

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Sul terzo problema di Hilbert

Tesi di Laurea in Storia della Matematica

Relatore:

Salvatore Coen

Presentata da:

Arianna Monti

Prima Sessione
Anno Accademico 2011-2012

Alla mia famiglia ...

Introduzione

Negli *Elementi di Geometria* Euclide tratta della misura delle figure poligonali, partendo dall'intuizione che due tali figure abbiano la stessa estensione se e solo se sono equiscomponibili, cioè triangolabili con triangolazioni di triangoli a due a due congruenti e senza punti interni comuni. Negli *Elementi* si dimostra, con metodi costruttivi, che, dato un qualsiasi poligono convesso, è possibile determinare un rettangolo (anzi, un parallelogramma con angolo alla base pre-assegnato) equivalente ad esso per equiscomponibilità e che abbia base pre-assegnata h . Si può osservare direttamente che il rettangolo non dipende dall'equiscomposizione scelta. Si ha, così, per ogni segmento h fissato, un'applicazione che ad ogni figura poligonale P associa un rettangolo $R(h, P)$ di base h e opportuna altezza $a(h, P)$. Nel nostro linguaggio, identificando la classe di grandezza dei segmenti con i reali e assumendo come unità di lunghezza il segmento dato, si può dire che ad ogni 'figura poligonale' si associa un segmento che misura l'area della figura.

Alla fine del diciannovesimo secolo molto si lavorò per dare alla teoria di Euclide una veste dal rigore attendibile anche secondo i canoni più moderni di allora. Parve che la teoria delle figure poligonali si potesse estendere al caso tridimensionale. Non è difficile definire delle 'figure poliedriche' in modo che esse costituiscano una classe di grandezze euclidee. La teoria effettivamente sviluppata da Euclide per introdurre una sorta di misura per le grandezze poliedriche, però, non era quella analoga a quella delle figure poligonali ed, anzi, si spingeva all'uso rigoroso e difficile del metodo di esaustione. Nel tentare di estendere la teoria euclidea dal caso poligonale al caso poliedrale

ci si imbatté nella difficoltà di dimostrare che due poliedri della stessa misura (nel senso esaustivo) sia effettivamente possibile equiscomporli. Il problema interessò lo stesso Gauss che cominciò a dubitare della validità di questa proposizione. Dopo vari tentativi negativi, fu David Hilbert a proporre il problema nel terzo dei suoi famosi quesiti al Congresso di Parigi del 1900. Di lì a poco un suo giovane allievo, Max Dehn, dimostrò che effettivamente la strada cercata era inaccessibile. Il risultato destò clamore e spiegò anche perché Euclide negli Elementi aveva preferito il metodo esaustivo.

Precisamente, il quesito proposto da Hilbert fu il seguente:

determinare due tetraedri di basi uguali ed altezze uguali che non possano in alcun modo essere divisi in tetraedri congruenti, e che non possano essere combinati con tetraedri congruenti per formare due poliedri che possano a loro volta essere suddivisi in tetraedri congruenti.

La dimostrazione di Dehn dette ai matematici la sicurezza ‘psicologica’ della validità dell’enunciato di Dehn, ma la dimostrazione parve piuttosto confusa. Dopo Dehn molti si cimentarono nell’impresa fino a che, ora, dopo più di un secolo sembra che la dimostrazione si possa esprimere in modi più accessibili.

Lo scopo della tesi è appunto questo.

Dopo un’introduzione storica, ci proponiamo di esporre una dimostrazione che è frutto di svariati studi pluridecennali e che sembra assai semplice. Gli invarianti di Dehn vengono definiti come lo stesso Dehn aveva fatto e la dimostrazione, con l’ausilio di metodi algebrici abbastanza elementari, presenta linee dimostrative assai chiare. Questa esposizione segue le linee di dimostrazioni che ora sono reperibili in letteratura e che sono ispirate ai lavori di V. F. Kagan (tra 1903 e 1930), Hugo Hadwiger (tra il 1949 e 1954) e Vladimir G. Boltyanskii.

Con tutto ciò, si può però osservare che le dimostrazioni ora reperibili tralasciano spesso alcuni passaggi più o meno elementari. Per un completamento del tutto rigoroso ci sembra che occorran vari complementi e le dimostrazioni si appesantiscono parecchio.

Nel secondo capitolo della tesi siamo scesi nei particolari di diversi passaggi, ma per essere del tutto completi si dovrebbe appesantire ancora leggermente l'esposizione.

Qualche anno fa è apparsa una nuova dimostrazione, dovuta questa volta a Robin Hartshorne. Egli introdusse invarianti diversi (che qui chiamiamo 'invarianti di Dehn-Hartshorne'). Questi invarianti sono effettivamente elementi del gruppo abeliano $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. La dimostrazione di Hartshorne non usa metodi algebrici impegnativi ed è a nostro avviso accessibile e rigorosa. Essa costituisce l'ultimo capitolo della tesi. Da notare che forniamo anche due dimostrazioni, una più stringata ma che usa qualche elemento di teoria di Galois, l'altra più lunga ma basata solo su un uso ripetuto del metodo induttivo a partire da semplici proprietà trigonometriche, della proposizione seguente (necessaria sia nella prova di Dehn-Hadwiger, che in quella di Hartshorne):

'arccos $\frac{1}{3}$ e π sono incommensurabili'.

Indice

Introduzione	i
1 Inquadramento storico	1
1.1 La nozione di uguaglianza per Euclide	3
1.2 Equivalenza, equiscomponibilità ed equicomplementabilità . .	6
1.2.1 Poligoni equiscomponibili	7
1.2.2 Il contributo di Bolyai e Gerwien	8
1.2.3 Poligoni equicomplementabili	10
1.3 L'origine del terzo problema di Hilbert	13
1.4 Hilbert pone il suo terzo problema	17
2 La dimostrazione di Dehn-Hadwiger	21
2.1 Alcuni richiami di algebra lineare	21
2.2 Invarianti di Dehn	26
2.3 Poliedri equiscomponibili ed equicomplementabili	26
2.4 Il teorema di Dehn-Hadwiger	29
2.5 Conclusione della dimostrazione di Dehn-Hadwiger: calcolo di particolari invarianti	37
2.5.1 Tetraedro regolare e suoi invarianti di Dehn	37
2.5.2 Tetraedro individuato da tre spigoli concorrenti orto- gonali e suoi invarianti di Dehn	38
2.5.3 Ortoschema e suoi invarianti di Dehn	40

3	L'invariante di Dehn-Hartshorne	43
3.1	Il gruppo abeliano G	44
3.2	Invariante di Dehn-Hartshorne	45
3.2.1	Proprietà dell'invariante di Dehn-Hartshorne	47
3.3	Il teorema di Dehn	51
A	Qualche richiamo di geometria solida	57
	Bibliografia	63

Capitolo 1

Inquadramento storico

L'8 agosto 1900, a Parigi, iniziò il secondo Congresso Internazionale dei Matematici (ICM, International Congress of Mathematicians), forse la più importante e numerosa conferenza trattante temi di argomento matematico di cui si avesse notizia fino ad allora in ambito storico. Con essa si chiudeva un secolo molto importante per lo sviluppo matematico e se ne apriva uno nuovo, altrettanto incoraggiante e promettente. Il secondo Congresso Internazionale, quindi, a cavallo fra due secoli, si presenta come l'occasione ideale per analizzare i problemi ancora rimasti aperti e presentarne di nuovi.

Chi di noi non solleverebbe volentieri il velo dietro cui si nasconde il futuro per gettare uno sguardo sui principali progressi della nostra scienza e i segreti del suo sviluppo nei secoli a venire? Quali saranno gli speciali obiettivi a cui mineranno le più insigni menti matematiche delle generazioni future? Quali nuovi metodi e quali nuovi risultati scopriranno i nuovi secoli, nell'ampio e ricco campo del pensiero umano?

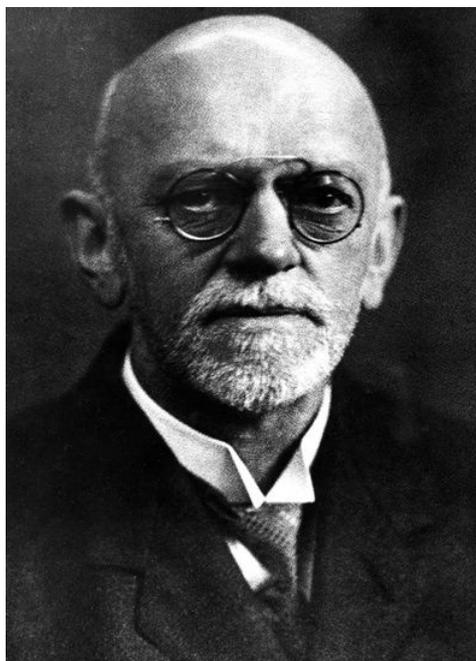


Figura 1.1: David Hilbert

Esordiva così **David Hilbert** (Königsberg, 23 gennaio 1862 – Gottinga, 14 febbraio 1943) nella sua conferenza al secondo Congresso Internazionale dei Matematici. In tale occasione, il matematico di Gottinga presentò una lista di dieci problemi matematici irrisolti (cfr. [15]), lista che venne in seguito ampliata a ventitré. Hilbert era fermamente convinto dell'importanza e del significato che avevano i problemi: porre nuovi interrogativi ancora non risolti avrebbe giovato sia allo sviluppo della matematica sia al singolo ricercatore. Come terzo dei suoi ventitré problemi, noti oggi con il nome di 'problemi di Hilbert', egli chiese di trovare:

due tetraedri di basi uguali ed altezze uguali che non possano in alcun modo essere divisi in tetraedri congruenti, e che non possano essere combinati con tetraedri congruenti per formare due poliedri che possano a loro volta essere suddivisi in tetraedri congruenti.

Ma da dove nasce la curiosità e la necessità di Hilbert di dare una risposta a tale quesito? In altre parole, Hilbert si chiede se sia possibile o meno

generalizzare il ‘teorema di Bolyai-Gerwien’ (cfr. [2] e [3]). Quest’ultimo permette di affermare che le definizioni di *poligoni equiscomponibili* (possono essere scomposti in triangoli congruenti) e *poligoni equicomplementabili* (possono essere resi congruenti attraverso l’aggiunta di triangoli congruenti) equivalgono ed equivalgono, a loro volta, con il concetto di avere la stessa area. Lo stesso Hilbert, quindi, si chiede se possa valere un teorema analogo al precedente in tre dimensioni.

1.1 La nozione di uguaglianza per Euclide

Negli Elementi di Euclide (cfr. [11]), la relazione di uguaglianza o disuguaglianza non è presente né nelle definizioni, né nei postulati, ma si parla di ‘enti uguali’ soltanto a livello intuitivo nelle *Nozioni Comuni*. L’uguaglianza è presentata in questi termini:

1. Enti uguali al medesimo ente sono uguali fra loro;
2. Se ad enti uguali si aggiungono enti uguali si ottengono somme uguali;
3. Se ad enti uguali si tolgono enti uguali, rimangono resti uguali;
4. Se ad enti disuguali si aggiungono enti uguali, si ottengono enti disuguali;
5. Se ad enti disuguali si tolgono enti uguali, rimangono resti disuguali;
6. Enti doppi di uno medesimo, sono uguali fra loro;
7. Metà di enti uguali sono uguali fra loro;
8. Enti, che possono essere portati a coincidere, sono uguali;
9. Il tutto è maggiore di una sua parte.

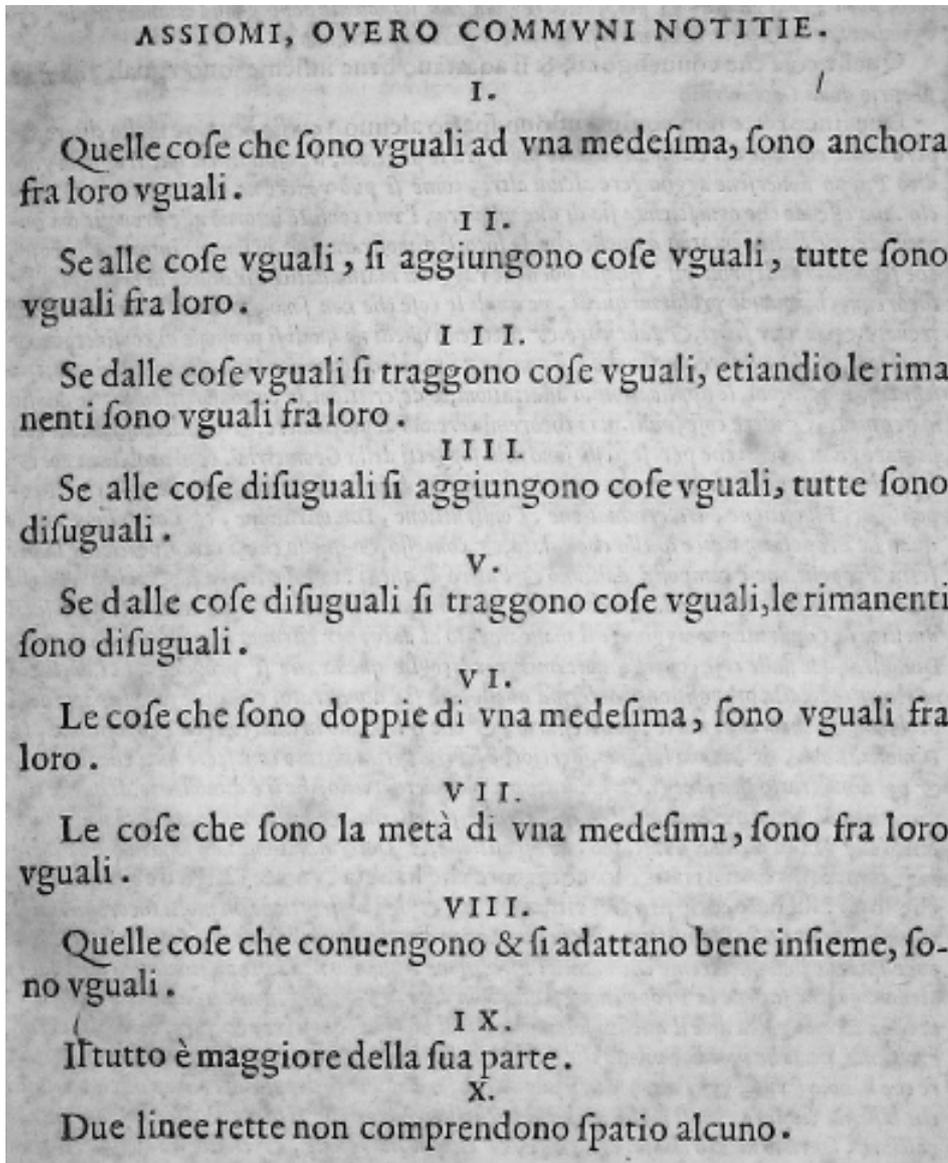


Figura 1.2: Gli Elementi, libro I. Traduzione di Federico Commandino (Urbino, 1509 – 5 settembre 1575), 1575

In termini moderni, possiamo intendere gli ‘enti’ di cui parla Euclide, come enti geometrici elementari (ad esclusione dei punti), e di conseguenza tutte le figure geometriche definibili attraverso essi.

Definizione 1.1. Ogni insieme di punti (del piano o dello spazio) si dice

figura geometrica, o più semplicemente *figura*.

Definizione 1.2. La parte di piano limitata da una poligonale sciolta e chiusa¹ compresa la poligonale stessa, si chiama *poligono*. La *poligonale* è il contorno del poligono e i suoi lati e i suoi vertici si dicono anche *lati* e *vertici* del poligono.

I poligoni si distinguono secondo il numero dei loro vertici (che è lo stesso dei lati): così il poligono a tre vertici si dirà *triangolo*. Diamo di seguito una nuova definizione di *figura*, che utilizza anche la nozione di triangolo.

Definizione 1.3. Una *figura poligonale* P è un sottoinsieme limitato del piano che può essere espresso come unione finita di triangoli non aventi parti interne in comune. Un punto D è interno alla figura P se esiste un triangolo ABC , interamente contenuto in P , tale che D giaccia internamente ad esso.

Utilizzando le notazioni euclidee, possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 1.4. Due figure si dicono *sovrapponibili*, o uguali, quando hanno tutti i punti interni in comune.

¹Presi nel piano, l'uno dopo l'altro, quanti punti si vogliono, per esempio, i quattro punti A, B, C, D , si conducano i segmenti AB, BC, CD . La linea costituita da questi segmenti si chiama **poligonale** o spezzata.

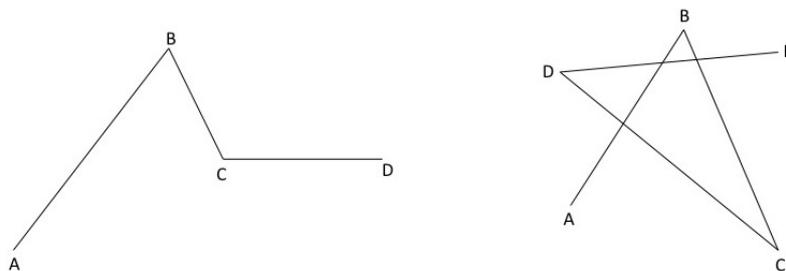


Figura 1.3: Esempio di poligonale e di poligonale intrecciata

I vari segmenti che la costituiscono si dicono *lati*, e i punti comuni, ciascuno a due lati consecutivi, si dicono *vertici*, mentre il primo e l'ultimo punto, cioè A e D , si chiamano *estremi* o anche *termini* della poligonale. Una poligonale si dice *sciolta* se nessuno dei suoi lati ha punti comuni con lati non consecutivi. Viceversa si dice *intrecciata*.

Così, le proprietà espresse da Euclide possono essere riscritte in questi termini:

1. Poligoni congruenti hanno superfici uguali;
2. Superfici uguali ad una terza sono uguali fra loro;
3. Somme di superfici uguali sono uguali;
4. Differenze di superfici uguali sono uguali;
5. Una superficie non è uguale ad una sua parte;
6. Se due superfici non sono uguali, una di esse è maggiore dell'altra.

Proposizione 1.1.1. *Se in due poligoni uguali si conducono le diagonali uscenti da due vertici corrispondenti, i due poligoni risultano divisi in triangoli ordinatamente congruenti.*

1.2 Equivalenza, equiscomponibilità ed equicomplementabilità

Fin dall'inizio dello studio della Geometria si è visto che due qualsiasi *segmenti*, due qualsiasi *angoli* e anche due qualsiasi *poligoni* si possono confrontare fra loro, così da riconoscere se essi siano o non siano *uguali* (cioè sovrapponibili). Ricordiamo che un insieme di figure si dice costituire una *classe di grandezze* se per tali figure è possibile definire le relazioni di uguaglianza e disuguaglianza, le operazioni di addizione e sottrazione e vale la proprietà di Archimede. Notiamo che la nozione di 'equivalenza' utilizzata in seguito è data come intuitiva; con il termine 'equivalenti' si fa, quindi, riferimento alla equiestensione.

1.2.1 Poligoni equiscomponibili

Definizione 1.5. Due figure P e P' si dicono *equiscomponibili* se possono essere scritte come unione finita di triangoli non aventi alcun punto interno in comune

$$\begin{aligned}P &= T_1 \cup \dots \cup T_n \\ P' &= T'_1 \cup \dots \cup T'_n\end{aligned}$$

tali che T_i è congruente a T'_i per tutti gli indici $1 \leq i \leq n$.

Teorema 1.2.1. *Ogni poligono è equiscomponibile con un rettangolo; uno dei lati di questo rettangolo può essere scelto di lunghezza arbitraria (cfr. [8]).*

Teorema 1.2.2. *Un triangolo è equiscomponibile con un rettangolo di stessa base a metà altezza (cfr. [8]).*

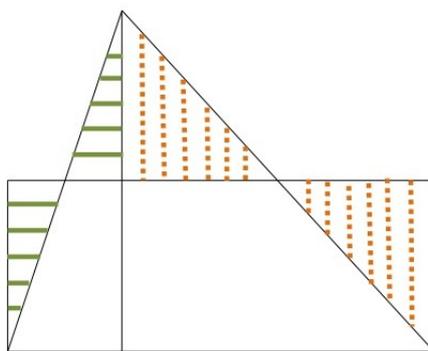


Figura 1.4: Esempio di un triangolo e di un rettangolo di stessa base e stessa altezza equiscomponibili

Notiamo, inoltre, che due rettangoli equivalenti sono equiscomponibili. Ricordiamo, poi, che ogni poligono è equiscomponibile con un opportuno rettangolo, a sua volta equiscomponibile con un altrettanto opportuno triangolo. Da qui, grazie alla proprietà transitiva della relazione di equiscom-

ponibilità², risulta che un qualsiasi poligono e un adeguato triangolo sono equiscomponibili. Ricordiamo che è possibile dare una struttura di classe di grandezza alle figure che sono unione di poligoni convessi. Non è scopo della tesi sviluppare questa parte. E' comunque evidente che la definizione di equiscomponibilità si può estendere alle figure poligonali. Notiamo, inoltre, che sulla classe delle grandezze delle figure poligonali l'equiscomponibilità è una relazione d'equivalenza.

Così, tutte le coppie di poligoni equiscomponibili sono equivalenti. Nasce spontaneamente la domanda inversa: poligoni equivalenti sono anche equiscomponibili? La risposta è affermativa ed è stata ottenuta quasi contemporaneamente dal matematico ungherese Bolyai (1832) e dal tedesco Gerwien, ufficiale e amatore di matematica (1833).

1.2.2 Il contributo di Bolyai e Gerwien

Bolyai e Gerwien, come già detto, hanno molto lavorato su queste tematiche e hanno affermato che:

Due poligoni equivalenti sono equiscomponibili.

Dimostrazione. Idea della dimostrazione: per ognuno dei due poligoni esiste un rettangolo equiscomponibile con esso. Questi ultimi avranno, chiaramente, stessa area e saranno equiscomponibili a loro volta. Quindi, i due

²Se una figura A è equiscomponibile con una figura B, e la figura B è equiscomponibile con una figura C, allora anche le figure A e C sono equiscomponibili.

Dimostrazione. Se A è equiscomponibile con B allora esistono dei triangoli T_1, \dots, T_n tali che $A = T_1 \cup \dots \cup T_n$ ed esistono dei triangoli T'_1, \dots, T'_n tali che $B = T'_1 \cup \dots \cup T'_n$ e tali che T_i sia congruente a T'_i per ogni $1 \leq i \leq n$.

Se B è equiscomponibile con C allora esistono dei triangoli T''_1, \dots, T''_n tali che T''_i sia congruente a T_i , per ogni i e tali che $C = T''_1 \cup \dots \cup T''_n$.

Da qui si ha che i triangoli T_i sono congruenti ai triangoli T''_i , quindi le figure A e C sono equiscomponibili. \square

poligoni di partenza sono equiscomponibili. □

Lo stesso Gerwien aveva provato, per via costruttiva, che due o più poligoni piani di ugual area potessero essere spezzati nel medesimo numero finito di parti poligonali a due a due congruenti. La medesima idea la ebbe W. Bolyai (cfr. [2]).

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA TENTAMEN

IUVENTUTEM STUDIOSAM IN ELEMENTA MATHESOS PURÆ ELEMENTARIS
AC SUBLIMIORIS METHODO INTUITIVA EVIDENTIAQUE HUIC PROPRIA
INTRODUCENDI, CUM APPENDICE TRIPLICI

EDITIO SECUNDA.

TOMUS II

ELEMENTA GEOMETRIÆ ET APPENDICES.

MANDATO ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SUB ADNOTATIONIBUS ADRECTIS
EDIDERUNT

IOSEPHUS KÜRSCHÁK, MAURITIUS RÉTHY,
BÉLA TÓTÖSSY DE ZEPETHNEK

ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SOCIÆ.

PARS PRIMA. TEXTUS.

BUDAPESTINI.

SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.
MCMIV.

A BUDAPESTI KERESKEDELMÉNYI AKADEMIA
„WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA”

Figura 1.5: Bolyai, *Tentamen*, 1897

Nell'opera di Bolyai (cfr. [2]) è anche tentata una dimostrazione, per due qualsiasi superfici, dei due seguenti teoremi:

Teorema 1.2.3. *Le parti non comuni a due superfici congruenti, che in parte si ricoprono, sono decomponibili in parti a due a due congruenti.*

Teorema 1.2.4. *Se da due superfici congruenti si tolgono due parti congruenti, i resti sono decomponibili in parti a due a due congruenti.*

E' possibile stabilire fra le superfici poligonali e i rettangoli aventi altezza prefissata h una *corrispondenza*, nella quale sono conservate le relazioni di *somma*, di *uguaglianza* e di *disuguaglianza*, tale che:

1. a due poligoni equivalenti corrisponda un medesimo rettangolo, di altezza h , e viceversa;
2. alla somma di due poligoni corrisponda il rettangolo (di altezza h) somma dei rettangoli corrispondenti a due poligoni dati.

1.2.3 Poligoni equicomplementabili

La proprietà di essere equiscomponibili permette di calcolare l'area di alcuni poligoni: calcolare l'area di un parallelogramma, ad esempio, coincide col calcolare l'area di un rettangolo di ugual base e altezza.

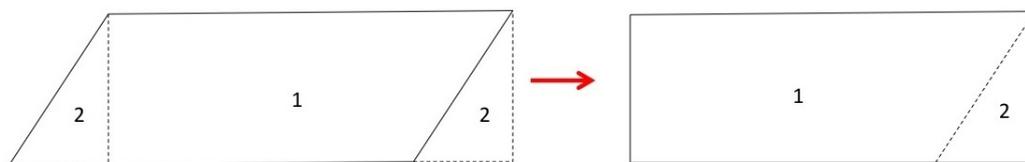


Figura 1.6: Equiscomponibilità fra parallelogramma e rettangolo

In alcuni casi, però, conviene usare un altro metodo al posto di sfruttare la decomposizione in poligoni equivalenti. Il metodo a cui si fa riferimento è chiamato *metodo del completamento*. Al posto di decomporre due figure in parti rispettivamente congruenti, ora si aggiungono alle figure date parti

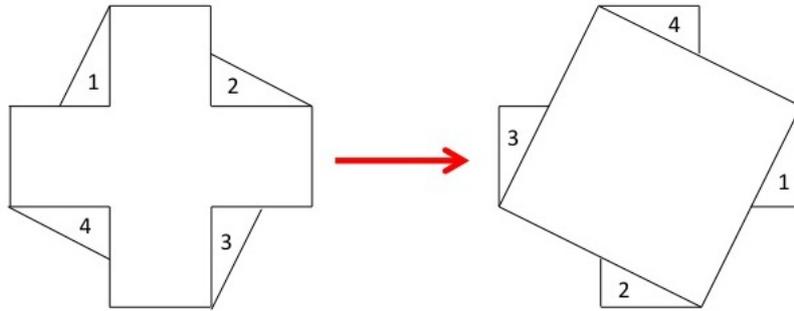


Figura 1.7: Esempio di due figure equicomplementabili

congruenti rispettivamente, in modo che le figure ottenute siano a loro volta congruenti fra loro.

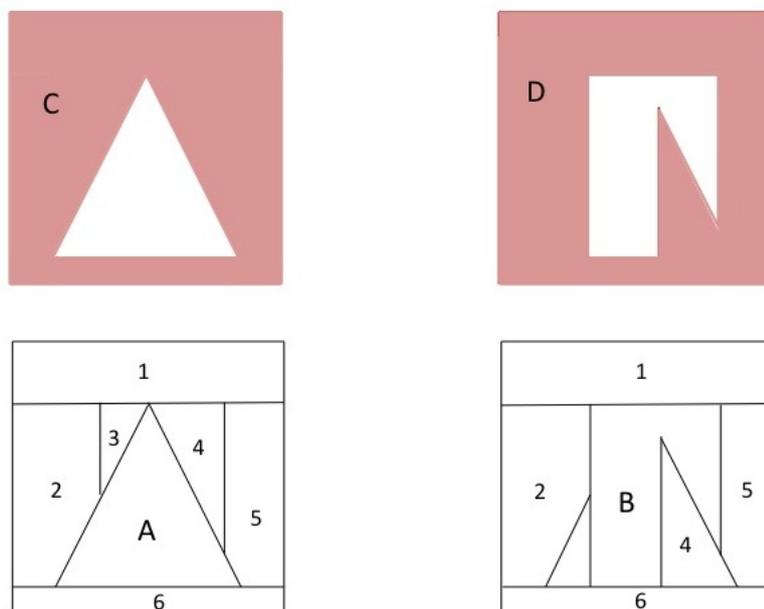
Definizione 1.6. Diremo che due poligoni sono *equicomplementabili* se è possibile ottenere due figure congruenti sommando ad ognuno di essi poligoni congruenti.

Chiaramente, due o più figure equicomplementabili sono anche equivalenti. Come prima, viene naturale chiedersi se vale anche il viceversa, cioè se due poligoni equivalenti sono anche equiscomponibili. La risposta è affermativa ed è data dal seguente teorema:

Teorema 1.2.5. *Due poligoni equivalenti sono equicomplementabili.*

Dimostrazione. Siano A e B due poligoni equivalenti. Scegliamo due quadrati congruenti fra loro e sufficientemente grandi, in modo che sia possibile collocare i poligoni A e B al loro interno. Se ritagliamo il poligono A dall'interno di uno dei due quadrati, e il poligono B dall'altro, otteniamo due figure C e D (colorate in figura) equivalenti. Le due figure C e D sono equivalenti in quanto differenza di figure equivalenti. Le due figure C e D risultano quindi equiscomponibili, per il teorema di Bolyai-Gerwien. Da qui segue che C e D possono essere decomposte in coppie di parte congruenti; questo implica che i poligoni A e B sono equicomplementabili.

□



Quindi, si è visto che per i poligoni piani, le nozioni di equiscomponibilità ed equicomplementabilità equivalgono entrambe all'avere ugual area. E per i solidi? I teoremi, le proposizioni dimostrate per i poligoni, valgono anche per i poliedri? Una prima definizione di *poliedri equiscomponibili*, analoga a quella data per i poligoni, potrebbe essere la seguente (l'intero discorso su poliedri equiscomponibili ed equicomplementabili sarà formalizzato nel capitolo successivo):

Definizione 1.7. Due poliedri sono detti *equiscomponibili* se uno di essi può essere decomposto in un numero finito di parti in modo tale che le parti componenti possano essere ricomposte dando luogo all'altro.

E' chiaro che poliedri equiscomponibili hanno stesso volume (nel senso intuitivo). Ma è vero anche il viceversa: tutte le coppie di poliedri aventi stesso volume sono equiscomponibili? Esiste, cioè, una generalizzazione del teorema di Bolyai-Gerwien? Questo è il problema che ha posto Hilbert e vedremo che la risposta alla suddetta domanda è negativa, cioè non tutte le coppie di poliedri equivolumetrici sono anche equiscomponibili. Di conse-

guenza non è possibile stabilire l'equivalenza dei metodi di decomposizione e di completamento con metodi analoghi a quelli utilizzati nel caso dei poligoni piani. Il problema dell'equivalenza di questi due metodi si risolve attraverso il seguente teorema:

Teorema 1.2.6 (Teorema di Sydler). *Due poliedri sono equicomplementabili se e solo se sono equiscomponibili.*

1.3 L'origine del terzo problema di Hilbert

Il terzo problema di Hilbert ha la sue origini in una questione sollevata da **C.F. Gauss** (Braunschweig, 30 aprile 1777 – Gottinga, 23 febbraio 1855) in due lettere indirizzate a Gerling (Amburgo, 10 luglio del 1788 - Marburg, 15 gennaio del 1864): lo stesso Gauss si chiede (cfr. [12]) se sia necessario il metodo di esaustione per dimostrare la proposizione (XII.5) di Euclide. Quest'ultima asserisce che:

due piramidi equivalenti con basi equivalenti e altezze uguali hanno stesso volume.

Riportiamo di seguito la prima versione elaborata da Euclide (cfr. [11]):

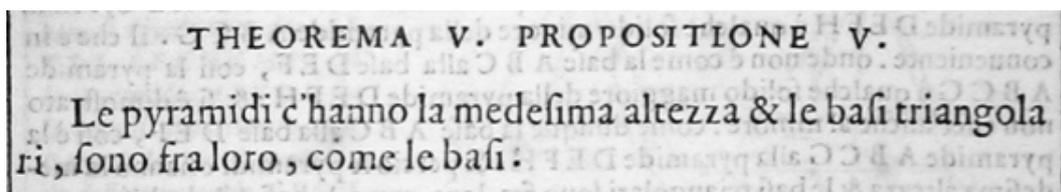


Figura 1.8: Traduzione di Federico Commandino (Urbino, 1509 – 5 settembre 1575)

Perché Euclide ricorre al metodo di esaustione per dimostrare tale proposizione? Non è possibile dimostrarla in altro modo, senza far uso di un metodo così laborioso? Scopo del capitolo sarà dare una risposta alle domande appena poste.

Si ricordi, intanto, che il **metodo di esaustione** è un metodo di dimostrazione che è stato valorizzato, molto probabilmente, nel IV secolo a.C. dal matematico greco Eudosso di Cnido. E' un metodo molto rigoroso che permette di dimostrare risultati ottenuti per altra via, quale ad esempio l'intuizione. Come tale, però, quest'ultima deve essere necessariamente formalizzata; la formalizzazione e la dimostrazione rigorosa derivano proprio dall'utilizzo del metodo di esaustione. Esso ha lo schema di una dimostrazione per assurdo il cui scopo è quello di provare che due grandezze devono essere uguali perché è assurdo che la loro differenza sia diversa da zero; in questo modo si dimostra che due figure stanno fra loro in un certo rapporto o che stanno fra loro come altre due. E' uno schema di ragionamento matematico assai laborioso nel quale si può trovare il germe del successivo calcolo integrale.

Ma se è così laborioso, perché Euclide ne fa uso? Non c'era un modo più semplice per dimostrare la sua proposizione? Gauss crede di no, o meglio, egli esprime il proprio timore che tale proposizione non sia dimostrabile se non attraverso il sopracitato metodo. Manifesta il suo timore, come già accennato, in due lettere indirizzate a Gerling, l'una datata 8 aprile 1844, l'altra inviata pochi giorni dopo, ovvero il 17 aprile 1844.

GAUSS AN GERLING. Göttingen, 8. April 1844.

..... Ihre Bemerkungen über Symmetrie und Congruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desideriren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist (was bei Ihnen nur als eine wahrgenommene Thatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist, und füglich höhern Wesen zukommen könnte. Um aber, aus dieser Höhe, wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde, sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstrieren lässt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area des sphärischen Dreiecks gezeigt haben. Ihr Beweis in etwas anderer Gestalt findet sich auch bei LOBATSCHESKY, ohne dass erhellt, ob er Ihren Aufsatz gekannt habe. Jedes sphärische Dreieck lässt sich nemlich in drei gleichschenklige Dreiecke zerlegen, und diese Zerlegung auf zwei symmetrische Dreiecke angewandt, gibt bei beiden gleiche und nur in ungleicher Ordnung liegende Dreiecke. (Es versteht sich, dass um vollständig zu sein, man drei Fälle unterscheiden müsste, wovon der zweite und dritte auch so ausgesprochen werden können, dass je eins der Partialdreiecke negativ oder 0 sein kann.)

3

³Le tue riflessioni sulla simmetria e la congruenza sono giuste. Sarebbe cosa gradita se tu mi dessi una spiegazione metafisica della tua ipotesi (che è considerata come un dato di fatto) e così lo sviluppo della geometria in più di tre dimensioni, che, sfortunatamente, non può essere colta da noi esseri umani, ma, tuttavia, non contraddittoria in senso astratto e utile a livello superiore.

E' triste che l'uguaglianza di figure simmetriche, ma non congruenti, possa essere provata solamente attraverso il metodo di esaurimento e non possa essere dimostrata utilizzando la tua tecnica innovativa del triangolo sferico. La tua dimostrazione può essere ritrovata nel lavoro di Lobatschewsky, presentata in maniera differente; in ogni caso, non è chiaro se egli sia a conoscenza del tuo particolare approccio. Inoltre, ogni triangolo sferico può essere decomposto in tre triangoli isosceli. Utilizzando questa decomposizione per due triangoli simmetrici, si ottengono soltanto triangoli diversi, incompatibili, per ognuno dei due (E' evidente che abbiamo la necessità di distinguere fra tre differenti casi, dei quali il secondo e il terzo possono comunque rappresentare uno dei triangoli della scomposizione come negativo o 0).

GAUSS AN GERLING. Göttingen, 17. April 1844.

Die Art, wie Sie die Volumengleichheit bloss symmetrischer, nicht zugleich congruenter, Körper beweisen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Man könnte den Nerv davon so hervorheben, dass man sagt,

- 1) dass man auf diejenigen Pyramiden aufmerksam macht, deren symmetrische Gegenstücke mit ihnen zugleich congruent sind, welches nemlich diejenigen sind, an denen zwei Seitenflächen zu einer dritten normal sind und in ihren Durchschnitten mit dieser gleiche Kanten geben, und
- 2) dass man nachweist, wie jede Pyramide in 12 Pyramiden von der eben bezeichneten Art zerlegt werden kann.

Ob die Beweisart neu ist, kann ich übrigens mit Gewissheit nicht verbürgen. Sehen Sie wenigstens LEGENDRES Geometrie nach, worin versucht ist, mehreres strenger oder einfacher als sonst geschehen, zu beweisen. Mir selbst ist in diesem Augenblick das Buch, welches ich nicht selbst besitze, nicht zur Hand.

Mein Bedauern muss ich nun, da jener Satz nicht mehr davon getroffen ist, auf die andern Sätze der Stereometrie beschränken, die annoch von der Exhaustionsmethode abhängig sind wie Euklid XII. 5. Vielleicht ist auch hier noch manches zu verbessern; in diesem Augenblick habe ich nicht Zeit, dem Gegenstande weiteres Nachdenken zu widmen.

4

In tali lettere emerge l'interesse di Gauss di provare a dimostrare la proposizione di Euclide senza utilizzare il metodi di esaustione, senza, cioè, dover 'spezzare' le due piramidi in infinite parti più piccole. Il problema della equiscomponibilità non è sempre risolvibile facilmente, soprattutto se si tratta di

⁴Mi è davvero piaciuto il modo in cui tu hai dimostrato l'uguaglianza del volume di figure simmetriche, ma non congruenti. Uno potrebbe utilizzare il tuo lavoro per:

1. enfatizzare la questione delle piramidi, le cui rispettive parti simmetriche sono congruenti e le cui facce sono perpendicolari a una terza faccia e i cui spigoli, se intersecati, sono i medesimi della terza.
2. provare che ogni piramide può essere intersecata in dodici diverse piramidi utilizzando la tecnica già menzionata.

Non riesco a dirti se questa prova è nuova. Ti consiglio caldamente di farti guidare dalla geometria di Legendre nella quale sono dimostrati diversi casi in maniera più rigorosa e semplice rispetto a quelle precedenti. Sfortunatamente non possiedo il suddetto libro.

figure tridimensionali: lo stesso Gauss credeva che fosse un po' triste e limitante dimostrare l'uguaglianza del volume di due figure soltanto attraverso il metodo di esaustione. La questione dell'equiscomponibilità, oltre che essere complessa, è anche molto antica. Già fra i matematici dell'antica Grecia, le aree dei triangoli e dei parallelogrammi erano determinate attraverso la scomposizione in figure più semplici.

1.4 Hilbert pone il suo terzo problema

Una risposta alle domande già citate è stata tentata da **Bricard** (23 Marzo 1870 – 1944) nel suo lavoro del 1896 (cfr. [5]).

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE RELATIVE AUX POLYÈDRES ;

PAR M. R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

In esso Bricard si pone il seguente problema:

Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre fini de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre?

Ovvero, egli si chiede se dati due poliedri equivalenti sia sempre possibile scomporre uno dei due in un numero finito di poliedri che, ricomposti, formino il secondo poliedro. Bricard prova a dare una risposta:

...pour que deux polyèdres soient susceptibles d'être transformés l'un en l'autre par une décomposition de chacun en un nombre fini de polyèdres, superposables deux à deux, il faut qu'une certaine fonction linéaire de leurs dièdres, à coefficients entiers, soit un multiple de deux angles droits.

Egli, cioè, afferma che, perché due poliedri possano essere trasformati l'uno nell'altro attraverso la scomposizione di entrambi in un numero finito di poliedri, che siano congruenti due a due, è necessario che una certa funzione lineare dei loro angoli diedri, a coefficienti interi, sia un multiplo di due angoli retti. Bricard asserisce, inoltre, che l'equivalenza di due generici poliedri non risulta una condizione necessaria perché valga la relazione precedente fra gli angoli diedri dei due. Quest'ultimo risultato non è del tutto evidente, ma possiamo convincerci di ciò pensando alla relazione fra un tetraedro regolare e un cubo equivalenti: gli angoli diedri del tetraedro, di ampiezza $\arccos \frac{1}{3}$, non risultano commensurabili con quelli del cubo, di ampiezza π . Da ciò risulta che non si può verificare l'equivalenza di due tetraedri aventi stessa base e stessa altezza e che non soddisfino nessun'altra condizione particolare, senza ricorrere alla scomposizione in elementi infinitesimi. Concludiamo, perciò, che quella di Bricard è una dimostrazione incompleta.

Anche lo **Sforza**⁵ raggiunge elegantemente i medesimi risultati, ma il problema rimaneva comunque aperto. Esattamente in questo contesto rientra Hilbert.

Hilbert ha il medesimo timore di Gauss e, per capire se sia fondato o meno, pone ai matematici dell'epoca il suo terzo problema. Da come Hilbert ha posto il problema, si deduce che egli stesso non credesse nella possibilità di generalizzare il teorema di Bolyai-Gerwien in tre dimensioni, ed aveva ragione.

Tornando all'interrogativo di Gauss, forse Euclide aveva utilizzato il metodo di esaustione nella dimostrazione della (XII.5) perché non aveva alternative, perché non c'era altro modo per giungere alla tesi. Un allievo di Hilbert, **Max Dehn** (13 novembre 1878 - 27 giugno 1952) risolse elegantemente il problema. Egli mostra, nel 1900 (cfr. [6]), che due poliedri possono avere lo stesso volume senza che però essi siano scomponibili in ugual numero finito di poliedri rispettivamente uguali.

⁵G.Sforza, *Un'osservazione sull'equivalenza dei poliedri per congruenza delle parti*, Periodico di Matematica, vol. 12, 1897.

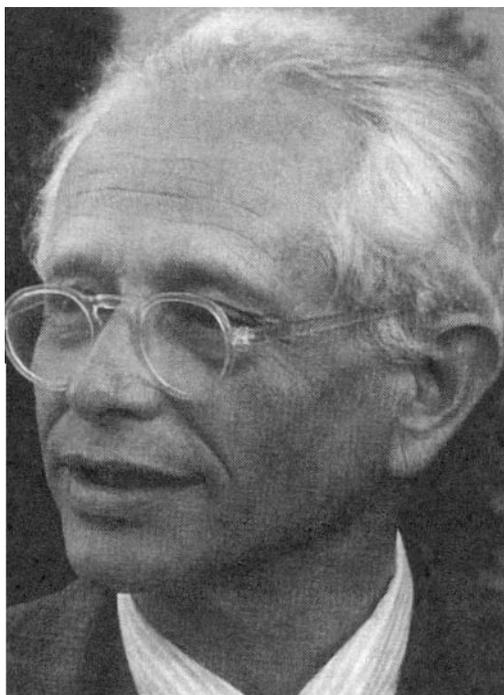
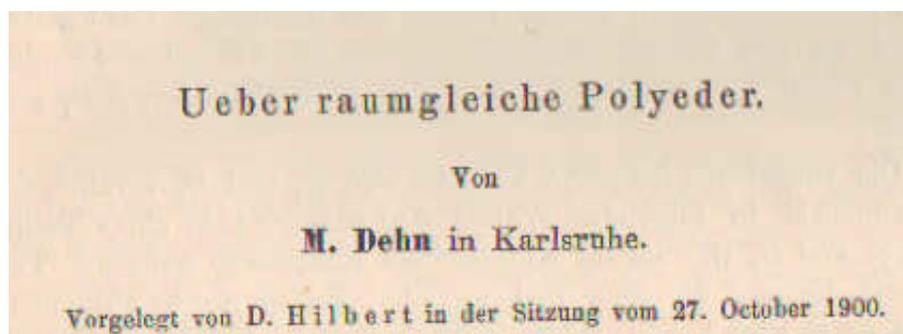


Figura 1.9: Max Dehn

In altre parole egli mostra che in generale non è possibile dati due poliedri dello stesso volume, ‘tagliarli’ nello stesso insieme di poliedri più piccoli (poliedri equiscomponibili). Dehn precisa anche la condizione di Bricard, affermando che affinché la condizione di equiscomponibilità sussista fra due generici poliedri è necessario che gli angoli di tali poliedri siano commensurabili. Così, un tetraedro regolare e un cubo di ugual volume non sono equiscomponibili perché l’angolo diedro del primo è incommensurabile con quello del secondo. Dehn dimostra in due pubblicazioni che perché due poliedri siano equiscomponibili, è necessario che esista una relazione lineare a coefficienti interi dei loro diedri che sia uguale ad un multiplo di π .



Ueber den Rauminhalt.

Von
M. DEHN in Karlsruhe.

—

Inhalt.

	Seite.
Einleitung: Allgemeines über den Inhaltsbegriff und Ziel der vorliegenden Arbeit	465
§ 1. Zerlegungsgleiche und ergänzungsgleiche Polyeder. — Die analogen Verhältnisse in der Ebene liefern uns den Ausgangspunkt für den Beweis . . .	467
§ 2. Abbildung der Zerlegung eines Polyeders auf die „Theilungsfläche“ . . .	469
§ 3. Zurückführung des Problems auf ein zweidimensionales	471
§ 4. Flächeninhalt der Theilungsfläche	472
§ 5. Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder	474
Beispiel: Es ist nicht möglich durch Zerschneiden und Zusammensetzen ein reguläres Tetraeder in zwei reguläre Tetraeder zu verwandeln.	
§ 6. Die Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit gelten auch für den allgemeinen Fall der Endlichgleichheit von Polyedern. — Gleichheit des Inhaltsmasses nicht ausreichend für die Endlichgleichheit	477

Tuttavia le pubblicazioni di Dehn non sono di facile comprensione perfino tuttora e, perciò, risulta difficile verificare se egli sia o non sia caduto in errore. Con gli anni, la dimostrazione di Dehn venne ripresa, rimaneggiata e rifatta e si é finalmente giunti a una *Book Proof*, grazie a V.F. Kagan, Hugo Hadwiger e Vladimir G. Boltyanskii. Nel 1965, *Sydler* dimostra che la condizione trovata da Dehn più di sessant'anni prima, oltre che necessaria era anche sufficiente per l'equiscomponibilità di due poliedri aventi stesso volume. Risultava così completamente risolto il Terzo problema di Hilbert.

Capitolo 2

La dimostrazione di Dehn-Hadwiger

Max Dehn, risolse il problema della equiscomponibilità nel caso tridimensionale, provando che quei due tetraedri di ugual volume richiesti da Hilbert (cfr. capitolo 1, pag. 2) esistevano veramente. Sfortunatamente la dimostrazione di Dehn è assai complessa e laboriosa; ecco perché riporteremo di seguito una versione più precisa e semplificata, operata da Hadwiger (cfr. [1] e [13]). Viene inizialmente definito l'invariante di Dehn, proprio di ogni poliedro P . In seguito si nota che se due generici poliedri hanno diverso invariante di Dehn, allora essi non sono equiscomponibili. Da qui segue, logicamente, che se due poliedri sono equiscomponibili allora hanno stesso invariante di Dehn. Il problema di Hilbert si risolve, infine, mostrando che un ortoschema (o, equivalentemente, un cubo) e un tetraedro regolare di ugual volume hanno diverso invariante di Dehn e perciò non sono equiscomponibili.

2.1 Alcuni richiami di algebra lineare

Sia $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subseteq \mathbb{R}$ un insieme di numeri reali. Definiamo $V(M)$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari a coefficienti razionali degli elementi di M , ovvero

$$V(M) := \left\{ \sum_{i=1}^k q_i m_i : q_i \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Si osserva che $V(M)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo \mathbb{Q} dei numeri razionali. La dimensione di $V(M)$ è data dalla cardinalità di una sua base. Per come è stato definito $V(M)$, esso è generato da M , quindi M contiene una base di $V(M)$ e pertanto

$$\dim_{\mathbb{Q}} V(M) \leq k = |M|$$

In seguito ci interesseremo alle funzioni \mathbb{Q} -lineari

$$f : V(M) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

cioè le trasformazioni lineari di spazi \mathbb{Q} -vettoriali.

Lemma 2.1.1. *Per ogni sottoinsieme finito $M \subseteq M'$ di \mathbb{R} , lo spazio \mathbb{Q} -vettoriale $V(M)$ è un sottospazio dello spazio \mathbb{Q} -vettoriale $V(M')$.*

Se $f : V(M) \longrightarrow \mathbb{Q}$ è una funzione \mathbb{Q} -lineare, allora f si può estendere ad una funzione \mathbb{Q} -lineare $f' : V(M') \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che $f'(m) = f(m)$ per ogni $m \in M$.

Dimostrazione. Ogni funzione \mathbb{Q} -lineare $f : V(M) \longrightarrow \mathbb{Q}$ è determinata non appena siano fissati i suoi valori su una \mathbb{Q} -base di $V(M)$. Sia, allora, $B_M = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ con $n \leq k$ una base di $V(M)$. Essa si può estendere a una base $B_{M'}$ di $V(M')$ della forma $B_{M'} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_m\}$, con $m \geq n$. Risulta, quindi, ben determinata una funzione $f' : V(M') \longrightarrow \mathbb{Q}$ tale che $f(a_1) = f'(a_1)$, $f(a_2) = f'(a_2)$, \dots , $f(a_n) = f'(a_n)$. Per semplicità, poi, gli elementi $\{a_{n+1}, \dots, a_m\}$ possono essere mandati in 0, cioè tali che $f(a_{n+1}) = f(a_{n+2}) = \dots = f(a_m) = 0$.

□

Riportiamo, ora, il seguente teorema che ci sarà utile nella successiva dimostrazione del teorema di Dehn-Hadwiger.

Teorema 2.1.1. *Per ogni intero dispari $n \geq 3$, il numero*

$$A(n) := \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

è irrazionale.

Dimostrazione. Dimostrare l'asserto significa provare che l'arco poligonale individuato da $\frac{1}{\sqrt{n}}$, per $n \geq 3$ dispari, le cui corde hanno tutte medesima lunghezza, non si chiude mai in se stesso.

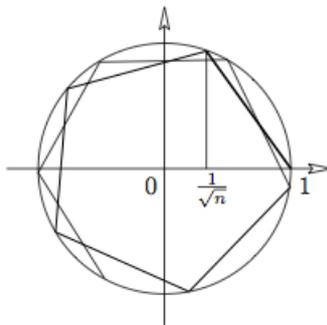


Figura 2.1: Poligonale che non si chiude in se stessa, tratta da 'Proofs from the Book'

La dimostrazione è per assurdo (cfr. [1]). Si noti, inoltre, che la dimostrazione che segue fa uso soltanto di metodi di trigonometria elementare e del metodo induttivo; un'altra dimostrazione più breve, ma meno elementare sarà effettuata in seguito (cfr. capitolo 3, pag. 53 e seguenti).

Procediamo per passi.

Ricordiamo innanzitutto la seguente formula di prostaferesi:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \quad (2.2)$$

Sia $k \in \mathbb{N}$. Consideriamo

$$\alpha = (k + 1)\varphi$$

$$\beta = (k - 1)\varphi$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \varphi(k+1 + k-1) = 2\varphi k \\ \alpha - \beta &= \varphi(k+1 - k+1) = 2\varphi\end{aligned}$$

e sostituendo in (2.2) abbiamo:

$$\begin{aligned}\cos((k+1)\varphi) + \cos((k-1)\varphi) &= 2 \cos \varphi k \cdot \cos \varphi \\ \Rightarrow \cos((k+1)\varphi) &= 2 \cos \varphi k \cdot \cos \varphi - \cos((k-1)\varphi).\end{aligned}$$

Per l'angolo $\varphi_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, con $\cos \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $0 \leq \varphi_n \leq \pi$, si ottiene:

$$\cos k\varphi_n = \frac{A_k}{\sqrt{n^k}}, \quad (2.3)$$

con A_k intero non divisibile per n , $\forall k \geq 0$. Dimostriamo le (2.3) per induzione su k . Iniziamo dai casi base:

$$k = 0 \Rightarrow \cos 0 = \frac{A_0}{\sqrt{n^0}} \Rightarrow A_0 = 1 \quad (2.4)$$

$$k = 1 \Rightarrow \cos \varphi_n = \frac{A_1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{A_1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow A_1 = 1 \quad (2.5)$$

Supponiamo che valga per k , dimostriamola per $k+1$; dobbiamo, cioè, dimostrare che

$$\cos((k+1)\varphi_n) = \frac{A_{k+1}}{\sqrt{n^{k+1}}}.$$

Vediamolo.

$$\begin{aligned}\cos(k+1)\varphi_n &= 2 \cos \varphi_n \cos k\varphi_n - \cos(k-1)\varphi_n = \\ &= 2 \cos \varphi_n \frac{A_k}{\sqrt{n^k}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n^{k-1}}} = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{A_k}{\sqrt{n^k}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n^{k-1}}} = \\ &= \frac{2A_k}{\sqrt{n^{k+1}}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n^{k-1}}} = \\ &= \frac{\frac{2A_k}{\sqrt{n}} - \sqrt{n} \cdot A_{k-1}}{\sqrt{n^k}} = \\ &= \frac{2A_k - nA_{k-1}}{\sqrt{n^{k+1}}}.\end{aligned}$$

Per terminare la dimostrazione per induzione rimane, quindi, da provare che $A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}$, ovvero che $2A_k - nA_{k-1}$ è un intero non divisibile per n , $\forall k \geq 0$. Per ipotesi abbiamo $n \geq 3$ dispari. A_k non è divisibile per n , $\forall k \geq 0$, per definizione di A_k . Essendo $2A_k - nA_{k-1}$ una combinazione lineare a coefficienti interi e, ricordando che $n \geq 3$ è un numero dispari, risulta che $2A_k - nA_{k-1}$ non è divisibile per n . Abbiamo, perciò, provato la relazione (2.3).

Ora supponiamo per assurdo che $A(n)$ sia un numero razionale, ovvero che esistano p e q interi positivi, primi fra loro, tali che $A(n) = \frac{1}{\pi}\varphi_n = \frac{p}{q}$. Da quest'ultima relazione si ha $q\varphi_n = \pi p$. Applicando la funzione 'cos' ad ambo i membri si ottiene

$$\cos q\varphi_n = \frac{A_q}{\sqrt{n^q}} \quad (2.6)$$

$$\cos \pi p = \pm 1. \quad (2.7)$$

Dall'uguaglianza delle due espressioni precedenti, si ha:

$$\frac{A_q}{\sqrt{n^q}} = \pm 1 \Rightarrow A_q = \pm \sqrt{n^q}. \quad (2.8)$$

Per l'esistenza di $\frac{p}{q}$, q non può essere, ovviamente, uguale a 0; q non può essere nemmeno uguale a 1, perché se lo fosse avremmo $A_1 = \pm\sqrt{n}$, con $n \geq 3$ dispari. Per quanto visto nella relazione (2.5) deve essere $A_1 = 1$ e, chiaramente, $\pm\sqrt{n}$ è sempre diverso da 1, $\forall n \geq 3$ dispari. Concludiamo che q è sicuramente un intero positivo maggiore o uguale a 2. Da qui segue che n divide $\sqrt{n^q}$, in simboli $n|\sqrt{n^q}$. Dalla (2.8) abbiamo, inoltre, che $\sqrt{n^q}|A_q$. La relazione ' $|$ ' di divisibilità gode della proprietà transitiva¹, perciò

$$n|A_q$$

¹Se $a|b$ e $b|c$ allora $a|c$. Proviamolo. Per ipotesi abbiamo $a|b \Leftrightarrow \exists x$ tale che $b = a \cdot x$. Inoltre $b|c \Leftrightarrow \exists y$ tale che $c = b \cdot y$. Dobbiamo provare che $a|c$, ovvero che $\exists z$ tale che $c = a \cdot z$. Dalla prima abbiamo $c = b \cdot y = a \cdot x \cdot y = a \cdot (x \cdot y)$, utilizzando la seconda ipotesi e la proprietà associativa del prodotto. Chiamando $z = x \cdot y$ si arriva immediatamente alla tesi.

e questa è una contraddizione perché per ipotesi A_k non era divisibile per n , $\forall k \geq 0$.

□

2.2 Invarianti di Dehn

Sia P un poliedro. Indichiamo con M_P l'insieme di tutti gli angoli tra facce adiacenti (*angoli diedri*), insieme al numero π . Quindi, ad esempio, se come poliedro scegliamo un cubo C , l'insieme $M_C = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$, mentre per un prisma ortogonale T su un triangolo equilatero otteniamo $M_T = \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi \right\}$.

Definizione 2.1. Sia $M \subseteq \mathbb{R}$ un qualsiasi insieme finito che contenga M_P e sia $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ una qualsiasi funzione \mathbb{Q} -lineare che soddisfi $f(\pi) = 0$. Definiamo l'*invariante di Dehn* di P (rispetto ad f) il numero reale

$$D_f(P) := \sum_{s \in P} l(s) \cdot f(\alpha(s))$$

dove la somma si estende a tutti gli spigoli s del poliedro, $l(s)$ indica la lunghezza dello spigolo s ed $\alpha(s)$ è l'angolo fra le due facce che si incontrano in s .

Grazie alla linearità di f , notiamo che $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}f(\pi) = 0$ vale per qualunque funzione \mathbb{Q} -lineare f , pertanto l'invariante di Dehn di un cubo è zero per qualunque f , ossia

$$D_f(C) = 0$$

2.3 Poliedri equiscomponibili ed equicomplementabili

Definizione 2.2. Due poliedri P e Q si dicono *equiscomponibili* se esistono P_1, \dots, P_n e Q_1, \dots, Q_n poliedri tali che:

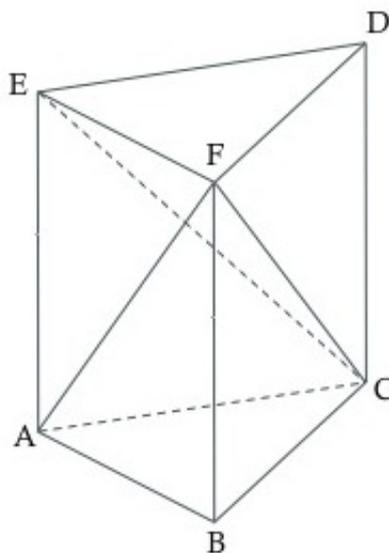
- gli interni dei P_i siano disgiunti fra loro e, analogamente, gli interni dei Q_i siano disgiunti fra loro, $\forall 1 \leq i \leq n$;
- $P_1 \cup \dots \cup P_n = P$ e $Q_1 \cup \dots \cup Q_n = Q$;
- per ogni $1 \leq i \leq n$, P_i sia congruente a Q_i (cioè esiste un moto rigido φ tale che $P_i = \varphi(Q_i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$).

Riportiamo di seguito due teoremi euclidei di geometria solida (vedi Appendice) che saranno utili nella risoluzione del terzo problema di Hilbert.

Teorema 2.3.1. *Tetraedri di ugual base e altezza sono equiscomponibili.*

Teorema 2.3.2. *Un prisma è equiscomponibile al triplo di un tetraedro avente base e altezza uguali a quelle del prisma considerato.*

Dimostrazione. Consideriamo inizialmente il caso di un prisma triangolare $ABCDEF$. Il piano ACF taglia il prisma nel tetraedro $ABCF$, avente base e altezza uguali al prisma dato, e nella piramide quadrangolare $ACFDE$. Essa è divisa a sua volta dal piano EFC nei due tetraedri $ACFE$ e $EFDC$.



Quest'ultimo tetraedro ha base e altezza uguali a quelle del prisma iniziale. Quindi, per il Teorema 2.3.1, esso è equiscomponibile al tetraedro $ABCF$.

Per quanto riguarda il terzo tetraedro $ACEF$, esso ha la base ACE uguale alla faccia EDC del tetraedro $EFDC$ e il vertice opposto F in comune con quest'ultimo. Risultano essere, quindi, due tetraedri con stessa base e stessa altezza. Quindi, per il Teorema 2.3.1, anche il tetraedro $ACFE$ risulta equiscomponibile a $EFDC$ e, quindi, ad $ABCF$.

Si conclude, quindi, che il prisma triangolare dato è equiscomponibile al triplo del tetraedro $ABCF$, che ha base e altezza uguali a quelle del prisma.

Considerando il caso di un prisma generico, esso può essere diviso in prismi triangolari, ciascuno dei quali è equiscomponibile al triplo di un tetraedro di base e altezza uguali a quelle del prisma triangolare preso in considerazione. Risulta, quindi, che la somma dei prismi triangolari, cioè il prisma iniziale, è equiscomponibile al triplo della somma dei suddetti tetraedri.

□

Il precedente teorema può essere evidentemente riscritto in questi termini: *un tetraedro è equiscomponibile alla terza parte di un prisma avente base e altezza uguali a quelle del tetraedro considerato.*

Definizione 2.3. Due poliedri P e Q si dicono *equicomplementabili* se esistono dei poliedri P_1, \dots, P_m e Q_1, \dots, Q_m tali che

- gli interni dei P_i siano disgiunti fra loro e da P e, analogamente, gli interni dei Q_i siano disgiunti fra loro e da Q ,
- P_i sia congruente a Q_i per ogni $1 \leq i \leq m$;
- $\tilde{P} := P \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$ e $\tilde{Q} := Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$ siano equiscomponibili.

Proposizione 2.3.3. *Siano dati due poliedri P e Q equiscomponibili. Allora P e Q sono equicomplementabili.*

Dimostrazione. Siano P e Q due poliedri equiscomponibili. Allora esistono P_1, \dots, P_n poliedri disgiunti fra loro e da P e Q_1, \dots, Q_n poliedri disgiunti fra loro e da Q , tali che P_i sia congruente a Q_i , $\forall 1 \leq i \leq n$. Definiamo

$\tilde{P} = P \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ e $\tilde{Q} = Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$. \tilde{P} e \tilde{Q} possono essere, quindi, scomposti in insiemi finiti di poliedri tali che P_i sia congruente a Q_i per $i = 1, \dots, n$; inoltre, essendo P e Q equiscomponibili per ipotesi, risulta che \tilde{P} e \tilde{Q} sono equiscomponibili. Inoltre i P_i sono disgiunti fra loro e da P , analogamente i Q_i sono disgiunti fra loro e da Q e P_i è congruente a Q_i $\forall 1 \leq i \leq n$. Quindi P e Q sono due poliedri equicomplementabili. \square

Notiamo che in ambito classico le due nozioni di *poliedri equiscomponibili* e *poliedri equicomplementabili* coincidono (cfr. [3]).

Utilizzando le definizioni di tetraedro equiscomponibile e tetraedro equicomplementabile, si nota che il problema di Hilbert può essere riscritto in questi termini:

trovare due tetraedri di stessa base e stessa altezza che non siano né equiscomponibili né equicomplementabili.

2.4 Il teorema di Dehn-Hadwiger

Il seguente teorema di Hadwiger (nella versione di Boltyanskii) fornisce gli strumenti per trovare tetraedri di ugual volume che non siano equicomplementabili e, quindi, nemmeno equiscomponibili. Il teorema è quello fondamentale di tutta la teoria di Dehn-Hadwiger e spiega in che senso gli ‘invarianti di Dehn’ siano effettivamente invarianti.

Teorema 2.4.1 (Teorema di Dehn-Hadwiger). *Siano P e Q due poliedri con angoli diedri rispettivamente $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ e β_1, \dots, β_q e sia $M \subset \mathbb{R}$ un insieme finito di numeri reali, tale che*

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q, \pi\} \subseteq M.$$

Sia $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ una funzione \mathbb{Q} -lineare tale che $f(\pi) = 0$ e tale che

$$D_f(P) \neq D_f(Q).$$

Allora P e Q non sono equicomplementabili.

Dimostrazione. Supponiamo che P si possa scomporre in un insieme finito di poliedri P_1, \dots, P_n tali che $\bigcup_{i=1}^n P_i = P$ e tali che non ci siano punti interni comuni. Supponiamo, inoltre, che π e tutti gli angoli diedri dei singoli poliedri P_1, \dots, P_n siano contenuti nell'insieme M . Sia f la funzione \mathbb{Q} -lineare definita nel teorema, cioè $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$. Dimostriamo che l'invariante di Dehn rispetto ad f di un qualsiasi poliedro P è uguale alla somma degli invarianti delle parti P_i che costituiscono P :

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2) + \dots + D_f(P_n).$$

Gli spigoli delle parti P_i , essendo P l'unione dei P_i per $1 \leq i \leq n$, possono essere soltanto di due tipologie differenti:

1. spigoli s' contenuti in qualche spigolo di P ;
2. spigoli s'' non necessariamente contenuti in qualche spigolo di P (interni al poliedro P o giacenti su una sua faccia)

Schema della dimostrazione

Mostreremo, inizialmente, che l'unione degli spigoli s' coincide con l'unione degli spigoli di P e, conseguentemente, la somma delle lunghezze degli spigoli s' equivale alla somma delle lunghezze degli spigoli di P . Successivamente proveremo che per un generico spigolo s' , comune a qualche P_i , gli angoli diedri dei P_i in s' si sommano nell'angolo diedro di P in s' . Inoltre si noterà che i contributi all'invariante di Dehn dei poliedri P_i corrispondenti agli spigoli s'' (interni al poliedro P o giacenti su una sua faccia) sono nulli in quanto l'angolo diedro interessato risulta un multiplo di π . Da qui seguirà che gli unici spigoli delle parti P_i coinvolti nel calcolo dell'invariante di Dehn di P sono gli spigoli s' , parti di spigoli di P .

Parte prima

In questa parte di dimostrazione proveremo la seguente relazione:

$$\sum_{s \in S'} l(s) \cdot f(\alpha(s)) = \sum_{t \in T} l(t) \cdot f(\alpha(t)) = D_f(P), \quad (2.9)$$

ovvero mostriamo che calcolare l'invariante di Dehn del poliedro P sugli spigoli t , coincide col calcolarlo negli spigoli s' , parti di spigoli t . Siano

$$T = \{ t \mid t \text{ spigolo di } P \}$$

$$S' = \{ s' \mid s' \text{ spigolo } s \text{ di } P_i \text{ contenuti in spigoli di } P \}$$

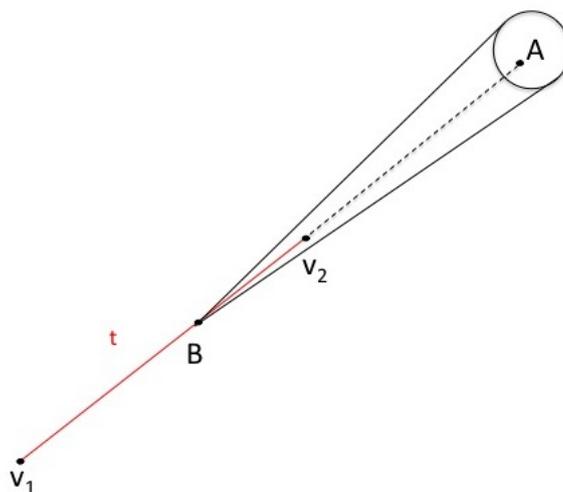
$$S'' = \{ s'' \mid s'' \text{ non necessariamente contenuto in uno spigolo di } P \}$$

$$S = \{ s \mid s \text{ spigolo di } P_i, \text{ per qualche } i \}$$

Dimostriamo la (2.9) a passi:

1. Sia t uno spigolo del poliedro P e sia A un punto sulla retta su cui giace t . Se $A \notin t$, allora $A \notin P$.

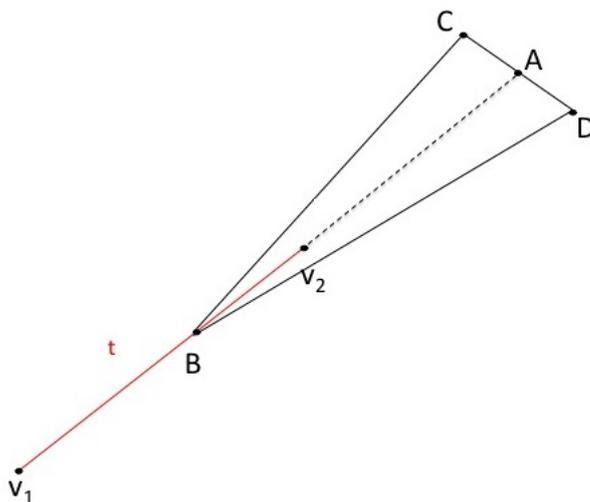
Infatti, consideriamo un punto B , interno a t , cioè tale che B sia non vertice di t . Supponiamo per assurdo che A sia interno a P . Sia, inoltre, K un disco di centro A e contenuto in P . Il cono di base K e vertice B contiene punti di t .



Tali punti risultano perciò interni al poliedro P . Ma questa è una contraddizione perché t è uno spigolo di P e in quanto tale è costituito da punti del bordo di P .

Viceversa, supponiamo per assurdo che A sia sul bordo di P , interno ad una faccia di P . Consideriamo due punti C e D , allineati con A e

interni alla stessa faccia, in modo che A appartenga al segmento aperto CD .



In questo modo il triangolo BCD è in P e ci sono dei punti di t interni al triangolo BCD che sono allineati con t (e con il segmento BA). Ma questa è una contraddizione perché t , essendo uno spigolo di P , non può essere interno a P .

2. Da 1. segue immediatamente che se uno spigolo s di un poliedro P_i ha punti interni in t , allora s è contenuto in t . Così:

$$S' = \{ \text{segmenti che hanno punti interni contenuti in } t \}.$$

3. Sia t uno spigolo di P . Allora t è contenuto nell'unione di un numero finito di spigoli $s \in S'$ e risulta:

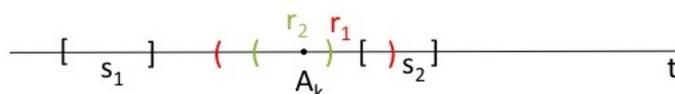
$$\bigcup \{ t \mid t \text{ spigolo di } P \} = \bigcup \{ s \mid s \in S' \}.$$

Infatti se così non fosse, esisterebbe un punto x che sta in t , ma che non sta nell'unione degli spigoli $s \in S'$. Questo significa che x non è un punto interno ad alcuno degli spigoli $s \in S'$.

Supponiamo che x giaccia in una faccia di qualche P_i . Allora x giace su una qualche faccia di P , essendo P_i parte di P . Ma questa è una contraddizione perché $x \in t$, spigolo di P .

Supponiamo, ora, che x sia interno ad uno dei P_i , per qualche indice i . Risulta chiaramente x interno a P . Anche in questo caso abbiamo una contraddizione perché $x \in t$, spigolo di P .

Infine, potrebbe succedere che t sia ricoperto da spigoli $s_i \in S'$, per qualche indice i , con l'aggiunta di qualche punto A_k , vertice di segmenti s non necessariamente contenuti in S' .



Supponiamo che A_k sia interno a t . Se s_1 , che è un chiuso, non contiene A_k come punto interno, allora esiste in t un segmento r_1 aperto che contiene A_k come punto interno e che non interseca s_1 . Se nessuno degli spigoli contiene A_k , allora possiamo continuare il ragionamento con s_2, \dots, s_m e trovare analoghi segmenti aperti r_2, \dots, r_m , che contengono al loro interno A_k . L'intersezione di tutti gli r_j , per $1 \leq j \leq m$, individuerà un segmento aperto r che contiene A_k come punto interno. Risulta, quindi, che r è un segmento aperto che contiene A_k come punto interno, a sua volta non contenuto, come punto interno, in nessuno degli spigoli s . Ma questo è assurdo perché gli spigoli s mi ricoprono t a meno di un numero finito di punti. Se, poi, A_r non fosse interno a t , si ragiona in maniera del tutto analoga, con interni destri o sinistri².

²Riportiamo di seguito un'altra dimostrazione, più semplice, ma meno 'euclidea'.

Siano s_1, \dots, s_m gli spigoli di S' contenuti in t . Si ha $t = s_1 \cup \dots \cup s_m \cup A_1 \cup \dots \cup A_k$, con $A_1 \cup \dots \cup A_k$ chiuso. Assumiamo per assurdo che questi punti non siano in qualche s_i . Questo implica che $(s_1 \cup \dots \cup s_m) \cap (A_1 \cup \dots \cup A_k) = \emptyset$. Ora, $s_1 \cup \dots \cup s_m$ è un chiuso, in quanto unione finita di chiusi e non è vuoto. Anche $A_1 \cup \dots \cup A_k$ è chiuso. Dato che t è connesso dovrebbe risultare $A_1 \cup \dots \cup A_k$ vuoto. Assurdo.

4. Ogni spigolo t di P risulta decomposto in un numero finito di segmenti d aventi in comune a due a due al più gli estremi, e tali che:
- ogni spigolo s di S' sia unione finita di tali segmenti d ;
 - ogni segmento d sia contenuto in uno spigolo $s \in S'$.

Otteniamo i segmenti d decomponendo gli spigoli t in segmenti corrispondenti agli estremi degli spigoli s di S' , contenuti in t .

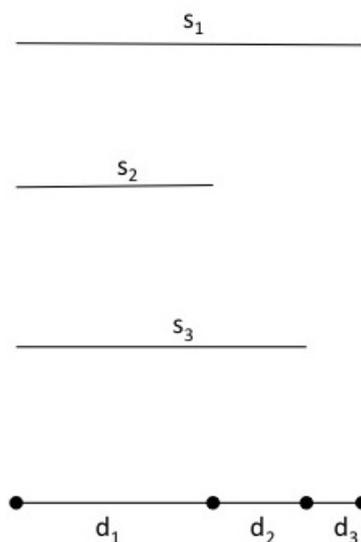


Figura 2.2: Costruzione dei segmenti d

Notiamo che giustapponendo più segmenti d contenuti nel medesimo spigolo t , si ottiene esattamente t . Inoltre, per ogni segmento d , la somma degli angoli diedri coincide con l'angolo diedro di P .

5. Dimostriamo finalmente che

$$\sum_{s \in S'} l(s) \cdot f(\alpha(s)) = \sum_{t \in T} l(t) \cdot f(\alpha(t)) = D_f(P).$$

Fissiamo uno spigolo t del poliedro P . Siano poi s_1, \dots, s_n gli spigoli dei poliedri P_i , per $1 \leq i \leq n$, contenuti nello spigolo t . L'unione di

tali s_i è esattamente t , ma essi possono avere, chiaramente, intersezioni non vuote. Definiamo, quindi, per qualche indice j e k ,

$$S_1 = \{d \mid d \subset s_1\}, \dots, S_n = \{d \mid d \subset s_n\}$$

e poniamo

$$D_1 = \{s_j \mid d_1 \subset s_j\}, \dots, D_k = \{s_j \mid d_k \subset s_j\}.$$

Ricordando che gli angoli diedri in s_j si sommano nell'angolo diedro di P , osserviamo che per gli spigoli $s_j \in D_1$ vale

$$\sum_{s_j \in D_1} f(\alpha(s_j)) = f(\alpha(t)), \dots, \sum_{s_j \in D_k} f(\alpha(s_j)) = f(\alpha(t)).$$

Consideriamo, ora,

$$l(s_1) \cdot f(\alpha(s_1)) + \dots + l(s_n) \cdot f(\alpha(s_n)). \quad (2.10)$$

Notiamo che la lunghezza degli spigoli s_j , per qualche indice j , può essere vista come la somma delle lunghezze dei segmenti $d \in s_j$. In altre parole, la (2.10) diventa:

$$\sum_{d \in S_1} l(d) \cdot f(\alpha(s_1)) + \dots + \sum_{d \in S_n} l(d) \cdot f(\alpha(s_n)).$$

ovvero

$$l(d_1)f(\alpha(s_1)) + \dots + l(d_k)f(\alpha(s_1)) + l(d_1)f(\alpha(s_n)) + \dots + l(d_k)f(\alpha(s_n))$$

Ora raccogliamo in modo diverso considerando che uno stesso segmento d_i , per qualche indice i , si ritrova nel calcolo di diversi f-valori di uno stesso angolo diedro. Si ha, cioè:

$$\begin{aligned} & l(d_1) \sum_{s \in D_1} f(\alpha(s)) + \dots + l(d_k) \sum_{s \in D_k} f(\alpha(s)) = \\ & = l(d_1) \cdot f(\alpha(t)) + \dots + l(d_k) \cdot f(\alpha(t)) \\ & = l(t) \cdot f(\alpha(t)). \end{aligned}$$

Quindi si ha che per ogni t , esso è ricoperto da un opportuno insieme di spigoli R_t . Si ha, inoltre, che

$$\bigcup_{t \in T} R_t = S'.$$

Quindi risulta dimostrata la (2.9).

Parte seconda

Analizzato il caso in cui uno spigolo di un poliedro P_i , per $1 \leq i \leq n$, sia parte di uno spigolo di P , rimane da dimostrare il caso in cui uno spigolo di P_i sia interno a P o giacente all'interno di una faccia di P . Sia s'' uno spigolo di questo tipo. In questo particolare caso gli angoli diedri in s'' si sommano in π , nel caso in cui lo spigolo considerato sia interno alla faccia di P , e in 2π , nel caso in cui lo spigolo sia interno a P . Questo risultato segue dal fatto che P è scomposto in P_1, \dots, P_n poliedri tali che $P_1 \cup \dots \cup P_n = P$; in altre parole, facendo l'unione delle parti P_i per $1 \leq i \leq n$ non risultano 'spazi vuoti' né sulle facce di P , né all'interno di P . Trattandosi, poi, di π e 2π , l'f-valore dell'angolo diedro risulta nullo:

$$f(\pi) = 0; \quad f(2\pi) = 2f(\pi) = 0.$$

In conclusione, indicando con s'_i gli spigoli s' appartenenti all' i -esimo poliedro otteniamo:

$$\begin{aligned} D_f(P) &= \sum_{s'_i \in S'} l(s_i) \cdot f(\alpha(s_i)) \\ &= D_f(P_1) + \dots + D_f(P_n). \end{aligned}$$

Supponiamo, ora, per assurdo che P e Q siano due poliedri equicomplementabili. Estendiamo M ad M' , tale che contenga tutti gli angoli diedri delle singole parti P_i e Q_i , per $1 \leq i \leq m$. M' è un insieme finito in quanto la scomposizione di P e Q è una scomposizione finita. Il Lemma 2.1.1, precedentemente esposto e dimostrato, permette di estendere f ad un'altra funzione \mathbb{Q} -lineare $f' : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$. Ricordando il risultato precedente, cioè che gli invarianti di Dehn di due poliedri equiscomponibili sono uguali, si ottiene:

$$D_{f'}(P) + D_{f'}(P_1) + \dots + D_{f'}(P_m) = D_{f'}(Q) + D_{f'}(Q_1) + \dots + D_{f'}(Q_m),$$

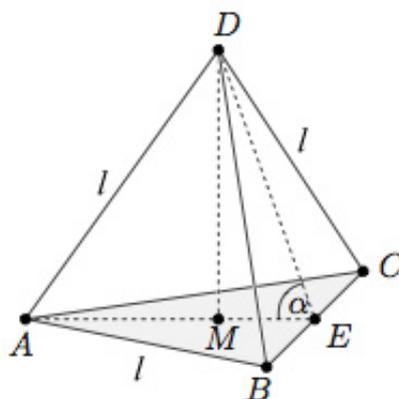
con $D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i)$ in quanto P_i è congruente a Q_i per tutti gli indici i . Quindi $D_{f'}(P) = D_{f'}(Q)$, da cui $D_f(P) = D_f(Q)$, il che è un assurdo poiché per ipotesi gli invarianti di Dehn associati a P e a Q erano diversi.

□

2.5 Conclusione della dimostrazione di Dehn-Hadwiger: calcolo di particolari invarianti

2.5.1 Tetraedro regolare e suoi invarianti di Dehn

Consideriamo un tetraedro regolare T_0 con spigoli di lunghezza l . Calcoliamo l'angolo diedro α rappresentato in figura.



M rappresenta l'ortocentro del triangolo di base ABC. Come tale, M divide l'altezza AE dello stesso triangolo in tre parti uguali. Infatti $|ME| = \frac{1}{2}|AM|$ e, considerando, inoltre, che $|AM| + |ME| = |AE|$, si trova esattamente che $|ME| = \frac{1}{3}|AE|$. La trigonometria suggerisce, inoltre, che $|ME| = DE \cos \alpha$, ma poiché $|AE| = |DE|$, troviamo $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ e dunque

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Ponendo $M = \{\alpha, \pi\}$ notiamo che il rapporto

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$$

è irrazionale, per il Teorema (2.1.1) con $n = 9$. Così lo spazio vettoriale $V(M)$ ha dimensione 2 perché α e π non sono commensurabili; una sua base è costituita proprio da M .

Sia, quindi, $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ una funzione \mathbb{Q} -lineare definita da

$$f(\alpha) := 1, \quad f(\pi) := 0.$$

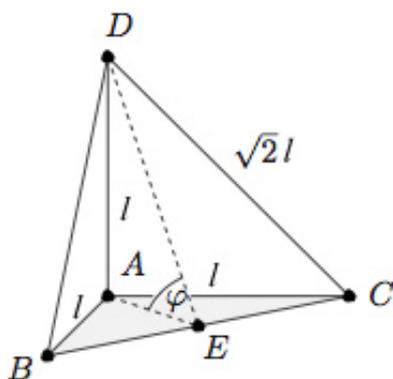
Calcolando l'invariante di Dehn di T_0 , rispetto ad f , otteniamo che

$$D_f(T_0) = 6lf(\alpha) = 6l \neq 0.$$

Quindi un tetraedro regolare non è equicomplementabile (e quindi nemmeno equiscomponibile) con un cubo perché l'invariante di Dehn di un cubo risulta essere nullo per qualsiasi f .

2.5.2 Tetraedro individuato da tre spigoli concorrenti ortogonali e suoi invarianti di Dehn

Sia T_1 un tetraedro individuato da tre spigoli concorrenti ortogonali AB, AC, AD di lunghezza l , come mostrato in figura.



Tale tetraedro ha tre angoli diedri retti ed altri tre di ampiezza φ . Calcoliamo l'ampiezza φ . Considerando E il punto medio del lato BC del triangolo di base ABC e, sfruttando la trigonometria, si ottiene l'uguaglianza seguente $|EA| = |DE| \cos \varphi$, cioè

$$\cos \varphi = \frac{|AE|}{|DE|}. \quad (2.11)$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo in E ABE , si trova

$$|AE| = \sqrt{l^2 - \frac{1}{2} l^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} l.$$

Analogamente per $|DE|$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo in A , si trova

$$|DE| = \sqrt{l^2 + \frac{1}{2} l^2} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2} l.$$

Sostituendo in (2.11) ed, effettuando banali semplificazioni, si ottiene

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Definendo $M = \left\{ \frac{\pi}{2}, \varphi, \pi \right\}$, lo spazio \mathbb{Q} -vettoriale $V(M)$ ha dimensione 2 perché π e $\frac{\pi}{2}$ sono proporzionali, con indice di proporzionalità razionale. Così, una base di $V(M)$ risulta essere $\{\varphi, \pi\}$, poiché φ e π non sono commensurabili.

Come prima, definiamo una funzione \mathbb{Q} -lineare $f : V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ tale che

$$f(\varphi) = 1, \quad f(\pi) = 0$$

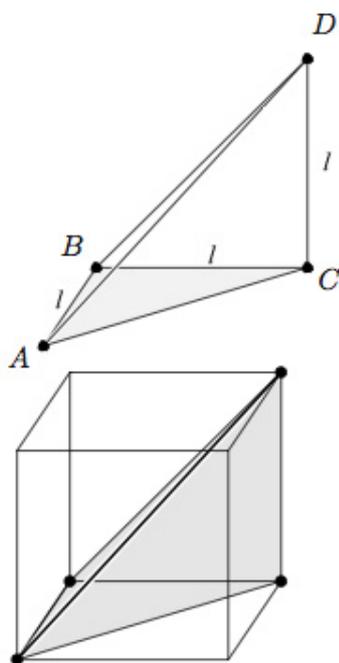
da cui si nota facilmente che $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Calcolando l'invariante di Dehn di T_1 , rispetto a f , troviamo

$$D_f(T_1) = 3lf\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3l\sqrt{2}f\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3l\sqrt{2} \neq 0.$$

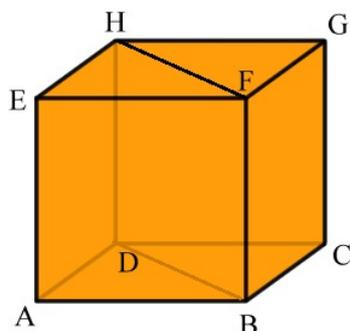
Quindi, analogamente a prima, abbiamo dimostrato che T_1 non è equiscomponibile ed equicomplementabile con un cubo C poiché l'invariante di Dehn di un generico cubo si annulla sempre, qualunque sia la funzione f .

2.5.3 Ortoschema e suoi invarianti di Dehn

Sia T_2 un tetraedro individuato da tre spigoli consecutivi AB , BC e CD ortogonali fra loro (ortoschema) e di uguale lunghezza l .

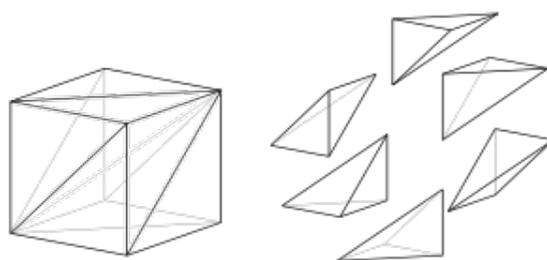


In questo caso, non calcoliamo gli angoli diedri (che sarebbero $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$), ma affrontiamo il problema da un'altra prospettiva. Notiamo che un ortoschema non è altro che la sesta parte di un cubo di spigolo l . Questo risultato deriva direttamente dal Teorema 2.3.2. Infatti un qualsiasi cubo può essere tagliato in due prismi equivalenti. Facendo riferimento alla figura sottostante, il piano HFD 'spezza' il cubo nei due prismi triangolari $ABFHED$ e $BCDFGH$ di altezza l .



Per il Teorema 2.3.2, ognuno dei due prismi è equivalente al triplo di un tetraedro T_2 avente base e altezza uguali a quelle del prisma considerato. Quindi, il cubo di spigolo l è esattamente la somma di 6 tetraedri aventi stessa base e stessa altezza del prisma triangolare. Quindi, per ogni funzione \mathbb{Q} -lineare f risulta

$$D_f(T_2) = \frac{1}{6}D_f(C) = 0$$



Riassumendo, si sono trovati due tetraedri T_1 e T_2 aventi stessa base e stessa altezza, con invarianti di Dehn differenti, ovvero $D_f(T_1) \neq D_f(T_2)$. Dal teorema di Dehn-Hadwiger segue che T_1 e T_2 non sono equicomplementabili e quindi nemmeno equiscomponibili. Risulta così risolto il terzo problema di Hilbert.

Capitolo 3

L'invariante di Dehn-Hartshorne

La dimostrazione di Dehn-Hadwiger non è stata la sola tentata e nemmeno l'unica degna di nota. Altra dimostrazione della congettura di Hilbert è stata proposta dal matematico statunitense Hartshorne (cfr. [14]): è una dimostrazione più veloce, ma che utilizza concetti più complessi, presi dall'algebra e dall'analisi, quali le estensioni di campi e teoria di Galois, polinomio ciclotomico e radici q -esime dell'unità. Quello che si fa, sostanzialmente, è definire un *invariante* (che noi chiameremo 'invariante di Dehn-Hartshorne') come elemento di un gruppo abeliano $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z})$ e relative proprietà. Il punto centrale della dimostrazione è pur sempre quello di mostrare che se due poliedri non hanno stesso invariante di Dehn-Hartshorne, allora non sono equiscomponibili. I poliedri su cui si basa l'intero discorso sono un cubo e un tetraedro regolare di ugual volume. Si mostrerà, quindi, che gli invarianti dei due poliedri non possono mai coincidere poiché quello del cubo è sempre nullo, mentre quello del tetraedro regolare non lo è mai poiché $\arccos \frac{1}{3}$ non è commensurabile con π . Quest'ultimo passaggio viene provato utilizzando concetti presi dall'algebra di Galois e dall'analisi dei numeri complessi. Anche se è una dimostrazione forse più complessa di quella riportata nel capitolo precedente, la dimostrazione presentata da Hartshorne è assai lineare

e probabilmente risolve al meglio il problema di Hilbert.

3.1 Il gruppo abeliano G

Definizione 3.1. Sia G l'insieme definito da

$$\sum_{i=1}^n (a_i, \alpha_i) = (a_1, \alpha_1) + (a_2, \alpha_2) + \cdots + (a_n, \alpha_n),$$

dove $a_i \in \mathbb{R}$ per tutti gli indici $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ e α_i sono numeri reali modulo π , cioè $\alpha_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$, modulo la relazione d'equivalenza generata dalle due seguenti operazioni:

$$(a, \alpha) + (a, \beta) = (a, \alpha + \beta), \quad (3.1)$$

$$(a, \alpha) + (b, \alpha) = (a + b, \alpha). \quad (3.2)$$

Dati due elementi $\sum_{i=1}^n (a_i, \alpha_i) \in G$ e $\sum_{j=1}^n (b_j, \beta_j) \in G$, definiamo l'addizione come segue:

$$\sum_{i=1}^n (a_i, \alpha_i) + \sum_{j=1}^n (b_j, \beta_j).$$

In questo modo l'addizione risulta un'operazione commutativa e associativa.

Lemma 3.1.1. G è un gruppo abeliano (denominato 'prodotto tensoriale' $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$).

Dimostrazione. Per mostrare che G è un gruppo abeliano dobbiamo provare l'esistenza dell'elemento neutro e degli inversi, in quanto l'associatività e la commutatività risultano già state verificate.

Come prima cosa notiamo che $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (a, 0) &= (a, 0) + (0, 0) \\ &= (a, 0) + (a, 0) + (-a, 0) \\ &= (a, 0) + (-a, 0) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

utilizzando le proprietà (3.1) e (3.2). Analogamente, si può mostrare che $(0, \alpha) = (0, 0) \forall \alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}$. Sia ora $O = (0, 0)$. Mostriamo che O è l'elemento neutro. Sia (a, α) un generico elemento di G ,

$$\begin{aligned} O + (a, \alpha) &= (0, 0) + (a, \alpha) \\ &= (a, 0) + (a, \alpha) \\ &= (a, \alpha) \end{aligned}$$

Questo mostra che O è l'elemento neutro dell'addizione. Rimane da dimostrare che ogni elemento di G ha il suo simmetrico rispetto all'addizione.

Sia, quindi, $(a, \alpha) \in G$. Notiamo che:

$$\begin{aligned} (a, \alpha) + (-a, \alpha) &= (0, \alpha) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

cioè $(-a, \alpha)$ è il simmetrico di (a, α) rispetto all'operazione di somma. In conclusione G è un gruppo abeliano. Per comodità indichiamo l'elemento neutro O con 0.

□

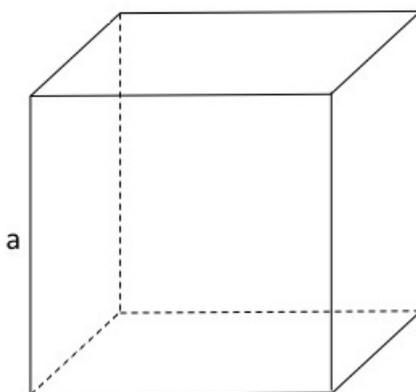
3.2 Invariante di Dehn-Hartshorne

Definizione 3.2. Sia P un poliedro in \mathbb{R}^3 . Definiamo l'*invariante di Dehn-Hartshorne* di P l'elemento $\delta(P) \in G$ come segue. Sia a la lunghezza di un generico spigolo di P e sia α l'angolo diedro (misurato tagliando lo spigolo a con un piano ortogonale ad esso) all'interno del solido individuato dai due piani che si incontrano nello spigolo considerato. Prendiamo α in radianti e riduciamo $(\text{mod } \pi)$. Supponiamo che il poliedro P abbia n spigoli e, conseguentemente, n angoli diedri. Definiamo, quindi,

$$\delta(P) = \sum_{i=1}^n (a_i, \alpha_i)$$

Esempio 3.1. *Cubo*

Sia P un cubo con spigoli di lunghezza a .



Ricordando che il cubo ha 12 spigoli, tutti di ugual lunghezza e che gli angoli diedri misurano tutti $\frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$\delta(P) = 12 \left(a, \frac{\pi}{2} \right).$$

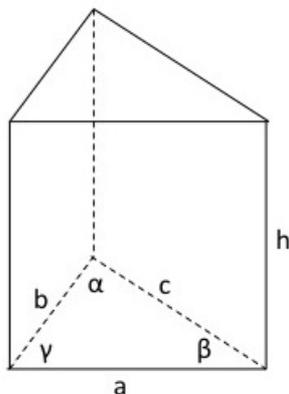
L'invariante di Dehn-Hartshorne $\delta(P)$ è un elemento del gruppo abeliano G , quindi

$$\begin{aligned} \left(a, \frac{\pi}{2} \right) &= \left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \left(\frac{a}{2}, \pi \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

In altre parole, l'invariante di Dehn-Hartshorne di un cubo è nullo. Si può generalizzare l'intero discorso e mostrare che l'invariante di Dehn-Hartshorne di un qualsiasi parallelepipedo rettangolo è nulla.

Esempio 3.2. *Prisma retto triangolare*

Sia P un prisma retto triangolare. Siano a, b, c gli spigoli del triangolo di base, siano α, β, γ gli angoli del triangolo di base e sia h l'altezza, come mostrato in figura.



Allora

$$\begin{aligned}
 \delta(P) &= 2\left(a, \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(b, \frac{\pi}{2}\right) + 2\left(c, \frac{\pi}{2}\right) + (h, \alpha) + (h, \beta) + (h, \gamma) \\
 &= (h, \alpha) + (h, \beta) + (h, \gamma) \\
 &= (h, \pi) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Quindi, anche in questo caso un prisma retto ha invariante di Dehn-Hartshorne pari a 0.

3.2.1 Proprietà dell'invariante di Dehn-Hartshorne

Proposizione 3.2.1 (Proprietà di δ). *Siano P_1 e P_2 due poliedri.*

1. *Se P_1 e P_2 sono congruenti, allora $\delta(P_1) = \delta(P_2)$.*
2. *Se P_1 e P_2 non hanno interni comuni, allora*

$$\delta(P_1 \cup P_2) = \delta(P_1) + \delta(P_2)$$

Dimostrazione. La proprietà numero 1 è ovvia poiché solidi congruenti hanno spigoli congruenti e angoli diedri congruenti. Dimostriamo, quindi, la seconda proprietà. Sono vari i casi in cui due qualsiasi poliedri possono unirsi per formarne uno unico, ma considereremo soltanto tre casi poiché gli altri possono essere ricondotti ad essi.

- *Caso 1:* uno spigolo di P_1 e uno spigolo di P_2 possono essere uniti in modo da formare un unico spigolo di $P_1 \cup P_2$. In questo modo, l'angolo diedro α associato al nuovo spigolo di $P_1 \cup P_2$ risulta essere la somma di α_1 e α_2 , singoli angoli diedri di P_1 e P_2 . Così, considerando che a sia la lunghezza dello spigolo, si ottiene la seguente relazione nel gruppo G : $(a, \alpha_1 + \alpha_2) = (a, \alpha_1) + (a, \alpha_2)$, cioè i contributi a δ sono gli stessi.

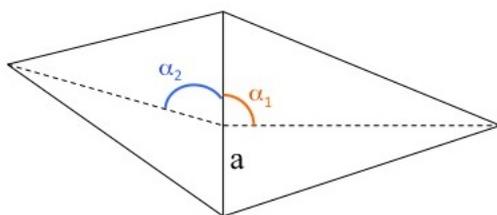


Figura 3.1: Caso 1

- *Caso 2:* due spigoli di P_1 di lunghezza a ed uno di P_2 di lunghezza b aventi stesso angolo diedro, possono essere uniti in modo da formare un unico spigolo di $P_1 \cup P_2$ di lunghezza $a + b$. Poiché in G vale che $(a + b, \alpha) = (a, \alpha) + (b, \alpha)$, i contributi a δ risultano essere gli stessi.

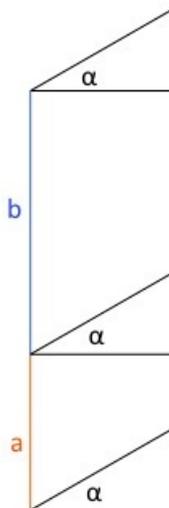


Figura 3.2: Caso 2

- *Caso 3:* due spigoli di P_1 e P_2 di lunghezza a possono essere uniti in modo da formare un'unica faccia di $P_1 \cup P_2$. In questo particolare caso, non c'è uno spigolo corrispondente in $P_1 \cup P_2$, ma gli angoli diedri α_1 e α_2 di P_1 e P_2 si sommano in π . Poiché in G vale che $(a, \alpha_1) + (a, \alpha_2) = (a, \pi) = 0$, il contributo a δ non cambia.

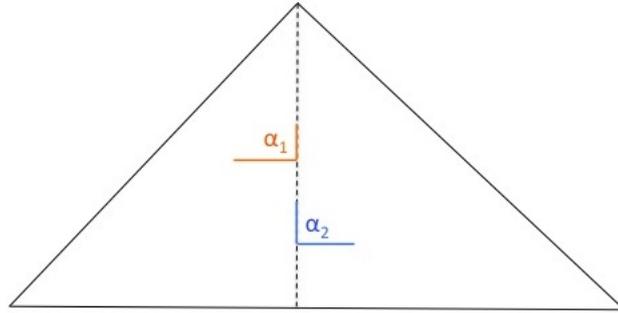


Figura 3.3: Caso 3

□

Lemma 3.2.1. *Un elemento $(a, \alpha) \in G$ è 0 se e solo se $a = 0$ oppure α è un multiplo razionale di π , cioè $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$.*

Dimostrazione. Iniziamo col dimostrare la condizione sufficiente e supponiamo che $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$. Allora $\alpha = \frac{r}{s}\pi$, dove $r, s \in \mathbb{Z}$ con $s \neq 0$. Un generico elemento $(a, \alpha) \in G$ può essere scritto come

$$\begin{aligned} (a, \alpha) &= \underbrace{\left(\frac{1}{s}a, \alpha\right) + \left(\frac{1}{s}a, \alpha\right) + \left(\frac{1}{s}a, \alpha\right) + \cdots + \left(\frac{1}{s}a, \alpha\right)}_{s \text{ volte}} \\ &= s \left(\frac{1}{s}a, \alpha\right) = \left(\frac{1}{s}a, s\alpha\right) = \left(\frac{1}{s}a, r\pi\right) = 0 \end{aligned}$$

Inoltre notiamo che se a fosse uguale a 0 seguirebbe immediatamente che $(a, \alpha) = 0$.

Rimane da provare la condizione necessaria. Per ipotesi $(a, \alpha) = 0$; supponiamo, inoltre, che $a \neq 0$; dobbiamo dimostrare che $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$. A tal scopo definiamo un omomorfismo di gruppi $\phi : G \longrightarrow \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$. Intendendo \mathbb{R} come spazio vettoriale su \mathbb{Q} , dato che $a \neq 0$, risulta che $a\mathbb{Q}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Ora scegliamo un sottospazio vettoriale V tale che ogni $b \in \mathbb{R}$ può essere scritto in modo univoco nella forma:

$$b = r a + v,$$

con $r \in \mathbb{Q}$ e $v \in V$. Ogni elemento $g \in G$ può essere scritto nella seguente forma:

$$g = \sum (b_i, \beta_i),$$

dove $b_i = r_i a + v_i$, con $r_i \in \mathbb{Q}$ e $v_i \in V$. Definiamo finalmente

$$\phi(g) = \sum r_i \beta_i \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}.$$

Dobbiamo dimostrare che la funzione ϕ è ben definita. Innanzitutto notiamo che se $\beta_i \in \pi\mathbb{Z}$, allora $r_i \beta_i \in \pi\mathbb{Q}$, così ϕ è ben definita su $\beta_i(\text{mod}\pi)$. Dobbiamo, inoltre, verificare che ϕ rispetta la relazione d'equivalenza utilizzata per definire il gruppo abeliano G . Dobbiamo dimostrare, cioè, che

$$1. \text{ se } (b, \beta) = (b_1, \beta) + (b_2, \beta) \Rightarrow \phi(b, \beta) = \phi(b_1, \beta) + \phi(b_2, \beta)$$

$$2. \text{ se } (b, \beta) = (b, \beta_1) + (b, \beta_2) \Rightarrow \phi(b, \beta) = \phi(b, \beta_1) + \phi(b, \beta_2)$$

Cominciamo col dimostrare la prima. Sia, quindi,

$$(b, \beta) = (b_1, \beta) + (b_2, \beta)$$

con

$$b_1 = r_2 a + v_1$$

$$b_2 = r_2 a + v_2,$$

allora

$$b = (r_1 + r_2) a + (v_1 + v_2)$$

e, applicando ϕ si ottiene

$$\phi(b, \beta) = (r_1 + r_2)\beta = r_1\beta + r_2\beta = \phi(b_1, \beta) + \phi(b_2, \beta).$$

Per dimostrare la seconda, si procede in modo del tutto analogo. Sia

$$(b, \beta) = (b, \beta_1) + (b, \beta_2),$$

con $b = r a + v$, allora

$$\phi(b, \beta) = r(\beta_1 + \beta_2) = r\beta_1 + r\beta_2 = \phi(b, \beta_1) + \phi(b, \beta_2).$$

In questo modo, l'omomorfismo ϕ risulta ben definito. Ora osserviamo che $a = 1 \cdot a + 0$, quindi $\phi(a, \alpha) = 1 \cdot \alpha + 0 = \alpha \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$. Quindi, se $(a, \alpha) = (0, 0) \in G$, allora segue immediatamente che $\phi(a, \alpha) = 0 \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$, da cui $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, che era proprio quello che si voleva dimostrare.

□

3.3 Il teorema di Dehn

Si è, quindi, definito l'invariante di Dehn-Hartshorne e le proprietà di cui gode. Come già accennato, gli invarianti di Dehn-Hartshorne di due figure congruenti coincidono; in particolare, due poliedri equiscomponibili o equicomplementabili hanno stesso invariante di Dehn-Hartshorne. Questo permette di asserire che se due poliedri non hanno stesso invariante di Dehn-Hartshorne non sono né equiscomponibili né equicomplementabili.

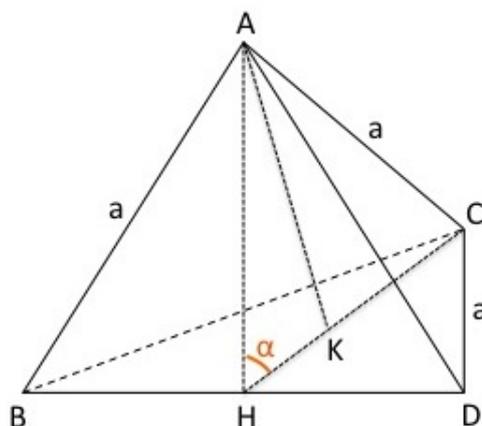
Teorema 3.3.1 (Soluzione di Dehn al terzo problema di Hilbert). *In \mathbb{R}^3 un cubo e un tetraedro regolare non sono equiscomponibili poiché l'invariante di Dehn-Hartshorne di un cubo è nullo, mentre quello del tetraedro regolare non lo è mai.*

Notiamo, innanzitutto, che nell'ambito della dimostrazione, dimostreremo di nuovo l'incommensurabilità di π e $\arccos \frac{1}{3}$, questa volta utilizzando qualche richiamo alla teoria di Galois.

Dimostrazione. Due figure equiscomponibili hanno lo stesso invariante di Dehn-Hartshorne. Dato che l'invariante di Dehn-Hartshorne di un cubo è nullo, basta provare che l'invariante di Dehn-Hartshorne di un tetraedro regolare non è mai nullo. Sia, quindi, P un tetraedro regolare di spigolo a . Chiaramente, grazie alla regolarità, ogni spigolo del tetraedro ha lunghezza a e i rispettivi angoli diedri risultano essere tutti della medesima ampiezza, α . L'invariante di Dehn di questo particolare tetraedro è esattamente

$$\delta(P) = 6(a, \alpha).$$

L'obiettivo è determinare l'ampiezza dell'angolo α .



A tal scopo tracciamo l'altezza del triangolo di base BCD e l'altezza AH del triangolo ABD . In questo modo si ottiene un altro triangolo AHC con

$$AC = a$$

$$AH = HC = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

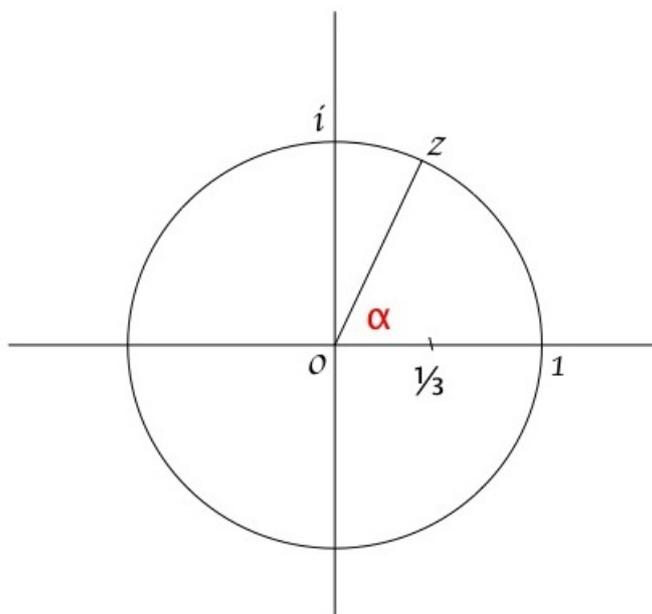
Poi, la perpendicolare alla faccia BCD tracciata da A intercetta in K l'altezza CH . Il punto K risulta equidistante da A, B e C , quindi

$$HK = \frac{1}{3}HC.$$

Dalla trigonometria si ha

$$HK = AH \cos \alpha \Rightarrow \frac{1}{3}HC = HC \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Quindi, $\delta(P) = 6(a, \arccos \frac{1}{3})$. Dal Lemma 3.2.1 segue che l'invariante di Dehn-Hartshorne di un tetraedro regolare è nullo se e soltanto se $a = 0$ oppure α è un multiplo razionale di π . Chiaramente $a \neq 0$, quindi rimane da provare che $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. Come prima cosa notiamo che se $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ allora, ricordando che $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, risulta $\sin \alpha = \frac{2}{3}\sqrt{2}$.



Consideriamo il numero complesso

$$z = \cos \alpha + i \sin \alpha = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\sqrt{2}.$$

Emerge che z è una radice di un'equazione di secondo grado su \mathbb{Q} . Infatti:

$$z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i\sqrt{2} \Rightarrow \left(z - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}i\sqrt{2}\right)^2,$$

da cui, svolgendo i calcoli,

$$3z^2 - 2z + 3 = 0.$$

Quindi z genera un'estensione di grado 2 su \mathbb{Q} , che indichiamo con $\mathbb{Q}(z)$. Supponiamo, per assurdo, che α sia un multiplo razionale di π , cioè tale che $\alpha = \frac{p}{q} 2\pi$, con $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$ e coprimi. Quindi,

$$z = \cos\left(\frac{2\pi p}{q}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi p}{q}\right);$$

in altre parole z è una delle radici primitive q -esime dell'unità. Ricordiamo che si dicono **radici primitive q -esime dell'unità** tutte quelle radici che generano il gruppo delle radici q -esime dell'unità. In altre parole, dire che z è una radice primitiva q -esima dell'unità equivale a dire che q è il minimo esponente al quale bisogna elevare z per ottenere l'unità, cioè

$$z^q = 1.$$

Il numero di radici primitive q -esime dell'unità è pari al numero $\varphi(q)$ (funzione di Eulero) di interi positivi minori di q e primi con q . In questo caso il polinomio minimo di z su \mathbb{Q} sarà il *polinomio ciclotomico*:

$$\Phi_q(z) = \prod_{i=1}^{\varphi(q)} (z - \omega_i^{(q)}),$$

dove $\omega_1^{(q)}, \dots, \omega_{\varphi(q)}^{(q)}$ sono le radici primitive q -esime dell'unità. Immediatamente notiamo che il polinomio ciclotomico ha grado $\varphi(q)$. Nel nostro caso il polinomio minimo di z ha grado 2 su \mathbb{Q} ; anche $\Phi_q(z)$ deve avere grado 2, quindi $\varphi(q) = 2$. L'obiettivo è, quindi, quello di determinare q sapendo che i numeri interi positivi compresi fra 1 e q e primi con q sono soltanto 2. Effettuando i necessari calcoli, si trovano 3 valori possibili di q , cioè 3, 4 e 6. Infatti, ad esempio, $\varphi(3) = 2$ poiché i numeri minori di 3 e primi con 3 sono 1 e 2, cioè 2 in totale; lo stesso ragionamento lo facciamo con i numeri successivi, fermandoci a 6, poiché $\varphi(8) = 4$. Per $q = 3, 4, 6$, dato che z è

radice q -esima dell'unità, si ottiene

$$\begin{aligned}z^3 = 1 &\Rightarrow z_1 = 1; z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}; z_3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\z^4 = 1 &\Rightarrow z_1 = 1; z_2 = -1; z_3 = i; z_4 = -i \\z^6 = 1 &\Rightarrow z_1 = 1; z_2 = -1; z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \\& z_4 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}; z_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; z_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Determiniamo, quindi, le corrispondenti estensioni di \mathbb{Q} che risultano essere $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathbb{Q}(i)$ e di nuovo $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Immediatamente si nota che nessuna di queste coincide con la prima estensione $\mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$. Si è giunti, perciò, ad una contraddizione. In conclusione α non può essere un multiplo razionale di π e, conseguentemente, l'invariante di Dehn di un tetraedro regolare non si può mai annullare.

□

Appendice A

Qualche richiamo di geometria solida

Definizione A.1. Un *angoloide* ad n spigoli $\hat{V}ABC \dots K$ è la figura che, assegnato un poligono convesso (o concavo) $ABC \dots K$ e un punto V fuori dal piano di esso, è costituita dall'insieme delle semirette che hanno origine in V e vanno ai singoli punti del poligono (contorno compreso).

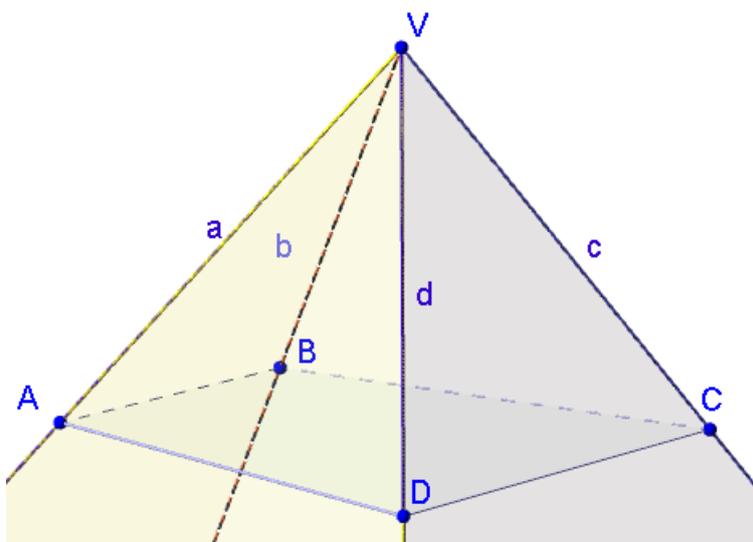


Figura A.1: Rappresentazione di un generico angoloide

Definizione A.2. Si prenda nello spazio un numero $n \geq 3$ di rette parallele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, tali che ciascuno degli n piani $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_na_1$ lasci tutte da una parte le $n - 2$ rette che non gli appartengono. La figura costituita dalle n strisce $a_1a_2, a_2a_3, \dots, a_na_1$, si chiama *superficie prismatica indefinita* mentre le n rette date si dicono *spigoli* e le n strisce *facce* della superficie. Ogni coppia di facce consecutive determina un diedro; si hanno così n diedri. La figura costituita dai punti comuni agli n diedri di una superficie prismatica indefinita, si chiama *prisma indefinito*; tale prisma si dice *triangolare* o *quadrangolare* o *pentagonale*, ecc., a seconda che il numero delle facce sia 3 o 4 o 5, ecc.

Ogni piano che intercetta uno spigolo del prisma, intercetta di conseguenza anche tutti gli altri. Evidentemente, l'intersezione di un tale piano con il prisma è un poligono (convesso) che ha tanti lati quante sono le facce del prisma. Tale intersezione prende il nome di *sezione* del prisma.

Definizione A.3. La parte di un prisma indefinito compresa fra due sezioni parallele si chiama *prisma finito*, o semplicemente *prisma*. Queste due sezioni parallele risultano uguali e prendono il nome di *basi* del prisma, mentre i parallelogrammi intercettati dalle due basi si dicono *facce laterali*; per comodità si è soliti chiamare le basi e le facce laterali con il nome generico di *facce*.

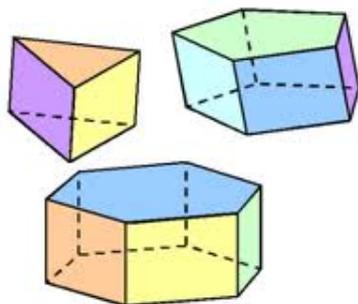


Figura A.2: Esempi di prismi

Definizione A.4. Sia $ABC\dots K$ un qualsiasi poligono e sia V un punto fuori dal suo piano. La parte dell'angoloide $\hat{V}ABC\dots K$ che, rispetto al piano del poligono, giace nel semispazio in cui cade V , si dice *piramide* di vertice V e di base $ABC\dots K$. I triangoli ABV , BCV , \dots , KAV si dicono *facce laterali* e i loro lati *spigoli* della piramide. In base al numero di lati che ha la base, la piramide si dice a base *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, ecc.

Si chiama *altezza* di una piramide la distanza dal vertice V al piano della base.

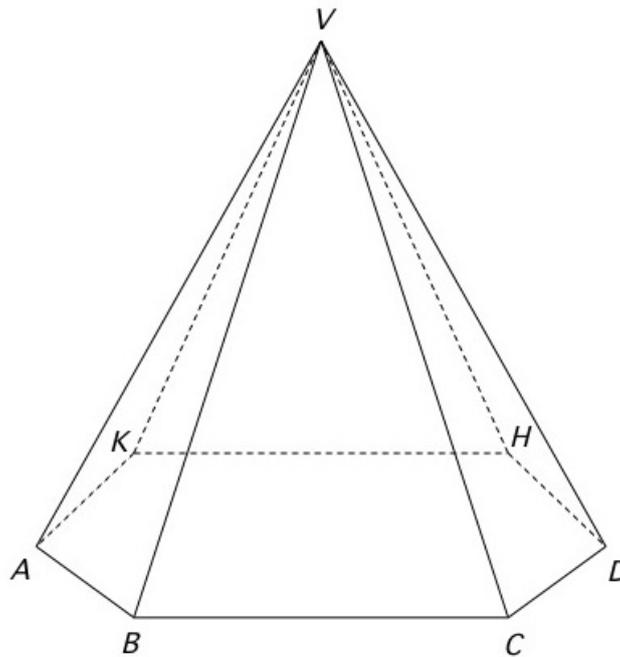


Figura A.3: Piramide a base esagonale

Definizione A.5. Una piramide a base triangolare si chiama *tetraedro*. Avendo quattro facce tutte triangolari, esso può essere considerato come piramide in quattro modi diversi poiché si può assumere come base una qualsiasi delle quattro facce.

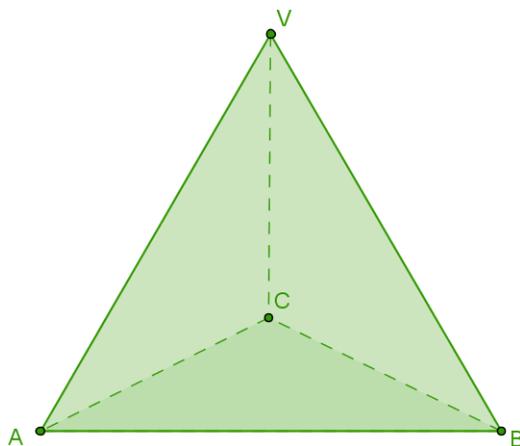


Figura A.4: Esempio di tetraedro

I prismi, le piramidi, i tetraedri rientrano in una definizione più ampia di figure geometriche solide, note con il nome di **poliedri**.

Definizione A.6. Si chiama *superficie poliedrica* ogni figura costituita da poligoni situati in piani diversi e disposti in modo che ognuno dei lati sia comune a due di essi e il piano di ciascuno lasci tutti gli altri da una stessa parte. I suddetti poligoni si chiamano *facce* e i vertici, i lati, gli angoli si dicono rispettivamente *vertici*, *spigoli*, *angoli* della superficie poliedrica.

Definizione A.7. Un *poliedro* è la figura costituita dai punti comuni a tutti gli angoloidi di una superficie poliedrica.

Definizione A.8. Un poliedro si dice *regolare* quando tutte le sue facce sono costituite da poligoni regolari e tutti gli angoloidi sono uguali. Di conseguenza risultano uguali anche tutti gli spigoli e tutti gli angoli.

I poliedri regolari sono l'equivalente nello spazio dei poligoni regolari nel piano. Nello spazio, però, non esistono poliedri regolari con un numero qualsiasi di facce, ma ne esistono solamente cinque in corrispondenza di 4, 6, 8, 12 e 20 facce. Riprendendo la definizione precedente di tetraedro, si nota che se esso è costituito da triangoli tutti ugualmente equilateri, allora esso diviene un poliedro regolare, cioè un 'tetraedro regolare'. La Figura A.4 mostra

proprio un esempio di tetraedro regolare: ha 4 facce triangolari (equilateri), 4 vertici e 6 spigoli.

Si parla di esaedro regolare (cubo), ottaedro regolare, dodecaedro regolare e icosaedro regolare nel caso in cui il numero di facce siano rispettivamente 6, 8, 12 e 20.

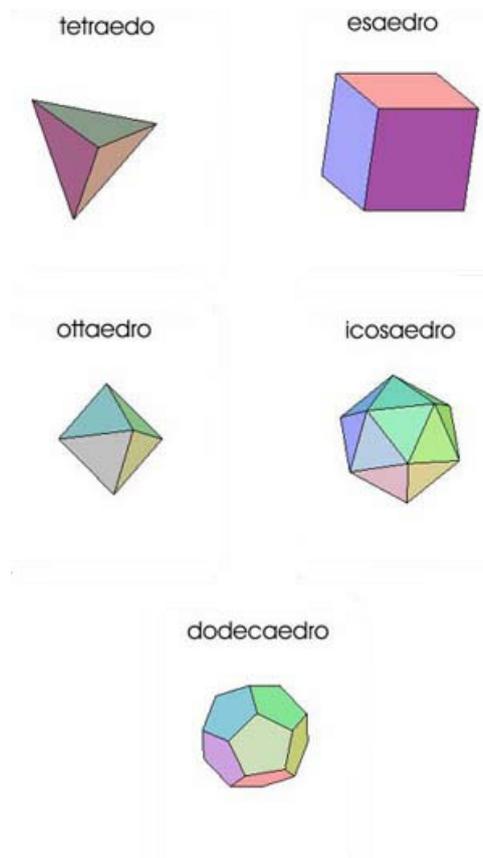


Figura A.5: Poliedri regolari

Bibliografia

- [1] Aigner M. & Ziegler G. M., *Proofs from the book*, Springer, 1998.
- [2] Bolyai F., *Tentamen*, Academiae Scientiarum Hungaricae, 1897.
- [3] Boltyanskii V.G. *Figure equivalenti ed equidecomponibili*, a cura di Corrado Mangione, Progresso Tecnico Editoriale, Milano, 1964.
- [4] Boltyanskii V.G., *Hilbert's Third Problem*, V.H. Winston & sons (Halsted press, John Wiley & sons), Washington DC, 1978.
- [5] Bricard R., *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres*, Nouvelles annales de mathématiques, tome 15, 1896.
- [6] Dehn M., *Ueber raumgleiche Polyeder*, Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse, 1900.
- [7] Dehn M., *Ueber den Rauminhalt*, Mathematische Annalen 55, 1902.
- [8] Enriques F., Amaldi U., *Elementi di geometria* parte prima, Zanichelli, Bologna, 1967.
- [9] Enriques F., Amaldi U., *Elementi di geometria* parte seconda, Zanichelli, Bologna, 1967.
- [10] Enriques F., *Le questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, 1987.

- [11] Euclide, *Gli Elementi*, a cura di Attilio Frajese & Lamberto Maccioni, Unione Tipografico-Editrice Torinese, classici UTET, 1970.
- [12] Gauss C. F., *Werke Bd. VIII*, Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft Der Wissenschaften, 1900.
- [13] Hadwiger H., *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder*, Arch. Math. 2, 1950.
- [14] Hartshorne R., *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000.
- [15] Hilbert D., *Mathematical problems*, Lecture delivered at the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, Bulletin Amer. Math. Soc. 8, 1902.
- [16] Villani V., *Aree, volumi e terzo problema di Hilbert*, in Archimede, n. 2/2001.

Ringraziamenti

Passa il tempo, passano le lezioni, passano gli esami e, in men che non si dica, si arriva all'ultimo step: la tanto attesa e temuta tesi di laurea. La tesi passa e si 'approda' ai ringraziamenti.

Grazie alla mia famiglia-casa. Quattro componenti indispensabili per me. Nel vostro 'grazie' ci sta tutto, qualsiasi cosa che possiate immaginare: grazie per la possibilità di studiare, grazie per l'incoraggiamento continuo, grazie per la comprensione, grazie per l'affetto che mi riservate, grazie per la sincerità, grazie per il sostegno continuo, grazie per l'attenzione che riservate alle eventuali contaminazioni da glutine, grazie per farmi guardare Amici, grazie per sopportarmi tutti i giorni (mi rendo conto di essere una spina nel fianco, ogni tanto).

Grazie agli zii, nonni, cugini e parenti vari. Anche a voi devo molto: mi avete insegnato a non mollare mai e ad accontentarsi, quando ne vale la pena. Ringrazio la mia cugina Beatrice perché mi ha permesso di applicarmi nell'insegnamento della matematica a livello di scuola inferiore; ringrazio Riccardo e Alberto perché con i loro quesiti matematici sono cresciuta e hanno permesso di pormi delle domande che, altrimenti, non mi sarei mai posta. Ringrazio i cugini Aldini (Enrico, Matteo e Andrea) perché mi fanno ritornare bambina e, questo, la maggior parte delle volte, è decisamente un bene. Grazie anche a Simone per le tue battute di spirito e la tua compagnia in già pianificate serate trash. Ora che ho ringraziato tutti i cugini, posso dedicarmi agli zii e ai nonni: grazie per i momenti di compagnia, per l'appoggio che mi date e per apprezzarmi esattamente come sono. Non mi sono dimenticata di te!

Come potrei? Grazie Mara! Grazie alla tua disponibilità, alla tua pazienza; grazie per prestarmi mille libri (sempre quelli più belli!) e per essermi amica. Questa volta ho deciso di fare una dedica semplice, ma che fosse davvero sentita: alla mia splendida famiglia. Adesso mi fermo perché non vorrei vedere troppe lacrime.

Ringrazio, poi, le mie amiche storiche (non è necessario fare nomi): sono sempre state troppo gentili e disponibili verso di me. Sempre mi hanno rispettato, consigliato e, soprattutto ascoltato. Apprezzo molto quello che hanno fatto per me.

Un ringraziamento speciale va alla mia compagna di avventure. Non so esprimere a parole quello che lei ha significato per me in questi anni. Il nostro rapporto ‘morboso’ e simbiotico lo sopportiamo solo noi, probabilmente. Ancora ricordo quando mi ha chiamato a casa per dirmi che si sarebbe iscritta a matematica ed io ho fatto letteralmente i salti di gioia. Storica è la nostra impresa il terzo anno e, chissà, forse ne stiamo facendo un’altra. Telefonate infinite, sguardi che solo noi capiamo, consigli di ogni tipo, chiacchierate su tutto e tutti sono solo alcune delle cose che facciamo. Arriva la pesantezza: c’è chi viene, c’è chi va e c’è chi rimane; tu sei dell’ultimo gruppo. Non so che dire, se non grazie Cami (compa-best).

Si ringraziano gli ‘amici di mosca’ in toto. In particolare, ringrazio Silvia de ‘la Silvia e la Jessica’, Jessica de ‘la Silvia e la Jessica’, il tennista Manuel e, chiaramente, l’ipocondriaco Enrico.

Doveroso è il ringraziamento alle mie preziose compagne di corso, nonché amiche: Sara, Daniela e Laura in particolare. Grazie per le spiegazioni, l’aiuto, e l’essermi state vicine sempre.

Un ringraziamento speciale va al mio relatore, il Professor Coen. Grazie alla sua incredibile disponibilità sono riuscita a capire e conoscere un argomento inizialmente a me ignoto. La ringrazio, professore, perché mi ha permesso di scrivere questa tesi in un clima di rispetto, condivisione, allegria, divertimento, sfida e tensione. Sono davvero contenta di aver concluso la mia carriera universitaria con Lei: mi ha spinto a mettermi in gioco e a

crederci sempre; promettente è stato il suo incoraggiamento 'forza e coraggio, signorina'.

Infine, ringrazio chi c'è sempre stato.