ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Questioni storiche e didattiche connesse alle frazioni

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giorgio Bolondi

Presentata da:
Marina Moreschi

Prima Sessione
Anno Accademico 2011/2012

Indice

Introduzione

Gli aspetti storici e didattici legati alle frazioni sono l'argomento centrale di questa tesi.

Nel primo capitolo ci occuperemo della costruzione degli insiemi numerici, a partire da $\mathbb{N}$, per passare poi a $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$. Questo ci permetterà di capire non solo le difficoltà degli studenti, ma anche quelle dell'insegnante che si trova a dover rendere accessibili tali concetti a studenti della scuola secondaria che non hanno gli strumenti necessari per la comprensione di questi argomenti.

Nel secondo capitolo affronteremo la storia delle frazioni: i sistemi di numerazione e la rappresentazione delle frazioni degli Egizi, dei Sumeri etc. fino ad arrivare al sistema di numerazione indiano-arabo e agli studi a tal proposito di Leonardo Pisano, detto Fibonacci. L'aspetto storico, come vedremo successivamente, è da considerarsi molto importante nel processo di insegnamento-apprendimento.

Il terzo capitolo tratta l'argomento preso in esame da un punto di vista didattico. Verranno approfonditi alcuni degli aspetti della didattica della matematica che sono strettamente legati all'insegnamento-apprendimento delle frazioni.

Ciò che è stato analizzato nel capitolo precedente fornirà gli strumenti necessari per l'analisi di un questionario, concernente le frazioni, che è stato sottoposto ad alcuni degli studenti iscritti al primo anno del corso di laurea in matematica, presso l'Università di Bologna, e che costituirà l'ultimo capitolo.

Capitolo 1

Aspetti matematici

In questo capitolo affrontiamo la costruzione degli insiemi numerici $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$. Questo ci permetterà in seguito di comprendere le difficoltà che si trovano a dover affrontare gli studenti quando si parla di numeri razionali e di frazioni. Faremo anche dei brevi cenni storici che riguardano la nascita di tali insiemi. L'aspetto storico non è affatto da sottovalutare dal punto di vista didattico. Per non rendere troppo pesante il testo con continue citazioni bibliografiche, dichiaro di aver fatto uso, a vario titolo, dei seguenti testi: Pini (1964), Carruccio (1972), Fandiño Pinilla (2005), Fiori, Invernizzi (2009) che appaiono poi completamente citati in bibliografia. Ci siamo inoltre serviti della tesi di Laura Branchetti e di appunti tratti dalle lezioni universitarie ed in particolare di quelle tenute dal prof. Salvatore Coen nel suo corso di "*Elementi di Geometria da un punto di vista superiore*" dell'anno accademico 2010-2011.

1.1 Origini storiche della teoria del numero naturale e teoria di Peano

L'uso dei numeri naturali 0,1,2,3,... sembra nascere con l'uomo, per esigenze di ordine pratico. Furono i Greci a porsi problemi teorici sulla natura del concetto di numero. Sembra che la definizione di numero come “sistema di unità” sia dovuta a Talete (640 a.C./625 a.C.-circa 547 a.C.)

Il numero zero verrà introdotto molti secoli dopo dalla cultura arabo-indiana, sebbene molte popolazioni precedenti abbiano sentito l'esigenze di creare un concetto e di utilizzare un simbolo che rappresentasse il vuoto, l'assenza, il cardinale corrispondete al nulla. É però certo che la definizione di Talete fu accettata dai Pitagorici che pensarono al numero come aggregato di monadi, corpuscoli cioè unitari. Anche Euclide (323 a.C.-285 a.C.) accetta il numero come molteplicità, dunque i numeri naturali nella sua opera cominciano da due.

Ma la vera sistemazione dei numeri naturali si avrà a cavallo fra i secoli XIX e XX ad opera di Giuseppe Peano (1858-1932). Egli assume come concetti primitivi i seguenti tre: $\mathbb{N}$, 0, a^+. Con $\mathbb{N}$ indica la classe dei numeri naturali (anche se l'idea di classe, *Cls*, era già stata introdotta in precedenza), con 0 lo zero e con a^+ il successivo del numero naturale a.
I postulati sono cinque, sei se si considera l'ammissione che i numeri costituiscono una classe.

Egli indica con il simbolo $\in$ l'appartenenza ad una classe, anch'esso concetto che era già stato introdotto in precedenza.

- Postulato 0) I numeri (sottointeso: naturali) formano una classe
- Postulato 1) Lo *zero* è un numero.
- Postulato 2) Se a è un numero, allora a^+ è pure un numero.
- Postulato 3) Principio di induzione : se s è una classe e *zero* è un elemento di questa classe e, dal fatto che x appartenga ad s, si deduce che per ogni x il successivo di x appartiene ancora alla classe s, allora tutta la classe dei numeri è inclusa nella classe s.
- Postulato 4) Se due numeri sono uguali, anche i numeri di cui sono successivi sono uguali.

- Postulato 5) Se a è un qualsivoglia numero, il suo successivo è diverso da zero, oppure: zero non è il successivo di alcun numero.

Questi postulati, con la scrittura odierna, diventano:

1. Si distingue in $\mathbb{N}$ un elemento chiamato "zero" ed lo indichiamo con il simbolo 0.
   É data l'applicazione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $s(n) \neq 0$;
3. $\forall n, m \in \mathbb{N}$, se $s(n) = s(m) \Rightarrow n = m$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $s(m) = n$;
5. se A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$, contenente 0 e con la proprietà che se un naturale n è in A, allora $s(n)$ è in A, allora $A = \mathbb{N}$

Sulla base di tale postulati, Peano costruisce l'aritmetica e l'analisi.

Questa formulazione oggi non è accettata come una vera e propria definizione assiomatica di $\mathbb{N}$, ma più come una sistemazione di $\mathbb{N}$, pensato come già noto; su questo c'è da decenni un forte dibattito. Tale fatto era avversato fin dai tempi dello stesso Peano, per esempio da Bertrand Russell (1872-1970) in vari suoi testi.
Vediamo come definisce le operazioni in $\mathbb{N}$.

Addizione

L'operazione di addizione viene definita induttivamente in base alle condizioni iniziali
$\forall a, b \in \mathbb{N}$

- $a + 0 = a$
- $a + (b + 1) = (a + b) + 1$

Peano dimostra, per induzione, che se a e b sono numeri naturali, allora anche $a+b$ lo è.
Infatti

$$a+0=a \qquad \text{per definizione}$$

Supponiamo che $a+b$ sia un numero naturale.
Consideriamo $a+(b+1)$, allora

$$a+(b+1)=(a+b)+1 \qquad \text{per definizione}$$

ed $(a+b)+1$ è un numero naturale per il postulato 2). Quindi, per il postulato 3), il teorema è provato.

In maniera analoga Peano prova la *proprietà associativa*

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Infatti:

$$(a+b)+0=a+(b+0).$$

(ciò vale poichè entrambe le componenti del'uguaglianza sono uguali ad $a+b$ per le definizioni poste). Allora per induzione se

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

allora

$$(a+b)+(c+1)=a+[b+(c+1)]$$

Infatti

$$\begin{aligned}(a+b)+(c+1) &= [(a+b)+c]+1 && \text{per definizione di addizione}\\ &= [a+(b+c)]+1 && \text{per il principio di induzione}\\ &= a+[(b+c)+1] && \text{per l'inverso di definizione di addizione}\\ &= a+[b+(c+1)] && \text{per l'inverso di definizione di addizione}\end{aligned}$$

Omettiamo la dimostrazione della *proprietà commutativa*.

Moltiplicazione

Peano definisce la moltiplicazione nel modo seguente:
$\forall a, b \in \mathbb{N}$

- $a \times 0 = 0$
- $a \times (b + 1) = a \times b + a$

In base alla definzione data, sostituendo 0 a b, si ha $a \times 1 = a$, sostituendo 1 a b, si ha $(a \times 1) + a = a + a$, e così via.
Peano definisce allora il prodotto di più fattori a, b, c

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c$$

Ovviamente il segno moltiplicativo $\times$ può essere soppresso, alleggerendo di molto le rappresentazioni simboliche. Possiamo quindi scrivere ab invece di $a \times b$.

Dimostriamo allora che se a e b sono numeri naturali, allora anche ab lo è.
Infatti se a è un numero naturale, $a0 = 0$ è un numero naturale.
Se ab è un numero naturale, $a(b+1) = ab+a$ è un numero naturale, in quanto somma di due numeri naturali. Allora per il postulato 3) vale il teorema.

Dimostriamo la *proprietà distributiva a destra*, e cioè:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Infatti, $a(b + 0) = ab + a0$, poichè $ab = ab$. Si vuole mostrare che

$$a(b + c) = ab + ac \Rightarrow a[b + (c + 1)] = ab + a(c + 1)$$

Infatti

$$\begin{aligned} a[b + (c + 1)] &= a[(b + c) + 1] = \\ &= a(b + c) + a = \\ &= ab + ac + a = \\ &= ab + a(c + 1) \quad \text{per definizione di moltiplicazione} \end{aligned}$$

Per il postulato 3) vale dunque la tesi.

In maniera analoga si può dimostrare la *proprietà distributiva a sinistra.*

1.2 Estensione del concetto di numero naturale

La necessità di estendere il concetto di numero naturale fu sentita per svariati motivi: l'esigenza di determinare misure di grandezza non misurabili con i numeri precedentemente introdotti; l'intento di rendere eseguibili operazioni talvolta impossibili nell'ambito dei numeri già considerati; il bisogno di risolvere equazioni che non avessero radici in $\mathbb{N}$.
É bene specificare subito che non è vero, come si dice comunemente, che i numeri naturali costituiscono un sottoinsieme dell'insieme dei nuovi che andremo ad introdurre, in quanto i primi sono di natura diversa dai secondi, poiché le teorie considerate si basano su differenti sistemi di postulati e perché gli oggetti costruiti hanno natura diversa.
Di volta in volta, le estensioni ottenute hanno sottosistemi che sono strutture isomorfe a quelle che hanno base nell'insieme $\mathbb{N}$.

Per quanto riguarda invece il secondo motivo lo scopo è quello di giustificare l'uso di formule che, nelle espressioni rispetto al concetto di numero naturale dato, sono prive di senso.
Per esempio $a - b$ se $a < b$, oppure $\frac{a}{b}$ se a non è multiplo di b etc.

1.3 Storia e teoria dei numeri interi

Nella matematica greca non appaiono esplicitamente considerazioni sui numeri interi, né sulle loro proprietà.
Tuttavia Diofanto afferma che nello sviluppo del prodotto di due differenze (quello che per noi oggi è $(a - b)(c - d)$), occorre che il prodotto dei due termini sottratti sia da "aggiungersi", e cioè

$$(-b)(-d) = +(bd)$$

Una vera e propria teoria su questi numeri si presenta in India.
Nel VI secolo infatti il matematico Brahmagupta (598-668) fornisce regole

pratiche per il compito dei debiti e dei crediti, mentre nel XII secolo Bhaskara (1114-1185) distingue il valore negativo da quello positivo delle radici quadrate.
Gli Arabi, già studiosi di questioni matematiche, vennero a conoscenza di questi aspetti analizzati dagli Indiani e contribuirono alla loro diffusione in Occidente.

I numeri negativi in Europa cominciarono ad essere utilizzati solo nei secoli XV e XVI, specie da L. Pacioli (1445-1515), G. Cardano (1501-1576) e M. Stifel (1487-1567).
Ma i matematici europei mostrarono a lungo una specie di avversione verso questi "strani" numeri, chiamandoli *aestimationes falsae* oppure *numeri surdi*.
Più tardi l'uso che fece Descartes della geometria analitica rese inevitabile e del tutto normale l'uso dei numeri negativi.

Secondo la teoria del XIX secolo di Hermann Hankel (1839-1873) i numeri interi, $\mathbb{Z}$, si costruiscono a partire dal prodotto cartesiano

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$$

Sia data la relazione $R \subseteq \mathbb{N}^2$ tale che

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Si noti che il $+$ a destra è definito in $\mathbb{N}$ e dunque l'uguaglianza $=$ stessa è una relazione in $\mathbb{N}^2$.

É immediato dimostrare che questa relazione è di equivalenza. Infatti è

- *riflessiva* $\forall(a, b)$, $(a, b)R(a, b)$
  infatti $a + b = b + a$ e l'addizione fra i naturali è commutativa;

- *simmetrica* $\forall(a, b)$, $(a, b)R(c, d) \Rightarrow (c, d)R(a, b)$
  in quanto ciò si può scrivere $a + d = b + c$ e quindi $c + b = d + a$ che è vera per le proprietà dei naturali.

- *transitiva* $\forall(a, b)$, $(a, b)R(c, d) \wedge (c, d)R(e, f) \Rightarrow (a, b)R(e, f)$

Dimostriamo per esteso quest'ultima affermazione.

Per ipotesi, i termini dell'antecedente della implicazione precedente esprimono che

$$a + d = b + c \quad \text{e} \quad c + f = d + e$$

Aggiungiamo ai membri della prima uguaglianza il termine f e a quelli della seconda il termine b

$$a + d + f = b + c + f \quad \text{e} \quad c + f + b = d + e + b$$

Quindi saranno uguali, per la transitività dell'uguaglianza fra numeri naturali, il primo termine della prima ed il secondo della seconda uguaglianza. Cioè

$$a + d + f = b + d + e$$

il che equivale a scrivere

$$a + f = b + e$$

cioè

$$(a, b)R(e, f)$$

come appunto volevamo dimostrare.

Consideriamo ora l'operazione di passaggio al quoziente: avremo $\mathbb{N}^2/R$. Si definisce insieme degli interi $\mathbb{Z}$ proprio questo insieme.
Vale inoltre la *proprietà invariantiva* dell'addizione

$$(a + m, b + m)R(a, b) \Leftrightarrow a + m + b = b + m + a$$

che è senz'altro vera per la proprietà commutativa dell'addizione fra naturali.

É possibile dimostrare che possiamo limitarci a prendere i rappresentanti delle classi di equivalenza. Allora utilizzeremo (a, b) come rappresentante della classe di equivalenza $[(a, b)]$.

Addizione

Definiamo l'addizione in $\mathbb{Z}$ come segue
$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Si può provare che l'addizione è *commutativa* e *associativa.*

Dimostriamo che (n, n) è l'"elemento neutro" dell'addizione.
Dobbiamo dimostrare che $\forall(a, b) \in \mathbb{Z}$

$$(a, b) + (n, n) = (n, n) + (a, b) = (a, b)$$

Infatti per definizione

$$(a, b) + (n, n) = (a + n, b + n)$$

mentre, sempre per definizione

$$(n, n) + (a, b) = (n + a, n + b)$$

Per la proprietà commutativa dell'addizione dei numeri naturali i due secondi membri delle uguaglianze precedenti sono uguali fra loro, mentre, per la proprietà invariantiva dell'addizione fra interi, sono appunto uguali entrambi ad (a, b).
Allora l'elemento neutro $[(n, n)]$ di $\mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, con n diverso da zero (di $\mathbb{N}$),lo chiameremo *zero* (di $\mathbb{Z}$) e lo indichiamo con il simbolo 0.

Possiamo definire l'"elemento inverso", o meglio l'*opposto*, rispetto all'operazione di addizione.
Chiamiamo x una qualsiasi coppia della classe $[(a, b)]$, cioè un rappresentante della classe, allora $\forall x \in [(a, b)]$ poniamo

$$x = (b, a)$$

$-x$ si chiama l'opposto di x. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ si porrà $x - y = x + (-y)$.

Moltiplicazione

Definiamo la moltiplicazione in $\mathbb{Z}$ come segue
$\forall(a, b) \in \mathbb{Z}$

$$(a, b)(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$$

Si possono dimostrare la *proprietà commutativa* e quella *associativa*.
Per quanto riguarda la seconda sappiamo che

$$\begin{aligned}[(a,b)(c,d)](e,f) &= (ac+bd, ad+bc)(e,f) = \\ &= [(ac+bd)e+(ad+bc)f, (ad+bc)e+(ac+bd)f] = \\ &= [(ace+bde+adf+bcf), (ade+bce+acf+bdf)]\end{aligned}$$

Per la proprietà associativa sui numeri naturali abbiamo

$$\begin{aligned}[(ce+df)a+(de+cf)b, (de+cf)a+(ce+df)b] &= (a,b)(ce+df, de+cf) = \\ &= (a,b)[(c,d)(e,f)]\end{aligned}$$

La proprietà associativa è dunque dimostrata.

L'"elemento neutro" della moltiplicazione è rappresentato da ogni coppia del tipo $(n+1,n)$.
Infatti $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}$

$$(n+1,n)(a,b) = (a,b)(n+1,n) = (a,b)$$

Possiamo dimostrare quest'ultima affermazione, utilizzando la definizione di moltiplicazione

$$\begin{aligned}((n+1)a+nb, (n+1)b+na) &= (na+a+nb, nb+b+na) = \\ &= ((a+b)n+a, (a+b)n+b)\end{aligned}$$

Quest'ultima è uguale ad (a,b) per la proprietà invariantiva.

A questo punto è possibile verificare che $\mathbb{Z}$, fornito delle operazioni di addizione e moltiplicazione, è un anello. Infatti:

1. $(\mathbb{Z},+)$ è un gruppo abeliano;
2. $(\mathbb{Z},\times)$ è un semigruppo;
3. $\times$ è distributiva rispetto a $+$.

1.4 I numeri razionali

In questo paragrafo esporremo la costruzione dell'insieme dei numeri razionali, senza considerare gli aspetti storici, che verranno ampiamente trattati nel prossimo capitolo.

Al punto a cui siamo giunti nasce la necessità di estendere $\mathbb{N}$ per poter sempre effettuare l'operazione di divisione, non definibile in generale in $\mathbb{N}$.
Alcune volte infatti sembrerebbe lecito eseguire una divisione in $\mathbb{N}$, per esempio 15 : 3 dà 5 che è un numero ancora naturale, ma in generale questo non avviene. Se vogliamo che accada che il risultato della divisione $a : b$ sia un numero naturale, dobbiamo porre una condizione molto restrittiva, oltre al fatto che $b \neq 0$: che a sia un multiplo di b.
Per poter eseguire l'operazione di divisione, si può passare da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, a $\mathbb{Q}$, così si comprende anche $\mathbb{N}$; ma, storicamente e didatticamente, si preferisce passare dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali all'insieme $\mathbb{Q}^a$ dei numeri razionali assoluti.

Sia quindi $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali, incluso lo zero, e $\mathbb{N}^+$ l'insieme degli stessi, zero escluso (cioè $\mathbb{N} - \{0\}$),e consideriamo il prodotto cartesiano

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$$

che sarà quindi formato dalle coppie (a, b), dove a è un numero naturale qualunque, e b è un naturale qualsiasi tranne lo zero.

Consideriamo le coppie (a, b),(c, d) dell'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$, dove quindi a, b, c, d sono naturali qualsiasi, con le restrizioni $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Si definisce la relazione $R' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^+$ tale che

$$(a, b)R'(c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

É immediato constatare che questa relazione è una relazione di equivalenza, infatti è:

- *riflessiva* $\forall (a, b)$, $(a, b)R'(a, b)$
  infatti per definizione significherebbe che $ab = ba$, e questo è vero per la proprietà commutativa della moltiplicazione in $\mathbb{N}$;

- *simmetrica* $\forall (a,b)$, $(a,b)R'(c,d) \Rightarrow (c,d)R'(a,b)$
  per definizione infatti, ciò equivale a dire che se $ad = bc$ allora $cb = da$, che è ancora una volta valido per la commutatività della moltiplicazione tra i naturali;

- *transitiva* $\forall (a,b)$, $(a,b)R'(c,d) \wedge (c,d)R'(e,f) \Rightarrow (a,b)R'(e,f)$
  infatti, per definizione, avremmo che se $ad = bc$ e $cf = de$ allora $af = be$. Moltiplicando i termini della prima uguaglianza per f e quelli della seconda per b, con f e b non nulli per ipotesi, per la transitività fra i naturali, si ricava $adf = bde$. Ora, essendo $d \neq 0$, perché $d \in \mathbb{N}^+$, vale la legge di cancellazione e si ottiene quindi l'uguaglianza posta.

Consideriamo l'operazione di passaggio al quoziente $[\mathbb{N} \times \mathbb{N}^+]/R'$.
Questo insieme è l'insieme dei numeri razionali assoluti $\mathbb{Q}^a$. Come fatto con $\mathbb{Z}$, è possibile dimostrare che possiamo limitarci a prendere i rappresentanti delle classi di equivalenza. Allora, anche in questo caso, utilizzeremo (a,b) come rappresentante della classe di equivalenza $[(a,b)]$.
Come rappresentante di ogni classe possiamo scegliere la coppia che ha i due elementi minori, che chiameremo *ridotta ai minimi termini*.

Vale la *proprietà invariantiva* della moltiplicazione

$$(a,b)R'(am,bm) \Leftrightarrow abm = bam \quad \text{con } m \neq 0$$

che è vera per la commutatività della moltiplicazione in $\mathbb{N}$.

Addizione

Definiamo l'addizione tra razionali, ponendo
$\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^a$

$$(a,b) + (c,d) = (ad + bc, bd)$$

É estremamente importante in questo caso far vedere che la definizione posta è relativa alle classi e non agli elementi di queste.

E quindi si deve provare che

$$\begin{cases} (a,b) = (a',b') \\ (c,d) = (c',d') \end{cases}$$

$\Rightarrow (a,b) + (c,d) = (a',b') + (c',d')$
Per definizione l'enunciato si può scrivere anche sotto la forma:

$$\begin{cases} ab' = ba' \\ cd' = dc' \end{cases}$$

$\Rightarrow (ad + bc)d'b' = (a'd' + c'b')bd$
Per la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione in $\mathbb{N}$, possiamo scrivere

$$add'b' + bcd'b' = a'd'bd + c'b'bd$$

Per la prima ipotesi, $ab' = ba'$, sono uguali tra loro i primi termini delle addizioni, per la seconda, $cd' = dc'$, sono uguali tra loro i secondi. Quindi il teorema risulta provato.

Valgono la *proprietà commutativa* e *associativa* per l'addizione.
Infatti per quanto riguarda la proprietà commutativa avremo

$$(c,d) + (a,b) = (cb + ad, db) = (ad + cb, bd) = (a,b) + (c,d)$$

che risulta vera per le proprietà di $\mathbb{N}$.
Per la proprietà associativa invece

$$\begin{aligned} [(a,b) + (c,d)] + (e,f) &= (ad + cb, bd) + (e,f) = \\ &= ((ad + cb)f + ebd, (bd)f) = \\ &= (adf + cbf + ebd, bdf) = \\ &= (adf + b(cf + ed), b(df)) = \\ &= (a,b) + [(c,d) + (e,f)] \end{aligned}$$

Le uguaglianze sono giustificabili attraverso le proprietà commutativa e associativa dei numeri naturali.

L'"elemento neutro" dell'addizione è la coppia $(0, n)$, tale che $\forall(a, b) \in \mathbb{Q}^a$

$$(a, b) + (0, n) = (0, n) + (a, b) = (a, b)$$

Per definizione di addizione

$$(an + b0, bn) = (an, bn)$$

che è uguale ad (a, b) per la proprietà invariantiva della moltiplicazione.

Moltiplicazione

Definiamo la moltiplicazione tra i numeri razionali assoluti, ponendo
$\forall(a, b) \in \mathbb{Q}^a$

$$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$$

con b e d diversi da zero.
Anche in questo caso si dimostra che la definizione è relativa alle classi e non agli elementi di queste. Infatti

$$\begin{cases} (a, b) = (a', b') \\ (c, d) = (c', d') \end{cases}$$

$\Rightarrow (a, b)(c, d) = (a', b')(c', d')$

Per definizione possiamo scrivere

$$\begin{cases} ab' = a'b \\ cd' = c'd \end{cases}$$

$\Rightarrow acb'd' = a'c'bd$
Per la proprietà associativa del prodotto tra naturali, possiamo, al posto di $acb'd' = a'c'bd$, scrivere

$$(ab')(cd') = (a'b)(c'd)$$

Allora il teorema resta provato in quanto quest'ultima equazione è vera per ipotesi.

Per la *proprietà commutativa*

$$(c,d)(a,b) = (ca,db) = (ac,bd) = (a,b)(c,d)$$

Per la *proprietà associativa*

$$\begin{aligned}[(a,b)(c,d)](e,f) &= (ac,bd)(e,f) = \\ &= (ace,bdf) = \\ &= (a(ce),b(df)) = \\ &= (a,b)(ce,df) = \\ &= (a,b)[(c,d)(e,f)]\end{aligned}$$

Inoltre vale anche la *proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione*

$$\begin{aligned}[(a,b)+(c,d)](e,f) &= (ad+cb,bd)(e,f) = \\ &= ((ad+cb)e,(bd)f) = \\ &= (ade+cbe,bdf) = \\ &= (ade,bdf)+(cbe,bdf) = \\ &= (ae,bf)+(ce,df) = \\ &= [(a,b)(e,f)]+[(c,d)(e,f)]\end{aligned}$$

Anche nell'insieme dei razionali assoluti esiste l'"elemento neutro" della moltiplicazione e questo è ogni elemento del tipo (n,n).
Infatti, dobbiamo dimostrare che
$\forall (a,b) \in \mathbb{Q}^a$

$$(a,b)(m,n) = (a,b) = (m,n)(a,b)$$

Allora

$$(am,bn) = (a,b)$$

Affinché valga l'uguaglianza, deve essere che $n = m$, e quindi l'elemento neutro moltiplicativo è la classe di equivalenza $[(n,n)]$.
Definiamo a questo punto $1 = [(n,n)]$.

Per ogni elemento (a,b) di $\mathbb{Q}^a$, esiste l'"elemento inverso" della moltiplicazione. Definiamo l'inverso di (a,b) come la coppia (m,n) tale che

$$(a,b)(m,n) = (m,n)(a,b) = (k,k)$$

Allora

$$(am,bn) = (k,k)$$

Affinché valga l'uguaglianza deve essere $am = bn$ e quindi basta che $m = b$ e $n = a$. L'inverso dell'elemento (a,b) sarà allora (b,a).
Infatti

$$(a,b)(b,a) = (ab,ba) = (ab,ab)$$

ed (ab,ab) è proprio l'elemento neutro (le proprietà applicate sono rispettivamente: definizione di moltiplicazione e commutatività della moltiplicazione tra naturali).

Si noti che, se l'elemento inverso moltiplicativo di (a,b) è (b,a), dovrà essere anche $a \neq 0$. Ma allora non tutte le coppie di $\mathbb{Q}^a$ hanno l'inverso moltiplicativo: è il caso della coppia $(0,n)$, con $n \neq 0$, che si può chiamare 0.

Tornando allo scopo iniziale di ampliare $\mathbb{N}$, possiamo ancora estendere il concetto di numero intero e di numero razionale assoluto.
Siano ora (a,b) le coppie appartenenti al prodotto cartesiano

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$$

dove $\mathbb{Z}^+$ indica l'insieme dei numeri interi escluso lo zero, cioè $\mathbb{Z} - \{0\}$.
Definendo la stessa relazione di equivalenza data per l'insieme dei numeri razionali assoluti, e operando un opportuno passaggio al quoziente, avremo $[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+]/R'$. Chiameremo questo insieme $\mathbb{Q}$, insieme dei numeri razionali.

$\mathbb{N}$ è isomorfo ad una parte di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}^a$ è isomorfo ad una parte di $\mathbb{Q}$. Dunque, la costruzione analitica di $\mathbb{Q}$ racchiude quella di $\mathbb{Q}^a$; si propone comunque questa costruzione solo a fini storici e didattici.

Possiamo verificare che $(\mathbb{Q},+,\times)$ è un anello, infatti:

1. $(\mathbb{Q},+)$ è un gruppo;

2. $(\mathbb{Q}, \times)$ è un semigruppo;

3. $\times$ è distributiva rispetto a $+$.

La struttura $(\mathbb{Q}^a, +, \times)$ non è un anello, poiché $(\mathbb{Q}^a, +)$ non è un gruppo in quanto non è dotato dell'elemento opposto.
Ricordiamo che si dice "elemento opposto" di $(a, b) \in \mathbb{Q}^a$ quell'eventuale elemento $(m, n) \in \mathbb{Q}^a$, tale che

$$(a, b) + (m, n) = (0, k) = (m, n) + (a, b)$$

Ma allora presa una coppia qualunque $(p, q) \in \mathbb{Q}^a$ dovremmo avere che

$$(p, q) + (m, n) = (0, k)$$

e cioè

$$(pn + mq, qn) = (0, k)$$

e quindi

$$pn + mq = 0$$

Per definizione q ed n sono sicuramente diversi da zero perché appartenenti a $\mathbb{N}^+$. Ma allora non possono essere contemporaneamente p e m uguali a zero in quanto avremmo altrimenti coppie del tipo $(0, 0)$ che non sono ammesse.
Questo significa che $(\mathbb{Q}^a, +)$ non è un gruppo. La struttura $(\mathbb{Q}, +, \times)$ è un campo. Infatti:

1. $(\mathbb{Q}; +, \times)$ è un anello commutativo;

2. $(\mathbb{Q} - \{0\}; \times)$ è un gruppo.

Consideriamo la relazione $<$ nell'insieme $\mathbb{Q}$, definita come segue:
se $x, y \in \mathbb{Q}$ allora

- $x < y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{Q}^a$

- $x > y \Leftrightarrow y < x$

É possibile dimostrare che tale relazione è d'ordine.

Teorema 1.4.1. $<$ *è una relazione d'ordine.*

Dimostrazione. Se $x, y, z \in \mathbb{Q}$ allora

1. $x \not< x$, $\forall x \in \mathbb{Q}$ infatti $x - x = 0 \notin \mathbb{Q}^a$

2. $\forall x, y \in \mathbb{Q}$, $x \neq y \Rightarrow x < y$ oppure $y < x$ e $x < y \Rightarrow y \not< x$. Infatti $y - x \in \mathbb{Q}^a \Rightarrow x - y \notin \mathbb{Q}^a$

3. $x < y$, $y < z \Rightarrow x < z$ Infatti $y - x \in \mathbb{Q}^a$, $z - y \in \mathbb{Q}^a \Rightarrow$ $z - x = (y - x) + (z - y) \in \mathbb{Q}^a$

$\square$

Ma allora avremo il seguente

Teorema 1.4.2. $(\mathbb{Q}; <)$ *è denso, cioè se* $\forall x, y \in \mathbb{Q}$*,* $x < y$ *allora* $\exists z \in \mathbb{Q}$ *t.c.* $x < z < y$*.*

Dimostrazione. Da $x < y$ segue che $\frac{x}{2} < \frac{y}{2}$ e quindi $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} < \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{x+y}{2}$
Ma
$$\frac{x+y}{2} = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} < \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = y$$
Pertanto
$$x < \frac{x+y}{2} < y$$
Si può quindi assumere che $z = \frac{x+y}{2}$. $\square$

Proponiamo di seguito il teorema che dimostra l'incompletezza di $\mathbb{Q}$, completezza che invece troveremo in $\mathbb{R}$. La ricerca in didattica della matematica ha mostrato che, anche per uno studente evoluto, capire che $\mathbb{Q}$ è denso ma non completo, mentre $\mathbb{R}$ lo è, costituisce un ostacolo. Prima di passare al teorema, necessitiamo della seguente:

Definizione 1.1. Sia $(A, \leq)$ un insieme ordinato. Si dice che A è completo (rispetto all'ordinamento $\leq$) se ogni suo sottoinsieme B non superiormente limitato in A ammette estremo superiore in A.

Allora avremo il seguente

Teorema 1.4.3. $\mathbb{Q}$ *non è completo*

Dimostrazione. Per la definizione sopra data di completezza, sarà sufficiente trovare un sottoinsieme S di $\mathbb{Q}$ maggiorato superiormente che non ammetta estremo superiore in $\mathbb{Q}$. Si consideri un razionale $p \in \mathbb{Q}$ tale che:

- $p > 0$
- $\neg \exists q \in \mathbb{Q}$ t.c. $q^2 = p$

Sia

$$S = \{q \in \mathbb{Q} | q \leq 0\} \cup \left\{q \in \mathbb{Q} | q^2 < p\right\}$$

Distinguiamo allora due casi

1. $p \geq 1$
   p maggiora S altrimenti dovrebbe accadere: $\exists q \in S$, con $q > p$, da cui seguirebbe:
   $$q^2 > p^2 \Rightarrow p^2 < q^2 < p$$
   il che è assurdo, in quanto, per ipotesi, $p \geq 1$

2. $p < 1$
   1 maggiora S altrimenti dovrebbe accadere: $\exists q \in S$ con $q > 1$, da cui seguirebbe:
   $$q^2 > 1 \Rightarrow p < 1 < q^2$$
   il che è assurdo, in quanto $q \in S$

Di conseguenza S è maggiorato superiormente. Si può osservare che S non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$. Si ponga per assurdo che sia E=sup$S$ con $E \in \mathbb{Q}$.

Osservazione 1. Per ipotesi, essendo E razionale, $E^2 \neq p$.
Sia f la funzione

$$f : \mathbb{Q} - \{0\} \to \mathbb{Q}$$

definita da $f(x) = \frac{x(x^2+3p)}{3x^2+p}$. Con qualche semplice calcolo si può mostrare che:

1. $f(x) - x = \frac{2x(p-x^2)}{3x^2+p}$
2. $f(x)^2 - p = \frac{(x^2-p)^3}{(3x^2+p)^2}$

Non può esistere un elemento E che soddisfi la definizione.

- Per ipotesi, essendo E razionale, $E^2 \neq p$
- Se, per assurdo, si considera E t.c. $E^2 < p$ allora:
  - Per la 2) $f^2(E) - p < 0 \Rightarrow f^2(E) < p$ da cui segue: $f(E) \in S$
  - Per la 1) $f(E) - E > 0 \Rightarrow f(E) > E$ da cui segue che E non è il sup, contro l'ipotesi.
- Se, per assurdo, si considera E t.c. $E^2 > p$ allora:
  - Per la 2) $f^2(E) - p > 0 \Rightarrow f^2(E) > p$ da cui segue: $f(E) \in S$
  - Per la 1) $f(E) - E < 0 \Rightarrow f(E) < E$ da cui segue $f(E) < E = \sup S$

Si può concludere quindi che S non ammette estremo superiore in $\mathbb{Q}$.

Si pone però il problema dell'esistenza di un tale insieme S. Si può affermare con certezza che: $\exists p$ tale che $\neg\exists q \in \mathbb{Q}$, $q^2 = p$?

Osservazione 2. $p > 1$, p primo. $\neg\exists q \in \mathbb{Q}$, $q^2 = p$

Dimostrazione. Se, per assurdo, scelto p, esistesse un tale $\frac{m}{n} = q \in \mathbb{Q}$, $m, n, \in \mathbb{N}$ allora avremmo $\frac{m^2}{n^2} = p$ da cui: $m^2 = pn^2$. Essendo m^2 un quadrato, così come n^2, il primo p dovrebbe comparire con esponente pari nel membro di destra dell'uguaglianza, mentre invece lo troviamo con esponente 1. □

1.5 Storia e teoria dei numeri reali

L'esigenza di ampliare ulteriormente il concetto di numero, estendendo il campo razionale, ha radici molto antiche.
Il tentativo dei matematici greci della scuola pitagorica di descrivere il mondo

esclusivamente per mezzo di numeri naturali e loro rapporti (per la definizione di rapporto si veda Euclide in *Gli elementi di Euclide*, Frajese A., Maccioni M. 1970) sfumò al momento della scoperta dell'esistenza di grandezze incommensurabili, cioè grandezze che non ammettono una grandezza sottomultipla in comune.

Il concetto di numero precedentemente elaborato (numero come rapporto di grandezze omogenee) risultò infatti inadeguato a descrivere anche situazioni molto semplici. Già tentando di esprimere la lunghezza della diagonale di un quadrato si incontra la prima limitazione.
Infatti tale lunghezza, secondo il teorema di Pitagora, risulta essere soluzione dell'equazione $l^2 = 2$.
Teniamo chiaramente presente che questo simbolismo fa parte di una cultura matematica che appartiene a noi, ma che non apparteneva sicuramente ai matematici greci. Questo simbolismo algebrico entrò infatti a far parte degli strumenti della matematica molti secoli dopo, fra il XVI e XVII secolo.

Il problema è esprimibile nel linguaggio moderno in questo modo: l'equazione che ricaviamo con uno strumento noto, il teorema di Pitagora, e che ha coefficienti altrettanto noti, i numeri naturali, non ha soluzione in $\mathbb{Q}$. É possibile dimostrare che l non è esprimibile come frazione, infatti

Teorema 1.5.1. *Non esistono interi positivi n, m tali che $n^2 = 2m^2$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano interi positivi n, m primi tra loro (privi cioè di divisori comuni diversi da zero) tali che $n^2 = 2m^2$.
Ora ripartiamo i numeri interi positivi in due classi, pari (del tipo $2k, k \geq 1$) e dispari (del tipo $2k + 1, k \geq 1$). Si ha:

- il quadrato di un numero pari è pari;
- il quadrato di un numero dispari è dispari.

Ossia un numero intero positivo ha quadrato pari se e solo se è pari.
Da $n^2 = 2m^2$ segue che n^2 è pari, e quindi n è pari. Ciò significa che n è della forma $n = 2k$ e quindi $n^2 = 4k^2$.

Ma allora $n^2 = 2m^2$ diventa $4k^2 = 2m^2$, e cioè $2k^2 = m^2$, ma allora anche m è pari, ma ciò è assurdo in quanto n e m sono primi fra loro. Risulta quindi dimostrata la tesi. $\square$

Per risolvere allora l'equazione del tipo $x^2 = 2$, non possiamo limitarci al campo dei razionali perché la soluzione dell'equazione, che noi denotiamo con il simbolo di $\sqrt{2}$, non gli appartiene.

A questo punto possiamo pensare di considerare tutte le possibili estensioni algebriche di $\mathbb{Q}$.
Se consideriamo per esempio $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$, allora avremo l'elemento algebrico $\sqrt{2}$ che è radice del polinomio sopra considerato a coefficienti razionali.
Questo però non è sufficiente perché ometteremmo quegli elementi che sono detti trascendenti, e che non sono radice di nessun polinomio a coefficienti in $\mathbb{Q}$, come per esempio π. La dimostrazione della trascendenza di π non è antica come la sua storia, ma è anzi piuttosto recente, risalendo alla fine del XIX secolo.

Non è quindi così immediata l'estensione da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$, né tanto meno costruibile, come nei due casi precedenti, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$, attraverso l'operazione di passaggio al quoziente.
Questo passaggio dall'insieme dei numeri razionali a quello dei numeri reali, coincide anche con un passaggio da un insieme numerabile, $\mathbb{Q}$, ad uno che non lo è, $\mathbb{R}$, come è stato dimostrato da G. Cantor (1845 - 1918). La costruzione di questo nuovo insieme avrà come risultato un campo che non ha la potenza del numerabile; la sua cardinalità sarà detta "cardinalità del continuo" (*Infiniti infiniti*, Arrigo, D'Amore e Sbaragli, 2010).

É possibile costruire l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali in diversi modi, facendo riferimento alle costruzioni classiche di Meray-Cantor, Cauchy e Dedekind. Ognuna di esse utilizza strumenti matematici non sempre alla portata di studenti della scuola secondaria di secondo grado.
Noi ci limiteremo ad analizzare una strada possibile, che è quella delle successioni razionali convergenti.

1.5.1 Numeri reali come coppie di successioni razionali convergenti

Prima di addentrarci nel metodo vero e proprio delle coppie di successioni razionali convergenti, abbiamo bisogno di alcune definizioni.

Definizione 1.2. Siano $A, B \in \mathbb{Q}$, $A, B \neq \emptyset$. Si dice che la coppia (A, B) è una sezione razionale (o una sezione di Dedekind) se valgono le seguenti condizioni:

- (A, B) è una partizione di $\mathbb{Q}$, cioè:
  - $A \cup B = \mathbb{Q}$
  - $A \cap B = \emptyset$
- Ogni elemento di A precede ogni elemento di B, cioè: $\forall a \in A, \forall b \in B : a < b$
- A non ammette massimo

Definizione 1.3. Si indichi con S l'insieme delle sezioni razionali.

Definizione 1.4. Una successione $\{a_n\}_{n>0}$ con $n \in \mathbb{N}$ si dice convergente in A se $\exists l \in A$ t.c.

$$\lim_{n \to +\infty} \{a_n\}_{n>0} = l$$

Se $l = 0$, si dice che la successione è infinitesima.

É possibile dimostrare che due campi ordinati completi sono sempre ordinatamente isomorfi.

La teoria che qui esporremo solo per brevi cenni è stata impiegata più volte a fini didattici.

Definizione 1.5. Una coppia di successioni (razionali) convergenti è una coppia $(\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0})$ di successioni di numeri razionali, con $n \in \mathbb{N}$ tale che:

- la successione $\{a_n\}_{n>0}$ sia (strettamente) crescente, la successione $\{b_n\}_{n>0}$ sia (strettamente) decrescente;

- $\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$

Chiameremo $C(\mathbb{Q})$ l'insieme delle coppie di successioni di numeri razionali convergenti, che soddisfino cioè tali proprietà.

Osserviamo subito che, nella condizione precedente, per ogni a_n ed ogni b_m si ha $b_m - a_n > 0$. Infatti se per opportuni naturali m, n si avesse $b_m - a_n \leq 0$, sarebbe $s > max(m, n)$, $0 \geq b_s - a_s > b_{s+1} - a_{s+1} > ...$ quindi la successione $\{b_n - a_n\}_{n>s}$ sarebbe una successione (strettamente) decrescente di numeri razionali negativi, in contraddizione con la validità della proprietà 2.

É possibile definire una relazione $R" \subseteq (C(\mathbb{Q}))^2$ tra due coppie di successioni convergenti tale che:

$$(\{a_n\}_{n>0}\, , \{b_n\}_{n>0})R"(\{a'_n\}_{n>0}\, , \{b'_n\}_{n>0})$$

se e solo se per ogni numero razionale h con $h < a_n$ per qualche $n > 0$, si ha $h < a'_m$ per qualche $m > 0$ e per ogni numero razionale h con $h > b_n$ per qualche $n > 0$, si ha $h > b'_m$ per qualche $m > 0$.
Si può dimostrare che questa relazione è di equivalenza.

Eseguiamo un'operazione di passaggio al quoziente. Lo spazio quoziente così definito lo chiameremo **P**.
Le classi di equivalenza di **P** si indicheranno con

$$[\{a_n\}_{n>0}\, , \{b_n\}_{n>0}]$$

Si definisce una relazione su **P** ponendo

$$[\{a_n\}_{n>0}\, , \{b_n\}_{n>0}] > [\{a'_n\}_{n>0}\, , \{b'_n\}_{n>0}]$$

se $\forall h \in \mathbb{Q}$ t.c. $h < a_n$ per qualche n e $h > b'_m$ per qualche m, con n, m numeri naturali.
Si può dimostrare che tale relazione è d'ordine.

Addizione

Date $[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}], [\{a'_n\}_{n>0}, \{b'_n\}_{n>0}] \in \mathbf{P}$, si definisce l'addizione come segue

$$[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}] + [\{a'_n\}_{n>0}, \{b'_n\}_{n>0}] = [\{a_n + a'_n\}_{n>0}, \{b_n + b'_n\}_{n>0}]$$

Si può dimostrare che la somma appartiene ancora a $\mathbf{P}$.

Definiamo "elemento neutro" dell'addizione la classe $[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}]$ nella quale tutti gli a_n sono negativi e tutti i b_n sono positivi. Scegliamo come rappresentante per l'elemento neutro la classe

$$\left[\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n>0}, \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n>0}\right]$$

con $n \in \mathbb{N}$ e la indichiamo con 0.
Si può dimostrare che $[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}] > 0$ se e solo se uno degli a_n è positivo.

Moltiplicazione

Date $[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}], [\{a'_n\}_{n>0}, \{b'_n\}_{n>0}] \in \mathbf{P}$, si definisce la moltiplicazione come segue

$$[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}] + [\{a'_n\}_{n>0}, \{b'_n\}_{n>0}] = [\{a_n a'_n\}_{n>0}, \{b_n b'_n\}_{n>0}]$$

Se associamo ad ogni numero razionale q la classe

$$\left[\left\{q-\frac{1}{n}\right\}_{n>0}, \left\{q+\frac{1}{n}\right\}_{n>0}\right]$$

definiamo un omomorfismo ordinato che permette di identificare i numeri razionali q con le classi $\left[\left\{q-\frac{1}{n}\right\}_{n>0}, \left\{q+\frac{1}{n}\right\}_{n>0}\right]$.

Sia $[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}] \in \mathbf{P}$; se identifichiamo i razionali a_n, b_n con elementi di $\mathbf{P}$, le successioni $\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}$ entrambe convergono ad X; la prima approssimando X per difetto, la seconda per eccesso.

Osservazione 3. Se (A, B) è una sezione razionale, le possiamo fare corrispondere la classe di successioni convergenti $[\{a_n\}_{n>0}, \{b_n\}_{n>0}]$. Con questa applicazione si definisce effettivamente un isomorfismo ordinato $S \to \mathbf{P}$, di campi ordinati e pertanto $\mathbf{P}$ risulta essere un campo ordinato completo.

Capitolo 2

Questioni storiche

Si è soliti ipotizzare un duplice modo di vedere la didattica della matematica in una sua evoluzione storica:

- **didattica A**: come divulgazione delle idee, fissando dunque l'attenzione sulla fase dell'insegnamento (A sta per *ars docendi*);

- **didattica B**: come ricerca empirica, fissando l'attenzione sulla fase di apprendimento (D'Amore, 1999).

Non ci soffermeremo su questo ambito a lungo, ci serve solamente per ascrivere alla prima tipologia di didattica alcune attività che vanno sotto il nome di "uso della storia della matematica come strumento didattico".
Sia la *Storia* (come analisi critica dell'evoluzione delle idee), sia la *storia* (come sviluppo dei fatti), sia la *storia aneddotica*, hanno ruoli interessanti nel settore A.

La prima *Storia* costituisce certo il settore d'interesse da privilegiare se non proprio per lo studente, almeno per l'insegnante. La seconda *storia* spiega le origini delle idee, dei problemi, delle teorie che hanno reso la matematica così come è oggi e dunque infonde la certezza che questa disciplina non è una stantìa raccolta di cose già fatte e sistemate da sempre e per sempre, ma qualche cosa in perpetua evoluzione.
Infine la terza, quella *aneddotica*, affascina i giovani rendendo i matematici

meno estranei agli studenti, creando una sorta di fascino non più misterioso, ma curioso, attorno a loro ed al loro prodotto culturale.
É con queste osservazioni ben presenti che ci apprestiamo ad introdurre l'aspetto storico connesso alle frazioni.

Dichiariamo qui una volta per tutte di aver utilizzato in tutto questo capitolo in modo massiccio Fandiño Pinilla (2005) per evitare di rendere pesante il testo con continue citazioni di tale testo. A sua volta, esso contiene una ricchissima bibliografia.

2.1 I termini

Prima di entrare nel contesto storico delle frazioni, è bene considerare la storia dei termini ad esse legate.

Il termine "frazione" viene dal tardo latino *fractio*, cioè "parte ottenuta spezzando", e quindi dal verbo "frangere", cioè "spezzare". É quindi sbagliato pensare che, nel significato originale etimologico di frazione, sia già compresa implicitamente la richiesta che le parti ottenute con l'azione di spezzare siano "uguali".

Il simbolo $\frac{m}{n}$ ha origine incerta, ma fu certamente utilizzato da Leonardo Fibonacci Pisano nel suo *Liber Abaci* del 1202. In questa sua opera i numeri frazionari sono chiamati "rupti" o anche "fracti" e il trattino posto fra numeratore e denominatore è chiamato "virgula", cioè "bastoncello".
Secondo Cajori (1928-29) il bastoncello fu usato in precedenza anche dal matematico arabo Abū Zakharīyá Muhammad ibn Abdalláh al-Hassâr circa un secolo prima di Fibonacci; secondo Yuškevič (1976) le origine sarebbero ancora più antiche, indiane, mentre per un lungo periodo i Greci scrivevano il numeratore sotto al denominatore, ma senza bastoncello.

Anche le parole "numeratore" e "denominatore" hanno origine incerta, ma sappiamo che si affermano nel corso del XV secolo in Europa.

La cosiddetta "riduzione delle frazioni ai minimi termini" è molto antica, ma si trova esplicitamente in Luca Pacioli ed in Nicolò Fontana da Brescia detto Tartaglia (1499-1557), sotto il nome di “schisare”; il massimo divisore comune dei due termini è detto “schisatore”; la stessa operazione si trova anche denominata, a fine Medioevo, “ultima depressione fractorum” o “ridur li rotti alla sua menor denominatione”. Questa operazione si chiama oggi talvolta “semplificazione”.

Una certa diffusione ha avuto in passato l’operazione contraria, quella che permette di passare per esempio da $\frac{2}{3}$ a $\frac{6}{9}$. Questa è detta “amplificazione”. In certi Paesi ha ancora un diffuso uso scolastico, mentre in Italia si è perso dal XIX secolo.

La distinzione tra frazioni “proprie”, “improprie” e “apparenti” è solo del XVIII secolo; questa distinzione, poco intuitiva da un punto di vista didattico da parte degli studenti alle prime armi, non sembra esistere in precedenza.

Anche per la parola “decimale”, che tanto spesso appare nell’insegnamento-apprendimento delle frazioni, la derivazione etimologica è latina: proviene infatti dall’aggettivo “decimalis”, cioè “ripartito a dieci a dieci”.

Vediamo di seguito alcuni contesti dell’aritmetica tipicamente scolare in cui viene utilizzata la parola “decimale” come aggettivo.
“Calcolo decimale” è quel sistema nel quale si trattano le operazioni scritte nel sistema decimale.
“Frazione decimale” è una frazione che ha per denominatore una potenza di dieci.
“Unità decimale” è una frazione decimale con numeratore uno.
“Numero decimale” è una frazione decimale, quando viene scritta nella forma con la virgola.
“Sistema decimale” è un sistema posizionale che ha come base il dieci. Ricordiamo che i sistemi posizionali hanno una storia molto antica; nel mondo europeo si affermò il sistema indiano, che ha origine nel VI secolo, portatovi dagli Arabi nel IX. Ma ci sono precedenti illustri anche presso Sumeri, Aztechi e soprattutto Maya.

La rappresentazione delle frazioni con numeri decimali è dovuta a Simone di Bruges detto Stevin (1548-1620). Costui, però, non usava la virgola, ma tutt'altro simbolismo. Il segno della virgola "," per separare la parte intera da quella decimale, è stato proposto da John Wallis (1616-1703), il maestro di Isaac Newton (1642-1727), e fu definitivamente generalizzato in Francia e Italia solo alla fine del XVIII secolo, quando venne introdotto il Sistema Metrico Decimale.

2.2 Egizi

In Egitto, a partire dal 3000 a.C., si sviluppò una notevole competenza in matematica, competenza di solito riservata alle caste più potenti, i sacerdoti e gli scribi.

Le fonti considerate più autorevoli ed autentiche per queste ricerche sono costituite da alcuni famosi papiri e rotoli.

Il più citato documento matematico dell'antico Egitto è sicuramente il cosiddetto "papiro di Rhind". Esso deve il suo nome a quello dell'antiquario scozzese Alexander Henry Rhind (1833-1863) che lo rintracciò a Luxor (l'antica Tebe). Il titolo originale del papiro è *"Norme per investigare nella Natura e per conoscere tutto ciò che esiste(...),ogni mistero"*.
Il papiro si trova in eccezionale stato di conservazione, è lungo 550 cm ed alto 33 cm. Dalla morte di Rhind si trova esposto nella III sala egizia nel British Museum di Londra. Il papiro è datato 1650 a.C., firmato dallo scriba Ahmes; si tratta però di una copia di un papiro di circa due secoli prima, come dichiara lo stesso scriba.
Contiene 87 problemi di matematica e varie questioni aventi a che fare proprio con le frazioni.

Anche il "papiro di cuoio" o "rotolo di pelle" fu comprato dallo stesso Rhind ed è conservato sempre al British Museum. Secondo alcuni studiosi è ancora più antico del precedente, dato che è certo che l'abitudine di scrivere sul papiro sostituì quella di scrivere sulla pelle, troppo costosa e deperibile.

Per questo motivo si considera che questo documento consenta di analizzare conoscenze precedenti degli Egizi sulle frazioni.

Altro documento storico della matematica egizia è il "papiro di Mosca", acquistato da W. Goleniščev a Luxor e conservato ora al Museo di Belle Arti di Mosca. Le sue dimensioni sono di 560 cm di lunghezza per 8 di altezza. Anche in questo caso si tratta di una ricopiatura di un testo precedente, pare contemporaneo a quello di Rhind.

Abbiamo poi il "papiro di Kahun", così chiamato perché fu ivi ritrovato da W.M. Flinders Petric nel 1891. Si trova anch'esso al British Museum. La matematica in esso contenuta risale al 1800 a.C.

Da non dimenticare il "papiro di Berlino", sempre del 1800 a.C., conservato al Museo di Berlino.

Un papiro importante per i segni ieratici è il "grande papiro Harris"(dal nome del suo scopritore), oggi al Museo di Londra. Risale al periodo di Ramsete III (1192-1153 a.C.) e fornisce l'inventario dei beni contenuti nei vari templi al momento della sua morte.

Oltre a questi papiri e rotoli, possiamo contare su varie tavole matematiche conservate soprattutto al Museo del Cairo. Vari reperti si trovano anche al Museo Egizio di Torino.

Dobbiamo a questo punto distinguere fra due diverse modalità di scrittura: la scrittura geroglifica e quella ieratica.

2.2.1 Scrittura geroglifica

Originariamente "geroglifico" significa "forma specifica dell'antica scrittura fondamentale dell'Egitto faraonico", ma ha poi assunto il senso più generico di "carattere di scrittura con forma pittorica incisa, scolpita o dipinta".

Per gli Egizi, i geroglifici erano "l'espressione della parola degli dei", per cui i Greci li chiamarono "grammata iera" cioè "caratteri sacri" o, meglio ancora, "grammata ieroglyphica", cioè "caratteri sacri scolpiti", da cui deriva il nome moderno "geroglifici".
Tra il 3000 e 2000 a.C. anche i segni dei numerali egizi erano di tipo geroglifico, come quelli mostrati in Figura **??**. Per indicare un numero naturale,

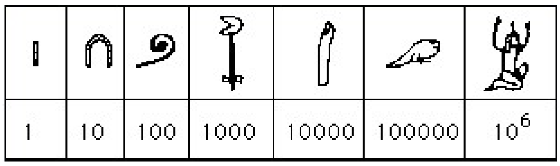


Figura 2.1: Scrittura geroglifica

si scrivevano dapprima le unità del massimo ordine decimale, e poi via via quelle di ordine minore fino alle unità.
Questa era la forma geroglifica di scrittura dei numerali più diffusa, ma non univoca. In diverse epoche, in diversi luoghi e su diversi materiali, si sono trovate anche forme di scrittura assai diverse.

Gli Egizi dedicarono molta passione allo studio delle frazioni.
Anche in questo caso, le scritture geroglifiche sono molteplici, ma proponiamo qui la più nota.
Ecco in che modo rappresentavano alcune frazioni (Figura **??**). Il segno

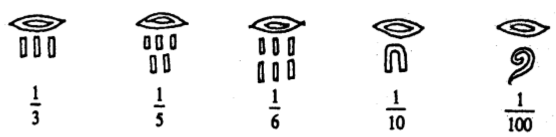


Figura 2.2: Frazioni egizie

superiore che appare in tutti è il segno geroglifico "bocca", che si legge "er" e significa "parte". Esso ha la funzione di numeratore unitario del tipo $\frac{1}{}$. Il numerale che appare sotto la bocca è il denominatore.
Si è soliti affermare che gli Egizi avevano solo frazioni "unitarie". In realtà

ciò non è esattamente vero. Infatti essi avevano anche altre due frazioni, $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, alle quali riservavano simboli particolari, come mostrato in Figura **??** e Figura **??**.

Figura 2.3: Frazione rappresentante $\frac{2}{3}$

Figura 2.4: Frazione rappresentante $\frac{3}{4}$

É vero, però, che gli Egizi non considerarono mai $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ come vere e proprie frazioni, ma come simboli divini. Dunque affermare che le "uniche" frazioni egizie considerate come tali sono quelle con numeratore 1, è tutto sommato vero.
Anche la frazione $\frac{1}{2}$, per la sua indiscutibile peculiarità, aveva un geroglifico a parte che si chiamava "ges" cioè proprio "metà".

Figura 2.5: Frazione rappresentante $\frac{1}{2}$

Una delle problematiche sulle frazioni che più appaiono dibattute è quella relativa alla riduzione di frazioni complesse in frazioni unitarie; in questo, i papiri rivelano che gli Egizi furono veri e propri maestri. Per esempio si trova, tra molti esempi, la seguente uguaglianza:

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

Un riguardo aritmetico particolare veniva riservato alle misure di capacità. Era infatti molto importante, in un Paese in prevalenza desertico, conservare a lungo cereali e agrumi, una volta raccolti, o liquidi, come la birra, una volta prodotta.
L'unità di capienza era espressa in "heqat", equivalente circa a 4,785 litri.

Il segno geroglifico per questa unità di misura di nome "udjat", che significa contemporaneamente "occhio umano" e "occhio di falco", era quello mostrato in Figura ??. Era talmente importante dividere un heqat in par-

Figura 2.6: Segno geroglifico dell' "heqat"

ti che, non disponendo del sistema decimale, gli Egizi usavano dividerlo in metà, quarti, ottavi, sedicesimi, trentaduesimi e sessantaquattresimi, e quindi le frazioni unitarie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ avevano un ruolo speciale, tanto da assegnarli un segno geroglifico a parte, in Figura ??. Attorno a queste misure

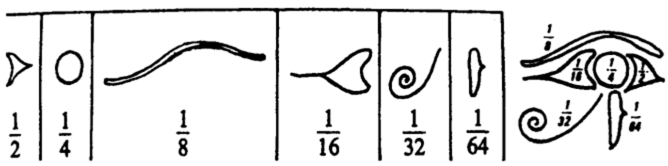


Figura 2.7: "Parti" dell'heqat

ruotavano esercizi mnemonici di tipo scolastico, ma anche miti, come quello famoso dell'occhio di Horus, disperso nel deserto per vendetta. Questo, in particolare, serviva a mostrare come la somma di tutte le precedenti frazioni unitarie non dà l'unità, dato che manca $\frac{1}{64}$, il che, forse, voleva essere una spinta a non sottovalutare nemmeno minime quantità di heqat.

Si tenga presente che gli Egizi ebbero notevoli rapporti con altre civiltà africane, asiatiche e di tutto il Mediterraneo, perciò furono influenzati dalle, e influenzarono le, aritmetiche di tali popoli.

2.2.2 Scrittura ieratica

L'aggettivo "ieratico" deriva dal greco "hieratikós", cioè "sacerdotale", a sua volta da "hierós", cioè "sacro". Attualmente questa parola in italiano ha il significato di "grave, solenne", riferito ai gesti lenti e pieni di significato.

Il termine riferito alla scrittura sacerdotale egizia è stato coniato dallo scrittore greco cristiano Tito Flavio (150-215 d.C.), più noto con l'epiteto di Clemente Alessandrino, uno dei padri della Chiesa.

La scrittura ieratica era largamente usata dai sacerdoti e dagli scribi, e preferita rispetto alla corposa scrittura geroglifica.
Era soprattutto utilizzata per effettuare conti, stendere censimenti, inventari, rapporti, testamenti, in amministrazione etc.
Nel papiro di Rhind la scrittura ieratica appare come mostrato in Figura ??. Nella Figura ?? riportiamo invece i simboli ieratici del papiro di

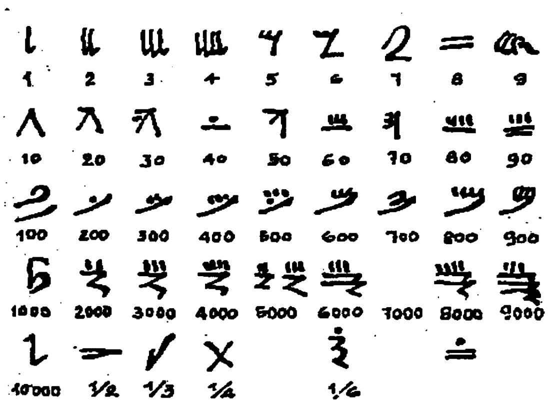


Figura 2.8: Scrittura ieratica del papiro di Rhind

Torino, del XIII secolo a.C. In effetti però le scritture notazionali delle frazioni non subirono cambiamenti notevoli e rimasero sostanzialmente le stesse dei geroglifici.

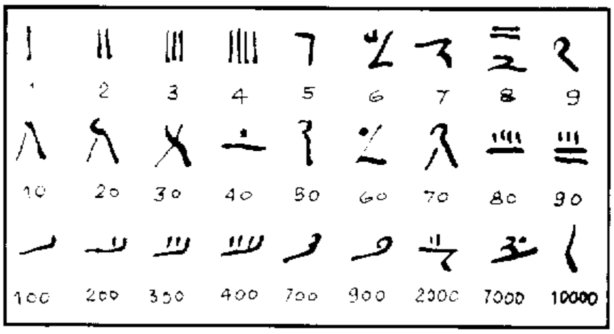


Figura 2.9: Scrittura ieratica del papiro di Torino

2.2.3 Le frazioni egizie nei problemi

Per vedere come gli Egizi utilizzavano le frazioni, mostriamo di seguito alcuni problemi tratti dal papiro di Rhind.
Teniamo presente che, data la scarsità di cibo, fatto cronico persistente per l'epoca, si fabbricavano pani e birra a "forza" ("pesu") diversa. La forza di un pane è il reciproco della densità dei chicchi di frumento usati per la fabbricazione di un pane a grandezza standard; si trova facendo il quoziente tra un dato numero di pani ed il totale del numero dei chicchi di frumento usati per impastarli (l'analogo vale anche per la birra, considerata a tutti gli effetti un cibo).

- **I problema:** il problema 72 chiede il numero di pani forza 45 equivalenti a 100 pani di forza 10. Non viene dato il procedimento ma solo la soluzione $\frac{100}{10} \times 45$ e dunque 450.

- **II problema:** il problema 63 chiede di distribuire 700 pani della stessa forza fra 4 persone in modo che essi ricevano pani secondo la seguente proporzione
$$\frac{2}{3} : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$$

In molti papiri matematici egizi si propongono problemi che, per essere risolti, rimandano ad equazioni: spesso i dati o le radici di tali equazioni sono numeri frazionari. Tendendo presente che per indicare una variabile numerica, lo scriba egizio usa la parola “mucchio” (“aha”) per indicare una quantità non nota di oggetti, analizziamo il seguente problema

- **III problema:** il problema 24 chiede quale è il valore del mucchio, se il mucchio e $\frac{1}{7}$ del mucchio è 19.
  il metodo di risoluzione degli Egizi consiste nella *falsa posizione*. Supponiamo cioè che il mucchio, che noi chiameremo x, sia 7. Allora
  $$x + \frac{1}{7}x = 19$$
  diventa
  $$7 + 1 = 19$$
  Ora per arrivare da 8 a 19, basta moltiplicare 8 per $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. La risposta allora non è 7, ma $7 \times (2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8})$.

I problemi che appaiono sui papiri sono di diversa difficoltà, spesso sono di geometria e coinvolgono frazioni.

2.3 Sumeri, Assiri, Babilonesi

Attorno al 4000 a.C. i Sumeri crearono una grande civiltà nella fertile “terra compresa tra i due fiumi” Tigri ed Eufrate, “Mesopotamia”, appunto, l’attuale Iraq.

Nel periodo 4000-3500 le città-stato sumere, in eterna rivalità tra loro, non segnalano predomini particolari; ciò fino al 3500, quando prevalse Uruk, dando vita alla cosiddetta “civiltà sumera”, dal nome dell’antica tribù che diede il via alla civilizzazione di quelle terre.

Dominati dai Sumeri, gli Assiri conquistarono l’indipendenza del 2003 a.C. e svilupparono una fiorente attività commerciale di grande cultura artistica e scientifica.

Nello stesso periodo si stabilì a Babilonia una dinastia proveniente dalla Siria e dalla Palestina. Soprattutto queste due civiltà, Assiri e Babilonesi, si intrecciarono fra loro, e lo fecero anche con i Sumeri, per cui risulta difficile stabilire i limiti della storia scientifica di queste tre civiltà.

Non sappiamo molto delle origini arcaiche dei loro sistemi numerici, ma ci sono comunque abbondanti testimonianze del fatto che fin da quell'epoca usarono un sistema posizionale corretto, con la base principale 60 e base secondaria 10. I numeri fondamentali del loro sistema furono (scritti con la nostra notazione):
1
10
60
600 in quanto 10×60
3600 in quanto 60^2 e $(10 \times 6 \times 10) \times 6$
36000 in quanto $60^2 \times 10$ e $(10 \times 6 \times 10 \times 6) \times 10$

I loro numerali cambiarono spesso forma, ma una certa stabilità si ebbe tra il 4000 e il 2500 a.C.
Su tavolette di argilla vengono incisi i seguenti segni:

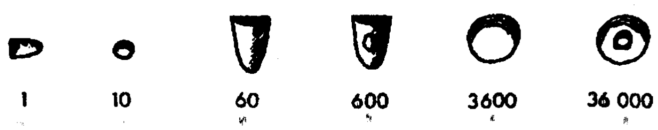


Figura 2.10: Scrittura arcaica

Per eliminare parte delle inevitabili lungaggini, apparve in questo ambito la scrittura sottrattiva nella quale invece di scrivere 9, per esempio, si scriveva $10-1$ usando solo 3 segni: quello del 10, quello per la sottrazione e quello per l'1. Il segno "-" si denominava "lá" e significava proprio "meno". I Sumeri

Figura 2.11: Segno meno

lo indicavano con il segno mostrato in Figura **??**.

Attorno al 2700 a.C. si fa strada un altro modo di scrivere i numerali, il *sistema cuneiforme*, (Figura ??), che presenta però alcuni problemi di interpretazione. Per oltre 700 anni le due forma di scrittura convissero, fino

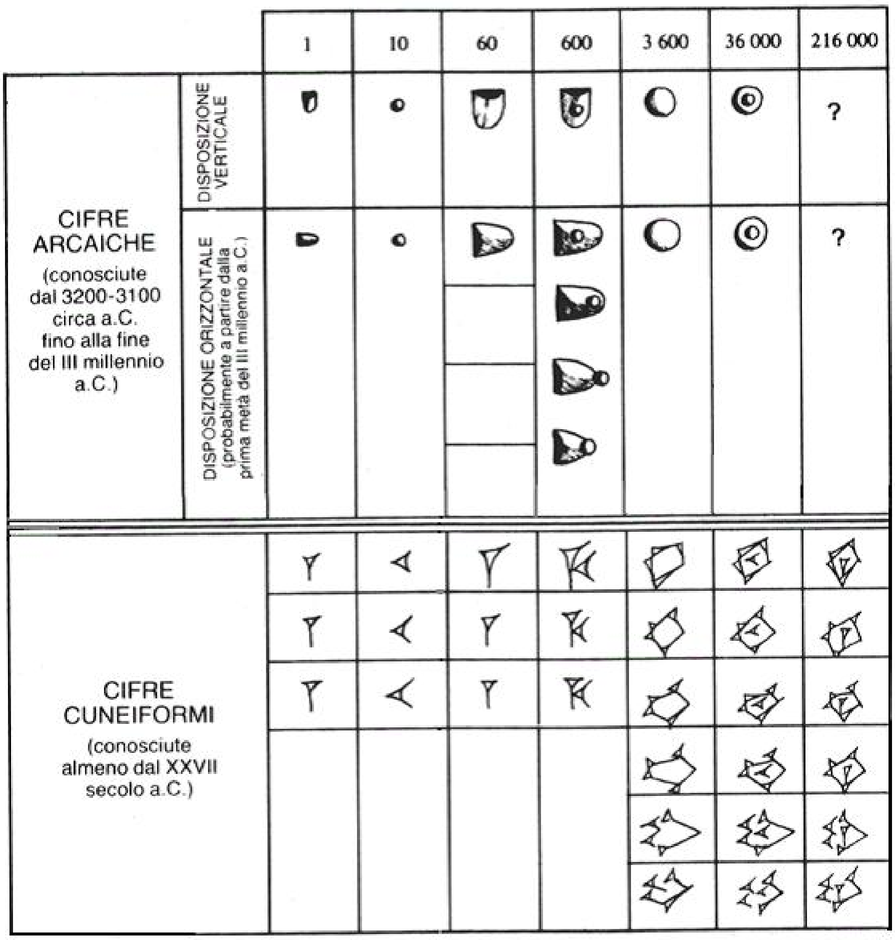


Figura 2.12: Scrittura cuneiforme

a quando, attorno al 2100, la cuneiforme soppiantò l'arcaica.

Alla civiltà sumera si affiancò e lentamente si sostituì quella assira e poi quella babilonese. Le aritmetiche delle tre popolazioni sostanzialmente si mantennero e si svilupparono gradualmente con il passare del tempo.

Fare i calcoli non era facile e quindi, una volta che erano stati faticosamente eseguiti, i risultati venivano riportati su apposite tavolette, gelosamente conservate presso la corte o nei templi. La più famosa fra quelle ritrovate è senz'altro quella trovata a Susa e datata (circa) 1500 a.C. Questa tavola,

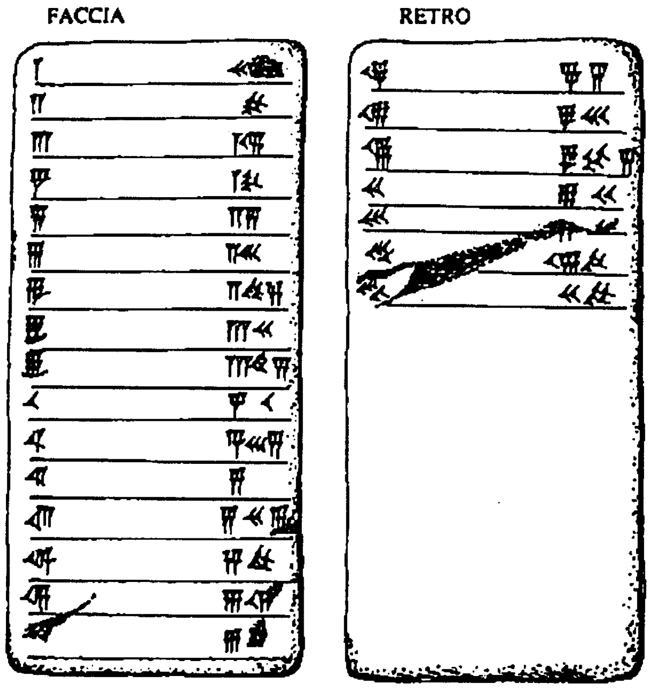


Figura 2.13: Tavoletta con calcoli

riportata in Figura **??**, riporta i prodotti dei numeri da 1 a 50 per 25, scritti con la notazione cuneiforme sessagesimale.

Ed è su questo modo di scrivere i numeri che troviamo spazio per parlare di numeri decimale e frazioni. In effetti non risultano esistere particolari scritture per le frazioni.

In pieno periodo babilonese, attorno al 1700 a.C., venne ideato un "segno" specifico per lo zero. L'idea originale dei Babilonesi fu quella di lasciare uno spazio vuoto, che indicasse proprio la mancanza di una cifra in quella posizione.
Questo fatto comportava spesso delle difficoltà di interpretazione e così, attorno al 1700 a.C., decisero di mettere un segno, ma non come cifra 0, come nel nostro sistema di numerazione, bensì solo per indicare uno spazio vuoto (Figura **??**). In un certo senso allora è vero che i Babilonesi introdussero lo

Figura 2.14: Segno per lo zero

zero, ma non come cifra: lo introdussero come segnaposto. La vera nascita dello 0, come abbiamo già accennato, avviene ad opera degli Indiani nel V-VI secolo d.C.

Per ciò che riguarda le frazioni, in una tavoletta babilonese del periodo seleucide, dunque dopo la dominazione di Alessandro Magno, e quindi attorno al III secolo a.C., troviamo la scrittura (scritta con i nostri simboli attuali): 0; 1.
Poiché 1 viene *dopo* lo 0, questa scrittura non può che rappresentare la frazione $\frac{1}{60}$.
Nella stessa tavoletta troviamo anche altre frazioni, tutte aventi al denominatore o 60 o 60^2. Per esempio la frazione $\frac{30}{3600}$, cioè $\frac{30}{60^2}$ viene scritta come: 0; 0; 30 cioè sarebbe $0 \times 1 + 0 \times \frac{1}{60} + 30 \times \frac{30}{60^2}$.

Dunque gli Assiri e i Babilonesi non crearono simboli appositi per le frazioni, ma si limitarono all'analogo dei nostri numeri decimali che però, nel loro caso, sono numeri sessagesimali. La prevalenza del 60 nel sistema posizionale sumero-assiro-babilonese si è conservata fino ad oggi nelle misure angolari e nelle temporali, indice, questo, di una dominanza di quella aritmetica in questi due campi rispetto a tutte quelle che seguirono.
Anche di queste civiltà, come in quella egizia, si ritrovano problemi di aritmetica o geometria nei quali si fa grande uso di numeri decimali.

2.4 Greci

La magnificenza della cultura greca nei confronti dei popoli circostanti ad essi contemporanei è ancora oggi fonte di sorpresa, e ciò vale per la filosofia,

per la letteratura e naturalmente anche per la matematica.
Il loro sistema di rappresentazione numerica però non si rivelò molto efficace.

Il primo sistema fu quello attico, più o meno databile attorno al 500 a.C. In esso le prime 4 cifre erano rappresentate da un segno verticale ripetuto, e questo fino al 5 che si scriveva Π, iniziale di *pente*, cioè cinque. Le cifre da 6 a 9 si scrivevano posponendo a Π da 1 a 4 trattini.
10 si scriveva Δ, iniziale di *deca*, dieci; 100 era H, iniziale di *hekaton*, cento; 1000 si scriveva X, *khilioi*, mille; 10000 era M, *myrioi*, cioè diecimila.

Ma nell'epoca alessandrina, III secolo a.C., questo sistema venne soppiantato dal sistema ionico o alfabetico. Tale sistema utilizza le lettere minuscole dell'alfabeto greco, più alcuni segni speciali, a carattere alfabetico, ma espressamente ideati per la numerazione.
La prima lettera dell'alfabeto α indicava 1 e così via, fino a θ per il 9. A quel punto si passava alle decine e dunque ι stava per 10, κ per 20, λ per 30 etc; ρ stava per 100, σ per 200, τ per 300 etc.
Si poteva così giungere fino a 999. Per passare a questo punto alle unità di migliaia si ricominciava daccapo: α preceduta da un apice in basso $(,\alpha)$ stava per 1000, $(,\beta)$ per 2000 etc.
Qualsiasi numero quindi inferiore a 10000 poteva essere scritto con al più 4 caratteri più l'apice

Il fatto di utilizzare lo stesso segno per indicare unità e migliaia avrebbe potuto spingere i Greci verso un sistema posizionale, ma ciò non avvenne mai. Anzi questo sistema di rappresentazione numerica alquanto complicato fu un freno agli sviluppi in questo campo della matematica da parte dei Greci.

Per quello che riguarda le frazioni, anche i Greci, come gli Egizi, predilessero a lungo quelle con numeratore unitario. Per indicarle, scrivevano semplicemente il denominatore seguito da un apice in alto. Per esempio $\frac{1}{14}$ veniva scritto come $\iota\delta'$. Quest'ultimo tipo di scrittura però poteva essere confuso come la giustapposizione di ι con δ' e cioè $10 + \frac{1}{4}$. Ma il contesto dissipava ogni dubbio.

I rapporti fra numeri naturali, e dunque le frazioni, furono molto usati nella matematica greca, soprattutto in geometria, ma avevano soprattutto rappresentazioni grafiche, appunto, e quindi non portarono allo sviluppo di uno specifico simbolismo aritmetico.

Per quello che riguarda l'algebra, mancando un opportuno simbolismo, i Greci facevano ricorso a quella che oggi viene talvolta chiamata *algebra geometrica* nella quale le relazioni algebriche vengono indicate con figure geometriche.

Ciononostante, i Greci svilupparono una teoria delle grandezze, delle proporzioni, conobbero perfettamente i numeri razionali e dimostrarono l'esistenza degli irrazionali.

Verso il 200 a.C. si diffuse lo studio delle frazioni per come oggi le intendiamo, cioè senza la restrizione di avere un numeratore unitario. La loro rappresentazione è quella odierna: un numerale che sovrasta un trattino che sovrasta un numerale, solo che il ruolo di numeratore e denominatore era invertito; dunque, per esempio, la frazione "tre quinti" si scriveva $\frac{\epsilon}{\gamma}$.

In realtà per tutto il periodo greco, incluso Diofanto (metà del III secolo d.C.), Pappo (contemporaneo di Diofanto), Proclo (410-485), le frazioni furono sempre usate, citate nei numerosi trattati di aritmetica, spiegate rapidamente anche per quanto concerne regole ed operazioni; ma non si ha una vera e propria trattazione teorica, da un lato per la semplicità dell'argomento, dall'altro per il fatto che venivano considerate più come strumento di lavoro che non come oggetto specifico di studio. A proposito di Diofanto, interessante per chi si occupa di frazioni è il racconto della sua vita così come appare nella *Antologia Palatina*, una raccolta di questioni aritmetiche attribuita a Metrodoro (III secolo d.C.):
"Questa è la tomba che racchiude Diofanto, meravoglia da contemplare! Per mezzo dell'arte aritmetica insegna la misura della sua vita. Dio gli concesse la fanciullezza per un sesto della sua vita; dopo un altro dodicesimo la barba coprì le sue guance; dopo un settimo accese la fiaccola nuziale e dopo 5 anni ebbe un figlio. Ahimè! Il misero fanciullo, pur tanto amato, avendo raggiunto appena metà degli anni di vita del padre, morì. Quattro anni ancora,

mitigando il proprio dolore colla scienza dei numeri, visse Diofanto, fino a raggiungere il termine della sua vita."
Se volessimo calcolare quanto è vissuto Diofanto, con la simbologia odierna, avremo l'equazione lineare seguente:

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4$$

da cui si deduce che l'età di Diofanto alla sua morte era di 84 anni.

2.5 Cinesi

La parola "abaco" deriva dal greco "ábax", con genitivo "ábakos", cioè "tavoletta per fare i conti"; a sua volta l'etimologia greca non è mai stata accertata. Per cui, abacisti sta per "coloro che usano l'abaco" oppure "coloro che fanno i conti".

Così come gli abacisti romani e presumibilmente i Greci portavano con sé sassolini ("calculi") per eseguire operazioni sull'abaco, i funzionari cinesi dei secoli fra il IV ed il I a.C. traevano bastoncini di bambù per eseguire le proprie.

Nel sistema cinese infatti, il "sistema a bastoncino", tutto si riduceva a rappresentare gli operandi con questi bastoncini, ruotarli e cambiarli di posto, fino ad arrivare al risultato, esattamente come con l'abaco. L'analogo latino di "eseguire i calcoli" in cinese è infatti "ordinare i bastoncini" .
Il sistema bastoncino cinese consiste in quanto segue: le cifre da 1 a 5 si rappresentavano con bastoncini verticali, allineati, da 1 a 5; il 6 con un bastoncino orizzontale (che raggruppava i primi 5) sotto al quale si metteva in verticale il sesto; e così via fino a 9. Un solo bastoncino ma orizzontale (cioè quello dell'1 ruotato di 90°) faceva passare da 1 a 10; ruotando i simboli di 2, 3 etc., si passava dunque a 20, 30 etc. Il 60 si otteneva ruotando le parti che compongono il simbolo del 6 di 90° e così via fino a 90, come mostrato in Figura **??**. Questa notazione aveva ovviamente molti difetti evidenti: dopo alcune rotazioni, i simboli-bastoncino che avrebbero dovuto

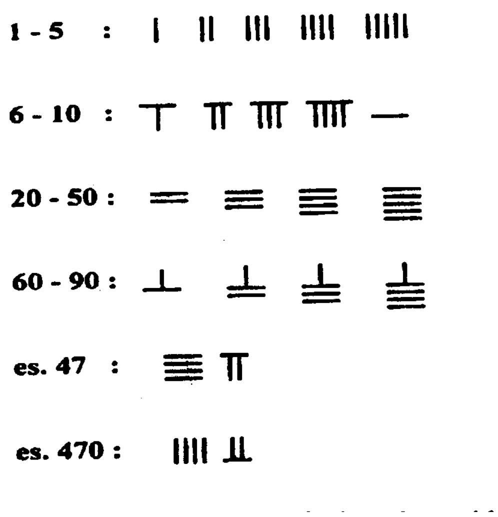


Figura 2.15: Numeri cinesi

rappresentare numeri grandi venivano a coincidere con simboli-bastoncino che già rappresentavano numeri piccoli.
Tuttavia il sistema tenne per molti secoli, stante anche la rapidità con la quale i funzionari riuscivano a fare i calcoli.

I Cinesi svilupparono un adeguato calcolo frazionario, nel quale il numeratore era detto "figlio" ed il denominatore "madre". Non deve stupire qui il richiamo alla differenza sessuale: spesso i Cinesi davano sessi diversi ai numeri, a seconda della loro funzione.
Sembra certo che questo non solo aiutava alla memorizzazione, ma era in grado di creare regole alle quali era possibile dare un senso diverso da quello esclusivamente interno alla Matematica. I numeri, dunque, per i Cinesi, si accoppiano, generano altri numeri, hanno insomma una vita per certi versi simile a quella degli esseri umani. Ben presto i Cinesi scelsero per le frazioni il sistema decimale per cui diedero particolare impulso alle frazioni con denominatore 10 o sue potenze. Nel XIII secolo già il sistema decimale dominava tutta la Cina e si tendeva a trasformare le frazioni in frazioni decimali.

2.6 Indiani

Gli Indiani furono maestri in aritmetica, crearono un sistema posizionale decimale perfetto, idearono lo zero, le funzioni seno e coseno. Secondo gli studi più recenti pare ebbero sugli Indiani grande influenza gli studiosi greci che, da Alessandria d'Egitto, elargivano il loro sapere al mondo occidentale, ma soprattutto a quello orientale.

Tipico della mentalità indiana era il vezzo di trasformare spesso la matematica in poesia o qualsiasi altra forma leggiadra, facendo riferimenti a fiori, amanti, storie varie.

Per quello che riguarda le frazioni, venne adottata la scrittura alessandrina: denominatore fratto numeratore, ma omettendo il trattino orizzontale. Ma, mentre per i numeri naturali gli Indiani adottarono un sistema posizionale decimale, per le frazioni la cosa non avvenne, anzi si usavano sistemi complicati funzionali.

Nel mondo indiano vennero concepiti algoritmi di calcolo relativamente facili ed accessibili, a causa del fatto che il sistema era finalmente posizionale. Molti degli algoritmi che ancora oggi usiamo provengono da quelli indiani.

Le 10 cifre indiane hanno subito varie mutazioni nei secoli; un sistema antico è quello mostrato in Figura ??. Nell'anno 875 si avevano invece le cifre

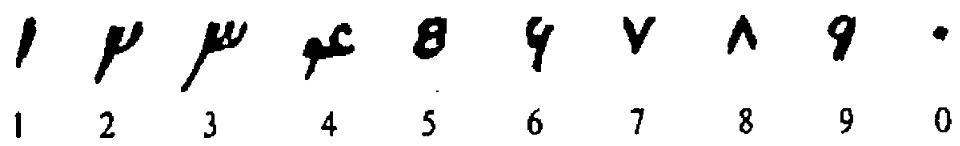


Figura 2.16: Cifre indiane: sistema antico

in Figura ??. Nel XII secolo, quando la cultura orientale era oramai passata al mondo arabo, ancora vivevano in India matematici di prestigio, tra cui Bhaskaracarya, autore di un curioso e denso trattato di algebra nel quale lo zero è definito come la somma di due numeri opposti. Il titolo di questa

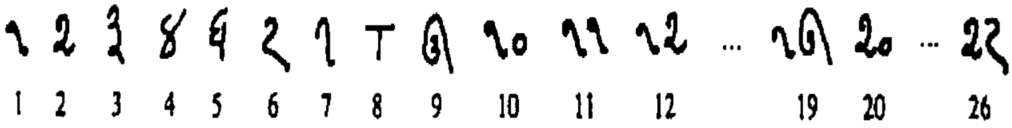


Figura 2.17: Cifre indiane: sistema dell'875

opera è *Lilavati*, un nome femminile per il quale ci sono varie interpretazioni: per alcuni è lo spirito (femminile) dell'algebra stessa, per altri il nome della figlia cui sono dedicati vari semplici giochi matematici.

Interessante il fatto che alcuni degli indovinelli proposti riguardano le frazioni. Per esempio uno di essi è così concepito: uno sciame di api vola sui fiori del giardino. Di esse, $\frac{1}{5}$ si posa sui gelsomini, $\frac{2}{3}$ sui lillà, $\frac{1}{15}$ sui gigli mentre due api s'aggirano qua e là senza prendere decisioni. Quante sono in tutto le api dello sciame?

2.7 Arabi

Gli Indiani hanno inoltre il merito di aver affidato la loro matematica agli Arabi che, dopo averla ulteriormente raffinata, la portarono in Europa, dando una scossa alla stantìa matematica del Mediterraneo. Dopo alcuni secoli di sopravvivenza, gli Arabi presero nettamente il sopravvento.

É nel mondo arabo che si concepiscono in modo definitivo le cifre da 0 a 9, che anche alle frazioni vengono definitivamente applicati i sistemi posizionali, che si strutturano algoritmi di calcolo sui numeri naturali e sui frazionari, per come oggi noi li conosciamo.

Le dieci cifre cambiarono spesso aspetto nel passare dei secoli nel mondo arabo. In Figura **??** è mostrato come si presentavano nel XIV secolo, in due alternative presentate nello stesso testo. Molti furono i valenti matematici indiani ed arabi che sistemarono, tra l'VIII ed il XIV secolo, la matematica che poi è sviluppata in Europa, a partire dal XIII secolo.

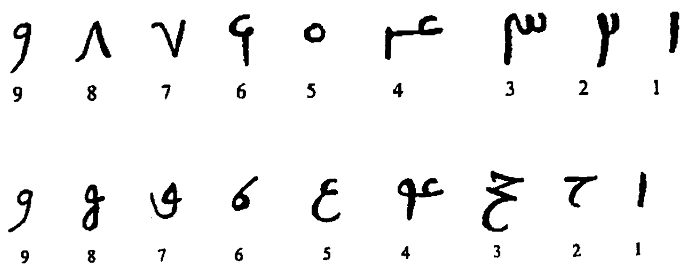


Figura 2.18: Cifre arabe

Può essere interessante sapere che spesso al mondo arabo si attribuiscono celebri indovinelli matematici. Uno dei più interessanti è quello che verrà riproposto da Peano nel 1924 in questa forma:
"Un Arabo morendo lasciò ai suoi 3 figli 17 cammelli in eredità e ordinò che la metà di essi fosse data al primo figlio, la terza parte al secondo, e la nona al terzo figlio. I tre figli si rivolsero per la divisione al cadì, il quale venne col proprio cammello, che unì agli altri. Diede la metà dei 18 cammelli, cioè 9 al primo, un terzo, cioè 6 al secondo, un nono cioè 2 al terzo figlio, e poi, ripreso il suo cammello se ne andò ringraziato dai tre figli, ognuno dei quali aveva ricevuto più di quanto gli spettava".
Si noti che $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} < 1$, dunque in realtà il padre non aveva diviso tutta l'eredità. Quella somma fa invece $\frac{17}{18}$, il che spiega il ruolo del cammello del cadì.

Di solito si considera che l'ultimo matematico del mondo arabo di un certo valore, prima della successiva decadenza, fu Al-Kashi (morto verso il 1436) che visse a Samarcanda presso l'imperatore mongolo Ulugh Beg (1393-1449), tanto interessato alle scienze da costruire un famoso potente telescopio che attrasse gli studiosi dell'epoca, non solo dall'Oriente. Ebbene, Al-Kashi si autodefinisce in una sua opera "inventore delle frazioni decimali", forse perché le aveva davvero concepite, finalmente, all'interno del sistema posizionale decimale, cosa che non era riuscita a nessuno in modo completo.

2.8 Il Medioevo in Europa

La cultura greca fu ereditata non solo dal mondo arabo, ma pure dall'Europa, tanto che per secoli i cosiddetti "enciclopedisti" europei non fecero altro che tramandare per iscritto le conoscenze create dai Greci. Dal punto di vista delle frazioni queste non ricevono particolari impulsi.

Fin dal IX secolo vi furono contatti stretti tra i matematici del mondo arabo e quelli latini.
Il più antico trattato europeo nel quale si fa menzione delle 10 cifre indo-arabe è del 967.

Un fatto nuovo si ebbe con Leonardo figlio di Bonaccio, da Pisa, detto "bighello" (1180-1250). Costui, attratto dalle cose matematiche e perciò senza un vero mestiere (da cui "bighello"), commerciando forse controvoglia per conto del padre a Bùgia, nell'attuale Algeria, fu molto colpito dalle cifre indiano-arabe, dal sistema posizionale, dalla cifra zero, dagli algoritmi di calcolo che si potevano eseguire a penna senza sassolini ed abaco e dalla quantità immensa di meraviglie matematiche che tale strada apriva: l'algebra, i numeri interi, la trattazione delle frazioni in un sistema decimale sempre più elegante e sempre più completo.
Fu così che giovanissimo scrisse la sua opera più importante, *Liber Abaci*, del 1202.

É qui che le frazioni per come noi le conosciamo appaiono. Leonardo dà le regole delle operazioni sulle frazioni, trova massimi comuni denominatori tra frazioni, trasforma le frazioni in somme di frazioni a numeratore 1, risolve equazioni trovando radici intere, razionali, irrazionali, usa le frazioni sessagesimali etc.
Leonardo dedica molta attenzione alle questioni di contabilità ed al cambio tra monete e si serve spesso di frazioni unitarie, complicando notevolmente, a volte, le cose.

Le sue opere lo porteranno alla corte di Federico II (1194-1250) uno degli imperatori più colti e amanti della cultura di tutti i tempi, egli stesso poeta, matematico, filosofo. Alla corte di Federico, Leonardo più volte partecipò come paladino del cristianesimo a disfide matematiche che lo opponevano ai grandi matematici del mondo arabo, a loro volta paladini del mondo islamico, riportando grandi trionfi.

L'Europa tardò parecchio a rendere del tutto spontanee le dieci cifre indo-arabe, tanto è vero che in trattati rinascimentali si dovevano suggerire stratagemmi per memorizzarne la scrittura (Figura ??). Tali cifre si diffusero

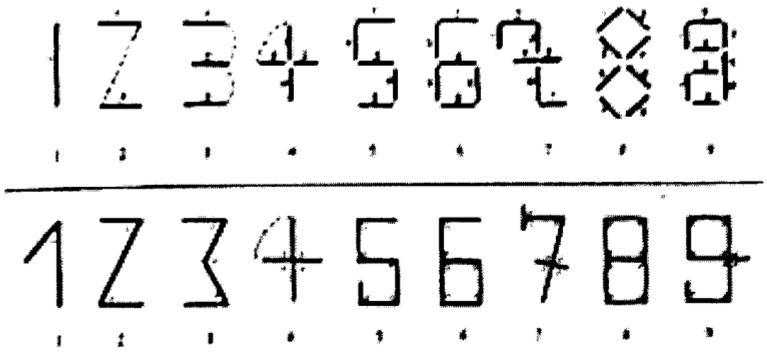


Figura 2.19: Stratagemmi rinascimentali

definitivamente in Europa con l'invenzione della stampa, ideata da Johann Gutenberg (1400 c.-1468).

2.9 Conclusione

Il resto della storia delle frazioni è solo un insieme di curiosità. Possiamo però fare una considerazione.
Da un punto di vista storico infatti, anche grazie agli studi di Anna Sfard (1991), riconosciamo che i concetti della matematica appaiono dapprima come meri strumenti per l'umanità e vengono trattati come tali: essi non vengono studiati, analizzati di per se stessi, ma solo in funzione ai problemi che permettono di risolvere; solo ad un certo punto essi assumono l'importanza di oggetto di studio ed acquistano allora una tale dignità da essere studiati di per se stessi. Di solito nasce allora una teoria di quel concetto e si fanno passi da gigante rapidi nella sua conoscenza.

Non sappiamo precisamente quando nasce il concetto di frazione: il carattere strumentale è sempre stato evidente, ma spesso mescolato a quello teorico, nel mondo egizio, come in quello greco, indiano, arabo. Nel Medioevo arabo ed europeo si nota un tentativo di teorizzazione, nel quale la frazione è sì un oggetto, ma mai disgiunta dalle sue caratteristiche di strumento.

Nella situazione attuale, l'unico luogo di teorizzazione delle frazioni come oggetto è la scuola, primaria e secondaria, luogo anche della loro utilizzazione come strumento, dato che, fuori della scuola, la frazione non è presente in modo massiccio come strumento.

Capitolo 3

La didattica delle frazioni

Prima di iniziare a parlare di didattica delle frazioni abbiamo bisogno di approfondire alcuni aspetti che riguardano la didattica della matematica. A tali aspetti farò spesso riferimenti nei capitoli seguenti. Per non appesantire il testo con continue citazioni, dichiaro qui di aver utilizzato D'Amore (1999) e Fandiño Pinilla (2005), che verranno poi citati completamente in bibliografia. A questi testi è possibile fare riferimento anche per maggiore approfondimento, specialmente per quello che riguarda questa prima parte sugli aspetti strettamente legati alla didattica della matematica.

3.1 Aspetti didattici generali

3.1.1 Contratto didattico

Fin dagli anni '70 fece l'ingresso nel mondo della ricerca in didattica della matematica l'idea di contratto didattico, lanciata dal matematico Guy Brousseau, ora professore emerito dell'Università di Bordeaux.

L'idea, che divenne subito fruttifera, nacque per studiare le cause del fallimento elettivo in matematica, cioè di quel tipo di fallimento riservato alla sola matematica, da parte di studenti che sembrano invece "cavarsela" nelle altre materie.

Per contratto didattico si intende l'insieme di tutto ciò che regola il comportamento degli allievi, ma anche dell'insegnante, in base alle attese che ciascuno di essi ha nei confronti dell'altro e della matematica.
Lo studente, dunque, non si fa carico responsabile degli apprendimenti che sta costruendo, non rischia in situazioni problematiche nuove, non osa mettere in gioco il proprio sapere. Ciò che invece conviene di fare è di cercare di comportarsi, agire, risolvere, rispondere sulla base di quello che ritiene che l'insegnante si aspetti da lui. E la stessa cosa vale per l'insegnante.

Dunque si creano nel corso del tempo delle attese tra le due parti, sui loro ruoli all'interno della classe, sui ruoli sociali, sulla scuola, sulla valutazione, sulla matematica e sul suo senso.
Molto di quello che accade in aula è regolato dal contratto didattico.

3.1.2 Immagini e modelli

Per sua natura, l'essere umano si forma spontaneamente immagini (mentali) di ciò con cui entra in contatto in forma sensibile. Quando parliamo di un oggetto sconosciuto a qualcuno, egli, in modo confuso o completo, in base alle proprie esperienze passate, si crea un'immagine di tale concetto.

L'immagine mentale è dunque il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione sensoriale interna o esterna.
Nel processo insegnamento-apprendimento lo studente si costruisce un'immagine I_1 di un concetto C. Egli la crede stabile, definitiva. Ad un certo punto della sua storia cognitiva però riceve nuove informazioni su C che non sono contemplate in I_1, che aveva già. Dovrà allora adeguare la "vecchia" immagine I_1 ad una nuova, più ampia che conservi le informazioni precedenti e accolga le nuove in modo coerente. Si costruisce dunque I_2. Si costruirà poi I_3 etc.

C'è quindi una sorta di avvicinamento al concetto C. In questa serie di passaggi, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti "resiste" a sollecitazioni diverse. Un'immagine di questo tipo, stabile e non più mutevole si chiama modello M del concetto C.

Il modello (mentale) M è interno, e lo studente dovrà dunque produrre un modello esterno, per esempio in situazioni di comunicazione.

A questo punto sorge il problema che il modello non sempre si forma al momento giusto: a volte si crea un modello, quando in realtà questo dovrebbe essere ancora un'immagine. Questa stabilità del modello sbagliato crea un ostacolo ad apprendimenti futuri.

3.1.3 Misconcezioni

Una misconcezione è un concetto errato ed è in generale un evento da evitare. Essa però non va vista in modo del tutto o certamente negativo: non si esclude il fatto che poter raggiungere la costruzione di un concetto, sia necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.

Lo studente però non è cosciente del fatto che si tratti di misconcezioni. É dunque l'insegnante che deve riconoscerle e correggerle, senza considerarle necessariamente degli errori.

3.1.4 Ostacoli

Gli ostacoli furono proposti per la prima volta da Guy Brousseau nel 1976 e sistemati in modo definitivo negli anni successivi.
L'idea di ostacolo è legata a quella di modello troppo presto formatosi. Se l'idea, anche se errata, ha funzionato in precedenza, lo studente tende a riutilizzarla le volte successive. Questo fatto diventa una barriera per gli apprendimenti successivi.

Brousseau suddivide gli ostacoli in tre tipologie:

1. *Ostacoli ontogenetici*: sono legati all'allievo e allo sviluppo della sua intelligenza, dei sensi e dei sistemi percettivi.

2. *Ostacoli didattici*: sono legati all'insegnante e ai tipi di scelte che egli fa a livello di "trasposizione didattica" (di cui parleremo in seguito).

3. *Ostacoli epistemologici*: sono legati alla natura stessa degli argomenti matematici.

3.1.5 Situazioni didattiche, non didattiche e adidattiche

Un altro filone di ricerca iniziato con Brousseau (1986) è la teoria delle situazioni, che si dividono in:

1. *Situazione didattica*: è una situazione in cui l'insegnante struttura l'ambiente in modo opportuno, con strumenti opportuni, al fine di giungere ad una conoscenza specifica. É importante tenere presente che l'allievo sa che sta imparando e l'insegnante è consapevole del suo ruolo: c'è consapevolezza da entrambe le parti.

2. *Situazione non didattica*: non ci sono obiettivi cognitivi da raggiungere, ma solo attività da svolgere ed effettuare. Lo studente può comunque imparare qualcosa.

3. *Situazione adidattica*: ci sono obiettivi cognitivi stabiliti dall'insegnante, ma viene proposta in maniera indiretta. Questa situazione sembra essere la più consona alla costruzione di conoscenza. La situazione adidattica passa attraverso varie fasi:

   - Devoluzione: si affida agli studenti la gestione della situazione, coscienti che lo scopo dell'attività è l'apprendimento.
   - Implicazione: gli studenti lavorano, si impegnano, discutono e l'insegnante non fa da mediatore.
   - Validazione: lo studente difende la sua costruzione del concetto, trasformando il modello interno in esterno.
   - Socializzazione della conoscenza e istituzionalizzazione del sapere: gli studenti si rivolgono all'insegnante che dà al sapere raggiunto uno status, un nome con il quale la società lo riconosce.

3.2 Triangolo della didattica e trasposizione didattica

In lavori di Yves Chevallard a partire dal 1982 viene proposto alla riflessione uno schema, detto *triangolo della didattica* (Figura **??**), per cercare di racchiudere in un tutt'uno la complessità sistemica del processo di insegnamento-apprendimento.
Con la denominazione "triangolo della didattica" si intende la terna di enti che entrano in gioco in questo processo: l'allievo, l'insegnante ed il Sapere.

Con Sapere si intende quello ufficiale, accademico, quello che Chevallard stesso chiama *Savoir Savant*, e che nel nostro caso specifico è chiamato "Sapere matematico". Si può notare che mentre i "vertici" del triangolo rappresentano un soggetto del complesso rapporto, i "lati" rappresentano relazioni reciproche.

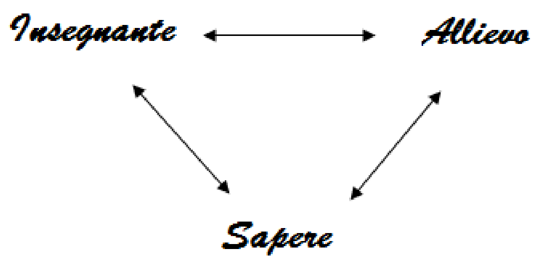


Figura 3.1: Triangolo della didattica

Il passaggio dal "Sapere" al "sapere appreso" dall'allievo è il risultato di un lungo e delicatissimo percorso che si può schematizzare come segue:

Sapere accademico $\Rightarrow$ sapere da insegnare $\Rightarrow$ sapere insegnato $\Rightarrow$ sapere appreso

In tale successione di passaggi, il primo, quello da "Sapere" a "sapere da insegnare", si chiama *trasposizione didattica* e costituisce un momento di grande rilevanza, nel quale la professionalità e la creatività dell'insegnante si esprimono al massimo livello.

Questo "momento" è inteso quindi come lavoro di adattamento, di trasformazione del sapere in oggetto di insegnamento, in funzione del luogo, del pubblico e delle finalità didattiche che l'insegnante si è posto.

L'allievo è nella situazione in cui gli si deve consegnare un adattamento del "Sapere", una sua reinvenzione, una sua interpretazione, adatta alla sua età, alla sua situazione cognitiva, alla sua capacità.
Anzi non si esclude la possibilità che l'insegnante accetti la notevole responsabilità di far costruire un apprendimento non concluso, in via di sistemazione, addirittura non del tutto corretto, in base alle reali possibilità del proprio allievo.

É importante tenere in considerazione che questa attività di trasposizione è necessaria in ogni livello scolastico, dato che il "Sapere accademico" di riferimento dell'insegnante deve comunque essere ridefinito per poter essere trasformato in "sapere da insegnare", anche negli studi universitari.

Nel caso dei numeri razionali non è così immediato ed automatico il passaggio da oggetto del "Sapere" all'allievo. Tuttavia, tra i "saperi appresi", la storia, la consuetudine e l'attuale società considera doveroso includere $\mathbb{Q}$. Ne fanno parte esplicita, per esempio, l'uso della virgola, l'uso dei numeri decimali e così via. Lo stesso sistema monetario di quasi tutte le nazioni del mondo prevede una certa qual conoscenza da parte del cittadino comune sui numeri razionali assoluti; in molti mestieri è necessario capire la differenza fra 0,5 e 0,25.

Nonostante questo, tali competenze sembrano sfuggire a molti attuali cittadini, segno del fatto che la trasposizione didattica del loro docente non è stata efficace.
Ne concludiamo che i numeri razionali sono competenze auspicabili per tutti. Tuttavia nella scuola primaria, ma anche in quella secondaria, non è possibile insegnare $\mathbb{Q}$ nella forma matematicamente corretta.

Il passaggio della trasposizione didattica diventa dunque fondamentale affinché tale conoscenza sia accessibile all'allievo.
Spesso i concetti attraverso i quali siamo costretti a far passare il nostro

allievo sono irti di complicazioni, rispetto al "Sapere".
Per esempio la presenza di frazioni improprie o apparenti è ingombrante e complessa, irta di difficoltà cognitive, mentre in $\mathbb{Q}$ questa casistica neppure esiste.

Dobbiamo tener presente che il passaggio attraverso le frazioni per arrivare ai numeri razionali sembra ancora il modo più naturale, ma non sappiamo ancora se sia il più efficace.
Dunque le frazioni, pur non facendo parte di un "Sapere accademico" così come sono proposte nella scuola pre-universitaria, si presentano all'attenzione della didattica della matematica come uno specifico oggetto di sapere, che potremmo chiamare "scolastico".

3.3 Diverse interpretazioni del concetto di frazione

Nella scuola primaria s'introduce formalmente l'idea di frazione; essa è già posseduta nelle sue accezioni più immediate di "mezza" mela, un "terzo" di tavoletta di cioccolata e così via.

Quello che però si fa a scuola è formalizzarne la scrittura e istituzionalizzarne il significato. L'atteggiamento più o meno condiviso in tutto il mondo è quello di considerare un "oggetto concreto di riferimento" da assumere come unità e che abbia i seguenti requisiti:

- deve suscitare gradevolezza e dunque simpatia;
- deve essere visibilmente unitario;
- deve essere ben presente a tutti gli allievi, cioè non deve richiedere egli stesso un apprendimento.

Si tende a scegliere una torta cilindrica o una pizza in quasi tutti i Paesi del mondo.

A questo punto si ipotizzano situazioni in cui questa unità debba essere ripartita tra più allievi o persone: nasce così l'idea di un mezzo, di un terzo e così via. Si tratta delle "frazioni egizie", quelle frazioni che, come abbiamo visto, hanno il numeratore unitario.
Per ciascuna di tali frazioni si stabiliscono scritture che, nei casi precedenti, sono $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$. Non ci sono difficoltà a leggerle con il loro nome né nel generalizzarle nella forma $\frac{1}{n}$, che acquista il significato di oggetto unitario di partenza che viene diviso in n parti "uguali" (su questo torneremo in seguito).
Se poi i commensali hanno diritto a prendere due delle parti uguali in cui era stato diviso l'oggetto di partenza, allora nascono scritture del tipo $\frac{2}{7}$ (che si legge: due settimi) che significa: delle 7 parti "uguali" in cui era stato diviso l'oggetto unitario, se ne prendono 2.

A questo punto si definiscono i termini "numeratore" e "denominatore". Le cose non cambiano di molto nella scuola secondaria: si ha un'unità-tutto e la si divide in parti uguali; ciascuna di queste parti è un'unità frazionaria. Da qui si stabilisce poi la differenza tra frazioni che hanno numeratore unitario e non, a seconda di quante parti "uguali" dell'unità-tutto si è scelto di prendere.

Si deve tener presente che, dietro al termine "frazione", si nascondono varie accezioni e questo genera una prima confusione: si pretende di dare una "definizione" iniziale univoca, ma questa scelta non riesce poi a soddisfare tutti i significati del termine.
Inoltre questa "definizione" iniziale è facilmente comprensibile: entra subito nel cognitivo più profondo, producendo troppo presto un modello, che non sia ha più l'occasione, il coraggio di modificare per adeguarla alle diverse necessità che mano a mano si presentano.

Vedremo nei paragrafi seguenti le varie interpretazioni che è possibile dare al concetto di frazione e le interpretazioni che può assumere in matematica.

3.3.1 La frazione come parte di un uno-tutto, a volte continuo e a volte discreto

Se consideriamo la frazione come relazione parte-tutto, si aprono due diverse interpretazioni a seconda che il "tutto" sia costituito da qualcosa di continuo o di discreto.

Se il tutto è un'unità continua (per esempio se consideriamo l'area superficiale di un rettangolo o una pizza o una torta), trovarne gli *a b-esimi* si può sempre fare (chiaramente a livello teorico, in quanto risulterebbe difficile trovare i $\frac{423}{874}$ di una torta). Perde di significato nel caso in cui sia $a > b$, le cosiddette *frazioni improprie*, per le quali la definizione non ha più un significato intuitivo. Per esempio prendere i $\frac{6}{5}$ di una pizza sarebbe alquanto strano, perché significherebbe dividere la pizza in 5 parti e prenderne 6. Si potrebbe proporre allora di prendere 2 pizze, ma in quel caso l'unità sarebbe dunque la pizza o le due pizze?

Se il tutto è un'unità discreta (come 12 persone o 12 caramelle), continua a non avere senso la frazione impropria. Inoltre perfino alcune frazioni proprie non hanno un significato intuitivo: trovare gli *a b-esimi* dipende dal rapporto tra 12 e b. Per esempio, si possono trovare i $\frac{3}{4}$ di 12 persone (cioè 9 persone), più difficile è dare senso concreto ai $\frac{3}{5}$ di 12 persone. C'è di più. Se vogliamo trovare i $\frac{6}{8}$ di 12 persone, sembrerebbe non fattibile a causa dell'impossibilità di dividere 12 persone in 8 parti, ma si potrebbe notare che scrivere $\frac{6}{8}$ è equivalente a scrivere $\frac{3}{4}$. Questo passaggio dà però per conosciuto un argomento che è in via di costruzione: spesso le costruzioni delle due conoscenze si accavallano e, mentre l'insegnante crede di poter basare l'una sull'altra, l'allievo le sta costruendo contemporaneamente.

Possiamo a questo punto notare due incongruenze:

Il termine "uguale": se vogliamo prendere i $\frac{3}{4}$ di 12 persone, che cosa significa dividere 12 persone in 4 parti uguali?
A chi o cosa si riferisce questa uguaglianza? Stiamo parlando di peso, di altezza, di intelligenza etc. o semplicemente di un numero? Se riguarda un numero non ha alcun fondamento richiedere che le parti siano uguali.

La relazione di equivalenza tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{6}{8}$: di solito si è soliti elencare le frazioni "equivalenti": $\frac{12}{16}$, $\frac{9}{12}$, $\frac{30}{40}$ e si finisce con il dire: "e così via all'infinito ...". Teniamo presente che stiamo parlando di 12 persone o di qualunque raccolta finita. Un conto è fare queste affermazioni quando il concetto è costruito, altro è invece parlarne in via di costruzione.

In entrambi i casi, sia che si parli di unità discreta che continua, perdono di significato da un punto di vista logico le frazioni improprie e apparenti.

Tutti sanno infatti che, tra i saperi scolastici proposti a proposito delle frazioni $\frac{m}{n}$, con $n \neq 0$, vi è la distinzione tra:

- proprie: $m < n$;
- improprie: $m > n$;
- apparenti: $m = n \times q$, dove q è un numero naturale positivo e quindi, a parte il caso $q = 1$, tutte le altre frazioni apparenti sono improprie.

Ma se la frazione è stata ottenuta dividendo un'unità-tutto in parti "uguali", delle quali parti se ne sono prese alcune, com'è possibile allora giustificare una frazione impropria, sulla base della definizione data?
Inoltre se consideriamo le frazioni apparenti, soltanto quella che ha numeratore uguale al denominatore ha un senso.

Un'ulteriore complicazione cognitiva è costituita, come abbiamo visto in precedenza, dall'aggettivo "uguale": "dividere un'unità in parti uguali" è la richiesta preliminare a qualsiasi trattazione sulle frazioni.
Questa complicazione nasce dal fatto che quando si chiede di dividere in parti uguali una pizza questa è, dal punto di vista dell'adulto, un'idea astratta. Dobbiamo tener presente però che ci si sta riferendo ad una situazione reale, ad un oggetto concreto, ma lo si vuole far considerare come astratto. Al giovane allievo viene fatta una richiesta in una situazione reale, e lui a questa fa riferimento: una pizza ricoperta di tutti gli ingredienti tenderà, nella realtà, ad essere difficilmente ripartita veramente in parti uguali.

A questo proposito è interessante analizzare l'esperimento di Jean Piaget (1896-1980) e dei suoi collaboratori circa l'idea di estensione di una superficie piana (Piaget, Inhelder, Szeminska, 1948).

In tale esperimento venivano mostrati ai bambini due rettangoli verdi identici che venivano proposti ed interpretati come i prati.
Su entrambi venivano posti dei quadrati bianchi che interpretavano le casette disposte su questi prati. L'idea era quella di verificare se i bambini erano in grado di capire che se a superfici piane equiestese vengono sottratte superfici piane equiestese, allora le differenze sono ancora equiestese, quindi:

se A è equiesteso a B, C è equiesteso a D $\Rightarrow$ A-C è equiesteso a B-D

Poiché gli allievi non potevano far uso di termini tecnici come rettangolo, quadrato, superficie, estensione, differenza di estensione ed equiestensione, l'esperimento originario degli anni '40 offriva un'interpretazione realistica: casette bianche a base quadrata su cambi d'erba di forma rettangolare.
Per completare la situazione realistica, venivano poste sui due rettangoli delle riproduzioni di mucche e veniva chiesto: "In quale dei due prati la mucca potrà mangiare più erba?"

Lo stampo realistico del problema permetteva agli allievi di dare risposte sensate, ma nell'interpretazione degli sperimentatori si celava il desiderio di avere risposte astratte.
Gli allievi, però, immersi nella situazione-modello, davano risposte assolutamente legate alla situazione reale: se per esempio una casa era posta quasi al bordo del campo, essi affermavano che l'erba tra casa e bordo non poteva essere mangiata a causa della stazza della mucca.

Le risposte erano quindi influenzate negativamente (per quello che interessava gli sperimentatori) dal modello concreto proposto. Per sua natura se ad un bambino viene proposto un modello concreto che rappresenta fatti reali, su tali fatti punterà la sua attenzione, non sull'astrazione a cui invece si riferisce l'adulto.

Se torniamo alla pizza da dividere in parti "uguali" ci rendiamo conto che il bambino che si è giustamente immedesimato nella situazione reale proposta,

tenderà a cavillare su di essa, come farebbe al ristorante nel caso concreto. Un pizza, anche se accuratamente tagliata a metà, non presenta due parti scambiabili senza problemi.
L'adulto che ha proposto un modello reale, non può far finta di niente e pretendere un comportamento astratto.

Anche quando consideriamo un'unità continua meno ricca di riferimenti realistici, come ad esempio un rettangolo, mentre l'adulto, implicitamente, con l'aggettivo "uguale" sottintende un riferimento alla superficie del rettangolo, tale fatto non è scontato per l'allievo. "Uguali" potrebbe essere interpretato come "congruenti", "sovrapponibili", riferendosi ad un modello come quello in Figura **??**. Ma allora una divisione del rettangolo in 4 parti

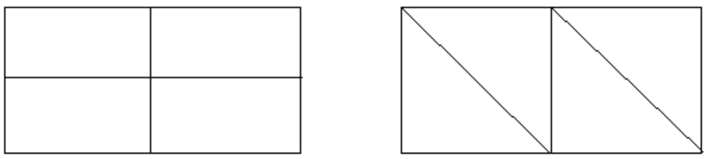


Figura 3.2: Divisione "standard" della figura

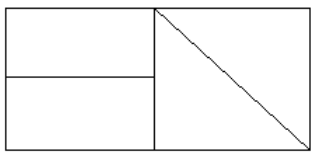


Figura 3.3: Divisione "non standard" della figura

come quella mostrata in Figura **??** a rigore non sarebbe ammessa: le parti in questo caso non sono "uguali", ma allora sono o non sono ciascuna $\frac{1}{4}$?
Lo sono se diamo un'interpretazione relativa all'estensione, all'area.

Ecco quindi che l'idea di semplificare ad ogni costo, di trovare modelli concreti, a volte si rivela una strategia didattica non ottimale. L'immagine che l'allievo si fa della nuova proposta cognitiva si trasforma troppo presto in modello e nascono ostacoli didattici alla costruzione di conoscenza.

3.3.2 La frazione come quoziente

É possibile vedere la frazione $\frac{a}{b}$ come una divisione non necessariamente effettuata, ma solo indicata, come $a : b$. In questo caso l'interpretazione più intuitiva non è la parte-tutto, ma del tipo: abbiamo a oggetti e li dividiamo in b parti.

Per esempio, sappiamo che se abbiamo un'unità di partenza di 6 elementi e ne dobbiamo prendere i $\frac{3}{5}$, una tecnica è di dividere i 6 elementi in 5 parti e prenderne 3. A volte però $\frac{3}{5}$ può indicare una frazione parte-tutto, una divisione indicata (3 oggetti da distribuire a 5 persone) ma anche il quoziente 0,6, se tale divisione viene effettuata. Alle varie rappresentazioni possibili di $\frac{3}{5}$ sfugge l'interpretazione del numero razionale 0,6 che va immaginato o rappresentato a parte: la divisione "indicata e non effettuata" e la divisione "solo effettuata" hanno dunque due ruoli completamente diversi.

3.3.3 La frazione come rapporto

A volte la frazione $\frac{a}{b}$ si usa esplicitamente per indicare il rapporto tra a e b ed allora a volte si scrive $a : b$; il segno ":" sostituisce "–" non solo nell'indicare l'operazione di divisione ma anche nell'esplicitare un senso di relazione tra due grandezze che stanno tra loro come a sta a b.

In matematica questo tipo di discorso è spesso riscontrabile quando si parla di proporzionalità. Per esempio parlando di segmenti si può avere che i segmenti AB e CD stanno fra loro come 3 sta a 4, e quindi

$$AB : CD = 3 : 4$$

In questo caso si può ben notare la peculiarità della frazione come rapporto per la quale numeratore e denominatore appaiono come intercambiali: se il rapporto che lega AB a CD è come 3 a 4, e cioè $\frac{3}{4}$, allora si ha anche che CD sta ad AB come 4 sta a 3, e quindi il rapporto diventa $\frac{4}{3}$.

3.3.4 La frazione come operatore

Molto spesso la frazione è considerata un operatore moltiplicativo, anzi questo è forse uno dei suoi significati più usati nella scuola. Per esempio: "Trovare un segmento CD che sia i $\frac{4}{5}$ di un segmento AB che misura 20 cm", che significa operare come segue: $(20 : 5) \times 4$ cm. Si capisce che solo con uno sforzo si può ammettere di aver sfruttato la definizione iniziale di frazione, anche se a quella ci si può ricondurre. Nel caso del segmento, per esempio, non basta prendere 5 parti "uguali" di AB, ma bisogna conservare proprietà geometriche che si danno per scontate, per esempio l'adiacenza dei segmenti in cui abbiamo diviso AB.
La domanda sarebbe dovuta essere posta in modo più adeguato: "Trovare la lunghezza di un segmento", perché è di lunghezza che stiamo parlando.

La frazione come operatore, dunque, agisce sui numeri puri piuttosto che sulle raccolte o sugli oggetti: è una nuova operazione che combina la divisione e la moltiplicazione. La relazione parte-tutto si è persa.

3.3.5 La frazione in probabilità

Consideriamo la probabilità che dal lancio di due dadi esca un numero multiplo di 4. Sono 9 eventi favorevoli e 36 casi possibili. Dunque la probabilità che esce un numero multiplo di 4 è $\frac{9}{36}$.

$\frac{9}{36}$ esprime una misura, il grado di soddisfacibilità dell'evento, la probabilità. Tale frazione è equivalente a $\frac{1}{4}$, ma solo aritmeticamente, perché intuitivamente questa trasformazione dice poco. É più significativa, da questo punto di vista, la frazione equivalente $\frac{25}{100}$, specie se la scriviamo in forma percentuale 25%.

Dunque, pur valendo tutte le proprietà relative alle equivalenze tra frazioni, solo alcune conservano un senso nel problema proposto.
D'altronde lo stesso numero $\frac{9}{36}$ è fortemente slegato dall'idea di parte-tutto.

3.3.6 La frazione nei punteggi

Consideriamo per esempio una gara in cui si debba colpire un bersaglio. Laura ha a disposizione 5 tiri e fa centro 2 volte. Nella seconda manche ha a disposizione 3 tiri e fa centro ancora 2 volte. Laura ha dunque fatto centro 4 volte su 8. Nella prima manche abbiamo quindi $\frac{2}{5}$ dei tiri andati a segno, nella seconda $\frac{2}{3}$, per un totale di $\frac{4}{8}$.

Da un punto di vista matematico risulterebbe $\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{4}{8}$, che sembra alquanto difficile da accettare. Eppure $\frac{4}{8}$ è equivalente a $\frac{1}{2}$, e non si può negare che Laura abbia colpito il bersaglio la metà delle volte in cui ha tirato. Ci stiamo ancora una volta allontanando dalla definizione di frazione come parte-tutto.

3.3.7 La frazione come numero razionale

In tal caso si mettono in evidenza questioni aventi a che fare con l'operatività: equivalenza tra frazioni, addizioni tra frazioni etc.
Il numero razionale 0,5, per esempio, non è altro che la classe di equivalenza $[(1;2),(2;4),...,(3;6),(6;12)...]$.

É chiaro che è molto difficile portarsi questo bagaglio culturale in un'aula scolastica, per cui si sceglie un rappresentante di questa classe, quello "ridotto ai minimi termini", nel nostro caso $(1;2)$. Questa coppia la si scrive direttamente sotto la forma frazionaria $\frac{1}{2}$, sapendo che, scrivendo tale simbolo, ci stiamo portando dietro tutte le coppie-frazioni equivalenti.

Dunque, tanto 0,5 quanto $\frac{1}{2}$, alla fine, si accettano come rappresentanti dello stesso numero razionale.

D'altra parte, cosa significherebbe altrimenti operare tra razionali?
Se addizioniamo $0,5+1,2$ tutti sappiamo che la somma è 1,7. É meno banale invece addizionare $3,\bar{4} + 2,3$. In questi casi conviene passare alla scrittura frazionaria.

Possiamo allora dire che $\frac{1}{2}$ non è un numero razionale, ma lo rappresenta molto bene. Se eliminassimo dunque le frazioni dalla prassi di insegnamento, sarebbe comunque comodo introdurle come ausilio per fare le operazioni con i numeri razionali.

3.3.8 La frazione come punto di una retta orientata

Per rispondere alla richiesta: "Porre $\frac{3}{4}$ sulla retta numerica", l'allievo deve valutare questa frazione come se fosse un numero razionale, applicare la relazione d'ordine in $\mathbb{Q}^a$ (ci limitiamo qui a considerare i razionali assoluti) e mettere un cerchietto nero tra l'origine (0) e l'unità (1) in una posizione appropriata e opportuna.

In questo caso, la frazione è vista come un valore-punto sulla retta orientata, assai più vicina ad essere un numero razionale che non una frazione. Quando infatti consideriamo $\frac{3}{4} < \frac{6}{7}$, non stiamo valutando il fatto che se prendiamo della stessa unità-tutto i $\frac{3}{4}$ otteniamo meno che se ne prendiamo i $\frac{6}{7}$, ma stiamo invece trattando direttamente le frazioni come numeri razionali.

Con un'opportuna trasformazione, in $\frac{21}{28}$ e $\frac{24}{28}$, risulta evidente quale delle due frazioni verrà prima sulla retta numerica.
In questo caso la frazione indica la distanza dall'origine.

3.3.9 La frazione come misura

Sulle bottiglie spesso si legge 0,75 l, il che sta ad indicare una quantità, una misura. É facile capire che si tratta di $\frac{3}{4}$ di un litro. Si tratta di una frazione nel senso primitivo del termine o semplicemente di un numero per esprimere la quantità? Un conto è infatti avere una bottiglia da un litro e riempirne i $\frac{3}{4}$, un altro è invece avere la bottiglia che già misura 0,75.

A volte ha senso pensare questa misura come numero razionale, a volte anche come frazione, ma in nessun caso conviene far riferimento alla definizione iniziale di frazione come parte-tutto.

3.3.10 La frazione come indicazione di quantità di scelta in un tutto

Facciamo un esempio. In un negozio si decide di premiare i clienti in un tal giorno con uno sconto. I clienti vengono scelti 1 ogni 10: il primo che entra, poi l'undicesimo, poi il ventunesimo, e così via. Alla fine della giornata sarà chiaro che a ricevere lo sconto saranno stati $\frac{1}{10}$ dei clienti.

In questo caso, la frazione $\frac{1}{10}$ significa sia che lo sconto è stato fatto a $\frac{1}{10}$ dei clienti del giorno, sia che lo sconto è andato a "1 ogni 10", che non è certo la frazione che pretende di dividere un'unità-tutto in 10 parti uguali.

3.3.11 La frazione e la percentuale

Per quanto riguarda la scrittura percentuale, possiamo semplicemente dire che spesso è più comodo esprimere, per esempio, 75% sotto forma di frazione $\frac{75}{100}$ o $\frac{3}{4}$ (come il caso della probabilità), a volte conviene lasciarlo sotto forma di percentuale, altre ancora è preferibile il numero decimale 0,75.

Anche se le scritture matematiche risultano formalmente equivalenti, non hanno sempre lo stesso significato nella prassi quotidiana.

3.3.12 La frazione nel linguaggio quotidiano

Sebbene gli allievi non sempre se ne rendano conto, le frazioni sono presenti in maniera massiccia nel linguaggio quotidiano.

Nella lettura dell'orologio, per esempio, per indicare le sette e 45 minuti, si è soliti dire "sette e tre quarti", dove "tre quarti" indica il fatto che stiamo considerando i $\frac{3}{4}$ di un'ora, e cioè di 60 minuti.
Si perde però il senso originario legato alla frazione, in quanto quel "tre quarti" diventa un riferimento puntuale, che ci indica il fatto che la lancetta dell'orologio analogico si trova sul 9.

In musica le frazioni hanno un ruolo determinante, basta pensare alla "ottava". Non sempre le frazioni in musica si comportano come quelle in matematica, ma lo studente sente nominare gli stessi nomi e pensa agli stessi oggetti concettuali.

Nella vita di tutti i giorni, tutti abbiamo sentito parlare di sconto: se lo sconto è del 50% è importante riflettere sul fatto che si tratta della metà, se lo sconto è del 25% è importante riflettere sul fatto che si tratta di un quarto. Il viceversa risulta più complicato.

Un altro ambito dove è possibile trovare le frazioni sono le indicazioni stradali, per esempio per indicare la pendenza: in questo ambito risulta difficile intuire che una pendenza del 100% ha un angolo di 45° e non un angolo retto.

Anche nelle misure spesso ricorrono le percentuali, le frazioni o i numeri razionali.

La cucina è un ottimo ambiente per introdurre le frazioni: se una ricetta è sperimentata per 4 persone e bisogna adattarla a 6, tutti gli ingredienti vanno modificati.

In medicina si utilizzano le frazioni, spesso quando si parla di dosi.

I ragazzi che praticano l'atletica sanno, per esempio, che una pista è internazionalmente stabilita in 400 m. Si rendono subito conto allora che per percorrere i 200 m, si deve partire da metà pista, per correre i 1500 m, devono percorrere 3 giri di pista e $\frac{3}{4}$.

3.3.13 La concettualizzazione delle frazioni e la teoria di Vergnaud

Secondo Vergnaud (1983, 1988, 1990, 1992) possiamo pensare che un concetto C è una terna di insiemi C=(S, I, S) tali che:

- S è l'insieme delle situazioni che danno senso al concetto (il *referente*);
- I è l'insieme degli invarianti sui quali si basa l'operatività degli schemi (il *significato*);

- S è l'insieme delle forme linguistiche e non linguistiche che permettono di rappresentare simbolicamente il concetto, le sue procedure, le situazioni e le procedure di trattazione (il *significante*).

La scelta di un solo significato per la "frazione" non riesce a concettualizzare la frazione nei suoi molteplici aspetti. Infatti:

- dietro lo stesso termine "frazione" si nascondono molte situazioni diverse che danno senso al concetto,
- per ciascuna di queste situazioni vi sono invarianti sui quali si basano le operatività degli schemi,
- vi sono varie forme linguistiche che permettono di rappresentare il concetto.

Si presenta dunque la necessità di concettualizzare "frazione" attraverso tutti questi significati e non solo attraverso la scelta di alcuni di essi, con una scelta scolastica che si rivelerebbe perdente.

Vergnaud introduce allora la teoria dei "campi concettuali", che interpreta come grandi sistemi di situazioni la cui analisi e trattamento richiede vari tipi di concetti, procedimenti e rappresentazioni simboliche che sono connesse l'una con l'altra.

Ecco cosa affermò a proposito Vergnaud nel 1990: "La teoria dei campi concettuali non è specifica della matematica: ma essa è stata inizialmente elaborata per rendere conto del processo di concettualizzazione progressiva delle strutture additive, delle strutture moltiplicative, delle relazioni numero-spazio, dell'algebra."

L'esempio più diffuso della teoria di Vergnaud riguarda il campo concettuale delle *strutture moltiplicative*.
Egli elenca tre motivi che rendono necessario mettersi in un campo concettuale piuttosto che di fronte ad un solo concetto:

1. è fuorviante studiare la moltiplicazione da sola, come operazione per risolvere certe classi di problemi: essa infatti è connessa con la divisione,

con le frazioni, con i rapporti, i numeri razionali, le funzioni lineari etc. Sono tutti problemi matematici contemporaneamente presenti fin dai primi problemi che gli allievi devono risolvere;

2. è necessario un dominio di conoscenze e competenze piuttosto ampio per poter studiare l'evoluzione cognitiva dello studente per quanto concerne questi concetti così legati tra loro, e per un periodo lungo;

3. le procedure delle quali si avvalgono gli studenti, i concetti dei quali si servono e le rappresentazioni simboliche cui fanno ricorso sono ampie e diverse e non sempre sono quelle proposte nei singoli casi della didattica in aula.

Vergnaud propone allora di considerare come oggetto della didattica non tanto la moltiplicazione, ma piuttosto di prendersi carico delle strutture moltiplicative.

Vergnaud inserisce le frazioni nel campo concettuale "strutture moltiplicative", dato che esse contribuiscono a dare senso al concetto di moltiplicazione.

Possiamo concluderne che da un lato non è pensabile una didattica delle frazioni isolata dal contesto matematico che le da senso, dall'altro tutti i diversi significati di frazioni devono essere esplorate e messe in relazione l'una all'altra.

3.3.14 La concettualizzazione segno-oggetto di Duval

Raymond Duval in tempi recenti ha sostituito la terna di Vergnaud con uno schema binario segno-oggetto.

In matematica:

- ogni concetto matematico ha rinvii a "non-oggetti", dunque la concettualizzazione non può essere basata sulla realtà concreta;
- ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione.

Dunque la concettualizzazione passa attraverso registri rappresentativi che non possono essere univoci;

- si parla più spesso di "oggetti matematici" e non di concetti matematici in quanto in matematica si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti.

La coppia *(segno, oggetto)* risulta più importante della nozione di concetto.

Le occorrenze dell'oggetto matematico "frazione" sono molteplici e rinviano ad una molteplicità di segni, ciascuno dei quali appartiene a diversi sistemi di segni. Ogni concetto matematico, d'altra parte, rinvia non solo all'oggetto mentale che la società e la tradizione matematica hanno costruito, ma a tutti i segni che, nei diversi sistemi di segni, sono stati elaborati per rappresentarlo.

3.4 Noetica e semiotica delle frazioni

Con il termine *noetica* si intende l'acquisizione concettuale; nel caso dell'ambiente scuola, l'apprendimento concettuale.
Con il termine *semiotica* si intende invece la rappresentazione dei concetti mediante sistemi di segni.

In matematica entrambi assumono una straordinaria importanza.
La noetica diventa importante visto che, preliminare a qualsiasi attività matematica, c'è l'apprendimento dei suoi concetti. L'apprendimento matematico può essere classificato in 4 tipologie fondamentali:

- l'apprendimento concettuale;
- l'apprendimento algoritmico;
- l'apprendimento strategico;
- l'apprendimento comunicativo.

Il primo tipo di apprendimento, cioè la noetica, è chiaramente preliminare a qualsiasi altro ed è indubbio che in matematica abbia un ruolo dominante.

Per quello che riguarda invece la semiotica, dobbiamo tener presente che i concetti matematici, come detto in precedenza, non esistono nella realtà. Il punto P, il numero 3, l'addizione, il parallelismo tra rette, non sono oggetti concreti, non esistono nella realtà empirica: sono puri concetti.

In matematica non possiamo quindi, come accade invece nelle altre scienze, esemplificare o mostrare. L'unica cosa che possiamo fare è scegliere un registro semiotico e rappresentare quel concetto in quel registro.
Si impara a maneggiare non gli oggetti, ma le loro rappresentazioni semiotiche.

Esempio 3.1. Supponiamo di voler rappresentare in diversi registri il concetto di dividere a metà un intero.

- *Registro semiotico: la lingua comune.* Un mezzo, la metà.
- *Registro semiotico: la lingua aritmetica.* $\frac{1}{2}$ (scrittura frazionaria), 0,5 (scrittura decimale), $5 \cdot 10^{-1}$(scrittura esponenziale) etc.
- *Registro semiotico: la lingua algebrica.* $\{x \in \mathbb{Q}^a | 2x - 1 = 0\}$ (scrittura insiemistica).
- *Registro semiotico: il linguaggio figurale.* La retta orientata.

3.4.1 Il paradosso di Duval

Nel 1993 Duval mise in evidenza un paradosso cognitivo, di rilevante importanza per la didattica delle frazioni.

L'insegnante (che conosce il concetto) propone allo studente (che non lo conosce ancora) alcune delle sue rappresentazioni semiotiche. Nelle intenzioni dell'insegnante c'è la volontà, la speranza, il desiderio che, attraverso le rappresentazioni semiotiche, lo studente costruisca l'apprendimento concettuale di quel concetto. Ma lo studente ha in suo possesso solo rappresentazioni semiotiche, oggetti, ma non il concetto in se.

L'insegnante potrebbe illudersi che lo studente sappia manipolare il concetto, quando in realtà egli sa manipolare le sue rappresentazioni semiotiche. "L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati?" (Duval, 1993).

3.4.2 Costruire conoscenza

In matematica le rappresentazioni semiotiche e in particolare le loro trasformazioni, hanno un ruolo fondamentale in quanto gli oggetti delle attività matematiche non sono accessibili attraverso l'esperienza diretta.

Dal punto di vista matematico, "una rappresentazione è interessante solo se può essere trasformata in un'altra rappresentazione"(Duval).

Ci sono due tipi di trasformazioni:

1. *Trattamento*: è la trasformazione da una rappresentazione in un registro semiotico ad un'altra rappresentazione nel medesimo registro.

2. *Conversione*: è la trasformazione da una rappresentazione in un registro semiotico ad un'altra rappresentazione in un altro registro.

La costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di usare più registri di rappresentazioni semiotiche di quei concetti:

- di *scegliere* i tratti distintivi del concetto da rappresentare e rappresentarli in un dato registro;

- di *trattare* tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro;

- di *convertire* tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

É attraverso questi tre passaggi che si "costruisce" conoscenza matematica.

Ricordiamoci che il nostro tema è l'apprendimento concettuale della frazione. La frazione è un concetto, dunque il suo apprendimento rientra nella noetica.

Non possiamo concretamente mostrare il concetto di frazione, al più possiamo operare su un intero, su un oggetto, per frazionarlo ed ottenere una parte. Abbiamo in questo modo mostrato una rappresentazione semiotica, non il concetto. Possiamo cambiare registro, ma continuiamo a fornire una rappresentazione semiotica di frazione.

É importante tener presente che il cambio di rappresentazione non presuppone che il concetto sia stato costruito né che la conversione avvenga spontaneamente.
In realtà anche se apparentemente questo concetto sembra essere stato acquisito, dopo alcune settimane lo studente è in crisi: ha imparato solo a manipolare alcuni passaggi e alcuni registri, ma è ben lontano dall'aver acquisito il concetto di frazione.

Capitolo 4

Analisi dei questionari

In questo capitolo ci apprestiamo a mostrare e ad analizzare il questionario sulle frazioni sottoposto ad alcuni studenti universitari. Per evitare fastidiosi rinvii bibliografici, le considerazioni che faremo avranno come riferimento Fandiño Pinilla (2005), citato in bibliografia.

4.1 Il questionario

Il questionario è stato sottoposto a studenti frequentanti il primo anno del corso di laurea in matematica, presso l'Università di Bologna. Esso è stato strutturato in modo che potessero emergere le difficoltà legate a questo argomento, e se tali difficoltà, che sono tipiche degli studenti di scuola primaria e secondaria, coincidono in qualche modo con quelle degli studenti che hanno invece un livello di istruzione non solo superiore ma specifico.

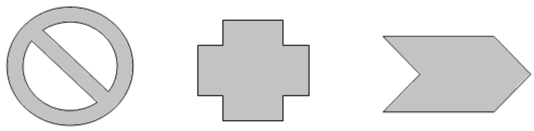
É importante tenere in considerazione il fatto che è stato chiesto agli studenti intervistati di rispondere tenendo conto che non ci sarebbe stata valutazione, e che il questionario sarebbe stato anonimo.

Vediamo quali sono le domande che sono state sottoposte ai soggetti della prova:

1. *Domanda 1*: Spiega ad un ragazzo delle medie che cos'è una frazione.

2. *Domanda 2*: Perché quando eseguiamo una divisione fra frazioni si fa una moltiplicazione fra la prima e l'inversa della seconda?

3. *Domanda 3*: Colora i $\frac{3}{4}$ di ciascuna di queste figure piane, colorate in grigio



4. *Domanda 4*: Dividere un numero per 0,2 è lo stesso che moltiplicarlo per

   a. $\frac{1}{5}$

   b. $\frac{1}{2}$

   c. 2

   d. 5

Mentre le prime tre sono state strutturate da me, l'ultima domanda è stata estrapolata dalla Prova Invalsi di matematica 2010-2011 per la scuola secondaria di secondo grado. Ci è sembrato che potesse essere interessante infatti vedere come studenti del primo anno del corso di laurea in matematica si rapportano con delle domande pensate per studenti di un livello scolastico inferiore.

4.2 Valutazione delle risposte ai questionari

Lo scopo di questo paragrafo è quello di analizzare le risposte date dagli studenti, cercando di capire se le difficoltà che sono tipiche degli studenti di scuola primaria e secondaria, possono essere assimilate a quelle dei soggetti della prova.

Cercheremo anche di capire se la trasposizione didattica precedente e conseguente agli studi universitari è stata o meno efficace.

- *Domanda 1*: la finalità di tale quesito era quella di vedere quali diverse interpretazioni danno gli studenti alla frazione, se c'è una forma che prediligono o che ritengono migliore, o più facile rispetto alle altre.

  Dall'analisi della prima domanda è possibile dividere le risposte degli studenti in cinque categorie, rispetto alle diverse interpretazioni di frazioni che abbiamo dato nei capitoli precedenti. Le definizioni favorite si dividono in: la frazione come unità-tutto, la frazione come quoziente, la frazione come punto di una retta orientata, la frazione come rapporto, la frazione come numero razionale.
  Possiamo fare però alcune osservazioni sulle singole risposte.

  Nel caso della frazione come unità-tutto, vi è una risposta che sottolinea alcune problematiche legate al concetto di frazione. Lo studente in questione, infatti, dopo aver disegnato cinque segmenti adiacenti e congruenti, ne ha sottolineati due su cinque, affermando di aver così "preso" $\frac{2}{5}$. Non solo. Scrive infatti "Prendo le prime 2 parti, così ho preso $\frac{2}{5}$". L'aggettivo "primo" sembra suggerire che si possano solamente prendere i primi due segmenti adiacenti sul disegno; e se si prendessero due segmenti diversi, non sarebbero più i $\frac{2}{5}$ dell'unità di partenza?

  In diversi casi si fa invece cenno ai numeri naturali. Mentre però per alcuni studenti la frazione indica una divisione tra due numeri naturali, il numeratore e il denominatore, in un caso lo studente risponde che la frazione è un numero della forma $\frac{p}{q}$ dove p è un numero intero, mentre q è un numero naturale. Ora mentre il primo caso sottolinea come anche studenti di livello scolastico superiore facciano ancora riferimento solo a $\mathbb{Q}^a$, il secondo mette in luce il fatto che la frazione può essere per lo studente anche negativa, ma ciò dipende solo dal numeratore, mentre non c'è alcun cenno al fatto che il denominatore debba essere diverso da 0. Quest'ultimo fatto in realtà è stato sottolineato soltanto da uno studente, che non rientra nelle casistiche precedenti e che definisce la frazione come numero il cui valore è $a : b$, con a e b interi, e b diverso da zero.

La definizione che è stata maggiormente scelta è quella di frazione come quoziente: la metà degli studenti infatti definisce la frazione come divisione o come numero il cui valore è $a : b$. Solo alcuni definiscono successivamente il quoziente di questa divisione come numero razionale.

Altri ancora definiscono la frazione come la rappresentazione di un numero razionale, o in forma di divisione fra due numeri interi, o come simbolo composto da numeratore e denominatore, entrambi numeri interi.

- *Domanda 2*: In questo caso la finalità della domanda è quella di cercare di capire se gli studenti utilizzano l'algoritmo in modo meccanico senza porsi domande sul perché si utilizzi. Teniamo presente che la moltiplicazione già di per sé crea alcune difficoltà agli studenti, specie per quelle domande del tipo "Trovare i $\frac{2}{3}$ di $\frac{3}{4}$" in cui l'operazione di moltiplicazione diventa un meccanismo facile da eseguire, ma non viene giustificato. Ancora più difficoltà mette in evidenza l'operazione di divisione in $\mathbb{Q}$.

  Dall'analisi dei questionari emerge che anche gli studenti del primo anno di matematica hanno difficoltà a comprendere perché si utilizza tale algoritmo per l'operazione di divisione. Alcuni di loro hanno risposto fornendo semplicemente un esempio del tipo

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$$

  Apparentemente sembra che l'uso che ne fanno è quello di un semplice algoritmo, una regola da applicare.

  In due casi gli studenti hanno lasciato in bianco la risposta, sintomo questo di una certa insicurezza sulla risposta, avendo in realtà completato le altre domande.

  La risposta che la definizione di divisione è l'inverso della moltiplicazione è stata data una sola volta. Essa è sostanzialmente la risposta corretta ma, non essendoci ulteriori spiegazioni, lascia qualche dubbio su quel che davvero lo studente voleva dire.

In un caso lo studente risponde che la moltiplicazione è l'inversa della divisione; anche in tale situazione risulta difficile capire cosa lo studente intenda non avendo lasciato ulteriori commenti.

In un altro caso ad esempio lo studente non sembra avere molto chiaro nemmeno l'algoritmo in sé, in quanto scrive: "Perché la frazione è una divisione tra due numeri (avendo però risposto alla prima domanda con una definizione di frazione più simile al concetto di punto di una retta, che non come quoziente) quindi si può moltiplicare numeratore e denominatore per lo stesso numero e scelgo il reciproco della seconda per far venire 1 al denominatore e avere un'operazione più semplice". Sembra inizialmente che lo studente voglia utilizzare la proprietà invariantiva della moltiplicazione sulla prima frazione, così da cercare di ottenere una frazione che abbia il denominatore uguale al numeratore della seconda, per poi moltiplicare per il reciproco della seconda ed ottenere 1, per "semplificare le cose". Ma poi sembra cambiare idea dicendo che invece di utilizzare una frazione del tipo $\frac{m}{m}$, afferma che la prima deve essere moltiplicata per il reciproco della seconda, che è si l'algoritmo dell'operazione di divisione, ma non è detto che al denominatore in questo modo si ottenga il numero 1. C'è probabilmente una certa qual confusione non solo nell'algoritmo, ma soprattutto nel tentativo di spiegazione dello stesso, o meglio nel tentativo di giustificarne i passaggi.

Ultimo caso interessante è quello di uno studente che spiega assai formalmente i vari passaggi, utilizzando anche la notazione a^{-1}, ma poi specifica che una delle uguaglianze si può giustificare con le proprietà algebriche del campo $\mathbb{R}$, quando nella domanda precedente aveva ben chiaro che i due numeri, denominatore e numeratore, dovessero essere appartenenti a $\mathbb{Z}$.

- *Domanda 3*: Lo scopo è quello di verificare se anche studenti del primo anno del corso di laurea in matematica hanno difficoltà, come gli studenti di scuola primaria e secondaria, nel gestire figure non standard. A scuola infatti, per semplificare le attività di routine, si tende a privilegiare l'uso di figure standard, quando si vogliono trovare frazioni in contesti continui: rettangoli, cerchi, quadrati e solo raramente triangoli equilateri. Tale fatto genera una misconcezione secondo cui è possibile trovare le frazioni solo di tali figure e non di altre.

  Dai risultati del questionario si può notare che anche gli studenti del primo anno del corso di laurea in matematica hanno difficoltà nel gestire figure che non sono mai state mostrate loro dagli insegnanti. La maggior parte di loro tende a dividere la figura in 4 parti "uguali" e a colorarne 3. In questo caso gli studenti interpretano il termine "uguali" come "sovrapponibili".

  In molti casi si riscontra il tentativo di dividere le figure non standard in figure che li riportino a quelle a cui sono legate: rettangoli e quadrati. Per la prima figura c'è anche chi, pur di ricondursi alla figura standard, approssima la curvatura della figura ad un segmento, ad esempio:

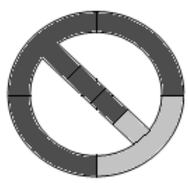
  

  Figura 4.1: Riconducibilità ad una figura standard

  Alcuni poi sono o incerti o convinti di una divisione alquanto "strana" (Figura **??**). Si tratta di studenti diversi tra loro, che hanno colorato le altre due figure in modo abbastanza lineare, e che però presentano delle difficoltà nel gestire una figura in particolare.

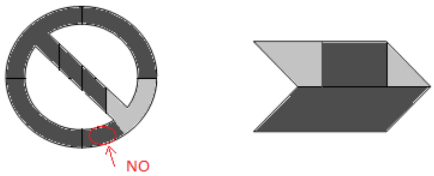


Figura 4.2: Divisione “strana” della figura

- *Domanda 4*: Questa domanda è stata estrapolata dalla Prova Invalsi 2010-2011 per la scuola secondaria di secondo grado. Ci aspettiamo che studenti al primo anno di matematica conoscano tale risposta, che siano dunque capaci di trasformare il numero con la virgola in frazione e applicare l'algoritmo della divisione. In realtà alcuni di loro non hanno risposto correttamente.

  Due studenti rispondono che per dividere un numero per 0,2 basta moltiplicarlo per $\frac{1}{5}$. In questo caso il passaggio da numeri decimali a numeri frazionari non ha creato problemi agli studenti, ma non è stata poi applicata l'operazione di divisione.
  Questa casistica potrebbe rientrare in quelli che, in didattica della matematica, si chiamano *modelli parassiti*. Sono quei modelli cioè che si sono formati troppo presto e che sono legati a delle convinzioni (non sempre corrette) molto forti. In questo caso la convinzione a cui gli studenti sono legati è quella della moltiplicazione che accresce, e della divisione che diminuisce. Si stabilisce il modello che si debba sempre dividere un numero per un altro più piccolo. Sembrerebbe quindi “strano” che dividere per 0,2 significhi moltiplicare per 5, molto più “naturale” appare la moltiplicazione per un numero più piccolo di 1, per effettuare una divisione.

  L'altra risposta che è stata scelta, diversa da 5, è $\frac{1}{2}$. In questo caso emerge la difficoltà nella trasformazione vera e propria da numero decimale a numero frazionario. Per di più $\frac{1}{2}$ indica la metà di uno, e dovrebbe essere abbastanza intuitivo pensare che equivalga a scrivere

0,5, e non 0,2. Questa difficoltà nel passaggio dai decimali alle frazioni si può classificare tra gli ostacoli epistemologici. Tale passaggio infatti ha richiesto alla matematica più di 4500 anni, nonostante fosse già disponibile un sistema posizionale. Soltanto dal XV secolo si può dire che si sia fatto un uso consapevole e corretto dei numeri decimali.

4.3 Conclusione

L'idea iniziale di questo questionario era quella di capire se anche studenti al primo anno del corso di laurea in matematica potessero avere delle difficoltà legate all'apprendimento delle frazioni, e in particolare se queste difficoltà coincidessero totalmente o in parte con quelle riscontrate negli studenti di scuola secondaria.

Durante la compilazione dei questionari si è cercato di ottenere dagli studenti risposte autonome, senza avere la possibilità di consultarsi con gli altri compagni.

In alcuni casi le risposte non sono coerenti le une con le altre, da parte dello stesso studente. In nessun caso comunque, esclusa la prima domanda che si apriva a più possibilità, si hanno tutte le risposte essenzialmente corrette.

Possiamo concludere che le idee iniziali sono state riscontrate nella valutazione finale: anche gli studenti del primo anno del corso di laurea in matematica presentano difficoltà legate al tema delle frazioni. Spesso queste difficoltà, come ad esempio il modello parassita della divisione che fa diminuire o la gestione delle figure non standard, coincidono con quelle di studenti di un livello scolastico inferiore.

Bibliografia

[1] Carruccio E., 1972 *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

[2] Pini B., 1964 *Primo corso di algebra*, CLUEB.

[3] Fiori C., Invernizzi S., 2009 *I numeri reali*, Pitagora, Bologna.

[4] Branchetti L., tesi di laurea A.A. 2010-2011 *Numeri reali: un esempio di trasposizione didattica*

[5] Coen S., A.A. 2010-2011 *Appunti del corso: Elementi di Geometria da un punto di vista superiore*

[6] Fandiño Pinilla M.I., 2005 *Le frazioni: aspetti concettuali e didattici*, Pitagora, Bologna

[7] D'Amore B., 1999 *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna

Ringraziamenti

Innanzitutto mi preme ringraziare il prof. Bolondi per la sua disponibilità, Laura che mi ha aiutato enormemente a capire i problemi degli studenti legati al passaggio dai razionali ai reali, e la prof. Fandiño Pinilla per avermi supportato durante tutta la stesura della tesi, per le correzioni tempestive e per aver sopportato ogni mia domanda, interessante o inutile che fosse.

I miei ringraziamenti doverosi vanno ai miei genitori che, forse nemmeno rendendosene conto, mi hanno sempre dato una grande opportunità: quella di scegliere ciò che più mi appassiona, senza limiti di tempo o di occupazione futura. Grazie a Ricky, perché nei momenti no non mi nega mai la compagnia nella visione di film infantili. Un ringraziamento speciale va a nonni e zii che hanno sempre supportato le mie scelte.

E veniamo ai ringraziamenti a chi questa esperienza con me l'ha condivisa: alle mie coinquiline, che hanno dovuto sopportare ogni mia fase di depressione/rabbia/felicità/apatia: a Cla perché sa ascoltare con pazienza, e a Sofy che è stata una specie di sorella siamese. A Lucy, con cui ho condiviso solo quest'ultimo anno, ma che ne ha alle spalle 3 per cui ringraziarla; alle mie compagne di avventura tra "fanscion" e "pi greca": Ale, Anto, Sara, Vale e Cla; a Diego, per le cene e i pomeriggi a Bologna, ma anche per tutto il resto; a Ale, che "è sempre Ale".

Grazie alle amiche di sempre: a Ele, per le interminabili chiamate ansiose pre-esame, da via Castiglione a Porta San Donato, perchè forse non sa di essere uno dei miei punti di riferimento; a Sara, che ha passato con me 23 anni, ma soprattutto l'ultimo mese di delirio tra frazioni e "piani di allenamento";

a Giuly, perché le foto che trova lei in rete sono sempre le migliori; a Chiara, che riesce a rendermi facile ridere anche quando non lo è; a Teu, perché "la vita è come una scatola di cioccolatini, non sai mai quello che ti capita", e lei forse non sa quanto io sia contenta di averla conosciuta.

Vorrei ringraziare tutti i miei amici singolarmente, ma servirebbero molte pagine: grazie a Rin, che mi ha scarrozzato in lungo e in largo, a Michele, che riesce sempre a coinvolgermi nelle sue pazzie, a Pietro, che sopporta ogni mia domanda di informatica, a Oki, Maggio, Dado, Drelli e Spre, che dopo dieci anni ancora mi sopportano. Grazie a tutti, I0III0. Un ultimo ringraziamento va a Mauro che, anche se in Polonia, è rimasto un potteriano fedele.