Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Triennale in Matematica

Teoria delle Categorie e Logica Categoriale

Tesi di Laurea in Matematica

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Rita Fioresi

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Simone Martini

Presentata da:
Filippo Calderoni

I Sessione
Anno Accademico 2011-2012

Oh me dolente! Come mi riscossi
quando mi prese dicendomi: "Forse
tu non pensavi ch'io loico fossi!"
D. Alighieri, Inferno canto XXVIII, vv.122-124

Introduzione

La teoria delle categorie viene introdotta a metà degli anni '40 da Samuel Eilenberg e Saunders MacLane con l'articolo [EML45] per assiomatizzare la teoria dell'omologia. Nei decenni successivi i concetti principali della teoria vengono utilizzati in topologia algebrica ed in altre aree della matematica: in particolare Grothendieck negli anni '60 sviluppa il concetto di schema che rivoluziona la geometria algebrica. Nel 1963 F. W. Lawvere presenta nella sua tesi di dottorato sotto la supervisione di Eilenberg una semantica di tipo funtoriale ([Law63]): nasce così la logica categoriale che negli anni seguenti ha sollevato grande interesse nell'ambito di alcuni sviluppi della logica matematica e dell'informatica teorica.

In questa tesi si introduce la teoria delle categorie e si presenta la caratterizzazione funtoriale dei quantificatori esistenziale ed universale della logica del primo ordine, dovuta allo stesso Lawvere. Si vede inoltre come un approccio categoriale alla logica matematica possa chiarire alcune proprietà logiche.

Nel primo capitolo si definisce la nozione di categoria e le costruzioni categoriali fondamentali: oggetti iniziale e terminale, prodotto e coprodotto di oggetti, prodotto fibrato ed esponente. Si danno le definizioni di funtore, di trasformazione naturale e di funtore aggiunto, nozioni fondamentali della teoria delle categorie. Per arricchire la trattazione si presentano diversi esempi di algebra e topologia.

Nel secondo capitolo si descrivono gli insiemi parzialmente ordinati da un punto di vista categoriale. In seguito si mostra il profondo legame tra quantificatori e aggiunzioni: infatti si ottiene che i quantificatori universale ed esistenziale sono a tutti gli effetti dei funtori aggiunti. Quest'ultimo risultato è ottenuto sia per via sintattica che per via semantica.

Indice

Capitolo 1

Teoria delle Categorie

In questo capitolo si presentano alcune nozioni fondamentali di teoria delle categorie. Senza la pretesa di fornire un'introduzione esauriente all'argomento, si introducono quei concetti fondamentali che sono usati in logica categoriale e che si richiameranno nei capitoli successivi. Per una trattazione completa dell'argomento si rimanda il lettore a [ML98], principale testo di riferimento per quanto riguarda la teoria delle categorie, all'intero testo [Awo06], all'introduzione di [LS86] e alla trattazione della prima parte di [AL91].

1.1 Categorie

Inizialmente si presenta la definizione di categoria, si prosegue poi con alcuni esempi salienti di categorie e con le definizioni di morfismi e oggetti per acquisire familiarità con la terminologia di base.

Definizione 1.1.1. Si definisce *categoria* una sestupla

$$\mathbf{C} = \langle \mathrm{Obj}_{\mathrm{C}}, \mathrm{Arw}_{\mathrm{C}}, \mathrm{dom}_{\mathrm{C}}, \mathrm{cod}_{\mathrm{C}}, \circ_{\mathrm{C}}, 1_{\mathrm{C}} \rangle$$

tale che

- $\mathrm{Obj}_{\mathrm{C}}$ è una classe non vuota, i cui elementi si dicono *oggetti*,

- $\mathrm{Arw}_{\mathbf{C}}$ è una classe non vuota, i cui elementi si dicono *morfismi* (o *frecce*),

- $\mathrm{dom}_{\mathbf{C}}$ e $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}}$ sono relazioni funzionali da $\mathrm{Arw}_{\mathbf{C}}$ a $\mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$, che assegnano ad ogni morfismo due oggetti, detti rispettivamente il suo dominio e codominio,

- $\circ_{\mathbf{C}}$ è un'operazione binaria parziale sui morfismi: se $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f) = \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(g)$ allora $g \circ_{\mathbf{C}} f$ è un morfismo tale che

$$\mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(g \circ_{\mathbf{C}} f) = \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(f) \quad \text{e} \quad \mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(g \circ_{\mathbf{C}} f) = \mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(g),$$

- $1_{\mathbf{C}}$ è una relazione funzionale da $\mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ a $\mathrm{Arw}_{\mathbf{C}}$ che assegna ad ogni oggetto a un morfismo id_a tale che $\mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(id_a) = \mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(id_a) = a$ e per ogni f, g tale che $\mathrm{cod}_{\mathbf{C}}(f) = a = \mathrm{dom}_{\mathbf{C}}(g)$ si ha che

  - $id_a \circ f = f$
  - $g \circ id_a = g$.

Per comodità denoteremo le categorie con lettere maiuscole in grassetto, mentre useremo lettere minuscole per oggetti e frecce. Ricorreremo spesso alla notazione "$f : a \to b$" per esprimere il fatto che f è un morfismo da a in b. Inoltre useremo indifferentemente i termini " morfismo" e " freccia".

Si presentano qui alcuni esempi molto importanti che si incontrano frequentemente in matemtica.

- **Set**, categoria degli insiemi, ha per oggetti gli insiemi (e non le classi proprie) e per morfismi le funzioni tra insiemi.

- $\mathbf{Set}_{\mathrm{fin}}$, categoria degli insiemi finiti, ha per oggetti gli insiemi finiti (e non le classi proprie) e per morfismi le funzioni tra di essi.

- **Pos**, categoria degli insiemi parzialmente ordinati, ha per oggetti gli insiemi parzialmente ordinati e per morfismi le funzioni monotone.

- **Grp**, categoria dei gruppi, ha come oggetti tutti i gruppi e per morfismi gli omomorfismi di gruppo.
- **Rng**, categoria degli anelli[1], ha per oggetti tutti gli anelli e per morfismi gli omomorfismi di anelli.
- $\mathbf{Mod}_{\mathrm{R}}$, categoria degli R-moduli dato un anello R, ha per oggetti tutti gli R-moduli e per morfismi gli omomorfismi di modulo.
- **Top**, categoria degli spazi topologici, ha per oggetti tutti gli spazi topologici e per frecce le funzioni continue.

Definizione 1.1.2. Una categoria $\mathbf{C}$ dicesi *piccola* se entrambe le classi $\mathbf{Obj}_{\mathrm{C}}$ e $\mathbf{Arw}_{\mathrm{C}}$ sono insiemi. Altrimenti $\mathbf{C}$ dicesi *grande*.

Osservazione 1.1.3. Se $\mathrm{Arw}_{\mathrm{C}}$ e $\mathrm{Obj}_{\mathrm{C}}$ sono insiemi, $\mathrm{dom}_{\mathrm{C}}$ e $\mathrm{cod}_{\mathrm{C}}$ sono funzioni.

Esempi 1.1.4. $\mathbf{Set}_{\mathrm{fin}}$ è una categoria piccola, mentre **Set**, **Pos**, **Grp**, **Top** sono tutti esempi di categorie grandi.

Poichè limitare la trattazione alle categorie piccole sarebbe troppo restrittivo, si introduce la seguente nozione.

Definizione 1.1.5. Una categoria $\mathbf{C}$ dicesi *localmente piccola* se per ogni coppia di oggetti a, b la collezione $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(a, b) = \{f \in \mathrm{Arw}_{\mathrm{C}} \mid f : a \to b\}$ è un insieme.

Le definizioni appena presentate verranno richiamate nel paragrafo 1.3 quando verrà introdotto il concetto di funtore.

Definizione 1.1.6. Data una categoria $\mathbf{C}$ possiamo considerare la *categoria opposta* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, che ha gli stessi oggetti di $\mathbf{C}$ e le frecce in corrispondenza biunivoca con le frecce di $\mathbf{C}$: ad ogni freccia $f : a \to b$ in $\mathbf{C}$ è associata la freccia $f^{\mathrm{op}} : b \to a$ in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$.

[1]per anello si intende anello unitario.

Definizione 1.1.7. Sia f una freccia da a in b, oggetti di una data categoria $\mathbf{C}$, dicesi che:

1. f è un *monomorfismo* se $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$,

2. f è un *epimorfismo* se $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$,

3. f è un *isomorfismo* se esiste una freccia $g : a \to b$ tale che $g \circ f = id_a$ e $f \circ g = id_b$.

Due oggetti a e b si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo da a in b.

Esempio 1.1.8. In **Set**, dove le frecce sono le funzioni tra insiemi, i monomorfismi sono tutte e sole le funzioni iniettive, e gli epimorfismi sono tutte e sole le funzioni suriettive.

Definizione 1.1.9. Sia $\mathbf{C}$ una categoria. Un oggetto 0 dicesi *oggetto iniziale* se per ogni a oggetto di $\mathbf{C}$ esiste un unico morfismo $f : 0 \to a$.

Teorema 1.1.10. *Se* 0 *e* $0'$ *sono due oggetti iniziali in una data categoria* $\mathbf{C}$*, allora sono isomorfi.*

Dimostrazione. Poiché 0 e $0'$ sono entrambi oggetti iniziali, esistono i morfismi $i : 0 \to 0'$ e $j : 0' \to 0$. Allora $j \circ i : 0 \to 0$, ma anche $id_0 : 0 \to 0$. Pertanto, per la definizione di elemento iniziale, $j \circ i = id_0$. Analogamente si ha che $i \circ j = id_{0'}$. □

Definizione 1.1.11. Sia $\mathbf{C}$ una categoria. Un oggetto t dicesi *oggetto finale* se per ogni a oggetto di $\mathbf{C}$ esiste un unico morfismo $f : a \to t$. Se oggetto iniziale e oggetto finale coincidono allora si parla di *oggetto zero.*

Teorema 1.1.12. *Se* t *e* t' *sono due oggetti finali in una data categoria* $\mathbf{C}$*, allora sono isomorfi.*

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella del teorema 1.1.10. □

Di seguito sono riportati alcuni esempi di oggetti iniziali e oggetti finali.

Esempio 1.1.13. In **Set** e $\mathbf{Set}_{\mathrm{fin}}$ l'insieme vuoto $\varnothing$ è oggetto iniziale: infatti la funzione vuota costituisce l'unico morfismo da $\varnothing$ in un oggetto qualsiasi; mentre ogni singoletto è un oggetto finale. In **Grp** il gruppo $\{\varepsilon\}$ di un solo elemento è oggetto zero. In **Rng**, $\mathbb{Z}$ è oggetto iniziale e l'anello banale $\{1\}$ è oggetto finale.

Concludiamo la sezione enunciando il *principio di dualità* della teoria delle categorie, che si rivela di grande utilità per la dimostrazione di molti risultati.

Proposizione 1.1.14. *Per ogni proposizione Σ sulle categorie, se vale Σ allora vale anche la proposizione duale Σ^* ottenuta da Σ cambiando dominio e codominio di ogni freccia.*

Per un enunciato formale del principio di dualità e la sua dimostrazione si veda 3.1 di [Awo06].

1.2 Costruzioni

In questa sezione si introducono le costruzioni più note della teoria delle categorie, quali prodotto, coprodotto, prodotto fibrato ed esponenziazione. Viene inoltre presentata la nozione fondamentale di categoria cartesiana, seguita da qualche esempio sulle categorie cartesiane chiuse. A questo scopo si è seguito l'approccio essenziale del secondo capitolo di [AL91]. Invece per la generalizzazione ai prodotti finiti si ripercorre il capitolo III.5 di [ML98].

Definizione 1.2.1. Siano a e b oggetti di una data categoria $\mathbf{C}$. Il *prodotto* di a e b è un oggetto $a \times b$ con due morfismi $\pi_1 : a \times b \to a$ e $\pi_2 : a \times b \to b$ tali che per ogni coppia di morfismi $f : c \to a$ e $g : c \to b$ esiste un unico morfismo $\langle f, g\rangle : c \to a \times b$ tale che $f = \pi_1 \circ \langle f, g\rangle$ e $g = \pi_2 \circ \langle f, g\rangle$, ossia il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g \rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\ a & a \times b \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & b \end{tikzcd}$$

Teorema 1.2.2. *In una data categoria il prodotto di due oggetti, se esiste, è unico a meno di isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $a \star b$ un altro prodotto di oggetti con proiezioni p_1 e p_2, e $\langle p_1, p_2 \rangle$ definito come in 1.2.1. Allora $\langle p_1, p_2 \rangle \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$ è l'unico morfismo tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} & a \times b \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[d, "\langle \pi_1,\pi_2 \rangle"] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ a & a \star b \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\langle p_1,p_2 \rangle"] & b \\ & a \times b \arrow[ul, "\pi_1"] \arrow[ur, "\pi_2"'] & \end{tikzcd}$$

D'altra parte anche $id_{a\times b}$ fa commutare il diagramma suddetto, quindi, per l'unicità del morfismo, $id_{a\times b} = \langle p_1, p_2 \rangle \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle$. Analogamente si ottiene che $\langle p_1, p_2 \rangle \circ \langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id_{a\star b}$, dunque $a \times b$ e $a \star b$ sono isomorfi. □

Esempio 1.2.3. In **Set** e $\mathbf{Set}_{\mathrm{fin}}$ il prodotto d'oggetti A e B è l'usuale prodotto cartesiano di insiemi $A \times B = \{\langle a, b \rangle \mid a \in A, b \in B\}$. In **Top** il prodotto di due spazi topologici X e Y è uno spazio topologico che ha il prodotto cartesiano $X \times Y$ come insieme sottogiacente e la topologia prodotto. In $\mathbf{Mod}_{\mathrm{R}}$ il prodotto di due moduli è il loro prodotto cartesiano su cui l'addizione è definita componente per componente e la moltiplicazione definita in modo da rispettare la proprietà distributiva. In modo analogo si può definire la nozione di prodotto in tutte le categorie viste in 1.1.

La nozione duale del prodotto è quella di coprodotto.

Definizione 1.2.4. Siano a e b oggetti di una data categoria **C**. Il *coprodotto* di a e b è un oggetto $a + b$ con due morfismi $q_1 : a \to a + b$ e $q_2 : b \to a + b$, detti *immersioni*, tali che per ogni coppia di morfismi $f : a \to c$ e $g : b \to c$ esiste un unico morfismo $h : a + b \to c$ tale che $f = h \circ q_1$ e $g = h \circ q_2$, ossia il seguente diagramma commuta.

$$\begin{tikzcd} & c & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "q_1"'] & a+b \arrow[u, "h"] & b \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "q_2"] \end{tikzcd}$$

Analogamente a quanto avviene per il prodotto anche il coprodotto di oggetti è unico a meno di isomorfismo, di questo fatto si può dare una dimostrazione duale a quella vista in 1.2.2.

Esempio 1.2.5. In **Set** il coprodotto è dato dall'unione disgiunta di insiemi.

Adesso introduciamo la nozione di prodotto fibrato, fondamentale in diverse aree della matematica, quali la geometria algebrica e la topologia.

Definizione 1.2.6. Dati due morfismi $f : b \to a$ e $g : c \to a$ il *prodotto fibrato* (o *pullback*) di f e g è un oggetto $b \times_a c$ con due morfismi $p : b \times_a c \to b$ e $q : b \times_a c \to c$ tale che

1. $f \circ p = g \circ q : b \times_a c \to a$
2. per ogni altro oggetto d e coppia di morfismi $h : d \to b$ e $k : d \to c$ tali che $g \circ k = f \circ h$ esiste un unico morfismo denotato $\langle h, k\rangle : d \to b \times_a c$, con leggero abuso di linguaggio, tale che $p \circ \langle h, k\rangle = h$ e $q \circ \langle h, k\rangle = k$

$$\begin{tikzcd} d \arrow[dr, dotted, "\langle h,k\rangle"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & b \times_a c \arrow[r, "q"'] \arrow[d, "p"] & c \arrow[d, "g"'] \\ & b \arrow[r, "f"] & a \end{tikzcd}$$

Esempio 1.2.7. In **Set** il prodotto fibrato di $f : B \to A$ e $g : C \to A$ è $\{\langle x, y\rangle \mid x \in B, y \in C, f(x) = g(y)\}$ con π_x e π_y, le proiezioni canoniche rispettivamente sulla prima e sulla seconda componente, e se f e g sono inclusioni vale che $B \times_A C = B \cap C$.

Teorema 1.2.8. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria con oggetto finale* t. *Se* $\mathbf{C}$ *ha il prodotto fibrato per ogni coppia di oggetti allora ha anche il prodotto. Per ogni coppia* a, b *di oggetti, il loro prodotto è dato da* $a \times_t b$ *per ogni* a, b.

Dimostrazione. Denotiamo con $!\,a$ l'unico morfismo da a in t per qualsiasi a oggetto di $\mathbf{C}$. Presi a e b due oggetti qualsiasi in $\mathbf{C}$ il prodotto fibrato di $!\,a : a \to t$ e $!\,b : b \to t$ è in particolare il prodotto $a \times b$. □

La dimostrazione del teorema 1.2.8 è tanto breve quanto significativa: infatti mostra che il prodotto è un caso particolare di prodotto fibrato.

Definizione 1.2.9. $\mathbf{C}$ è una *categoria cartesiana* (o *CC*) se ha un oggetto finale t e ha il prodotto $a \times b$ per ogni coppia di oggetti a, b.

Set, **Grp**, **Rng Top** e $\mathbf{Mod}_{\mathrm{R}}$ sono tutti esempi di CC.

Definizione 1.2.10. Una categoria $\mathbf{C}$ è dotata di *prodotti finiti* se per ogni n-upla finita di oggetti di $\mathbf{C}$ $c_1, ..., c_n$ esistono un oggetto di $\mathbf{C}$ denotato con $c_1 \times ... \times c_n$ e n proiezioni $\pi_i : c_1 \times ... \times c_n \to c_i$ per le quali valga la proprietà universale del prodotto, cioé per ogni oggetto d e morfismi $f_i : d \to c_1$ esiste un unico morfismo $\langle f_1, \dots, f_n\rangle : d \to c_1 \times ... \times c_n$ tale che $f_i = \pi_i \circ \langle f_1, \dots, f_n\rangle$. In particolare in $\mathbf{C}$ il prodotto di zero oggetti consiste semplicemente nell'oggetto finale t.

Il seguente risultato esprime una condizione sufficiente per l'esistenza dei prodotti finiti.

Teorema 1.2.11. *Se* $\mathbf{C}$ *è cartesiana allora* $\mathbf{C}$ *ha i prodotti finiti. Inoltre per ogni tre oggetti* a, b, c *esiste un isomorfismo*

$$\alpha_{a,b,c} : a \times (b \times c) \cong (a \times b) \times c,$$

e per ogni oggetto a esistono gli isomorfismi

$$\lambda_a : t \times a \cong a \qquad\qquad \varrho_a : a \times t \cong a.$$

Dimostrazione. L'esistenza dell'oggetto terminale garantisce l'esistenza del prodotto di nessun oggetto, ed il prodotto di un oggetto c consiste in c stesso e nel morfismo id_c. Supponendo che esista il prodotto $b \times c$ di due oggetti b e c qualsiasi, è possibile costruire il prodotto $a \times (b \times c)$ come prodotto di due oggetti con la proiezione π_a su a e la proiezione $\pi_{b\times c}$ su $b \times c$, che induce, per la proprietà universale del prodotto, i morfismi $a \times (b \times c) \to b$ e $a \times (b \times c) \to c$. Procedendo per iterazione possono essere costruiti tutti i prodotti finiti. Si noti inoltre che l'unicità del prodotto di oggetti ci garantisce che $a\times(b\times c) \cong (a\times b)\times c$, poiché entrambi gli oggetti soddisfano la proprietà universale del prodotto. Infine, poichè preso un qualsiasi oggetto a esiste un unico morfismo $a \to t$, il diagramma $t \leftarrow a \to a$ costituisce un diagramma del prodotto $t \times a$, dunque si ha che $t \times a \cong a$ e analogamente $a \times t \cong a$. □

A questo punto si introduce l'esponenziazione che consente di definire i concetti fondamentali di categoria cartesiana chiusa e di *topos*, che rivestono un ruolo fondamentale per alcuni sviluppi di logica categoriale.

Definizione 1.2.12. Sia $\mathbf{C}$ una categoria cartesiana e siano a e b oggetti di $\mathbf{C}$. L'*esponente* di a e b è un oggetto di $\mathbf{C}$ b^a, insieme al morfismo $ev_{a,b} : b^a \times a \to b$, detto *morfismo di valutazione*, tale che per ogni morfismo $f : c \times a \to b$ esiste un unico morfismo $h : c \to b^a$ tale che $f = ev_{a,b} \circ \langle h, id\rangle$.

$$\begin{tikzcd}
c \times a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\langle h,id\rangle"'] & b \\
b^a \times a \arrow[ur, "ev_{a,b}"'] &
\end{tikzcd}$$

Esempio 1.2.13. Ad esempio in **Set** si ha che $B^A = \{f \mid f : A \to B\}$ col morfismo di valutazione $ev_{A,B}(\langle f, a\rangle) = f(a)$.

Definizione 1.2.14. Una data categoria $\mathbf{C}$ è *cartesiana chiusa* (o una *CCC*) se:

i) $\mathbf{C}$ è cartesiana,

ii) per ogni coppia di oggetti a, b di $\mathbf{C}$ esiste l'esponente.

Non tutte le categorie cartesiane sono CCC: l'esempio seguente mostra che la categoria di tutti gli spazi topologici non ha l'esponenziazione per ogni coppia di spazi topologici qualsiasi.

Esempio 1.2.15. Si consideri **Top**. Affinchè esista l' esponente Y^X di due spazi topologici detti X e Y, si richiede che Y sia localmente compatto e di Hausdorff. In tal caso Y^X è l'insieme delle funzioni continue da X a Y con la topologia compatta-aperta, e morfismo di valutazione è $ev_{X,Y} : Y_X \times X \to Y, \langle f, x \rangle \to f(x)$. Infatti l'ipotesi della compattezza locale e della proprietà di Hausdorff sono necessarie affinchè il morfismo di valutazione sia una funzione continua. Dunque in generale **Top** non è una CCC.

Casi particolari di CCC sono i *topoi*, studiatissimi in logica categoriale e non solo. Tuttavia non ci addentreremo nello studio di questi, che esulano dallo scopo di questa tesi. Per un'introduzione alla teoria dei *topoi* si veda [MM92].

1.3 Funtori

Ora si introduce il concetto di funtore: l'idea di base è quella di considerare morfismi tra categorie, necessità che nasce per descrivere la categoria di tutte le categorie **Cat**: per un approfondimento si veda I.3 e II.5 di [ML98]. Si segue la trattazione di funtori e trasformazioni naturali di [Awo06]. Si dà la seguente definizioni per le categorie piccole.

Definizione 1.3.1. Un *funtore* dalla categoria $\mathbf{C}$ alla categoria $\mathbf{D}$ consiste di una funzione tra oggetti $F_{\mathrm{Obj}} : \mathrm{Obj}_{\mathrm{C}} \to \mathrm{Obj}_{\mathrm{D}}$ ed una funzione tra morfismi $F_{\mathrm{Arw}} : \mathrm{Arw}_{\mathrm{C}} \to \mathrm{Arw}_{\mathrm{D}}$ tale che

- ad ogni freccia $f : a \to b$ è associata la freccia $F_{\text{Arw}}(f) : \mathrm{F}_{\text{Obj}}(a) \to \mathrm{F}_{\text{Obj}}(b)$,

- $F_{\text{Arw}}(1_a) = 1_{F_{\text{Obj}}(a)}$,

- $F_{\text{Arw}}(g \circ f) = F_{\text{Arw}}(g) \circ F_{\text{Arw}}(f)$.

Talvolta, con abuso di linguaggio, si denotano come il funtore le due funzioni di cui esso consiste. Inoltre l'espressione "$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$" indica che F è un funtore dalla categoria $\mathbf{C}$ alla categoria $\mathbf{D}$.

Osservazione 1.3.2. L'uso di quest'ultima notazione è giustificata dal fatto che un funtore può essere considerato semplicemente una freccia della categoria **Cat**, che ha per oggetti tutte le categorie piccole e per morfismi i funtori. Si osservi che **Cat** non è una categoria piccola, questo evita un paradosso logico analogo al paradosso di Russel: infatti **Cat** non è oggetto di se stessa.

Se $\mathbf{C}$ è una categoria localmente piccola è possibile definire un funtore da $\mathbf{C}$ in **Set** detto Hom-funtore.

Definizione 1.3.3. Sia $\mathbf{C}$ localmente piccola. Per ogni oggetto a di $\mathbf{C}$ $Hom(a, -)$ è un funtore da $\mathbf{C}$ in **Set** tale che $Hom(a, -)(b) = \mathrm{Hom}(a, b)$ e, se $f : b \to c$ è un morfismo in $\mathbf{C}$, $Hom(a, -)(f) : \mathrm{Hom}(a, b) \to \mathrm{Hom}(a, c)$ è un morfismo in **Set**.
Analogamente per ogni oggetto a di $\mathbf{C}$ $Hom(-, a)$ è un funtore da $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ in **Set** tale che $Hom(-, a)(b) = \mathrm{Hom}(b, a)$ e se $f^{op} : c \to b$ è un morfismo in $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$, $Hom(-, a)(f) : \mathrm{Hom}(c, a) \to \mathrm{Hom}(b, a)$ è un morfismo in **Set**.

Esempio 1.3.4. Il funtore insieme-potenza è un funtore da **Set** in **Set** che associa ad ogni insieme X il proprio insieme potenza $\mathcal{P}(X)$ e ad ogni funzione $f : X \to Y$ la funzione $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, che manda ogni sottoinsieme di X nella rispettiva immagine tramite f. Il funtore dimenticante $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ è un funtore che ad ogni gruppo associa il proprio insieme sottogiacente e ad ogni morfismo la propria funzione sottogiacente. Un altro esempio di funtore usato in geometria è il funtore duale $D : \mathbf{Vect}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Vect}_{\mathrm{K}}$, che manda ogni spazio vettoriale nel proprio duale ed associa ad ogni funzione lineare la funzione lineare indotto sullo spazio duale.

Definizione 1.3.5. Siano F e G due funtori da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$. Allora $\tau : F \to G$ è una *trasformazione naturale* da F in G se

- per ogni a oggetto di $\mathbf{C}$ esiste un morfismo $\tau_a : F(a) \to G(a)$,
- per ogni morfismo $f : a \to b$ vale $\tau_b \circ F(f) = G(f) \circ \tau_a$.

$$\begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "\tau_a"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(a) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(b) \arrow[r, "\tau_b"'] & G(b) \end{tikzcd}$$

Se consideriamo $\mathbf{Funct(C,D)} = \{H \mid H\, funtore\ da\ \mathbf{C}\ a\ \mathbf{D}\}$ otteniamo una categoria i cui oggetti sono i funtori da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ e i cui morfismi sono le trasformazioni naturali da funtori di $\mathbf{C}$ a funtori di $\mathbf{D}$.

1.4 Aggiunzioni

Il concetto di aggiunzione è molto probabilmente il concetto più profondo che si sviluppa in teoria delle categorie, e di grande importanza per il contributo in diversi ambiti della matematica. In questa sezione tale nozione viene definita ed approfondita enunciando alcuni teoremi e citando alcuni esempi. L'approccio seguito è quello di [ML98]: si veda il capitolo IV.1 e IV.6. Una trattazione analoga è quella di [LS86], tuttavia per un'esposizione meno sintetica si rimanda al capitolo 5 di [AL91].

L'idea fondamentale dell'aggiunzione è quella di stabilire una relazione tra due categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ mediante due funtori $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ ed una famiglia di biezioni naturali φ tra i morfismi delle due categorie come illustrato di seguito.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "F"] \arrow[d, "f"'] & F(c) \arrow[d, "\varphi(f)"] \\ G(d) & d \arrow[l, "G"] \end{tikzcd}$$

Se F è un funtore e c un oggetto si userà per semplificare la notazione "Fc" in luogo di "$F(c)$", analogamente se f è un morfismo si usa "Ff" in luogo di "$F(f)$".

Definizione 1.4.1. Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ categorie. Un' *aggiunzione* da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{D}$ è una tripla $\langle F, G, \varphi \rangle$ tale che $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ sono funtori e per ogni coppia di oggetti $c \in \mathbf{C}$ e $d \in \mathbf{D}$ esiste una biezione

$$\varphi_{c,d} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(Fc, d) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, Gd).$$

F dicesi *aggiunto destro* di G e G dicesi *aggiunto sinistro* di F. Talvolta si usa la notazione $F \dashv G$.

Per comprendere a fondo le implicazioni della definizione 1.4.1 è necessario introdurre il concetto di freccia universale.

Definizione 1.4.2. Sia $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore e d un oggetto di $\mathbf{D}$. Una *freccia universale* da d a F consiste in una coppia $\langle c, u \rangle$ composta da $c \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ e $u : d \to Fc$ tale che per ogni coppia $\langle c', u' \rangle$ con $c' \in \mathrm{Obj}_{\mathbf{C}}$ e $u' : d \to Fc'$ esiste un' unica freccia $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(c, c')$ tale che $Ff \circ u = u'$.

$$\begin{tikzcd} c' & Fc' & d \arrow[l, "u'"'] \arrow[dl, "u"] \\ c \arrow[u, "f"] & Fc \arrow[u, "Ff"] & \end{tikzcd}$$

Teorema 1.4.3. *Un'aggiunzione* $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *determina:*

i) *una trasformazione naturale* $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to G \circ F$ *tale che per ogni oggetto* $c \in \mathbf{C}$ *esiste la freccia universale* $\eta_{\mathbf{c}}$ *da* c *a* G*, ed ogni morfismo* $f : Fx \to d$ *ha l'aggiunto destro* $\varphi f = Gf \circ \eta_c : c \to Gd$*;*

ii) *una trasformazione naturale* $\epsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{D}}$ *tale che per ogni oggetto* $d \in \mathbf{D}$ *esiste la freccia universale* ϵ_d *da* d *a* F*, ed ogni morfismo* $g : c \to Gd$ *ha l' aggiunto sinistro* $\varphi^{-1} g = \epsilon_a \circ Fg : F_c \to d$*.*

Inoltre i seguenti diagrammi commutano.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

Diremo η *ed* ϵ *rispettivamente unità e counità dell'aggiunzione.*

Teorema 1.4.4. *Dati due funtori* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *e* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *e due trasformazioni naturali* $\eta : 1_{\mathrm{D}} \to GF$ *e* $\epsilon : FG \to 1_{\mathrm{D}}$ *tali che i seguenti diagrammi*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\eta G"] \arrow[dr, "1_G"'] & GFG \arrow[d, "G\epsilon"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[r, "F\eta"] \arrow[dr, "1_F"'] & FGF \arrow[d, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd}$$

commutano, esiste un'aggiunzione $\langle F, G, \varphi \rangle : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *con* φ *e* φ^{-1} *definiti come nel teorema 1.4.3.*

Per una dimostrazione di questi due teoremi si veda [ML98] (pp.79-83). A fronte di questi risultati è possibile, e talvolta preferibile, denotare un'aggiunzione con una quadrupla $\langle F, G, \eta, \epsilon \rangle : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

Teorema 1.4.5. *Date due aggiunzioni* $\langle F, G, \eta, \epsilon \rangle : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *e* $\langle \hat{F}, \hat{G}, \hat{\eta}, \hat{\epsilon} \rangle : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$*, la composizione di funtori produce l'aggiunzione*

$$\langle \hat{F}F, \hat{G}G, G\hat{\eta}F \circ \eta, \hat{\epsilon} \circ \hat{F}\epsilon\hat{G} \rangle : \mathbf{C} \to \mathbf{E}.$$

Dimostrazione. Le due composizioni inducono un isomorfismo naturale tra c oggetto di $\mathbf{C}$ ed e oggetto di $\mathbf{E}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{E}}(\hat{F}Fc, e) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}}(Fc, \hat{F}e) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{E}}(c, G\hat{G}e).$$

Pertanto $\hat{F}F$ è aggiunto destro a $G\hat{G}$. Fissando $e = \hat{F}Fe$ e applicando gli isomorfismi all'identità $1 : \hat{F}Fc \to \hat{F}Fc$ otteniamo che $G\hat{\eta}F \circ \eta$ è l'unità dell'aggiunzione. Ragionando analogamente si ha che $\hat{\epsilon} \circ \hat{F}\epsilon\hat{G}$ è la counità. $\square$

I funtori aggiunti ricorrono molto spesso in algebra, geometria e topologia, e riportare degli esempi può essere impegnativo e talvolta deviante dallo scopo di questa tesi. Ci limiteremo a riportarne un paio, rimandando il lettore al capitolo IV di [ML98].

Esempio 1.4.6. Un esempio di funtore aggiunto molto usato in algebra commutativa è il funtore $- \otimes B : \mathbf{Mod}_{\mathrm{K}} \to \mathbf{Mod}_{\mathrm{K}}$ aggiunto sinistro al funtore $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(B, -) : \mathbf{Mod}_{\mathrm{K}} \to \mathbf{Mod}_{\mathrm{K}}$. Alla base di questa aggiunzione vi è l'isomorfismo canonico tra i moduli $\mathrm{Hom}(A \otimes B, C)$ e $\mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B, C))$. Un altro esempio è circoscrivibile alle CCC, in cui il funtore $- \times a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ha l'aggiunto destro $-^a : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, che manda ogni oggetto b nell'esponente b^a.

Come si vedrà nel prossimo capitolo, i due quantificatori "$\forall$" e "$\exists$" della logica predicativa possono essere caratterizzati in termini di aggiunzioni tra categorie.

Capitolo 2

Aggiunzioni e Quantificatori

Lo scopo di questo capitolo è quello di mostrare che i quantificatori universale ed esistenziale sono a tutti gli effetti dei funtori aggiunti tra categorie. Nella prima sezione si osserva che ogni insieme parzialmente ordinato può essere visto come una particolare categoria. Nella seconda si trattano i funtori aggiunti tra posets. Nella terza sezione, una volta acquisite le nozioni preliminari necessarie, si dà una caratterizzazione dei quantificatori in termini di aggiunzioni. Si conclude il capitolo con un'interpretazione geometrica per le formule quantificate. L'approccio seguito è essenzialmente lo stesso di [Awo06] nel capitolo 9.4-9.5.

2.1 I Posets come Categoria

In primis si dà la definizione di insieme parzialmente ordinato. Successivamente, senza introdurre concetti nuovi, si osserva che ogni poset può essere visto come una categoria. Questo fatto consente di descrivere i poset col linguaggio della teoria delle categorie.

Definizione 2.1.1. Un *insieme parzialmente ordinato* (o *poset*) $\langle P, \leq \rangle$ è un insieme P dotato di una relazione binaria riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

Osservazione 2.1.2. Ogni poset è una categoria i cui oggetti sono gli elementi ed esiste una freccia da $a \to b$ se e solo se $a \leq b$. La proprietà di riflessività garantisce l'esistenza dell'identità, e la transitività garantisce l'esistenza della composizione di due frecce. In un poset, tra due oggetti può esistere un unico morfismo.

Esempio 2.1.3. 1. L'insieme potenza $\mathcal{P}(X)$ di ogni insieme X è un insieme parzialmente ordinato dalla relazione d'ordine di inclusione $U \subseteq V$ tra i sottoinsiemi di X.

2. Sia X uno spazio topologico. $Top(X)$ denota la collezione di aperti di X, che risulta ordinato dall'inclusione. Dunque $Top(X)$ è a tutti gli effetti una categoria.

Considerare i poset come categorie è talvolta utile: si vedrà nel seguito della trattazione come le costruzioni della teoria delle categorie possono essere usate per descrivere utili proprietà dei posets.

Osservazione 2.1.4. In un poset un oggetto è iniziale se è il minimo del poset, ed è terminale se è il massimo.

Per vedere alcuni esempi di costruzioni categoriali nei posets si introduce il concetto di algebra di Boole.

Definizione 2.1.5. Dicesi *algebra di Boole* un poset $\langle B, \leq \rangle$ contenente due elementi 0 e 1, munito di due operazioni binarie $\vee$ e $\wedge$ ed un'operazione unaria $\neg$ tale che

- $0 \leq a$ e $a \leq 1$ per ogni $a \in B$,
- $a \leq c$ e $b \leq c$ se e solo se $a \vee b \leq c$,
- $c \leq a$ e $c \leq b$ se e solo se $c \leq a \wedge b$,
- $a \leq \neg b$ se e solo se $a \wedge b = 0$,
- $\neg\neg a = a$.

Esempio 2.1.6. Ogni algebra di Boole è dotata di oggetto terminale ed oggetto iniziale, che sono oggetti distinti. Invece il poset $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$ non ha nè oggetto iniziale nè oggetto terminale.

Definizione 2.1.7. In un poset il *prodotto* di due oggetti x, y coincide con $x \wedge y$; infatti $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$ rappresentano le proiezioni del prodotto e per ogni elemento z tale che $z \leq x$ e $z \leq y$ vale che $z \leq x \wedge y$. Analogamente il *coprodotto* di due oggetti x e y è $x \vee y$.

In un poset $\langle P, \leq \rangle$ in cui esista $x \wedge y$ per ogni $x, y \in P$, è possibile definire l'esponente di ogni coppia di oggetti. Per semplicità si mostra come si caratterizza l'esponente in un'algebra di Boole, ove certamente esistono i prodotti finiti.

Osservazione 2.1.8. In un'algebra di Boole B l'esponente b^a è un elemento di B denotato con $a \Rightarrow b$ definito come segue

$$a \Rightarrow b = (\neg a \vee b).$$

Il morfismo di valutazione è dato da $a \Rightarrow b \wedge a \leq b$, che in un'algebra di Boole vale sempre: infatti

$$a \Rightarrow b = (\neg a \vee b) = (\neg a \wedge a) \vee (b \wedge a) = 0 \vee (b \wedge a) = b \wedge a \leq b.$$

Per verificare che $a \Rightarrow b$ è a tutti gli effetti un esponente rimane da verificare che se $a \wedge b \leq c$ allora $a \leq b \Rightarrow c$. Supponendo $a \wedge b \leq c$ si ha che

$$\neg b \vee (a \wedge b) \leq \neg b \vee c = b \Rightarrow c.$$

D'altra parte

$$a \leq \neg b \vee a \leq (\neg b \vee a) \wedge (\neg b \vee b) = \neg b \vee (a \wedge b).$$

Riassumendo, se $a \wedge b \leq c$ otteniamo proprio $a \leq b \Rightarrow c$.

Si conclude la sezione descrivendo i funtori tra posets.

Osservazione 2.1.9. Un funtore tra due posets $\langle P, \leq \rangle$ e $\langle Q, \preceq \rangle$ è una funzione $F : P \to Q$ tale che

$$x \leq y \text{ implica che } F(x) \preceq F(y).$$

Dunque F risulta una funzione monotona da P a Q.

2.2 Aggiunzioni tra Posets

Come è stato visto nelle osservazioni 2.1.1 e 2.1.9, ogni poset è una categoria con al più un morfismo tra due elementi qualsiasi, e i funtori tra posets sono funzioni monotone. In questo paragrafo tratteremo il caso dei funtori aggiunti tra due posets dandone un'importante caratterizzazione nella proposizione 2.2.1.

Proposizione 2.2.1. *Siano $\langle P, \leq \rangle$ e $\langle Q, \preceq \rangle$ posets e $F : P \to Q$, $G : Q \to P$ due funtori aggiunti.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, phantom, "\dashv"] & Q \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$

F e G sono due funzioni monotone tali che per ogni $p \in P$ e $q \in Q$

$$F(p) \preceq q \textit{ se e solo se } p \leq G(q).$$

Dimostrazione. Dal fatto che $\mathrm{Hom}(F(p), q) \cong \mathrm{Hom}(p, G(q))$ segue direttamente la tesi del teorema.

Esempio 2.2.2. Sia X uno spazio topologico. Detto $Top(X)$ l'insieme degli aperti di X, si considerino la funzione $j : Top(X) \to \mathcal{P}(X)$ di inclusione degli aperti nell'insieme delle parti e la funzione $int : \mathcal{P}(X) \to Top(X)$, che ad ogni sottoinsieme di X associa il suo interno. Risulta che int è l'aggiunto destro alla funzione monotona j, quindi per ogni sottoinsieme $A \in \mathcal{P}(X)$ e per ogni aperto $U \in Top(X)$ si ha che

$$U \subseteq A \text{ se e solo se } U \subseteq int(A),$$

un risultato di topologia ben noto.

Esempio 2.2.3. Sia $f : A \to B$ una funzione tra insiemi. Si ha una aggiunzione tra immagine inversa ed immagine diretta di f

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(A) \arrow[r, bend left, "im(f)"] \arrow[r, phantom, "\dashv"] & \mathcal{P}(B) \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd} \qquad im(f) \dashv f^{-1}.$$

Per ogni $U \subseteq A$ e per ogni $V \subseteq B$ vale che

$$im(f)(U) \subseteq V \text{ se e solo se } U \subseteq f^{-1}(V).$$

Definizione 2.2.4. Nella notazione dell'esempio precedente la funzione $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ definita da

$$f_*(U) = \{b \in B \mid f^{-1}(b) \subseteq U\}$$

è detta *immagine duale* ed è aggiunto destro all'immagine inversa.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(B) \arrow[r, bend left, "f^{-1}"] \arrow[r, phantom, "\dashv"] & \mathcal{P}(A) \arrow[l, bend left, "f_*"] \end{tikzcd} \qquad f^{-1} \dashv f_*.$$

2.3 I Quantificatori

In questa sezione si introduce la caratterizzazione categoriale dei quantificatori, concetto fondamentale per descrivere in modo categoriale i linguaggi del primo ordine. Ci si rifà essenzialmente all'esposizione di [Awo06] nel paragrafo 9.5. Per un'introduzione alla logica del primo ordine si veda il secondo capitolo di [VD04].

Definizione 2.3.1. Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio del primo ordine. Un *contesto* $\bar{x}$ consiste in una lista di variabili $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$. Per ogni contesto si definisce l'insieme delle formule del linguaggio $\mathcal{L}$

$$Form(\bar{x}) = \{\phi(\bar{x}) \mid \phi(\bar{x}) \text{ ha al massimo } \bar{x} \text{ libere}\}.$$

Si suppone fissato il sistema formale di deduzione naturale per la logica predicativa. Prima di procedere è necessario dare la definizione di pre-ordine, che generalizza la nozione di poset.

Definizione 2.3.2. Dicesi *pre-ordine* un insieme munito di una relazione riflessiva e transitiva.

Analogamente ai posets anche i pre-ordini sono categorie. Tuttavia nei pre-ordini si possono avere due frecce tra due oggetti distinti con dominio e codominio invertiti, poichè non vale la proprietà antisimmetrica.

Osservazione 2.3.3. Per ogni contesto $\bar{x}$ l'insieme $Form(\bar{x})$ è un pre-ordine considerando la relazione di derivabilità $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{y})$. Dunque $Form(\bar{x})$ è una categoria.

Definizione 2.3.4. Sia y una variabile che non compare nel contesto $\bar{x}$. Si definisce la funzione banale

$$* : Form(\bar{x}) \to Form(\bar{x}, y)$$

che ad ogni formula $\phi(\bar{x}) \in Form(\bar{x})$ associa se stessa nell'insieme $\phi(\bar{x}) \in Form(\bar{x}, y)$.

Osservazione 2.3.5. $*$ è ben definita in quanto se $\phi(\bar{x}) \in Form(\bar{x})$ e y non è libera in $\phi(\bar{x})$ ovviamente $\phi(\bar{x}) \in Form(\bar{x}, y)$, ed è a tutti gli effetti un funtore tra i posets $Form(\bar{x})$ e $Form(\bar{x}, y)$, in quanto $\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x})$ in $Form(\bar{x})$ implica banalmente che $*\phi(\bar{x}) \vdash *\psi(\bar{x})$ in $Form(\bar{x}, y)$.

Definizione 2.3.6. Sia $\forall y : Form(\bar{x}, y) \to Form(\bar{x})$ la funzione che ad ogni formula $\psi(\bar{x}, y) \in Form(\bar{x}, y)$ associa $\forall y\, \psi(\bar{x}, y)$, ovvero la chiusura universale di $\psi(\bar{x}, y)$ rispetto alla variabile y.
Analogamente si definisce la funzione $\exists y : Form(\bar{x}, y) \to Form(\bar{x})$ che ad ogn formula associa la propria chiusura esistenziale.

Proposizione 2.3.7. *La funzione $\forall y$ è aggiunto destro alla funzione $*$*

$$\begin{tikzcd} Form(\bar{x}) \arrow[r, bend left, "*"] \arrow[r, phantom, "\dashv"] & Form(\bar{x}, y). \arrow[l, bend left, "\forall y"] \end{tikzcd}$$

Inoltre la regola di deduzione $\forall y \psi(\bar{x}, y) \vdash \psi(\bar{x}, y)$ ($\forall$-elim)è la counità dell'aggiunzione.

Dimostrazione. In virtù delle due regole di introduzione ed eliminazione del quantificatore universale, riassunte dalla regola di derivazione a doppio senso

$$\frac{*\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x}, y) \quad Form(\bar{x}, y)}{\phi(\bar{x}) \vdash \forall y \psi(\bar{x}, y) \quad Form(\bar{x})},$$

per il teorema 2.2.1, risulta che

$$*\phi(\bar{x}) \vdash \psi(\bar{x}, y) \text{ se e solo se } \phi(\bar{x}) \vdash \forall y\, \psi(\bar{x}, y).$$

□

Ragionando in modo analogo otteniamo la seguente.

Proposizione 2.3.8. *La funzione $\exists y$ è aggiunto sinistro alla funzione $*$*

$$\begin{tikzcd} Form(\bar{x}, y) \arrow[r, bend left, "\exists"] \arrow[r, phantom, "\dashv"] & Form(\bar{x}) \arrow[l, bend left, "*"] \end{tikzcd}.$$

Inoltre la regola di deduzione $\psi(\bar{x}, y) \vdash \exists y\, \psi(\bar{x}, y)$ ($\exists$-intro)è l'unità dell'aggiunzione

Dimostrazione. Per le regole di introduzione ed eliminazione otteniamo la regola a doppio senso

$$\frac{\exists y \psi(\bar{x}, y) \vdash \phi(\bar{x}) \quad Form(\bar{x})}{\psi(\bar{x}, y) \vdash *\phi(\bar{x}) \quad Form(\bar{x}, y)},$$

da cui $\exists y \psi(\bar{x}, y) \vdash \phi(\bar{x})$ se e solo se $\psi(\bar{x}, y) \vdash *\phi(\bar{x})$. □

Le regole doppie di derivazione citate nelle dimostrazioni di 2.3.7 e 2.3.8 vengono dette *adjoint rules*, e possono essere usate invece delle usuali regole di eliminazione ed introduzione dei quantificatori per dare un sistema di deduzione completo per la logica del primo ordine. Per approfondire questo punto si veda la trattazione [Pit95].

2.4 Interpretazione Geometrica

In questa sezione si ottengono gli stessi risultati della sezione precedente ragionando per via semantica. Si danno per note la nozione di struttura e di soddisfacibilità. Per le conoscenze preliminari si rimanda al secondo capitolo di [VD04].

Definizione 2.4.1. Data una struttura M basata su $\mathcal{L}$ ogni formula $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ di $\mathcal{L}$ definisce l'insieme

$$[\phi(x_1,\ldots,x_n)]^M = \{\langle m_1,\ldots,m_n\rangle \in M^n \mid M \vDash \phi(m_1,\ldots,m_n)\}$$

degli elementi di M^n che soddisfano la proprietà espressa da ϕ.

Esempio 2.4.2. Ad esempio $[x = y]^M$ è la diagonale $\{(m,m) \mid m \in M\}$ del prodotto cartesiano $M \times M$.

Definizione 2.4.3. Sia M una struttura[1] basata su $\mathcal{L}$ fissata. Con piccolo abuso di linguaggio definiamo la funzione

$$* : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M \times M)$$

che associa ad ogni formula interpretata $[\phi(x)]$ l'interpretazione $[*\phi(x)]$.

Osservazione 2.4.4. La funzione $*$ coincide con π^{-1}, l'inversa della proiezione del prodotto $\pi : M \times M \to M$. Infatti per ogni $[\phi(x)] \in \mathcal{P}(M)$ abbiamo che

$$*[\phi(x)] = \{(m_1,m_2) \in M \times M \mid M \vDash \phi(m_1)\} = \pi^{-1}([\phi(x)]).$$

Definizione 2.4.5. Si considerino le due funzioni $\forall, \exists : \mathcal{P}(M \times M) \to \mathcal{P}(M)$ definite nel modo seguente

$$\forall[\phi(x,y)] = [\forall y\, \phi(x,y)],$$

$$\exists[\phi(x,y)] = [\exists y\, \phi(x,y)].$$

[1]Per alleggerire la notazione non si distingue tra struttura ed universo della struttura.

Proposizione 2.4.6. *La funzione $\exists$ è l'immagine diretta della proiezione del prodotto π, aggiunto sinistro all'immagine inversa π^{-1}, mentre la funzione $\forall$ è l' immagine duale di π ed è l'aggiunto destro a π^{-1}.*

Dimostrazione. Dato $[\phi(x,y)] \subseteq M \times M$ risulta che

$$
\begin{aligned}
&\exists[\phi(x,y)] = [\exists y\, \phi(x,y)] \\
&= \{m \mid \text{esiste almeno un } y \text{ tale che } M \vDash \phi(m,y)\} \\
&= im(\pi)[\phi(x,y)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\forall[\phi(x,y)] = [\forall y\, \phi(x,y)] \\
&= \{m \mid \text{per ogni } y, M \vDash \phi(m,y)\} \\
&= \{m \mid \pi^{-1}\{m\} \subseteq [\phi(m,y)]\} \\
&= \pi_*([\phi(x,y)]).
\end{aligned}
$$

□

Le funzioni $\exists, \forall$ risultano quindi rispettivamente l'immagine diretta e l'immagine duale della proiezione del prodotto $\pi : M \times M \to M$. Richiamando gli esempi 2.2.3 e 2.2.4 si ottiene la descrizione categoriale dei quantificatori già vista nella sezione precedente.

Bibliografia

[AL91] A. Asperti and G. Longo: *Categories, Types, and Structures.* MIT Press, 1991.

[Awo06] S. Awodey. *Category Theory.*Oxford University Press, 2006.

[EML45] S. Eilenberg e S. Mac Lane. “General theory of natural equivalences” *Transactions of the American Mathematics Society* 58, 1945.

[LS86] J. Lambek and P. J. Scott. *Introduction to Higher Order Categorical Logic*, volume 7 of *Cambridge studies in advanced mathematics.* Cambridge Univ. Press, 1986.

[Law63] F. W. Lawvere. *Functorial Semantics of Algebraic Theory.* Ph.d., Columbia, 1963.

[ML98] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[MM92] Saunders Mac Lane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: a First Introduction to Topos Theory.* Springer Verlag, 1992.

[Pit95] Andrew M. Pitts. *Categorical Logic* in Samson Abramsky, Dov M. Gabbay (eds.) *Handbook of Logic in Computer Science: Logic and algebraic methods*, volume 5 of Handbook of Logic in Computer Science, Oxford University Press, 2001.

[VD04] Dirk Van Dalen. *Logic and Structure.* Springer, 2004.

Ringraziamenti

Ringrazio di cuore Rita, che mi ha seguito nella stesura di questa tesi con grande pazienza e disponibilità, incoraggiandomi a seguire la mia passione per la logica. Ringrazio il Prof. Martini per i preziosi consigli di orientamento, riguardanti non solo questa tesi. Infine ringrazio il Prof. Ferri, inimitabile per entusiasmo e simpatia: grazie al suo corso ho studiato le basi della Teorie delle Categorie.