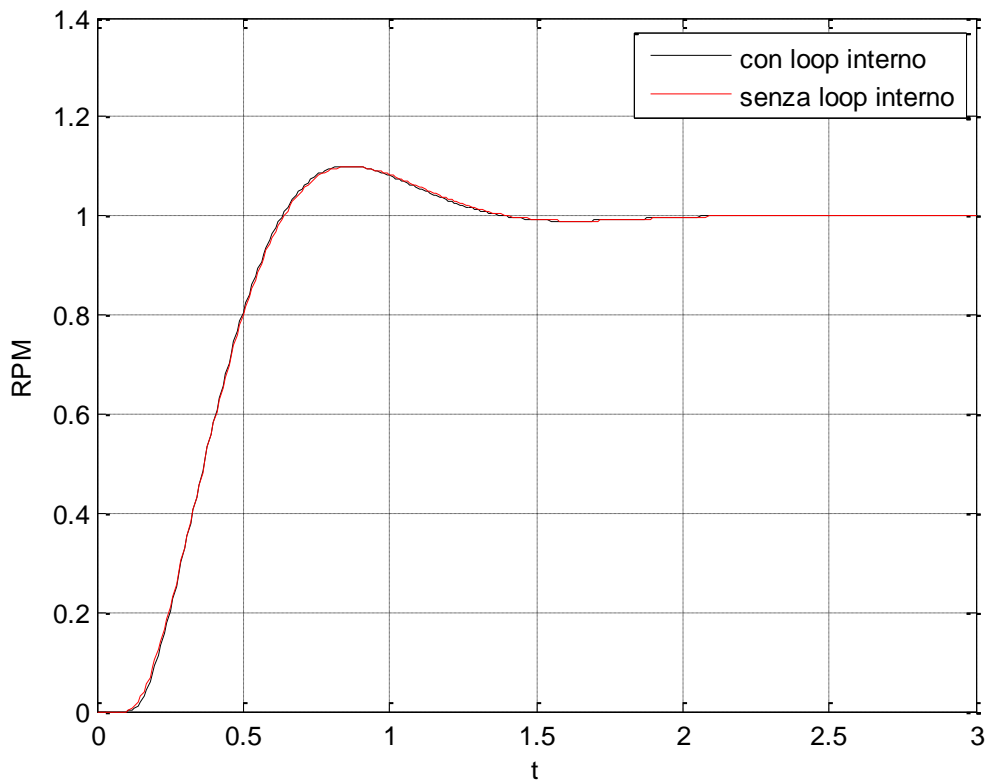


Figura 48: Risposta del sistema al gradino unitario con e senza loop interno

Con uno zoom nel punto di massima sovravelongazione si può osservare come essa subisca una variazione trascurabile (circa l'0.1%) considerando il loop interno nel sistema di controllo complessivo:

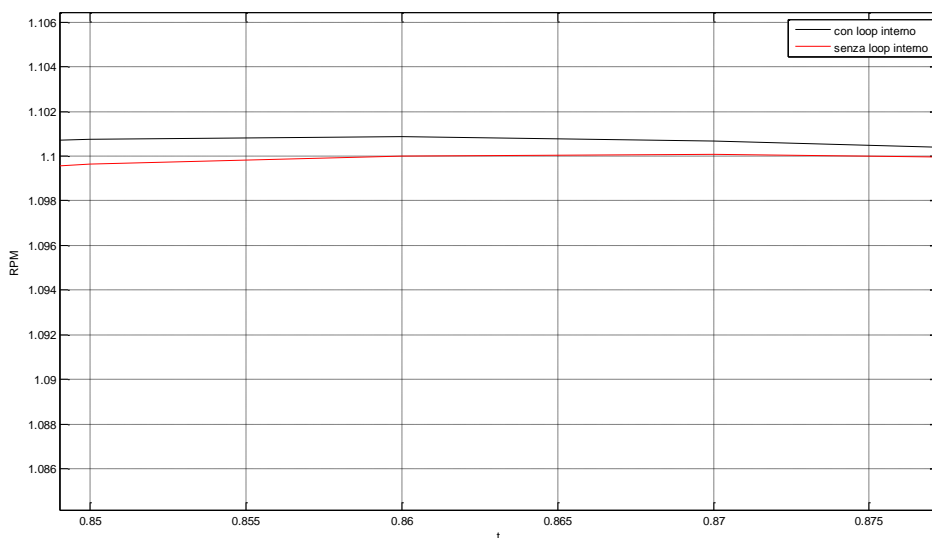


Figura 49: Particolare, risposta del sistema al gradino unitario con e senza loop interno

Anche questa analisi si può concludere affermando che il loop interno è stato progettato in modo da non influire in maniera significativa nella dinamica complessiva: infatti, i poli dominanti del sistema di controllo, cioè i poli più vicini all'asse immaginario che più degli altri determinano il comportamento dinamico del sistema, non sono quelli introdotti dalla presenza dell'anello di retroazione dello stepper motor che si trovano, invece, più lontani dall'origine e corrispondono quindi a transienti che si estinguono più rapidamente.

2. Sensibilità alla variazione dei parametri: analisi del comportamento a regime e della stabilità

In questo capitolo si conduce un'analisi per valutare, in termini quantitativi e qualitativi, come influisce la variazione dei parametri che caratterizzano le funzioni di trasferimento del sistema di controllo. Infatti, la difficoltà nel determinare in maniera esatta tali parametri rende necessario uno studio per verificare che una eventuale variazione degli stessi, nella realtà, non conduca il sistema ad una condizione instabile o ad un comportamento inaccettabile per quanto riguarda l'errore a regime.

I parametri dello stepper motor si possono determinare con un grado di accuratezza maggiore per la relativa facilità con la quale è possibile condurre test di laboratorio, a differenza di quanto avviene per il motore dell'aereo per il quale, invece, non risultano agevoli.

Quindi, si è ritenuto sufficiente studiare la variazione dei parametri che caratterizzano il plant dell'engine:

- t_0 : tempo di ritardo;
- k_e : costante di guadagno;
- τ_e : costante di tempo;

In particolare, per le successive analisi si considerano le seguenti variazioni, rispetto ai valori nominali t_{0_0} , k_{e_0} , τ_{e_0} :

- $t_{0_R} = t_{0_0} \pm 10\%t_{0_0}$
- $k_{e_R} = k_{e_0} \pm 10\%k_{e_0}$
- $\tau_{e_R} = \tau_{e_0} \pm 10\%\tau_{e_0}$

2.1. Analisi della stabilità

Si suppone che un parametro α , della funzione di trasferimento di un sistema, subisca una variazione $\Delta\alpha$ rispetto al valore nominale α_0 .

La funzione di trasferimento “nominale” sia $G(s, \alpha_0)$ mentre la nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

$$G(s, \alpha_0 + \Delta\alpha) = G(s) + \Delta G(s),$$

in cui si è posto

$$G(s) = G(s, \alpha_0)$$

e

$$\Delta G(s) = \left. \frac{\partial G}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

Nei sistemi in retroazione, se il guadagno d’anello è elevato, l’effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che si verifichi nella catena diretta o di retroazione: infatti, come si verificherà, una variazione della funzione di trasferimento della catena diretta $G(s)$ produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ molto minore, mentre, una variazione della funzione di trasferimento del percorso di retroazione $H(s)$ produce in $G_0(s)$ una variazione dello stesso ordine di grandezza.

In presenza della variazione $\Delta\alpha$ di un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto $G(s, \alpha_0)$ si ha:

$$G_{TOT}(s, \alpha_0) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$G_{TOT}(s, \alpha) = G_{TOT}(s, \alpha_0) + \Delta G_{TOT}(s)$$

$$\Delta G_{TOT}(s) = \left. \frac{\partial G_{TOT}}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

$$\frac{\partial G_{TOT}}{\partial \alpha} = \frac{\partial G_{TOT}}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

con

$$\frac{\partial G_{TOT}}{\partial G} = \frac{1 + H(s)G(s) - G(s)H(s)}{[1 + H(s)G(s)]^2} = \frac{1}{[1 + H(s)G(s)]^2}$$

e, quindi,

$$\frac{\partial G_{TOT}}{\partial G} = \frac{1}{[1 + H(s)G(s)]^2} \frac{\partial G}{\partial \alpha}$$

da cui

$$\frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s, \alpha_0)} = \frac{\frac{1}{[1+H(s)G(s)]^2} \frac{\partial G}{\partial \alpha} |_{\alpha=\alpha_0} \Delta \alpha}{\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}} = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

Ricavando la funzione di risposta armonica, si ha che:

$$\frac{\Delta G_{TOT}(j\omega)}{G_{TOT}(j\omega)} = \frac{1}{1 + H(j\omega)G(j\omega)} \frac{\Delta G(j\omega)}{G(j\omega)}$$

e, per quanto riguarda i moduli:

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + H(j\omega)G(j\omega)|} \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

Dalla relazione precedente, si evince che, per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione $|H(j\omega)G(j\omega)| \gg 1$,

si può scrivere:

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

che equivale ad affermare che l'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di $G(s)$, per le frequenze per le quali il guadagno d'anello è sufficientemente elevato, è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto.

I termini

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$$

e

$$\frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

si definiscono funzioni di sensibilità.

Le funzioni di sensibilità forniscono un indice della variazione percentuale della funzione di trasferimento complessiva e della catena diretta, rispettivamente, in relazione alle corrispondenti funzioni di trasferimento nominali.

Si riconduce ora l'analisi teorica fin qui presentata al caso specifico di variazione dei parametri t_0 , k_e , τ_e del plant del motore dell'aereo.

Variatione del tempo di ritardo t_0

Per il plant dell'engine si ipotizza:

- $t_0 = t_{0R} = t_{00} \pm 10\%t_{00}$
- $k_e = k_{eR} = k_{e0} = 2000 \frac{RPM}{rad}$
- $\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e0} = 1 \text{ sec}$

La funzione di guadagno d'anello con l'introduzione della variazione del parametro t_0 diventa:

$$G_a(s) = G_R'(s) \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{k_{e0}} \frac{k_{eR}}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{0R}}$$

$$= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0R}}} e^{-st_{0R}}$$

Si ha che:

$$\triangleright \Delta G_{TOT}(s) = \frac{1}{[1+H(s)G(s)]^2} \frac{\partial G}{\partial t_{0R}} \Big|_{t_{0R}=t_{00}} \Delta t_0 = \frac{1}{[1+G_{aNOMINALE}(s)]^2} \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial t_{0R}} \Big|_{t_{0R}=t_{00}} \Delta t_0$$

$$\rightarrow \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial t_{0R}} \Big|_{t_{0R}=t_{00}} = \frac{-sk_0 \omega_n^2 e^{-st_{0R}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0R}}} \Big|_{t_{0R}=t_{00}}$$

$$= \frac{-sk_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}\right)^2} \frac{-sk_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \Delta t_0$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) = \frac{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})^2}{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}} + k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})^2} \frac{-sk_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \Delta t_0$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) = \frac{(-sk_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})}{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)^2} \Delta t_0$$

$$\triangleright G_{TOT}(s, t_{00}) = \frac{G_{aNOMINALE}(s)}{1+G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{\frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}} = \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s, t_0)} &= \frac{(-sk_0\omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_0})}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)^2} \Delta t \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{k_0\omega_n^2 e^{-st_0}} \\ &= \frac{-s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_0})}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \Delta t_0 \end{aligned}$$

Come si ricava anche dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s)} &= \frac{1}{1 + G_{aNOMINALE}(s)} \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{1}{1 + G_{aNOMINALE}(s)} \frac{\left. \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial t_0} \right|_{t_0R=t_0} \Delta t_0}{G_{aNOMINALE}(s)} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{k_0\omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_0}}} \frac{-sk_0\omega_n^2 e^{-st_0} \Delta t_0}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_0}}{k_0\omega_n^2 e^{-st_0}} \\ &= \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} (-s\Delta t_0) \end{aligned}$$

- Funzione di sensibilità

Per valutare come varia la funzione di trasferimento totale $\Delta G_{TOT}(s)$ rispetto a quella nominale $G_{TOT}(s)$ in relazione alla variazione del parametro t_0 della funzione di trasferimento della catena diretta $G_a(s)$, si ricavano i diagrammi di Bode della seguente:

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + H(j\omega)G(j\omega)|} \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + G_{aNOMINALE}(s)|} \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$$

Prima di tutto si implementa in Matlab la funzione di trasferimento che identifica la

Analisi della stabilità

funzione di sensibilità del guadagno d'anello:

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} = -s\Delta t_0$$

con $\Delta t_0^- = -10\%t_0$ e $\Delta t_0^+ = +10\%t_0$

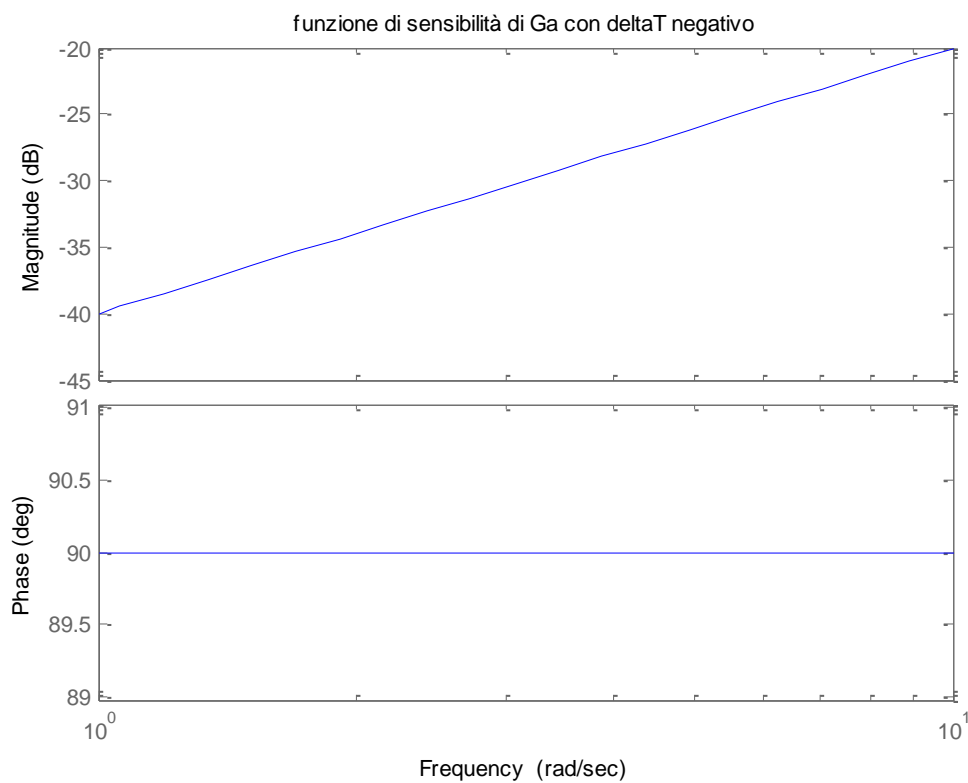
quindi

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)}^- = 0.01s$$

e

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)}^+ = -0.01s$$

Si ottengono i seguenti:



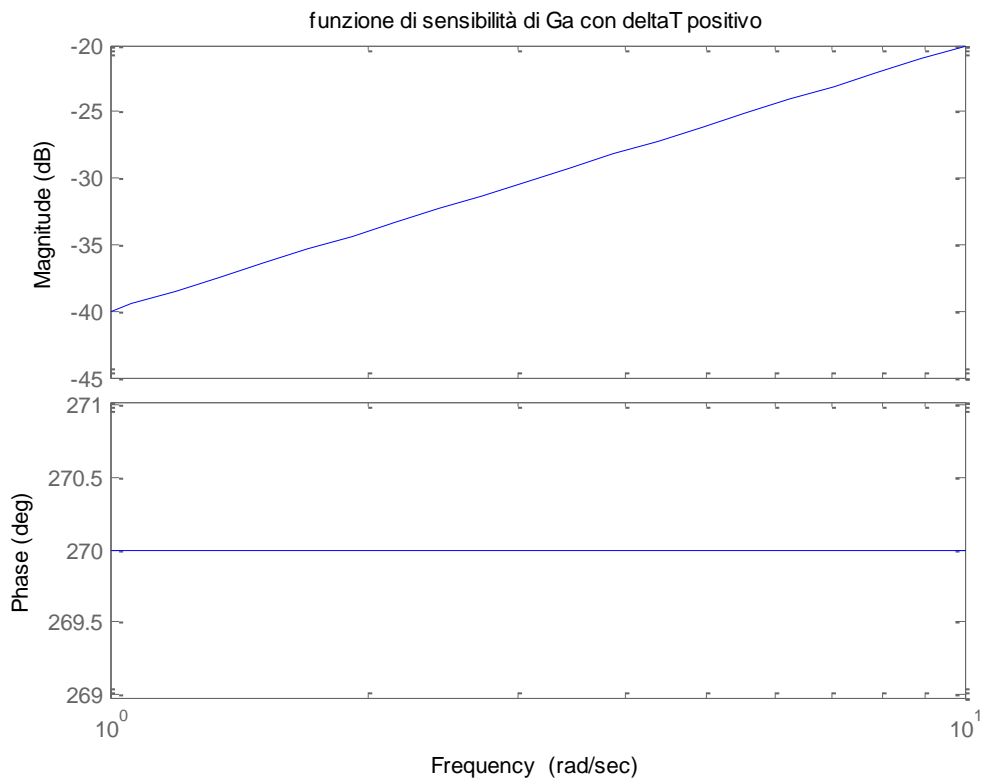


Figura 50: Funzione di sensibilità del guadagno d'anello

La pendenza dei diagrammi delle ampiezze è pari a -20γ con $\gamma = -1$, in analogia ai noti diagrammi di Bode della funzione elementare $G(j\omega) = (j\omega)^{-\gamma}$, mentre le fasi sono uguali a $\arg\{-j\omega\Delta t_0\} = \pm \frac{\pi}{2}$ a seconda che sia, rispettivamente, Δt_0 negativo o Δt_0 positivo.

Si procede poi con la definizione della funzione di trasferimento $1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)$ che, implementata in Matlab (in nero), fornisce i seguenti diagrammi di Bode, posti a confronto con quelli della funzione di trasferimento di guadagno d'anello nominale $G_{a_{NOMINALE}}(s)$ (in rosso):

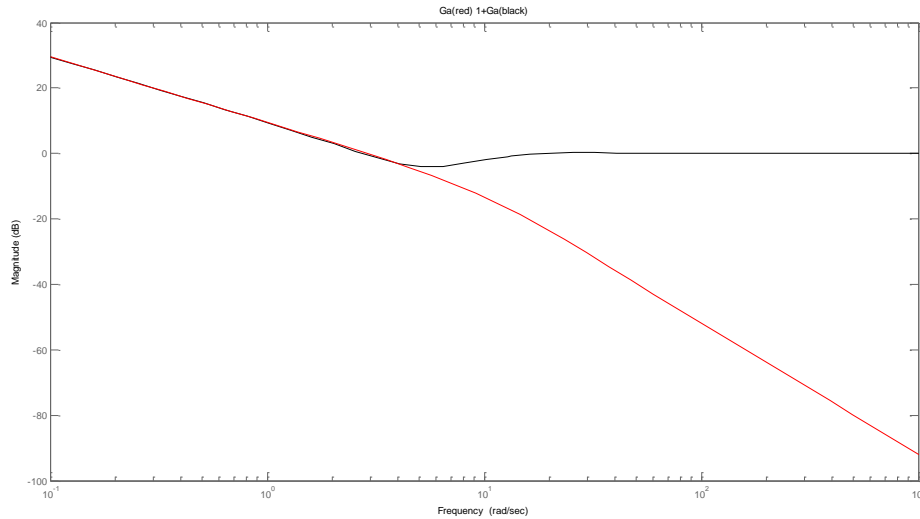


Figura 51: Diagrammi di Bode di Ga e 1+Ga

Fintanto che:

$$|G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} > 0 \Rightarrow G_{aNOMINALE}(j\omega) > 1 \Rightarrow 1 + G_{aNOMINALE}(j\omega) \gg 1 \Rightarrow$$

$$|1 + G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} \gg 0$$

Se, al contrario:

$$|G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} < 0 \Rightarrow 0 < G_{aNOMINALE}(j\omega) < 1 \Rightarrow 1 + G_{aNOMINALE}(j\omega) \cong 1 \Rightarrow$$

$$|1 + G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} \cong 0$$

Infine, essendo nota la funzione di sensibilità relativa al guadagno d'anello e la funzione di trasferimento $1 + G_{aNOMINALE}(s)$, è possibile definire, attraverso i diagrammi di Bode, l'andamento della funzione di sensibilità del sistema complessivo $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$, riportata di seguito:

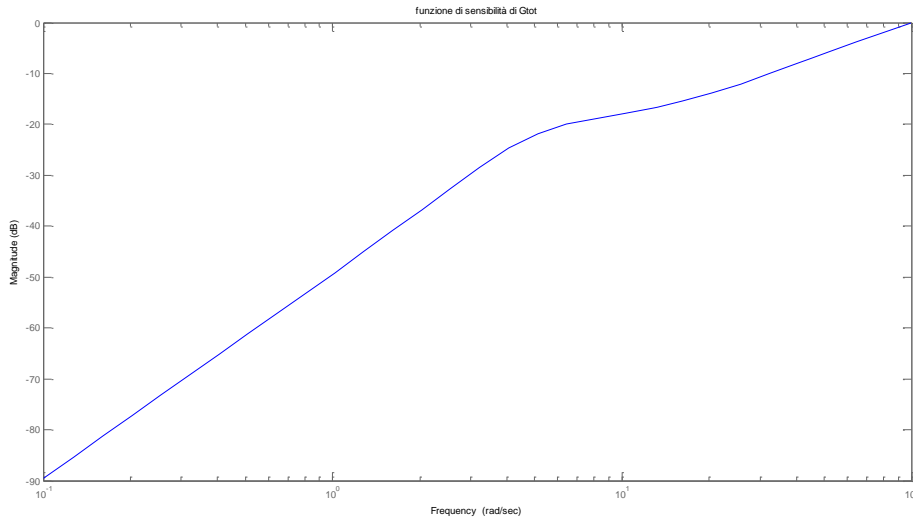


Figura 52: Funzione di sensibilità della funzione di trasferimento complessiva

La funzione di sensibilità del guadagno d'anello $\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} = -s\Delta t_0$ interseca l'asse delle ascisse quando:

$$|-s\Delta t_0|_{dB} = 0 \Rightarrow 20\text{Log}|-s\Delta t_0| = 0 \Rightarrow |-s\Delta t_0| = 1 \Rightarrow |-j\omega\Delta t_0| = 1 \Rightarrow \omega\Delta t_0 = 1 \Rightarrow$$

$$\omega = \omega_i = \frac{1}{\Delta t_0} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Fintanto che $\omega < \omega_i$, $\left| \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} \right|_{dB} < 0 \Rightarrow \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} < 1$.

In corrispondenza di ω_i ,

$$\left| 1 + G_{aNOMINALE}(s) \right|_{dB} = 0 \Rightarrow \left| 1 + G_{aNOMINALE}(s) \right| \cong 1 \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$$

che significa che la variazione della funzione di trasferimento nella catena diretta produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva di circa il 100%.

Al contrario, per valori di frequenze per le quali $\left| 1 + G_{aNOMINALE}(s) \right|_{dB} > 0 \Rightarrow \left| 1 + G_{aNOMINALE}(s) \right| > 1$,

si può scrivere:

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$$

che significa che l'effetto della variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuato sulla catena in retroazione.

In particolare, per valori di pulsazione di circa $10^{-1} \frac{rad}{s}$, la funzione di sensibilità $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$ assume valori di circa -90 dB che corrisponde ad un valore del rapporto tra la due funzioni di trasferimento di circa $3.16 * 10^{-5}$ ($20 \text{Log} \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong -90 \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong 3.16 * 10^{-5}$): da ciò si evince come, per frequenze piccole, una variazione del parametro sulla funzione di trasferimento del guadagno di anello si ripercuota sulla catena in retroazione in modo attenuato.

Le considerazioni fino a qui presentate possono essere verificate con il seguente diagramma di Bode, relativo alle funzioni di sensibilità delle funzioni di trasferimento in catena aperta e in retroazione e alla funzione di trasferimento $1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)$:

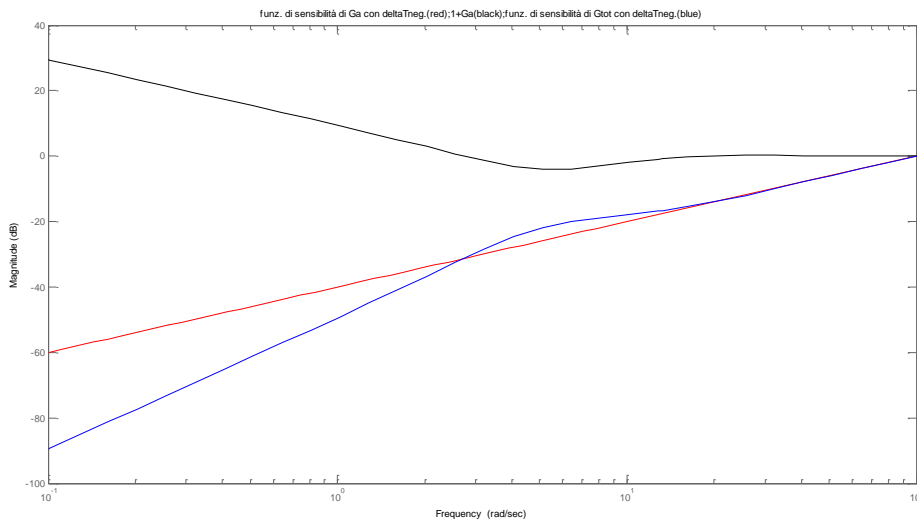


Figura 53: Funzioni di sensibilità e $1+G_a$

Quindi, riassumendo:

- Per valori di frequenze per le quali $|1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)|_{dB} > 0 \Rightarrow |1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)| > 1$, si può scrivere $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{a_{NOMINALE}}(s)|}$ che significa che l'effetto della variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuato sulla catena in retroazione.

In particolare, per valori di pulsazione piccoli ($\cong 10^{-1} \frac{rad}{s}$), il rapporto $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$ vale circa $3.16 * 10^{-5}$ quindi una variazione del parametro sulla funzione di trasferimento del guadagno

di anello si ripercuote sulla catena in retroazione in percentuale molto piccola: si verifica che

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$$

- Se $|1 + G_{aNOMINALE}(s)|_{dB} = 0 \Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(s)| \cong 1 \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$ che significa che la variazione della funzione di trasferimento nella catena diretta produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva di circa il 100%. Questo si verifica anche per le frequenze caratteristiche della pulsazione di incrocio $\omega_i = 100 \frac{rad}{s}$.

Si può ritenere che per le frequenze caratteristiche del sistema di controllo in esame, la variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuata sulla catena in retroazione. Infatti, in corrispondenza del polo più veloce del sistema ($p = -3 \pm 4.084j$) si ha una frequenza di $5.067 \frac{rad}{s}$, superata la quale diviene significativa l'influenza della variazione del parametro della catena diretta sulla catena in retroazione.

- Diagramma di Nyquist

Si riporta il diagramma di Nyquist per verificare che una variazione del tempo di ritardo non conduca il sistema ad una condizione di instabilità.

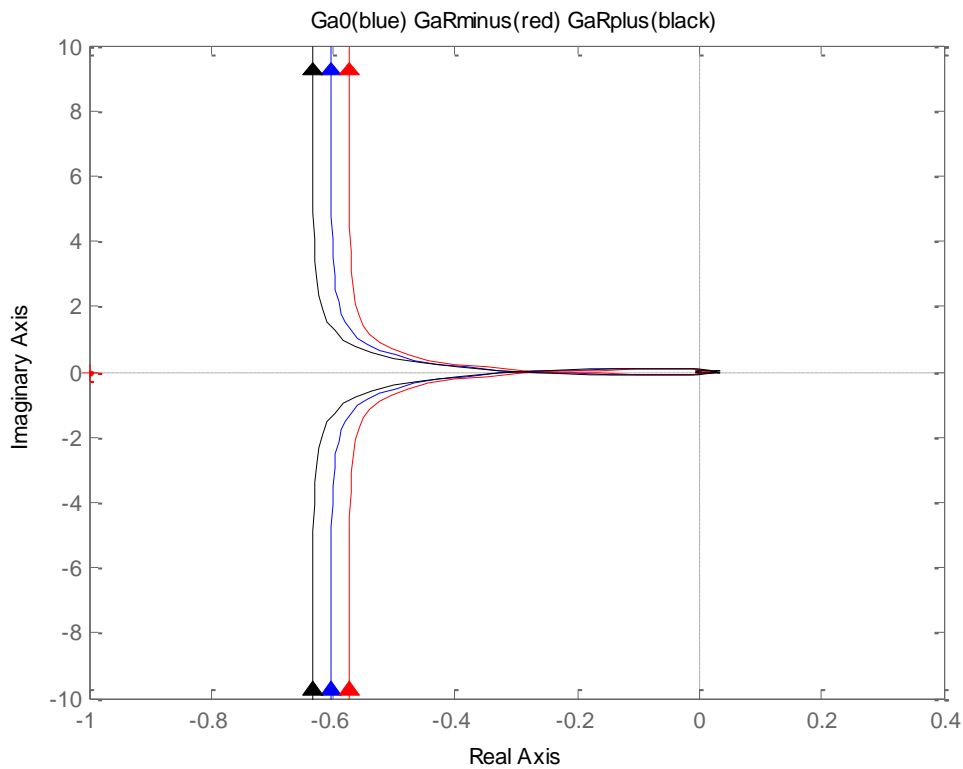


Figura 54: Nyquist, variazione di t_0

In blu è raffigurato il diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento del guadagno d'anello nominale

$$G_{a_{NOMINALE}}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0_0}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0_0}}}$$

mentre in nero e in rosso le funzioni di trasferimento del guadagno d'anello

$$G_{a_{REALE}}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0_0}}} e^{-st_{0_R}}$$

con $t_{0_R} = t_{0_0} + 10\%t_{0_0}$ e $t_{0_R} = t_{0_0} - 10\%t_{0_0}$, rispettivamente.

Dallo zoom seguente si osserva che una variazione positiva del tempo di ritardo accentua l'andamento a spirale del diagramma di Nyquist facendo avvicinare il sistema al punto critico quindi alla condizione di instabilità senza però mai raggiungerla.

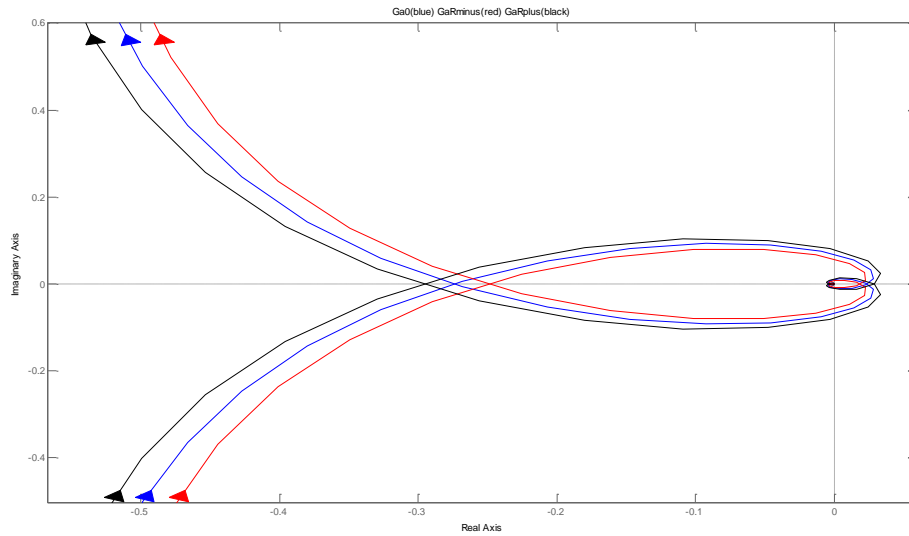


Figura 55: Particolare di Nyquist con variazione di t_0

Variazione della costante di tempo τ_e

Per il plant dell'engine si ipotizza:

- $t_0 = t_{0R} = t_{0_0} = 0.1 \text{ sec}$
- $k_e = k_{eR} = k_{e_0} = 2000 \frac{\text{RPM}}{\text{rad}}$
- $\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e_0} \pm 10\% \tau_{e_0}$

La funzione di guadagno d'anello con l'introduzione della variazione del parametro τ_e diventa:

$$G_a(s) = G_R'(s) \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0_0}}} \frac{1 + \tau_{e_0} s}{k_{e_0}} \frac{k_{eR}}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{0R}}$$

$$= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0_0}}} \frac{1 + \tau_{e_0} s}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{0_0}}$$

Si ha che:

$$\triangleright \Delta G_{TOT}(s) = \frac{1}{[1+H(s)G(s)]^2} \frac{\partial G}{\partial \tau_{eR}} \Big|_{\tau_{eR}=\tau_{e0}} \Delta \tau_e = \frac{1}{[1+G_{aNOMINALE}(s)]^2} \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial \tau_{eR}} \Big|_{\tau_{eR}=\tau_{e0}} \Delta \tau_e$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial \tau_{eR}} \Big|_{\tau_{eR}=\tau_{e0}} &= \frac{-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}} (1 + \tau_{e0}s)(1 + \tau_{eR}s)^{-2}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}} \Big|_{\tau_{eR}=\tau_{e0}} \\ &= \frac{-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}} (1 + \tau_{e0}s)}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(1 + \tau_{e0}s)^2} \\ &= \frac{-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(1 + \tau_{e0}s)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}\right)^2} \frac{-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(1 + \tau_{e0}s)} \Delta \tau_e$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) &= \frac{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})^2}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}} + k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})^2} \frac{-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(1 + \tau_{e0}s)} \Delta \tau_e \\ &= \frac{(-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)^2 (1 + \tau_{e0}s)} \Delta \tau_e \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) = \frac{(-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)^2 (1 + \tau_{e0}s)} \Delta \tau_e$$

$$\triangleright G_{TOT}(s, \tau_{e0}) = \frac{G_{aNOMINALE}(s)}{1+G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{\frac{k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}}{1 + \frac{k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}} = \frac{k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s, \tau_{e0})} = \frac{(-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)^2 (1 + \tau_{e0}s)} \Delta \tau_e \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}$$

$$= \frac{-s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)(1 + \tau_{e0}s)} \Delta\tau_e$$

Come si ricava anche dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s)} &= \frac{1}{1 + G_{aNOMINALE}(s)} \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{1}{1 + G_{aNOMINALE}(s)} \frac{\left. \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial \tau_{eR}} \right|_{\tau_{eR}=\tau_{e0}} \Delta\tau_e}{G_{aNOMINALE}(s)} \\ \Rightarrow \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s)} &= \frac{1}{1 + \frac{k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}} \frac{-sk_0\omega_n^2 e^{-st_{00}} \Delta\tau_e}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}})(1 + \tau_{e0}s)} \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}} \\ &= \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0\omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \left(\frac{-s\Delta\tau_e}{1 + \tau_{e0}s} \right) \end{aligned}$$

- Funzione di sensibilità

Per valutare come varia la funzione di trasferimento totale $\Delta G_{TOT}(s)$ rispetto a quella nominale $G_{TOT}(s)$ in relazione alla variazione del parametro τ_e della funzione di trasferimento della catena diretta $G_a(s)$, si ricavano i diagrammi di Bode della seguente:

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + H(j\omega)G(j\omega)|} \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + G_{aNOMINALE}(s)|} \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$$

Prima di tutto si implementa in Matlab la funzione di trasferimento che identifica la funzione di sensibilità del guadagno d'anello:

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{-s\Delta\tau_e}{1 + \tau_{e0}s}$$

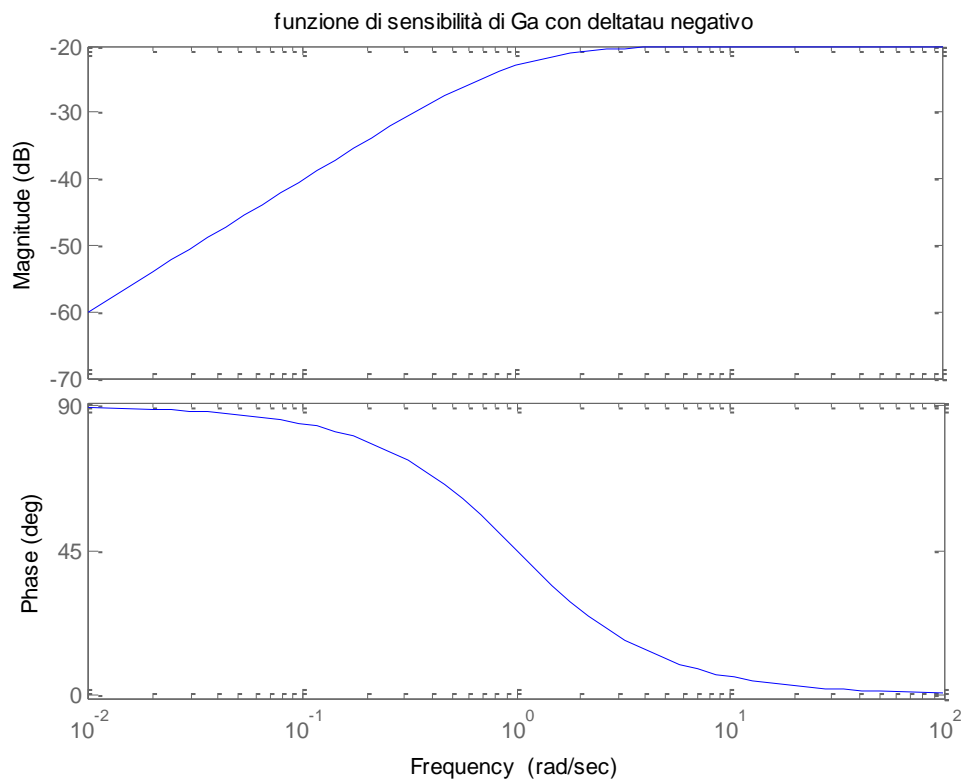
Analisi della stabilità

con $\Delta\tau_e^- = -10\%\tau_e$ e $\Delta\tau_e^+ = +10\%\tau_e$

quindi

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)}^- = \frac{s0.1}{1+\tau_{e0}s} e \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)}^+ = \frac{-s0.1}{1+\tau_{e0}s}$$

Si ottengono i seguenti:



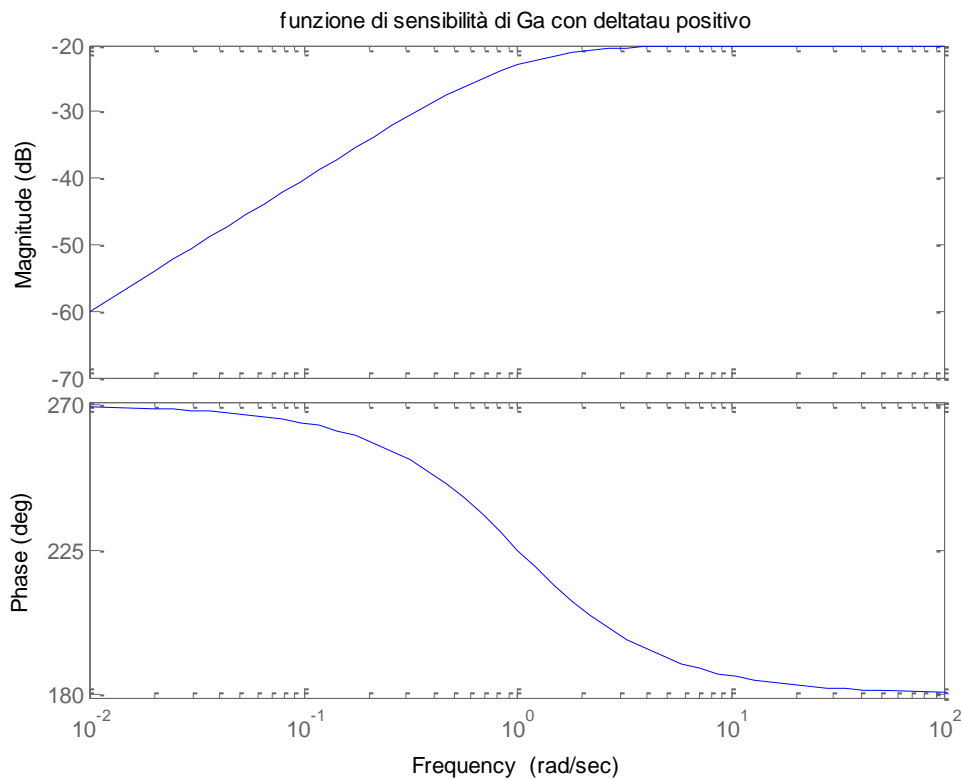


Figura 56: Funzione di sensibilità del guadagno d'anello

I diagrammi di Bode si ricavano facilmente dai diagrammi delle funzioni elementari $(1 + j\omega\tau)^{-1}$ e $(j\omega)^{-\gamma}$. La pendenza dei diagrammi delle ampiezze è pari a +20 fino alla pulsazione di rottura $\omega_c = \frac{1}{\tau_{e0}}$ e si annulla per pulsazioni maggiori. Le fasi sono uguali a $\arg \left\{ \frac{-j\omega\Delta\tau_e}{1+\tau_{e0}j\omega} \right\} = \pm \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\tau_{e0}\omega)$ a seconda che sia, rispettivamente, $\Delta\tau_e$ negativo o $\Delta\tau_e$ positivo.

Si procede poi con la definizione della funzione di trasferimento $1 + G_{aNOMINALE}(s)$ che, implementata in Matlab (in nero), fornisce i seguenti diagrammi di Bode, posti a confronto con quelli della funzione di trasferimento di guadagno d'anello nominale $G_{aNOMINALE}(s)$ (in rosso):

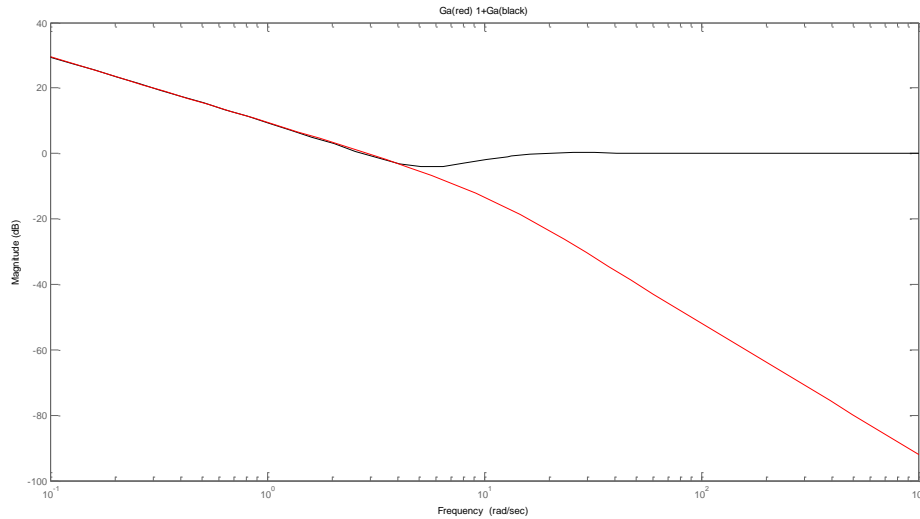


Figura 57: Diagrammi di Bode di Ga e 1+Ga

Fintanto che :

$$\begin{aligned}
 |G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} > 0 &\Rightarrow G_{aNOMINALE}(j\omega) > 1 \Rightarrow 1 + G_{aNOMINALE}(j\omega) \gg 1 \\
 &\Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} \gg 0
 \end{aligned}$$

Se, al contrario:

$$\begin{aligned}
 |G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} < 0 &\Rightarrow 0 < G_{aNOMINALE}(j\omega) < 1 \Rightarrow 1 + G_{aNOMINALE}(j\omega) \cong 1 \\
 &\Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} \cong 0
 \end{aligned}$$

Infine, essendo nota la funzione di sensibilità relativa al guadagno d'anello e la funzione di trasferimento $1 + G_{aNOMINALE}(s)$, è possibile definire, attraverso i diagrammi di Bode, l'andamento della funzione di sensibilità del sistema complessivo $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$, riportata di seguito:

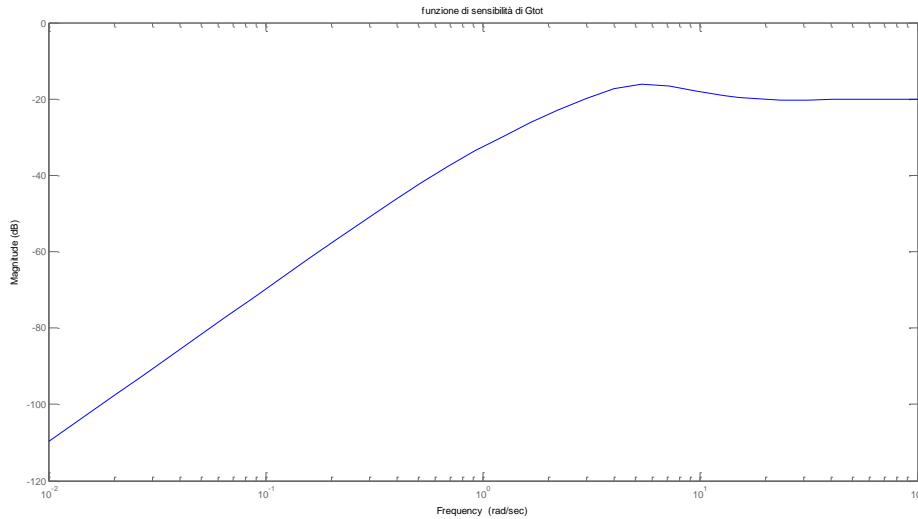


Figura 58: Funzione di sensibilità della funzione di trasferimento complessiva

Si verifica che per tutte le pulsazioni, $\left| \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} \right|_{dB} < 0 \Rightarrow \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} < 1$.

Per valori di pulsazione di circa $10^{-1} \frac{rad}{s}$, la funzione di sensibilità $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$ assume valori di circa -70 dB che corrisponde ad un valore del rapporto tra la due funzioni di trasferimento di circa $3.16 * 10^{-5}$ ($20 \text{Log} \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong -70 \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong 3.16 * 10^{-4}$): da ciò si evince come, per frequenze piccole, una variazione del parametro sulla funzione di trasferimento del guadagno di anello si ripercuota sulla catena in retroazione in modo attenuato.

Le considerazioni fino a qui presentate possono essere verificate con il seguente diagramma di Bode, relativo alle funzioni di sensibilità delle funzioni di trasferimento in catena aperta e in retroazione e alla funzione di trasferimento $1 + G_{aNOMINALE}(s)$:

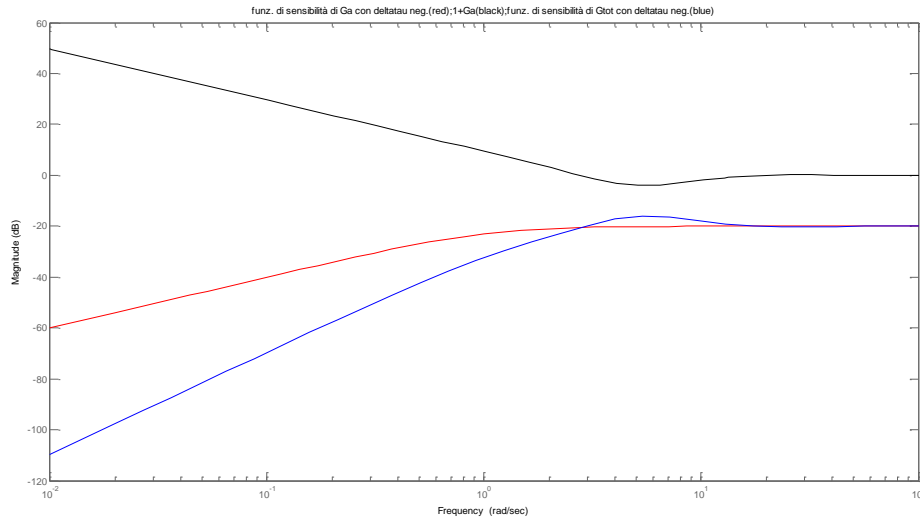


Figura 59: Funzioni di sensibilità e 1+Ga

Quindi, riassumendo:

- Per valori di frequenze per le quali $|1 + G_{aNOMINALE}(s)|_{dB} > 0 \Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(s)| > 1$, si può scrivere $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$ che significa che l'effetto della variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuato sulla catena in retroazione.

In particolare, per valori di pulsazione piccoli ($\cong 10^{-1} \frac{rad}{s}$), il rapporto $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$ vale circa $3.16 * 10^{-4}$ quindi una variazione del parametro sulla funzione di trasferimento del guadagno di anello si ripercuote sulla catena in retroazione in percentuale molto piccola: si verifica che

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$$

- Se $|1 + G_{aNOMINALE}(s)|_{dB} = 0 \Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(s)| \cong 1 \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$ che significa che la variazione della funzione di trasferimento nella catena diretta produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva di circa il 100%.

Si può ritenere che per le frequenze caratteristiche del sistema di controllo in esame, la

variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuata sulla catena in retroazione. Infatti, in corrispondenza del polo più veloce del sistema ($p = -3 \pm 4.084j$) si ha una frequenza di $5.067 \frac{rad}{s}$, superata la quale diviene significativa l'influenza della variazione del parametro della catena diretta sulla catena in retroazione.

- Diagramma di Nyquist

Si riporta il diagramma di Nyquist per verificare che una variazione della costante di tempo non conduca il sistema ad una condizione di instabilità.

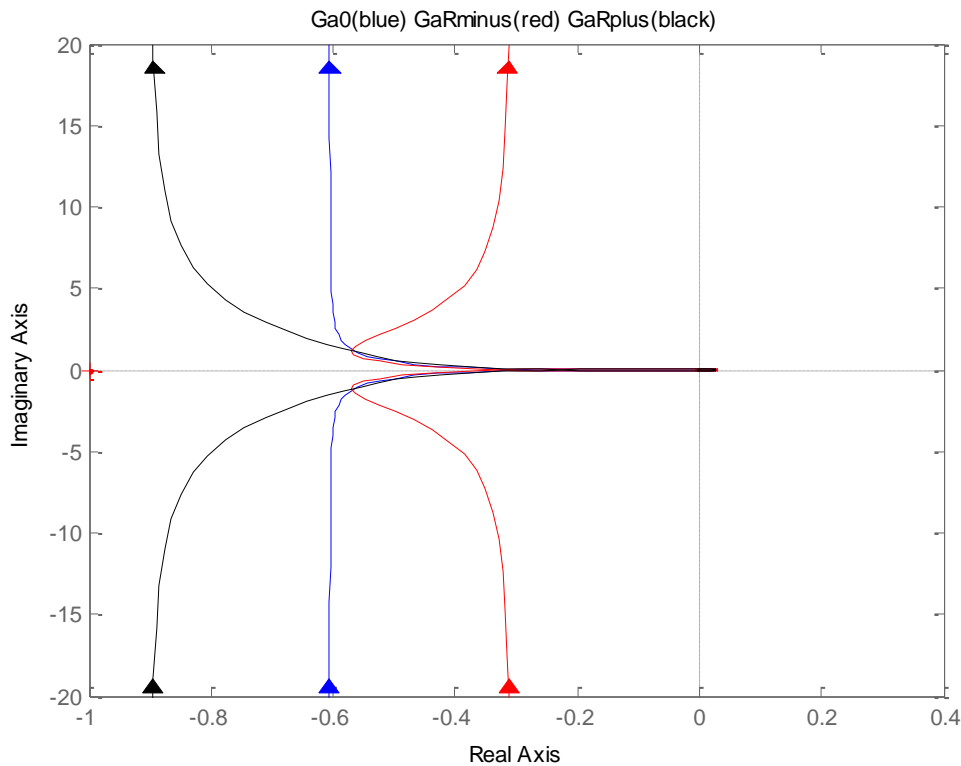


Figura 60: Nyquist, variazione di τ_e

In blu è raffigurato il diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento del guadagno d'anello nominale

$$G_{aNOMINALE}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}$$

mentre in nero e in rosso le funzioni di trasferimento del guadagno d'anello

$$G_{aREALE}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_0}$$

con $\tau_{eR} = \tau_{e0} + 10\% \tau_{e0}$ e $\tau_{eR} = \tau_{e0} - 10\% \tau_{e0}$, rispettivamente.

Si osserva che con una variazione del 10% della costante di tempo non si raggiunge la condizione di instabilità come si verifica dal seguente:

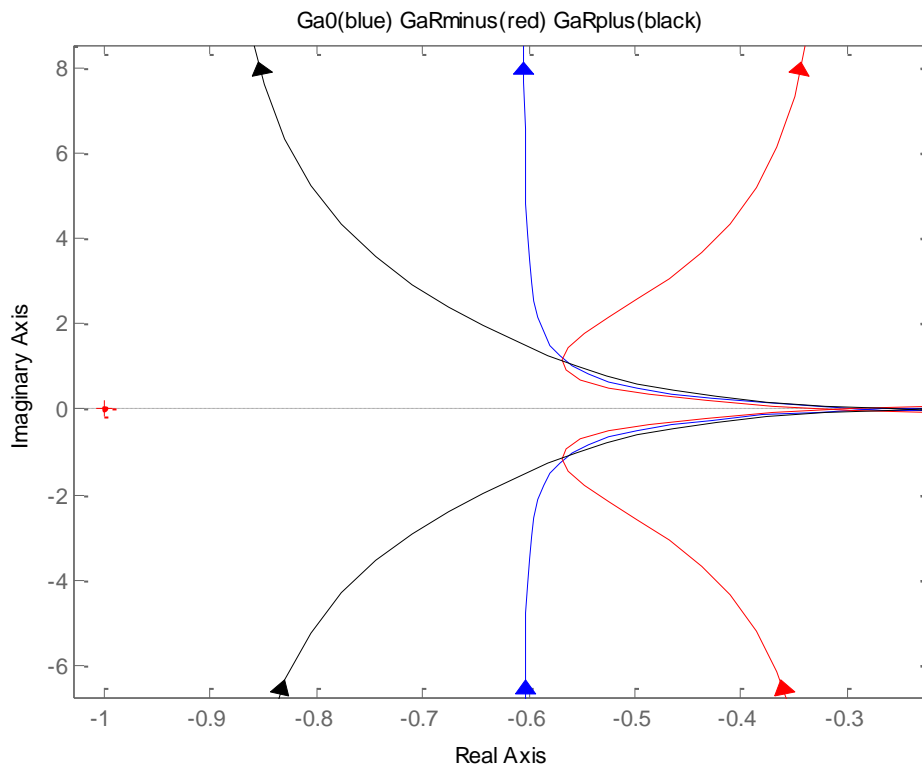


Figura 61: Particolare di Nyquist con variazione di τ_e

Variazione della costante di guadagno k_e

Per il plant dell'engine si ipotizza:

- $t_0 = t_{0R} = t_{00} = 0.1 \text{ sec}$
- $k_e = k_{eR} = k_{e0} \pm 10\% k_{e0}$
- $\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e0} = 1 \text{ sec}$

La funzione di guadagno d'anello con l'introduzione della variazione del parametro k_e diventa:

$$G_a(s) = G_R'(s) \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{k_{e0}} \frac{k_{eR}}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{0R}}$$

$$= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \frac{k_{eR}}{k_{e0}} e^{-st_{00}}$$

Si ha che:

$$\triangleright \Delta G_{TOT}(s) = \frac{1}{[1+H(s)G(s)]^2} \frac{\partial G}{\partial k_{eR}} \Big|_{k_{eR}=k_{e0}} \Delta k_e = \frac{1}{[1+G_{aNOMINALE}(s)]^2} \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial k_{eR}} \Big|_{k_{eR}=k_{e0}} \Delta k_e$$

$$\rightarrow \frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial k_{eR}} \Big|_{k_{eR}=k_{e0}} = \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{k_{e0} (s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})}$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}\right)^2} \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{k_{e0} (s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})} \Delta k_e$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s)$$

$$= \frac{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})^2}{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}} + k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})^2} \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{k_{e0} (s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})} \Delta k_e$$

$$\Rightarrow \Delta G_{TOT}(s) = \frac{(k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})}{k_{e0} (s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2)^2} \Delta k_e$$

$$\rightarrow G_{TOT}(s, k_{e0}) = \frac{G_{aNOMINALE}(s)}{1 + G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{\frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}} = \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s, \tau_{e0})} &= \frac{(k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})}{k_{e0}(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)^2} \Delta k_e \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \\ &= \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{k_{e0}(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \Delta k_e \end{aligned}$$

Come si ricava anche dalla seguente relazione:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s)} &= \frac{1}{1 + G_{aNOMINALE}(s)} \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{1}{1 + G_{aNOMINALE}(s)} \frac{\frac{\partial G_{aREALE}(s)}{\partial k_e} \Big|_{k_e = k_{e0}} \Delta k_e}{G_{aNOMINALE}(s)} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta G_{TOT}(s)}{G_{TOT}(s)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}} \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}} \Delta k_e}{k_{e0}(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})} \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \\ &= \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{\Delta k_e}{k_{e0}} \end{aligned}$$

- Funzione di sensibilità

Per valutare come varia la funzione di trasferimento totale $\Delta G_{TOT}(s)$ rispetto a quella nominale $G_{TOT}(s)$ in relazione alla variazione del parametro k_e della funzione di trasferimento della catena diretta $G_a(s)$, si ricavano i diagrammi di Bode della seguente:

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + H(j\omega)G(j\omega)|} \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|} = \frac{1}{|1 + G_{aNOMINALE}(s)|} \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$$

Prima di tutto si implementa in Matlab la funzione di trasferimento che identifica la funzione di sensibilità del guadagno d'anello:

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} = \frac{\Delta k_e}{k_{e0}}$$

con $\Delta k_e^- = -10\%k_e$ e $\Delta k_e^+ = +10\%k_e$

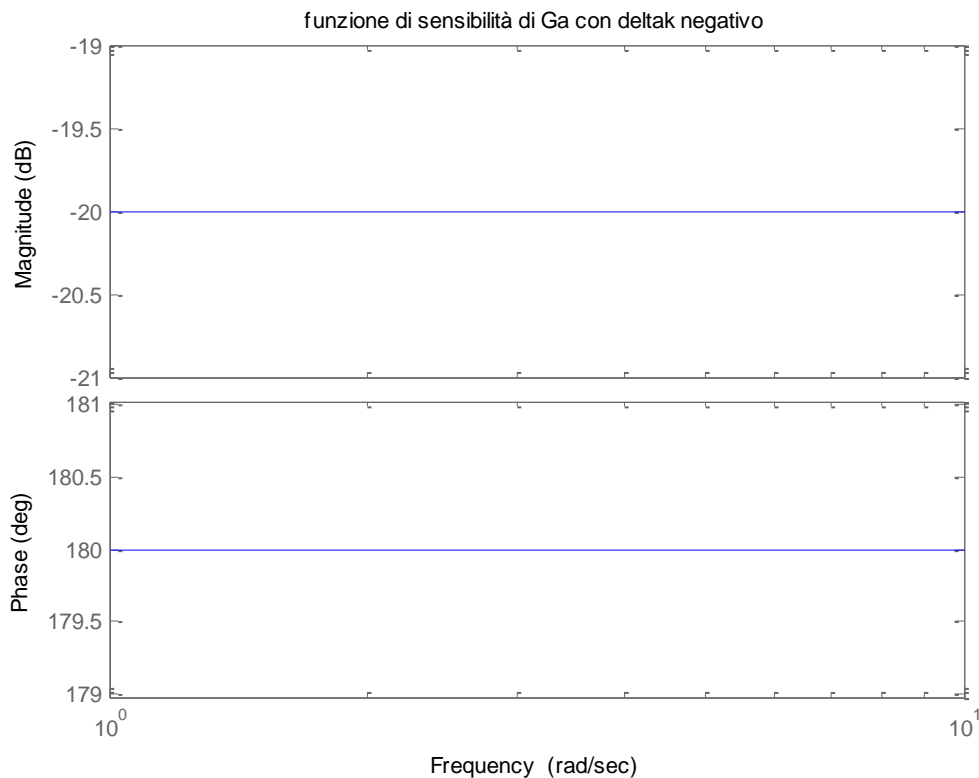
quindi

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)}^- = -0.1$$

e

$$\frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)}^+ = +0.1$$

Si ottengono i seguenti:



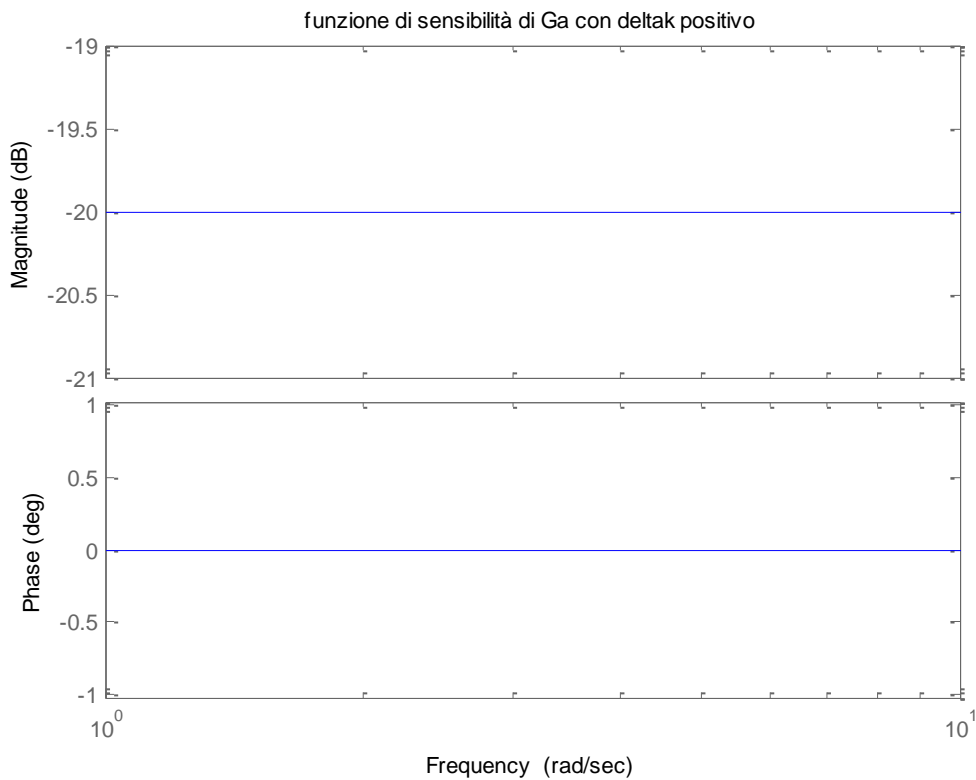


Figura 62: Funzione di sensibilità del guadagno d'anello

I diagrammi di Bode si ricavano facilmente dal diagramma della funzione elementare K . Ricordando che $|K|_{dB} = 20\text{Log}|K|$, si ha che, essendo $|K| < 1$, $|K|_{dB} < 0$ ($|0.1|_{dB} = 20\text{Log}|0.1| = -20\text{ dB}$). Le fasi sono uguali a $\text{arg}\{k\} = 0$ per $\Delta k_e^+ = +10\%k_e$ e a $\text{arg}\{-k\} = \pi$ per $\Delta k_e^- = -10\%k_e$. Si procede poi con la definizione della funzione di trasferimento $1 + G_{a\text{NOMINALE}}(s)$ che, implementata in Matlab (in nero), fornisce i seguenti diagrammi di Bode, posti a confronto con quelli della funzione di trasferimento di guadagno d'anello nominale $G_{a\text{NOMINALE}}(s)$ (in rosso):

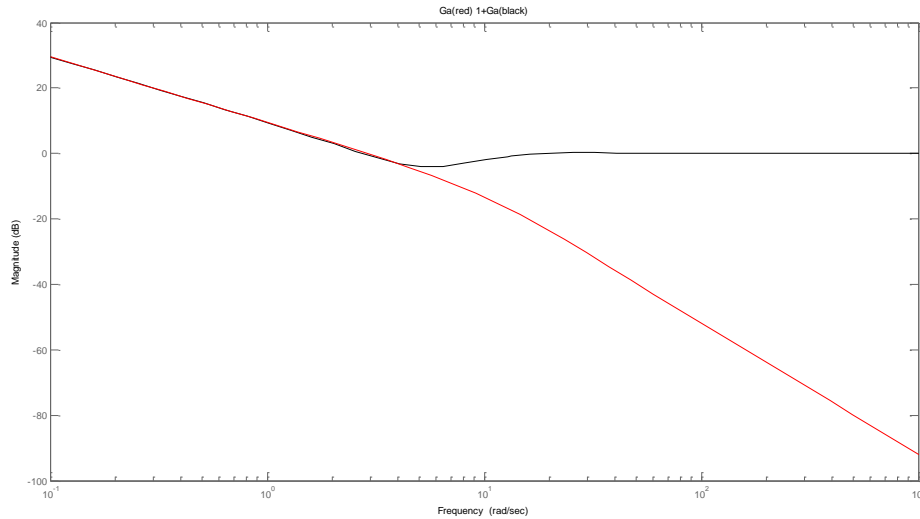


Figura 63: Diagrammi di Bode di Ga e 1+Ga

Fintanto che:

$$\begin{aligned} |G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} > 0 &\Rightarrow G_{aNOMINALE}(j\omega) > 1 \Rightarrow 1 + G_{aNOMINALE}(j\omega) \gg 1 \\ &\Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} \gg 0 \end{aligned}$$

Se, al contrario:

$$\begin{aligned} |G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} < 0 &\Rightarrow 0 < G_{aNOMINALE}(j\omega) < 1 \Rightarrow 1 + G_{aNOMINALE}(j\omega) \cong 1 \\ &\Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(j\omega)|_{dB} \cong 0 \end{aligned}$$

Infine, essendo nota la funzione di sensibilità relativa al guadagno d'anello e la funzione di trasferimento $1 + G_{aNOMINALE}(s)$, è possibile definire, attraverso i diagrammi di Bode, l'andamento della funzione di sensibilità del sistema complessivo $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$, riportata di seguito:

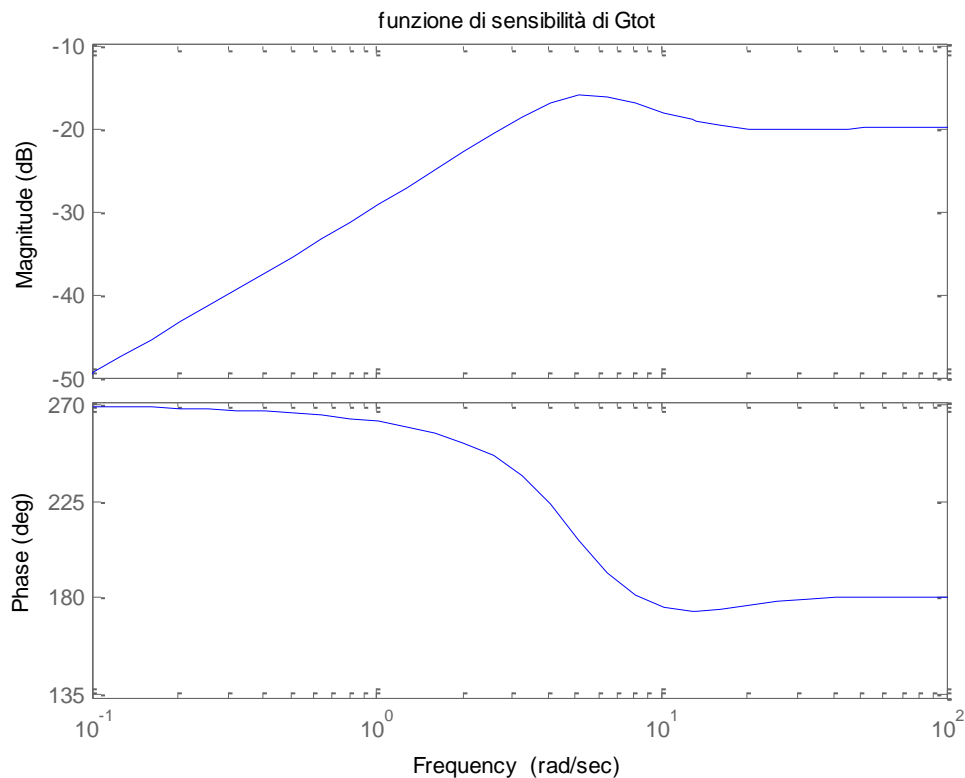


Figura 64: Funzione di sensibilità della funzione di trasferimento complessiva

Per tutti i valori di pulsazione si verifica che $\left| \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} \right|_{dB} < 0 \Rightarrow \frac{\Delta G_a(s)}{G_{aNOMINALE}(s)} < 1$.

Per valori di frequenze per le quali $|1 + G_{aNOMINALE}(s)|_{dB} > 0 \Rightarrow |1 + G_{aNOMINALE}(s)| > 1$, si può scrivere $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{aNOMINALE}(s)|}$ che significa che l'effetto della variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuato sulla catena in retroazione.

In particolare, per valori di pulsazione piccoli, la funzione di sensibilità $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$ assume valori di circa -50 dB che corrisponde ad un valore del rapporto tra le due funzioni di trasferimento di circa $3.16 \cdot 10^{-3}$ ($20 \text{Log} \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong -50 \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong 3.16 \cdot 10^{-3}$): da ciò si evince come, per frequenze di circa $10^{-1} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, una variazione del parametro sulla funzione di trasferimento del guadagno di anello si ripercuota sulla catena in retroazione in percentuale molto piccola.

Le considerazioni fino a qui presentate possono essere verificate con il seguente diagramma di Bode, relativo alle funzioni di sensibilità delle funzioni di trasferimento in catena aperta e in retroazione e alla funzione di trasferimento $1 + G_{aNOMINALE}(s)$:

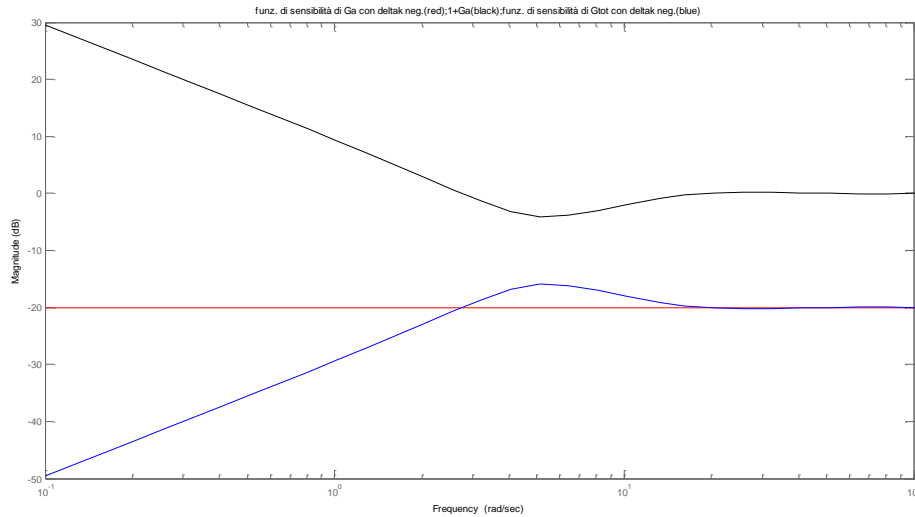


Figura 65: Funzioni di sensibilità e 1+Ga

Quindi, riassumendo:

- Per valori di frequenze per le quali

$$|1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)|_{dB} > 0 \Rightarrow |1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)| > 1, \text{ si può scrivere } \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{a_{NOMINALE}}(s)|}$$

che significa che l'effetto della variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuato sulla catena in retroazione.

In particolare, per valori di pulsazione di circa $10^{-1} \frac{rad}{s}$, il rapporto $\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|}$ vale circa $3.16 * 10^{-3}$ quindi una variazione del parametro sulla funzione di trasferimento del guadagno di anello si ripercuote sulla catena in retroazione in percentuale molto piccola: si verifica che

$$\frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{a_{NOMINALE}}(s)|}$$

- Se $|1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)|_{dB} = 0 \Rightarrow |1 + G_{a_{NOMINALE}}(s)| \cong 1 \Rightarrow \frac{|\Delta G_{TOT}(j\omega)|}{|G_{TOT}(j\omega)|} \cong \frac{|\Delta G_a(s)|}{|G_{a_{NOMINALE}}(s)|}$ che significa che la variazione della funzione di trasferimento nella catena diretta produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva di circa il 100%.

Si può ritenere che per le frequenze caratteristiche del sistema di controllo in esame, la variazione del parametro sulla catena diretta viene attenuata sulla catena in retroazione. Infatti, in

corrispondenza del polo più veloce del sistema ($p = -3 \pm 4.084j$) si ha una frequenza di $5.067 \frac{rad}{s}$, superata la quale diviene significativa l'influenza della variazione del parametro della catena diretta sulla catena in retroazione.

- Diagramma di Nyquist

Si riporta il diagramma di Nyquist per verificare che una variazione della costante di tempo non conduca il sistema ad una condizione di instabilità.

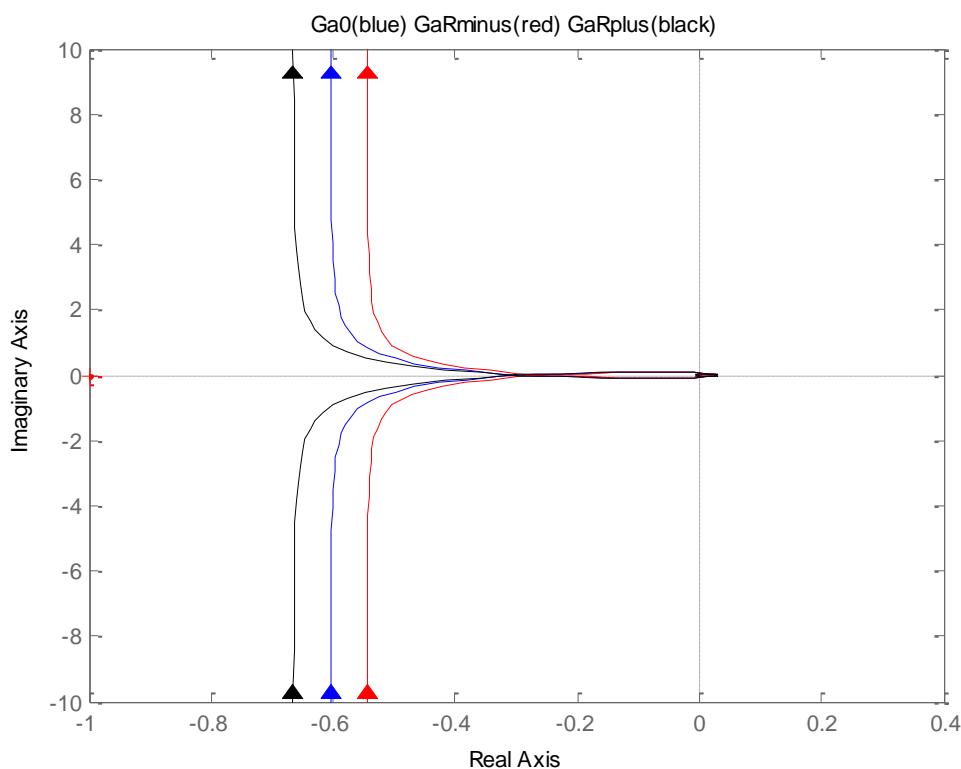


Figura 66: Nyquist, variazione di k_e

In blu è raffigurato il diagramma di Nyquist per la funzione di trasferimento del guadagno d'anello nominale

$$G_{aNOMINALE}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}}$$

mentre in nero e in rosso le funzioni di trasferimento del guadagno d'anello

$$G_{aREALE}(s) = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \frac{k_{eR}}{k_{e0}} e^{-st_{00}}$$

con $k_{eR} = k_{e0} + 10\%k_{e0}$ e $k_{eR} = k_{e0} - 10\%k_{e0}$, rispettivamente.

Si osserva che una variazione positiva della costante k_e accentua l'andamento a spirale del diagramma di Nyquist facendo avvicinare il sistema al punto critico quindi alla condizione di instabilità senza mai raggiungerla.

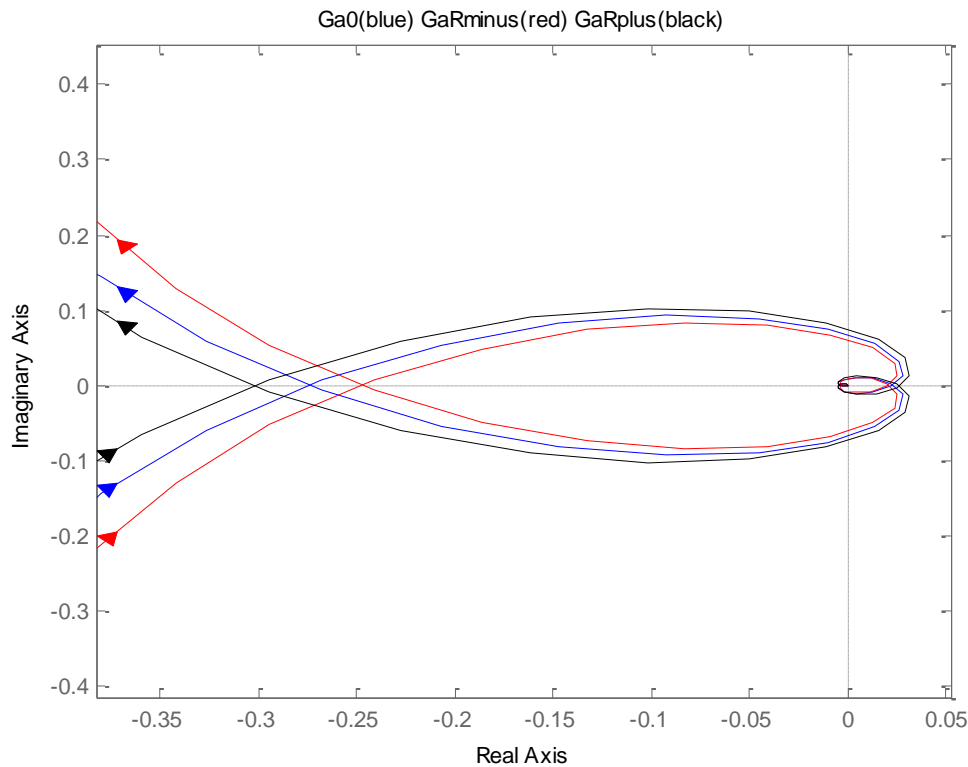


Figura 67: Particolare di Nyquist con variazione di k_e

In conclusione, con l'analisi appena terminata si è verificato che con una variazione dei parametri t_0, τ_e, k_e del 10% rispetto al valore nominale il sistema rimane stabile. Il parametro che più di tutti pone a rischio la stabilità con una sua variazione è τ_e .

Inoltre, si è osservato che per le frequenze caratteristiche del sistema nel presente elaborato studiato, l'effetto di una variazione dei parametri sulla catena diretta viene attenuato sulla catena in retroazione.

2.2. Analisi del comportamento a regime

Obiettivo di questa analisi è verificare che gli errori a regime, calcolati ipotizzando una variazione dei parametri, siano paragonabili a quelli desiderati per il sistema nominale.

Genericamente, l'errore a regime dipende sia dal tipo di sistema sia dal valore dei parametri: in particolare, il tipo di errore (finito, infinito, nullo) dipende dal tipo di sistema mentre la sua entità dipende dal valore dei parametri.

In particolare, l'errore del sistema in risposta al gradino, essendo nullo, rimarrà tale e verrà quindi tralasciato nello studio del comportamento a regime.

Si considera invece l'entità dell'errore nel caso in cui questo sia finito e cioè nel caso in cui si abbia un segnale di ingresso a rampa: la variazione dei parametri non influirà sul tipo di errore, che resterà finito, ma sul suo valore.

Si calcola, prima di tutto, l'errore del plant nominale così da poter stabilire di quanto questo si discosti da quello che si ottiene introducendo una variazione dei parametri.

Errore del plant nominale

Si considera un sistema in retroazione unitaria con ingresso di riferimento $u(t)$ a rampa e uscita $y(t)$. Si ha che:

$$e(t) = u(t) - y(t)$$

$$e(s) = u(s) - y(s)$$

$$\frac{e(s)}{u(s)} = 1 - \frac{y(s)}{u(s)} = 1 - \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} = \frac{G_a(s)}{1 + G_a(s)} \Rightarrow e(s) = \frac{1}{1 + G_a(s)} u(s)$$

con $u(s) = \frac{1}{s^2}$.

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \Rightarrow \theta_{rif}(t) = \theta(t) \text{ per } t \rightarrow \infty \text{ (errore a regime)}$$

E per il teorema del valore finale (vedere appendice B), $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s)$.

Si considera la funzione di guadagno d'anello nominale dell'engine soltanto, considerato che l'errore in risposta alla rampa del loop interno è nullo. Quindi,

$$\begin{aligned} G_a(s) &= G_{a_{Engine}}(s) = G_R'(s) \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} \\ &= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau_e s}{k_e} \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} \\ &= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} e^{-st_0} \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} e_\infty &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} e^{-st_0}} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \text{con de l'Hôpital} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} t_0}{3s^3 + 4\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0) + k_0 \omega_n^2 (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0)} \\ &= \frac{2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 t_0}{\omega_n^2} = \frac{2\delta \omega_n + \omega_n^2 t_0}{\omega_n^2} = 0.33 = 33\% \end{aligned}$$

percentuale ottenuta sostituendo nel plant nominale i valori dei parametri $\delta = 0.5911$, $\omega_n = 5.068 \frac{rad}{s}$, $t_0 = 0.1 \text{ sec} = t_{0_0}$ (valore nominale del ritardo finito).

Variazione del tempo di ritardo t_0

Per il plant dell'engine si ipotizza:

- $t_0 = t_{0R} = t_{0_0} \pm 10\% t_{0_0}$
- $k_e = k_{eR} = k_{e_0} = 2000 \frac{RPM}{rad}$
- $\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e_0} = 1 \text{ sec}$

La funzione di guadagno d'anello con l'introduzione della variazione del parametro t_0

Analisi del comportamento a regime

diventa:

$$G_a(s) = G_R'(s) \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{k_{e0}} \frac{k_{eR}}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{0R}}$$

$$= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} e^{-st_{0R}}$$

Quindi,

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} e^{-st_{0R}}} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} + k_0 \omega_n^2 e^{-st_{0R}}} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{con de l'Hôpital } \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} t_0}{3s^2 + 4\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0) + k_0 \omega_n^2 (e^{-st_{0R}} - se^{-st_{0R}} t_{0R})}$$

$$= \frac{2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 t_0}{\omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 + k_0 \omega_n^2} = \frac{2\delta \omega_n + \omega_n^2 t_0}{\omega_n^2} = 0.33 = 33\%$$

Variazione della costante di tempo τ_e

Per il plant dell'engine si ipotizza:

- $t_0 = t_{0R} = t_{0_0} = 0.1 \text{ sec}$
- $k_e = k_{eR} = k_{e0} = 2000 \frac{RPM}{rad}$
- $\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e0} \pm 10\% \tau_{e0}$

La funzione di guadagno d'anello con l'introduzione della variazione del parametro τ_e diventa:

Analisi del comportamento a regime

$$G_a(s) = G_R'(s) \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{k_{e0}} \frac{k_{eR}}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{0R}}$$

$$= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{00}}$$

Quindi,

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{1 + \tau_{eR} s}} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})(1 + \tau_{eR} s)}{(s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})(1 + \tau_{eR} s) + k_0 \omega_n^2 (1 + \tau_{e0} s) e^{-st_{00}}} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow con de l'Hôpital

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2s + 2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00} t_{00}})(1 + \tau_{eR} s) + (s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}}) \tau_{eR}}{(2s + 2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00} t_{00}})(s + \tau_{eR} s^2) + (s^2 + 2\delta \omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_{00}})(2\tau_{eR} s + 1) + k_0 \omega_n^2 [(1 + 2\tau_{e0} s) e^{-st_{00}} - (s + \tau_{e0} s^2) e^{-st_{00} t_{00}}]}$$

$$= \frac{2\delta \omega_n + k_0 \omega_n^2 t_{00}}{\omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 + k_0 \omega_n^2} = \frac{2\delta \omega_n + \omega_n^2 t_{00}}{\omega_n^2} = 0.33 = 33\%$$

Variazione della costante di guadagno k_e

Per il plant dell'engine si ipotizza:

- $t_0 = t_{0R} = t_{00} = 0.1 \text{ sec}$
- $k_e = k_{eR} = k_{e0} \pm 10\% k_{e0}$
- $\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e0} = 1 \text{ sec}$

La funzione di guadagno d'anello con l'introduzione della variazione del parametro k_e diventa:

Analisi del comportamento a regime

$$G_a(s) = G_R'(s) \frac{k_e}{1 + \tau_e s} e^{-st_0} = \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1 + \tau_{e0} s}{k_{e0}} \frac{k_{eR}}{1 + \tau_{eR} s} e^{-st_{0R}}$$

$$= \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{k_{eR}}{k_{e0}} e^{-st_0}$$

Quindi,

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{k_{eR}}{k_{e0}} e^{-st_0}} \frac{1}{s^2}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}) k_{e0}}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}) k_{e0} + k_0 \omega_n^2 k_{eR} e^{-st_0}} \frac{1}{s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow con de l'Hôpital

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_{e0} (2s + 2\delta\omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} t_0)}{k_{e0} (3s^2 + 4\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0)) + k_0 \omega_n^2 k_{eR} (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0)}$$

$$= \frac{k_{e0} (2\delta\omega_n + k_0 \omega_n^2 t_0)}{k_0 \omega_n^2 k_{eR}} = \frac{k_{e0} (2\delta\omega_n + \omega_n^2 t_0)}{\omega_n^2 k_{eR}} =$$

$$\rightarrow 30\% \text{ con } k_{eR} = k_{e0} + 10\% k_{e0}$$

$$\rightarrow 37\% \text{ con } k_{eR} = k_{e0} - 10\% k_{e0}$$

Dall'analisi condotta si deduce che le variazioni dei parametri t_0 e τ_e non modificano l'errore a regime del plant nominale proprio perché sono parametri caratteristici del transitorio, non del comportamento a regime, come invece lo è k_e , la cui variazione determina una variazione della percentuale dell'errore del -3% e del $+4\%$ rispetto al valore nominale.

3. Risultati sperimentali

Nei capitoli precedenti è stato progettato il sistema di controllo e si condotto uno studio per valutare la sensibilità dello stesso alla variazione di alcuni parametri caratteristici del plant del motore dell'aereo, t_0, τ_e, k_e , in termini di comportamento a regime e stabilità.

Il sistema che si desidera controllare non coincide infatti esattamente con il sistema reale, del quale ne costituisce un modello, cioè un'approssimazione: si è resa quindi necessaria un'indagine sulla robustezza del sistema progettato per verificare che l'incertezza che lo caratterizza, dovuta a parametri dello stesso non noti con precisione e/o soggetti al variare nel tempo, non comprometta il funzionamento accettabile del progetto analitico del regolatore.

Si analizza di seguito la risposta del sistema ad un gradino unitario con l'intervento delle stesse variazioni parametriche di t_0, τ_e, k_e considerate nello studio della sensibilità alla variazione dei parametri presentato nel capitolo precedente:

- $t_{0R} = t_{0_0} \pm 10\%t_{0_0}$
- $k_{eR} = k_{e_0} \pm 10\%k_{e_0}$
- $\tau_{eR} = \tau_{e_0} \pm 10\%\tau_{e_0}$

Avendo già dimostrato che il loop interno, essendo caratterizzato da una dinamica dieci volte più veloce rispetto a quella del motore dell'aereo, non influisce sulla dinamica del sistema complessivo, le simulazioni sono effettuate considerando soltanto la presenza dell'anello di retroazione dell'engine.

Variazione del tempo di ritardo t_0

- Si considera una variazione del tempo di ritardo t_0 del +10% rispetto al valore nominale $t_{0_0} = 0.1 \text{ sec}$:

$$t_{0R} = t_{0_0} + 10\%t_{0_0} = 0.11 \text{ sec}$$

Il sistema è stato progettato sulla base del valore nominale del tempo di ritardo con una specifica sulla sovralongazione pari a $S\% = 10\%$, come si può osservare dal plot della risposta del sistema al gradino unitario per un valore di $t_0 = t_{0_0} = 0.1 \text{ sec}$:

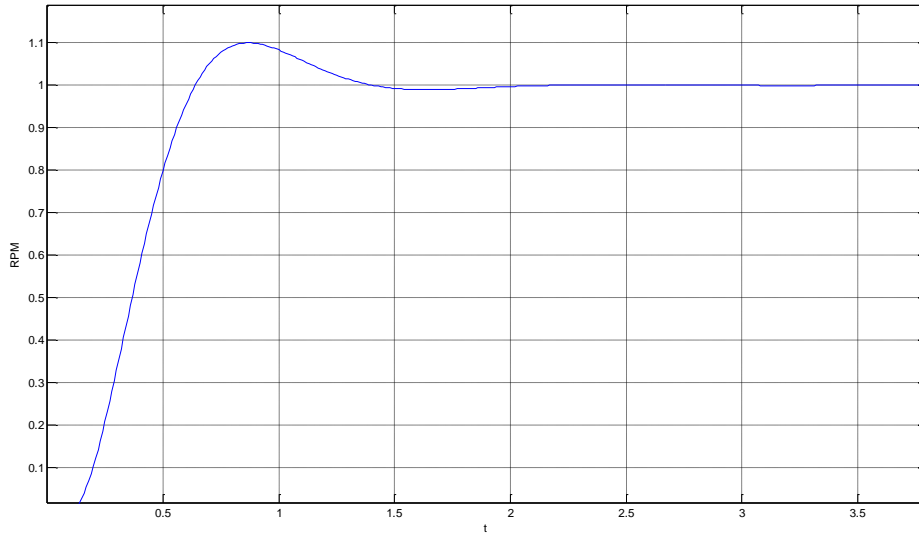


Figura 68: Risposta del sistema al gradino unitario con valore nominale di t_0

Aumentando il tempo di ritardo del 10% del valore nominale si osserva che la massima sovralongazione raggiunge il 12% (in rosso) con una variazione del 2% rispetto al valore di specifica del progetto che si può quindi ritenere soddisfatta per una variazione del parametro di tale entità.

Risultati sperimentali

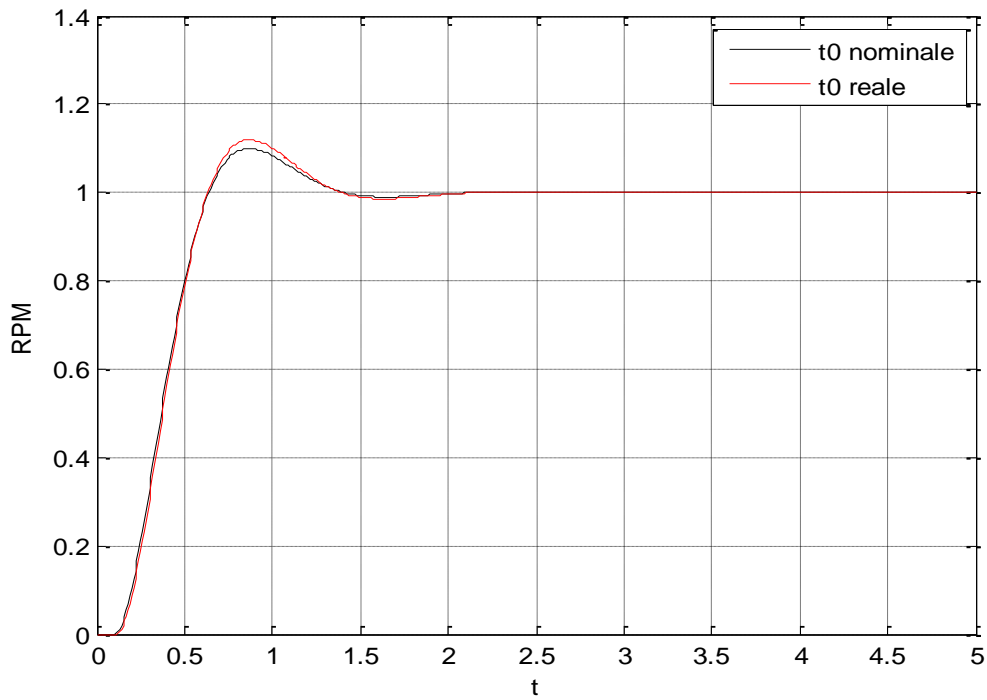


Figura 69: Risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione del tempo di ritardo t_0

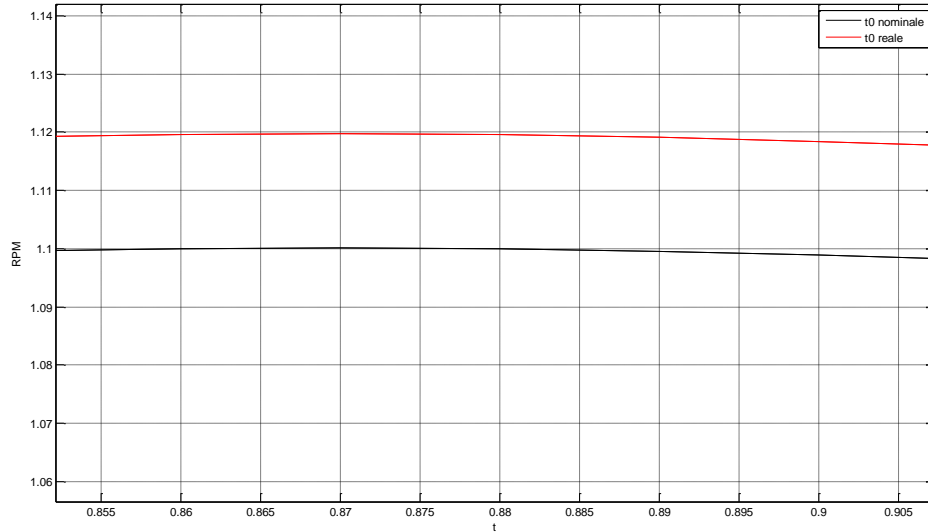


Figura 70: Particolare, risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione di t_0

Per quanto riguarda il comportamento a regime, nel capitolo precedente si è dimostrato che una variazione del tempo di ritardo non modifica il valore finito ($\cong 33\%$) dell'errore del sistema in risposta ad una rampa, come si può verificare anche dai seguenti grafici che rappresentano l'andamento dell'errore considerando il valore nominale del tempo di ritardo (in nero) e quello

aumentato del 10% (in rosso):

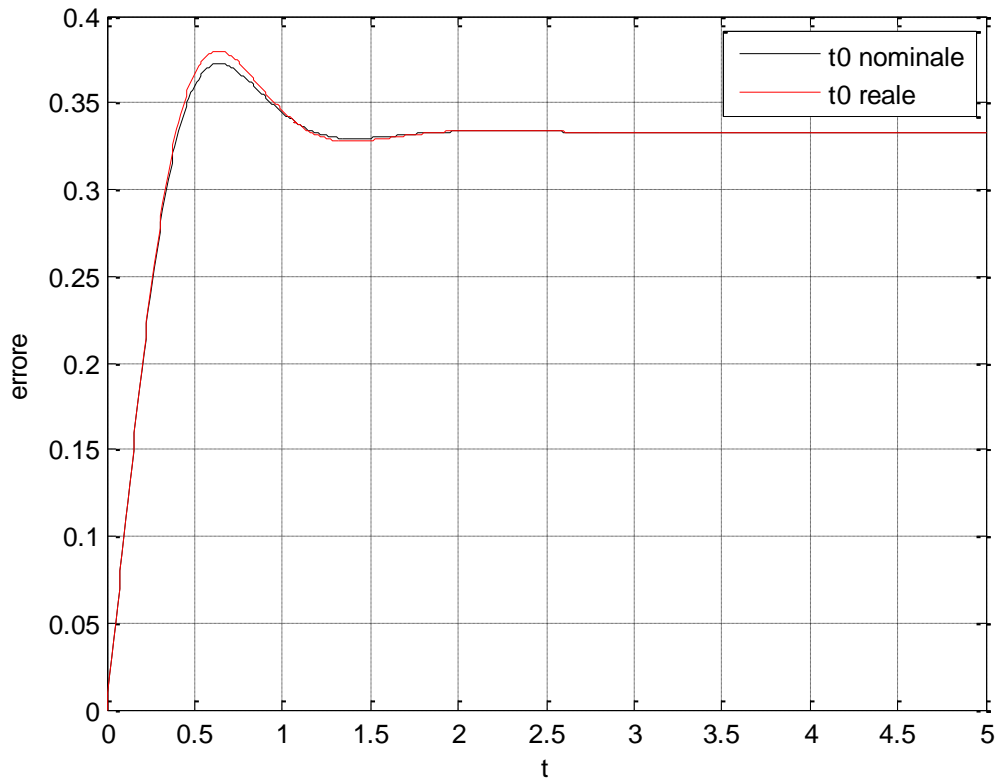


Figura 71: Errore in risposta alla rampa con t_0 nominale e con variazione di t_0

- Si considera una variazione del tempo di ritardo t_0 del -10% rispetto al valore nominale $t_{0_0} = 0.1 \text{ sec}$:

$$t_{0_R} = t_{0_0} - 10\%t_{0_0} = 0.09 \text{ sec}$$

Diminuendo il tempo di ritardo del 10% del valore nominale si osserva che la massima sovraelongazione raggiunge l' 8.2% (in rosso) con una variazione di circa 1.8% rispetto al valore di specifica del progetto che si può quindi ritenere soddisfatta per una variazione del parametro di tale entità.

Risultati sperimentali

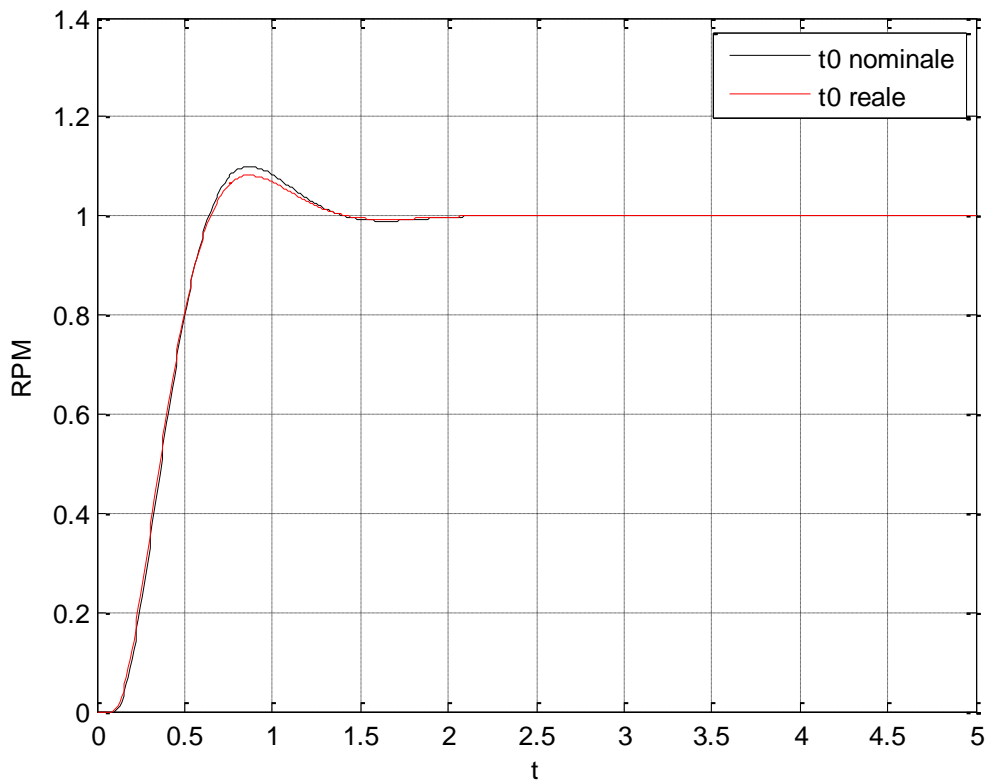


Figura 72: Risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione del tempo di ritardo t_0

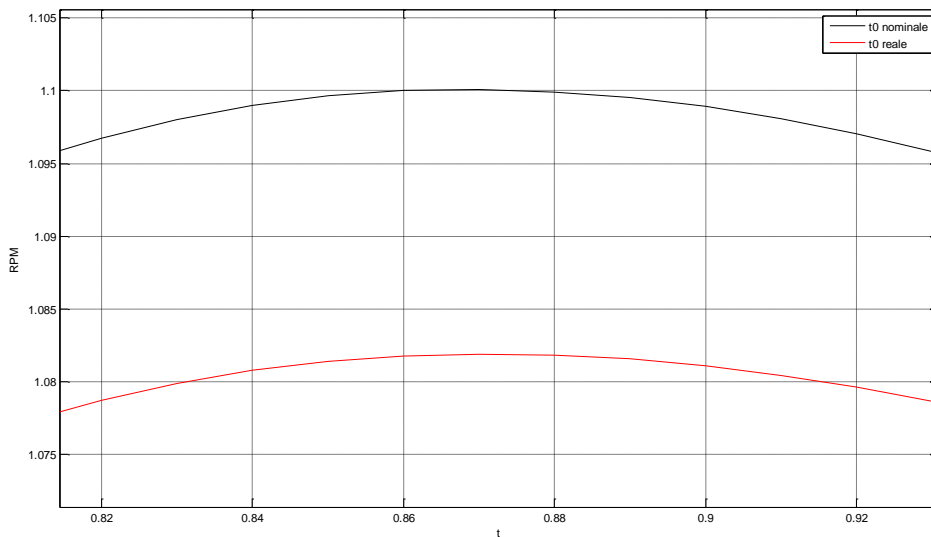


Figura 73: Particolare, risposta del sistema al gradino unitario con t_0 nominale e con variazione di t_0

Per quanto riguarda il comportamento a regime, nel capitolo precedente si è dimostrato che una variazione del tempo di ritardo non modifica il valore finito ($\cong 33\%$) dell'errore del sistema in risposta ad una rampa, come si può verificare anche dai seguenti grafici che rappresentano

Risultati sperimentali

l'andamento dell'errore considerando il valore nominale del tempo di ritardo (in nero) e quello diminuito del 10% (in rosso):

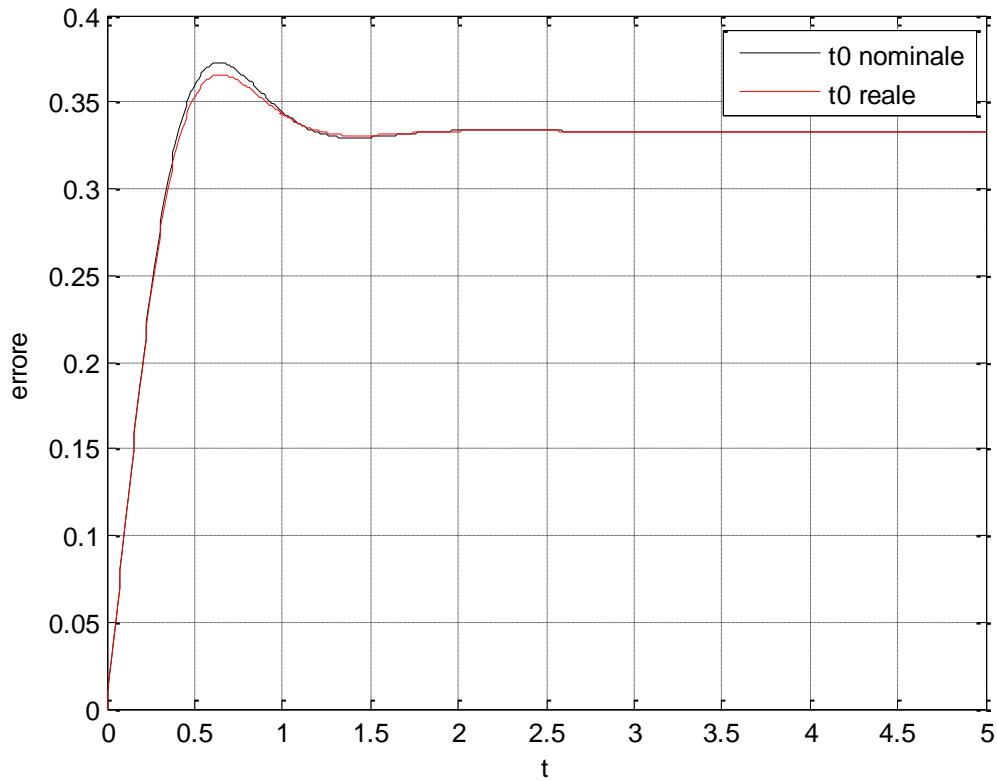


Figura 74: Errore in risposta alla rampa con t_0 nominale e con variazione di t_0

La condizione critica di instabilità può insorgere all'aumentare del tempo di ritardo: si è dimostrato che con una variazione del +10% del valore nominale di t_0 il sistema rimane stabile, le specifiche di progetto sono rispettate e il comportamento a regime, in termini di errore, rimane invariato.

Si ipotizza ora che il valore nominale subisca un incremento del 100% quindi si ipotizza un $t_{0R} = t_{0_0} + 100\%t_{0_0} = 0.2 \text{ sec}$.

Risultati sperimentali

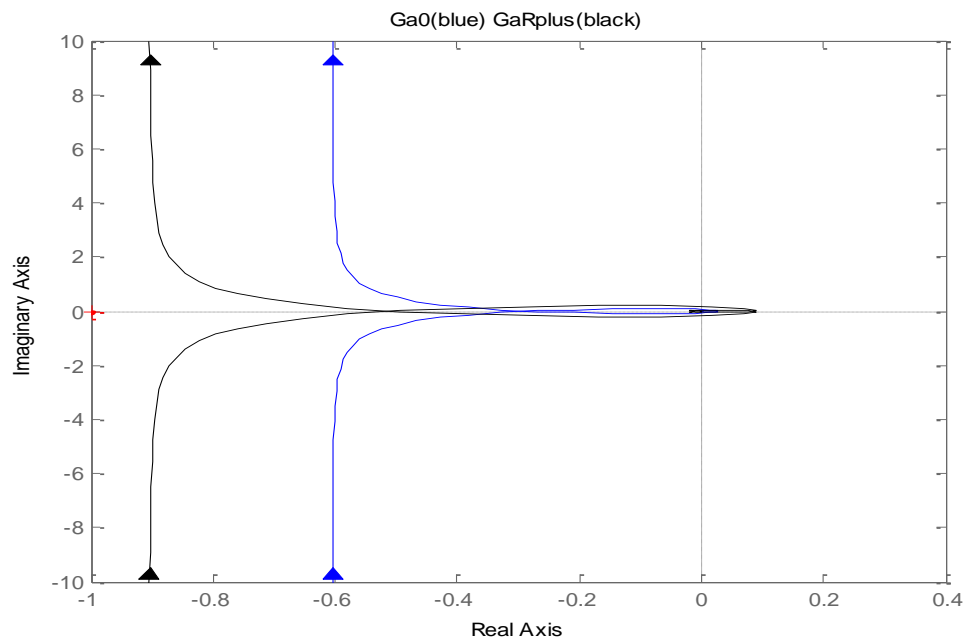


Figura 75: Nyquist con variazione di t_0 del 100%

Anche in tal caso il diagramma di Nyquist non tocca né circonda il punto critico $-1 + 0j$.

La risposta del sistema al gradino unitario è la seguente:

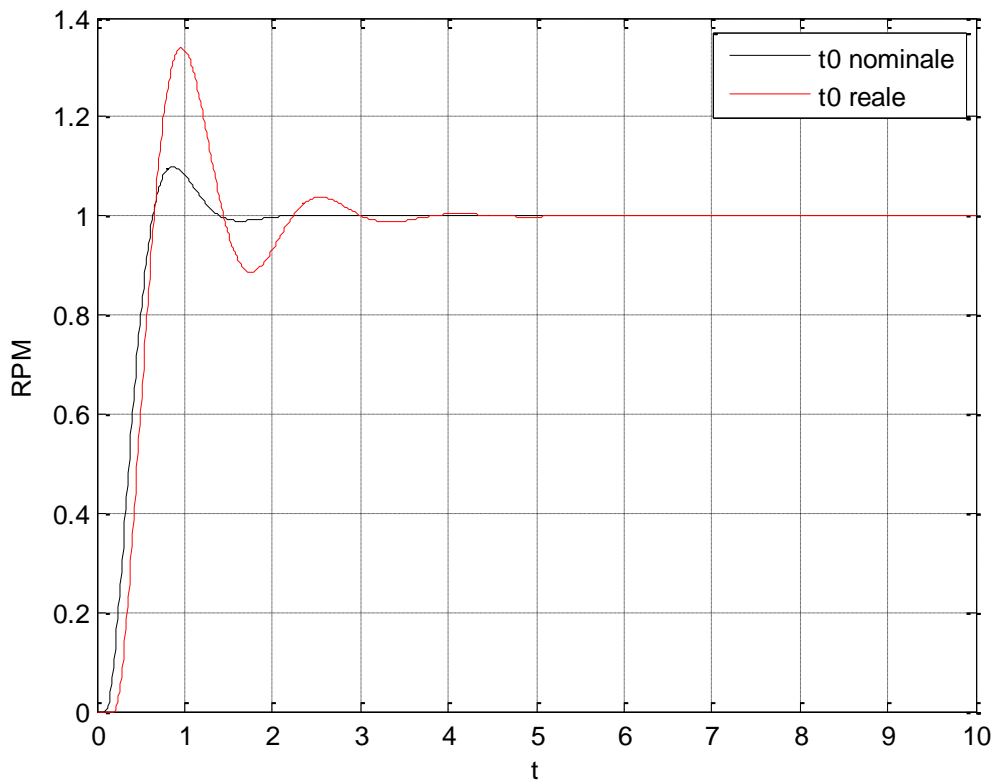


Figura 76: Risposta del sistema al gradino unitario con variazione di t_0 del 100%

Con un incremento del 100% del valore nominale si raggiunge una percentuale di massima sovralongazione del 34% e un tempo di assestamento maggiore rispetto a quello di 1 sec utilizzato per la specifica di progetto con il valore nominale di t_0 .

L'errore in risposta alla rampa non subisce modifiche in quanto, come precedentemente dimostrato, non dipende dalla variazione del tempo di ritardo.

In conclusione, la robustezza del sistema al variare del parametro t_0 risulta verificata anche con l'ipotesi molto severa di un errore del 100% sul valore nominale, nonostante venga raggiunto un valore di massima sovralongazione maggiore del 30% che può generare fluttuazioni tali da compromettere il buon funzionamento del sistema.

Variazione della costante di tempo τ_e

- Si considera una variazione della costante di tempo τ_e del +10% rispetto al valore nominale $\tau_e = 1 \text{ sec}$:

$$\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e0} + 10\% \tau_{e0} = 1.1 \text{ sec}$$

Aumentando la costante di tempo del 10% del valore nominale si osserva che la massima sovraelongazione raggiunge il 9.5% (in rosso) con una diminuzione dello 0.5% rispetto al valore di specifica del progetto che si può quindi ritenere soddisfatta per una variazione del parametro di tale entità. Dalla risposta al gradino sotto riportata si nota anche che all'aumentare della costante di tempo il sistema si avvicina più lentamente al valore finale dell'uscita.

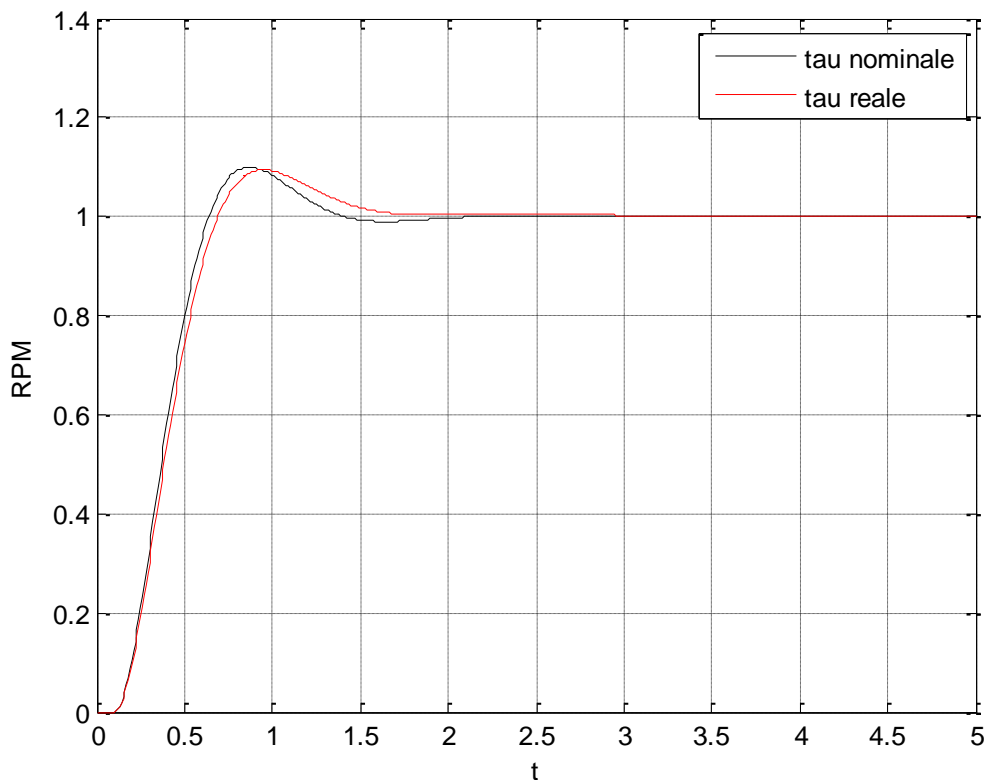


Figura 77: Risposta del sistema al gradino unitario con τ_e nominale e con variazione della costante di tempo τ_e

Per quanto riguarda il comportamento a regime, nel capitolo precedente si è dimostrato che una variazione della costante di tempo non modifica il valore finito ($\cong 33\%$) dell'errore del sistema in risposta ad una rampa, come si può verificare anche dai seguenti grafici che rappresentano l'andamento dell'errore considerando il valore nominale di τ_e (in nero) e quello aumentato del 10% (in rosso):

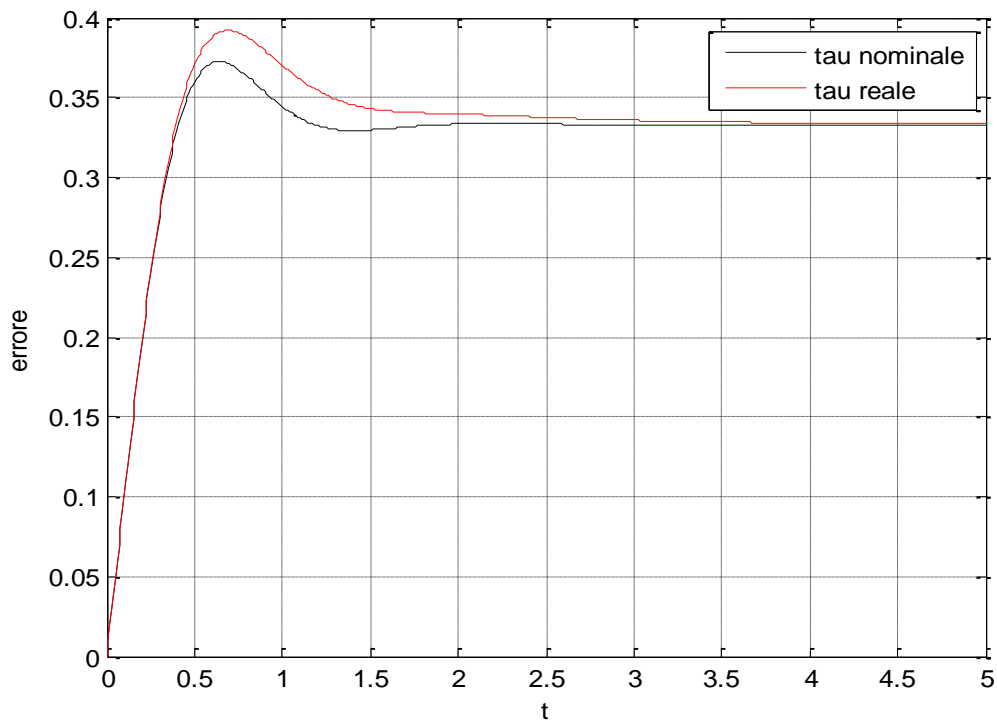


Figura 78: Errore in risposta alla rampa con τ_e nominale e con variazione di τ_e

- Si considera una variazione della costante di tempo τ_e del -10% rispetto al valore nominale $\tau_e = 1 \text{ sec}$:

$$\tau_e = \tau_{eR} = \tau_{e0} + 10\% \tau_{e0} = 0.9 \text{ sec}$$

Diminuendo la costante di tempo del 10% del valore nominale si osserva che la massima sovralongazione raggiunge circa l' 11% (in rosso) con un aumento dell' 1% rispetto al valore di specifica del progetto che si può quindi ritenere soddisfatta per una variazione del parametro di tale entità. Dalla risposta al gradino sotto riportata si nota anche che al diminuire della costante di tempo il sistema si avvicina più velocemente al valore finale dell'uscita.

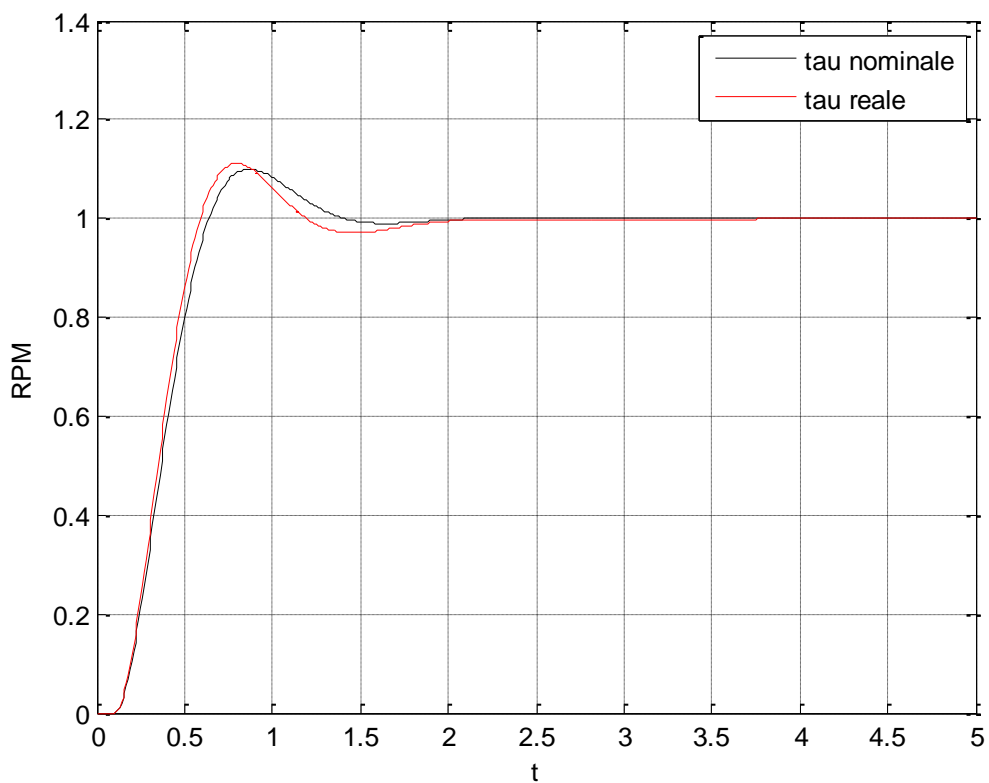


Figura 79: Risposta del sistema al gradino unitario con τ_e nominale e con variazione della costante di tempo τ_e

Per quanto riguarda il comportamento a regime, si è dimostrato che una variazione della costante di tempo non modifica il valore finito ($\cong 33\%$) dell'errore del sistema in risposta ad una rampa come si osserva dal seguente:

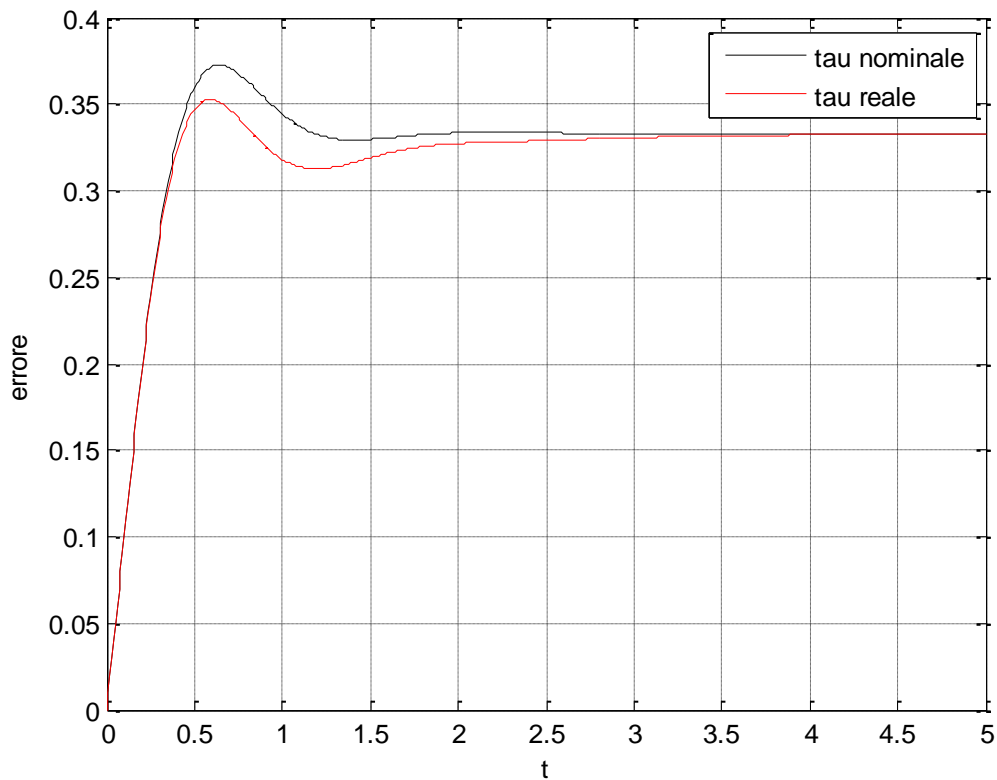


Figura 80: Errore in risposta alla rampa con τ_e nominale e con variazione di τ_e

In conclusione, la robustezza del sistema al variare del parametro τ_e del $\pm 10\%$ rispetto al valore nominale risulta verificata.

Variatione della costante di tempo k_e

- Si considera una variazione della costante k_e del $+10\%$ rispetto al valore nominale $k_e = 2000$:

$$k_e = k_{eR} = k_{e0} + 10\%k_{e0} = 2200$$

Aumentando la costante del 10% del valore nominale si osserva che la massima sovralongazione raggiunge il 13.5% (in rosso) con un aumento del 3.5% rispetto al valore di specifica del progetto che si può quindi ritenere soddisfatta per una variazione del parametro di tale entità.

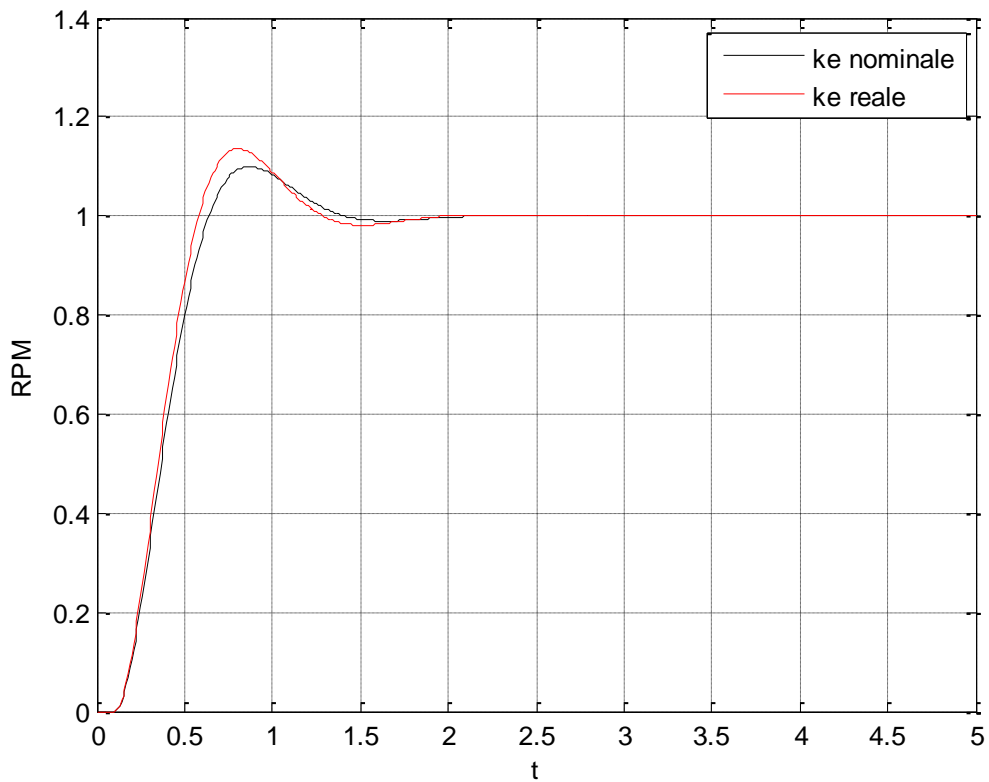


Figura 81: Risposta del sistema al gradino unitario con k_e nominale e con variazione della costante k_e

Per quanto riguarda il comportamento a regime, nel capitolo precedente si è dimostrato che una variazione della costante k_e modifica il valore finito ($\cong 33\%$) dell'errore del sistema in risposta ad una rampa, essendo tale parametro caratteristico del comportamento a regime e non del transitorio, come lo sono invece i parametri τ_e e t_0 .

Come si può verificare anche dai seguenti grafici che rappresentano l'andamento dell'errore considerando il valore nominale di τ_e (in nero) e quello aumentato del 10% (in rosso), si ha che l'errore, con variazione del parametro, assume un valore di circa il 30%:

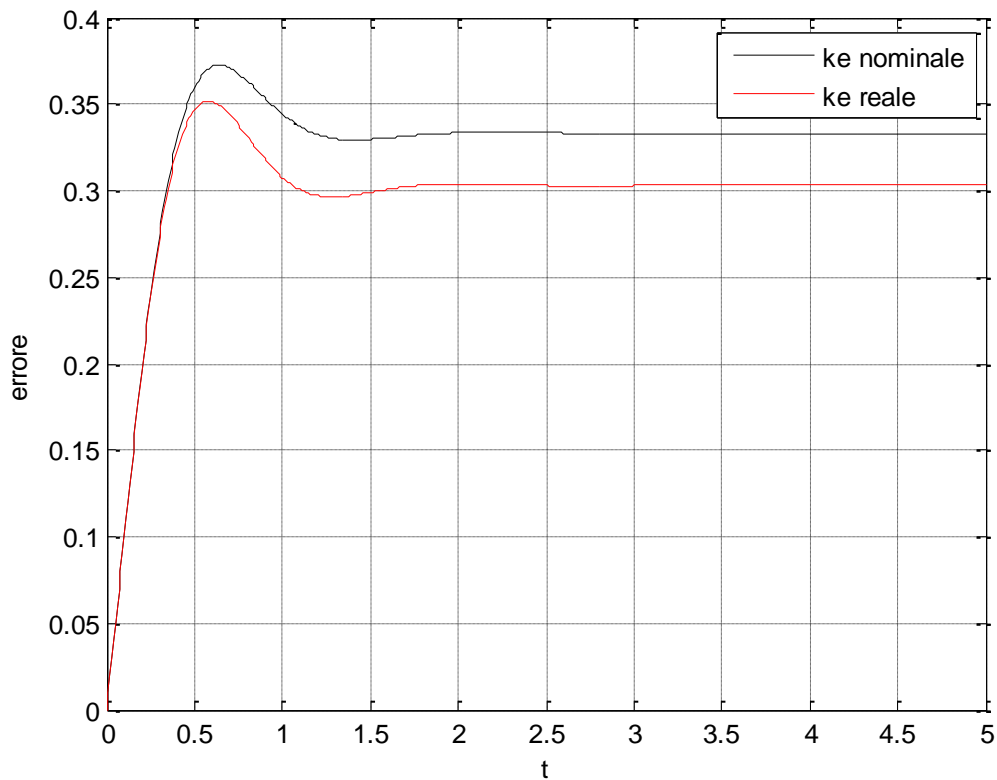


Figura 82: Errore in risposta alla rampa con k_e nominale e con variazione di k_e

- Si considera una variazione della costante di tempo k_e del -10% rispetto al valore nominale $k_e = 2000$:

$$k_e = k_{eR} = k_{e0} - 10\%k_{e0} = 1800$$

Diminuendo la costante del 10% del valore nominale si osserva che la massima sovraelongazione raggiunge circa il 6.5% (in rosso) con una diminuzione del 3.5% rispetto al valore di specifica del progetto che si può quindi ritenere soddisfatta per una variazione del parametro di tale entità.

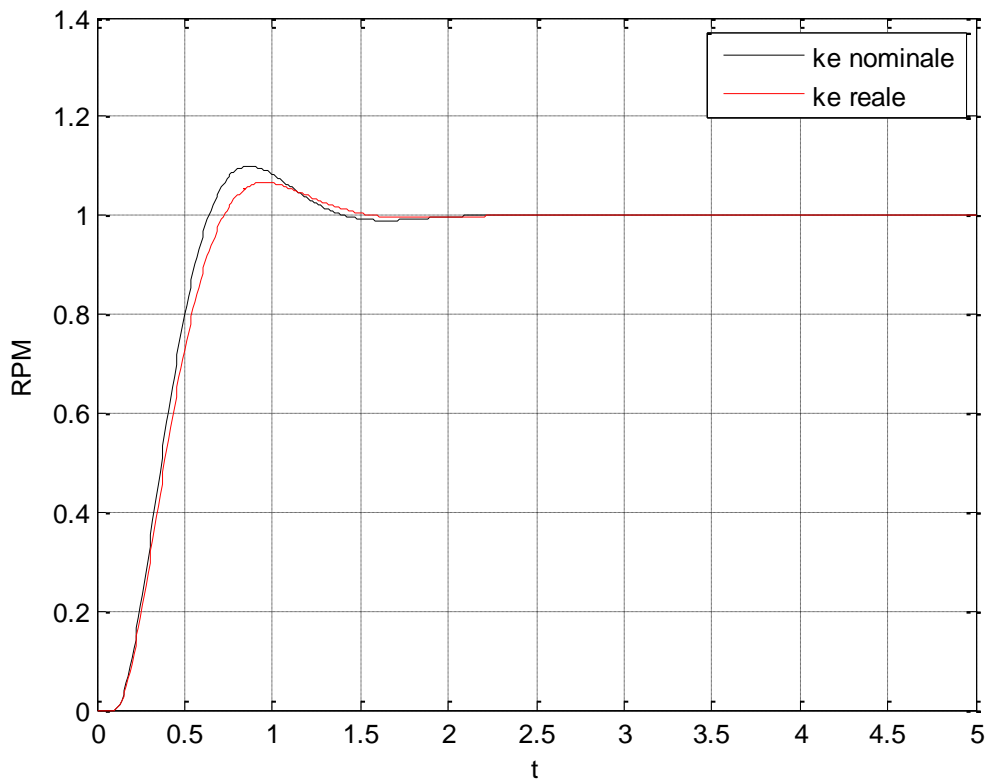


Figura 83: Risposta del sistema al gradino unitario con k_e nominale e con variazione della costante di tempo k_e

Per quanto riguarda il comportamento a regime, nel capitolo precedente si è dimostrato che una variazione della costante k_e modifica il valore finito ($\cong 33\%$) dell'errore del sistema in risposta ad una rampa, essendo tale parametro caratteristico del comportamento a regime e non del transitorio, come lo sono invece i parametri τ_e e t_0 .

Come si può verificare anche dai seguenti grafici che rappresentano l'andamento dell'errore considerando il valore nominale di τ_e (in nero) e quello diminuito del 10% (in rosso), si ha che l'errore, con variazione del parametro, assume un valore di circa il 37%:

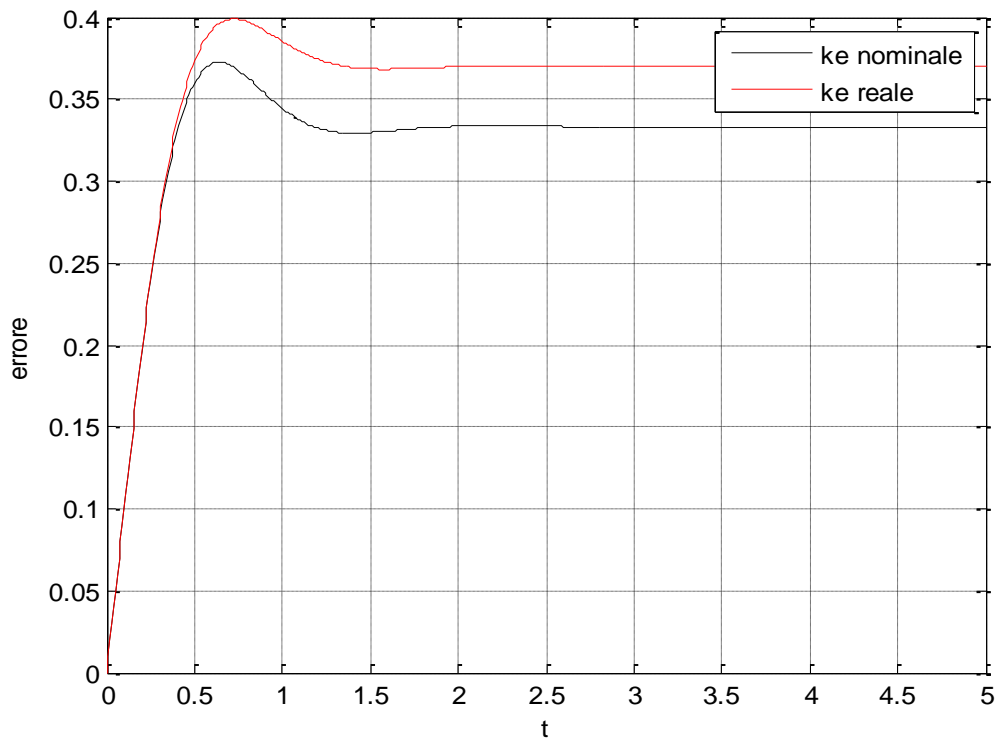


Figura 84: Errore in risposta alla rampa con k_e nominale e con variazione di k_e

In conclusione, la robustezza del sistema al variare del parametro k_e del $\pm 10\%$ rispetto al valore nominale risulta verificata.

Variatione combinata dei parametri t_0, τ_e, k_e

Nell'analisi alla variazione dei parametri fin qui condotta si è ipotizzata la variazione di un solo parametro alla volta.

Si conclude il capitolo dei risultati sperimentali effettuando un numero di simulazioni pari a dieci mila in cui si considera l'effetto combinato e randomico della variazione, nel range stabilito ($\pm 10\%$), di tutti i parametri contemporaneamente: l'obiettivo è quello di osservare come varia l'andamento dell'errore del sistema con un ingresso a gradino e a rampa.

Come osservato nell'analisi del comportamento a regime, il tipo di errore dipende dal tipo di sistema e non dai parametri dello stesso: con un ingresso a gradino, l'errore continuerà a convergere a zero nonostante la variazione contemporanea dei parametri mentre l'errore in risposta alla rampa continuerà ad essere finito ma con un valore, in percentuale, diverso da quello calcolato nel caso di plant del motore nominale o nel caso di plant affetto dalla variazione di un parametro soltanto.

In realtà, come dimostrato nel capitolo 2, il valore della percentuale di errore finito varia soltanto al variare del parametro k_e , risultando insensibile alla variazione dei parametri caratteristici del transitorio t_0, τ_e .

Quindi, come si può osservare dalle simulazioni di seguito presentate, rispettivamente con ingresso a gradino unitario e a rampa, ciò su cui influisce la variazione contemporanea e randomica dei tre parametri è la dinamica dell'errore, non il suo valore finale che, nel caso di errore finito, dipende, inoltre, esclusivamente da k_e :

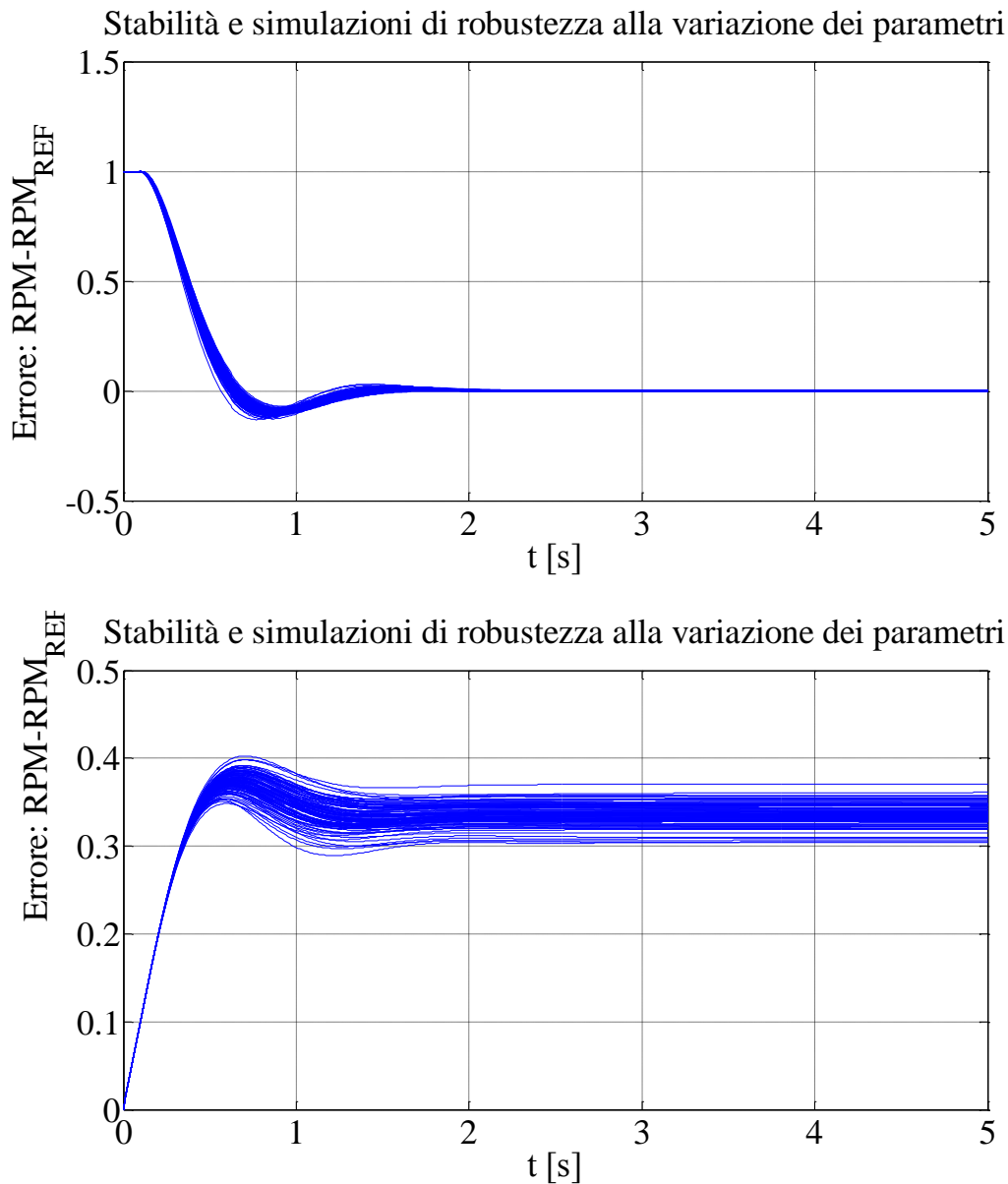


Figura 85: Errore a regime, effetto combinato variazione parametri

Come ricavato nel capitolo 2 durante l'analisi del comportamento a regime, con una

Risultati sperimentali

variazione del $\pm 10\%$ di k_e si otteneva, nei due casi, rispettivamente, un errore del 30% e del 37%: tali risultati sono verificati dal grafico sopra riportato in cui è evidente come il range di variazione dell'errore si trovi in corrispondenza dei valori precedentemente calcolati.

4. Conclusioni

Lo scopo del presente elaborato è stato quello di progettare un sistema di controllo automatico per la gestione del numero di giri del motore di un aereo ultraleggero.

Il progetto del sistema di controllo complessivo è stato sviluppato attraverso il progetto, separato, di due sistemi di controllo in retroazione, cioè uno che costituisce il loop interno e uno che costituisce il loop esterno. La variabile di uscita del loop interno, costituito dalla presenza di uno stepper motor, è la posizione dell'angolo di farfalla (variabile di ingresso del plant del motore dell'aereo) agendo sulla quale è possibile controllare il valore dell'uscita del sistema controllato e cioè il numero di giri.

I modelli matematici per la rappresentazione dei due plant, stepper motor ed engine, sono stati scelti, come descritto nel capitolo 1, con l'obiettivo principale di rendere la modellizzazione dei sistemi reali semplice ed efficace: è stato sufficiente utilizzare un integratore per rappresentare lo stepper motor e, per il gruppo motore-elica, un sistema del primo ordine con presenza del termine di ritardo finito, non trascurabile nella realtà e il cui effetto può causare l'insorgere di instabilità del sistema in retroazione.

In seguito alla descrizione dei modelli adottati, si è passati alla scelta delle tecniche di controllo. Per il loop esterno non è stato possibile impiegare le tecniche di controllo classiche in quanto, proprio per la presenza del ritardo finito, non si sono rivelate efficaci: si è optato quindi per un progetto analitico del regolatore. Per quanto riguarda il loop interno, invece, si è progettato un regolatore PI, scelto sulla base dell'analisi del comportamento a regime (errore nullo in risposta alla rampa).

Stabilite le specifiche di progetto, relative alla massima sovraelongazione in risposta al gradino unitario e al tempo di assestamento, si sono applicate le tecniche di controllo scelte: in particolare, si è progettato il loop interno in funzione di quello esterno, imponendo che il polo più lento del loop interno fosse almeno dieci volte maggiore rispetto a quello più veloce del loop esterno. Così facendo, si è resa la dinamica dello stepper motor trascurabile rispetto alla dinamica del sistema complessivo.

Se, da un lato, la scelta della tecnica progettuale analitica del regolatore del motore dell'aereo ha reso possibile la progettazione di un regolatore corrispondente ad un sistema in

retroazione che si comporti esattamente come un modello di riferimento dato, scelto in modo da riprodurre il comportamento ideale voluto, dall'altro, la sua efficacia può risultare compromessa da una conoscenza solo approssimativa dei parametri del plant.

Per ovviare tale problema, nel capitolo 2 si è condotta un'analisi sulla sensibilità del sistema alla variazione dei parametri che caratterizzano il plant dell'engine, t_0 , τ_e , k_e : in particolare, si è ipotizzata una variazione degli stessi del $\pm 10\%$ rispetto al loro valore nominale.

Quindi, mantenendo inalterato il regolatore progettato sulla base dei valori nominali, si sono introdotte, di volta in volta, le variazioni sui parametri e si è osservata l'influenza di tali variazioni sul comportamento a regime e sulla stabilità del sistema. I risultati ottenuti hanno confermato la robustezza del progetto del sistema che, anche applicato al plant con valori dei parametri non nominali, garantisce un buon funzionamento.

Infine, nell'ultimo capitolo, si è verificato che il sistema, affetto dalle variazioni parametriche ipotizzate, è in grado di rispondere alle specifiche di progetto utilizzate per i valori nominali del plant.

In conclusione, considerata la bontà del progetto e verificata la robustezza del sistema di controllo al variare dei parametri, è stata definita la procedura per il passaggio dal progetto teorico alla futura realizzazione fisica del sistema di controllo per mezzo dei seguenti punti:

1. LOOP INTERNO

- 1.1. Interconnessione delle varie parti hardware del sistema (driver, stepper motor e potenziometro);
- 1.2. Implementazione e verifica delle leggi di controllo.

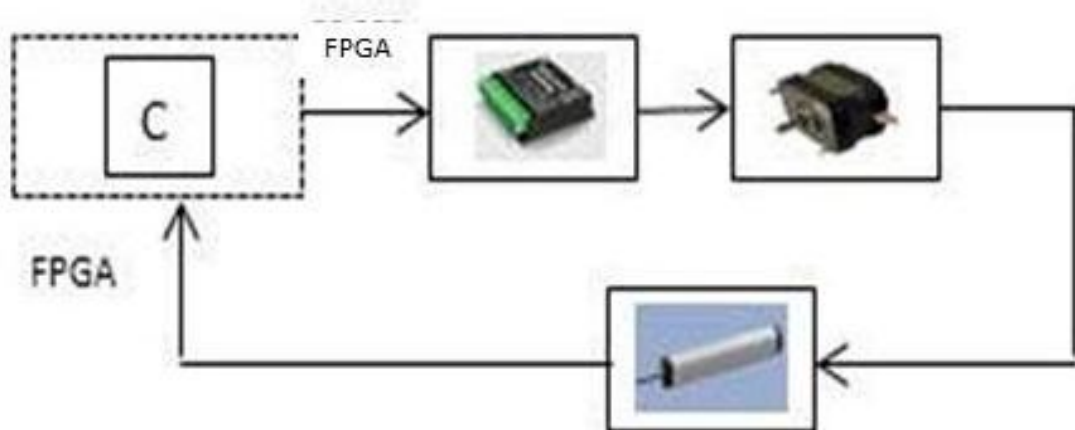


Figura 86: Loop interno hardware

2. LOOP ESTERNO

- 2.1. Creazione del simulatore hardware di motore e ruota fonica dell'ultraleggero;
- 2.2. Integrazione del loop interno (driver, stepper motor e potenziometro), precedentemente realizzato, al simulatore di motore e ruota fonica dell'ultraleggero;
- 2.3. Implementazione e verifica delle leggi di controllo.

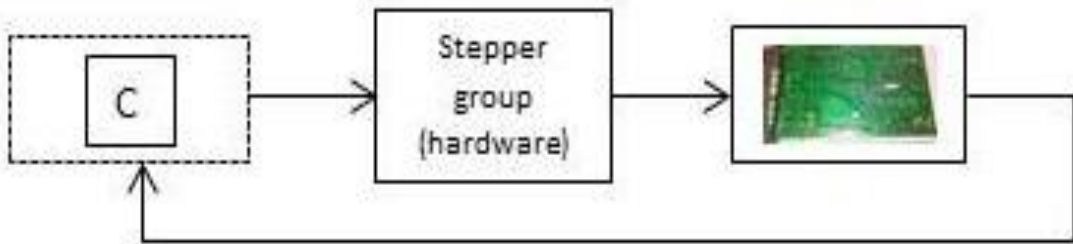


Figura 87: Loop esterno con simulatore hardware di motore e ruota fonica

3. SISTEMA REALE

- 3.1. Installazione del loop interno (driver, stepper motor e potenziometro) a bordo dell'ultraleggero;
- 3.2. Connessione del loop interno al motore ed alla ruota fonica dell'ultraleggero;
- 3.3. Verifica delle leggi di controllo sul sistema reale.

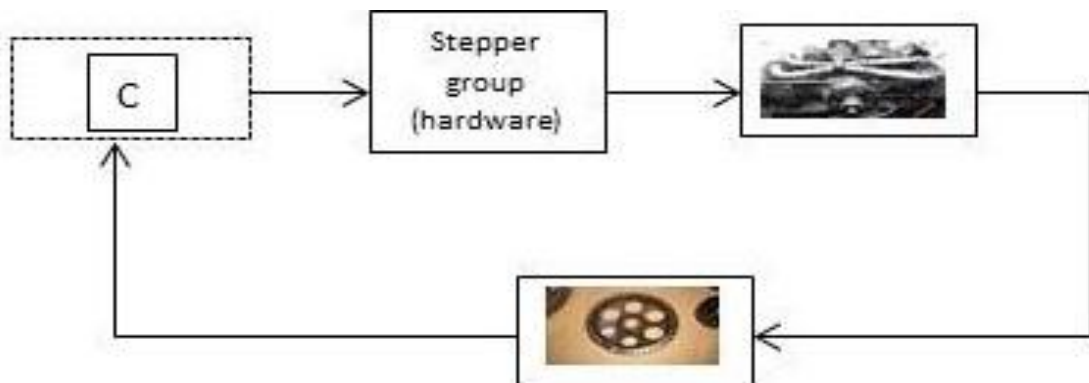


Figura 88: Sistema reale

Alcuni degli aspetti preliminari alla messa in pratica di quanto progettato in linea teorica sono già stati indagati: creazione del simulatore motore e ruota fonica dell'aereo (vedere appendice G), discretizzazione del segnale di controllo, settaggio dei parametri del driver, impostazione software del fine corsa dello stepper motor.

5. Appendici

APPENDICE A

SPEED:

Maximum at Sea Level	90 MPH
Cruise, 75% Power at 4000 feet	70 MPH

RANGE:

75% Power at 4000 Feet	Range - 320 km
Cruise, 75% Power at 4000 Feet	Time – 2.8 HOURS

RATE OF CLIMB AT SEA LEVEL	1000 FPM
SERVICE CEILING	13000 FEET

TAKEOFF PERFORMANCE AT SEA LEVEL:

Ground Roll	235 m
Total Distance Over 50 Foot Obstacle	330 m

LANDING PERFORMANCE AT SEA LEVEL:

Ground Roll	85 m
Total Distance Over 50 Foot Obstacle	385 m

STALL SPEED:	35 MPH
---------------------	--------

MAXIMUM WEIGHT:

Ramp	427 kg
Takeoff	427 kg
Landing	427 kg

STANDARD EMPTY WEIGHT	266.4 kg
------------------------------	----------

MAXIMUM USEFUL LOAD	160.6 kg
----------------------------	----------

WING LOADING	39.5 kg/sq m
---------------------	--------------

POWER LOADING	5.75kg/HP
----------------------	-----------

FUEL CAPACITY (Usable)	50 liters
-------------------------------	-----------

ENGINE:

VW 1835cc – four stroke	60 BHP at 3400 RPM
-------------------------	--------------------

PROPELLER:

Fixed Pitch	28 INCHES
Diameter	60 INCHES

APPENDICE B

Un modello del blocco complessivo relativo allo stepper motor e al driver si può implementare in ambiente Simulink. Esso rappresenta il funzionamento schematizzato dai seguenti blocchi:

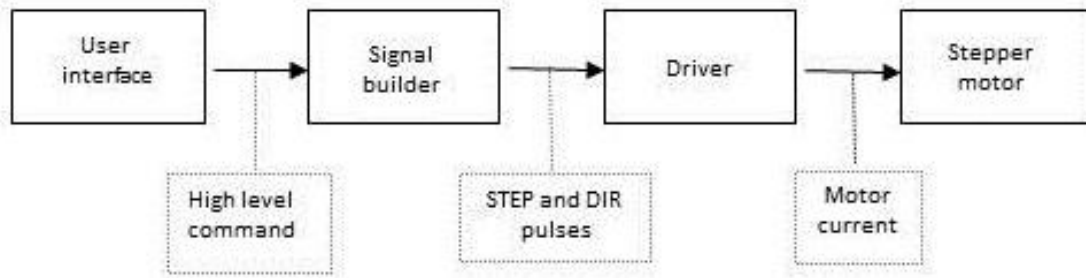


Figura 89: Funzionamento stepper

Il signal builder genera i segnali di comando STEP e DIR e li invia al driver che li converte in corrente di alimentazione delle fasi del circuito di eccitazione dello stepper motor che, a sua volta, trasforma energia elettrica, sotto forma di corrente continua, in energia meccanica, sotto forma di rotazione del motore.

Di seguito si riporta il modello Simulink:

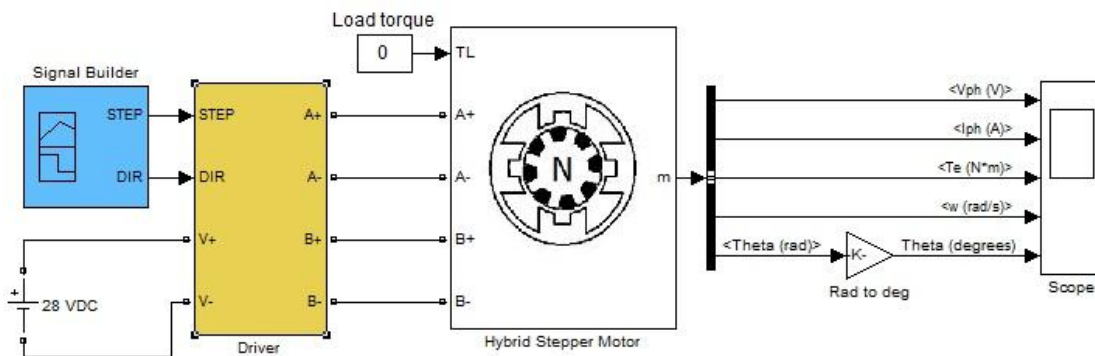


Figura 90: Modello Simulink di stepper

Il driver è alimentato con una tensione di 28V in corrente continua ed è comandato dai segnali DIR e STEP in base ai quali si ha in uscita una determinata sequenza di impulsi elettrici applicati alle fasi del motore. Lo stepper motor fornisce, come output, un vettore m contenente cinque segnali: tensione e corrente delle fasi, coppia elettromagnetica, velocità e posizione del rotore.

La frequenza del segnale STEP determina la velocità con la quale lo stepper si muove compiendo ad ogni fronte d'onda uno step o microstep (legato allo step da una costante di proporzionalità). Quindi, il numero di passi da effettuare è comunicato allo stepper motor attraverso il numero di fronti d'onda mentre la velocità attraverso la loro frequenza.

APPENDICE C

Teorema del valore finale: Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Nell'ipotesi che $f(t), f'(t)$ presentino ascisse di convergenza non positive e che il $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ esista, vale la relazione

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s)$$

APPENDICE D

Teorema di de l'Hôpital: Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni reali di variabile reale continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) , con $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$; siano $g(x)$ e $g'(x)$ diverse da 0 in ogni punto di tale intervallo, tranne al più in $c \in (a, b)$. Sia inoltre

$$(f(x) \wedge g(x)) \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow c$$

oppure

$$(f(x) \wedge g(x)) \rightarrow \pm\infty \text{ per } x \rightarrow c$$

ed esista

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

APPENDICE E

1) *Errore a regime nella risposta al gradino o errore di posizione* $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i}} \frac{1}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i)}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i) + k_0 \omega_n^2 k_s k_i (1 + T_i s) e^{-st_0}} \\ &= \frac{k_s k_i (\omega_n^2 - k_0 \omega_n^2)}{\omega_n^2} = \frac{k_s k_i (\omega_n^2 - \omega_n^2)}{k_0 \omega_n^2 k_s k_i} = \frac{\omega_n^2 - \omega_n^2}{\omega_n^2} \\ &= 0 \quad cvd \end{aligned}$$

2) *Errore a regime nella risposta alla rampa o errore di velocità* $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^2}$

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{k_s k_i (1 + T_i s)}{s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i}} \frac{1}{s^2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i)}{(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i) + k_0 \omega_n^2 k_s k_i (1 + T_i s) e^{-st_0}} \frac{1}{s} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ & \Rightarrow \text{con de l'Hôpital} \\ & \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(2s + 2\delta\omega_n + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} t_0)(s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i) + (s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0})(2s + k_s k_i T_i)}{[3s^2 + 4\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 (e^{-st_0} - se^{-st_0} t_0)](s^2 + k_s k_i T_i s + k_s k_i) + (s^3 + 2\delta\omega_n s^2 + \omega_n^2 s - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} s)(2s + k_s k_i T_i) + k_0 \omega_n^2 k_s k_i [(2T_i s + 1)e^{-st_0} - (T_i s^3 + s)e^{-st_0} t_0]} \\ &= \frac{(2\delta\omega_n + \omega_n^2 t_0) k_s k_i}{k_0 \omega_n^2 k_s k_i} = \frac{2\delta\omega_n + \omega_n^2 t_0}{\omega_n^2} \quad cvd \end{aligned}$$

3) *Errore a regime nella risposta alla parabola o errore di accelerazione* $\theta_{rif}(s) = \frac{1}{s^3}$

$$\begin{aligned} & \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + \frac{k_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2 - k_0 \omega_n^2 e^{-st_0} + k_0 \omega_n^2 e^{-st_0}} \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{\omega_n^2 - k_0 \omega_n^2}{0} = \left[\frac{0}{0} \right] \Rightarrow \text{con de l'Hôpital} \end{aligned}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2s + 2\delta\omega_n + k_0\omega_n^2 e^{-st_0} t_0}{4s^3 + 6\delta\omega_n s^2 + 2\omega_n^2 s}$$

$$= \infty \quad cvd$$

APPENDICE F

Il teorema di Shannon afferma che, sotto opportune ipotesi, in una conversione analogico-digitale, la minima frequenza di campionamento necessaria per evitare ambiguità e perdita di informazione nella ricostruzione del segnale analogico originario con larghezza di banda nota e finita, deve essere almeno pari al doppio della sua frequenza massima.

APPENDICE G

Creazione del simulatore hardware motore e ruota fonica dell'ultraleggero

Al fine di evitare l'avviamento del motore per effettuare la prova delle leggi di controllo, è stato creato un simulatore hardware che fornisce in uscita un segnale analogo a quello che il sensore di ruota fonica trasmette alla PXI. Si tratta di un segnale a onda quadra con frequenza variabile e duty cycle fisso ipotizzato al 50% (supponendo una corretta installazione del sensore di ruota fonica).

Il componente elettronico in grado di soddisfare le specifiche richieste è il circuito integrato 555 configurato in modalità astabile come si può vedere nello schema elettrico sotto riportato:

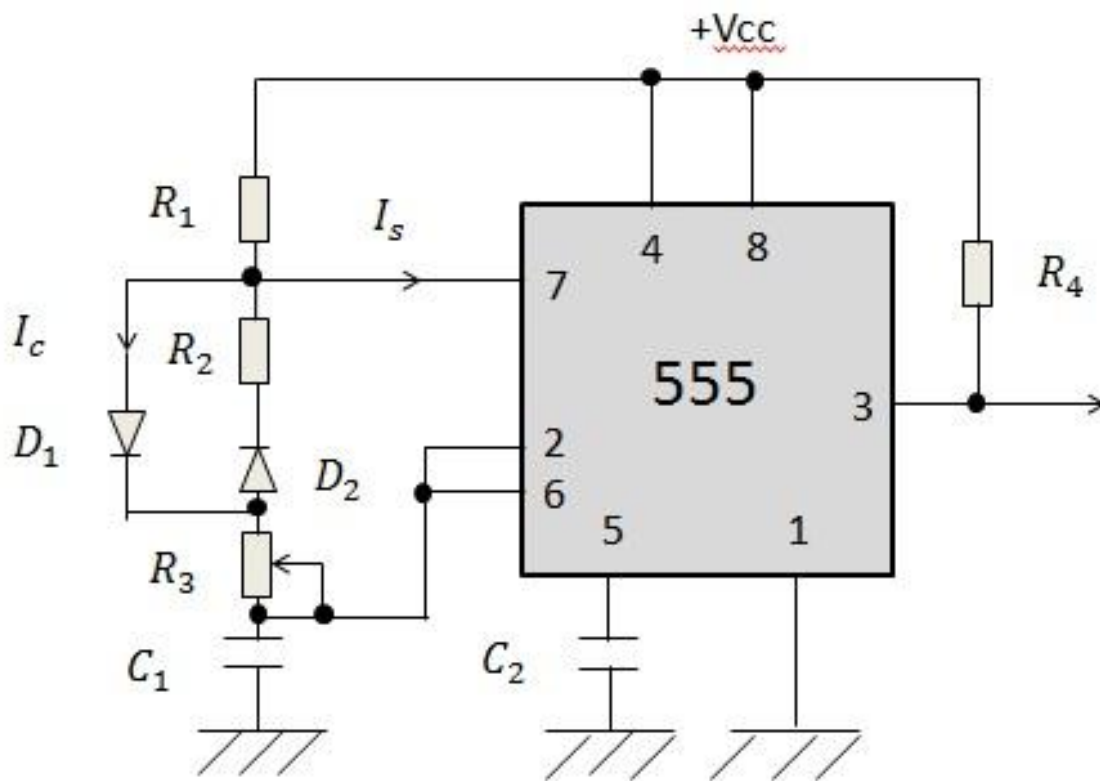


Figura 91: Schema elettrico con componente 555

Partendo dal valore di frequenza massimo e minimo che si vuole ottenere ($f_{max} = 10.7 \text{ kHz}$, $f_{min} = 1.4 \text{ kHz}$) e considerando un duty cycle d (rapporto tra il segnale positivo e il periodo totale del segnale ad onda quadra) pari al 50%, dall'equazione che caratterizza il circuito si ricavano i valori delle resistenze R_1 , R_2 , R_3 .

In particolare, sapendo che $d = 50\%$ si ha che T_{ON} (tempo in cui l'uscita è alta) = T_{OFF} (tempo in cui l'uscita è bassa) da cui $R_1 = R_2 = R$ con $T_{ON} = C_1(R_1 + R_3)$ e $T_{OFF} = C_1(R_2 + R_3)$.

1. Per ottenere il valore massimo di frequenza $f_{max} = 10.7 \text{ kHz}$ si considera $C_1 = 100 \text{ nF}$ e si pone $R_3 = 0 \Omega$. Dalle equazioni del circuito si ricava:

$$T = T_{ON} + T_{OFF} = C_1(R + R_3) + C_1(R + R_3) = 2C_1R$$

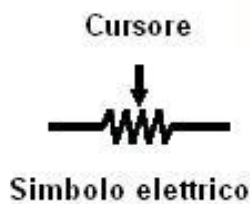
$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow R_1 = R_2 = R = \frac{1}{2fC_1} = 467.29 \Omega$$

2. Per ottenere il valore minimo di frequenza $f_{min} = 1.4 \text{ kHz}$ si considera sempre $C_1 = 100 \text{ nF}$ e si considera $R_1 = R_2 = R = \frac{1}{2fC_1} = 467.29 \Omega$. Dalle equazioni del circuito si ricava:

$$T = T_{ON} + T_{OFF} = C_1(R + R_3) + C_1(R + R_3) = 2C_1(R + R_3)$$

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow R_3 = \frac{1}{2fC_1} - R = 3.1 \text{ k}\Omega$$

Approssimando il valore delle resistenze R_1 e R_2 a 470Ω e quello della resistenza R_3 a $3.3 \text{ k}\Omega$ ed inserendole infine opportunamente nel circuito, si ottiene una $f_{min} = 1.419 \text{ kHz}$ (con $R_1 = R_2 = 470 \Omega$ e $R_3 = 3.3 \text{ k}\Omega$) e una $f_{max} = 10.55 \text{ kHz}$ (con $R_1 = R_2 = 470 \Omega$ e $R_3 = 0 \Omega$), valori che non si discostano in maniera significativa da quelli desiderati.



Il dispositivo elettromeccanico che consente di ottenere valori di resistenza variabili tra un valore minimo e massimo ($R_3 = 0 \Omega$ e $R_3 = 3.3 \text{ k}\Omega$) è il trimmer: è costituito da un cursore e da un resistore la cui azione combinata consente la trasduzione di spostamenti angolari o lineari in segnali di tipo elettrico (tensione).

Il principio di funzionamento è il seguente:

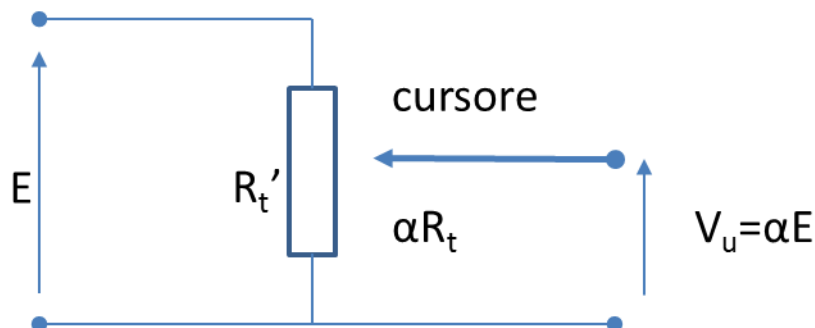


Figura 92: Potenziometro

La variabile di attenuazione α è data dal rapporto tra la tensione V_u ai capi del cursore e

Appendici

tensione di alimentazione E o anche dal rapporto tra la resistenza misurata fra un estremo e il cursore e la resistenza totale R_t a cui è applicata l'alimentazione E quindi dipende dalla posizione angolare o lineare del cursore. Il potenziometro si dice lineare se α è funzione lineare della variabile d'ingresso (spostamento angolare θ o lineare x) cioè se vale $\alpha = k\theta$ oppure $\alpha = kx$ da cui $V_u = k\theta E$ oppure $V_u = kxE$.

I componenti circuitali descritti sono stati installati prima in una breadboard ed in seguito è stato realizzato e testato il prototipo del circuito su una scheda millefori.

Riferimenti bibliografici

- [1] Marro Giovanni (2004), *Controlli automatici*, 5a edizione, Bologna, Zanichelli editore S.p.A.
- [2] Koziol J.S. Jr. (1971), *Simulation Model for the Piper PA-30 Light Maneuverable Aircraft in the Final Approach*, technical report N.A.S.A. DOT-TSC-FAA-71-11
- [3] IDX (IDX and IDX 7505) Manual, *STEPPER motor controller/driver modules IDX and IDX 7505 with RS485 and step-/direction interface*
- [4] Solid State Sensors Manual, *Hall Effect Gear Tooth Sensors*

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutte le persone che hanno contribuito alla realizzazione di questa tesi, dal Professore Matteo Zanzi a tutti i ragazzi del LASIM: oltre alla competenza, qualità aggiunta è l'umanità che vi distingue. In particolare, un grazie sentito all'Ing. Nicola Mimmo, per la disponibilità, il supporto e la costante presenza, e Antonio Ghetti per essersi sempre interessato agli sviluppi del mio lavoro.

Ringrazio tutti quelli che ci hanno creduto: in me, insieme a me e, a volte, persino per me, fino a oggi. Allo stesso modo, ringrazio anche chi non ci ha mai creduto: qual migliore stimolo per riuscire a dimostrare il contrario?

Tra i primi senza dubbio i miei genitori: grazie per avermi supportata e sopportata economicamente e non solo. Tutto quello che ho capito avere Valore nella vita l'ho imparato da voi, non dai libri. E vi ricordo che le "risposte scolastiche" che magari non vi è stato possibile darmi non importano: quello che conta è la vostra capacità di fornirmi, ad ogni mia domanda, gli strumenti necessari per arrivare alla risposta. Grazie!

Via Orselli, 19 con tutto quello che rappresenta: a chi ci è entrato, a chi ci è rimasto, a chi è stato solo di passaggio, a chi c'è anche oggi. Sono un puzzle di tutti voi messi insieme.

Ringrazio, in particolare, Gioia, prova del fatto che un coinquilino, a volte, può diventare molto di più. La tua presenza è essenziale: quando ci sei è tutto più facile, my Wife!

Ai miei fratelli Yuppa, Bebo, Vale: non condividiamo lo stesso sangue ma lo stesso spirito di sicuro. Grazie per quelle serate in cui tutto sembra un po' più leggero.

A chi anima Place de l'Apero (mi ricaricate le pile con la vostra allegria!) e a Giulia e Giada: quando un sorriso e un disegno valgono più di molte altre cose.

A Davide che, nonostante la lontananza forzata di questo periodo, ha condiviso, insieme alla sua famiglia, l'ultimo anno e mezzo di vita con me.

Ringrazio Walter e Paolo Meloni: avermi concesso la possibilità di vivere e respirare in prima persona l'aria elettrizzante e l'adrenalina del "weekend di gara", oltre a rappresentare un'occasione importante di crescita professionale, è fonte di quell'entusiasmo che rende la vita più interessante. A tutti i ragazzi del W&D Racing Team e a Gigliola: grazie per la pazienza e la disponibilità che mi dimostrate sempre!

Primo pensiero ma ultimo scritto: vorrei condividere questo piccolo traguardo raggiunto con i nonni. In particolare, la Nonna, che, nonostante in questi anni non ci sia mai stata, c'è sempre stata: grazie per tutta quella forza, quel coraggio e tutte quelle coccinelle!

Grazie alle coincidenze e all'inaspettato: a quel bellissimo "Bianconiglio" che, se hai la fortuna di incontrare e il coraggio di seguire, sa sempre come accompagnarti nel "Paese delle Meraviglie".