

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITA' DI BOLOGNA

SECONDA FACOLTA' DI INGEGNERIA  
CON SEDE A CESENA

CORSO DI LAUREA TRIENNALE  
IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE  
Classe 10

Sede di Forlì

ELABORATO FINALE DI LAUREA  
IN CONTROLLI AUTOMATICI

**SVILUPPO DI UN ALGORITMO NON LINEARE  
PER LA STIMA DELL'ASSETTO DI UN AEREO**

CANDIDATO

Zarco Bianchi

RELATORE

Prof. Ing. Matteo Zanzi

CORRELATORE

Ing. Nicola Mimmo

Anno accademico 2010/2011  
Terza sessione

# Indice

---

Introduzione, 1

1. Modelli del sistema di stima e progetto dei parametri, 5

1.1 Descrizione metodologia, 5

1.2 Modelli linearizzati, 13

1.2.1 Linearizzazione, 13

1.2.2 Disaccoppiamento, 20

1.2.2.1 Dinamica longitudinale, 21

1.2.2.2 Dinamica latero-direzionale, 24

1.3 Progetto dei parametri, 28

1.3.1 Progetto di  $k_1$ , 29

1.3.2 Progetto di  $k_2$  e  $k_3$ , 31

1.4 Analisi di stabilità, 36

1.4.1 Stabilità su modello disaccoppiato, 36

1.4.2 Stabilità su modello linearizzato, 37

1.5 Errori a regime, 42

1.5.1 Errore a regime in risposta ad un gradino, 44

1.5.2 Errore a regime in risposta ad una rampa, 45

1.5.3 Errore a regime in risposta ad una parabola, 46

1.5.4 Errore a regime in risposta ad una cubica, 47

2. Risultati sperimentali, 48
  - 2.1 Stima dell'assetto con ingressi costanti, 50
  - 2.2 Stima dell'assetto in assenza di rumore e turbolenze, 52
  - 2.3 Stima dell'assetto con rumori sui sensori inerziali, 57
  - 2.4 Stima dell'assetto con rumori sui sensori aria, 59
  - 2.5 Progetto dei parametri con vincoli sulle prestazioni di stima, 61
  - 2.6 Stima dell'assetto in presenza di turbolenze, 64
  - 2.7 Stima dell'assetto in presenza di rumori sui sensori e turbolenze, 66
  - 2.8 Simulazioni Montecarlo per la stabilità, 67
3. Conclusioni, 71
4. Appendici, 73
  - 4.1 Angoli di Eulero, 73
  - 4.2 Richiami sulla teoria della misura, 75
5. Riferimenti bibliografici, 78

# Introduzione

---

Nel presente elaborato si esaminerà la progettazione di un sistema non lineare di stima dell'assetto di un velivolo. In particolare si è interessati alla stima degli angoli di beccheggio,  $\Theta$ , e di rollio,  $\Phi$ .

La misura dell'assetto dell'aereo rispetto al piano orizzontale, in termini di angoli di rollio, di beccheggio e di prua (puntamento del velivolo, nel piano longitudinale, rispetto al nord geografico), è essenziale sia per il controllo che per l'orientamento dello stesso.

La conoscenza di questi tre angoli è di vitale importanza per il pilota al fine di volare in sicurezza in tutte le condizioni meteorologiche, incluse quelle situazioni in cui la normale visibilità dell'orizzonte è scarsa oppure non disponibile, per esempio all'interno di nubi o in presenza di nebbia, oppure durante il volo notturno.

L'informazione dell'assetto è fondamentale anche per i sistemi avionici, i quali aiutano l'equipaggio nel corso della missione (ad esempio l'autopilota).

L'algoritmo che verrà presentato nel corso di questa tesi fa parte della grande categoria degli algoritmi della Navigazione Inerziale, INS (Inertial Navigation System), i quali, a partire dalle misure degli accelerometri e dei giroscopi, hanno lo scopo di determinare gli stati del velivolo: assetto, velocità e posizione.

In particolare, l'algoritmo utilizzato ha la funzione della sola stima dell'assetto e la Figura 1.

ne mostra una sua rappresentazione schematica, dove è stato evidenziato, all'interno di un classico sistema di navigazione inerziale, il sottosistema utilizzato per la stima dell'assetto.

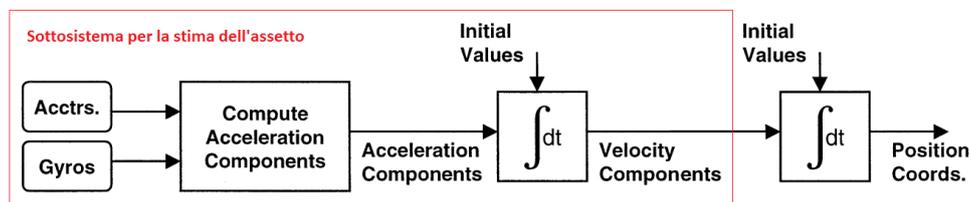


Figura 1 - Sistema di navigazione inerziale e sottosistema per la stima dell'assetto

I sensori inerziali impiegati, come si può notare dalla Figura 1, sono gli accelerometri e i giroscopi, che provvedono a fornire rispettivamente le accelerazioni e le velocità angolari lungo gli assi corpo del velivolo.



Gli ingressi del sistema sono:

- la “Reference Velocity –  $V_R$ ”, ricavata dalla composizione dei dati aria;
- le accelerazioni, provenienti dal blocco “Acctrs.” degli accelerometri;
- le velocità angolari, provenienti dal blocco “Gyros” dei giroscopi.

Le quantità che vengono elaborate, adottate per la propagazione dell’assetto secondo le equazioni della dinamica di un corpo rigido, sono appunto i segnali in uscita dagli accelerometri e dai giroscopi. I primi sono composti dalle accelerazioni  $a_x$ ,  $a_y$  e  $a_z$ , mentre i secondi dai parametri  $P$ ,  $Q$  ed  $R$ , che sono le velocità angolari rispettivamente lungo gli assi corpo  $X_b$ ,  $Y_b$  e  $Z_b$ .

Innanzitutto, le uscite dei giroscopi vanno in ingresso al blocco “Attitude Integration”, per ricavare gli angoli  $\Phi$  e  $\Theta$  attraverso le formule di Eulero.

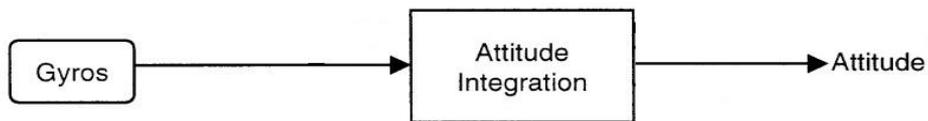


Figura 3 - Blocco “Attitude Integration”

Gli angoli così calcolati, insieme alle uscite degli accelerometri, entrano nel blocco “Compute Rate of change of Velocity Components”.

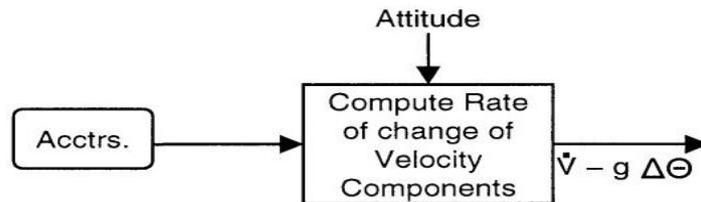


Figura 4 - Blocco “Compute Rate of change of Velocity Components”

In questo blocco sono implementate le equazioni della dinamica di un corpo rigido. In uscita si hanno le derivate delle componenti della velocità inerziali, alle quali sono state sottratte le rispettive componenti di accelerazione dovute alla gravità, calcolate con gli angoli provenienti dal blocco “Attitude Integration”.

La derivata della velocità, denominata *inerziale*, se integrata, dà luogo alla velocità stessa a meno degli errori di integrazione.

I segnali utilizzati per la fase di correzione di questi errori sono, come detto in precedenza, i dati aria, e cioè  $V_T$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Essi, opportunamente elaborati, forniscono le velocità aria in assi corpo,  $U_A$ ,  $V_A$  e  $W$ , che vengono prese come quantità di riferimento.

Per fare in modo che gli errori tendano a zero, e cioè che le velocità inerziali tendano a quelle di riferimento, viene introdotta una retroazione, con guadagno  $k_1$ , del segnale di errore, espresso come differenza tra le velocità inerziali e le relative velocità aria di riferimento.

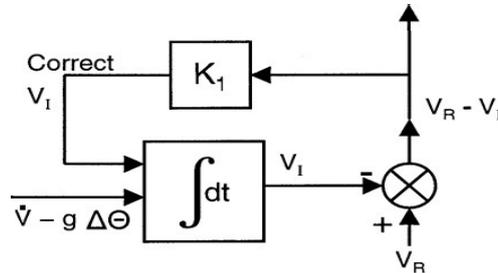


Figura 5 - Loop di retroazione per l'eliminazione dell'errore

Per concludere la descrizione dell'algoritmo, lo stesso errore di velocità è inviato ad un blocco proporzionale integrativo che fornisce gli angoli di correzione.

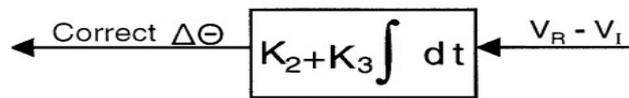


Figura 6 - Blocco proporzionale integrativo

Questi angoli vengono utilizzati dal blocco “Attitude Integration” (Figura 2) per correggere gli angoli di Eulero fornendo, in tal modo, la stima dell'assetto del velivolo.

Per il corretto funzionamento dell'algoritmo di stima è fondamentale il progetto dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ . Lo scopo del presente elaborato è quello di progettare, in modo analitico, i suddetti parametri per garantire i desiderati livelli di performance e di stabilità. Inoltre verranno introdotte delle specifiche sull'accuratezza e sulla precisione delle stime degli angoli di Eulero.

Il presente lavoro è organizzato come segue: nel capitolo 1 verrà descritto, in maniera approfondita, l'algoritmo di stima dell'assetto, passando in rassegna la formulazione non lineare che lo compone, saranno poi illustrati i modelli linearizzati necessari per il progetto dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ . Infine verranno indicate le analisi di stabilità, analitica e numerica, per concludere con un'analisi degli errori a regime. Saranno descritte le limitazioni di tale algoritmo, e tutti i casi in cui l'errore non converge a zero. Nel capitolo 2 saranno mostrati i risultati sperimentali, effettuando simulazioni in diverse condizioni di volo, osservando i limiti dell'algoritmo. Nel capitolo 3 verranno espone le conclusioni.

# 1. Modelli del sistema di stima e progetto dei parametri

## 1.1 Descrizione metodologia

Come esposto nel capitolo introduttivo, il presente lavoro si concentra sulla stima dell'assetto al fine di fornire le informazioni minime necessarie per il controllo dell'aereo. In tal senso, l'angolo di prua,  $\Psi$ , è da intendere come una variabile utile per la navigazione del velivolo. Questo concetto di carattere intuitivo viene avvalorato dalla struttura delle equazioni dinamiche e cinematiche nelle quali l'angolo di prua non viene di fatto mai richiamato. In seguito alle supposte considerazioni il problema risulta dunque semplificato ed il suo schema a blocchi è mostrato in Figura 7.

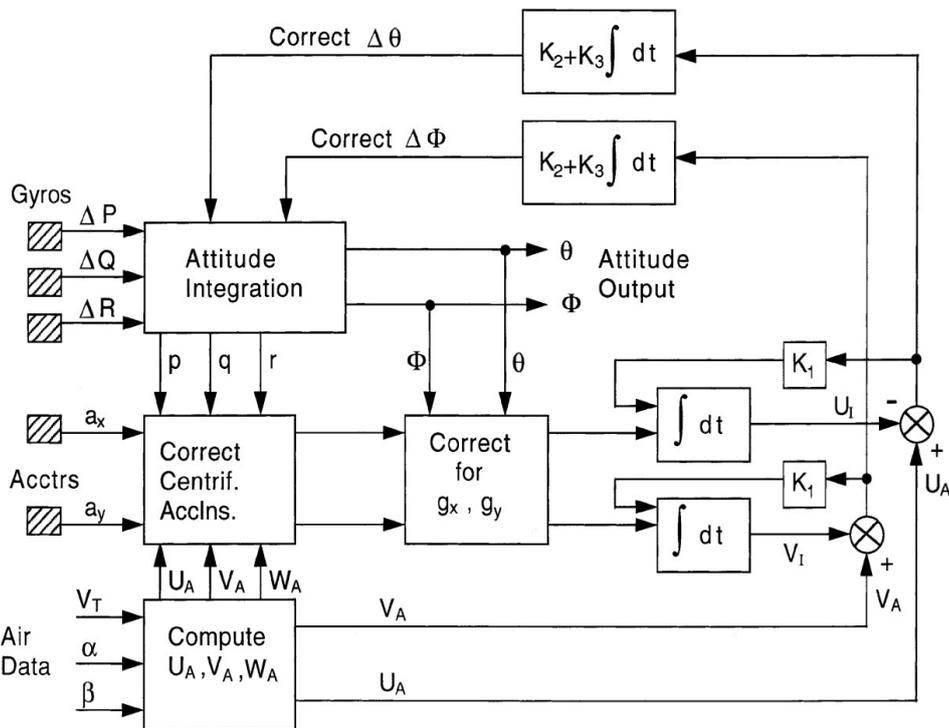


Figura 7 - Schema a blocchi dell'algorithmo di stima dell'assetto

Di seguito verranno descritti dettagliatamente tutti i blocchi logici che compongono lo schema di stima.

## 1.1 Descrizione metodologia

### Compute $U_A, V_A, W_A$

Come mostrato nello schema precedente, i riferimenti che vengono utilizzati dall' algoritmo sono le  $U_A$  e  $V_A$ , componenti in assi corpo delle velocità aria, le quali sono fornite dall'elaborazione dei segnali  $V_T$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , che rappresentano rispettivamente la TAS, l'angolo di attacco e l'angolo di derapata. Perciò è necessario il blocco di conversione "Compute  $U_A, V_A, W_A$ ", che applichi le seguenti relazioni:

- $U_A = V_T \cos \alpha \cos \beta$
- $V_A = V_T \sin \beta$
- $W_A = V_T \sin \alpha \cos \beta$

Il blocco realizzato in *Simulink* che realizza tale operazione, è:

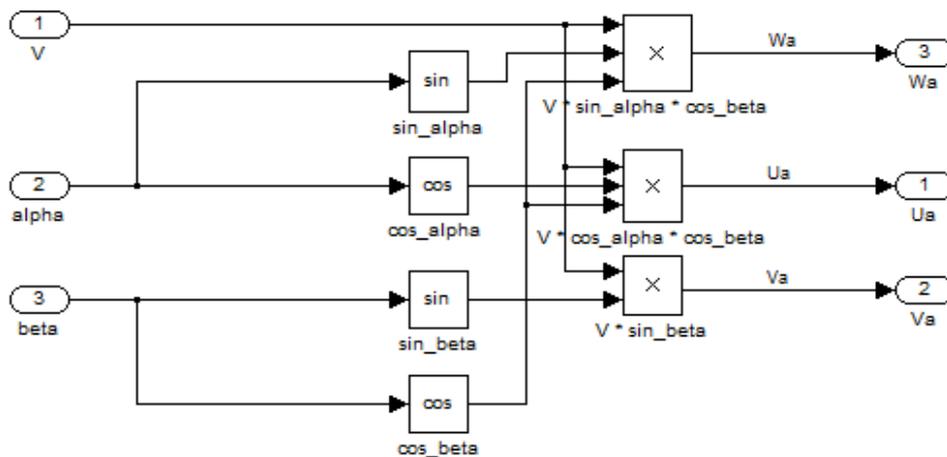


Figura 8 - Blocco "Compute UA,VA,WA"

### Attitude Integration

Le uscite dei giroscopi vengono utilizzate nel blocco "Attitude Integration" per ricavare gli angoli  $\Phi$  e  $\Theta$  attraverso le formule di Eulero per la propagazione dell'assetto:

- $\dot{\Phi} = p + q \sin \Phi \tan \Theta + r \cos \Phi \tan \Theta$
- $\dot{\Theta} = q \cos \Phi - r \sin \Phi$

Questo blocco ha quindi lo scopo di implementare tali formule e di integrare le quantità ottenute.

Come detto in precedenza, i sensori inerziali soffrono del fenomeno della deriva di integrazione.

## 1.1 Descrizione metodologia

Gli errori causati dalla deriva sono della stessa natura sia negli accelerometri che nei giroscopi, ma si ripercuotono diversamente nei due casi. Considerando un accelerometro avente un errore di bias pari a  $B$ , esso provoca un'inesattezza nel calcolo della velocità uguale a  $\int B dt$ , e cioè  $Bt$ . Un errore sull'accelerazione si ripercuote quindi sulla velocità linearmente con il tempo.

Considerando invece un giroscopio che ruota a velocità costante  $\omega$ , esso provocherà un errore di deriva di un certo  $\Delta\alpha$ , lineare nel tempo, e pari a  $\omega t$ . Questo genera un'imprecisione nel calcolo della gravità, che si scosta dal valore reale di una quantità pari a  $g\Delta\alpha = g\omega t$ . L'errore risultante sulla velocità sarà dato da  $\int g\omega t dt$ , cioè  $g\omega t^2/2$ .

Quindi un errore sulla velocità angolare si ripercuote sulla velocità con il quadrato del tempo trascorso.

La realizzazione in *Simulink* di questo blocco è:

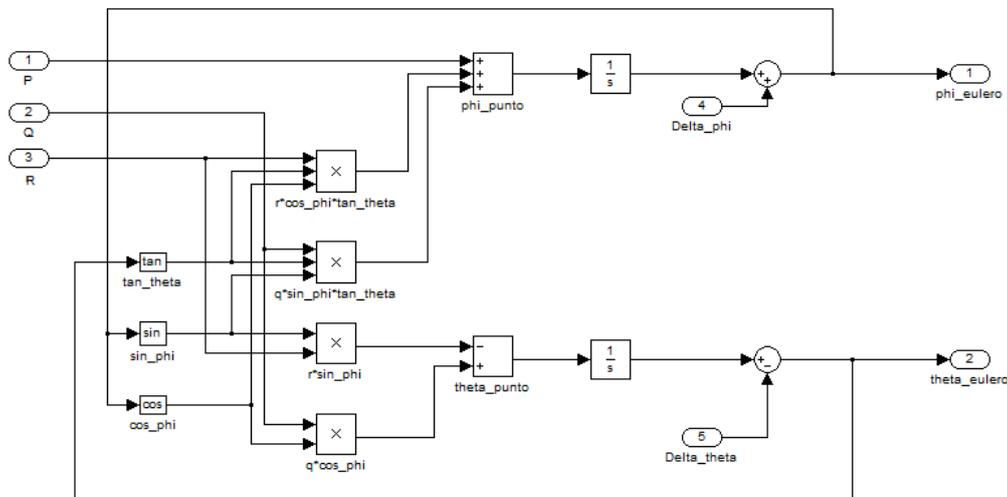


Figura 9 - Blocco "Attitude Integration"

Gli ingressi 4 e 5,  $\Delta\phi$  e  $\Delta\theta$  rispettivamente, saranno descritti nel paragrafo "Proportional plus Integral Control".

### Correct Centrip. Acclns.

Lo scopo di questo blocco è quello di calcolare le componenti dell'accelerazione centripeta, cioè del prodotto tra le velocità in uscita dal blocco "Compute  $U_A, V_A, W_A$ ", con le velocità angolari  $P, Q$  ed  $R$  dei giroscopi, e sottrarle ai segnali provenienti dagli accelerometri. Questi, posti lungo le direzioni degli assi corpo, forniscono una misura di accelerazione che è la somma algebrica di accelerazioni dovute alle forze centripete, a quelle gravitazionali ed a quelle inerziali.

## 1.1 Descrizione metodologia

Le uscite degli accelerometri possono essere descritte, in forma analitica, da:

- $a_x = \dot{U}_B - V_A R + W_A Q - g_x$
- $a_y = \dot{V}_B + U_A R - W_A P - g_y$

I termini di accoppiamento delle velocità nel calcolo delle forze centripete, lungo gli assi corpo  $X_b$  e  $Y_b$ , sono:

- $W_A Q - V_A R$
- $U_A R - W_A P$

In uscita da questo blocco si ha quindi, sempre nelle due direzioni precedenti:

- $\dot{U}_B - g_x$
- $\dot{V}_B - g_y$

L'implementazione in Simulink è:

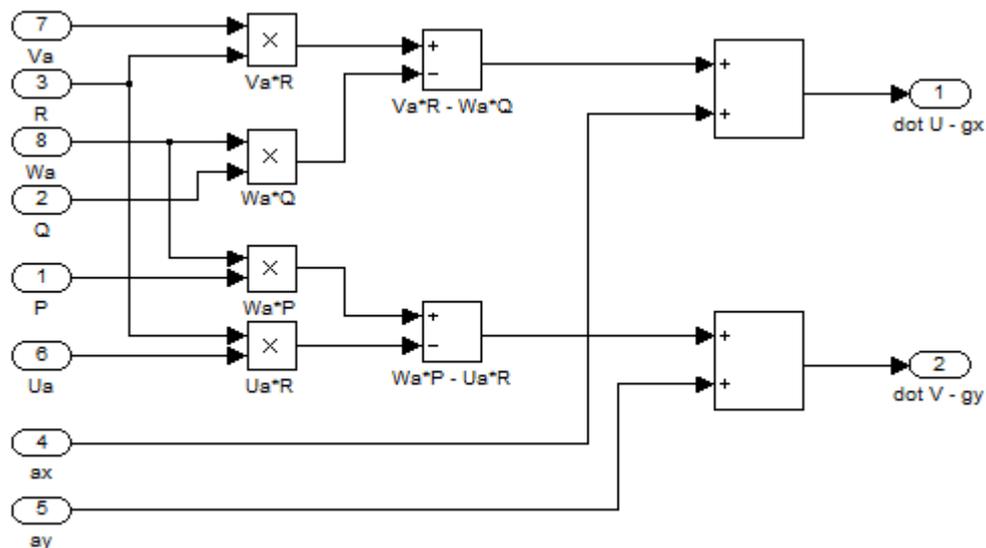


Figura 10 - Blocco "Correct Centrip. Acclns."

### Correct for $g_x, g_y$

Per calcolare le velocità inerziali, non resta che isolare i termini derivati dalle relazioni precedenti, per poi integrarli.

Questo blocco provvede a calcolare le componenti  $g_x$  e  $g_y$  della gravità, attraverso gli angoli calcolati con le formule di Eulero, e a sommarle alle uscite del blocco "Correct Centrip. Acclns."

## 1.1 Descrizione metodologia

Le componenti del vettore gravità sono date da (vedere Figura 11):

- $g_x = -g \cos \theta$
- $g_y = g \cos \theta \sin \Phi$

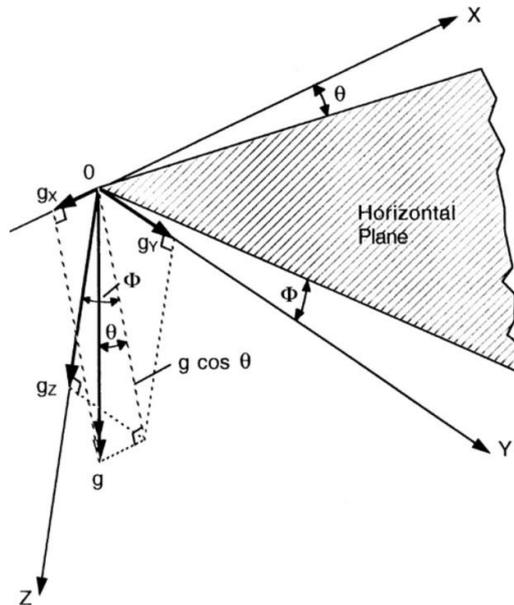


Figura 11 - Accelerazione di gravità nel sistema di riferimento "Assi Corpo"

Il blocco in *Simulink* per che svolge quanto riportato è:

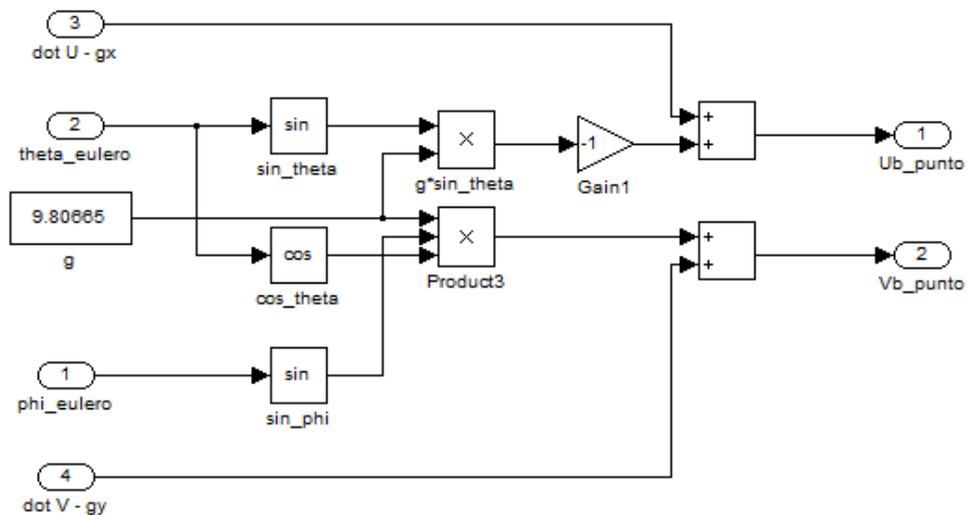


Figura 12 - Blocco "Correct for gx , gy"

## 1.1 Descrizione metodologia

### *The air data/inertial velocity mixing loops*

Come accennato nel paragrafo precedente, le velocità inerziali vengono confrontate con quelle di riferimento attraverso un sommatore che realizza la sottrazione tra di esse, generando un segnale di errore. Per fare in modo di eliminare questo errore, lo si pone in retroazione con un guadagno  $k_1$ , come mostrato in Figura 13 (si prende come esempio il blocco relativo alla velocità verticale  $V$ ) :

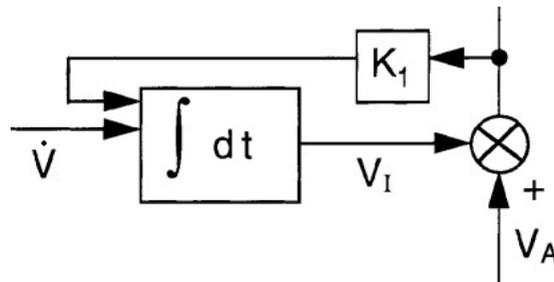


Figura 13 - Blocco “The air data/inertial velocity mixing loops”

Che in Simulink si rappresenta come:

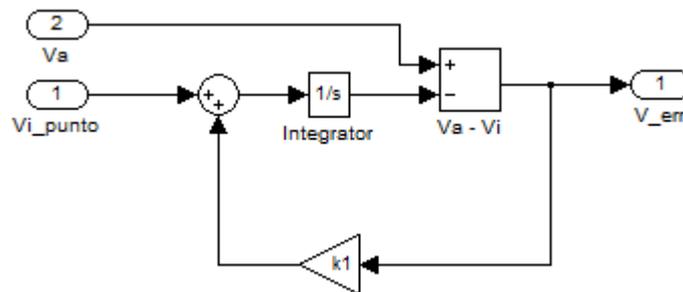


Figura 14 - Blocco Simulink “The air data/inertial velocity mixing loops”

Il sistema di equazioni che descrive il blocco è, per i loop rispettivamente su  $U$  e su  $V$ :

$$\begin{cases} U_i = \int (\dot{U}_B + k_1 U_{err}) dt \\ U_{err} = U_A - U_i \\ V_i = \int (\dot{V}_B + k_1 V_{err}) dt \\ V_{err} = V_A - V_i \end{cases}$$

In definitiva, lo scopo di questo blocco è quello di far sì che la variabile errore tenda a zero, ed in particolare che la componente della velocità inerziale converga al valore della corrispettiva velocità aria, essendo quest'ultima presa come riferimento. Il guadagno  $k_1$  sarà determinato nel capitolo 1.3.1.

## 1.1 Descrizione metodologia

### *Proportional plus Integral Control*

L'errore sulla velocità appena descritto viene poi inviato ad un blocco proporzionale-integrale, descritto dalla relazione

$$\Delta\Theta = k_2 U_{err} + k_3 \int U_{err} dt$$

$$\Delta\Phi = k_2 V_{err} + k_3 \int V_{err} dt$$

il quale provvede a fornire una correzione angolare (Figura 2) che va a sommarsi all'angolo corrispondente calcolato con le formule di Eulero. In particolare,  $\Delta\Phi$  si addiziona a  $\Phi$ , mentre  $\Delta\Theta$  si sottrae a  $\Theta$  (Figura 9). Nel caso di  $\Phi$  la retroazione è positiva, in quanto ad un aumento di  $V_A$  deve corrispondere un aumento dell'angolo di inclinazione laterale, mentre per quanto riguarda  $\Theta$  la retroazione è negativa, perché ad aumento di  $U_A$  corrisponde una diminuzione dell'angolo di elevazione.

I guadagni  $k_2$  e  $k_3$  saranno determinati nel capitolo 1.3.2.

### *Implementazione dell'algoritmo in Simulink*

In conclusione delle considerazioni fatte, si è implementato l'algoritmo in Simulink.

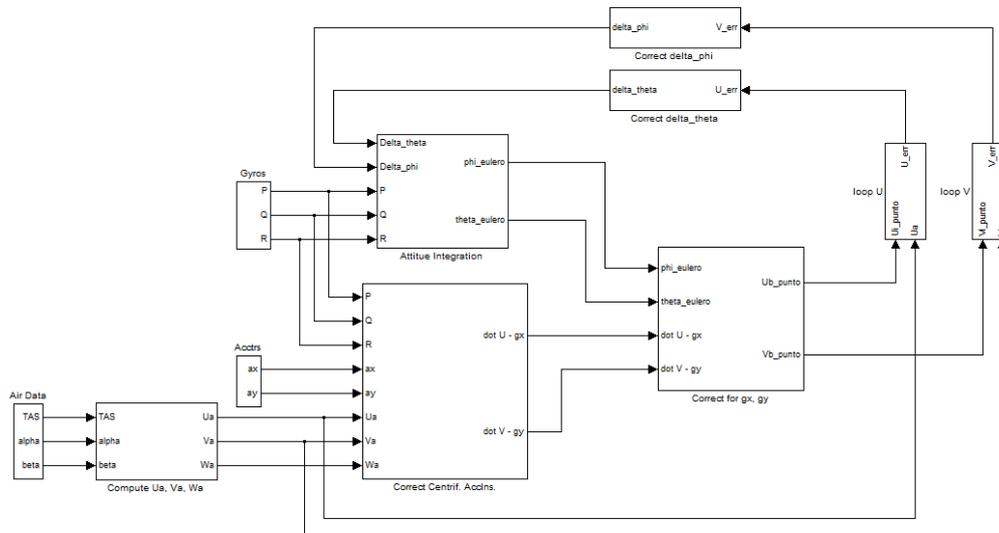


Figura 15 - Modello Simulink dell'algoritmo

## 1.1 Descrizione metodologia

Vengono di seguito elencate le equazioni che compongono questo algoritmo non lineare, raggruppate per gruppi logici.

$$\begin{cases} \dot{U}_B = a_x + g_x + V_A R - W_A Q \\ \dot{V}_B = a_y + g_y - U_A R + W_A P \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_x = -g \sin(\Theta - \Delta\Theta) \\ g_y = g \cos(\Theta - \Delta\Theta) \sin(\Phi + \Delta\Phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = Q \cos(\Phi + \Delta\Phi) - R \sin(\Phi + \Delta\Phi) \\ \dot{\Phi} = P + Q \sin(\Phi + \Delta\Phi) \tan(\Theta - \Delta\Theta) + R \cos(\Phi + \Delta\Phi) \tan(\Theta - \Delta\Theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\Theta = k_2 U_{err} + k_3 \int U_{err} dt \\ \Delta\Phi = k_2 V_{err} + k_3 \int V_{err} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{err} = U_A - U_i \\ V_{err} = V_A - V_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_i = \int (\dot{U}_B + k_1 U_{err}) dt \\ V_i = \int (\dot{V}_B + k_1 V_{err}) dt \end{cases}$$

Scopo del presente lavoro è quello di progettare i parametri  $k_i$  (con  $i = 1,2,3$ ). A tal fine bisognerebbe studiare un sistema non lineare in cui la ricerca di soluzioni analitiche è molto complicata. Per questo motivo, nel prossimo capitolo, si provvederà alla linearizzazione del modello qui descritto.

## 1.2 Modelli linearizzati

### 1.2.1 Linearizzazione

Sia  $y : R \rightarrow R, y = f(x)$  una funzione non lineare a valori reali nella variabile indipendente  $x$  con  $x \in X, X \subseteq R$ . Sia  $a \in X$  e sia  $f(x)$  infinitamente derivabile nell'intorno aperto, di raggio  $r$ , del punto  $a$ .

La linearizzazione consiste nel trovare un sistema lineare che approssimi, nell'intorno di un punto di lavoro (punto di linearizzazione), il sistema non lineare di partenza.

Un classico approccio alla linearizzazione prevede l'uso di espansioni in serie di Taylor.

La serie di Taylor di una funzione in un punto è la rappresentazione della funzione come serie di termini calcolati a partire dalle derivate della funzione stessa in quel punto.

La serie di Taylor di una funzione  $f(x)$  definita in un intervallo aperto  $]a - r, a + r[$  a valori reali o complessi e infinite volte derivabile, è la serie di potenze

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \dots$$

che può essere scritta più sinteticamente come

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

Lo sviluppo in serie di Taylor delle funzioni  $\sin x$  e  $\cos x$  attorno al punto  $a$  sono:

$$\cos(x) = \cos(a) - \sin(a)(x - a) + o(x - a)^2$$

$$\sin(x) = \sin(a) + \cos(a)(x - a) + o(x - a)^2$$

$$\tan(x) = \tan(a) + (1 + \tan^2(a))(x - a) + o(x - a)^2$$

Se le serie vengono centrate attorno al punto  $a = 0$  si semplificano nel seguente modo:

$$\cos(x) \simeq 1$$

$$\sin(x) \simeq x$$

$$\tan(x) \simeq x$$

### 1.2.1 Linearizzazione

Lo sviluppo in serie di Taylor, centrato nell'origine e troncato al primo ordine, delle relazioni che compaiono nelle equazioni dell'algoritmo di stima, vale:

$$\begin{aligned}\cos(\Phi + \Delta\Phi) &\simeq 1 \\ \cos(\Theta - \Delta\Theta) &\simeq 1 \\ \sin(\Phi + \Delta\Phi) &\simeq \Phi + \Delta\Phi \\ \sin(\Theta - \Delta\Theta) &\simeq \Theta - \Delta\Theta \\ \tan(\Theta - \Delta\Theta) &\simeq \Theta - \Delta\Theta\end{aligned}$$

Le equazioni del moto possono essere linearizzate usando la tecnica delle piccole perturbazioni intorno ad una condizione di equilibrio arbitrariamente scelta, purché appartenente all'involuppo di volo del velivolo. A tale scopo, si considera il moto del velivolo composto da due parti: la prima parte è un moto stazionario, rappresentativo della condizione di equilibrio scelta, la seconda parte, invece, è un moto di tipo non stazionario che rappresenta l'andamento del moto perturbato intorno alla condizione di equilibrio stessa.

Le componenti stazionarie e non stazionarie del moto possono essere evidenziate ponendo:

$$\begin{aligned}\begin{cases} U_A = U_{A0} + u_A \\ V_A = V_{A0} + v_A \\ W_A = W_{A0} + w_A \end{cases} \\ \begin{cases} U_B = U_{B0} + u_B \\ V_B = V_{B0} + v_B \end{cases} \\ \begin{cases} U_i = U_{i0} + u_i \\ V_i = V_{i0} + v_i \end{cases} \\ \begin{cases} P = P_0 + p \\ Q = Q_0 + q \\ R = R_0 + r \end{cases} \\ \begin{cases} \Phi = \Phi_0 + \varphi \\ \Theta = \Theta_0 + \vartheta \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta\Phi = \Delta\Phi_0 + \Delta\varphi \\ \Delta\Theta = \Delta\Theta_0 + \Delta\vartheta \end{cases} \\ \begin{cases} a_x = a_{x0} + da_x \\ a_y = a_{y0} + da_y \end{cases}\end{aligned}$$

Dove il secondo termine del secondo membro di ogni equazione rappresenta la variazione rispetto al punto di linearizzazione (indicato con il pedice 0).

### 1.2.1 Linearizzazione

#### Linearizzazione delle componenti gravitazionali

Le relazioni delle componenti gravitazionali sono

$$\begin{cases} g_x = -g \sin(\Theta - \Delta\Theta) \\ g_y = g \cos(\Theta - \Delta\Theta) \sin(\Phi + \Delta\Phi) \end{cases}$$

Per quanto riguarda la componente lungo  $x$  si ottiene

$$\begin{aligned} g_x &= -g \sin(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) - g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) ((\Theta - \Delta\vartheta) - (\vartheta_0 - \Delta\Theta_0)) = \\ &= -g \sin(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) - g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\vartheta - \Delta\vartheta) = \\ &= g_{x0} + dg_x \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} g_{x0} &= -g \sin(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \\ dg_x &= -g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\vartheta - \Delta\vartheta) \end{aligned}$$

Mentre per la componente lungo  $y$  si ha

$$\begin{aligned} g_y &= g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) + \\ &\quad -g \sin(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\vartheta - \Delta\vartheta) + \\ &\quad +g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\varphi + \Delta\varphi) = g_{y0} + dg_y \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\begin{aligned} g_{y0} &= g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \\ dg_y &= -g \sin(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\vartheta - \Delta\vartheta) + \\ &\quad +g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\varphi + \Delta\varphi) \end{aligned}$$

#### Linearizzazione delle equazioni della dinamica del corpo rigido

Le relazioni della dinamica del corpo rigido sono:

$$\begin{cases} \dot{U}_B = a_x + g_x + V_A R - W_A Q \\ \dot{V}_B = a_y + g_y - U_A R + W_A P \end{cases}$$

Sostituendo alle variabili complessive i termini stazionari e le relative piccole variazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{U}_{B0} + \dot{u}_B = a_{x0} + da_x + g_{x0} + dg_x + \\ \quad + (V_{A0} + v_A)(R_0 + r) - (W_{A0} + w_A)(Q_0 + q) \\ \dot{V}_{B0} + \dot{v}_B = a_{y0} + da_y + g_{y0} + dg_y + \\ \quad - (U_{A0} + u_A)(R_0 + r) + (W_{A0} + w_A)(P_0 + p) \end{cases}$$

### 1.2.1 Linearizzazione

Ma, per ipotesi, si ha che:

$$\begin{cases} \dot{U}_{B0} = a_{x0} + g_{x0} + V_{A0}R_0 - W_{A0}Q_0 \\ \dot{V}_{B0} = a_{y0} + g_{y0} - U_{A0}R_0 + W_{A0}P_0 \end{cases}$$

Quindi si ottiene

$$\begin{cases} \dot{u}_B = da_x + dg_x + V_{A0}r + v_A(R_0 + r) - W_{A0}q - w_A(Q_0 + q) \\ \dot{v}_B = da_y + dg_y - U_{A0}r - u_A(R_0 + r) + W_{A0}p + w_A(P_0 + p) \end{cases}$$

### Linearizzazione delle equazioni di Eulero

Un altro gruppo di equazioni da linearizzare è composto dalle formule di Eulero:

$$\begin{cases} \dot{\Theta} = Q \cos(\Phi + \Delta\Phi) - R \sin(\Phi + \Delta\Phi) \\ \dot{\Phi} = P + Q \sin(\Phi + \Delta\Phi) \tan(\Theta - \Delta\Theta) + R \cos(\Phi + \Delta\Phi) \tan(\Theta - \Delta\Theta) \end{cases}$$

Per l'angolo di beccheggio, con le opportune sostituzioni, si ha:

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_0 + \dot{\vartheta} &= (Q_0 + q) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) - (R_0 + r) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) + \\ &\quad - (Q_0 + q) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\varphi + \Delta\varphi) + \\ &\quad - (R_0 + r) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\varphi + \Delta\varphi) \end{aligned}$$

Ma, per ipotesi, si ha che:

$$\dot{\Theta}_0 = Q_0 \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) - R_0 \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0)$$

Perciò si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= q \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) - r \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) + \\ &\quad - (Q_0 + q) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\varphi + \Delta\varphi) + \\ &\quad - (R_0 + r) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (\varphi + \Delta\varphi) \end{aligned}$$

Analogamente per quanto riguarda l'angolo di rollio:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0 + \dot{\varphi} &= (P_0 + p) + (Q_0 + q) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) + \\ &\quad + (R_0 + r) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) + \\ &\quad + (Q_0 + q) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\varphi + \Delta\varphi) + \\ &\quad + (Q_0 + q) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (1 + \tan^2(\Theta_0 - \Delta\Theta_0)) (\vartheta - \Delta\vartheta) + \\ &\quad - (R_0 + r) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\varphi + \Delta\varphi) + \\ &\quad + (R_0 + r) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (1 + \tan^2(\Theta_0 - \Delta\Theta_0)) (\vartheta - \Delta\vartheta) \end{aligned}$$

Ma, per ipotesi, si ha che:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_0 &= P_0 + Q_0 \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) + \\ &\quad + R_0 \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) \end{aligned}$$

### 1.2.1 Linearizzazione

Perciò si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & p + q \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) + \\ & + r \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) + \\ & + (Q_0 + q) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\varphi + \Delta\varphi) + \\ & + (Q_0 + q) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (1 + \tan^2(\Theta_0 - \Delta\Theta_0)) (\vartheta - \Delta\vartheta) + \\ & - (R_0 + r) \sin(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\varphi + \Delta\varphi) + \\ & + (R_0 + r) \cos(\Phi_0 + \Delta\Phi_0) (1 + \tan^2(\Theta_0 - \Delta\Theta_0)) (\vartheta - \Delta\vartheta) \end{aligned}$$

### Linearizzazione delle variabili errore

Le relazioni delle variabili errore sono

$$\begin{cases} U_{err} = U_A - U_i \\ V_{err} = V_A - V_i \end{cases}$$

Sostituendo alle variabili complessive i termini stazionari e le relative piccole variazioni si ottiene:

$$\begin{cases} U_{err0} + u_{err} = (U_A + u_A) - (U_i + u_i) = U_A + u_A - U_i - u_i \\ V_{err0} + v_{err} = (V_A + v_A) - (V_i + v_i) = V_A + v_A - V_i - v_i \end{cases}$$

Ma, per ipotesi, si ha che:

$$\begin{cases} U_{err0} = U_A - U_i \\ V_{err0} = V_A - V_i \end{cases}$$

Perciò si ottiene:

$$\begin{cases} u_{err} = u_A - u_i \\ v_{err} = v_A - v_i \end{cases}$$

### Linearizzazione delle correzioni angolari

Le relazioni delle correzioni angolari sono

$$\begin{cases} \Delta\Theta = k_2 U_{err0} + k_3 \int U_{err} dt \\ \Delta\Phi = k_2 V_{err0} + k_3 \int V_{err} dt \end{cases}$$

Sostituendo alle variabili complessive i termini stazionari e le relative piccole variazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \Delta\Theta_0 + \Delta\vartheta = k_2 (U_{err0} + u_{err}) + k_3 \int (U_{err0} + u_{err}) dt \\ \Delta\Phi_0 + \Delta\varphi = k_2 (V_{err0} + v_{err}) + k_3 \int (V_{err0} + v_{err}) dt \end{cases}$$

### 1.2.1 Linearizzazione

Ma, per ipotesi, si ha che:

$$\begin{cases} \Delta\Theta_0 = k_2 U_{err0} + k_3 \int U_{err0} dt \\ \Delta\Phi_0 = k_2 V_{err0} + k_3 \int V_{err0} dt \end{cases}$$

Perciò si ottiene:

$$\begin{cases} \Delta\vartheta = k_2 u_{err} + k_3 \int u_{err} dt \\ \Delta\varphi = k_2 v_{err} + k_3 \int v_{err} dt \end{cases}$$

### Linearizzazione delle velocità inerziali

Le relazioni delle velocità inerziali sono

$$\begin{cases} U_i = \int (\dot{U}_B + k_1 U_{err}) dt \\ V_i = \int (\dot{V}_B + k_1 V_{err}) dt \end{cases}$$

Sostituendo alle variabili complessive i termini stazionari e le relative piccole variazioni si ottiene:

$$\begin{cases} U_{i0} + u_i = \int ((\dot{U}_{B0} + \dot{u}_B) + k_1 (U_{err0} + u_{err})) dt \\ V_{i0} + v_i = \int ((\dot{V}_{B0} + \dot{v}_B) + k_1 (V_{err0} + v_{err})) dt \end{cases}$$

Ma, per ipotesi, si ha che:

$$\begin{cases} U_{i0} = \int (\dot{U}_{B0} + k_1 U_{err0}) dt \\ V_{i0} = \int (\dot{V}_{B0} + k_1 V_{err0}) dt \end{cases}$$

Perciò si ottiene:

$$\begin{cases} u_i = \int (\dot{u}_B + k_1 u_{err}) dt \\ v_i = \int (\dot{v}_B + k_1 v_{err}) dt \end{cases}$$

### 1.2.1 Linearizzazione

Poiché la condizione iniziale di equilibrio può essere scelta in modo del tutto arbitrario, le equazioni dell'algoritmo possono notevolmente semplificarsi se si sceglie una traiettoria di volo rettilinea giacente nel piano longitudinale del velivolo, tale cioè che siano verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} V_{A0} = 0 \\ \Delta\Phi_0 + \Phi_0 = 0 \\ P_0 = Q_0 = R_0 = 0 \end{cases}$$

In cui si è assunto che l'angolo di banco stimato sia nullo.

Le equazioni del sistema linearizzato, ma non disaccoppiato, divengono:

$$\begin{cases} dg_x = -g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\vartheta - \Delta\vartheta) \\ dg_y = g \cos(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\varphi + \Delta\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = q - r(\varphi + \Delta\varphi) \\ \dot{\varphi} = p + r \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) + q \tan(\Theta_0 - \Delta\Theta_0) (\varphi + \Delta\varphi) + \\ + r(1 + \tan^2(\Theta_0 - \Delta\Theta_0))(\vartheta - \Delta\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\vartheta = k_2 u_{err} + k_3 \int u_{err} dt \\ \Delta\varphi = k_2 v_{err} + k_3 \int v_{err} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{err} = u_A - u_i \\ v_{err} = v_A - v_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i = \int (\dot{u}_B + k_1 u_{err}) dt \\ v_i = \int (\dot{v}_B + k_1 v_{err}) dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_B = da_x + dg_x + v_A r - W_{A0} q - w_A q \\ \dot{v}_B = da_y + dg_y - U_{A0} r - u_A r + W_{A0} p + w_A p \end{cases}$$

## 1.2.2 Disaccoppiamento

Dai precedenti sistemi di equazioni si può osservare che il sistema linearizzato risulta possedere delle dinamiche accoppiate tra le variabili  $\varphi$  e  $\vartheta$ . Una ulteriore semplificazione consiste nel disaccoppiare tali termini mediante l'ipotesi di  $\Theta_0 - \Delta\Theta_0 = 0$ . Così facendo si crea un'indipendenza delle espressioni in  $u$  e  $\vartheta$  da quelle in  $v$  e  $\varphi$ .

Le equazioni del sistema linearizzato e disaccoppiato, in definitiva, divengono:

$$\begin{cases} \dot{u}_B = da_x + dg_x - W_{A0}q \\ \dot{v}_B = da_y + dg_y - U_{A0}r + W_{A0}p \end{cases}$$

$$\begin{cases} dg_x = -g(\vartheta - \Delta\vartheta) \\ dg_y = g(\varphi + \Delta\varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = q \\ \dot{\varphi} = p \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\vartheta = k_2 u_{err} + k_3 \int u_{err} dt \\ \Delta\varphi = k_2 v_{err} + k_3 \int v_{err} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{err} = u_A - u_i \\ v_{err} = v_A - v_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i = \int (\dot{u}_B + k_1 u_{err}) dt \\ v_i = \int (\dot{v}_B + k_1 v_{err}) dt \end{cases}$$

nelle quali si sono trascurati i termini misti del secondo ordine.

Il vantaggio di studiare il sistema linearizzato e disaccoppiato risiede nella possibilità di disporre di innumerevoli strumenti matematici utili per poter ottenere soluzioni analitiche in forma chiusa che con il modello non lineare sarebbero molto difficili da determinare, se non impossibili.

Lo svantaggio è che più ci si allontana dal punto di linearizzazione più l'approssimazione è distante dal modello di partenza, rendendo non applicabili i risultati delle analisi fatte in campo lineare.

Verrà ora analizzata la dinamica longitudinale.

### 1.2.2.1 Dinamica longitudinale

#### 1.2.2.1 Dinamica longitudinale

In questo caso le equazioni che regolano l'algoritmo, con le assunzioni fatte, sono:

$$\begin{cases} \dot{u}_B = da_x + dg_x - W_{A0}q \\ dg_x = -g(\vartheta - \Delta\vartheta) \\ \dot{\vartheta} = q \\ \Delta\vartheta = k_2 u_{err} + k_3 \int u_{err} dt \\ u_{err} = u_A - u_i \\ u_i = \int (\dot{u}_B + k_1 u_{err}) dt \end{cases}$$

Il progetto dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  può essere affrontato come se si dovesse progettare un sistema di “controllo”, nel senso classico del termine. È possibile infatti orientare il sistema identificando degli ingressi manipolabili e non, delle uscite e delle funzioni di trasferimento tra di essi.

L'uscita che si vuole tenere sotto controllo e sulla cui dinamica si vuole influire è la velocità, in questo contesto, denominata inerziale,  $u_i$ . È utile evidenziare come essa venga confrontata con la quantità di riferimento,  $u_A$ , per la generazione del segnale di errore,  $u_{err}$ . L'elaborazione dinamica di tale errore costituisce l'ingresso del “plant” qui considerato. Le altre quantità in ingresso al sistema sono le misure provenienti dagli accelerometri,  $da_x$ , dai giroscopi,  $q$ , e dai dati aria,  $W_{A0}$ : esse, in questo contesto, sono da intendere come ingressi “non-manipolabili”, sui quali non è possibile agire per modificare la dinamica del sistema in esame.

L'algoritmo che descrive la stima dell'assetto per la dinamica longitudinale, dal punto di vista controllistico, si può raffigurare come segue:

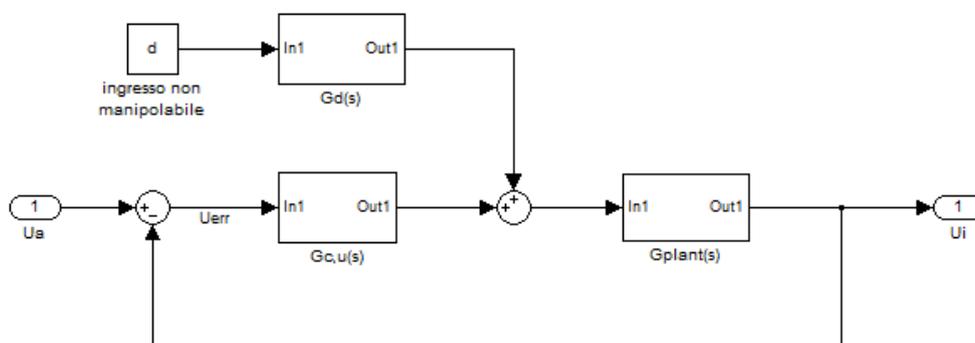


Figura 16 - Schema a blocchi della dinamica longitudinale

### 1.2.2.1 Dinamica longitudinale

Dopo aver orientato il sistema si può ricavare la funzione di trasferimento che associa l'uscita  $u_i$  alla variabile errore  $u_{err}$ , per vedere l'influenza che quest'ultima esercita sulla velocità longitudinale ( $u_i$  appunto) calcolata dall'algoritmo.

Per fare ciò, bisogna innanzitutto trasformare le equazioni dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa  $s$ .

Applicando il metodo della trasformata di Laplace si ottiene

$$\begin{cases} su_B = da_x - qW_{A0} + dg_x \\ dg_x = -g(\vartheta - \Delta\vartheta) \\ s\vartheta = q \\ \Delta\vartheta = \left(k_2 + \frac{k_3}{s}\right)u_{err} \\ u_{err} = u_A - u_i \\ u_i = u_B + \frac{k_1}{s}u_{err} \end{cases}$$

In queste equazioni le variabili, divenute complesse, dovrebbero essere indicate con le lettere maiuscole. Questo però potrebbe portare a confonderle con quelle complessive di partenza.

Quindi, dato che è evidente che si sta lavorando con variabili complesse, si lasciano indicate in minuscolo. Salvo avviso contrario si utilizzerà tale notazione per il resto del presente lavoro.

Per sostituzione:

$$\begin{aligned} su_i = su_B + k_1u_{err} &= da_x - qW_{A0} + dg_x + k_1u_{err} = \\ &= K_1u_{err} + da_x - qW_{A0} - g(\vartheta - \Delta\vartheta) = \\ &= K_1u_{err} + da_x - qW_{A0} - g\left[\frac{q}{s} - k_2u_{err} - \frac{k_3}{s}u_{err}\right] = \\ &= K_1u_{err} + da_x - qW_{A0} - \frac{gq}{s} + g\frac{sk_2 + k_3}{s}u_{err} = \\ &= \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s}u_{err} + \left(da_x - qW_{A0} - \frac{gq}{s}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Da questa relazione è possibile distinguere le tre funzioni di trasferimento  $G_{c,u}(s)$ ,  $G_d(s)$  e  $G_{plant}(s)$  della Figura 16, dove  $c$  sta per “controllore” e  $d$  per “disturbo” (ovvero ingresso non manipolabile).

$$G_{c,u}(s) = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s}$$

$$G_{plant}(s) = \frac{1}{s}$$

### 1.2.2.1 Dinamica longitudinale

Per quanto riguarda la  $G_d(s)$ , essa può essere scomposta in tre sotto-funzioni,  $G_l(s)$ ,  $G_m(s)$  e  $G_n(s)$ , relative rispettivamente agli ingressi  $da_x$ ,  $qW_{A0}$  e  $q$ , come mostrato in Figura 17.

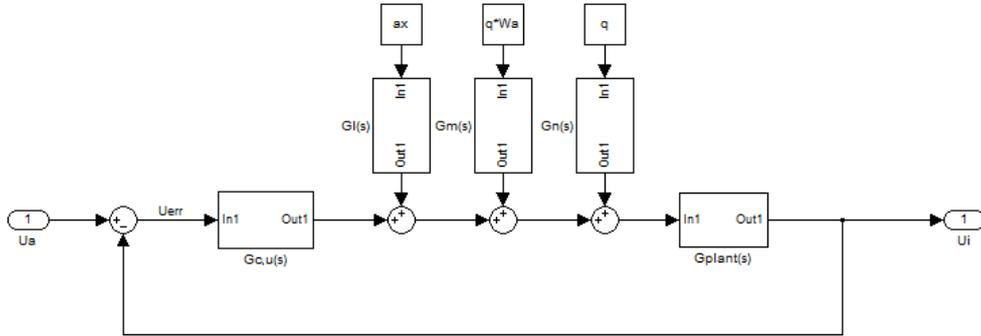


Figura 17 - Schema a blocchi della dinamica longitudinale con distinzione dei disturbi

Esse sono date dalle relazioni

$$\begin{aligned} G_l(s) &= 1 \\ G_m(s) &= -1 \\ G_n(s) &= -\frac{g}{s} \end{aligned}$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione (1) per  $s$ , ossia isolando  $u_i$ , si ottiene:

$$u_i = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} u_{err} + \frac{da_x - qW_{A0} - gq/s}{s}$$

Il termine d'interesse è il primo al secondo membro, la cui funzione di trasferimento vale quindi

$$G_u(s) = G_{c,u}(s) G_{plant}(s) = \frac{u_i}{u_{err}} = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} \quad (2)$$

La *f.d.t.* così ottenuta si può porre nella forma a costanti di tempo, ottenendo

$$G_u(s) = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} = (gk_3) \frac{s \left( \frac{k_1 + gk_2}{gk_3} \right) + 1}{s^2} = K \frac{s\tau + 1}{s^2}$$

con

$$\begin{aligned} K &= gk_3 \\ \tau &= \frac{k_1 + gk_2}{gk_3} \end{aligned}$$

Il modello in Simulink che rappresenta la relazione tra la velocità inerziale  $u_i$  e la velocità aria  $u_A$ , non considerando gli ingressi non manipolabili, è raffigurato da un blocco che realizza la funzione di trasferimento  $G_u(s)$ .

### 1.2.2.2 Dinamica latero-direzionale

Esso, posto in retroazione negativa, genera il segnale errore  $u_{err}$ , come si può vedere dalla Figura 18.

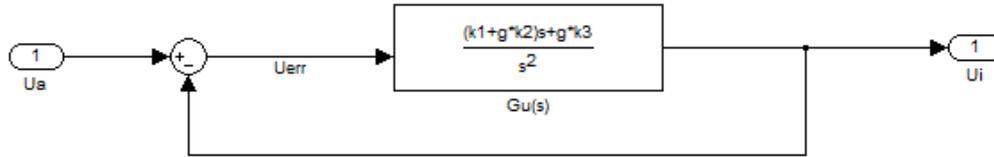


Figura 18 - Realizzazione in Simulink della dinamica longitudinale

Dopo aver analizzato la dinamica longitudinale passiamo a quella latero-direzionale che vede interessate le variabili  $V$  e  $\varphi$ .

### 1.2.2.2 Dinamica latero-direzionale

Per la dinamica latero-direzionale le equazioni che regolano l'algoritmo sono:

$$\begin{cases} \dot{v}_B = da_y + dg_y + pW_{A0} - rU_{A0} \\ dg_y = g(\varphi + \Delta\varphi) \\ \dot{\varphi} = p \\ \Delta\varphi = k_2 v_{err} + k_3 \int v_{err} dt \\ v_{err} = v_A - v_i \\ v_i = \int (\dot{v}_B + k_1 v_{err}) dt \end{cases}$$

In questo caso l'uscita che si vuole tenere sotto controllo e sulla cui dinamica si vuole influire è la velocità inerziale  $v_i$ . È utile evidenziare come essa venga confrontata con la quantità di riferimento,  $v_A$ , per la generazione del segnale di errore,  $v_{err}$ . L'elaborazione dinamica di tale errore costituisce l'ingresso del "plant" qui considerato. Le altre quantità in ingresso al sistema sono le misure provenienti dagli accelerometri,  $da_y$ , dai giroscopi,  $p$  ed  $r$ , e dai dati aria,  $U_{A0}$  e  $W_{A0}$ : esse, in questo contesto, sono da intendere come ingressi "non-manipolabili", sui quali non è possibile agire per modificare la dinamica del sistema in esame.

Analogamente a quanto visto precedentemente, l'algoritmo che descrive la stima dell'assetto per la dinamica latero-direzionale, dal punto di vista "controllistico", si può raffigurare come segue:

### 1.2.2.2 Dinamica latero-direzionale

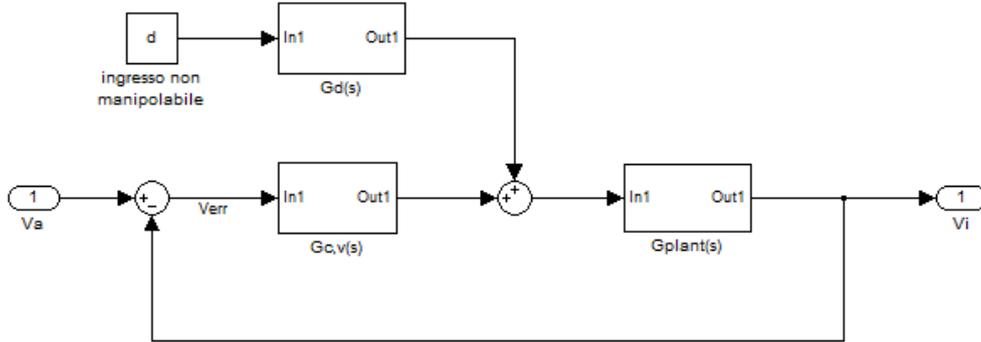


Figura 19 - Schema a blocchi dell'algoritmo di stima per la dinamica latero-direzionale

Dopo aver orientato il sistema si può ricavare la funzione di trasferimento che associa l'uscita  $v_i$  alla variabile errore  $v_{err}$ , per vedere l'influenza che quest'ultima esercita sulla velocità laterale ( $v_i$  appunto) calcolata dall'algoritmo.

Per fare ciò, bisogna innanzitutto trasformare le equazioni dal dominio del tempo al dominio della variabile complessa  $s$ .

Applicando il metodo della trasformata di Laplace si ottiene:

$$\begin{cases} sv_B = da_y + dg_y + pW_{A0} - rU_{A0} \\ dg_y = g(\varphi + \Delta\varphi) \\ s\varphi = p \\ \Delta\varphi = \left(k_2 + \frac{k_3}{s}\right) v_{err} \\ v_{err} = v_A - v_i \\ v_i = v_B + \frac{k_1}{s} v_{err} \end{cases}$$

Quindi, per sostituzione:

$$\begin{aligned} sv_i &= sv_B + k_1 v_{err} = \\ &= k_1 v_{err} + da_y + pW_{A0} - rU_{A0} + dg_y = \\ &= k_1 v_{err} + da_y + pW_{A0} - rU_{A0} + g(\varphi + \Delta\varphi) = \\ &= k_1 v_{err} + da_y + pW_{A0} - rU_{A0} + g\varphi + g\Delta\varphi = \\ &= k_1 v_{err} + da_y + pW_{A0} - rU_{A0} + \frac{gp}{s} + g\left(k_2 + \frac{k_3}{s}\right) v_{err} = \\ &= \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s} v_{err} + \frac{s(da_y + pW_{A0} - rU_{A0}) + gp}{s} \end{aligned} \quad (3)$$

Da questa relazione è possibile distinguere le tre funzioni di trasferimento  $G_{c,v}(s)$ ,  $G_d(s)$  e  $G_{plant}(s)$  della Figura 19.

### 1.2.2.2 Dinamica latero-direzionale

$$G_{c,v}(s) = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s}$$

$$G_{plant}(s) = \frac{1}{s}$$

Per quanto riguarda la  $G_d(s)$ , essa può essere scomposta in quattro sotto-funzioni,  $G_e(s)$ ,  $G_f(s)$ ,  $G_h(s)$  e  $G_i(s)$ , relative rispettivamente agli ingressi  $da_y$ ,  $rU_{A0}$ ,  $pW_{A0}$  e  $p$ , come mostrato in Figura 20.

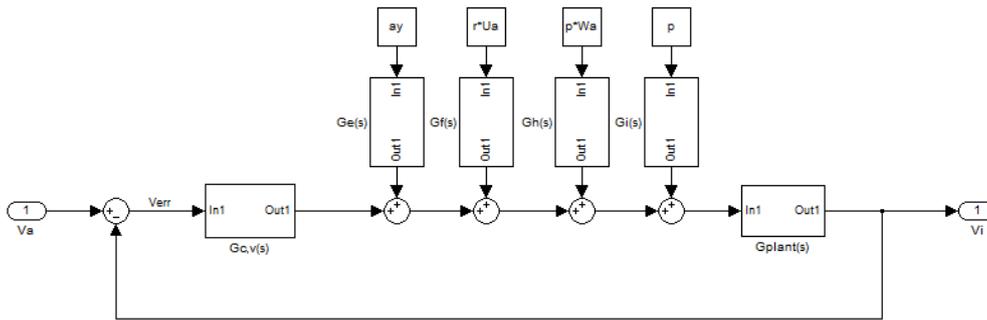


Figura 20 - Schema a blocchi dell'algoritmo di stima per la dinamica latero-direzionale con distinzione dei disturbi

Esse sono date dalle relazioni

$$G_e(s) = 1$$

$$G_f(s) = -1$$

$$G_h(s) = 1$$

$$G_i(s) = \frac{g}{s}$$

Dividendo entrambi i membri dell'equazione (3) per  $s$ , ossia isolando  $v_i$ , si ottiene:

$$v_i = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} v_{err} + \frac{s(da_y + pW_{A0} - rU_{A0}) + gp}{s^2}$$

Quindi la funzione di trasferimento che lega  $V_i$  a  $V_{err}$  è:

$$G_v(s) = G_{c,v}(s) G_{plant}(s) = \frac{v_i}{v_{err}} = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2}$$

Anche questa si può esprimere nella forma a costanti di tempo, come per la  $G_u(s)$ , al fine di studiarne meglio il comportamento:

### 1.2.2.2 Dinamica latero-direzionale

$$G_v(s) = \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} = (gk_3) \frac{s \left( \frac{k_1 + gk_2}{gk_3} \right) + 1}{s^2} = K \frac{s\tau + 1}{s^2}$$

con

$$K = gk_3$$

$$\tau = \frac{k_1 + gk_2}{gk_3}$$

Si osserva che  $G_v(s)$  è uguale a  $G_u(s)$ , e quindi il modello che la descrive è analogo a quello visto nel precedente paragrafo (Figura 18). In particolare, esse hanno lo stesso luogo delle radici e di conseguenza il medesimo comportamento dell'uscita rispetto ad uno stesso segnale in ingresso.

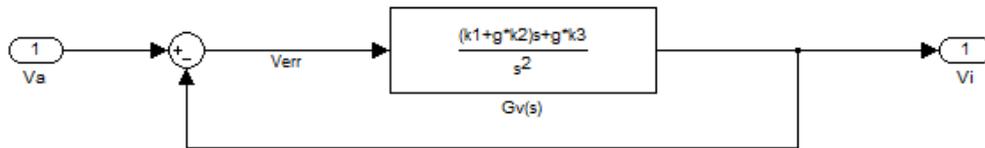


Figura 21 - Realizzazione in Simulink della dinamica latero-direzionale

Avendo ottenuto anche il modello che schematizza la dinamica laterale, si può procedere alla determinazione dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , passando così alla fase progettuale.

### 1.3 Progetto dei parametri

Si è osservato, nel capitolo precedente, che i modelli disaccoppiati sono descritti dalla stessa funzione di trasferimento, la quale lega la velocità aria in ingresso alla velocità inerziale di uscita.

Per questo motivo, si possono progettare i parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  analizzando uno dei due modelli, indifferentemente.

I dati di specifica sui quali si basa il progetto di un sistema di controllo riguardano la precisione, la stabilità, la prontezza e la sensibilità ai disturbi.

I dati che riguardano la precisione sono gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di determinati disturbi e determinate variazioni di parametri; i dati che riguardano la stabilità, intesa nel senso lato di “comportamento dinamico soddisfacente”(in quanto la stabilità in senso stretto è sempre sottintesa), sono la massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti; i dati che riguardano la prontezza sono il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante; i dati che riguardano la sensibilità ai disturbi sono i valori delle funzioni di sensibilità a diversi tipi di disturbi e a diverse frequenze.

Alcuni di questi dati di specifica sono relativi alla risposta ai segnali tipici, altri alla risposta armonica; molti dell'uno e dell'altro tipo sono, grosso modo, equivalenti. Poiché il progetto del sistema di controllo si effettua normalmente considerando la risposta armonica, occorre riportare i parametri nel dominio del tempo a parametri nel dominio della frequenza: tale operazione non è in generale possibile in modo rigoroso in quanto, se è pur vero che l'intera risposta armonica è legata biunivocamente all'intera risposta ad un segnale tipico, per esempio il gradino, ciò non vale per alcuni parametri delle due risposte. L'unico modo per porre in relazione, seppur approssimativamente, i parametri che riguardano la risposta armonica e quelli che riguardano la risposta ad un segnale tipico è ipotizzare che il sistema in retroazione si comporti approssimativamente come un sistema del secondo ordine a poli complessi, o comunque abbia un numero limitato di poli dominanti.

Per la determinazione dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , si sono valutate le specifiche sulle stabilità, prendendo in considerazione la massima sovraelongazione in risposta ad un gradino unitario, e sulla prontezza, esaminando il tempo di assestamento.

La massima sovraelongazione viene indicata con  $S$  ed è la differenza tra il valore massimo raggiunto dall'uscita e il valore finale; normalmente si dà in % del valore finale.

### 1.3.1 Progetto di $k_1$

Il tempo di assestamento si indica con  $T_a$  ed è il tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il  $\pm 5\%$  del valore finale.

#### 1.3.1 Progetto di $k_1$

Osservando la *Figura 2* si nota che nell'algoritmo sono presenti due retroazioni: una esterna, che fornisce l'angolo di correzione al blocco "Attitude Integration", chiudendo il sistema, ed una interna, che fa in modo che le velocità inerziali tendano a quelle di riferimento, annullando il relativo errore espresso come differenza tra le due.

Ora, mentre i parametri  $k_2$  e  $k_3$  fanno parte della retroazione esterna,  $k_1$  è il guadagno di quella interna. Per questo motivo il progetto di questo parametro si basa prendendo in considerazione solamente il blocco "The air data/inertial velocity mixing loops":

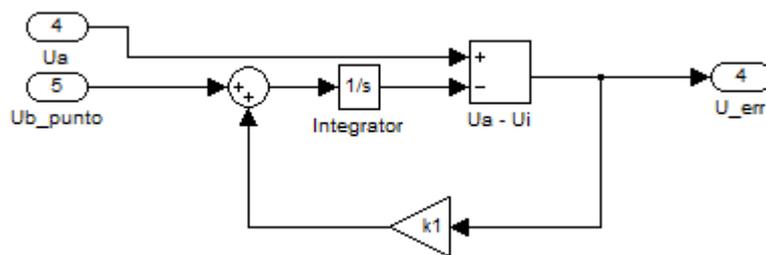


Figura 22 - Blocco "The air data/inertial velocity mixing loops"

Vedendo  $U_{b\_punto}$  come un disturbo, esso può essere ridisegnato nel seguente modo:

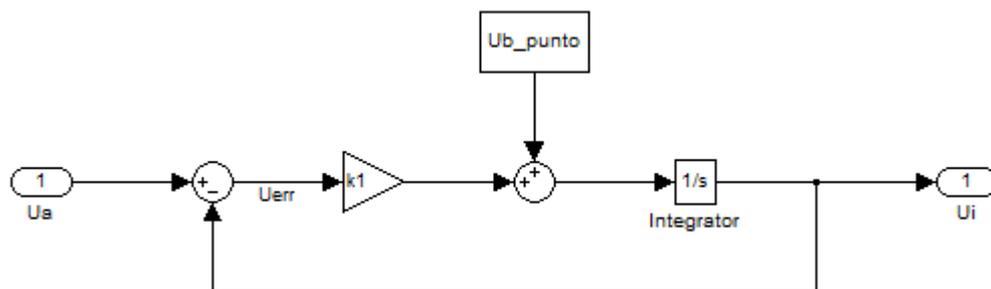


Figura 23 - Blocco "The air data/inertial velocity mixing loops" con disturb

Le equazioni che descrivono questo sistema sono:

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{s}(su_B + k_1 u_{err}) \\ u_{err} = u_A - u_i \end{cases} \quad (4)$$

### 1.3.1 Progetto di $k_1$

Per ricavare la funzione di trasferimento che associa l'uscita  $u_i$  all'ingresso  $u_A$ , si sostituisce la seconda equazione del sistema (4) nella prima:

$$u_i = \frac{1}{s} s u_B + \frac{k_1}{s} u_{err} = u_B + \frac{k_1}{s} (u_A - u_i) = u_B + \frac{k_1}{s} u_A - \frac{k_1}{s} u_i$$

Portando l'ultimo termine al primo membro si ha:

$$u_i \left( 1 + \frac{k_1}{s} \right) = u_i \frac{s + k_1}{s} = u_B + \frac{k_1}{s} u_A = \frac{s u_B + k_1 u_A}{s}$$

E dividendo per il coefficiente di  $U_i$ :

$$u_i = \frac{s u_B + k_1 u_A}{s} \frac{s}{s + k_1} = \frac{s u_B + k_1 u_A}{s + k_1} = \frac{k_1}{s + k_1} u_A + \frac{s u_B}{s + k_1}$$

Perciò, la *f.d.t.* che lega  $u_i$  ad  $u_A$  è:

$$\frac{u_i}{u_A} = \frac{k_1}{s + k_1} \quad (5)$$

che ha un unico polo in  $-k_1$ .

Il sistema ottenuto è:

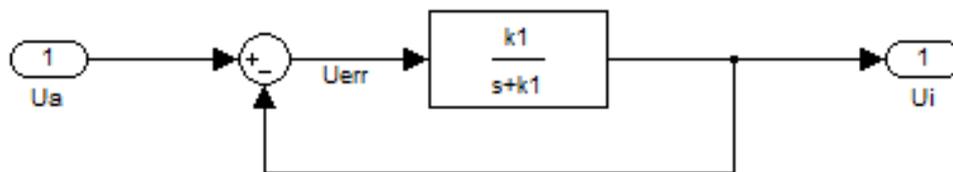


Figura 24 - Blocco "The air data/inertial velocity mixing loops" in assenza di disturbo

Dividendo la (5) per  $k_1$  si ricava la forma in costanti di tempo:

$$\frac{u_i}{u_A} = \frac{1}{s/k_1 + 1} = \frac{1}{s\tau_{k1} + 1}$$

con  $\tau_{k1} = 1/k_1$

Si suppone di eccitare questo sottosistema con un gradino unitario, rappresentato dalla funzione

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

La risposta al gradino unitario nel dominio del tempo è dato dalla seguente relazione:

$$y(t) = 1 - e^{-t/\tau_{k1}}$$

### 1.3.2 Progetto di $k_2$ e $k_3$

Il tempo di assestamento,  $T_a$  (tempo necessario affinché l'uscita converga entro il  $\pm 5\%$  del valore finale), è facilmente deducibile mediante la seguente formula:

$$1 - e^{-T_a/\tau_{k1}} = 0.95$$

e cioè

$$e^{-T_a/\tau_{k1}} = 0.05$$

Facendo il logaritmo di entrambi i membri si ottiene

$$T_a/\tau_{k1} \approx 3$$

Se, ad esempio, si assegnasse un tempo di assestamento pari a 2 secondi, si avrebbe

$$\tau_{k1} \approx T_a/3 = 2/3$$

Quindi

$$k_1 = 1/\tau_{k1} \approx 3/2 = 1.5 \frac{1}{s}$$

### 1.3.2 Progetto di $k_2$ e $k_3$

Per quanto riguarda la progettazione di  $k_2$  e  $k_3$ , si calcola la funzione di trasferimento ad anello chiuso, ottenuto chiudendo in retroazione la  $G_u(s)$  calcolata in precedenza (equazione (2)), e rappresentato in Figura 25:

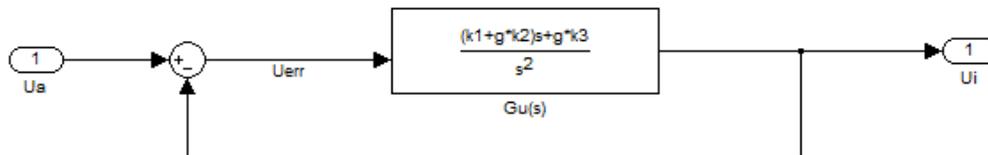


Figura 25 - Modello della dinamica longitudinale

La funzione di trasferimento, tra ingresso ed uscita, del sistema in retroazione vale:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) &= \frac{G_u(s)}{1 + G_u(s)} = \frac{K \frac{s\tau + 1}{s^2}}{1 + K \frac{s\tau + 1}{s^2}} = \\ &= \frac{\frac{sK\tau + K}{s^2}}{\frac{s^2 + sK\tau + K}{s^2}} = \frac{(s\tau + 1)K}{s^2 + sK\tau + K} \end{aligned}$$

### 1.3.2 Progetto di k2 e k3

L'espressione trovata, in forma di costanti di tempo, può essere scritta utilizzando dei parametri più significativi come  $\delta$  e  $\omega_n$ :

$$G(s) = \frac{(s\tau + 1)K}{s^2 + sK\tau + K} = \frac{(sT + 1)\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (6)$$

Quindi, eguagliando il secondo ed il terzo membro della (6), si ricava:

$$\begin{aligned} T &= \tau \\ \omega_n &= \sqrt{K} \\ \delta &= \frac{\tau\sqrt{K}}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Ricordando che

$$\begin{aligned} K &= gk_3 \\ \tau &= \frac{k_1 + gk_2}{gk_3} \end{aligned} \quad (8)$$

Si suppone di eccitare anche questo sistema con il gradino unitario  $u(t)$ .

#### Specifica sulla massima sovraelongazione

La massima sovraelongazione, in risposta al gradino unitario, è data da:

$$\begin{aligned} y_m &= 1 + \sqrt{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2} e^{\frac{-\phi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = \\ &= 1 + \sqrt{1 - \frac{2\delta\omega_n 2\delta}{\omega_n} + \frac{\omega_n^2 4\delta^2}{\omega_n^2}} e^{\frac{-\phi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = \\ &= 1 + e^{\frac{-\phi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \end{aligned} \quad (9)$$

dove

$$\begin{aligned} \phi &= \pi - \arctan\left(\frac{\omega_n T \sqrt{1-\delta^2}}{1 - \delta\omega_n T}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{\frac{\omega_n 2\delta}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}}{1 - \frac{\delta\omega_n 2\delta}{\omega_n}}\right) = \\ &= \pi - \arctan\left(\frac{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}{1 - 2\delta^2}\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Sostituendo la (10) nella (9) si ottiene il valore massimo della risposta  $y(t)$ :

$$y_m = 1 + e^{-\left[\pi - \arctan\left(\frac{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}{1-2\delta^2}\right)\right] \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

### 1.3.2 Progetto di k2 e k3

La massima sovraelongazione, espressa in percentuale, vale:

$$S = (y_m - 1) \cdot 100 = 100 \cdot e^{-\left[\pi - \arctan\left(\frac{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}{1-2\delta^2}\right)\right] \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

dalla quale si nota che  $S$  dipende solo da  $\delta$ .

In Figura 26 è raffigurato il legame tra il coefficiente di smorzamento  $\delta$  e la massima sovraelongazione  $S$ , espressa in percentuale.

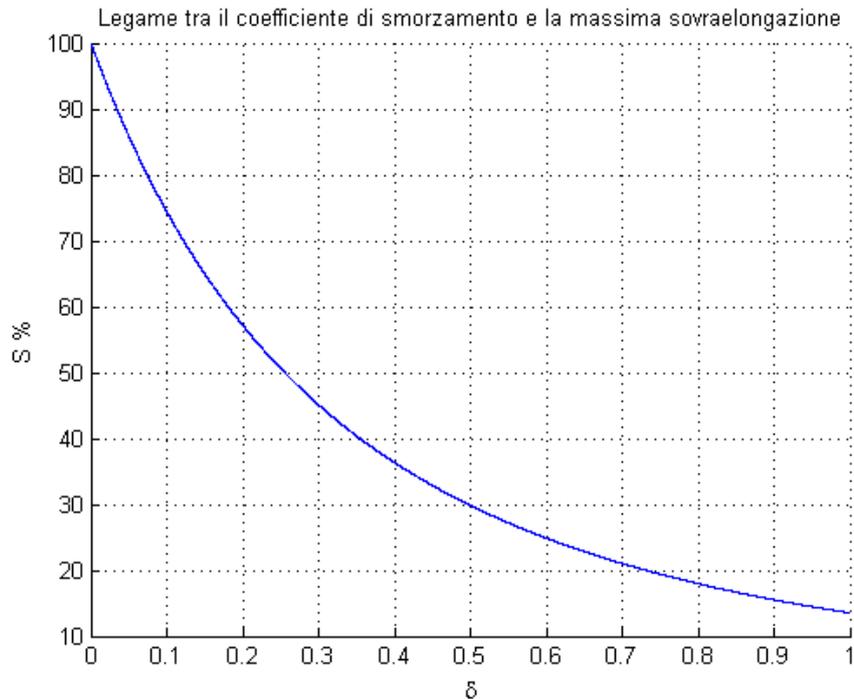


Figura 26 - Legame tra il coefficiente di smorzamento  $\delta$  e la massima sovraelongazione  $S$

Assegnando un opportuno valore ad  $S$ , si può ricavare  $\delta$  numericamente.

Per trovare il valore di  $\delta$  che soddisfa questa specifica si è utilizzata la funzione *fzero* di Matlab:

```
delta=fzero('100*exp(-(pi-atan2((2*delta*(sqrt(1-delta^2))), (1-2*delta^2)))*delta/(sqrt(1-delta^2)))-S',0.4)
```

Il primo campo della funzione *fzero* rappresenta l'equazione

$$100 \cdot e^{-\left[\pi - \arctan\left(\frac{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}{1-2\delta^2}\right)\right] \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} - S = 0$$

Il secondo campo è il valore di tentativo di  $\delta$  con il quale il programma inizia il processo di iterazione, per arrivare al valore corretto della variabile indipendente.

Nel caso in cui si si ponesse  $S = 20$ , cioè che la massima sovraelongazione fosse il 20% del valore finale, si otterrebbe  $\delta = 0,7312$ .

### 1.3.2 Progetto di $k_2$ e $k_3$

#### Specifica sul tempo di assestamento

La curva, nel dominio del tempo, che descrive la risposta del sistema in esame ad un gradino unitario è data da :

$$y(t) = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \quad (11)$$

Dove

$$A = \frac{\sqrt{1 - 2\delta\omega_n T + \omega_n^2 T^2}}{1 - \delta^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2\delta\omega_n 2\delta}{\omega_n} + \frac{\omega_n^2 4\delta^2}{\omega_n^2}}}{1 - \delta^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} \quad (12)$$

Sostituendo la (12) nella (11), si trova:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n t}$$

Si vuole ricavare, con la specifica sul tempo di assestamento, il valore della pulsazione naturale  $\omega_n$ , attraverso la quale sono facilmente deducibili i parametri  $k_2$  e  $k_3$  dalle relazioni (7) e (8).

Per la specifica sul tempo di assestamento deve valere:

$$0.95 = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n T_a}$$

Procedendo con i calcoli:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}} e^{-\delta\omega_n T_a} &= 0.05 \\ e^{-\delta\omega_n T_a} &= 0.05\sqrt{1 - \delta^2} \\ -\delta\omega_n T_a &= \ln 0.05\sqrt{1 - \delta^2} \end{aligned}$$

Da cui

$$\omega_n = -\frac{\ln 0.05\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta T_a} \quad (13)$$

Quindi la pulsazione naturale è funzione del tempo di assestamento e del coefficiente di smorzamento, il quale è stato calcolato con la specifica sulla massima sovraelongazione.

Se, per esempio, si assegnasse  $T_a = 2$  secondi, con un valore di  $\delta = 0,7312$  si ricaverebbe  $\omega_n = 2.31$  rad/s dalla (13), e di conseguenza  $K$  e  $\tau$  da (8):

### 1.3.2 Progetto di $k_2$ e $k_3$

$$K = \omega_n^2 = 5.3359 \text{ (rad/s)}^2$$

$$\tau = \frac{2\delta}{\omega_n} = 0.6331 \text{ s}$$

Ed infine  $k_2$  e  $k_3$ :

$$k_3 = \frac{K}{g} = 0.54411 \text{ 1/m}$$

$$k_2 = \frac{gk_3\tau - k_1}{g} = 0.19153 \text{ s/m}$$

## 1.4.1 Stabilità su modello disaccoppiato

### 1.4 Analisi di stabilità

#### 1.4.1 Stabilità su modello disaccoppiato

Dato che i modelli disaccoppiati sono descritti dalla stessa funzione di trasferimento, si può studiarne la stabilità prendendone in esame uno solo, indifferentemente.

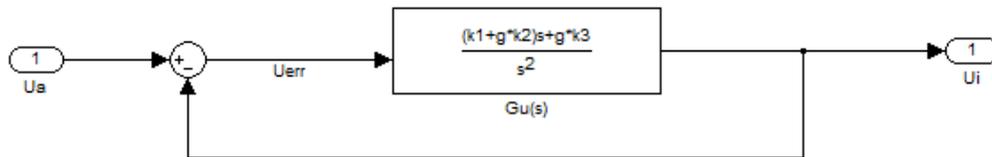


Figura 27 - Modello dell'algoritmo di stima per la dinamica longitudinale

Nel capitolo “Dinamica longitudinale” si è ricavata la funzione di trasferimento scritta in forma di costanti di tempo, che lega la velocità inerziale  $u_i$  alla variabile errore  $u_{err}$ :

$$G_u(s) = K \frac{s\tau + 1}{s^2}$$

dove

$$K = gk_3$$
$$\tau = \frac{k_1 + gk_2}{gk_3}$$

Il luogo delle radici del sistema, al variare del parametro  $K$ , è del tipo rappresentato in Figura 28.

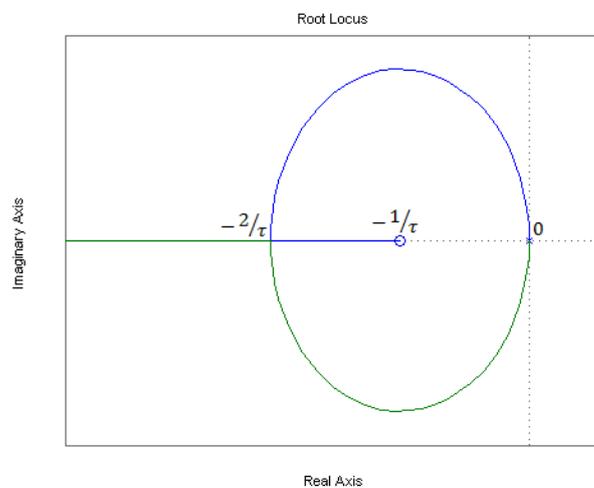


Figura 28 - Luogo delle radici del sistema che rappresenta la dinamica longitudinale

## 1.4.2 Stabilità su modello linearizzato

Si nota che il sistema è sempre stabile, in quanto i poli sono sempre a parte reale negativa.

Lo zero si trova annullando il numeratore della  $G_u(s)$ :

$$s\tau + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad s = -1/\tau$$

Il punto di emergenza si ottiene annullando la derivata della  $G_u(s)$ :

$$\frac{\partial G_u(s)}{\partial s} = \frac{\partial K \frac{s\tau + 1}{s^2}}{\partial s} = -\frac{\tau s^2 + 2s}{s^4} = -\frac{\tau s + 2}{s^3} = 0 \quad \rightarrow \quad s = -2/\tau$$

Il valore del guadagno  $K$  nel punto di emergenza si ricava ponendo il modulo della funzione di trasferimento pari a 1.

$$|G_u(s)| = 1$$

Per cui

$$|G_u(s)| = \left| K \frac{s\tau + 1}{s^2} \right| = |K| \frac{|s\tau + 1|}{|s|^2} = |K| \frac{|(-2/\tau)\tau + 1|}{|(-2/\tau)^2|} = |K| \frac{\tau^2}{4} = 1$$

Che fornisce

$$|K| = \frac{4}{\tau^2}$$

Quindi:

- se  $K > 4/\tau^2$ , i poli della  $G_u(s)$  sono reali, negativi e distinti
- se  $K = 4/\tau^2$ , i poli della  $G_u(s)$  sono reali, negativi e coincidenti
- se  $K < 4/\tau^2$ , i poli della  $G_u(s)$  sono complessi coniugati a parte reale negativa

## 1.4.2 Stabilità su modello linearizzato

Vengono di seguito riportate le equazioni che regolano il sistema linearizzato, come descritto nel capitolo “Linearizzazione”, considerando solamente i termini che producono una variazione rispetto al punto di linearizzazione.

$$\begin{cases} \dot{u}_B = da_x + dg_x - W_{A0}q \\ \dot{v}_B = da_y + dg_y - U_{A0}r + W_{A0}p \\ \begin{cases} dg_x = -g(\vartheta - \Delta\vartheta) \\ dg_y = g(\varphi + \Delta\varphi) \end{cases} \end{cases}$$

## 1.4.2 Stabilità su modello linearizzato

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = -r(\varphi + \Delta\varphi) \\ \dot{\varphi} = r(\vartheta - \Delta\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\vartheta = k_2 u_{err} + k_3 \int u_{err} dt \\ \Delta\varphi = k_2 v_{err} + k_3 \int v_{err} dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{err} = u_A - u_i \\ v_{err} = v_A - v_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i = \int (\dot{u}_B + k_1 u_{err}) dt \\ v_i = \int (\dot{v}_B + k_1 v_{err}) dt \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace si ottiene:

$$\begin{cases} s u_B = d a_x + d g_x - W_{A0} q = d a_x - g(\vartheta - \Delta\vartheta) - W_{A0} q \\ s v_B = d a_y + d g_y - U_{A0} r + W_{A0} p = d a_y + g(\varphi + \Delta\varphi) - U_{A0} r + W_{A0} p \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \vartheta = -r(\varphi + \Delta\varphi) \\ s \varphi = r(\vartheta - \Delta\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta\vartheta = \left(k_2 + \frac{k_3}{s}\right) u_{err} \\ \Delta\varphi = \left(k_2 + \frac{k_3}{s}\right) v_{err} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_i = u_B + \frac{k_1}{s} u_{err} \\ v_i = v_B + \frac{k_1}{s} v_{err} \end{cases}$$

Se si pongono sotto forma di derivate si ha

$$\begin{cases} s u_B = d a_x - g(\vartheta - \Delta\vartheta) - W_{A0} q \\ s v_B = d a_y + g(\varphi + \Delta\varphi) - U_{A0} r + W_{A0} p \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \vartheta = -r(\varphi + \Delta\varphi) \\ s \varphi = r(\vartheta - \Delta\vartheta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s \Delta\vartheta = (s k_2 + k_3) u_{err} \\ s \Delta\varphi = (s k_2 + k_3) v_{err} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s u_i = s u_B + k_1 u_{err} \\ s v_i = s v_B + k_1 v_{err} \end{cases}$$

## 1.4.2 Stabilità su modello linearizzato

Si identificano le variabili  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $\vartheta - \Delta\vartheta$  e  $\varphi + \Delta\varphi$  come variabili di stato.

Per quanto riguarda  $u_i$  e  $v_i$  si procede sostituendo i due sistemi centrali nel primo, e poi nell'ultimo:

$$\begin{cases} su_i = k_1 u_{err} + s u_B = k_1 u_A - k_1 u_i + da_x - g(\vartheta - \Delta\vartheta) - W_{A0} q \\ sv_i = k_1 v_{err} + s v_B = k_1 v_A - k_1 v_i + da_y + g(\varphi + \Delta\varphi) - U_{A0} r + W_{A0} p \end{cases}$$

Invece per quanto riguarda  $\vartheta - \Delta\vartheta$  e  $\varphi + \Delta\varphi$  si ha:

$$\begin{cases} s(\vartheta - \Delta\vartheta) = s\vartheta - s\Delta\vartheta = -r(\varphi + \Delta\varphi) - (sk_2 + k_3)(u_A - u_i) \\ s(\varphi + \Delta\varphi) = s\varphi + s\Delta\varphi = r(\vartheta - \Delta\vartheta) + (sk_2 + k_3)(v_A - v_i) \end{cases}$$

E, svolgendo il prodotto:

$$\begin{cases} s(\vartheta - \Delta\vartheta) = -r(\varphi + \Delta\varphi) - (sk_2 + k_3)u_A + (sk_2 + k_3)u_i \\ s(\varphi + \Delta\varphi) = r(\vartheta - \Delta\vartheta) + (sk_2 + k_3)v_A - (sk_2 + k_3)v_i \end{cases}$$

Quindi le quattro variabili sopraelencate dipendono da loro stesse e dalle velocità aria  $u_A$  e  $v_A$ .

Queste relazioni possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{aligned} s \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vartheta - \Delta\vartheta \\ \varphi + \Delta\varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & -g & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & g \\ k_3 - k_1 k_2 & 0 & -g k_2 & -r \\ 0 & -k_3 + k_1 k_2 & r & -g k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \vartheta - \Delta\vartheta \\ \varphi + \Delta\varphi \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 k_2 - s k_2 - k_3 & 0 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ v_A \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -W_{A0} & 0 \\ W_{A0} & 0 & -U_{A0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_x \\ da_y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che è del tipo

$$sIx = Ax + Bu$$

Per studiare la stabilità alla Lyapunov del presente sistema si ipotizza il sistema in equilibrio e nulle le azioni forzanti. Le proprietà di stabilità per un siffatto sistema si traducono nello studio dei poli dello stesso. Tali poli possono essere ottenuti mediante la determinazione degli autovalori della matrice  $(sI - A)$ .

Quindi il determinante, posto uguale a zero, fornisce i poli del sistema.

### 1.4.2 Stabilità su modello linearizzato

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s + k_1 & 0 & g & 0 \\ 0 & s + k_1 & 0 & -g \\ k_1 k_2 - k_3 & 0 & s + g k_2 & r \\ 0 & k_3 - k_1 k_2 & -r & s + g k_2 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

dove

$$a_3 = 2(k_1 + k_2 g) = 2a$$

$$\begin{aligned} a_2 &= k_1^2 + 2gk_1 k_2 + g^2 k_2^2 + 2gk_3 + r^2 = \\ &= (k_1 + k_2 g)^2 + 2gk_3 + r^2 = \\ &= a^2 + 2gk_3 + r^2 \end{aligned}$$

$$a_1 = 2r^2 k_1 + 2g^2 k_2 k_3 + 2gk_1 k_3 = 2(gk_3 a + k_1 r^2)$$

$$a_0 = g^2 k_3^2 + r^2 k_1^2$$

Requisito necessario, ma non sufficiente, per la stabilità, è che tutti i coefficienti del polinomio siano maggiori di zero.

Esso è verificato in quanto i parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  sono positivi per definizione e perché nella formula del determinante compaiono solo somme di quantità positive.

Il requisito sufficiente per la stabilità risiede nell'applicazione del criterio di Routh.

4	1	$a_2$	$a_0$
3	$a_3$	$a_1$	
2	$a_2 a_3 - a_1$	$a_0 a_3$	
1	$a_1 a_2 a_3 - a_1^2 - a_3^2 a_0$		
0	$a_0$		

Dalla prima colonna della tabella si ottiene che bisogna verificare le seguenti disuguaglianze:

$$a_3 a_2 - a_1 > 0$$

$$a_1 (a_3 a_2 - a_1) - a_0 a_3^2 > 0$$

Verifica della disequazione  $a_3 a_2 - a_1 > 0$

$$\begin{aligned} a_3 a_2 - a_1 &= 2a(a^2 + 2gk_3 + r^2) - 2(gk_3 a + k_1 r^2) = \\ &= 2a^3 + 2gk_3 a + 2r^2(a - k_1) = \\ &= 2a^3 + 2gk_3 a + 2r^2 k_2 g > 0 \end{aligned}$$

#### 1.4.2 Stabilità su modello linearizzato

Verifica della disequazione  $a_1(a_3a_2 - a_1) - a_0a_3^2 > 0$

$$\begin{aligned}
 & a_1(a_3a_2 - a_1) - a_0a_3^2 = \\
 & = 4(k_1r^2 + gk_3a)[r^2k_2g + (a^3 + gk_3a)] - 4(r^2k_1^2 + g^2k_3^2)a^2 = \\
 & = r^44k_1k_2g + r^24a[k_1(a^2 + gk_3 - k_1a) + g^2k_3k_2] + \\
 & \quad + 4gk_3a(a^3 + gk_3a) - 4g^2k_3^2a^2 = \\
 & = r^44k_1k_2g + r^24a[k_1(a^2 + gk_3 - k_1a) + g^2k_3k_2] + 4gk_3a^4 = \\
 & = r^44k_1k_2g + r^24a\{k_1[(k_1 + k_2g)^2 + gk_3 - k_1(k_1 + k_2g)] + g^2k_3k_2\} + \\
 & \quad + 4gk_3a^4 = \\
 & = r^44k_1k_2g + r^24a\{k_1[k_1^2 + g^2k_2^2 + 2k_1k_2g + gk_3 - k_1^2 - k_1k_2g] + \\
 & \quad + g^2k_3k_2\} + 4gk_3a^4 = \\
 & = r^44k_1k_2g + r^24a\{k_1[g^2k_2^2 + k_1k_2g + gk_3] + g^2k_3k_2\} + 4gk_3a^4 > 0
 \end{aligned}$$

Ma questo polinomio in  $r$  è sempre maggiore di zero perché i coefficienti del polinomio stesso sono tutti maggiori di zero.

Quindi è stata dimostrata la stabilità asintotica del sistema lineare considerato.

## 1.5 Errori a regime

Nello studio dei sistemi di controllo in retroazione, un dato di specifica di notevole importanza è l'errore a regime nella risposta ai segnali tipici. In questo modo si riesce a capire, applicando segnali in ingresso di tipo canonico, i limiti del sistema in esame.

Come fatto per la progettazione dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , anche in questo caso si può studiare l'errore a regime prendendo in considerazione il modello che descrive la dinamica longitudinale.

Si fa riferimento perciò al sistema di Figura 29, con retroazione unitaria, in cui la variabile a valle della prima giunzione sommante rappresenta l'errore, inteso come scostamento della variabile controllata rispetto al riferimento.

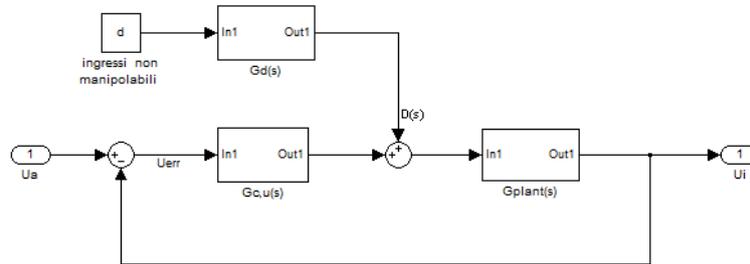


Figura 29 - Modello della dinamica longitudinale

Conoscendo  $G_{c,u}(s)$ ,  $G_{plant}(s)$  e  $G_d(s)$ , si può calcolare l'errore a regime, considerando diverse tipologie di ingresso  $u_A(s)$ : gradino, rampa, parabola e cubica.

Le equazioni che descrivono questo sistema, nel dominio complesso, sono le seguenti:

$$\begin{cases} u_{err} = u_A - u_i \\ u_i = G_u(s)u_{err} + \frac{da_x - qW_{A0} - g q/s}{s} = \\ = \left[ \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} \right] u_{err} + \frac{da_x - qW_{A0} - g q/s}{s} \end{cases}$$

Sostituendo la seconda nella prima si ha:

$$u_{err} = u_A - \left[ \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} \right] u_{err} - \frac{da_x - qW_{A0} - g q/s}{s}$$

Portando i termini in  $u_{err}$  a primo membro, e raccogliendolo:

$$u_{err} \left[ 1 + \frac{s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2} \right] = u_A - \frac{da_x - qW_{A0} - g q/s}{s}$$

## 1.5 Errori a regime

Premoltiplicando per l'inversa di  $1 + G_u(s)$  si ottiene:

$$u_{err}(s) = \frac{u_A(s)}{1 + G_u(s)} + \frac{D(s)}{1 + G_u(s)}$$

Che, dopo aver esplicitato i termini, diventa:

$$\begin{aligned} u_{err}(s) &= \frac{u_A}{\frac{s^2 + s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2}} - \frac{\frac{da_x - qW_{A0} - gq/s}{s}}{\frac{s^2 + s(k_1 + gk_2) + gk_3}{s^2}} = \\ &= \frac{s^2 u_A}{s^2 + s(k_1 + gk_2) + gk_3} - \frac{s(da_x - qW_{A0} - gq/s)}{s^2 + s(k_1 + gk_2) + gk_3} \end{aligned}$$

Poiché interessa l'andamento di  $u_{err}(t)$  per  $t$  tendente all'infinito, si applicherà il teorema del valore finale, espresso dalla relazione:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_{err}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s u_{err}(s)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s u_{err}(s) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3 u_A}{s^2 + s(k_1 + gk_2) + gk_3} + \\ &\quad - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 (da_x - qW_{A0} - gq/s)}{s^2 + s(k_1 + gk_2) + gk_3} \end{aligned}$$

Ricordando l'equazione linearizzata del corpo rigido

$$\begin{aligned} su_B &= da_x - qW_{A0} + dg_x = da_x - qW_{A0} - g(\vartheta - \Delta\vartheta) = \\ &= da_x - qW_{A0} - gq/s + g\Delta\vartheta \end{aligned}$$

è possibile osservare che:

$$da_x - qW_{A0} - gq/s = su_B - g\Delta\vartheta$$

Quindi  $da_x - qW_{A0} - gq/s$  è pari ad  $su_B$  a meno del termine  $-g\Delta\vartheta$ . Simbolicamente si può indicare il secondo membro,  $su_B - g\Delta\vartheta$ , che ha il significato fisico di un'accelerazione, con  $su_C$ .

Applicando questa sostituzione, si ottiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s u_{err}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} u_A - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{gk_3} (su_C) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} u_A - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} u_C$$

L'errore a regime totale non è altro che la somma dell'errore riferito all'ingresso con quello riferito al disturbo.

Visto che l'errore a regime sia rispetto ad un ingresso di riferimento che ad un ingresso non manipolabile ha la stessa struttura, è possibile esaminare solo il generico termine  $R(s) = \frac{s^3}{gk_3} u(s)$ .

## 1.5 Errori a regime

### 1.5.1 Errore a regime in risposta ad un gradino

Si consideri un gradino, la cui trasformata di Laplace è

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

Allora:

$$u_{err} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2}{gk_3} = 0$$

Perciò, se l'ingresso è un gradino, l'errore tende a zero.

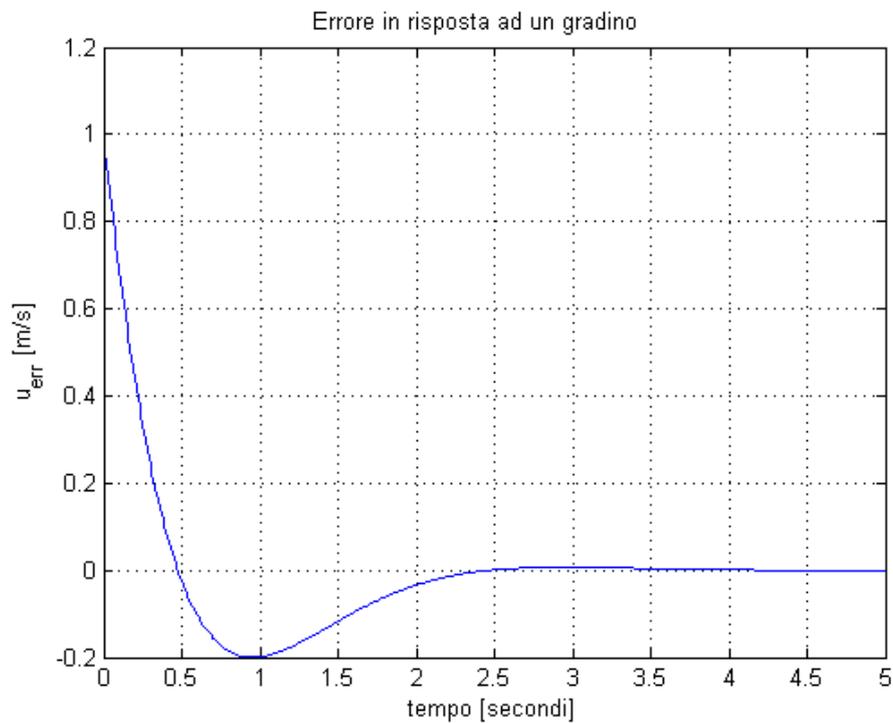


Figura 30 - Errore a regime in risposta ad un gradino

## 1.5 Errori a regime

### 1.5.2 Errore a regime in risposta ad una rampa

Si consideri una rampa, la cui trasformata di Laplace è

$$u(s) = \frac{1}{s^2}$$

Allora:

$$u_{err} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{gk_3} = 0$$

Quindi, se l'ingresso è una rampa, l'errore tende a zero.

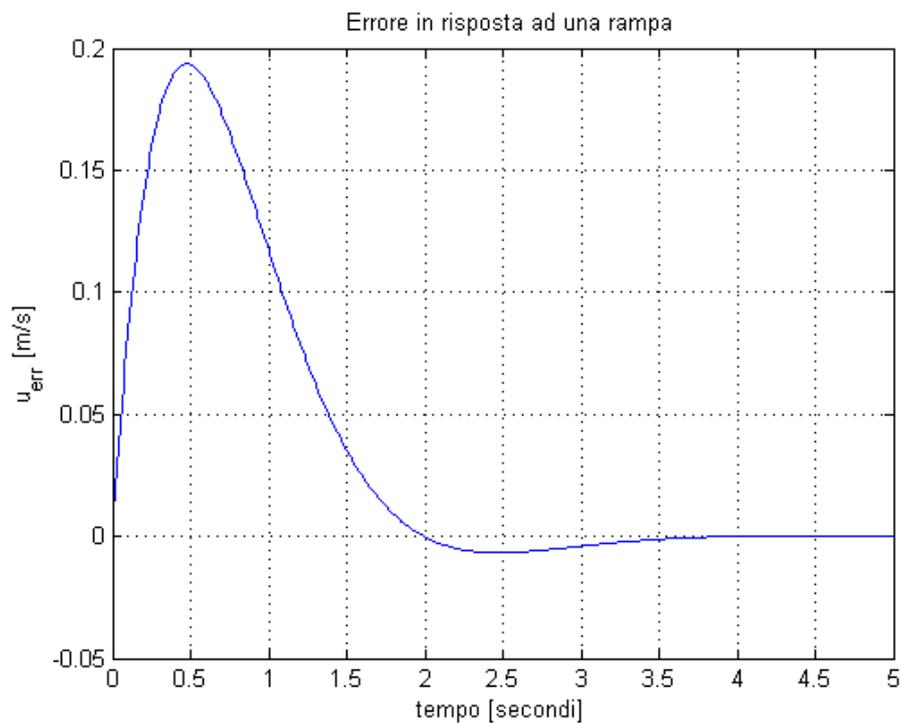


Figura 31 - Errore a regime in risposta ad una rampa

## 1.5 Errori a regime

### 1.5.3 Errore a regime in risposta ad una parabola

Si consideri una parabola, la cui trasformata di Laplace è

$$u(s) = \frac{1}{s^3}$$

Allora:

$$u_{err} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{gk_3} = \frac{1}{gk_3}$$

Quindi, con un ingresso di tipo parabolico, l'errore a regime non è più nullo come nei casi precedenti, ma è costante e dipende dal parametro  $k_3$ .

In particolare, con  $k_3 = 0.54411$  1/m, si ha  $u_{err} = 0,1874$  m/s.

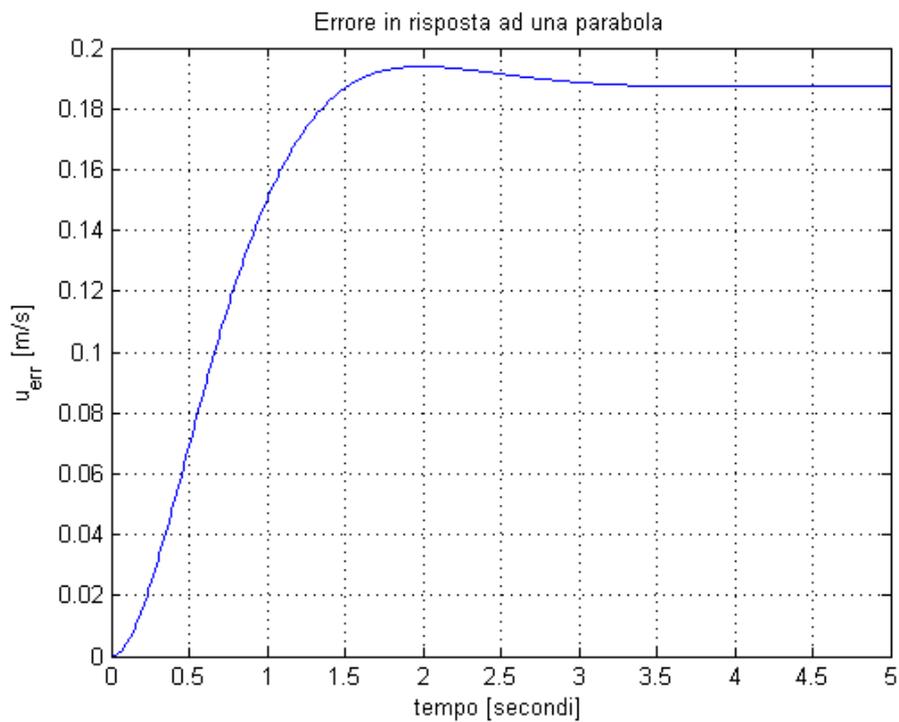


Figura 32 - Errore a regime in risposta ad una parabola

## 1.5 Errori a regime

### 1.5.4 Errore a regime in risposta ad una cubica

Si consideri una cubica, la cui trasformata di Laplace è

$$u(s) = \frac{1}{s^4}$$

Allora:

$$u_{err} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^3}{gk_3} \frac{1}{s^4} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{gk_3} \frac{1}{s} = +\infty$$

L'errore a regime, se l'ingresso è una cubica, tende all'infinito.

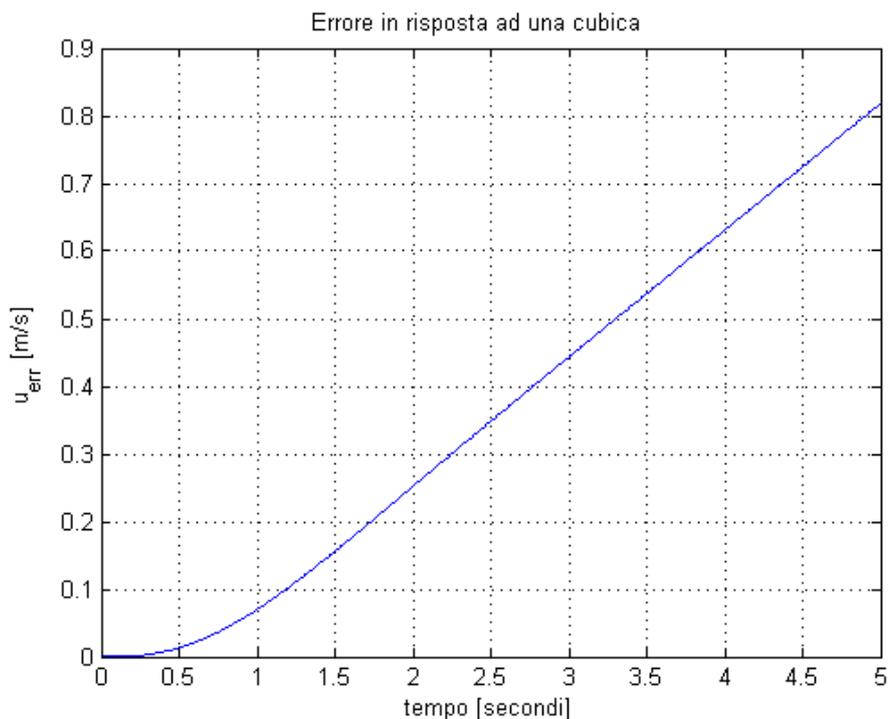


Figura 33 - Errore a regime in risposta ad una cubica

In definitiva, il sistema dà errore nullo fino ad un ingresso a rampa, costante se è di tipo parabolico, ed infinito se l'ingresso è un segnale di terzo grado.

Questo si traduce, considerando l'applicazione dell'algoritmo, in un indice di prestazione sulla stima dell'assetto. Con i risultati ottenuti sul calcolo degli errori a regime, si evince che il sistema è in grado di inseguire le manovre indotte dal velivolo finché gli ingressi reali  $U_A$  e  $D$ , che sono rispettivamente la velocità aria di riferimento e l'ingresso non manipolabile, sono segnali parabolici. Oltre il quale, l'errore sulla velocità, e quindi sulla stima dell'assetto, va all'infinito.

## 2. Risultati sperimentali

---

Nel capitolo precedente si è affrontato il progetto dei parametri  $k$  mediante tecniche lineari. Si è discusso dei pregi e dei difetti dell'algoritmo linearizzato, trovandone i limiti di applicazione per via analitica.

Lo scopo del presente capitolo è quello di analizzare nel dettaglio le prestazioni dell'algoritmo di stima non lineare anche in presenza di rumori sia sui sensori inerziali che sui sensori aria che in presenza di turbolenze. Infine verrà indagata, mediante simulazioni MonteCarlo, la stabilità secondo Lypaunov del sistema complessivo.

Per quanto riguarda le prestazioni dell'algoritmo non lineare si vuole verificare che le stime degli angoli di Eulero abbiano, in presenza di rumori sui sensori inerziali e sui sensori aria, media nulla e deviazione standard, sigma, tale che  $3\sigma \leq 0.5$  gradi. Come si vedrà in seguito, questi nuovi requisiti di progetto, ritenuti vincolanti, porteranno ad una riprogettazione dei valori di  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  e, quindi, ad un rilassamento dei vincoli sulle specifiche di progetto nel tempo e di stabilità per il sistema linearizzato e disaccoppiato, vedi capitoli precedenti (qui mettici il riferimento corretto). Per le simulazioni ci si avvale di un simulatore di volo di un Piper PA-30, sviluppato sui dati pubblicati dalla NASA [qui ci mettiamo il riferimento bibliografico] e rappresentato dal blocco azzurro di Figura 35.



Figura 34 - Piper PA-30

## 2. Risultati sperimentali

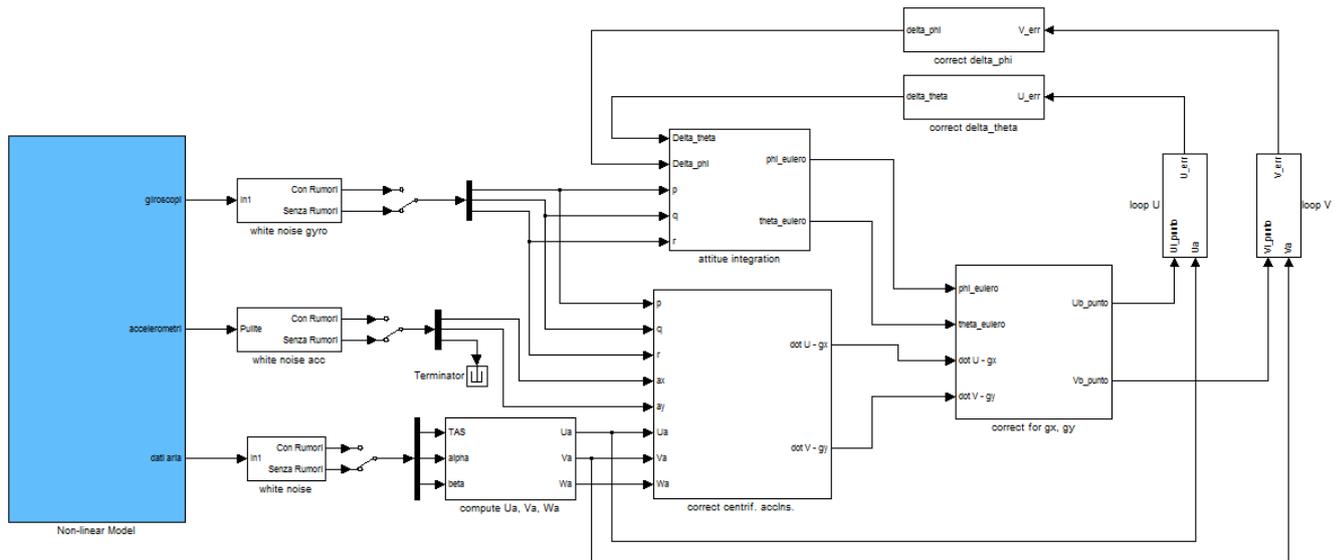


Figura 35 - Algoritmo applicato al simulatore di volo del Piper PA-30

In uscita dal blocco “Non-linear Model” si trovano i segnali ideali dei sensori, privi cioè di qualunque tipo errore, che sia bias o rumore.

Il simulatore è caratterizzato dall’aver un passo di integrazione fisso, pari a 0.01 secondi (come specificato in seguito), e un metodo di integrazione numerico di tipo ode5 (Dormand-Prince).

Verranno ora passate in rassegna diverse condizioni di prova, inizialmente in assenza di turbolenza, considerando prima i rumori sui sensori inerziali, poi sui dati aria, dunque alla composizione di essi fino ad arrivare alla presenza della turbolenza stessa.

In particolare, si analizzerà il comportamento dell’algoritmo simulando una manovra di crociera ed una di virata descritte dai seguenti dati nominali:

### Descrizione volo in crociera

- quota  $H = 330 \text{ m}$
- velocità  $TAS = 53 \text{ m/s}$
- raggio di virata  $R = 1000 \text{ m}$
- angolo di rollio  $\Phi = 0^\circ$
- angolo di beccheggio  $\Theta = 3.3^\circ$

### Descrizione volo in virata

- quota  $H = 330 \text{ m}$
- velocità  $TAS = 52.4 \text{ m/s}$
- angolo di rollio  $\Phi = 16.4^\circ$
- angolo di beccheggio  $\Theta = 3.9^\circ$

## 2.1 Stima dell'assetto con ingressi costanti

### 2.1 Stima dell'assetto con ingressi costanti

In questo paragrafo viene fatta una simulazione in condizione di stazionarietà, osservando la risposta dell'algoritmo ad ingressi di tipo costante. Non vengono presi in considerazione i rumori sui sensori inerziali, sui dati aria e neppure le turbolenze.

Le condizioni iniziali nel calcolo delle velocità inerziali sono note, in quanto i dati aria forniscono le quantità  $U_A$ ,  $V_A$  e  $W_A$ , assunte come riferimento.

Le condizioni iniziali su  $\Phi$  e  $\Theta$ , essendo essi i parametri da stimare e quindi incogniti, sono state generate in modo da rispettare una distribuzione gaussiana con media nulla, e tali che  $3\sigma < 5$  gradi.

I valori dei guadagni utilizzati sono:

$$k_1 = 1.5 \text{ 1/s}$$

$$k_2 = 0.19153 \text{ s/m}$$

$$k_3 = 0.54411 \text{ 1/m}$$

Di seguito sono riportati i grafici ottenuti dagli errori sugli angoli  $\Phi$  e  $\Theta$  nel caso di volo in crociera e durante la manovra di virata, in condizioni stazionarie, ovvero con ingressi di riferimento di tipo costante.

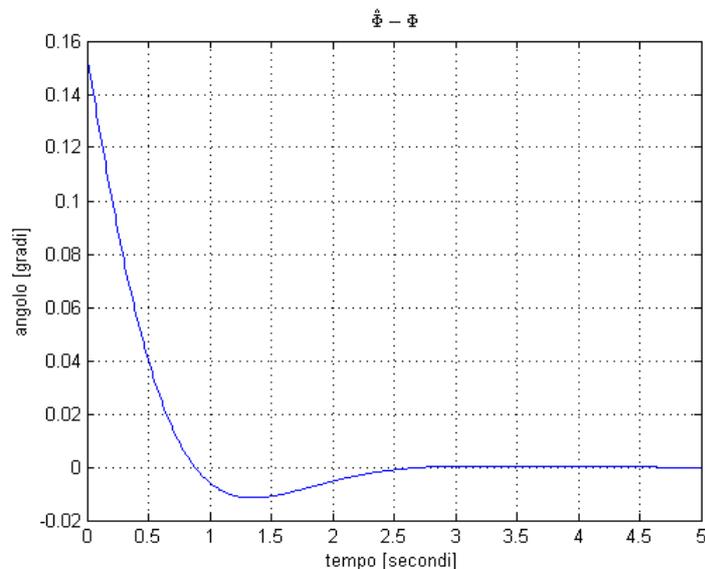


Figura 36 - Errore su  $\Phi$  : crociera, assenza di rumori e di turbolenza

## 2.1 Stima dell'assetto con ingressi costanti

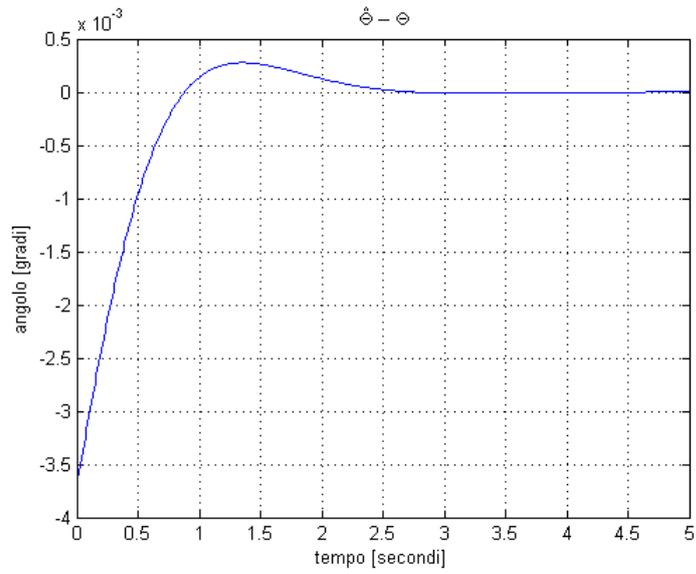


Figura 37 - Errore su  $\Theta$  : crociera, assenza di rumori e di turbolenza

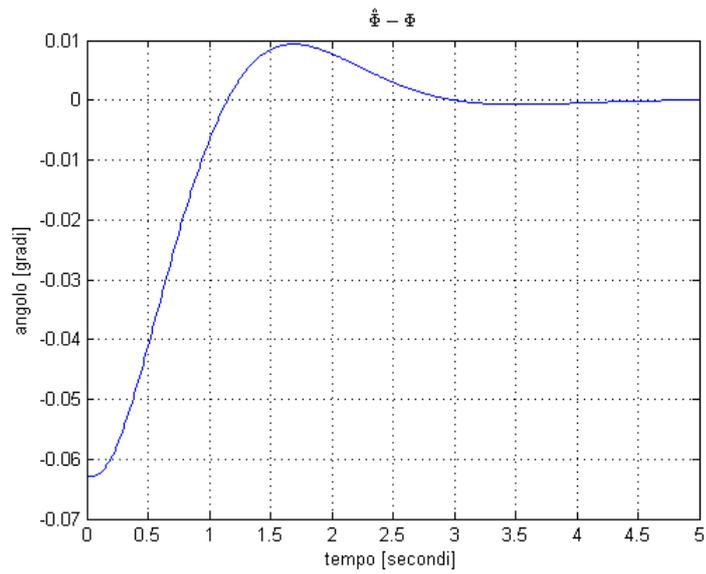


Figura 38 - Errore su  $\Phi$  : virata, assenza di rumori e di turbolenza

## 2.2 Stima dell'assetto in assenza di rumore e turbolenze

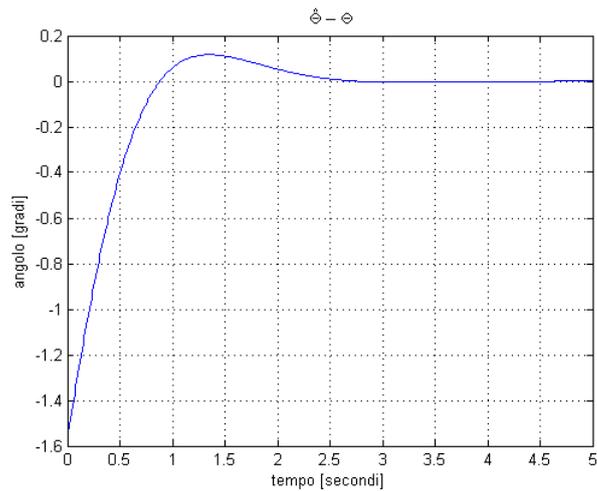


Figura 39 - Errore su  $\Theta$  : virata, assenza di rumori e di turbolenza

Questi grafici mostrano che le specifiche sul tempo di assestamento e sulla massima sovraelongazione, utilizzate per il progetto dei parametri nel caso linearizzato, sono rispettate anche in quello non lineare.

Nel prossimo paragrafo viene analizzata una situazione analoga a quella appena esaminata, ovvero in assenza di turbolenza e di rumore sui sensori, ma non più in condizioni stazionarie, ma bensì adottando come ingressi dell'algoritmo i segnali forniti dal simulatore.

## 2.2 Stima dell'assetto in assenza di rumore e turbolenze

In questo paragrafo viene valutata la stima dell'assetto durante le fasi di crociera e di virata, utilizzando sensori ideali, cioè privi di errori di misura, ed in assenza di turbolenza.

In queste simulazioni i segnali in ingresso all'algoritmo di stima dell'assetto vengono generati dal modello del Piper PA-30, e sono dunque rappresentativi di una dinamica realistica.

Sono state effettuate simulazioni con condizioni iniziali e parametri di come descritti nel paragrafo precedente.

Di seguito sono riportati i grafici ottenuti nel caso di volo in crociera e durante la manovra di virata, confrontando l'angolo stimato dall'algoritmo con quello fornito dal simulatore di volo, e rappresentando dunque l'andamento della variabile errore, espressa come loro differenza.

## 2.2 Stima dell'assetto in assenza di rumore e turbolenze

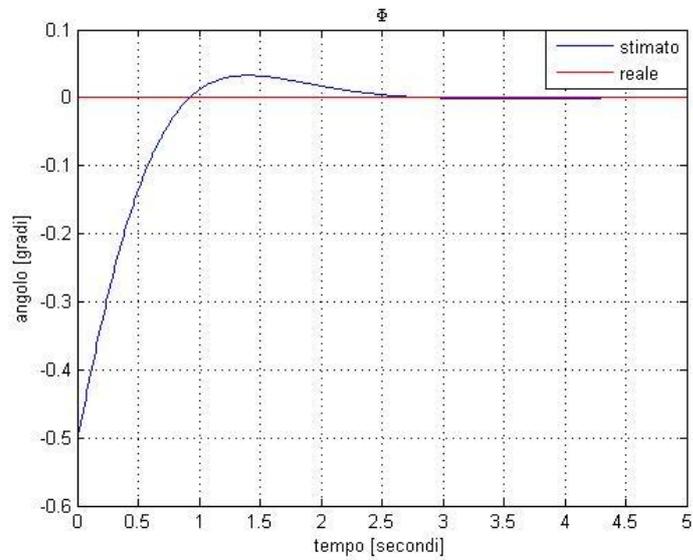


Figura 40 – Confronto su  $\Phi$  : crociera, assenza di rumori e di turbolenza

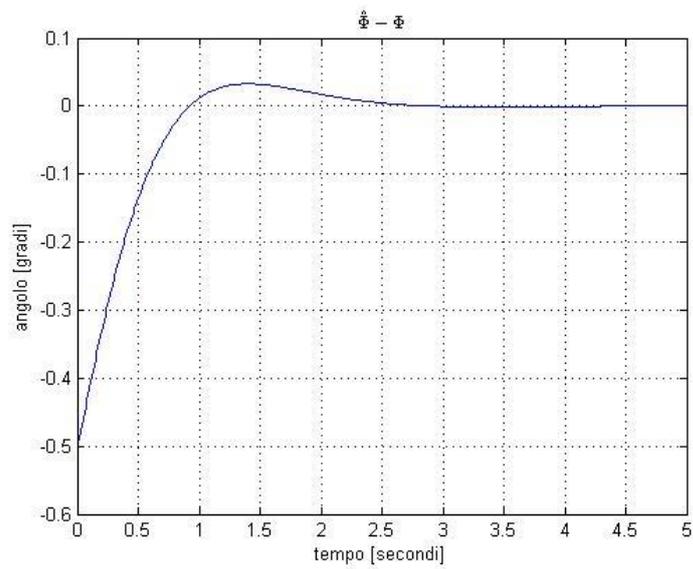


Figura 41 – Errore su  $\Phi$  : crociera, assenza di rumori e di turbolenza

## 2.2 Stima dell'assetto in assenza di rumore e turbolenze

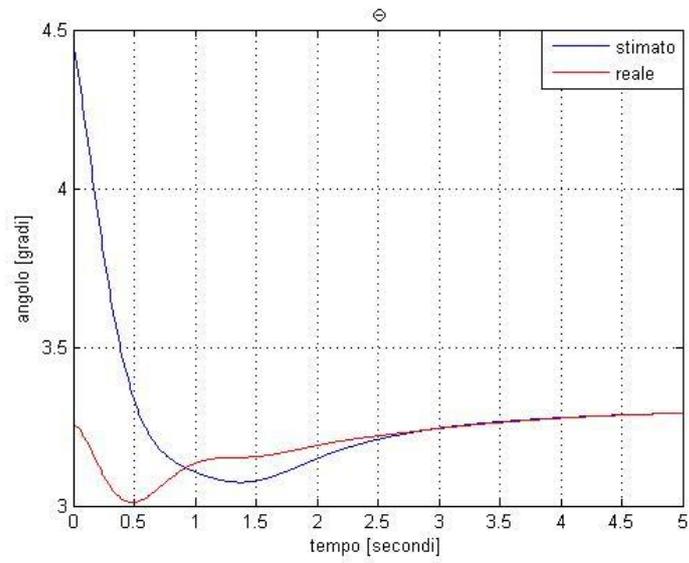


Figura 42 - Confronto su  $\Theta$  : crociera, assenza di rumori e di turbolenza

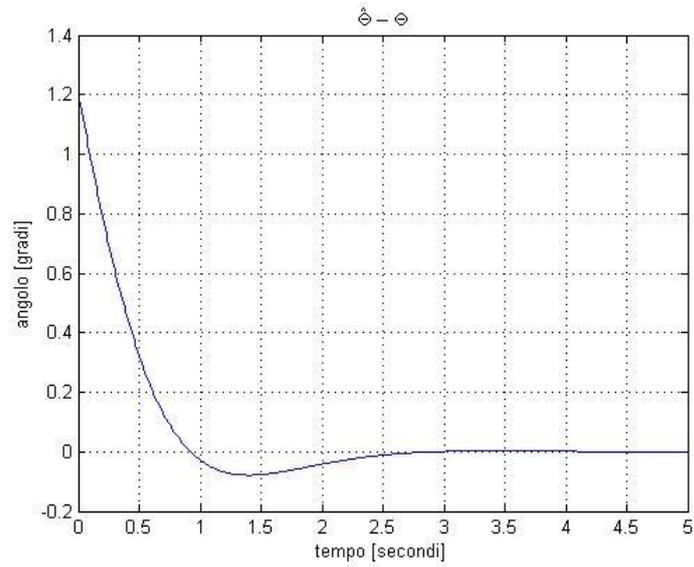


Figura 43 - Errore su  $\Theta$  : crociera, assenza di rumori e di turbolenza

## 2.2 Stima dell'assetto in assenza di rumore e turbolenze

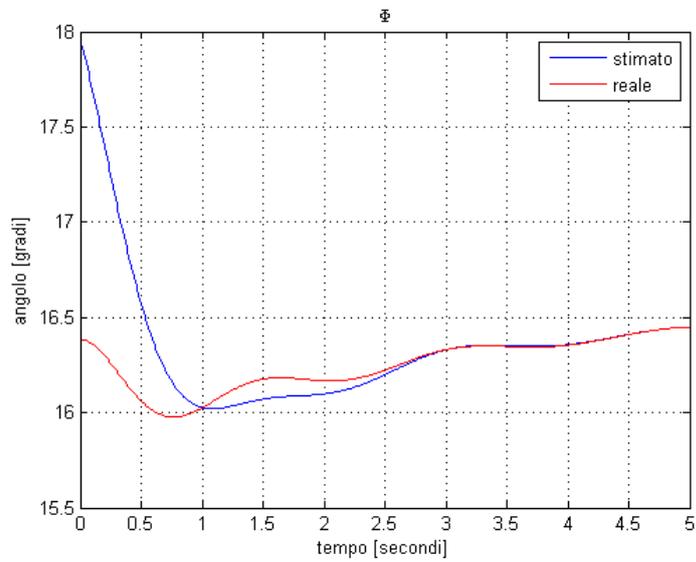


Figura 44 - Confronto su  $\Phi$  : virata, assenza di rumori e di turbolenza

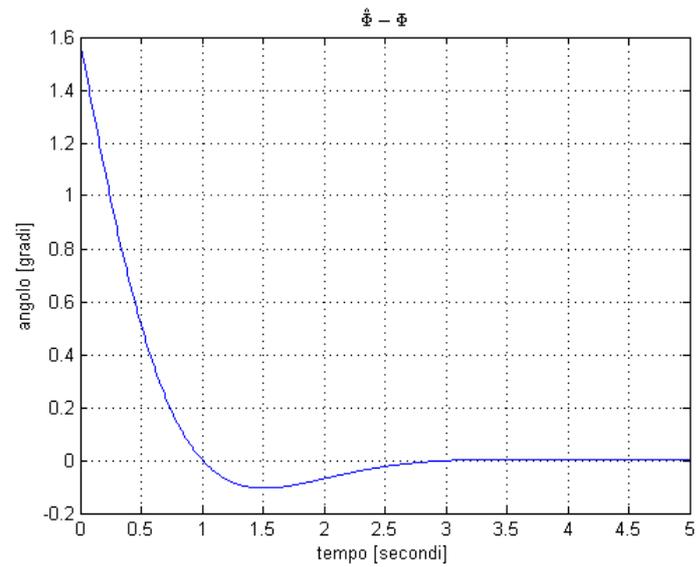


Figura 45 - Errore su  $\Phi$  : virata, assenza di rumori e di turbolenza

## 2.2 Stima dell'assetto in assenza di rumore e turbolenze

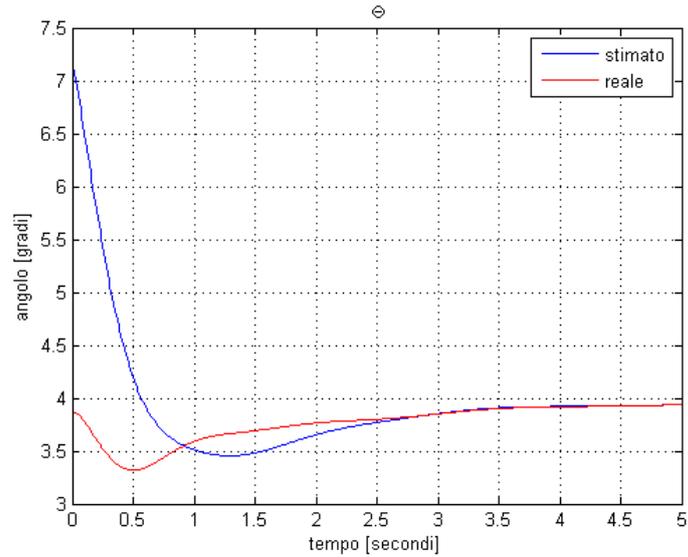


Figura 46 - Confronto su  $\Theta$  : virata, assenza di rumori e di turbolenza

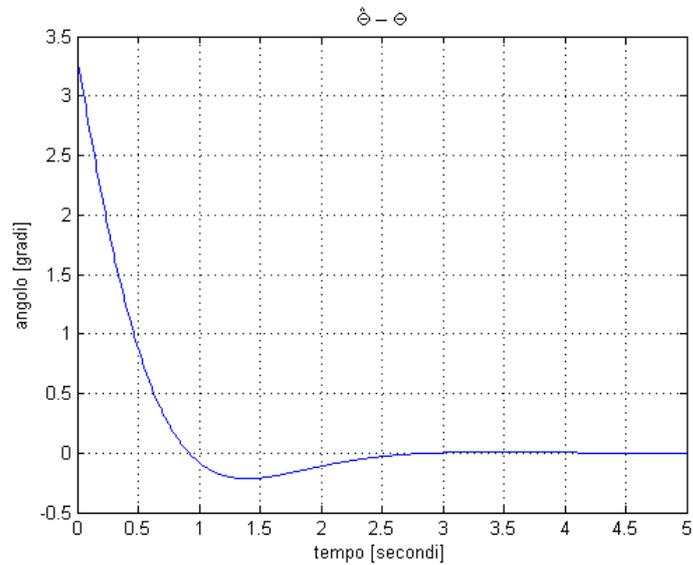


Figura 47 - Errore su  $\Theta$  : virata, assenza di rumori e di turbolenza

Anche nel caso in cui gli ingressi siano non delle costanti l'algoritmo stima correttamente l'assetto, con massima sovraelongazione e tempo di assestamento simili a quelli di progetto.

Si passa ora allo studio dell'algoritmo considerando non più sensori ideali, ma reali, ovvero affetti da rumore. In particolare, si applica un rumore a media nulla additivo ai segnali dei sensori inerziali.

### 2.3 Stima dell'assetto con rumori sui sensori inerziali

Tutti i sensori soffrono della presenza di rumore, il quale va a disturbare la misura provocando degli errori.

Questi rumori, presenti in un sistema fisico reale come appunto i sensori, sono descritti da uno spettro frequenziale finito. Per ovvi motivi matematici si preferisce caratterizzare i sensori con dei rumori a media nulla ma con spettro infinito. Tale modello prendo il nome di “rumore bianco”. Esso è un particolare tipo di rumore caratterizzato dall'assenza di periodicità nel tempo e da ampiezza costante su tutto lo spettro di frequenze.

La generazione di tale rumore in Simulink viene assolta dal blocco *Band Limited White Noise* (BLWN), nel quale devono essere specificati il tempo di campionamento, *sample time* ( $t_c$ ), e la potenza del rumore, *noise power* ( $NP$ ). Anche se il rumore generato dal blocco BLWN non ha spettro infinito, esso può ingegneristicamente approssimare un rumore bianco a patto di scegliere dei tempi di campionamento molto più piccoli del fenomeno che si vuole simulare.

La dinamica del velivolo considerato è descrivibile da segnali aventi una banda di circa 10Hz, quindi, per il teorema del campionamento di Nyquist, per una descrizione sufficiente del fenomeno considerato, bisogna campionare almeno ad una frequenza pari a 20Hz.

L'uscita del blocco BLWN è un segnale con varianza

$$\sigma^2 = NP/t_c \quad (14)$$

Per una corretta rappresentazione del BLWN il tempo di campionamento deve essere molto più piccolo del tempo associato alla banda del fenomeno in esame (in questo caso pari a 0,1 secondi). Per questo si è deciso di impostare il *sample time*,  $t_c$ , a 0.01 secondi, pari al *fundamental sample time*,  $FST$ , di simulazione.

Con questo valore di  $FST$  si ha un campionamento a 100Hz, che dal criterio di Nyquist ci permette di campionare fenomeni con frequenza massima pari a 50Hz che soddisfa il requisito di frequenza minima di campionamento pari a 20Hz, come descritto pocanzi.

Invertendo la (14) si ottiene

$$NP = \sigma^2 t_c \quad (15)$$

A partire dai dati di specifica sulla varianza dei differenti sensori considerati, applicando la (15) si ricava la seguente tabella:

### 2.3 Stima dell'assetto con rumori sui sensori inerziali

	$3\sigma$	$\sigma$	$\sigma^2$	$NP$
Accelerometri	$0,1 \text{ m/s}^2$	$0,0\bar{3} \text{ m/s}^2$	$0,00\bar{1} \text{ m}^2/\text{s}^4$	$1, \bar{1} \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^3$
Giroscopi	$0,5 \text{ deg/s}$	$0,1\bar{6} \text{ deg/s}$	$0,02\bar{7} \text{ deg}^2/\text{s}^2$	$2, \bar{7} \cdot 10^{-4} \text{ deg}^2/\text{s}^2$
Alpha	$0,1 \text{ deg}$	$0,0\bar{3} \text{ deg}$	$0,00\bar{1} \text{ deg}^2$	$1, \bar{1} \cdot 10^{-5} \text{ deg}^2 \cdot \text{s}$
Beta	$0,1 \text{ deg}$	$0,0\bar{3} \text{ deg}$	$0,00\bar{1} \text{ deg}^2$	$1, \bar{1} \cdot 10^{-5} \text{ deg}^2 \cdot \text{s}$
TAS	$1 \text{ m/s}$	$0, \bar{3} \text{ m/s}$	$0, \bar{1} \text{ m}^2/\text{s}^2$	$1, \bar{1} \cdot 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$

Tabella 1 – Deviazioni standard, varianze e Noise Power dei sensori inerziali e aria

Si è così trovata, per ciascun sensore, la potenza del rumore associato da immettere nel blocco BLWN.

A questo punto si può procedere con la simulazione applicando il rumore sugli accelerometri e giroscopi, ottenendo i grafici seguenti:

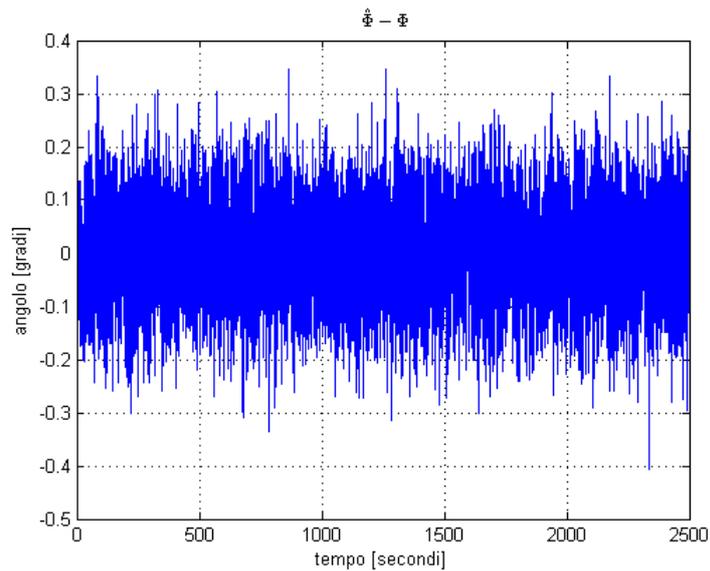


Figura 48 - Errore su  $\Phi$  : virata, presenza di rumori sui sensori inerziali e assenza di turbolenza

## 2.4 Stima dell'assetto con rumori sui sensori aria

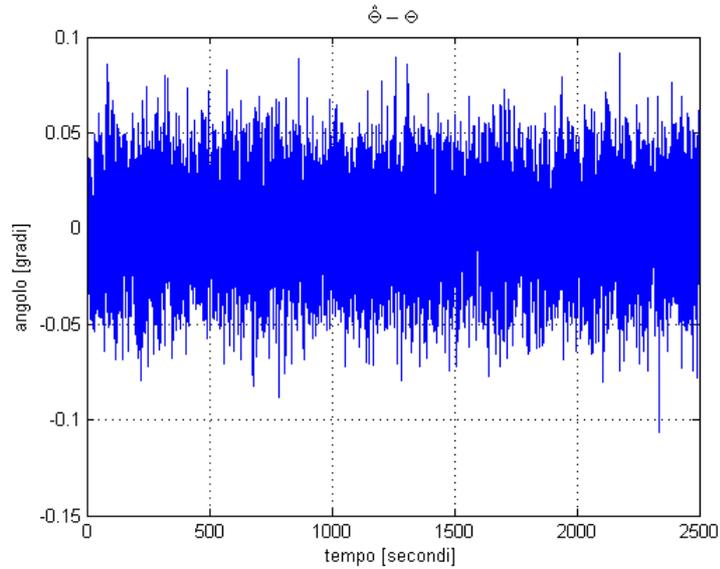


Figura 49 - Errore su  $\Theta$  : virata, presenza di rumori sui sensori inerziali e assenza di turbolenza

Di seguito viene riportata una tabella che indica, per ciascuno dei due grafici, la media e la deviazione standard.

	errore su $\Phi$	errore su $\Theta$
$\mu$	$-8.8249 \cdot 10^{-4}$	$-2.0190 \cdot 10^{-4}$
$\sigma$	0.0842	0.0219
$3\sigma$	0.2525	0.0658

Tabella 2 – Media e deviazione standard dell'errore nella stima di  $\Phi$  e di  $\Theta$

Come si può osservare dai grafici, la presenza di rumori sui sensori inerziali influisce maggiormente sulla stima dell'angolo di rollio,  $\Phi$ , infatti dalla Tabella 2 si nota che la deviazione standard di  $\Phi$  è maggiore di quella di  $\Theta$ .

Avendo studiato il comportamento dell' algoritmo in presenza di rumore sui soli sensori inerziali, si passa ora all'analisi del sistema con rumore sui soli dati aria.

## 2.4 Stima dell'assetto con rumori sui sensori aria

Con riferimento al paragrafo precedente, si può fare lo stesso ragionamento considerando non più i sensori inerziali, ma gli indicatori degli angoli d'incidenza,  $\alpha$ , e di deriva,  $\beta$ , e il tubo di Pitot, che congiuntamente forniscono la TAS.

## 2.4 Stima dell'assetto con rumori sui sensori aria

Nelle seguenti simulazioni, Figure Figura 50 e Figura 51, si è scelto di imporre correttamente le condizioni iniziali su phi stimato e theta stimato per poter valutare, rapidamente, l'influenza che i rumori di misura sui sensori aria hanno sulle stime degli angoli  $\Phi$  e  $\Theta$ .

Le simulazioni si cui sopra sono state effettuate in condizione di virata, in quanto essa è caratterizzata da un accoppiamento delle dinamiche longitudinali e latero-direzionali e quindi di più interessante valutazione.

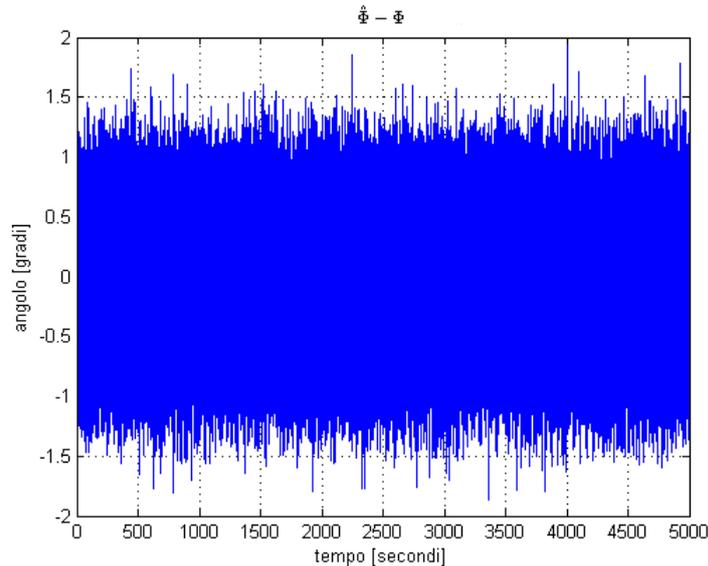


Figura 50 - Errore su  $\Phi$  : presenza di rumori sui dati aria e assenza di turbolenza

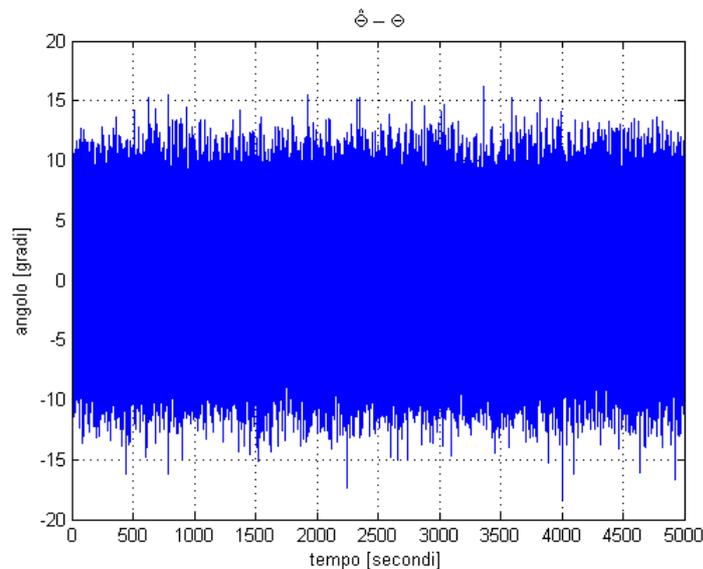


Figura 51 - Errore su  $\Theta$  : presenza di rumori sui dati aria e assenza di turbolenza

## 2.5 Progetto dei parametri con vincoli sulle prestazioni di stima

Di seguito viene riportata una tabella che indica, per ciascuno dei due grafici, la media e la deviazione standard.

	errore su $\Phi$	errore su $\Theta$
$\mu$	-0.0330	-0.0074
$\sigma$	0.4052	3.6391
$3\sigma$	1.2157	10.9172

Tabella 3 - Media e deviazione standard dell'errore nella stima di  $\Phi$  e di  $\Theta$

Dai due grafici si nota come il rumore sui dati aria influisca pesantemente sulla stima dell'angolo di beccheggio  $\Theta$ , arrivando persino ad errori maggiori di  $15^\circ$ , mentre la situazione nella stima di  $\Phi$  è molto diversa, il cui valore al massimo si scosta da quello atteso di circa  $1,5^\circ$ .

La Tabella 3 indica che la media in entrambi i casi tende a zero (non è propriamente nulla perché servirebbero infinite simulazioni affinché lo fosse), e che il 99.73% dei casi l'errore su  $\Theta$  vale 10.9172 gradi, non rispettando dunque i requisiti di precisione previsti per questa applicazione (vedi introduzione al capitolo delle prove sperimentali), mentre quello su  $\Phi$  è molto più contenuto, solo 1.2157 gradi.

I risultati di queste simulazioni hanno quindi mostrato una incompatibilità dei risultati in termini di precisione. Questo significa che si necessita di una riprogettazione dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , in modo da rispettare la specifica tale che valga, per ciascuno dei due angoli,  $3\sigma < 0.5$  gradi.

## 2.5 Progetto dei parametri con vincoli sulle prestazioni di stima

Come accennato nel paragrafo precedente, vi è una incompatibilità tra le specifiche con il quale è stato affrontato il progetto dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , e le richieste di precisione ed accuratezza desiderate. In particolare si auspica ad ottenere una stima dell'assetto tale che  $3\sigma < 0.5$  gradi, in presenza di rumore sia sui sensori inerziali, sia sui dati aria.

Per fare ciò, bisogna rilassare i vincoli sul tempo di assestamento e sulla massima sovraelongazione, procedendo con prove empiriche sul modello realizzato in Simulink in una manovra di virata.

Quindi si sono ricavate le seguenti tabelle che indicano, al variare di  $T_a$  (considerando lo stesso valore per il progetto di  $k_1$  e per quello di  $k_2$  e  $k_3$ ) ed  $S$ , il valore assunto dal deviazione standard rispettivamente su  $\Phi$  e su  $\Theta$ .

## 2.5 Progetto dei parametri con vincoli sulle prestazioni di stima

	$S = 20\%$	$S = 30\%$	$S = 40\%$
$T_a = 1 s$	2.4294	2.1681	2.2940
$T_a = 10 s$	0.2895	0.2784	0.2969
$T_a = 100 s$	0.2195	0.2151	0.2129

Tabella 4 - Valori assunti da  $3\sigma$  relativi all'angolo  $\Phi$

	$S = 20\%$	$S = 30\%$	$S = 40\%$
$T_a = 1 s$	21.9425	19.5293	20.7912
$T_a = 10 s$	2.1795	1.9030	1.8371
$T_a = 100 s$	0.2397	0.2123	0.2026

Tabella 5 - Valori assunti da  $3\sigma$  relativi all'angolo  $\Theta$

Per la determinazione dei guadagni si è scelto di imporre una massima sovraelongazione del 30%, e di procedere con prove empiriche facendo variare il tempo di assestamento tra 10 e 100 secondi, trovando il valore minimo tale che  $3\sigma < 0.5$  gradi. Il valore di  $T_a$  ricavato che soddisfa tali specifiche è circa 38 secondi.

I valori dei guadagni con questi nuovi parametri sono:

$$k_1 = 0,0786 \text{ 1/s}$$

$$k_2 = 0,0088 \text{ s/m}$$

$$k_3 = 0,0028 \text{ 1/m}$$

Con i quali si ricavano i seguenti grafici, attraverso una simulazione in assenza di turbolenza, con rumori sia sui sensori inerziali che sui dati aria.

## 2.5 Progetto dei parametri con vincoli sulle prestazioni di stima

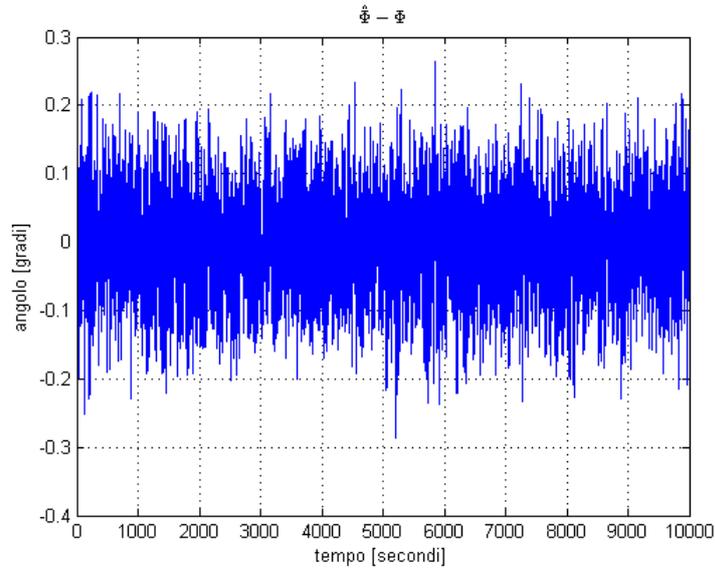


Figura 52 - Errore su  $\Phi$  : rumori sui sensori inerziali e sui dati aria, assenza di turbolenza

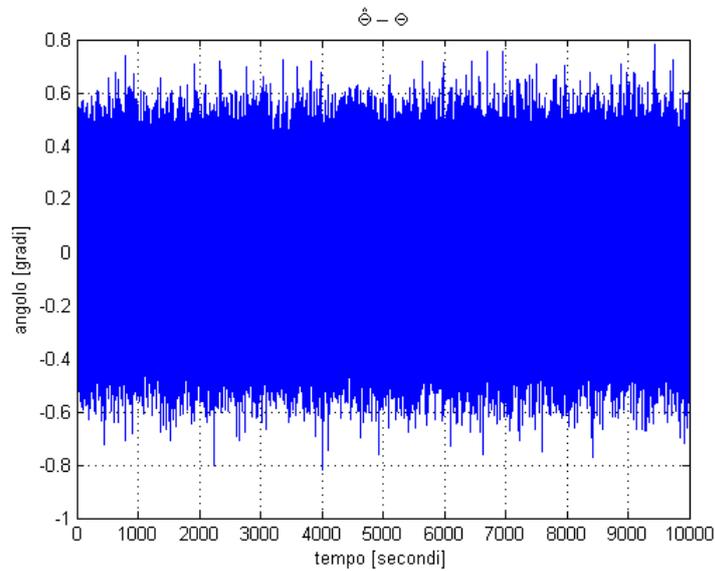


Figura 53 - Errore su  $\Theta$  : rumori sui sensori inerziali e sui dati aria, assenza di turbolenza

Come si può notare, i nuovi valori dei parametri riducono notevolmente il contributo del rumore sulle misure di stima dell'assetto, sia su  $\Phi$  che su  $\Theta$ .

Di seguito viene riportata una tabella che indica, per ciascuno dei due grafici, la media e la deviazione standard degli errori sulle stime dell'assetto.

## 2.6 Stima dell'assetto in presenza di turbolenze

	errore su $\Phi$	errore su $\Theta$
$\mu$	-0.0033	$8.1867 \cdot 10^{-4}$
$\sigma$	0.0604	0.1665
$3\sigma$	0.1812	0.4994

Tabella 6 - Media e deviazione standard dell'errore nella stima di  $\Phi$  e di  $\Theta$

Dopo aver riprogettato i parametri  $k_i$  secondo le specifiche sulle precisioni si stima si può procedere al passo successivo, ovvero all'effetto che ha la turbolenza sulla stima dell'assetto.

## 2.6 Stima dell'assetto in presenza di turbolenze

Avendo analizzato accuratamente l'effetto che i rumori sui sensori hanno sulle prestazioni di stima degli angoli  $\Phi$  e  $\Theta$ , si passa ora all'esame delle prestazioni di stima in presenza di turbolenza.

Anche in questo caso, per valutare il solo effetto della turbolenza, si impongono condizioni iniziali corrette.

La simulazione è stata fatta con il modello del simulatore di volo, senza rumori sui sensori ma in presenza di turbolenza.

Il modello di turbolenza implementato nel simulatore è il modello di Dryden; esso impone un'intensità del vento a bassa quota pari ad  $1 \text{ m/s}$ , ed una probabilità di eccedenza alle alte quote di  $10^{-6}$ .

I valori dei guadagni utilizzati sono quelli riprogettati nel paragrafo precedente.

Ecco di seguito riportati i risultati ottenuti.

## 2.6 Stima dell'assetto in presenza di turbolenze

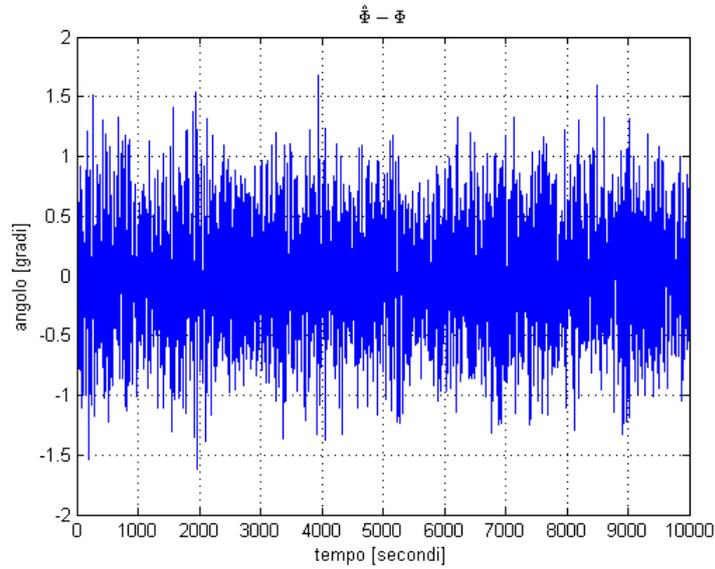


Figura 54 - Errore su  $\Phi$  : assenza di rumori e presenza di turbolenza

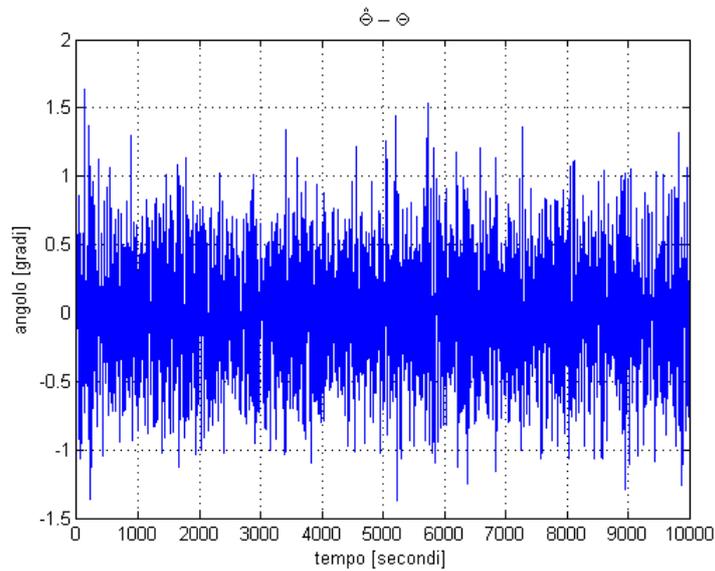


Figura 55 - Errore su  $\Theta$  : assenza di rumori e presenza di turbolenza

Viene riportata una tabella che indica, per ciascuno dei due grafici, la media e la deviazione standard.

	errore su $\Phi$	errore su $\Theta$
$\mu$	-0.0015	-0.0116
$\sigma$	0.4251	0.3829
$3\sigma$	1.2754	1.1488

Tabella 7 - Media e deviazione standard dell'errore nella stima di  $\Phi$  e di  $\Theta$

## 2.7 Stima dell'assetto in presenza di rumori sui sensori e turbolenze

La Tabella 7 mostra il peggioramento delle prestazioni di stima dell'assetto in presenza di turbolenza rispetto alle condizioni di prova senza turbolenze. Infatti, anche in assenza di rumori sui sensori, la deviazione standard risulta molto più elevata rispetto al caso con rumore solo sui sensori.

Verrà ora analizzato l'ultimo caso, quello in cui compaiono sia i rumori sui sensori che la turbolenza.

### 2.7 Stima dell'assetto in presenza di rumori sui sensori e turbolenze

La simulazione che viene svolta in questo paragrafo è quella di maggior interesse, in quanto la più aderente alla realtà. Si applica il rumore ai sensori inerziali e ai dati aria, e si pone il velivolo in una manovra di virata, in presenza della turbolenza descritta al paragrafo precedente.

I valori dei guadagni utilizzati sono quelli ricavati nel paragrafo “2.5 Progetto dei parametri con vincoli sulle prestazioni di stima”.

I grafici che corrispondono a questa simulazione sono i seguenti:

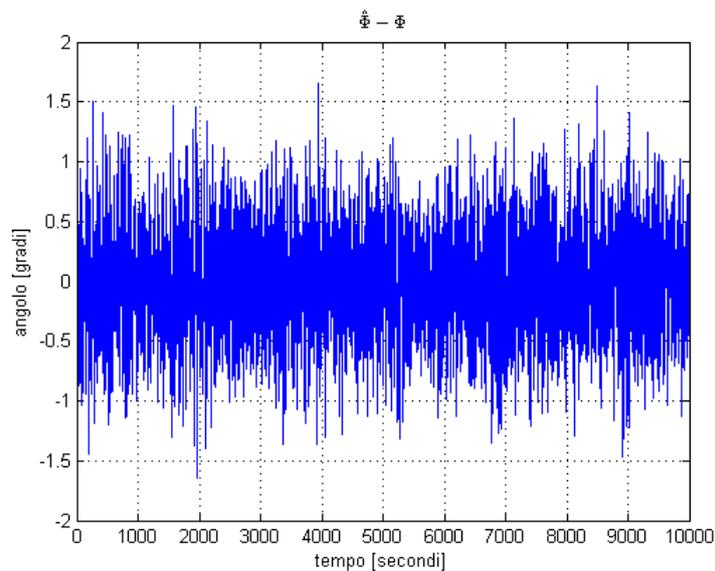


Figura 56 - Errore su  $\Phi$  : presenza di rumori e di turbolenza

## 2.8 Simulazioni Montecarlo per la stabilità

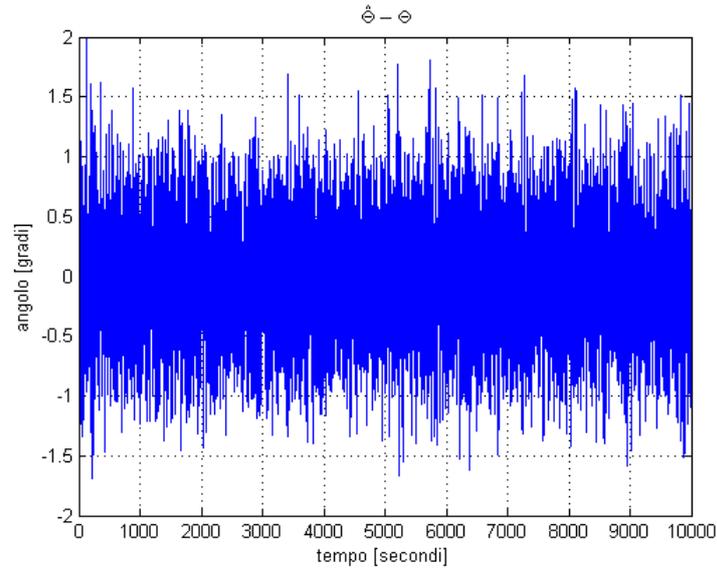


Figura 57 - Errore su  $\Theta$  : presenza di rumori e di turbolenza

Di seguito viene riportata una tabella che indica, per ciascuno dei due grafici, la media e la deviazione standard.

	errore su $\Phi$	errore su $\Theta$
$\mu$	-0.0046	-0.0108
$\sigma$	0.4190	0.4062
$3\sigma$	1.2570	1.2186

Tabella 8 - Media e deviazione standard dell'errore nella stima di  $\Phi$  e di  $\Theta$

Confrontando la Tabella 8 con la Tabella 7, si evince che gli errori di stima dell'assetto vengono maggiormente influenzati dalle turbolenze piuttosto che dei rumori di misura. Infatti la variazione della deviazione standard in presenza di turbolenze con e senza rumori di misura è trascurabile.

## 2.8 Simulazioni Montecarlo per la stabilità

I valori dei guadagni di cui al capitolo 1.3 si sono ricavati linearizzando il sistema attorno ad un punto di linearizzazione ben definito e tale da permettere il disaccoppiamento delle dinamiche latero-direzionali e longitudinali. Per tale sistema la stabilità viene garantita durante il progetto dei parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  secondo le classiche regole del progetto lineare di sistemi di controllo SISO. Nel capitolo 1.4 si è discusso invece riguardo alla

## 2.8 Simulazioni Montecarlo per la stabilità

stabilità dell'algoritmo linearizzato (ma non disaccoppiato), e si è trovata una soluzione analitica applicando il criterio di Routh per la stabilità.

Lo scopo di questo capitolo è quello di verificare, per via sperimentale, la stabilità dell'algoritmo non lineare. Per fare ciò ci si è basati sulla stabilità nel senso di Lyapunov, testando la suddetta mediante simulazioni Montecarlo.

### *Definizione - punto di equilibrio*

Uno stato  $x_e \in R^n$  è un punto di equilibrio per il sistema  $\dot{x} = f(x)$  se, posto  $x_0 = x_e$ , si ha  $x(t) = x_e, \forall t > 0$ .

### *Definizione - Stabilità punto di equilibrio*

Un punto di equilibrio  $x_e$  di un sistema dinamico è stabile se è possibile mantenere l'evoluzione del sistema arbitrariamente vicina a  $x_e$  prendendo la condizione iniziale  $x_0$  sufficientemente vicina a  $x_e$ ; ovvero, se nell'intorno di  $x_e$  è possibile limitare a piacimento lo scostamento limitando opportunamente la perturbazione.

Un punto di equilibrio si dice

- asintoticamente stabile, se esiste un intorno di  $x_e$  a partire dal quale la traiettoria perturbata converge a  $x_e$
- esponenzialmente stabile, se esiste un intorno di  $x_e$  a partire dal quale la traiettoria perturbata converge esponenzialmente a  $x_e$

La stabilità asintotica è un concetto locale, nel senso che la convergenza si ha se  $x_0$  appartiene all'intorno di  $x_e$ , avente come raggio il dominio di attrazione; all'esterno di tale intorno si può avere semplice limitatezza o persino divergenza.

Nel caso in esame ci si è posti in una virata stazionaria e si sono fatte diecimila simulazioni, in assenza di rumori di misura e di turbolenze. In ognuna di esse le condizioni iniziali su  $\Phi$  e  $\Theta$ , essendo i parametri da stimare e quindi incogniti, sono state generate in modo da rispettare una distribuzione gaussiana con media nulla, e tali che  $3\sigma < 5$  gradi.

Di seguito sono riportati i grafici ottenuti dagli errori sulle velocità  $U_i$  e  $V_i$  e sugli angoli  $\Phi$  e su  $\Theta$ .

Per queste simulazioni si è scelto di graficare anche gli andamenti degli errori sulle velocità, in quanto esse rappresentano, nei sistemi linearizzati e disaccoppiati, le variabili controllate.

## 2.8 Simulazioni Montecarlo per la stabilità

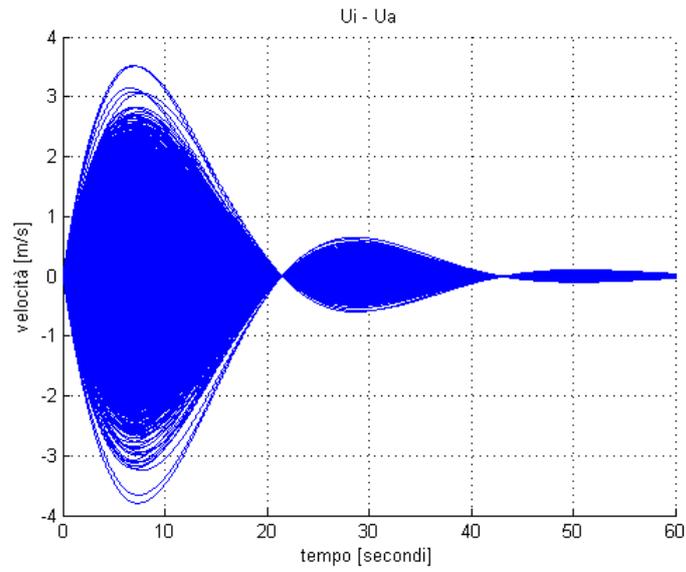


Figura 58 - Verifica della stabilità: errore su  $U_i$

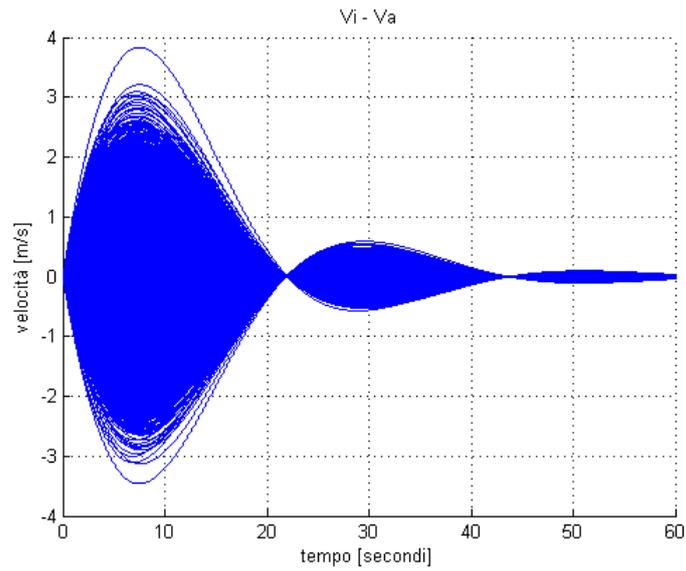


Figura 59 - Verifica della stabilità: errore su  $V_i$

## 2.8 Simulazioni Montecarlo per la stabilità

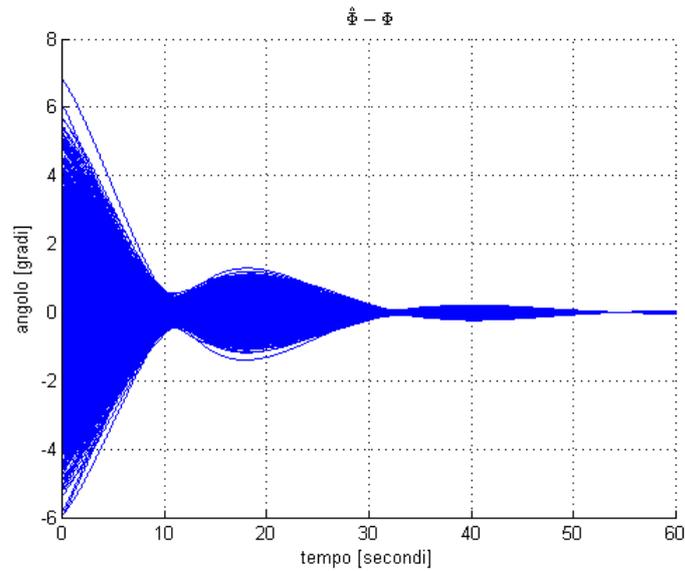


Figura 60 - Verifica della stabilità: errore su  $\Phi$

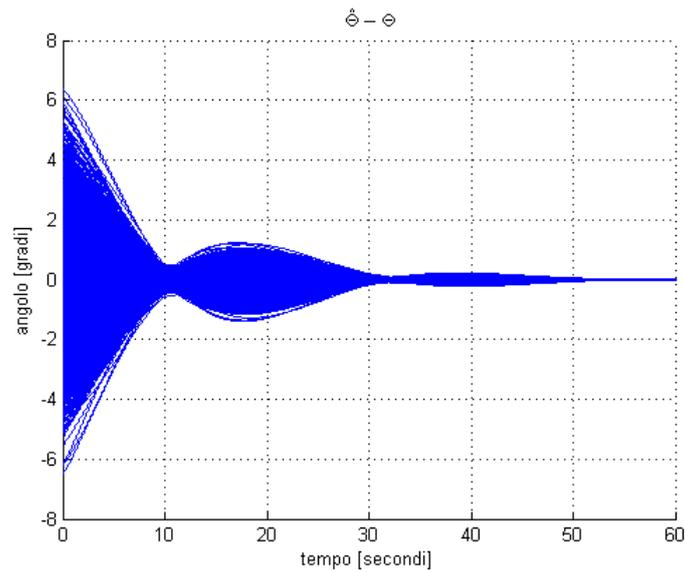


Figura 61 - Verifica della stabilità: errore su  $\Theta$

Come si vede dalle figure, la stabilità è verificata in ogni simulazione, anche quando la stima iniziale dell'assetto di scosta di una quantità maggiore di  $\pm 5^\circ$  rispetto al valore reale.

## 3. Conclusioni

---

Lo scopo del presente lavoro è stato quello di progettare un algoritmo non lineare per la stima dell'assetto di un velivolo, utilizzando un metodo che fa uso di dati inerziali. Esso, a partire dalle misure degli accelerometri e dei giroscopi, è in grado di determinare gli stati del velivolo: assetto, velocità e posizione.

Purtroppo, a causa degli effetti di deriva dei sensori inerziali, non si possono semplicemente integrare le quantità dei giroscopi per la conoscenza degli angoli desiderati. Per questo è stato necessario fare uso di un algoritmo di correzione, il quale prende come riferimento le componenti di velocità ricavate dai dati aria.

Si è illustrato l'algoritmo in tutte le sue parti, i blocchi logici che lo compongono e le equazioni che lo governano. All'interno del presente lavoro sono stati progettati i parametri  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  che compongono l'algoritmo di stima. Per fare questo si è linearizzato il sistema intorno ad un punto di linearizzazione e, con opportune ipotesi, si è disaccoppiata la dinamica longitudinale da quella latero-direzionale.

Per il progetto dei guadagni si sono utilizzate due classi di specifiche: una sul tempo di assestamento ed una sulla massima sovraelongazione.

Si è poi proseguito con un'analisi di stabilità sul modello linearizzato e disaccoppiato e su quello solo linearizzato. A seguire si è svolta un'analisi dell'errore a regime, osservando che il sistema da errore nullo fino ad un ingresso a rampa, costante se è di tipo parabolico, ed infinito se l'ingresso è un segnale di terzo grado.

Finita la fase di progettazione, si è passati a quella dei risultati sperimentali. Attraverso un simulatore di volo di un Piper PA-30, si è implementato l'algoritmo e si sono svolte simulazioni in diverse condizioni, considerando la presenza o meno di rumori sui sensori inerziali ed aria, e ponendosi in volo con o senza turbolenza.

Si sono analizzate situazioni sempre più realistiche nella stima degli angoli d'assetto, partendo dall'assenza totale di rumori e di turbolenza, fino alla presenza della stessa e di rumori sui sensori inerziali e sui dati aria.

Si è osservato, nel corso delle simulazioni, come i rumori sui soli dati aria abbia effetti negativi sulla stima di  $\Phi$  e  $\Theta$ , con deviazioni standard di oltre 3 gradi.

Ciò ha implicato un riprogetto dei guadagni  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$ , in modo da soddisfare le richieste di precisione ed accuratezza,  $3\sigma < 0.5$  gradi.

### 3. Conclusioni

Con i nuovi valori dei parametri  $k_i$ , si sono svolte delle simulazioni in condizione di rumori su tutti i sensori e turbolenza, dalle quali si è evinto che le stime sono caratterizzate da una deviazione standard di circa 0.4 gradi.

Infine, si è verificata la stabilità dell'algoritmo nel senso di Lyapunov, testando la suddetta mediante diecimila simulazioni Montecarlo. In ognuna di esse le condizioni iniziali su  $\Phi$  e  $\Theta$  sono state generate in modo da rispettare una distribuzione gaussiana con media nulla, e tale che  $3\sigma < 5$  gradi. In tal modo si sono potute appurare le caratteristiche di convergenza della stima e di stabilità asintotica dell'algoritmo.

I possibili sviluppi futuri riguardano la stima dell'angolo di prua anche mediante l'uso di un magnetometro per la misurazione del vettore campo magnetico terrestre. L'eventuale introduzione di un GPS, per la localizzazione del velivolo nello spazio e la stima delle velocità rispetto alla terra, consentirebbe di migliorare le caratteristiche di stima dell'assetto anche in presenza di turbolenze.

## 4. Appendici

### 4.1 Angoli di Eulero

Come detto in precedenza, il fine di questo progetto è quello della stima degli angoli di beccheggio,  $\theta$ , e di rollio,  $\phi$ .

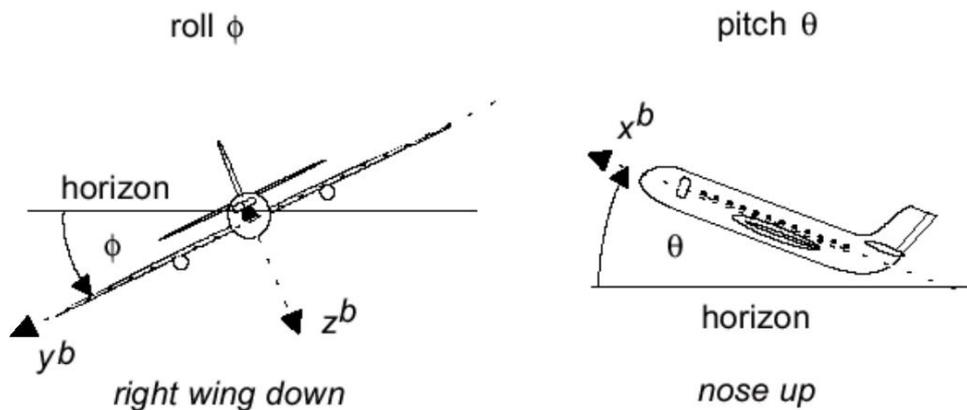


Figura 62 - Angoli di Eulero: rollio e beccheggio

Questi sono due dei tre angoli di Eulero, definiti dalle tre successive rotazioni che, applicate ad una terna di riferimento secondo un ordine stabilito, consentono di farle assumere lo stesso orientamento di un'altra terna.

Per definire questi angoli, si applicano tre rotazioni alla terna  $F_2$  (terna di arrivo) per allinearla con la terna  $F_1$  (terna di partenza):

- la prima rotazione di un angolo  $\Psi$  si effettua intorno all'asse  $Z_2$  in senso positivo (antiorario) definendo così un sistema di assi intermedio  $F_2'=(X_2',Y_2',Z_2'\equiv Z_2)$
- la seconda rotazione di un angolo  $\theta$  si effettua intorno all'asse  $Y_2'$  della terna intermedia  $F_2'$  in senso positivo, definendo un secondo sistema di assi intermedio  $F_2''=(X_2''\equiv X_1, Y_2''\equiv Y_2, Z_2'')$
- la terza rotazione di un angolo  $\phi$  positivo si effettua intorno all'asse  $X_2''\equiv X_1$

Nel caso in esame la terna di partenza è il sistema di riferimento “Assi Corpo” ( $X_b$  lungo la direzione dell'asse longitudinale del velivolo,  $Z_b$  verso il basso e giacente nel piano di simmetria longitudinale del velivolo,  $Y_b$  di

## 4. Appendici

conseguenza), mentre quella di arrivo è composta in modo tale che gli assi  $X_h$  ed  $Y_h$  formino un piano orizzontale parallelo a quello tangente alla superficie terrestre, e l'asse  $Z_h$  verso il basso secondo la direzione della verticale locale della gravità.

Quindi, passando alla definizione degli angoli di Eulero:

- l'*angolo di beccheggio (pitch angle)*  $\Theta$  è definito come l'angolo formato dall'asse  $X_b$  col piano dell'orizzontale locale  $X_h Y_h$ , con verso positivo verso l'alto
- l'*angolo di rollio (roll angle)*  $\Phi$  è definito come l'angolo formato dall'asse  $Y_b$  col piano dell'orizzontale locale  $X_h Y_h$ , con verso positivo verso il basso

## 4. Appendici

### 4.2 Richiami sulla teoria della misura

Tutti i sensori, dagli accelerometri e i giroscopi al tubo di Pitot e agli indicatori di angolo d'incidenza e di deriva, forniscono misure affette da errori.

L'impossibilità di eliminare dalla misurazione l'errore è formalizzata nella teoria classica della misurazione all'interno della quale sono definite le seguenti tre variabili:

- punteggio vero ( $t$ ), ovvero il valore reale ma teorico (e quindi "atteso") che ciascun oggetto  $p$  possiede rispetto alla caratteristica  $e$  che, a causa degli errori di misurazione, non può essere osservato direttamente, ma può essere stimato attraverso la misurazione reale; per questo esso è concepito come una quantità ipotetica, non osservabile che non può essere direttamente misurata; in questo senso esso rappresenta il valore atteso per un certo oggetto;
- punteggio osservato ( $x$ ), ovvero il valore realmente osservato per l'oggetto  $p$ , rispetto alla caratteristica, ottenuto attraverso la procedura di misurazione; esso rappresenta una stima del punteggio vero;
- errore ( $e$ ), ovvero la deviazione del punteggio osservato dal punteggio vero; esso è inosservabile; l'errore di misurazione, qui considerato come casuale e non sistematico, non è una proprietà della caratteristica misurata ma è il prodotto della misurazione effettuata sull'oggetto; esso è correlato in modo inversamente proporzionale all'affidabilità: maggiore è la componente di errore, peggiore è l'affidabilità. Naturalmente potendo disporre di una procedura di misurazione perfettamente affidabile e valida e quindi di un punteggio  $x$  esente da errore, i due punteggi  $t$  e  $x$  sono perfettamente equivalenti; in caso contrario ogni singola misurazione ( $x$ ) viene considerata composta di due parti:

$$\text{punteggio osservato} = \text{punteggio vero} + \text{errore di misurazione}$$

ovvero

$$x = t + e$$

All'interno della teoria classica della misurazione questa rappresenta l'equazione fondamentale che consente di definire formalmente il concetto di errore di misurazione come differenza tra il punteggio osservato e il suo corrispondente punteggio vero: in pratica essa formalizza l'impossibilità da parte di un particolare punteggio osservato di eguagliare il punteggio vero a causa di disturbi casuali.

#### 4. Appendici

In realtà l'equazione alla base della teoria classica della misurazione necessita di un'ulteriore specificazione:

$$x = t + e + B$$

dove B sta per *bias*, ovvero l'errore sistematico che, influenzando i punteggi osservati, li rende meno affidabili.

Potendo effettuare sullo stesso oggetto ripetute misurazioni della stessa caratteristica con la stessa procedura si può ipotizzare di ottenere, a causa della presenza dell'errore, risultati diversi che più o meno si avvicinano a quello vero. La teoria classica della misurazione assume che la distribuzione di tutti i valori così registrati sia normale e che il valore vero sia quello che presenta la frequenza più alta o, meglio, che tale valore sia quello con la probabilità più alta di avvicinarsi a quello vero. In altre parole le misure rilevate si distribuiscono con maggiore frequenza intorno al valore del punteggio vero e simmetricamente al di sopra e al di sotto del punteggio vero (come nella seguente figura); in particolare gli errori positivi compensano gli errori negativi; maggiore è l'estensione della distribuzione dei punteggi ottenuti e l'oscillazione dei punteggi osservati intorno al punteggio medio (considerato stima del punteggio vero), maggiore è l'ampiezza dell'errore.

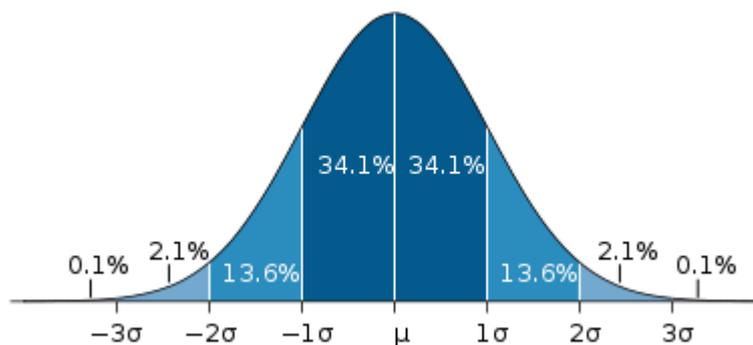


Figura 63 - Distribuzione normale o Gaussiana

Dal grafico si osserva che il valore osservato si scosta dal valore medio il 68.2% delle volte nel range compreso tra  $-\sigma$  e  $+\sigma$ , il 95.4% tra  $-2\sigma$  e  $+2\sigma$ , ed il 99.7% tra  $-3\sigma$  e  $+3\sigma$ .

La deviazione standard (o scarto quadratico medio)  $\sigma$  è uno dei modi per esprimere la dispersione dei dati intorno ad un indice di posizione ed ha pertanto la stessa unità di misura dei valori osservati (al contrario della varianza che ha come unità di misura il quadrato dell'unità di misura dei valori di riferimento).

#### 4. Appendici

La deviazione standard è quindi un indice di precisione, mentre  $\mu$  rappresenta l'accuratezza della misura (vedere figura seguente).

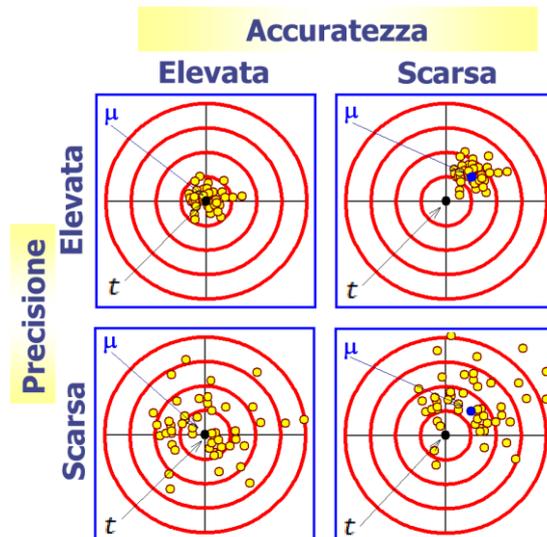


Figura 64 - Precisione ed accuratezza

## Riferimenti bibliografici

- [1] Marro Giovanni (2004), *Controlli automatici*, 5a edizione, Bologna, Zanichelli editore S.p.A.
- [2] Casarosa Carlo (2007), *Meccanica del volo*, 1a ristampa, Pisa, Edizioni Plus – Pisa university press
- [3] Collinson R.P.G. (2011), *Introduction to Avionics Systems*, 3a edizione, Springer Science + Business Media
- [4] Fink M.P., Freeman D.C. Jr. (1969), *Full-Scale Wind-Tunnel Investigation of Static Longitudinal and Lateral Characteristics of a Light Twin-Engine Airplane*, technical report N.A.S.A. TN D-4983
- [5] Koziol J.S. Jr. (1971), *Simulation Model for the Piper PA-30 Light Maneuverable Aircraft in the Final Approach*, technical report N.A.S.A. DOT-TSC-FAA-71-11
- [6] Brian L. Stevens, Frank L. Lewis (2003), *Aircraft Control and Simulation*, 2a edizione, Hoboken - New Jersey, pubblicato da John Wiley & Sons, Inc.
- [7] Bernard Etkin, Lloyd D. Reid (1996), *Dynamics of Flight: Stability and Control*, 3a edizione, pubblicato da John Wiley & Sons, Inc.
- [8] Myron Kayton, Walter R. Fried (1997), *Avionics Navigation Systems*, 2a edizione, pubblicato da John Wiley & Sons, Inc.
- [9] David Tritterton, John Weston (2004), *Strapdown Inertial Navigation Technology*, 2a Edizione, IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series 17