

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Introduzione alla geometria simplettica in fisica

**Relatore:**  
**Prof. Emanuele Latini**

**Presentata da:**  
**Alessandro Cerati**

Anno Accademico 2023/2024



## Sommario

La geometria simplettica è una branca della geometria differenziale che si propone di generalizzare le proprietà geometriche, ovvero indipendenti dalle coordinate, del moto dei sistemi meccanici. Questo elaborato si propone di esplorarne le radici fisiche e dare un esempio delle sue applicazioni in tale campo. Si passano in rassegna, ponendole su base formale, le formulazioni newtoniana, lagrangiana ed hamiltoniana della meccanica classica, e viene data una formulazione geometrica della meccanica di sistemi non vincolati. Viene poi esposta la teoria delle varietà differenziabili e si definiscono vettori, forme differenziali e operazioni su di essi. In seguito, si definisce la struttura simplettica canonica dei fibrati cotangenti e si espongono alcune sue proprietà, si introduce la teoria di gruppi e algebre di Lie, si definisce la mappa momento, che associa alle simmetrie di un sistema quantità conservate nella sua evoluzione, e si enuncia il teorema di riduzione simplettica, che consente di sfruttare queste quantità conservate per ridurre la dimensionalità del problema del moto. Infine la meccanica hamiltoniana viene riformulata nel linguaggio della geometria simplettica e il teorema di riduzione simplettica viene applicato all'analisi del moto del corpo rigido libero.

## Abstract

*Symplectic geometry is a branch of differential geometry which aims to generalize the geometric (coordinate-independent) properties of the motion of physical systems. This work aims to explore its physical roots and give an example of its applications in this field. The newtonian, lagrangian and hamiltonian formulations of classical mechanics are reviewed and put on a formal basis. A geometrical formulation of the mechanics of unconstrained systems is given. Subsequently, the theory of differential manifolds is explored and vectors, differential forms and operations on these objects are defined. The canonical symplectic structure of cotangent bundles is then defined and some of its properties are reviewed. The theory of Lie groups and associated algebras is introduced. The moment map is defined, providing a way to associate symmetries of a system to quantities conserved in its evolution. The symplectic reduction theorem is formulated, allowing one to exploit these conserved quantities to reduce the dimensionality of the motion problem. Finally, hamiltonian mechanics is reformulated in the language of symplectic geometry. The symplectic reduction theorem is applied to the analysis of the motion of the free rigid body.*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Formulazioni della meccanica</b>	<b>3</b>
1.1 Il modello classico dell'universo . . . . .	3
1.2 Meccanica newtoniana . . . . .	6
1.3 Meccanica lagrangiana . . . . .	7
1.4 Meccanica hamiltoniana . . . . .	10
<b>2 Varietà differenziabili</b>	<b>14</b>
2.1 Varietà e applicazioni differenziabili . . . . .	14
2.2 Vettori tangenti . . . . .	16
2.3 Vettori cotangenti . . . . .	21
2.4 Forme differenziali . . . . .	22
<b>3 Varietà simplettiche</b>	<b>28</b>
3.1 Struttura simplettica . . . . .	28
3.2 Gruppi di Lie e algebre associate . . . . .	34
3.3 Riduzione simplettica . . . . .	38
<b>4 Meccanica simplettica</b>	<b>42</b>
4.1 Meccanica e varietà . . . . .	42
4.2 Esempio: moto del corpo rigido libero . . . . .	45
<b>Riferimenti bibliografici</b>	<b>49</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>50</b>



Per i mari azzurri degli atlanti e per i  
grandi mari del mondo.

---

J. L. Borges, *Storia della notte*





# Introduzione

Il formalismo lagrangiano costituisce per la meccanica classica un vero e proprio cambio di paradigma rispetto a quello newtoniano. Esso infatti non si limita a sostituire la celeberrima legge  $F = ma$  di Newton con il principio di minima azione, ma riduce al minimo la presenza dei vettori, entità matematiche principi della meccanica newtoniana. Obiettivo principale di questa operazione è la covarianza: a prescindere dal sistema di coordinate impiegato, siano esse cartesiane, sferiche o iperboliche, le equazioni di Eulero-Lagrange ottenute dal principio di minima azione avranno la stessa forma. Più simmetria e ancora maggiore libertà di scelta di coordinate per semplificare i calcoli si hanno passando al formalismo hamiltoniano, duale di quello lagrangiano. Il prezzo di questa potenza è però un pesante apparato computazionale che spesso offusca l'eleganza del formalismo.

Fortunatamente, questo prezzo può essere permutato. Gli strumenti della geometria differenziale, e in particolare le teorie delle varietà differenziabili, delle forme differenziali e dei gruppi di Lie, consentono di formulare la meccanica hamiltoniana in modo non solo covariante, ma addirittura del tutto libero dall'uso di coordinate e puramente *geometrico*. La difficoltà viene così trasferita da un'ottusa complessità dei calcoli a una certa sottigliezza nella formulazione, dall'utilizzo degli strumenti alla loro definizione. La difficoltà concettuale che risulta da questo scambio è non solo notevolmente più soddisfacente da districare — aspetto in ogni caso da non sottovalutare — ma presenta anche notevoli vantaggi teorici e pratici. Dal punto di vista matematico, lo studio della *geometria simplettica*, che generalizza le proprietà geometriche degli spazi delle fasi di sistemi meccanici, si è ormai affrancato dalla sua origine fisica e costituisce un fertile ambito di ricerca. Per quanto riguarda le applicazioni fisiche, invece, il formalismo simplettico è più semplice da espandere oltre la meccanica classica rispetto al newtoniano, e ha le stesse capacità di sfruttare le simmetrie di un sistema per ridurre la gravosità dei calcoli che rende l'hamiltoniano così utile.

Oltre agli impieghi diretti, la formulazione simplettica della meccanica classica costituisce un'opportunità di familiarizzare con concetti e strumenti che sono ormai onnipresenti nella fisica moderna, primi tra tutti quelli di *varietà differenziabile*, fondamento della relatività generale, e *gruppo di Lie* — anche specificamente nel suo impiego per la formalizzazione delle simmetrie — che costituisce invece uno degli elementi chiave del

Modello Standard della fisica delle particelle. La teoria delle varietà costituisce inoltre un caso esemplare di impiego dell'astrazione matematica, nel suo separare concetti che nello spazio euclideo tridimensionale coincidono e nell'identificarne altri tra cui sussistono relazioni particolari.

Obiettivo di questo elaborato è giungere a una formulazione geometrica, in cui i concetti sono cioè definiti senza l'utilizzo di coordinate, della meccanica classica, attraverso la geometria simplettica definita canonicamente sui fibrati cotangenti delle varietà differenziabili, e definire il processo di riduzione simplettica che sfrutta le simmetrie di un sistema fisico per ridurre la dimensione dello spazio delle fasi trovando quantità conservate, nello specifico le componenti della mappa momento del gruppo di Lie associato alla simmetria. Nel primo capitolo verrà fornita una descrizione matematica dell'universo e dei moti dei corpi in esso e verranno velocemente passate in rassegna le formulazioni della meccanica classica trattate nel corso triennale di Fisica: newtoniana, lagrangiana, hamiltoniana. I successivi due capitoli si concentreranno sul fornire gli strumenti matematici necessari per la formulazione simplettica. Nel secondo capitolo si definiranno e si daranno gli strumenti per trattare varietà differenziabili e loro atlanti di coordinate, vettori e spazi tangenti e cotangenti, e forme differenziali che generalizzano questi ultimi. Nel terzo capitolo si forniranno gli strumenti più specifici alla meccanica simplettica: per prima cosa la forma simplettica stessa, per poi passare a gruppi e algebre di Lie, alla mappa momento e al teorema di riduzione simplettica. Nel quarto capitolo si applicheranno alla meccanica gli strumenti acquisiti, e come esempio di utilizzo della riduzione simplettica sarà analizzato il moto del corpo rigido libero.

# Capitolo 1

## Formulazioni della meccanica

La meccanica classica si propone di studiare il moto dei corpi macroscopici in movimento con velocità trascurabile rispetto a quella della luce. In questo capitolo saranno esposte tre *formulazioni* della meccanica classica, vale a dire tre modi per ricavare le equazioni del moto di un sistema. Dopo aver costruito un modello di universo classico e richiamato l'intuitiva ma scomoda formulazione *newtoniana* basata sulle forze, si ricaverà la formulazione *lagrangiana* dal principio di minima azione. Infine, grazie alla trasformata di Legendre, si passerà alla formulazione *hamiltoniana*. Quest'ultima formulazione costituirà il sostrato dell'intero lavoro. Le sue caratteristiche e le necessità di una sua riformulazione geometrica guideranno la terminologia utilizzata e le scelte degli argomenti nei capitoli 2 e 3.

### 1.1 Il modello classico dell'universo

Per dare una formulazione il più matematica possibile alla meccanica classica è innanzitutto necessario stabilire alcune caratteristiche dell'universo per quanto riguarda i corpi che si muovono su scala macroscopica (azione molto maggiore della costante di Planck  $\hbar$ ) e a basse velocità (molto minori di quella della luce  $c$ ). Queste caratteristiche dovranno essere emulate dal modello di universo che ci si propone di costruire. Siccome l'ambito di applicazione di questo modello comprende l'esperienza quotidiana, è da essa che si può trarre spunto. Si pongono quindi i seguenti requisiti al modello:

1. L'universo è composto da *spazio e tempo*. Lo spazio è tridimensionale ed euclideo, il tempo è unidimensionale.
2. Gli eventi sono individuati nello spazio e nel tempo usando *sistemi di coordinate*. Esistono sistemi, detti *inerziali*, tali che:
  - (a) A ogni istante, tutte le leggi della natura sono uguali in ogni sistema inerziale.
  - (b) Tutti i sistemi che si muovono di moto rettilineo e uniforme rispetto a un sistema inerziale sono inerziali.

3. L'universo è popolato di *particelle*, entità adimensionali dotate di una massa e una posizione. Queste si comportano in modo *newtonianamente deterministico*: l'insieme delle posizioni e delle velocità di tutte le particelle a un certo tempo determina tutto il loro moto, sia nel passato che nel futuro.

Si desidera ora costruire un modello formale che presenti queste stesse caratteristiche. Per fare ciò, sarà necessaria una struttura matematica che formalizza l'idea di uno spazio-tempo in cui gli spostamenti sono vettori, ma non è definita un'origine. Tale struttura è nota come spazio affine.

**Definizione 1.1.** Uno *spazio affine  $n$ -dimensionale* è una struttura  $(A, V, +)$  dove:

- $A$  è un insieme.
- $V$  è uno spazio vettoriale reale.
- $+ : A \times V \rightarrow A$  è un'applicazione biunivoca detta *azione destra* di  $V$  su  $A$ . L'immagine della coppia  $(a, v)$  con  $a \in A, v \in V$  si denota con  $a + v$ .

Si dice *dimensione* di  $A$  la dimensione di  $V$ . Spesso uno spazio affine  $(A, V, +)$  viene indicato semplicemente con l'insieme  $A$ .

*Osservazione 1.1.1.* Siccome  $+$  è biunivoca, fissati  $a, b \in A$  esiste uno e un solo  $v \in V$  tale che  $a + v = b$ . Tale elemento di  $V$  si denota con  $v = b - a$ . Se si pensa alla differenza tra punti come a uno *spostamento*, quindi, gli spostamenti in  $A$  risultano effettivamente vettori di  $V$ .

*Osservazione 1.1.2.* Fissato un  $a \in A$ , l'insieme dei  $v$  tali che  $v = b - a$  per un qualche  $b \in A$  forma uno spazio vettoriale reale isomorfo a  $V$ .

È a questo punto possibile formulare le componenti centrali del modello: l'universo, il tempo, gli eventi contemporanei e la distanza fra di essi. Queste andranno a formare una struttura detta galileiana.

**Definizione 1.2.** Una *struttura spazio-temporale galileiana* è composta da:

1. L'*universo*, uno spazio affine quadridimensionale  $\mathbb{A}^4$  i cui punti sono detti *eventi*.
2. Il *tempo*, un'applicazione lineare  $t : \mathbb{V}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\mathbb{V}^4$  è lo spazio vettoriale associato ad  $\mathbb{A}^4$ . Si dice *intervallo temporale* fra due eventi  $a, b \in \mathbb{A}^4$  il numero reale  $t(a - b)$ . Se esso è nullo,  $a$  e  $b$  si dicono *contemporanei*. Gli eventi contemporanei a un dato evento  $a$  formano uno spazio affine tridimensionale detto *spazio degli eventi contemporanei*.
3. La *distanza fra eventi contemporanei*

$$d(a, b) := \|a - b\|_2 := \sqrt{\langle a - b, a - b \rangle} \quad (1.1)$$

definita sugli spazi degli eventi contemporanei.

Queste definizioni tuttavia non consentono ancora di formulare la meccanica classica. Non si ha infatti modo di identificare un punto nello spazio attraverso lo scorrere del tempo, siccome gli spazi di eventi contemporanei sono tutti separati tra loro. Per collegarli, si introduce l'ultima componente, i sistemi di riferimento.

**Definizione 1.3.** Si dice *sistema di riferimento* un'applicazione lineare biunivoca  $\varphi : \mathbb{A}^4 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

Con quest'ultimo concetto si è finalmente in grado di descrivere posizioni e moti delle particelle che popolano l'universo. Noto infatti un elemento  $(t, \mathbf{x})$  di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  si può risalire univocamente all'evento  $\varphi^{-1}(t, \mathbf{x})$ . Soprattutto se, come in questo elaborato, non si considerano cambi di sistema di riferimento, è quindi possibile formulare un modello in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  per poi risalire alla sua espressione in  $\mathbb{A}^4$ , che è il vero e proprio modello di universo

**Definizione 1.4.** Si dice *moto* di una particella in un sistema di riferimento  $\varphi$  un'applicazione differenziabile  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $I$  è un intervallo aperto in  $\mathbb{R}$ , che manda  $t \mapsto \mathbf{x}(t)$ . Si dice *posizione* del punto al tempo  $t \in I$  il vettore  $\mathbf{x}(t)$ . Si dicono *velocità* e *accelerazione* del punto al tempo  $t \in I$  le derivate rispettivamente prima e seconda della posizione

$$\dot{\mathbf{x}}(t) := \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_t \quad \text{e} \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) := \left. \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \right|_t \quad (1.2)$$

*Osservazione 1.4.1.* Velocità e accelerazione così definiti sono vettori del medesimo spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3$  a cui appartiene la posizione. Formulare la meccanica in maniera geometrica per sistemi arbitrari richiederà di rinunciare a questa proprietà.

Per descrivere le posizioni di  $N$  particelle servono  $N$  vettori a 3 componenti. La risultante struttura può essere identificata con un vettore del prodotto diretto di  $N$  copie di  $\mathbb{R}^3$ . Questo vettore descrive la configurazione dell'intero sistema, il che motiva la seguente definizione.

**Definizione 1.5.** Si dice *spazio delle configurazioni* di un sistema di  $N$  particelle il prodotto diretto di  $N$  copie di  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{M} := \underbrace{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \dots \times \mathbb{R}^3}_{N \text{ volte}} \quad (1.3)$$

*Moto, configurazione* (corrispondente alla posizione), *velocità* e *accelerazione* di un tale sistema sono definite analogamente a quanto fatto per una sola particella, sostituendo  $\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{M}$ .

*Osservazione 1.5.1.* Si noti che anche  $\mathbb{M}$  è uno spazio vettoriale.

## 1.2 Meccanica newtoniana

Finora ci è occupati solo di come descrivere i moti delle particelle nell'universo. L'obiettivo della meccanica, tuttavia, è determinare in anticipo i moti di queste particelle sulla base di informazioni note, grazie al principio di determinismo newtoniano. Nella formulazione originaria, dovuta a Newton stesso, i moti delle particelle sono previsti in base alle forze che agiscono su di esse, determinate sperimentalmente, tramite la legge di Newton. In versione moderna, questa può essere formulata come segue.

**Legge di Newton.** Siano  $\mathbb{M}$  lo spazio delle configurazioni di un sistema e  $I$  un intervallo reale aperto, se il sistema segue un moto  $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{M}$  esiste una funzione  $\mathbf{F} : \mathbb{M} \times \mathbb{M} \times I \rightarrow \mathbb{M}$  tale che

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad (1.4)$$

Questa è detta equazione di Newton ed  $\mathbf{F}$  è detta forza (generalizzata) agente sul sistema.

*Osservazione 1.5.2.* La funzione  $\mathbf{F}$  si può ottenere da una formulazione elementare della meccanica, che vede le forze come entità agenti su ciascuna particella in maniera distinta, moltiplicando la forza risultante su ciascuna particella per la massa di quest'ultima e concatenando i vettori risultanti.

*Osservazione 1.5.3.* La legge di Newton soddisfa il principio di determinismo grazie al teorema di esistenza e unicità di Cauchy: data la condizione iniziale, ovvero posizione e velocità del sistema a un tempo  $t_0$ , la soluzione dell'equazione 1.4 esiste ed è unica nell'intervallo temporale  $I$  in cui  $\mathbf{F}$  è definita.

La funzione  $\mathbf{F}$  per un dato sistema fisico deve essere determinata sperimentalmente. Il modello matematico del sistema viene costruito nel momento in cui viene definita  $\mathbf{F}$ , motivo per cui essa è spesso identificata con il sistema stesso.

La conoscenza di  $\mathbf{F}$  consente in linea di principio di conoscere il moto del sistema per qualsiasi posizione iniziale. Ciò tuttavia è molto più facile a dirsi che a farsi: per un sistema di  $N$  particelle, questo metodo richiede di risolvere  $3N$  equazioni differenziali, un processo spesso impossibile dal punto di vista analitico e inefficiente da quello numerico. È però possibile fare affermazioni qualitative sul moto dei corpi anche quando l'equazione del moto non è analiticamente risolvibile, attraverso concetti legati a una funzione a valori reali detta *energia* (totale).

**Definizione 1.6.** Si dice *energia cinetica di un sistema* formato da  $N$  particelle di masse  $m_i$  nelle posizioni  $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^3$  la quantità

$$K(\dot{\mathbf{x}}) := \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \|\dot{\mathbf{x}}_i\|^2 \quad (1.5)$$

**Definizione 1.7.** Una forza dipendente solo dalla configurazione  $\mathbf{x}$  del sistema e dal tempo  $t$  si dice *campo di forze*. Si dice *lavoro* del campo di forze  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  sul cammino

$\gamma \subset \mathbb{M}$  la quantità

$$L := \int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} \quad \text{a } t \text{ fissato} \quad (1.6)$$

Un campo di forze e il corrispondente sistema si dicono *conservativi* se il lavoro del campo su un cammino qualsiasi non dipende dal cammino stesso. In tal caso, si dice *potenziale* rispetto a  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{M}$  la quantità definita simbolicamente come

$$V(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{x} \quad \text{a } t \text{ fissato} \quad (1.7)$$

dove l'integrale è compiuto lungo un qualsiasi percorso  $\gamma$  di estremi  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}$ .

**Definizione 1.8.** Si dice *energia totale* di un sistema conservativo

$$E(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) := K(\dot{\mathbf{x}}) + V(\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

**Teorema 1.9.** *L'energia totale di un sistema conservativo con potenziale indipendente dal tempo è costante nel tempo.*

Il teorema 1.9 consente ad esempio di determinare la regione di spazio delle configurazioni ammessa per il moto di un sistema, date le condizioni iniziali.

### 1.3 Meccanica lagrangiana

La conservazione dell'energia di un sistema è un metodo piuttosto semplice per ottenere informazioni qualitative sul suo comportamento, ma queste non sono particolarmente dettagliate. La formulazione newtoniana è inoltre fortemente legata alle componenti dei vettori in  $\mathbb{M}$ : si è sostanzialmente forzati a usarle per individuare un punto, anche quando il moto sarebbe più conveniente da descrivere attraverso altri sistemi di coordinate.

Si può ovviare a questi problemi attraverso la formulazione *lagrangiana* della meccanica, che ricava le equazioni del moto da una funzione scalare, non vettoriale come la forza generalizzata.

**Definizione 1.10.** Si dice *lagrangiana* di un sistema la funzione

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) := K(\dot{\mathbf{x}}) - V(\mathbf{x}, t) \quad (1.9)$$

Si dice *azione* di un moto  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t)$  tra i tempi  $t_0$  e  $t_1 \in \mathbb{R}$  l'integrale della lagrangiana nel tempo

$$S(t_0, t_1; \mathbf{x}) := \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt \quad (1.10)$$

*Osservazione 1.10.1.* Si nota per completezza che la trattazione di alcuni sistemi richiede l'introduzione di un termine di *potenziale generalizzato* dipendente linearmente dalla velocità. Tale classe di sistemi non verrà tuttavia trattata in questo lavoro.

Fissati un tempo iniziale e finale  $t_0$  e  $t_1$  e una configurazione iniziale e finale  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}_1$ , l'azione è un funzionale definito sullo spazio dei moti  $\mathbf{x}$  tali che  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ . Per avere una formulazione della meccanica, è necessario un modo per determinare quale moto viene effettivamente realizzato. Intuitivamente, questo dovrebbe avere un qualche tipo di "efficienza": non dovrebbe seguire un percorso inutilmente lungo, né variare la sua velocità più del necessario. Queste idee sono raccolte in una formulazione matematica dal *principio di minima azione*.

**Principio di minima azione.** *Il moto fisicamente realizzato da un sistema fra due punti nello spazio delle configurazioni è quello per cui l'azione è minima.*

Questo principio riguarda il moto nella sua interezza. Essendo un'applicazione differenziabile, il moto appartiene però a uno spazio vettoriale infinito-dimensionale. A causa di ciò, il problema della determinazione pratica di quale sia effettivamente il moto lungo cui l'azione è minima necessita lo sviluppo del calcolo delle variazioni per essere risolto; nel presente lavoro ci si limiterà a presentare il teorema che risulta da una trattazione completa.

**Teorema 1.11.** *Affinché un moto  $\mathbf{x} : t \mapsto \mathbf{x}(t)$  sia un minimo dell'azione  $S(\mathbf{x})$  (definita dall'equazione 1.10) fissati tempi e punti iniziali e finali  $t_0, t_1, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$  è necessario che esso soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0 \quad (1.11)$$

dove  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$  indica il gradiente  $\nabla_{\mathbf{x}}$ .

*Osservazione 1.11.1.* Questa è a rigore una condizione necessaria ma non sufficiente. Il caso in cui un'applicazione soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange senza dare un minimo dell'azione non si verifica però in meccanica classica.

È possibile dimostrare l'equivalenza tra le equazioni di Eulero-Lagrange e quelle di Newton nel definire i moti di un sistema fisico. Come menzionato sopra, la formulazione lagrangiana semplifica però notevolmente i calcoli in molte situazioni. Un primo vantaggio è dovuto al fatto che essa consente di svolgere i calcoli non solo usando le componenti dei vettori di  $\mathbb{M}$ , ma anche con coordinate arbitrarie.

**Definizione 1.12.** In un sottoinsieme dello spazio delle configurazioni  $U \subseteq \mathbb{M}$  si dicono *coordinate*  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  le  $n$ -uple appartenenti a un insieme  $\mathcal{W}$  tale che esista una funzione biunivoca  $\varphi^{-1} : \mathbf{q} \in \mathcal{W} \mapsto \mathbf{x} \in U$ .

*Osservazione 1.12.1.* La funzione è definita come un'inversa per consistenza con il capitolo 2. Nel seguito, per semplificare la notazione, si scriverà  $\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \varphi^{-1}(\mathbf{q})$ .



*Osservazione 1.12.2.* In generale, non è detto che  $\dot{\mathbf{x}}$  dipenda solo da  $\dot{\mathbf{q}}$ : potrebbe dipendere anche da  $\mathbf{q}$ , come in effetti spesso è il caso.

**Teorema 1.13.** *Un moto soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange in  $\mathbf{x}$  se e solo se le soddisfa in coordinate  $\mathbf{q}$  arbitrarie per  $\mathbb{M}$ :*

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{x}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), t) = 0 \quad (1.12)$$

Questo significa che le equazioni del moto di un sistema ad esempio in coordinate polari possono essere ottenute immediatamente una volta scritte l'energia cinetica  $T(\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))$  e il potenziale  $V(\mathbf{x}(\mathbf{q}))$  in coordinate polari.

Fra i casi più comuni in cui è naturale individuare una configurazione con coordinate non lineari vi sono i sistemi vincolati, ovvero che non sono liberi di occupare l'intero spazio vettoriale delle configurazioni. La meccanica lagrangiana è particolarmente adatta alla determinazione delle equazioni del moto di tali sistemi.

**Definizione 1.14.** Sia  $\mathbb{M}$  uno spazio delle configurazioni di dimensione  $n$  con coordinate arbitrarie  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ . Si dice *vincolo olonomo* la richiesta che il moto abbia un'immagine contenuta nel sottoinsieme  $M$  di  $\mathbb{M}$  definito da

$$M := \left\{ a \in \mathbb{M} \left| \begin{cases} F_1(\mathbf{q}) = 0 \\ \vdots \\ F_k(\mathbf{q}) = 0 \end{cases} \right. \right\} \quad \text{con} \quad \mathbf{q} = \varphi(a) \quad (1.13)$$

dove  $k \leq n$  e  $F_1, \dots, F_k$  sono funzioni differenziabili da  $\mathbb{M}$  a  $\mathbb{R}$ , tali che il rango della matrice  $\frac{\partial F_i}{\partial q_j}$  sia  $k$  in ogni  $a \in M$ .  $M$  è detto *spazio delle configurazioni di un sistema vincolato*.

*Osservazione 1.14.1.* Lo spazio vincolato  $M$  non è necessariamente uno spazio vettoriale, ma può essere un qualsiasi sottoinsieme di  $\mathbb{M}$ . Un insieme  $M$  della forma data dall'equazione 1.13 si dice *varietà immersa* in  $\mathbb{M}$ . Si dice *spazio tangente* alla varietà immersa in un punto  $a \in M$  lo spazio dei vettori  $\boldsymbol{\xi}$  applicati ad  $a$  tali che  $\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla F_1(\mathbf{q}) = \dots = \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla F_k(\mathbf{q}) = 0$ . I concetti generali di *varietà* e *spazio tangente* sono fondamentali per una formulazione geometrica della meccanica e saranno esposti nel capitolo 2.

*Osservazione 1.14.2.* Un vincolo non olonomo, detto *anolonomo*, può vincolare anche la velocità del sistema. Non si parlerà in questo lavoro di vincoli anolonomi, quindi in tutto il seguito con *vincolo* si intenderà *vincolo olonomo*.

Per utilizzare matematicamente il concetto di vincolo, è necessario trovare una formalizzazione del meccanismo che restringe la regione ammessa di spazio delle configurazioni. Intuitivamente, un vincolo è un'entità che applica una forza infinita sul sistema quando esso tenta di uscire dallo spazio vincolato  $M$ . Le forze sono prerogativa della

meccanica newtoniana, ma si può utilizzare un potenziale a pendenza tendente all'infinito lungo le direzioni che si allontanano dal vincolo. Esprimendo per il teorema del Dini le prime  $k$  coordinate in funzione delle altre  $n - k$

$$\begin{cases} q_1 = f_1(q_{k+1}, \dots, q_n) \\ \vdots \\ q_k = f_k(q_{k+1}, \dots, q_n) \end{cases} \quad (1.14)$$

il potenziale necessario è

$$V_\alpha(\mathbf{q}) := V(\mathbf{q}) + \alpha[(q_1 - f_1)^2 + \dots + (q_k - f_k)^2] \quad \text{per } \alpha \rightarrow +\infty \quad (1.15)$$

dove  $V$  è il potenziale dello stesso sistema senza vincoli. Usando questo potenziale è possibile dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 1.15.** *Sia  $M \subset \mathbb{M}$  lo spazio delle configurazioni di un sistema vincolato con lagrangiana  $\mathcal{L}_\alpha = T - V_\alpha$ , siano date le condizioni iniziali  $\mathbf{q}_0 \in M$  e  $\dot{\mathbf{q}}_0$  tangente a  $M$  e sia  $\boldsymbol{\varphi}_\alpha(t)$  il moto del sistema. Allora esiste il limite*

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\varphi}_\alpha(t) := \boldsymbol{\psi}(t) \quad (1.16)$$

e la funzione limite  $\mathbf{q}(t) := \boldsymbol{\psi}(t)$  soddisfa le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_*}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \right] - \frac{\partial \mathcal{L}_*}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 \quad (1.17)$$

dove  $\mathcal{L}_*$  è detta lagrangiana ridotta ed è definita come

$$\mathcal{L}_*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) := T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \Big|_{\substack{q_1=f_1, \dots, q_k=f_k \\ \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k=0}} - V(\mathbf{q}) \Big|_{q_1=f_1, \dots, q_k=f_k} \quad (1.18)$$

Questo teorema consente in pratica di scrivere la lagrangiana esprimendo le coordinate vincolate in funzione delle altre, per poi calcolare le equazioni del moto solo per le coordinate non vincolate. Nel caso di un pendolo sferico, ad esempio, si possono calcolare le equazioni del moto solo per le coordinate sferiche angolari, tenendo fissa la coordinata radiale.

## 1.4 Meccanica hamiltoniana

Le equazioni di Eulero-Lagrange sono intrinseche allo spazio delle configurazioni, ovvero non richiedono di conoscere le caratteristiche di tutto  $\mathbb{M}$  ma solo di  $M$ . Esse sono tuttavia di secondo ordine nelle coordinate  $\mathbf{q}$ , il che rende complicate operazioni come i cambi di variabili una volta scritta la lagrangiana. La formulazione *hamiltoniana* consente invece di ottenere le equazioni del moto da equazioni di primo ordine. Essa è sempre basata sul principio di minima azione, ma usa una diversa funzione scalare, detta hamiltoniana, che è legata alla lagrangiana da un'applicazione nota come trasformata di Legendre.

**Definizione 1.16.** Una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *convessa* se l'hessiana  $\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_x$  è definita positiva  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.17.** Data una funzione convessa  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , sia  $F : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione data da

$$F : (\mathbf{x}, \mathbf{p}) \longmapsto F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) := \mathbf{p}\mathbf{x} - f(\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

e sia  $\mathbf{x}(\mathbf{p})$  la funzione che a un vettore duale  $\mathbf{p} \in (\mathbb{R}^n)^*$  associa il valore di  $\mathbf{x}$  tale che  $F(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  è massimo. Si dice *trasformata di Legendre* di  $f$  la funzione  $f^* : (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

$$f^*(\mathbf{p}) = F(\mathbf{x}(\mathbf{p}), \mathbf{p}) \quad (1.20)$$

*Osservazione 1.17.1.* La funzione  $F$  non è altro che la distanza verticale tra il punto del grafico di  $f$  con coordinate  $\mathbf{x}$  e il grafico del duale  $\mathbf{p}$  (che nel caso multidimensionale è un piano a  $n - 1$  dimensioni passante per l'origine).

*Osservazione 1.17.2.* A  $\mathbf{p}$  fissato,  $F$  è massima quando  $\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = 0$ , da cui segue che

$$\mathbf{p} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}(\mathbf{p})} \quad (1.21)$$

*Osservazione 1.17.3.* Nel caso in cui  $f$  è una funzione differenziabile definita sull'asse reale, siccome il grafico di un vettore duale  $\mathbf{p} \in (\mathbb{R})^*$  è una retta passante per l'origine, l'osservazione 1.17.2 significa che  $\mathbf{x}(\mathbf{p})$  è il punto in cui la tangente al grafico di  $f$  è parallela al grafico di  $\mathbf{p}$ . Insieme all'osservazione 1.17.1, ciò implica che in questo caso  $f^*(\mathbf{p})$  è l'intercetta della retta con pendenza  $\mathbf{p}$  tangente al grafico di  $f$ .

*Osservazione 1.17.4.* La trasformata di Legendre è comunque definita anche per funzioni convesse ma non differenziabili.

Le equazioni del moto di primo ordine si ottengono dall'hamiltoniana, che come detto in precedenza è la trasformata di Legendre della lagrangiana rispetto alle velocità.

**Definizione 1.18.** Si dice *hamiltoniana*  $\mathcal{H}$  di un sistema con lagrangiana  $\mathcal{L}$  espresso nelle coordinate  $\mathbf{q}$  la trasformata di Legendre di  $\mathcal{L}$  rispetto alle velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}}$ .

*Osservazione 1.18.1.* La condizione di convessità necessaria per la trasformata di Legendre è sempre soddisfatta per i sistemi meccanici qui in esame, siccome l'energia cinetica è definita positiva e il potenziale non dipende dalle  $\dot{\mathbf{q}}$ .

In meccanica hamiltoniana rivestono un'importanza fondamentale grandezze dette *momenti*, che sono duali delle velocità e ne prendono il ruolo come variabili una volta effettuata la trasformata di Legendre.

**Definizione 1.19.** Dato un sistema con lagrangiana  $\mathcal{L}$  espresso nelle coordinate  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ , si dice *momento (generalizzato)* rispetto a  $q_j$  la quantità

$$p_j(\dot{q}_j) := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}(\dot{q}_j) \quad (1.22)$$

La relazione  $\mathbf{p}(\dot{\mathbf{q}})$  può essere invertita per ottenere  $\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})$ , il che consente di esprimere l'energia cinetica in funzione dei momenti. Si può quindi ottenere l'hamiltoniana in maniera più immediata che attraverso la trasformata di Legendre.

**Teorema 1.20.** *L'hamiltoniana di un sistema con lagrangiana  $\mathcal{L}$  espresso nelle coordinate  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$  è data da*

$$\mathcal{H} = \left[ \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(\mathbf{p}_j) \right] - \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p}), t) \quad (1.23)$$

Come anticipato, le equazioni del moto possono essere ottenute dall'hamiltoniana risolvendo un sistema di equazioni di primo ordine.

**Teorema 1.21.** *Il moto seguito da un sistema fisico soddisfa le equazioni*

$$\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad \dot{\mathbf{p}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (1.24)$$

Esse sono dette equazioni di Hamilton.

**Teorema 1.22.** *Se la lagrangiana ha la forma  $\mathcal{L} = T - V$ , l'hamiltoniana è data da*

$$\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{p})) + V(\mathbf{q}, t) \quad (1.25)$$

ovvero  $\mathcal{H} = E$ , l'energia totale definita dalla meccanica newtoniana.

La conservazione dell'energia totale si generalizza alla conservazione di qualsiasi hamiltoniana:

**Teorema 1.23.** *Se l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  non dipende esplicitamente dal tempo  $t$ , le equazioni di Hamilton conservano  $\mathcal{H}$ .*

In meccanica lagrangiana si codifica lo stato del sistema nello spazio delle configurazioni, con la velocità data dall'evoluzione di  $\dot{\mathbf{q}}$  a partire dalle condizioni iniziali; in meccanica hamiltoniana è necessario usare un altro tipo di spazio, lo spazio delle fasi, che include anche i momenti generalizzati.

**Definizione 1.24.** Si dice *spazio delle fasi  $X$*  lo spazio di tutte le possibili coppie di posizione e momento generalizzato  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ .

*Osservazione 1.24.1.* Se il sistema non è vincolato, le sue posizioni appartengono allo spazio delle configurazioni  $\mathbb{M}$  isomorfo a un qualche  $\mathbb{R}^n$ , e dunque anche i momenti appartengono a  $(\mathbb{R}^n)^*$  isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Lo spazio delle fasi è quindi isomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Si è detto che lo scopo di questo lavoro è fornire una formulazione geometrica, ovvero libera da coordinate, della meccanica classica. Per sistemi non vincolati, ciò è possibile anche solo utilizzando gli strumenti definiti finora e quelli forniti dal calcolo differenziale in  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Definizione 1.25.** Per un sistema non vincolato con hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , si dice *campo vettoriale hamiltoniano*

$$\mathbf{V}_{\mathcal{H}}(\mathbf{z}) := -J \nabla \mathcal{H}(\mathbf{z}) \quad (1.26)$$

dove  $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ ,  $\nabla$  è il gradiente totale sullo spazio delle fasi

$$\nabla := \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \quad (1.27)$$

e  $J$  è una matrice a blocchi data da

$$J := \begin{bmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

dove  $\mathbb{1}$  è la matrice identità.

In tal modo le equazioni di Hamilton prendono la forma

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{V}_{\mathcal{H}}(\mathbf{z}) \quad (1.29)$$

da cui risulta che

**Teorema 1.26.** *Il moto di un sistema non vincolato è la linea di flusso del campo vettoriale hamiltoniano che ha inizio nelle condizioni iniziali  $(\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$ .*

Definendo il moto in termini di flusso di un campo vettoriale, si sono rimosse le coordinate dalla meccanica di un sistema non vincolato: il comportamento delle linee di flusso ne è indipendente, così come il campo vettoriale. Si procederà in maniera analoga per rimuovere completamente le coordinate dalla definizione dei sistemi meccanici e dei loro moti. Tuttavia, nel caso di sistemi conservativi generici, che possono anche essere vincolati e quindi avere proprietà geometriche non banali, sarà necessario impostare la teoria delle varietà differenziabili, con la quale si descriveranno geometricamente gli spazi delle fasi e in particolare i campi vettoriali hamiltoniani e i loro flussi di fase. Questo sarà l'oggetto del prossimo capitolo.

## Capitolo 2

# Varietà differenziabili

La teoria delle varietà differenziabili si occupa di generalizzare le caratteristiche geometriche di  $\mathbb{R}^n$  a spazi più generali. In questo capitolo si daranno per prima cosa le definizioni di varietà differenziabile e di applicazione differenziabile fra varietà. Si definiranno poi i vettori tangenti e cotangenti sulle varietà, mostrandone il collegamento alle operazioni di derivazione e definendo spazi tangenti e cotangenti. Infine ci si occuperà delle forme differenziali, che forniranno il fondamento della formulazione simplettica della meccanica.

### 2.1 Varietà e applicazioni differenziabili

Gli elementi di uno spazio vettoriale come  $\mathbb{R}^n$  possono essere individuati tramite le loro componenti, che costituiscono a tutti gli effetti coordinate lineari. Insieme su cui non è possibile definire coordinate lineari, ma che ammettono comunque sistemi di coordinate, possiedono ancora molte caratteristiche di  $\mathbb{R}^n$  e sono descritti dal concetto di varietà differenziabile. Questo è un concetto molto più generale di quello di spazio vettoriale, che ammette anche il caso in cui non esista un sistema di coordinate definito su tutta la varietà. Sono però posti alcuni requisiti per evitare casi patologici.

**Definizione 2.1.** Si dice *varietà differenziabile* una struttura  $(X, \mathcal{U})$  dove  $X$  è un insieme e  $\mathcal{U}$ , detto *atlante*, è una collezione di coppie  $(U_\nu, \varphi_\nu)$  per  $\nu \in S \subset \mathbb{R}$ , dette *carte di coordinate*, dove gli  $U_\nu$  sono sottoinsiemi di  $X$  e le  $\varphi_\nu : U_\nu \rightarrow \mathbb{R}^n$  sono applicazioni biunivoche su un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$  detto  $\varphi_\nu(U_\nu)$ , tali che:

1. Le carte sono *compatibili*, cioè se  $U_\nu \cap U_\mu \neq \emptyset$  allora  $\varphi_\nu(U_\nu \cap U_\mu)$  e  $\varphi_\mu(U_\nu \cap U_\mu)$  sono aperti nelle rispettive copie di  $\mathbb{R}^n$  e l'applicazione  $\varphi_\mu \circ \varphi_\nu^{-1} : \varphi_\nu(U_\nu \cap U_\mu) \rightarrow \varphi_\mu(U_\nu \cap U_\mu)$  è differenziabile fra questi due sottoinsiemi aperti di  $\mathbb{R}^n$ .  $i_{\nu\mu} := \varphi_\mu \circ \varphi_\nu^{-1}$  è detta *mappa di transizione* fra le carte  $\varphi_\nu$  e  $\varphi_\mu$ .
2. Esiste un sottoinsieme numerabile  $J \subset S$  tale che  $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ .

3. Definendo *aperti in  $X$*  i sottoinsiemi di  $X$  la cui immagine è aperta sotto tutte le carte nel cui dominio sono inclusi,  $X$  è uno spazio di Hausdorff, ossia per ogni  $x, y \in X$  con  $x \neq y$  esistono due insiemi aperti  $U_x, U_y \subset X$  tali che  $x \in U_x$  e  $y \in U_y$  mentre  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

Dato che non saranno considerati altri tipi di varietà, l'aggettivo *differenziabile* sarà spesso omesso nel seguito. Si indicherà inoltre la varietà  $(X, \mathcal{U})$  semplicemente con  $X$ .

*Osservazione 2.1.1.* Si noti che, per come sono definite qui, le  $\varphi_\nu$  associano a un elemento della varietà una  $n$ -upla di reali, e non viceversa. Siccome le  $\varphi_\nu$  sono biunivoche per definizione, tuttavia, è possibile riottenere i punti della varietà note le loro coordinate.

*Osservazione 2.1.2.* È possibile aggiungere nuove carte all'atlante  $\mathcal{U}$  senza cambiare la struttura di varietà se queste nuove carte sono compatibili con le vecchie. Se un atlante non ammette nuove carte compatibili, esso è detto *massimale*.

*Osservazione 2.1.3.* Definendo gli aperti come al punto 3, una varietà differenziabile ha una topologia naturale. In questa topologia, tutte le carte sono mappe continue (ossia tali che la retroimmagine di ogni aperto è aperta) per definizione. Viceversa, uno spazio topologico ha una struttura di varietà differenziabile, scegliendo gli  $U_\nu$  fra gli aperti, se è possibile ricoprire  $X$  di aperti e scegliere i  $\varphi_\nu$  in modo che siano omeomorfismi con  $\mathbb{R}^n$ .

*Osservazione 2.1.4.* La topologia naturale rende possibile determinare quando una varietà è connessa. Se  $X$  è una varietà connessa, la dimensione  $n$  di  $\mathbb{R}^n$  codominio di una funzione coordinata  $\varphi$  appartenente a una carta è lo stesso per ogni  $\varphi$ . In tal caso,  $n$  si dice *dimensione* di  $X$ . Nel seguito, saranno considerate solo varietà connesse.

Data una carta  $(U, \varphi)$  e un punto  $x \in U$ , spesso per brevità si indicano le componenti  $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  con  $(x_1, \dots, x_n)$ , identificando sostanzialmente  $U$  con  $\varphi(U)$ .

Definito il teatro della teoria, restano da definire le azioni che in essa si possono compiere, vale a dire le applicazioni differenziabili da una varietà a un'altra.

**Definizione 2.2.** Un'applicazione  $f : X \rightarrow Y$  tra varietà  $X, Y$  si dice *differenziabile* se per ogni  $x \in X$  esistono una carta  $(U, \varphi)$  su  $X$  con  $x \in U$  e una carta  $(V, \psi)$  su  $Y$  tali che  $f(U) \subset V$  e inoltre  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  sia una funzione differenziabile tra sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ .  $f_{\varphi\psi} := \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  è detta *rappresentazione in coordinate* dell'applicazione  $f$ .  $f$  si dice inoltre *diffeomorfismo* se è invertibile e anche la sua inversa è differenziabile.

*Osservazione 2.2.1.* Se  $f$  è differenziabile, allora è anche continua fra le topologie delle due varietà indotte da  $\mathbb{R}^n$ . In tal caso infatti ogni sottoinsieme aperto di  $Y$  ha come retroimmagine un sottoinsieme aperto di  $X$ , dato che ogni punto  $x$  di questa retroimmagine ammette un intorno aperto  $U$ .

Nel caso, specifico ma significativo, in cui  $f$  sia a valori reali, ovvero  $Y = \mathbb{R}$ ,  $Y$  ha una carta globale  $(\mathbb{R}, \iota)$  (dove  $\iota$  è l'identità) e la definizione diventa la seguente.

**Definizione 2.3.** Un'applicazione a valori reali definita su una varietà  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  si dice *differenziabile* se per ogni  $x \in X$  esiste una carta  $(U, \varphi)$  su  $X$  con  $x \in U$  tale che  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  sia una funzione differenziabile tra sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ .

Come semplice esempio di varietà differenziabile, si consideri la circonferenza di raggio unitario nel piano  $(x, y)$

$$S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad (2.1)$$

Intuitivamente, essa è una varietà a una dimensione: le funzioni coordinate avranno quindi un'unica componente. L'angolo  $\varphi : S^1 \rightarrow ]0, 2\pi[$  misurato in senso antiorario partendo dall'asse  $x$  non fornisce però una coordinata, dato che il punto  $x = 1$  sull'asse  $x$  rimane escluso. Si possono definire coordinate sulla circonferenza dividendola in due domini (aperti)  $U_1 := S^1 \setminus \{(1, 0)\}$  e  $U_2 := S^1 \setminus \{(0, 1)\}$ . Su questi domini si possono poi definire le funzioni coordinate  $\varphi_1 : U_1 \rightarrow ]0, 2\pi[$  data da  $\varphi_1 : (x, y) \mapsto \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$  e  $\varphi_2 : U_2 \rightarrow ]-\pi, \pi[$  data da  $\varphi_2 : (x, y) \mapsto \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ . Entrambe le carte sono ben definite e la funzione di transizione

$$i_{21} := \varphi_2 \varphi_1^{-1} : \theta \mapsto \begin{cases} \theta & \text{se } \theta \in ]0, \pi[ \\ \theta - 2\pi & \text{se } \theta \in ]\pi, 2\pi[ \end{cases} \quad (2.2)$$

è differenziabile su tutto  $S^1$ , così come  $i_{12}$  che ne è l'inversa. Un esempio di funzione a valori reali  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  su questa varietà è dato da  $f : (x, y) \mapsto y$ . Le sue rappresentazioni in coordinate sono  $f \circ \varphi_1^{-1} : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f \circ \varphi_2^{-1} : ]-\pi, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$ , date da

$$f \circ \varphi_1^{-1} : \theta \mapsto \cos \theta \quad f \circ \varphi_2^{-1} : \theta \mapsto \cos(\theta - 2\pi) \quad (2.3)$$

Un modo naturale per produrre nuove varietà è prendere il prodotto cartesiano di varietà già definite. La varietà prodotto ha per punti le coppie di punti e per coordinate le coppie di coordinate delle due varietà fattore. A livello formale, il risultato è dato dal teorema seguente.

**Teorema 2.4.** Se  $X$  e  $Y$  sono varietà con struttura data dalle carte  $\{(U_\mu, \varphi_\mu)\}$ , con  $\mu \in R \subset \mathbb{R}$ , e  $\{(V_\nu, \psi_\nu)\}$ , con  $\nu \in S \subset \mathbb{R}$ , il prodotto cartesiano  $X \times Y$  ha una struttura naturale di varietà data dalle carte  $\{(U_\mu \times V_\nu, (\varphi_\mu, \psi_\nu))\}$ , dove  $\mu \in R$ ,  $\nu \in S$  e

$$((\varphi_\mu, \psi_\nu)) : (x, y) \mapsto ((\varphi_\mu(x), \psi_\nu(y))) \quad \text{per } x \in U_\mu, y \in V_\nu \quad (2.4)$$

## 2.2 Vettori tangenti

Tra le caratteristiche principali delle varietà differenziabili vi è che esse ammettono "spostamenti infinitesimi", i quali formano uno spazio vettoriale. Questi spostamenti consentono inoltre di generalizzare la derivazione direzionale di funzioni a valori reali.



**Definizione 2.5.** Si dice *vettore tangente* alla varietà  $X$  nel punto  $x \in X$  la classe di equivalenza  $\xi = [\gamma]$ , dove  $\gamma : ] - \varepsilon, \varepsilon [ \rightarrow X$ , con  $\varepsilon > 0$ , è un cammino differenziabile con  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma_1$  equivale a  $\gamma_2$  se esiste una carta  $(U, \varphi)$  tale che

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\gamma_1(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\gamma_2(t)) \quad (2.5)$$

L'insieme dei vettori tangenti a  $X$  in  $x$  si dice *spazio tangente* a  $X$  in  $x$  e si indica con  $T_x X$ .

*Osservazione 2.5.1.* Intuitivamente, un vettore tangente in  $x \in X$  è definito come un certo comportamento al primo ordine dei cammini attraverso  $x$ .

Lo spazio tangente a  $\mathbb{R}^n$  in un qualsiasi punto  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , denotato  $T_{\mathbf{y}}\mathbb{R}^n$ , può essere identificato con  $\mathbb{R}^n$  facendo corrispondere a ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  la classe di equivalenza  $\xi_{\mathbf{v}}$  del cammino  $\gamma_{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{y} + t\mathbf{v}$ . Siccome qualsiasi cammino  $\gamma_0 : ] - \varepsilon, \varepsilon [ \rightarrow X$ , con  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma_0(0) = \mathbf{y}$ , ammette nella sua classe di equivalenza  $\xi$  il cammino  $\gamma(t) = \mathbf{y} + t\dot{\gamma}_0(0)$  (si ricordi che  $\mathbb{R}^n$  ammette la mappa coordinata  $\varphi = \text{id}$ ) e quindi corrisponde a un  $\mathbf{v}_{\xi} = \dot{\gamma}_0(0) \in \mathbb{R}^n$ , la corrispondenza è suriettiva. Dato che è anche iniettiva per definizione, essa è biunivoca.

Una carta  $(U, \varphi)$  intorno a un punto  $x \in X$ , con  $X$  varietà generica di dimensione  $n$ , fornisce inoltre un modo di identificare  $T_x X$  con  $\mathbb{R}^n$ , associando a ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  la classe  $\xi_{\mathbf{v}}$  del percorso su  $U$

$$\gamma_{\mathbf{v}}(t) := \varphi^{-1}(\varphi(x) + t\mathbf{v}) \quad \text{per } t \in ] - \varepsilon, \varepsilon [ \quad \text{con } \varepsilon > 0 \quad (2.6)$$

Questa corrispondenza è biunivoca, dato che a ogni vettore  $\xi$  corrisponde la  $n$ -upla

$$\mathbf{v}_{\xi} := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(\gamma(t)) \quad (2.7)$$

Ogni spazio tangente può quindi essere identificato con  $\mathbb{R}^n$  tramite un'applicazione  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x X$  che manda  $\mathbf{v} \mapsto \xi_{\mathbf{v}}$ , la cui inversa manda  $\xi \mapsto \mathbf{v}_{\xi}$ . Si può dare a  $T_x X$  la struttura di uno spazio vettoriale imponendo che  $\Phi$  sia un isomorfismo, ovvero definendo le operazioni come

$$\xi + \mu\eta := \Phi(\mathbf{v}_{\xi} + \mu\mathbf{v}_{\eta}) \quad (2.8)$$

Una base di  $T_x X$  è costituita dalle classi di equivalenza  $\xi_i$  delle *curve coordinate*

$$\gamma_i := \varphi^{-1}(\varphi(x) + t e_i) \quad \text{per } i = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

dove  $e_i$  è l' $i$ -esimo elemento della base canonica di  $\mathbb{R}^n$  e i cammini sono da intendersi come classi di equivalenza. In questa base, un vettore  $\xi$  è rappresentato proprio dalla  $n$ -upla  $\mathbf{v}_{\xi} \in \mathbb{R}^n$ .

Esiste tuttavia anche un'altra definizione equivalente per i vettori tangenti, che presenta notevoli vantaggi per quanto riguarda l'uso dei vettori nei calcoli. Si consideri lo spazio degli operatori  $\hat{\gamma}$  definiti sulle funzioni  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$\hat{\gamma} : f \mapsto \hat{\gamma}(f) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) \quad (2.10)$$

dove  $[\gamma] \in T_x X$ . Esso è uno spazio vettoriale se si definiscono le operazioni imponendo

$$(\hat{\gamma} + \mu\hat{\delta})(f) := \hat{\gamma}(f) + \mu\hat{\delta}(f) \quad (2.11)$$

per ogni funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Una sua base è data dagli operatori  $\hat{\gamma}_i$ , dove i  $\gamma_i$  sono le curve coordinate. In questa base, l'operatore  $\hat{\gamma}$  è rappresentato dalla  $n$ -upla  $\mathbf{v}_\gamma$ . Per ognuno di questi operatori vale inoltre la *regola di Leibniz in  $x$*

$$\hat{\gamma}(fg) = \hat{\gamma}(f)g(x) + f(x)\hat{\gamma}(g) \quad (2.12)$$

per ogni coppia di funzioni  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ . La mappa  $\Psi : \gamma \mapsto \hat{\gamma}$  è un isomorfismo tra lo spazio degli operatori che obbediscono alla regola di Leibniz e lo spazio tangente a  $X$  in  $x$ . I due spazi possono quindi essere identificati, e i vettori tangenti a  $X$  in  $x$  possono essere *definiti* come gli operatori su  $X$  che rispettano la regola di Leibniz in  $x$ , detti *derivate direzionali*.

La definizione degli operatori di base  $\hat{\gamma}_i$  può essere scritta come

$$\begin{aligned} \hat{\gamma}_i &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma_i(t)) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\gamma_i(\varepsilon)) - f(\gamma_i(0))}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varphi^{-1}(\varphi(x) + \varepsilon e_i)) - f(\varphi^{-1}(\varphi(x)))}{\varepsilon} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_\varphi(\varphi(x) + \varepsilon e_i) - f_\varphi(\varphi(x))}{\varepsilon} = \\ &= \left. \frac{\partial f_\varphi}{\partial x_i} \right|_{\varphi(x)} := \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_x f := \partial_i|_x f \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove  $f_\varphi$  è la rappresentazione di  $f$  nella carta  $\varphi$ . Un generico vettore tangente, inteso come derivata direzionale, può quindi essere scritto come combinazione lineare degli operatori  $\partial_i|_x$ . Un tale oggetto si dice *operatore differenziale del primo ordine valutato in  $x$* . Ovviamente, quindi, i vettori tangenti a  $X$  in un punto  $x$  possono essere definiti in una terza maniera equivalente come operatori differenziali del primo ordine valutati in  $x$ .

Quale che sia la definizione iniziale che viene adottata, un singolo vettore tangente può quindi essere visto come classe di curve, come derivazione direzionale o come

operatore differenziale del primo ordine. Le componenti del vettore nelle basi *canoniche*  $\xi_i$ ,  $\hat{\gamma}_i$  e  $\partial_i|_x$  sono le stesse nei tre casi. In un cambio di carta, le curve coordinate cambieranno, e dunque cambieranno anche le componenti di un dato vettore. Questa trasformazione è indipendente dal vettore, tanto che un vettore può anche essere definito come quantità che si trasforma in tale modo, ed è data dal seguente teorema.

**Teorema 2.6.** *Sia  $X$  una varietà e siano  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  due carte. Sia  $x \in U \cap V$  e sia  $\xi \in T_x X$ . Siano  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  le componenti di  $\xi$  nelle basi di curve coordinate date da  $\varphi$  e  $\psi$ , rispettivamente. Allora, dette  $u_j$  e  $v_i$  le componenti di  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e detta  $F^{\varphi\psi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la funzione di transizione, con componenti  $F_i^{\varphi\psi}$ , vale*

$$v_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i^{\varphi\psi}}{\partial x_j}(\varphi(x)) u_j \quad (2.14)$$

È possibile estendere il concetto di campo vettoriale alle varietà: intuitivamente, un campo vettoriale associa a ogni punto un vettore tangente alla varietà in quel punto, in maniera differenziabile.

**Definizione 2.7.** Si dice *campo vettoriale* su una varietà  $X$  un'applicazione  $V : x \in X \mapsto V_x \in T_x X$ , tale che per ogni  $x \in X$  e per ogni carta  $(U, \varphi)$  con  $x \in U$  sia differenziabile la mappa  $V_\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  risultante per ciascun  $y \in U$  dall'identificazione di  $T_y X$  con  $\mathbb{R}^n$  data dalla base di curve coordinate di  $\varphi$ .

Pensando ai vettori tangenti come operatori differenziali del primo ordine, un campo vettoriale è dato da

$$V_x = \sum_{j=1}^n a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

che è un operatore differenziale agente sulle funzioni su  $X$ . Indicando simbolicamente la funzione di transizione con  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ , l'equazione 2.14 implica che valga

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (2.16)$$

ovvero la regola della catena in  $\mathbb{R}^n$ .

I vettori tangenti consentono di individuare spostamenti infinitesimi su una varietà, e rendono quindi possibile la formulazione e la risoluzione di equazioni differenziali.

**Definizione 2.8.** Sia  $X$  una varietà, un'applicazione  $\bar{x} : I \rightarrow X$ , con  $I$  aperto in  $\mathbb{R}$ , si dice *linea di flusso* per un campo vettoriale  $V$  su  $X$  se soddisfa l'equazione

$$\dot{x}(t) = V(\bar{x}(t)) \quad (2.17)$$

dove  $\dot{x}$  è il vettore tangente in  $\bar{x}(t)$  definito da  $[\bar{x}]$ , con il tempo opportunamente traslato.

*Osservazione 2.8.1.* Scelta una carta, questa equazione equivale a un'equazione di primo grado, la cui soluzione per una data condizione iniziale esiste ed è unica per via del teorema di Cauchy. Si dimostra quindi il seguente teorema.

**Teorema 2.9.** *Sia  $X$  una varietà compatta (cioè in cui ogni successione ammette una sottosuccessione convergente) e sia  $V$  un campo vettoriale su  $X$ . Allora esistono un  $\varepsilon > 0$  e un'applicazione differenziabile  $\Phi : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times X \rightarrow X$ , detta flusso del campo vettoriale, tale che*

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x) = V(\Phi(t, x)) \quad \forall x \in X \quad (2.18)$$

dove la derivata temporale di  $\Phi$  indica il vettore tangente in  $\Phi(x, t)$  definito da  $[\Phi(t, x)]$ . Inoltre, la mappa  $\Phi^t(x) : X \rightarrow X$  definita da  $\Phi^t : x \mapsto \Phi(t, x)$  è un diffeomorfismo di  $X$  in se stesso.

Gl spazi tangenti a una varietà si possono raccogliere in una struttura detta fibrato tangente, che è anch'essa una varietà.

**Definizione 2.10.** Sia  $X$  una varietà, si dice *fibrato tangente*  $TX$  la varietà costituita dall'insieme delle coppie  $(x, \xi)$  con  $x \in X$  e  $\xi \in T_x X$ , con l'atlante dato dalle carte  $(U, \Phi)$  definite nel seguente modo. Sia  $(U, \varphi)$  una carta su  $X$  e sia  $T_U X$  l'insieme delle coppie  $(x, \xi)$  con  $x \in U$  e  $\xi \in T_x X$ . Allora  $\Phi : T_U X \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$  è definita come

$$\Phi(x, \xi) := (\varphi(x), \mathbf{v}) \quad (2.19)$$

dove  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  è il vettore reale corrispondente a  $\xi$  nella base delle curve coordinate di  $\varphi$ .

Queste varietà vengono dette fibrati per analogia al caso della circonferenza, in cui ogni punto possiede una "fibra" monodimensionale come spazio tangente. Il fibrato cotangente di una circonferenza, quindi, è il cilindro infinito  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Da un elemento dello spazio tangente si può sempre rimuovere la fibra.

**Definizione 2.11.** Sia  $X$  una varietà e  $TX$  il suo fibrato tangente. Si dice *proiezione* del fibrato tangente su  $X$  l'applicazione  $\pi : TX \rightarrow X$  definita per ogni  $x \in X$  e  $\xi \in T_x X$  da  $\pi(x, \xi) := x$ .

Un'altra possibilità che i vettori tangenti consentono di espandere da  $\mathbb{R}^n$  alle varietà in generale è la derivata di un'applicazione a valori in una seconda varietà, da non confondersi con la derivazione *direzionale* di una funzione da una varietà in  $\mathbb{R}$  trattata in precedenza.

**Definizione 2.12.** Siano  $X, Y$  varietà e sia  $f : X \rightarrow Y$  un'applicazione differenziabile. Si dice *derivata* o *push-forward* di  $f$  in  $x \in X$  l'applicazione lineare  $D_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  che porta il cammino  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow X$  con  $\varepsilon > 0$  e  $\gamma(0) \in X$  nel cammino  $f \circ \gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow Y$ .

*Osservazione 2.12.1.* Intuitivamente, la derivata dell'applicazione  $f$  in un punto  $x \in X$  associa a ogni spostamento infinitesimo da  $x$  lo spostamento infinitesimo da  $f(x) \in Y$  che ne risulta.

*Osservazione 2.12.2.* Se il vettore tangente è invece visto come una derivazione  $\hat{\xi}$  su  $X$ , il push-forward la porta nella derivazione  $f_x^* \hat{\xi}$  su  $Y$  tale che per ogni  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  valga

$$(f_x^* \hat{\xi})(g) = \hat{\xi}(g \circ f) \quad (2.20)$$

Questo è il motivo del nome *push-forward*: la derivazione viene *spinta* dalla varietà dominio alla varietà codominio di  $f$ .

## 2.3 Vettori cotangenti

Siccome uno spazio tangente è uno spazio vettoriale, esso ammette uno spazio duale. Questo, insieme a una sua generalizzazione che sarà trattata nel prossimo paragrafo, consente di definire nozioni di misura sulle varietà differenziabili. Innanzitutto, infatti, i vettori duali, detti *covettori*, possono essere pensati come modi di misurare la lunghezza dei vettori lungo un certa direzione.

**Definizione 2.13.** Sia  $X$  una varietà e sia  $x \in X$ . Si dice *spazio cotangente* a  $X$  in  $x$   $T_x^* X$  lo spazio duale di  $T_x X$ . I suoi elementi si dicono *vettori cotangenti* o *covettori*.

*Osservazione 2.13.1.* Siccome uno spazio cotangente è uno spazio duale, esso è automaticamente uno spazio vettoriale. Per lo stesso motivo le sue basi sono le basi duali di quelle dello spazio tangente.

Così come è possibile costruire campi vettoriali su una varietà, è anche possibile costruirvi campi di covettori.

**Definizione 2.14.** Si dice *1-forma differenziale* su una varietà  $X$  un'applicazione  $\alpha : x \in X \mapsto \alpha(x) \in T_x^* X$ , differenziabile in senso analogo a quello usato per i campi vettoriali nella definizione 2.7 (cioè tale che si ottenga un'applicazione differenziabile identificando gli spazi cotangenti con  $\mathbb{R}^n$  secondo le carte di coordinate).

Se  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile a valori reali, per ogni  $x \in X$  si ha che  $D_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R}$ , ma siccome  $T_{f(x)} \mathbb{R}$  può essere identificato con  $\mathbb{R}$  si può scrivere  $D_x f : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ . Ciò significa che la derivata di una funzione a valori reali appartiene allo spazio duale di quello tangente. Quindi l'applicazione che a ogni punto associa la derivata di una funzione  $f$  fissata in quel punto è una 1-forma differenziale. In particolare, sui vettori di base dello spazio tangente  $\xi_i$  essa assume i valori

$$(D_x f)(\xi_i) = \partial_i|_x f \quad (2.21)$$

**Definizione 2.15.** Sia  $X$  una varietà e sia  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  un'applicazione differenziabile, si dice *differenziale* di  $f$  la 1-forma differenziale

$$df : x \in X \mapsto D_x f \in T_x^* X \quad (2.22)$$

Nel seguito si indicherà la 1-forma data dal differenziale di  $f$  valutato in  $x$  come  $d_x f : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Osservazione 2.15.1.* Per una data carta  $(U, \varphi)$ , i differenziali  $\{d_x \varphi_1, \dots, d_x \varphi_n\}$  sono la base dello spazio cotangente duale a quella delle curve coordinate. Questa base, detta *canonica*, è spesso indicata identificando  $d_x x_j \simeq d_x \varphi_j$ , come  $\{d_x x_1, \dots, d_x x_n\}$

Anche le coordinate dei covettori si trasformano in maniera ben definita in un cambio di carte. Questa trasformazione è però inversa rispetto a quella per i vettori.

**Teorema 2.16.** Sia  $X$  una varietà e siano  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  due carte. Sia  $x \in U \cap V$  e sia  $\alpha \in T_x^* X$ . Siano  $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{v}^* \in \mathbb{R}^n$  i corrispondenti di  $\alpha$  secondo  $\varphi$  e  $\psi$ , rispettivamente. Allora, dette  $u_i^*$  e  $v_j^*$  le rispettive componenti, e detta  $F^{\varphi\psi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la funzione di transizione, con componenti  $F_i^{\varphi\psi}$ , vale

$$u_i^* = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i^{\varphi\psi}}{\partial x_j} v_j^* \quad (2.23)$$

Una generica 1-forma è data nella base canonica dalla combinazione lineare di differenziali

$$\alpha_x = \sum_{j=1}^n a_j^*(x) d_x x_j \quad (2.24)$$

dove  $a_j^*$  è una funzione differenziabile da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}$ . Da ciò segue che, denotando la funzione di transizione con  $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ , l'equazione 2.23 implica simbolicamente il teorema del differenziale totale

$$d_x y_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} d_x x_j \quad (2.25)$$

È possibile costruire un fibrato anche raccogliendo gli spazi cotangenti.

**Definizione 2.17.** Sia  $X$  una varietà, si dice *fibrato cotangente*  $T^* X$  l'insieme delle coppie  $(x, \alpha)$  con  $x \in X$  e  $\alpha \in T_x^* X$ , con l'atlante definito in maniera analoga a quanto fatto per il fibrato tangente nella definizione 2.10 (cioè concatenando le coordinate dei punti e le componenti dei vettori cotangenti nelle rispettive basi canoniche).

## 2.4 Forme differenziali

Come anticipato nel paragrafo precedente, è possibile generalizzare la “misura di lunghezza” fornita dai covettori a “misure di volumi con segno” generalizzando da 1-forme a  $k$ -forme. Le forme differenziali consentono inoltre di stabilire una corrispondenza fra vettori e covettori, che sarà fondamentale per descrivere geometricamente i

moti dei sistemi fisici. La teoria delle  $k$ -forme può essere formulata per spazi vettoriali qualunque, ed essere collegata successivamente a quella delle varietà differenziabili.

**Definizione 2.18.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale, si dice  $k$ -forma una mappa  $\alpha : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  con le due seguenti proprietà:

1. *multilinearità*: per ogni  $v_1, \dots, v_k \in V$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha(v_1, \dots, \lambda v_i + \mu v'_i, \dots, v_n) = \lambda \alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) + \mu \alpha(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_n) \quad (2.26)$$

2. *alternanza*: per ogni  $v_1, \dots, v_k \in V$  e  $i \neq j$ ,

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_n) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_n) \quad (2.27)$$

Si può ottenere una  $k$ -forma con  $k$  arbitrario da  $k$  1-forme sfruttando l'operazione seguente:

**Definizione 2.19.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale e siano  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  1-forme su di esso, si dice *prodotto esterno* di  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  la  $k$ -forma che agisce su  $v_1, \dots, v_k \in V$  secondo

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \dots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \dots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

*Osservazione 2.19.1.* Per le proprietà dei determinanti, l'operazione di prodotto esterno è multilineare negli  $\alpha_j$  e, se  $\alpha$  è una 1-forma, vale  $\alpha \wedge \alpha = 0$ .

Lo spazio delle  $k$ -forme possiede una base determinata da quella di  $V$ .

**Teorema 2.20.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Lo spazio delle  $k$ -forme da  $V$  ad  $\mathbb{R}$  è generato dall'insieme di prodotti esterni delle 1-forme su  $V$ . Se  $\{e_i\}$  è una base di  $V$  ed  $\{\tilde{e}_i\}$  è la sua base duale, lo spazio delle  $k$ -forme ammette inoltre una base formata da tutte le  $k$ -forme

$$\tilde{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{i_k} \quad (2.29)$$

tali che  $i_1 < \dots < i_k$ .

*Osservazione 2.20.1.* Geometricamente, questa forma corrisponde al volume della proiezione del parallelepipedo  $k$ -dimensionale formato dai  $k$  vettori su cui agisce la forma sul piano  $k$ -dimensionale individuato da  $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ .

*Osservazione 2.20.2.* In particolare, quindi, se  $V$  è di dimensione  $n$ , per  $k = n$  si ottiene che ogni  $n$ -forma su  $V$  è multipla di  $\tilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{e}_n$  (possibilmente nulla).

È possibile estendere il prodotto esterno a un'operazione tra forme di ordini  $k$  e  $l$  generici.

**Definizione 2.21.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Si dice *prodotto esterno* di una  $k$ -forma  $\alpha$  e una  $l$ -forma  $\beta$  la  $k+l$ -forma su  $V$   $\alpha \wedge \beta$  che agisce sui vettori  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}$  secondo

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) := \sum (-1)^\nu \alpha(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) \beta(v_{j_1}, \dots, v_{j_l}) \quad (2.30)$$

dove  $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l)$  è una permutazione di  $(1, \dots, k+l)$  con  $i_1 < \dots < i_k$  e  $j_1 < \dots < j_l$ , e  $\nu$  è 1 se questa permutazione è dispari, 0 se è pari.

Il prodotto esterno generalizzato si comporta come atteso nel caso in cui i suoi argomenti siano prodotti di 1-forme.

**Teorema 2.22.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale. Siano  $\wedge$  il prodotto esterno generalizzato e  $\bar{\wedge}$  il prodotto esterno tra 1-forme. Allora se  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  e  $\beta_1, \dots, \beta_l$  sono 1-forme su  $V$

$$(\alpha_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \alpha_k) \wedge (\beta_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \beta_l) = \alpha_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \alpha_k \bar{\wedge} \beta_1 \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} \beta_l \quad (2.31)$$

*Osservazione 2.22.1.* Siccome le due operazioni sono associative tra loro, nel seguito si indicheranno entrambe con  $\wedge$ .

Finora la teoria delle forme differenziali è stata tenuta separata da quella delle varietà. Le due possono essere unite generalizzando la definizione 2.14 a forme di generico ordine  $k$ .

**Definizione 2.23.** Sia  $X$  una varietà, si dice  $k$ -forma differenziale un'applicazione differenziabile  $\alpha : x \in X \mapsto \alpha_x$ , dove  $\alpha_x$  è una  $k$ -forma definita su  $T_x X$ , tale che l'applicazione tra varietà

$$\alpha' : (x, \gamma_1, \dots, \gamma_k) \in T^k X \mapsto \alpha_x(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R} \quad (2.32)$$

sia differenziabile. Qui  $T^k X$  è l'insieme di coppie  $(x, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ , dove  $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in T_x X$ . Questo insieme generalizza il fibrato tangente di  $X$  e, definendo l'atlante in maniera analoga a quanto fatto nella definizione 2.10, è anch'esso una varietà.

*Osservazione 2.23.1.* Lo spazio delle  $k$ -forme differenziali su una varietà  $X$  è uno spazio vettoriale con le operazioni punto per punto, e si denota con  $\Omega^k(X)$ . Anche il prodotto esterno di forme differenziali è definibile punto per punto.

Siccome le  $k$ -forme differenziali ammettono in ogni punto  $y \in X$  una base formata da tutte le  $k$ -forme  $d_y x_{i_1} \wedge \dots \wedge d_y x_{i_k}$  tali che  $i_1 < \dots < i_k < n$ , vale il seguente teorema.

**Teorema 2.24.** Sia  $X$  una varietà  $n$ -dimensionale, ogni  $k$ -forma differenziale  $\alpha : y \mapsto \alpha_y$  su  $X$  si può esprimere univocamente nelle basi locali  $d_y x_1, \dots, d_y x_n \simeq d_y \varphi_1, \dots, d_y \varphi_n$  date da una carta  $(U, \varphi)$ , con  $y \in U$ , come

$$\alpha_y = \sum_{i_1 < \dots < i_k < n} a_{i_1 \dots i_k}(y) d_y x_{i_1} \wedge \dots \wedge d_y x_{i_k} \quad (2.33)$$



Una  $k$ -forma consente di “misurare volumi” negli spazi tangenti. Questi volumi devono però essere pensati come infinitesimi, dato che devono corrispondere a spostamenti infinitesimi. Per misurare volumi sulla varietà stessa è quindi necessario definire una forma di integrazione. Ciò è possibile grazie all’operazione duale al push-forward dei vettori lungo un’applicazione  $f$ : il *pull-back* delle forme differenziali contro  $f$ .

**Definizione 2.25.** Siano  $X, Y$  due varietà, sia  $\alpha \in \Omega^k(Y)$  e sia  $f : X \rightarrow Y$  un’applicazione differenziabile. Si dice *pull-back*  $f^*(\alpha) \in \Omega^k(X)$  la  $k$ -forma differenziale  $f^*\alpha$  su  $X$  definita per  $v_1, \dots, v_k \in T_x X$ , con  $x \in X$ , da

$$(f^*\alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}((D_x f)(v_1), \dots, (D_x f)(v_k)) \quad (2.34)$$

L’espressione in coordinate del pull-back di una forma differenziale indica già lo stretto legame tra forme differenziali e integrazione.

**Teorema 2.26.** Siano  $X, Y$  due varietà  $n$ -dimensionali,  $f : X \rightarrow Y$  un’applicazione differenziabile e  $\alpha \in \Omega^n(Y)$ . Siano  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  carte su  $X$  e  $Y$  rispettivamente, si identifichino  $U$  con  $\varphi(U)$  e  $V$  con  $\psi(V)$  in modo che  $f$  sia rappresentata da  $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$  e  $\alpha$  da  $\alpha = a(y) d_y y_1 \wedge \dots \wedge d_y y_n$ . Allora  $f^*\alpha$  è rappresentata da

$$(f^*\alpha)_x = (a \circ f)(x) \det(D_x f) d_x x_1 \wedge \dots \wedge d_x x_n \quad (2.35)$$

dove  $D_x f$  è la matrice che rappresenta  $D_x f$  identificando  $T_x X$  e  $T_{f(x)} Y$  con  $\mathbb{R}^n$ .

*Osservazione 2.26.1.* Se  $Y = X$ , a meno del segno del determinante questa è la formula del cambio di variabili.

**Definizione 2.27.** Si dice *orientazione* di una varietà  $X$  un atlante, se esiste, tale che tutte le funzioni di transizione abbiano determinante positivo.

È ora possibile definire l’integrale di una forma differenziale sfruttando l’integrazione in  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 2.28.** Sia  $X$  una varietà  $n$ -dimensionale e sia  $\alpha \in \Omega^k(X)$ . Sia  $D$  un poliedro limitato e convesso  $k$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^k$ , sia  $Or$  l’orientazione di  $\mathbb{R}^k$  e sia  $f : D \rightarrow X$  un’applicazione differenziabile. Si dice *poliedro singolare  $k$ -dimensionale* la terna  $\sigma = (D, f, Or)$ , identificata con  $\sigma = f(D) \subset X$ . Si dice *integrale* di  $\alpha$  su  $\sigma$  l’integrale del suo pullback su  $D$ :

$$\int_{\sigma} \alpha := \int_D (f^*\alpha) := \int_{y \in D} a(y) dx_1 \dots dx_k \quad (2.36)$$

dove  $a : D \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione tale che in ogni  $y \in D$  sia  $(f^*\alpha)_y = a(y) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ .

*Osservazione 2.28.1.* L’integrale è ben definito, siccome per il teorema 2.26 il membro di destra non dipende dalle coordinate usate, purché non cambi l’orientazione.

*Osservazione 2.28.2.* Nella maggior parte dei casi,  $f$  sarà  $\varphi^{-1}$ , l'inversa della funzione di coordinate di una qualche carta  $(U, \varphi)$  tale che  $\sigma \subset U$ .

Dal teorema 2.26 segue inoltre una generalizzazione del teorema di cambio di variabili.

**Teorema 2.29.** *Siano  $X$  una varietà  $n$ -dimensionale orientata e  $\alpha$  una  $n$ -forma differenziale su  $X$  con supporto compatto, l'integrale di  $\alpha$  su  $X$  esiste, l'integrazione è lineare in  $\alpha$  e per ogni diffeomorfismo  $f : X \rightarrow Y$ , con  $Y$  altra varietà differenziabile,*

$$\int_Y f^*(\alpha) = \int_X \alpha \quad (2.37)$$

Tramite l'integrazione è possibile definire anche un'operazione di derivazione di  $k$ -forme, che generalizza i concetti di rotore e divergenza di un campo vettoriale in  $\mathbb{R}^n$  (identificato con una 1-forma differenziale). L'operazione è detta *derivata esterna*. Essa consentirà inoltre di definire la 2-forma tramite la quale sarà definito geometricamente il moto dei sistemi fisici.

**Definizione 2.30.** Sia  $X$  una varietà e sia  $\alpha \in \Omega^k(X)$ . Si dice *derivata esterna* di  $\alpha$ , indicata con  $d\alpha$ , la parte principale,  $(k+1)$ -lineare, dell'integrale  $\int_{\partial\Pi} \alpha$ , dove  $\Pi$  è il parallelepipedo  $k+1$ -dimensionale delimitato dalle  $n$ -uple  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1} \in \mathbb{R}^n$  che in una carta  $(U, \varphi)$  rappresentano i vettori  $\xi_1, \dots, \xi_{k+1}$  su cui agisce  $d\alpha$ . In simboli, se per  $\Pi$  delimitato da  $\varepsilon\mathbf{v}_1, \dots, \varepsilon\mathbf{v}_{k+1}$  si ha

$$\int_{\partial\Pi} \alpha = \varepsilon^{k+1} A(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{k+2}) \quad (2.38)$$

allora  $d\alpha$  è definita come

$$d\alpha(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) := A(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k+1}) \quad (2.39)$$

*Osservazione 2.30.1.* Si dimostra che in questo modo la derivata esterna è ben definita, ovvero non dipende dalla carta tramite cui si identificano i  $\xi_j$  e i  $\mathbf{v}_j$ .

Il nome di "derivata" è dovuto al fatto che la rappresentazione in coordinate della derivata esterna di una 1-forma è data formalmente dalla regola di Leibniz.

**Teorema 2.31.** *Sia  $X$  una varietà e sia  $\alpha \in \Omega^k(X)$  rappresentata nella carta  $(U, \varphi)$  da*

$$\alpha_y = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(y) d_y x_{i_1} \wedge \dots \wedge d_y x_{i_k} \quad (2.40)$$

Allora  $d\alpha$  è rappresentata nella stessa carta da

$$d\alpha_y = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}}{\partial x_j}(y) d_y x_j \wedge d_y x_{i_1} \wedge \dots \wedge d_y x_{i_k} \quad (2.41)$$

Generalizzando il rotore alla derivata esterna, è possibile generalizzare il concetto di campo vettoriale chiuso.

**Definizione 2.32.** Si dice *chiusa* una forma differenziale  $\alpha$  tale che  $d\alpha = 0$ .

In particolare, tutte le derivate esterne sono chiuse.

**Teorema 2.33.** Sia  $X$  una varietà e sia  $\alpha \in \Omega^k(Y)$ . Allora

$$d d\alpha = 0 \tag{2.42}$$

È inoltre possibile applicare il concetto di non degenerazione:

**Definizione 2.34.** Si dice *non degenera* una 2-forma differenziale  $\alpha$  su una varietà  $X$  tale che, se  $\alpha_x(\gamma, \delta) = 0$  per ogni  $\gamma \in T_x X$ , con  $x \in X$ , allora  $\delta = 0$ .

I concetti finora esposti costituiscono la base della teoria delle varietà differenziabili. Il prossimo capitolo esaminerà concetti più specializzati per l'obiettivo di questo elaborato.

# Capitolo 3

## Varietà simplettiche

In questo capitolo si userà la teoria delle varietà differenziabili per costruire gli strumenti che saranno poi impiegati nella formulazione simplettica della meccanica. Si definirà una *struttura simplettica* canonica sui fibrati cotangenti, che consentirà di associare un campo vettoriale a ogni funzione definita su di essi. Si formalizzeranno poi le simmetrie possedute da una data varietà tramite il concetto di *azione di un gruppo di Lie*. Infine, si vedrà che i gradi di libertà su cui vale una simmetria possono essere eliminati tramite un processo noto come *riduzione simplettica*.

### 3.1 Struttura simplettica

**Definizione 3.1.** Si dice *forma simplettica* una 2-forma differenziale  $\omega$  chiusa e non degenera. Si dice *varietà simplettica* una varietà  $2n$ -dimensionale su cui è definita una forma simplettica.

Su ogni fibrato cotangente è definita una forma simplettica grazie alla proiezione  $\pi$  e ai covettori  $\alpha$  che formano le fibre.

**Definizione 3.2.** Sia  $M$  una varietà  $n$ -dimensionale e sia  $X = T^*M$  il suo fibrato cotangente, con proiezione  $\pi : X \rightarrow M$ . Si dice *1-forma tautologica*  $\lambda$  su  $X$  la 1-forma differenziale tale che

$$\lambda_{(m,\alpha)}(\xi) := \alpha \left[ (D_{(m,\alpha)}\pi)(\xi) \right] \quad (3.1)$$

dove  $m \in M$ ,  $\alpha \in T_m^*M$  e  $\xi \in T_{(m,\alpha)}X$ .

*Osservazione 3.2.1.* La forma tautologica può essere vista in ciascun punto  $(m, \alpha)$  come il pull-back attraverso la proiezione della 1-forma differenziale data da  $\alpha$  su tutta  $M$

$$\lambda_{(m,\alpha)} = \pi^* \alpha \quad (3.2)$$

**Definizione 3.3.** Sia  $X$  un fibrato cotangente, si dice *2-forma canonica*  $\omega$  l'opposto della derivata esterna della forma tautologica:

$$\omega := -d\lambda \quad (3.3)$$

*Osservazione 3.3.1.* Per definizione di derivata esterna, la forma simplettica  $\omega(\xi_1, \xi_2)$  misura la circuitazione di  $\lambda$  sul rettangolo che ha per lati  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

**Teorema 3.4.** *La 2-forma canonica su un fibrato cotangente è una forma simplettica.*

Vediamo come esempio la determinazione della forma simplettica su  $\mathbb{R}^n$ . Se  $M = \mathbb{R}^n$ , il suo fibrato cotangente  $X$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^{2n}$  tramite coordinate  $\varphi : (x, \alpha) \mapsto (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ . In tal caso quindi si può considerare  $\pi : (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) \mapsto (q_1, \dots, q_n)$ . Quindi, sia  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n}) : \mathbb{R} \rightarrow X$  un cammino con  $\gamma(0) = x \in X$ , si ha

$$(\pi \circ \gamma)(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \quad (3.4)$$

Ciò significa che la derivata di  $\pi$  manda vettori  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2n})$  tangenti a  $\mathbb{R}^{2n}$  in vettori tangenti a  $\mathbb{R}^n$  proiettandoli sulle loro prime  $n$  coordinate:

$$D_{(q,p)}\pi : (\xi_1, \dots, \xi_{2n}) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n) \quad (3.5)$$

e, siccome  $\alpha(\xi) = \sum_j p_j \xi_j$  (l'applicazione di un vettore cotangente a uno tangente, scritta in coordinate) e siccome  $(dq)_j$  è la base duale  $\xi_j = (dq_j)(\xi)$ , si ha

$$\lambda_{(q,p)}(\xi) = \sum_{j=1}^n p_j \xi_j = \left[ \sum_{j=1}^n p_j dq_j \right] (\xi) \quad (3.6)$$

da cui segue che

$$\lambda_{(q,p)} = \sum_{j=1}^n p_j dq_j \quad (3.7)$$

La forma simplettica su  $\mathbb{R}^{2n}$  nelle coordinate  $(q_1, \dots, q_n)$  è quindi data dal teorema 2.31:

$$\omega = \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j \quad (3.8)$$

Si noti che questa forma ha coefficienti costanti su  $\mathbb{R}^{2n}$ , ed è quindi rappresentabile in una base  $\{e_i\}$  come matrice quadrata  $2n \times 2n$  con elementi dati da

$$\omega(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n (dq_k \wedge dp_k)(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n \det \begin{pmatrix} dq_k(e_i) & dq_k(e_j) \\ dp_k(e_i) & dp_k(e_j) \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

ovvero, nella base con coordinate  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , dalla matrice a blocchi

$$-J := - \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ovvero vale  $\omega(\xi_1, \xi_2) = \xi_1^T(-J)\xi_2$ . Essendo essa stessa una derivata esterna,  $\omega$  è chiusa, mentre dalla rappresentazione in coordinate si ottiene che essa è anche non degenera.  $\omega$  è quindi effettivamente una forma simplettica.

Si può dimostrare che la struttura della forma simplettica in  $\mathbb{R}^{2n}$  è comune a tutte le varietà simplettiche. Questo risultato è noto come *teorema di Darboux*. Per formularlo precisamente, è necessario definire il concetto di una trasformazione che “preserva la struttura simplettica”.

**Definizione 3.5.** Siano  $(X, \omega_X)$  e  $(Y, \omega_Y)$  due varietà simplettiche. Si dice *simplettomorfismo* un diffeomorfismo  $F : X \rightarrow Y$  tale che

$$F^*(\omega_Y) = \omega_X \quad (3.11)$$

Se  $X = Y$  e  $\omega_X = \omega_Y$ ,  $F$  si dice *trasformazione canonica*.

**Teorema 3.6 (Darboux).** Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica  $2n$ -dimensionale. Allora per ogni  $x \in X$  esiste una carta  $(U, \varphi)$  con  $x \in U$  tale che  $\varphi$  è una trasformazione canonica tra  $(X, \omega)$  e  $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega)$  dove  $\Omega$  è la forma simplettica canonica su  $\mathbb{R}^{2n}$  data dall'equazione 3.8.

*Osservazione 3.6.1.* Nelle coordinate individuate dal teorema di Darboux, la forma simplettica  $\omega(\xi_1, \xi_2)$  su due vettori è la somma delle aree delle proiezioni sui piani  $(q_i, p_i)$  del rettangolo (infinitesimo) formato da  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

Come esempio di varietà simplettica non lineare e che non è un fibrato cotangente, si consideri la sfera  $S^2$  immersa in  $\mathbb{R}^3$ . Si considerino le coordinate cilindriche di  $\mathbb{R}^3$  attorno agli assi  $\bar{z}$  e  $\bar{x}$ ,  $(\theta, r, z)$  e  $(\varphi, s, x)$  con  $\theta, \varphi \in [0, 2\pi[$ ,  $r, s \in \mathbb{R}^+$  e  $z, x \in \mathbb{R}$ . Per il teorema del Dini,  $\{S^2 \setminus \bar{z}, (\theta, z)\}$  e  $\{S^2 \setminus \bar{x}, (\varphi, x)\}$  sono carte che ricoprono  $S^2$ , che è quindi una varietà differenziabile. La 2-forma  $\omega = dz \wedge d\theta$ , che è del tipo previsto dal teorema di Darboux, è una forma simplettica. Infatti, per via di antisimmetria e bilinearità ogni 3-forma su una varietà bidimensionale deve essere identicamente nulla, quindi in particolare lo è  $d(dz \wedge d\theta)$  e dunque  $dz \wedge d\theta$  è chiusa. Inoltre, analogamente a sopra  $\omega$  è esprimibile in una base di ciascuno spazio tangente tramite la matrice  $2 \times 2$  con elementi

$$\omega(e_i, e_j) = (dz \wedge d\theta)(e_i, e_j) = \det \begin{pmatrix} dz(e_i) & dz(e_j) \\ d\theta(e_i) & d\theta(e_j) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

ovvero, se  $e_1$  ed  $e_2$  sono le curve coordinate di  $z$  e  $\theta$ , dalla matrice

$$-J := - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Dunque, analogamente a sopra,  $\omega$  è non degenera. Essendo chiusa e non degenera,  $\omega$  è una forma simplettica e conferisce a  $S^2$  una struttura di varietà simplettica.

Una struttura simplettica su una varietà consente di associare un campo vettoriale a ogni funzione a valori reali definita su di essa. Questa associazione è il modo anticipato in precedenza per ottenere il moto di un sistema dalla sua hamiltoniana in modo geometrico, analogamente a quanto già fatto per i sistemi non vincolati.

**Definizione 3.7.** Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica. Si dice *hamiltoniana* una funzione differenziabile  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice *campo vettoriale hamiltoniano* il campo vettoriale  $V_H$  definito su  $X$  e tale che per ogni  $x \in X$ , per ogni  $\xi \in T_x X$

$$\omega((V_H)_x, \xi) = dH_x(\xi) \quad (3.14)$$

La mappa  $H \mapsto V_H$  si dice *gradiente simplettico*.

*Osservazione 3.7.1.* La corrispondenza tra l'1-forma  $dH_x$  e il vettore  $(V_H)_x$  è analoga a quella del teorema di rappresentazione di Fischer-Riesz, in cui però il prodotto scalare è sostituito con la forma simplettica. In sostanza, la forma simplettica fornisce un *isomorfismo* fra gli spazi tangenti e cotangenti, e il campo vettoriale  $V_H$  è il corrispondente del differenziale di  $H$  attraverso questo isomorfismo.

*Osservazione 3.7.2.* Il nome di gradiente simplettico è dovuto al fatto che la mappa svolge un ruolo simile a quello del gradiente ordinario  $\nabla$ , ovvero consente di ottenere un campo vettoriale da una funzione.

L'insieme  $\mathcal{F}(X)$  delle funzioni reali differenziabili  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  definite su una varietà simplettica  $(X, \omega)$  forma uno spazio vettoriale con le operazioni di somma e prodotto per scalare punto per punto. Grazie al gradiente simplettico, questo insieme ha tuttavia una struttura ulteriore, quella di *algebra di Lie*, ovvero ammette un'operazione analoga al commutatore fra matrici.

**Definizione 3.8.** Sia  $X$  uno spazio vettoriale reale e  $[\cdot, \cdot] : X \times X \rightarrow X$  un'operazione denotata con  $(x, y) \mapsto [x, y]$ . La struttura  $(X, [\cdot, \cdot])$  si dice *algebra di Lie* se valgono le seguenti proprietà:

1. *bilinearità*:  $[\lambda x + \mu y, z] = \lambda[x, z] + \mu[y, z]$  per ogni  $x, y, z \in X$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. *antisimmetria*:  $[x, y] = -[y, x]$  per ogni  $[x, y] \in X$
3. *identità di Jacobi*:  $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$

**Definizione 3.9.** Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica e siano  $H, K : X \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni reali differenziabili con campi vettoriali hamiltoniani  $V_H$  e  $V_K$ , si dice *parentesi di Poisson* di  $H$  e  $K$

$$\{H, K\} := \omega(V_H, V_K) \quad (3.15)$$

**Teorema 3.10.** Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica, sia  $\mathcal{F}(X)$  lo spazio delle funzioni reali differenziabili su  $X$  e siano  $\{\cdot, \cdot\}$  le parentesi di Poisson su  $X$ . Allora  $(\mathcal{F}(X), \{\cdot, \cdot\})$  è un'algebra di Lie.

Per una data funzione  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$ , le parentesi di Poisson forniscono la variazione di qualsiasi altra funzione  $K$  lungo le linee di flusso di  $X_H$ .

**Teorema 3.11.** Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica, sia  $H$  un'hamiltoniana e sia  $\bar{x} : t \mapsto \bar{x}(t)$  una linea di flusso del suo campo hamiltoniano  $X_H$ . Allora per ogni funzione differenziabile  $K : X \rightarrow \mathbb{R}$  vale

$$\frac{d}{dt}K(\bar{x}(t)) = \{K, H\} \quad (3.16)$$

**Corollario 3.11.1.** Se  $\{K, H\} = 0$ ,  $K$  si conserva lungo le linee di flusso. In tal caso,  $K$  è detto integrale del moto.

**Corollario 3.11.2.** In particolare, siccome  $\{H, H\} = 0$ ,  $H$  stessa è un integrale del moto.

Oltre all'hamiltoniana stessa, anche la forma simplettica si conserva durante l'evoluzione del sistema, e in particolare il "volume" definito dall'integrale della sua  $n$ -esima potenza, che è una  $2n$ -forma, su un sottoinsieme rimane costante. Questo risultato è noto come *teorema di Liouville*

**Teorema 3.12 (Liouville).** Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica  $2n$ -dimensionale, sia  $H$  un'hamiltoniana e sia  $\Phi^t : X \rightarrow X$  il suo flusso a un tempo  $t \in \mathbb{R}$ . Allora  $\Phi^t$  è una trasformazione canonica e conserva i volumi simplettici dei sottoinsiemi di  $X$ , cioè se  $U \subset X$

$$\int_U \omega^{\wedge n} = \int_{\Phi^t(U)} \omega^{\wedge n} \quad (3.17)$$

dove

$$\omega^{\wedge n} = \underbrace{\omega \wedge \dots \wedge \omega}_n \quad (3.18)$$

La struttura simplettica consente di associare campi vettoriali a funzioni differenziabili. In maniera simile, anche se nel senso inverso, l'algebra delle funzioni data dalle parentesi di Poisson può essere vista come il risultato, tramite la forma simplettica, di una struttura algebrica di Lie valida per l'insieme  $\mathcal{V}(X)$  dei *campi vettoriali* definiti su una varietà *qualsiasi*, non necessariamente simplettica. L'operazione che definisce questa struttura è detta *parentesi di Lie*.

**Definizione 3.13.** Siano  $X$  una varietà e  $V, W$  campi vettoriali su  $X$ . Si dice *parentesi di Lie* di  $V$  e  $W$  il commutatore delle derivate direzionali che essi definiscono, ovvero l'operatore differenziale dato da

$$[V, W]_x f := V_x(W f) - W_x(V f) \quad (3.19)$$

per ogni  $f \in \mathcal{F}(X)$ , dove  $W f : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$  è l'applicazione che manda  $x \mapsto W_x f$  e  $V f$  è definita analogamente. Si dimostra infatti che questo operatore è di primo ordine.

*Osservazione 3.13.1.* La parentesi di Lie di due campi vettoriali può essere definita equivalentemente come la *derivata di Lie* del secondo lungo il primo, ovvero il vettore che



descrive la derivata del valore del secondo campo visto seguendo una linea di flusso del primo

$$[V, W]_x = - \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( (D_{\Phi_V^t(x)}(\Phi_V^t)^{-1})(W_{\Phi_V^t(x)}) \right)_x \quad (3.20)$$

**Teorema 3.14.** *Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica, siano  $\{\cdot, \cdot\}$  le parentesi di Poisson e  $[\cdot, \cdot]$  quelle di Lie su di essa. Allora il gradiente simplettico  $H \mapsto V_H$  è un omomorfismo di algebre di Lie da  $(\mathcal{F}(X), \{\cdot, \cdot\})$  a  $(\mathcal{V}(X), [\cdot, \cdot])$ , ovvero se  $H, K \in \mathcal{F}(X)$  e  $V_H, V_K \in \mathcal{V}(X)$  sono i loro campi vettoriali hamiltoniani*

$$V_{\{H, K\}} = [V_H, V_K] \quad (3.21)$$

Come esempio, si consideri  $\mathbb{R}^{2n}$  con la forma canonica. Riscrivendo la definizione di campo hamiltoniano per una funzione  $H$  in coordinate, si ottiene che per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2n}$  deve valere

$$-(\mathbf{V}_H)^T \mathbf{J} \mathbf{v} = (\nabla H)^T \mathbf{v} \quad (3.22)$$

dove  $\mathbf{J}$  è la matrice definita sopra. Siccome  $\mathbf{J}^{-1} = -\mathbf{J}$ , ciò equivale a

$$(\mathbf{V}_H)^T = (\nabla H)^T \mathbf{J} \quad (3.23)$$

Considerando nello specifico le funzioni coordinate  $q_i$  e  $p_j$  (che in  $\mathbb{R}^{2n}$  sono definite globalmente) siccome i loro gradienti sono dati da

$$\nabla q_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ i \\ \\ 2n \end{matrix} \quad \text{e} \quad \nabla p_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ n+i \\ \\ 2n \end{matrix} \quad (3.24)$$

si ha che i loro campi vettoriali sono

$$\mathbf{V}_{q_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ n+i \\ \\ 2n \end{matrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{p_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ i \\ \\ 2n \end{matrix} \quad (3.25)$$

Dunque, la parentesi di Poisson è data da

$$\{q_i, p_j\} = \omega(\mathbf{V}_{q_i}, \mathbf{V}_{p_j}) = \mathbf{V}_{q_i}^T \mathbf{J} \mathbf{V}_{p_j} = \delta_{ij} \quad (3.26)$$

Siccome questa è una funzione costante per  $i$  e  $j$  fissati, il suo campo hamiltoniano è nullo. Inoltre, se visti come derivazioni i campi vettoriali delle funzioni coordinate sono

$$\mathbf{V}_{q_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \mathbf{V}_{p_i} = -\frac{\partial}{\partial q_i} \quad (3.27)$$

da cui per il teorema di Schwarz segue che la loro parentesi di Lie è

$$[V_{q_i}, V_{p_i}] = -\frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} = 0 \quad (3.28)$$

e in questo caso risulta quindi confermato che  $V_{\{q_i, p_i\}} = [V_{q_i}, V_{p_i}]$

## 3.2 Gruppi di Lie e algebre associate

Un potente strumento geometrico per la meccanica è dato dai *gruppi di Lie*. Un gruppo di Lie è sostanzialmente “un gruppo che è anche una varietà”, con opportune richieste sulle applicazioni di gruppo.

**Definizione 3.15.** Si dice *gruppo di Lie* una varietà  $G$  con due applicazioni differenziabili  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  e  $^{-1} : G \rightarrow G$ , dette rispettivamente *moltiplicazione* e *inversione*, e un punto  $e \in G$  detto *identità*, tali che:

1.  $\cdot$  è *associativa*: per ogni  $g, f, h \in G$  vale  $g \cdot (f \cdot h) = (g \cdot f) \cdot h$ .
2.  $e$  è l'identità destra e sinistra: per ogni  $g \in G$  vale  $g \cdot e = e \cdot g = g$ .
3. Per ogni  $g \in G$ ,  $g^{-1}$  è l'*inverso* di  $g$ :  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ .

L'uso principale dei gruppi di Lie in meccanica è la modellizzazione matematica delle *simmetrie continue* di una varietà, tramite il concetto di azione.

**Definizione 3.16.** Sia  $X$  una varietà e sia  $G$  un gruppo di Lie. Si dice *azione* di  $G$  su  $X$  un'applicazione differenziabile  $\Phi : (g, x) \in G \times X \mapsto \Phi_g(x) \in X$  tale che:

1. L'azione di  $e$  è la mappa identità:  $\Phi_e(x) = x$  per ogni  $x \in X$ .
2. Azione e moltiplicazione sono associative fra loro:  $\Phi_{g \cdot h}(x) = \Phi_g(\Phi_h(x))$  per ogni  $g, h \in G$  e  $x \in X$ , oppure  $\Phi_{g \cdot h}(x) = \Phi_h(\Phi_g(x))$  per ogni  $g, h \in G$  e  $x \in X$ .

Se esiste una tale mappa, si dice che  $X$  ha *simmetria continua* sotto  $G$ .

*Osservazione 3.16.1.* Il nome di simmetria è dovuto al fatto che per definizione la mappa di azione è *interna* a  $X$ : l'azione di  $G$  non “genera” nuovi punti di  $X$ , l'insieme resta lo stesso.

*Osservazione 3.16.2.* Sono dette *azioni* di un gruppo di Lie  $G$  le applicazioni  $\Phi_g : x \mapsto \Phi_g(x)$  con  $g \in G$ . Esse sono diffeomorfismi per definizione.

Dato che un gruppo di Lie è esso stesso una varietà, un gruppo può agire su se stesso. Ciò è possibile in vari modi.

**Definizione 3.17.** Sia  $G$  un gruppo di Lie. Si dice *azione sinistra* di  $G$  su se stesso l'applicazione data da  $L_g(h) := g \cdot h$  per ogni  $g, h \in X$ . Si dice invece *azione destra* l'applicazione data da  $R_g(h) := h \cdot g$ . Entrambe queste azioni si dicono *dirette*.

**Definizione 3.18.** Sia  $G$  un gruppo di Lie, si dice *azione aggiunta* di  $G$  su se stesso l'applicazione data da  $\text{AD}_g(h) := g \cdot h \cdot g^{-1}$  per ogni  $g, h \in X$ .

*Osservazione 3.18.1.* L'azione aggiunta di un elemento  $g$  di un gruppo di Lie  $G$  manda l'identità in se stessa, siccome

$$\text{AD}_g e = g \cdot e \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} = e \quad (3.29)$$

Siccome un gruppo di Lie è anche una varietà, su di esso sono definiti spazi tangenti e derivate. In particolare, se  $\text{AD}_g$  è l'azione aggiunta di  $g \in G$ , per l'osservazione 3.18.1 si ha che  $D_e \text{AD}_g : T_e G \rightarrow T_e G$ . Quindi esiste un'azione naturale di  $G$  sul suo spazio tangente nell'identità.

**Definizione 3.19.** Si dice *azione aggiunta* di un gruppo di Lie  $G$  sul suo spazio tangente nell'identità  $T_e G$  la derivata dell'azione aggiunta di  $G$  su se stesso  $\text{Ad}_g := D_e \text{AD}_g$ , per ciascun  $g \in G$ .

Gruppi e algebre di Lie sono strettamente legati. Lo spazio tangente nell'identità consente infatti di associare a ogni gruppo di Lie un'algebra di Lie, tramite l'algebra di Lie dei campi vettoriali che è definita su ogni varietà. A ogni elemento  $\gamma$  dello spazio tangente a  $G$  nell'identità si può infatti associare un campo vettoriale su tutto  $G$ , sfruttando l'azione di  $G$  per fare il push-forward di  $\gamma$  su tutti gli spazi tangenti.

**Definizione 3.20.** Siano  $G$  un gruppo di Lie,  $e \in G$  la sua identità e  $\gamma \in T_e G$ . Si dice *campo vettoriale associato* a  $\gamma$  il campo vettoriale  $V_\gamma$  su  $G$ , dato per ogni  $g \in G$  da

$$(V_\gamma)_g := (D_e \Phi_g^{\text{dir}})(\gamma) \quad (3.30)$$

dove  $\Phi_g^{\text{dir}}$  è un'azione diretta di  $G$  su se stesso.

*Osservazione 3.20.1.* Questo campo vettoriale può essere visto come il campo degli spostamenti infinitesimi di ciascun elemento di  $G$ , se essi vengono ottenuti come  $g = \Phi_g^{\text{dir}}(e)$  e l'identità viene spostata infinitesimamente in modo dato da  $\gamma$ .

**Definizione 3.21.** Siano  $G$  un gruppo di Lie,  $e \in G$  la sua identità e  $\gamma, \delta \in T_e G$ . Si dice *parentesi di Lie* dei due vettori tangenti  $\gamma$  e  $\delta$  il vettore

$$[\gamma, \delta] := [V_\gamma, V_\delta]_e \quad (3.31)$$

dove la parentesi al secondo membro è la parentesi di Lie di campi vettoriali su  $X$ .

*Osservazione 3.21.1.* Per i gruppi di matrici, come ad esempio  $SO(3)$ , è possibile dimostrare che la parentesi di Lie è data dal commutatore  $[A, B] = AB - BA$ .

**Definizione 3.22.** Sia  $G$  un gruppo di Lie e  $e$  la sua identità, si dice *algebra di Lie*  $\mathfrak{g}$  di  $G$  l'algebra di Lie  $(T_e G, [\cdot, \cdot])$ . Spesso verrà usato il simbolo  $\mathfrak{g}$  anche per indicare  $T_e G$ .

**Teorema 3.23.** *L'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di un gruppo di Lie è sempre a dimensione finita.*

Grazie allo stretto legame fra le definizioni delle parentesi di Lie nei due casi, le algebre dei vettori tangenti nell'identità e dei campi vettoriali sono in realtà omomorfe. Si noti che questo omomorfismo è tra un'algebra a dimensione finita e una a dimensione infinita.

**Definizione 3.24.** Sia  $G$  un gruppo di Lie e sia  $X$  una varietà di cui  $G$  fornisce una simmetria continua con l'azione  $\Phi$ . Si dice *azione infinitesima* di  $G$  su  $X$  la seguente mappa  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{V}(X)$ . Per ogni  $[\gamma] \in T_e G$ , si scelga un rappresentante della classe di equivalenza  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$  con  $\gamma(0) = e$ . L'azione infinitesima associa a  $[\gamma]$  un campo vettoriale su  $X$  dato dalle classi di equivalenza dei cammini su  $X$

$$(\varphi_\gamma)_x := \Phi_{\gamma(t)}(x) \quad (3.32)$$

Se esiste una tale mappa, si dice che  $X$  ha una *simmetria infinitesima* data da  $G$ .

**Teorema 3.25.** *La mappa che a ogni elemento di  $\mathfrak{g}$  associa la propria azione infinitesima è un omomorfismo tra  $\mathfrak{g}$  e l'algebra dei campi vettoriali su  $X$ .*

**Definizione 3.26.** La mappa  $(t, [\gamma]) \in \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \mapsto g \in G$  che costituisce il cammino  $\gamma$  nella definizione 3.24 è detta *mappa esponenziale*, e si denota  $\exp(t\gamma)$ , se vale

$$\exp((t+s)\gamma) = \exp(t\gamma) \cdot \exp(s\gamma) \quad (3.33)$$

per ogni  $t, s \in \mathbb{R}$ .

*Osservazione 3.26.1.* Si può intuitivamente pensare la mappa esponenziale come una somma infinita di trasformazioni infinitesime

$$\exp(t\gamma) = i + t\gamma + \frac{1}{2}t^2\gamma^2 + \dots \quad (3.34)$$

che fornisce una trasformazione finita  $g \in G$ .

Si consideri ad esempio il gruppo delle rotazioni dello spazio tridimensionale  $SO(3)$ . Esso è una varietà differenziabile tridimensionale, quindi è un gruppo di Lie. Lo si può identificare con il gruppo delle matrici reali ortogonali  $3 \times 3$  a determinante unitario. Tramite questa identificazione, l'azione di  $SO(3)$  su  $\mathbb{R}^3$  risulta definita naturalmente: per  $R \in SO(3)$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\Phi_R : \mathbf{v} \rightarrow R\mathbf{v} \quad (3.35)$$

Si consideri una curva  $\gamma_z : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$  definita come segue:

$$\gamma_z : \theta \rightarrow R_z(\theta) \quad \text{con} \quad R_z(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Si noti che  $R_z(\theta)$  non è altro che la matrice di rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'asse  $z$ . Intendendo  $SO(3)$  come spazio vettoriale di matrici, si può derivare la curva  $\gamma$  in  $\theta = 0$ . Questa matrice caratterizza la classe di equivalenza  $[\gamma_z]$  e può quindi essere identificata con la classe stessa.

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \gamma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} := r_z \quad (3.37)$$

Analogamente, da  $\gamma_y : \theta \mapsto R_y(\theta)$  e  $\gamma_x : \theta \mapsto R_x(\theta)$  si ottengono

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \gamma_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} := r_y \quad \text{e} \quad \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} \gamma_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} := r_x \quad (3.38)$$

Queste tre matrici sono linearmente indipendenti. Siccome l'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  di  $SO(3)$  ha dimensione uguale al gruppo, quindi 3, esse ne costituiscono una base. L'algebra di Lie consiste delle combinazioni lineari di  $r_x, r_y, r_z$ , ovvero delle matrici  $3 \times 3$  antisimmetriche, e può essere identificata con  $\mathbb{R}^3$  tramite questa base. Nel seguito, si intenderà l'algebra di Lie di  $SO(3)$  alternativamente come spazio di matrici o di triple reali, a seconda delle necessità.

L'azione aggiunta  $Ad$  di  $SO(3)$  sulla propria algebra di Lie è definita come la derivata nell'identità dell'azione aggiunta  $AD$  di  $SO(3)$  su se stesso. Ciò significa che  $Ad_R$ , con  $R \in SO(3)$ , è l'applicazione che manda un percorso  $\gamma : \theta \mapsto A(\theta)$  nel percorso  $\gamma' : \theta \mapsto RA(\theta)R^{-1}$ . Questo percorso ha ancora codominio  $SO(3)$  e può quindi essere caratterizzato dalla sua derivata in  $\theta = 0$

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} (RA(\theta)R^{-1}) = R \left( \left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} A(\theta) \right) R^{-1} \quad (3.39)$$

che è a sua volta antisimmetrica e può quindi essere identificata con un elemento di  $\mathbb{R}^3$ . Con un calcolo diretto si può mostrare che l'azione aggiunta coincide con l'azione naturale su  $\mathbb{R}^3$ , cioè per  $R \in SO(3)$  e  $\mathbf{r} \in \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^3$

$$Ad_R : \mathbf{r} \mapsto R\mathbf{r} \quad (3.40)$$

Sempre con un calcolo diretto, dall'osservazione 3.21.1 si può mostrare che la parentesi di Lie è data da

$$[\mathbf{r}, \mathbf{s}] = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & s_3 & -s_2 \\ -s_3 & 0 & s_1 \\ s_2 & -s_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{r} \times \mathbf{s} \quad (3.41)$$

dove  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{s}$  sono considerati prima come elementi di  $\mathfrak{g}$  e poi come elementi di  $\mathbb{R}^3$ . L'azione infinitesima di  $\mathbf{r} \in \mathfrak{g}$  su  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  infine, è data dalle classi di equivalenza dei cammini dati dall'azione di una matrice  $A(\theta)$ , che possono essere identificati dalle matrici

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{\theta=0} A(\theta)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Ancora un calcolo diretto mostra quindi che l'azione infinitesima di  $\mathfrak{r} \in \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^3$  è

$$\varphi_{\mathfrak{r}} : \mathfrak{v} \mapsto \mathfrak{r} \times \mathfrak{v} \quad (3.43)$$

Un gruppo di Lie  $G$  con opportune proprietà può essere usato per rimuovere informazioni ridondanti dai punti di una varietà  $X$ , sfruttando la simmetria a cui esso è associato. Per formulare precisamente questo metodo, è necessario introdurre i concetti di *azione libera*, *orbita* e *fetta* dell'azione di un gruppo.

**Definizione 3.27.** Sia  $X$  una varietà e  $G$  un gruppo di Lie. Un'azione di  $G$  su  $X$  si dice *libera* se nessuna azione di un elemento  $g \in G$  diverso dall'identità ha punti fissi.

**Definizione 3.28.** Siano  $G$  un gruppo di Lie e  $X$  una varietà su cui esso agisce secondo  $\Phi$ . Si dice *orbita* di  $x \in X$  l'insieme  $Gx := \{\Phi_g(x) \mid g \in G\}$ . Si dice *fetta* dell'azione di  $G$  in  $p \in X$  l'insieme  $S_\varepsilon(p) := \varphi^{-1}(\varphi(Gx)^\perp \cap B_\varepsilon(0))$  dove  $(U, \varphi)$  è una carta su  $X$  e  $\varphi(Gx)^\perp$  è il complemento ortogonale dell'immagine di  $Gx$  attraverso la carta.

La rimozione di informazioni ridondanti è formalizzata nel seguente teorema, che avrà un ruolo fondamentale per il metodo della *riduzione simplettica* che sarà esposto nel prossimo paragrafo.

**Teorema 3.29.** Sia  $X$  una varietà e  $G$  un gruppo di Lie compatto che agisce liberamente su  $X$  secondo  $\Phi$ . Allora l'insieme quoziente  $X/G$  definito dalla relazione di equivalenza  $x \sim \Phi_g(x)$ , con  $x \in X$  e  $g \in G$ , ha una struttura naturale di varietà differenziabile, tale che l'applicazione  $\pi : X \rightarrow X/G$  che manda un punto nella sua classe di equivalenza sia differenziabile. Le carte sono le carte  $(U/G, \varphi)$  dove  $U := G(S_\varepsilon(p))$  con  $p \in X$  e  $\varphi$  è una carta su  $S_\varepsilon(p)$ , che è una sottovarietà di  $X$ .

### 3.3 Riduzione simplettica

Su una varietà generica un gruppo può agire in qualsiasi modo. Perché l'azione di un gruppo su una varietà simplettica abbia senso, è invece necessario che l'azione del gruppo non cambi la struttura simplettica.

**Definizione 3.30.** Siano  $G$  un gruppo di Lie e  $(X, \omega)$  una varietà simplettica. Un'azione  $\Phi$  di  $G$  su  $X$  si dice *simplettica* se ogni azione  $\Phi_g : X \rightarrow X$ , con  $g \in G$ , è una trasformazione canonica.

Fra le azioni simplettiche di un gruppo, esiste una sottoclasse con particolare rilevanza fisica, detta delle azioni *hamiltoniane*. Queste sono le azioni date dal flusso di un'hamiltoniana definita su tutta la varietà  $X$ . La mappa che a un elemento dell'algebra associa l'hamiltoniana è difficile da trattare direttamente, siccome il suo codominio è infinito-dimensionale. Una trattazione più semplice — nonostante le apparenze — coinvolge  $\mathfrak{g}^*$ , il duale dell'algebra di Lie. Il gruppo  $G$  ha infatti un'azione naturale, oltre che sull'algebra stessa, anche sul duale, e ciò consente di definire la mappa passando da esso.

**Definizione 3.31.** Siano  $G$  un gruppo di Lie e  $\mathfrak{g}$  la sua algebra associata. Si dice *azione coaggiunta* di  $g \in G$  su  $\mathfrak{g}^*$  l'applicazione  $\text{Ad}_g^*$  che manda  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  in  $\text{Ad}_g^*(\alpha) \in \mathfrak{g}^*$  definito da

$$[\text{Ad}_g^*(\alpha)](\gamma) := \alpha(\text{Ad}_{g^{-1}}\gamma) \quad (3.44)$$

per ogni  $\gamma \in \mathfrak{g}$ , dove  $\text{Ad}$  indica l'azione aggiunta di  $G$  su  $\mathfrak{g}$ .

*Osservazione 3.31.1.* L'uso di  $g^{-1}$  nella definizione è necessario affinché l'azione coaggiunta abbia lo stesso carattere di *azione destra* di quella aggiunta.

**Definizione 3.32.** Siano  $(X, \omega)$  una varietà simplettica e  $G$  un gruppo di Lie che vi agisce simpletticamente secondo le mappe  $\Phi_g$ , con  $g \in G$ . L'azione  $\Phi$  di  $G$  si dice *hamiltoniana* se esiste un'applicazione  $\mu : X \rightarrow \mathfrak{g}^*$  tale che per ogni  $x \in X$ , per ogni  $\gamma \in \mathfrak{g}$  e per ogni  $\xi \in T_x X$  valga

$$\omega((\varphi_\gamma)_x, \xi) = d_x[\mu_x(\gamma)](\xi) \quad (3.45)$$

Se inoltre l'applicazione  $\mu$  è *equivariante*, ovvero per ogni  $g \in G$ , per ogni  $x \in X$  vale

$$\mu(\Phi_g(x)) = \text{Ad}_g^*(\mu(x)) \quad (3.46)$$

essa è detta *mappa momento* per  $\Phi$ .

*Osservazione 3.32.1.* La prima richiesta equivale al chiedere che l'azione infinitesima di ciascun  $\gamma$  sia il campo vettoriale di un'hamiltoniana, data da  $x \mapsto P_\gamma(x) := \mu_x(\gamma)$ . L'hamiltoniana così ottenuta dipende linearmente da  $\gamma$ , ma è possibile dimostrare che non c'è perdita di generalità rispetto al caso di hamiltoniane generiche.

*Osservazione 3.32.2.* La seconda richiesta è che  $G$  agisca su  $X$  in maniera compatibile con la sua azione su  $\mathfrak{g}^*$ , cioè che le due operazioni formino un diagramma commutativo con la mappa momento, la quale collega gli insiemi. Questa richiesta, al contrario della prima, non può essere soddisfatta per hamiltoniane generiche.

*Osservazione 3.32.3.* Data una mappa momento  $\mu$ , l'applicazione  $\mu^* : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{F}(X)$  che manda  $\gamma \mapsto P_\gamma$ , detta *mappa comomento*, è un omomorfismo delle due algebre di Lie, ovvero

$$[\gamma, \delta] = \{P_\gamma, P_\delta\} \quad (3.47)$$

per ogni  $\gamma, \delta \in \mathfrak{g}$ .

*Osservazione 3.32.4.* Si noti che, come l'omomorfismo tra  $\mathfrak{g}$  e  $\mathcal{V}(X)$  dato dall'azione infinitesima, anche questo collega algebre a dimensione finita e infinita.

La principale rilevanza fisica delle azioni hamiltoniane sta nel fatto che esse consentono di determinare quantità che sono conservate nell'evoluzione di un sistema hamiltoniano. Una volta usata la teoria delle varietà simplettiche per formulare la meccanica, questo risultato corrisponderà alla conservazione dei momenti.

**Teorema 3.33.** *Siano  $(X, \omega)$  una varietà simplettica e  $G$  un gruppo di Lie con azione hamiltoniana  $\Phi$  su di essa. Sia  $\mu : X \rightarrow \mathfrak{g}^*$  la mappa momento. Sia  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione hamiltoniana conservata dall'azione di  $G$ , ovvero tale che  $H(x) = H(\Phi_g x)$  per ogni  $x \in X$  e  $g \in G$ . Allora le funzioni  $P^\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}$  definite da  $x \mapsto P^\gamma(x) = \mu_x(\gamma)$  sono conservate dal flusso hamiltoniano di  $H$   $\Phi_H$ , ovvero  $P^\gamma(x) = P^\gamma(\Phi_H^t x)$  per ogni  $t$  per cui  $\Phi_H^t$  è definito e per ogni  $x \in X$ .*

*Osservazione 3.33.1.* L'invarianza delle  $P^\gamma$  implica che le componenti di  $\mu_x$  in una qualsiasi base di  $\mathfrak{g}^*$  siano costanti lungo la linea di flusso. Si può quindi dire che *le componenti del momento si conservano*. La mappa momento fornisce quindi una generalizzazione della conservazione dei momenti che si osserva in fisica.

Nel caso in cui la varietà simplettica sotto esame sia il fibrato cotangente di una qualche altra varietà  $Q$ , spesso le azioni hamiltoniane su di esso sono associate a simmetrie di  $Q$ . Nel seguito si vedrà che questo risultato, insieme a quello precedente, costituisce il teorema di Noether sulla conservazione del momento associato a una simmetria di un sistema.

**Teorema 3.34.** *Sia  $Q$  una varietà e sia  $G$  un gruppo di Lie che ne fornisce una simmetria continua secondo una qualche azione  $\Phi$ . Allora l'azione  $\tilde{\Phi}$  di  $G$  sul fibrato cotangente  $X = T^*Q$  data per  $x \in Q$  e  $\alpha \in T_x^*Q$  da*

$$\tilde{\Phi}(x, \alpha) := (\Phi(x), [(\Phi^{-1})^*(\alpha)]_{\Phi(x)}) \quad (3.48)$$

*è hamiltoniana rispetto alla forma canonica.*

*Osservazione 3.34.1.* L'azione  $\tilde{\Phi}$  è detta *sollevamento* di  $\Phi$  sul fibrato cotangente, siccome

$$\pi \circ \tilde{\Phi} = \Phi \quad (3.49)$$

ovvero  $\tilde{\Phi}$  è una versione di  $\Phi$  che agisce anche sulle fibre cotangenti "sopra" la varietà base.

Come esempio, si consideri ancora il caso dell'azione di  $SO(3)$  su  $\mathbb{R}^3$ . Siccome per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$   $T_{\mathbf{v}}^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3$ , il fibrato cotangente di  $\mathbb{R}^3$  è  $T^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^6$ . L'azione di  $SO(3)$  su  $\mathbb{R}^3$  ha per sollevamento l'azione su  $\mathbb{R}^6$  data da

$$\Phi_R : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (R\mathbf{q}, R\mathbf{p}) \quad (3.50)$$

Analogamente al caso di  $\mathbb{R}^3$ , l'azione infinitesima corrispondente è data da

$$\varphi_{\mathbf{r}} : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{r} \times \mathbf{q}, \mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (3.51)$$

Chiaramente, anche la coalgebra  $\mathfrak{g}^*$  è isomorfa a  $\mathbb{R}^3$ . Un elemento  $\alpha \in \mathfrak{g}^* \simeq \mathbb{R}^3$  agisce su  $\gamma \in \mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^3$  secondo

$$\alpha(\gamma) = \alpha \cdot \gamma \quad (3.52)$$



L'azione coaggiunta di  $R \in SO(3)$  è definita come l'azione  $\text{Ad}_R^*$  tale che per ogni  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ , per ogni  $\gamma \in \mathfrak{g}$

$$[\text{Ad}_R^*(\alpha)](\gamma) = \alpha(\text{Ad}_{R^{-1}}(\gamma)) = \alpha \cdot R^{-1}\gamma = R\alpha \cdot \gamma \quad (3.53)$$

dato che  $R$  è ortogonale. Essa è quindi data da

$$\text{Ad}_R^*(\alpha) = R\alpha \quad (3.54)$$

Tramite il calcolo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  si dimostra che l'azione di  $SO(3)$  su  $\mathbb{R}^6$  con la forma canonica è hamiltoniana, con mappa momento data da

$$\mu : (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto \mathbf{q} \times \mathbf{p} \quad (3.55)$$

Si noti che, identificando  $\mathbf{q}$  con la posizione e  $\mathbf{p}$  con il momento lineare, questa quantità è formalmente uguale al momento angolare di una particella. Nella formulazione geometrica della meccanica, questo è infatti il suo significato. La mappa comomento è poi data da  $P_\gamma = (\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \cdot \gamma$ .

Siccome  $P_\gamma$  deve rimanere costante, un sistema che ammette un'azione hamiltoniana ha meno gradi di libertà effettivi di quanto appaia a primo impatto. È possibile rimuovere i gradi di libertà apparenti tramite un processo noto come *riduzione simplettica*, reso possibile dal teorema seguente.

**Teorema 3.35** (Riduzione simplettica). *Sia  $(X, \omega)$  una varietà simplettica, sia  $G$  un gruppo di Lie compatto con azione hamiltoniana su  $X$  e sia  $\mu : X \rightarrow \mathfrak{g}^*$  la mappa momento. Sia  $p \in \mathfrak{g}^*$ , sia  $X_p = \mu^{-1}(p)$  e sia  $G_p = \{g \in G \mid \text{Ad}_g^* p = p\}$ . Se  $G_p$  agisce liberamente su  $X_p$  allora:*

1. *L'insieme  $X_p/G_p$  è una varietà simplettica con forma simplettica  $\omega_r$ , tale che*

$$\pi^* \omega_r = \omega \quad (3.56)$$

*dove  $\pi : X_p \rightarrow X_p/G_p$  è la proiezione sullo spazio quoziente e  $\omega$  indica in realtà la restrizione  $\omega|_{X_p}$ .*

2. *Se  $H : X \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione differenziabile invariante sotto l'azione di  $G$ , allora la sua restrizione a  $X_p/G_p$  (il cui valore su una classe di equivalenza è dato dal valore su un rappresentante) è una funzione  $H_r : X_p/G_p \rightarrow \mathbb{R}$  il cui campo hamiltoniano rispetto a  $\omega_r$  è*

$$V_{H_r} = D\pi(V_H) \quad (3.57)$$

*dove  $V_H$  è il campo hamiltoniano di  $H$ .*

*Osservazione 3.35.1.* I due punti del teorema corrispondono al fatto che sia la *struttura simplettica* della varietà che la sua *dinamica hamiltoniana* possono essere ridotte, rimuovendo le informazioni che la simmetria rispetto a  $G$  rende superflue.

Con questo capitolo, sono stati formulati tutti gli strumenti necessari per descrivere geometricamente il moto dei sistemi fisici e per sfruttarne le simmetrie. Il prossimo capitolo avrà come oggetto la definizione della *meccanica simplettica* e le applicazioni a essa del teorema di riduzione simplettica.

## Capitolo 4

# Meccanica simplettica

Questo capitolo costituisce il punto di arrivo dell'esposizione. Si esamineranno le formulazioni della meccanica esposte nel capitolo 1 dal punto di vista della teoria delle varietà differenziabili, e si ricaverà dalla meccanica hamiltoniana l'agognata *formulazione simplettica* della meccanica, la quale non fa uso di coordinate. Uno dei più potenti strumenti a disposizione di questa formulazione è la riduzione simplettica trattata nel capitolo 3, la quale qui verrà applicata allo studio del moto del corpo rigido.

### 4.1 Meccanica e varietà

Nel capitolo 1 si è definito lo spazio delle configurazioni  $\mathbb{M}$  di un sistema non vincolato di  $N$  particelle come il prodotto di  $N$  copie di  $\mathbb{R}^3$ . Questo spazio è identificabile con  $\mathbb{R}^{3N}$ . Se sulle particelle viene imposto un vincolo, lo spazio delle configurazioni del sistema diventa un qualche insieme  $M \subset \mathbb{R}^{3N}$ . Come già affermato, questo insieme non avrà in generale una struttura di spazio vettoriale. I suoi punti  $x$  potranno però essere individuati da  $n$ -uple  $\mathbf{q}$ , dette *coordinate*, tramite funzioni biunivoche  $\varphi^{-1} : \mathbf{q} \mapsto x$ .  $M$  avrà quindi la struttura più generale di una *varietà differenziabile*, con atlante dato dalle funzioni  $\varphi : x \mapsto \mathbf{q}$  e dai loro domini di biunivocità. Come menzionato nel capitolo 1, lo spazio delle configurazioni di un sistema di  $N$  particelle con  $3N - n$  vincoli è quindi una varietà  $n$ -dimensionale *immersa* in  $\mathbb{R}^{3N}$ , lo spazio  $3N$ -dimensionale delle configurazioni senza vincoli.

Per individuare univocamente un generico sistema sono necessari due elementi: il suo spazio delle configurazioni  $M$  e l'energia potenziale, definita proprio sullo spazio delle configurazioni,  $V : x \in M \mapsto V(x) \in \mathbb{R}$ .

La velocità  $\dot{x}$  di un sistema è definita come derivata temporale  $\frac{d\bar{x}}{dt}(t)$  del suo moto  $\bar{x} : t \in I \mapsto \bar{x}(t) \in M$ , dove  $I$  è un intervallo reale. Per definizione, un vettore tangente alla varietà  $M$  nel punto  $x \in M$  è una classe di equivalenza di cammini infinitesimi che passano da  $x$  al tempo 0. Per un dato  $x = \bar{x}(t)$ , si può traslare il tempo e ridurne il dominio in modo da ottenere un nuovo cammino  $\gamma : ] - \varepsilon, \varepsilon [$  tale che  $x = \gamma(0)$ . Questo

cammino sarà inoltre tale che  $\dot{x} = \frac{dy}{dt}(0)$ . Siccome  $M \subset \mathbb{R}^n$ , una scelta valida per  $\varphi$  è l'identità  $i$ . Quindi, perché un secondo cammino  $\gamma'$  sia equivalente a  $\gamma$ , è necessario e sufficiente che

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma'(t) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma(t) = \dot{x} \quad (4.1)$$

per definizione: la velocità  $\dot{x}$  caratterizza la classe  $\xi = [\gamma]$  dello spazio tangente a  $M$  in  $x$ . Questo potrà quindi essere identificato con lo spazio delle velocità possibili quando il sistema ha configurazione  $x$ . Si può quindi dire che la velocità di un sistema è un vettore tangente allo spazio delle configurazioni nella configurazione attuale del sistema. L'energia cinetica, funzione della velocità, è quindi definita per ciascun  $x \in M$  su  $T_x M$  da  $K_x : \dot{x} \mapsto \frac{1}{2}\dot{x}^2$ , dove la norma tiene conto delle masse delle particelle che costituiscono il sistema.

La lagrangiana ridotta di un sistema dipende sia dall'energia potenziale che dall'energia cinetica, e dunque sia dalla configurazione del sistema che dalla sua velocità. Essa deve quindi essere definita su  $TM$ , il fibrato tangente di  $M$ . Le energie cinetica e potenziale dovranno quindi cambiare dominio da rispettivamente  $T_x M$  e  $M$  a  $TM$  per poter formare la lagrangiana. Sia  $(x, \dot{x}) \in TM$ , con  $x \in M$  e  $\dot{x} \in T_x M$  ciò si può fare definendo

$$\begin{aligned} V(x, \dot{x})|_{TM} &:= V(x)|_M \\ K(x, \dot{x})|_{TM} &:= K(\dot{x})|_{T_x M} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Si può a questo punto definire la lagrangiana (ridotta) di un sistema indipendente dal tempo come una funzione differenziabile  $\mathcal{L} : TM \rightarrow \mathbb{R}$  data per  $x \in M$  e  $\dot{x} \in T_x M$  da

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) := K(\dot{x}) - V(x) \quad (4.3)$$

In coordinate, la trasformata di Legendre rispetto alle velocità trasforma la lagrangiana  $\mathcal{L}(x, \dot{x})$  nell'hamiltoniana  $\mathcal{H}(x, \dot{x}^*)$  dove gli  $\dot{x}^*$  sono elementi dello spazio duale a quello degli  $\dot{x}$ . Siccome  $\dot{x} \in T_x M$ , è quindi naturale imporre che l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  accetti come argomenti  $\dot{x}^* \in T_x^* M$ , ovvero che sia definita sul fibrato cotangente  $T^* M$ . Lo spazio delle fasi, dominio dell'hamiltoniana, può quindi essere definito come il fibrato cotangente dello spazio delle configurazioni. Se una regione di  $M$  è coperta dalla carta  $(U, \varphi)$ , un punto  $x \in U$  si può individuare con  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$  e il momento generalizzato cotangente a  $M$  in  $x$  si può individuare con  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ , nella base duale data da  $\{d_x \varphi_1, \dots, d_x \varphi_n\}$ . Si recupera così la definizione basata sulle coordinate.

Essendo un fibrato cotangente, lo spazio delle fasi ha una struttura simplettica canonica ed è quindi possibile sfruttare la definizione 3.7 di campo vettoriale hamiltoniano per estendere la definizione 1.25 al caso di varietà che non costituiscono spazi vettoriali. Si consideri infatti una varietà simplettica  $2n$ -dimensionale  $X$ . In una carta simplettica data dal teorema di Darboux  $(U, \varphi)$  siano i suoi punti  $x \in U$  individuati dalle coordinate  $(x_1, \dots, x_{2n})$  e i vettori  $\xi$  tangenti a  $X$  in un punto  $y \in U$  individuati dalle coordinate

$(\xi_1, \dots, \xi_{2n})$ . Allora il differenziale  $d\mathcal{H}$  è rappresentato dalla trasposta del gradiente su queste coordinate  $(\nabla\mathcal{H})^T$ , così che

$$d\mathcal{H}(\xi) = (\nabla\mathcal{H})^T \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{2n} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Allo stesso tempo, la forma simplettica  $\omega$  sarà rappresentata da  $J := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e il campo  $X_{\mathcal{H}}$  da un vettore  $X_{\mathcal{H}}$ , così che

$$d\mathcal{H}(\xi) = \omega(X_{\mathcal{H}}, \xi) = X_{\mathcal{H}}^T J \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{2n} \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Da ciò segue che  $X_{\mathcal{H}}^T J = (\nabla\mathcal{H})^T$ . Trasponendo e moltiplicando per  $J$ , siccome  $J^2 = -1$ , si ha

$$X_{\mathcal{H}} = -J\nabla\mathcal{H} \quad (4.6)$$

ovvero che per le coordinate vale

$$\dot{q}_j = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_j} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_j} \quad (4.7)$$

che sono le equazioni di Hamilton. Le linee di flusso del campo vettoriale hamiltoniano minimizzano quindi l'azione associata alla lagrangiana ridotta sullo spazio delle configurazioni vincolato. Esse minimizzano quindi l'azione su tutto lo spazio delle configurazioni, e dunque rappresentano le posizioni e le velocità che il sistema ha nel suo moto. Con quest'ultimo tassello è finalmente possibile porre una formulazione della meccanica di sistemi conservativi con vincoli olonomi arbitrari puramente geometrica e libera da coordinate.

Un sistema fisico è definito dal suo *spazio delle configurazioni*, una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale  $M$  in cui ogni punto  $m$  corrisponde a una diversa configurazione delle componenti del sistema, e da una funzione *hamiltoniana*  $\mathcal{H} : M \rightarrow \mathbb{R}$ , che ne governa il movimento. Lo *stato* di un sistema è rappresentato da un punto nello *spazio delle fasi*, il fibrato cotangente  $X = T^*M$  dello spazio delle configurazioni. Sullo spazio delle fasi è definita la *forma simplettica canonica*  $\omega$ . Il *campo vettoriale hamiltoniano*  $X_{\mathcal{H}}$  è definito come il campo corrispondente al differenziale dell'hamiltoniana  $d_x\mathcal{H}$  secondo la forma simplettica. Se il sistema parte da uno stato iniziale  $(x_0, \dot{x}_0^*)$ , il suo stato percorre la linea di flusso di  $X_{\mathcal{H}}$  che parte da  $(x_0, \dot{x}_0^*)$ . L'evoluzione di una qualsiasi funzione di stato  $F$  è data dalla parentesi di Poisson  $\{F, \mathcal{H}\}$ . In particolare, il valore di  $\mathcal{H}$  è conservato durante l'evoluzione del sistema. Questa conserva inoltre il *volume simplettico*, ovvero l'integrale di  $\omega^{\wedge n}$  sull'immagine di un  $U \subset X$  attraverso il flusso hamiltoniano.

Se lo spazio delle fasi ammette un'azione hamiltoniana  $\Phi_g$  di un qualche gruppo di Lie  $G$  e  $\mathcal{H}$  è invariante sotto questa azione, la mappa momento avrà il valore  $P_0$  fissato dalle condizioni iniziali lungo tutta l'evoluzione del sistema, e la dinamica di questo nello spazio delle fasi ridotto  $\mu^{-1}(P_0)/G_{P_0}$  potrà essere studiata grazie al teorema di riduzione simplettica.

## 4.2 Esempio: moto del corpo rigido libero

Si consideri un sistema costituito da un corpo rigido libero. Per definire questo sistema nella formulazione simplettica, è necessario individuare il suo spazio delle configurazioni e la sua hamiltoniana. Un *corpo rigido* è definito come una collezione di punti materiali  $P$  le cui distanze relative sono tutte fissate. La definizione di punti e distanze equivale alla definizione della forma del corpo. Note le distanze, la posizione di ciascun punto del corpo in un dato sistema di riferimento può essere ottenuta conoscendo la posizione di un suo punto e il modo in cui è ruotato il corpo. La configurazione del corpo è quindi rappresentata da un punto nella varietà  $M = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$ , che costituisce lo spazio delle configurazioni. Si noti che in questa prima fase  $SO(3)$ , il gruppo di Lie delle rotazioni in tre dimensioni, sarà considerato solo in quanto varietà differenziabile: le sue proprietà di gruppo saranno completamente irrilevanti. Per quanto riguarda l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , siccome supponiamo che il corpo sia libero essa è data semplicemente dall'energia cinetica (per la precisione, dalla *trasformata di Legendre* dell'energia cinetica, in modo da essere definita su  $T^*M$  e non su  $TM$ ).

Lo spazio delle fasi del sistema è a rigore  $T^*M = T^*(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$ . Esso è tuttavia isomorfo a  $T^*\mathbb{R}^3 \times T^*SO(3)$ , la cui trattazione è notevolmente più semplice per via della possibilità di sfruttare le proprietà di identificazione tra spazi tangenti e cotangenti di  $\mathbb{R}^3$ . Si userà quindi come spazio delle fasi  $X := T^*\mathbb{R}^3 \times T^*SO(3)$ , lasciando implicito il ritorno al fibrato cotangente di  $M$  propriamente detto.

Si consideri il gruppo di Lie delle *traslazioni*  $\mathbb{R}^3$ . Questa volta a essere rilevante è la natura di gruppo. Esso ha un'azione naturale su  $\mathbb{R}^3$  inteso come *varietà*, data per  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ -gruppo e  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ -varietà da

$$\Phi_{\mathbf{a}}^{\mathbb{R}^3} : \mathbf{q} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{q} \quad (4.8)$$

dove il  $+$  denota l'operazione di addizione definita in  $\mathbb{R}^3$  inteso come spazio vettoriale. Si definisca la sua azione su  $M$  come

$$\Phi_{\mathbf{a}}^M : (\mathbf{q}, \rho) \mapsto (\mathbf{a} + \mathbf{q}, \rho) \quad (4.9)$$

dove  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\rho \in SO(3)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}^* \in T_{\mathbf{q}}^*\mathbb{R}^3$  e  $\dot{\rho}^* \in T_{\rho}^*SO(3)$ . Questa azione è ben definita su  $M$  e per il teorema di Noether genera quindi un'azione hamiltoniana sul fibrato cotangente propriamente detto. Questa azione corrisponde a un'azione  $\Phi_{\mathbf{a}}^X$  su  $X$ , definita sfruttando la fattorizzazione come segue. Sia  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^*, \rho, \dot{\rho}^*) \in X$ . Ciò significa innanzitutto che  $\dot{\mathbf{q}}^* \in T_{\mathbf{q}}^*\mathbb{R}^3$ . Ma siccome  $T_{\mathbf{q}}^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \simeq T_{\mathbf{q}+\mathbf{a}}^*\mathbb{R}^3$ , si può anche considerare che  $\dot{\mathbf{q}}^* \in T_{\mathbf{q}+\mathbf{a}}^*\mathbb{R}^3$ . D'altra parte, anche  $\dot{\rho}^* \in T_{\rho}^*SO(3)$ . Da ciò segue che  $(\mathbf{q} + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{q}}^*, \rho, \dot{\rho}^*) \in X$ , siccome i covettori appartengono agli spazi cotangenti appropriati. È quindi possibile definire l'azione su  $X$  senza pull-back dei covettori, che invece è necessario nel caso dell'azione sul fibrato cotangente propriamente detto, come

$$\Phi_{\mathbf{a}}^X : (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^*, \rho, \dot{\rho}^*) \mapsto (\mathbf{q} + \mathbf{a}, \dot{\mathbf{q}}^*, \rho, \dot{\rho}^*) \quad (4.10)$$

Come ci si può aspettare, anche  $\Phi^X$  è hamiltoniana, con mappa momento data da

$$\mu^{\mathbb{R}^3} : (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^*, \rho, \dot{\rho}^*) \longmapsto \dot{\mathbf{q}}^* \quad (4.11)$$

dove l'immagine  $\dot{\mathbf{q}}^*$  è considerata come elemento di  $T_q^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \simeq T_0^*\mathbb{R}^3 = (\mathbf{r}^3)^*$ , il duale dell'algebra di Lie di  $\mathbb{R}^3$ -gruppo. Si noti che, come anticipato, questa quantità corrisponde fisicamente al momento lineare. Nel seguito, per semplicità, si scriverà  $\mu := \mu^{\mathbb{R}^3}$

Bisogna ora dimostrare che  $\mu^{\mathbb{R}^3}$  è effettivamente una mappa momento. L'azione infinitesima di  $e_i$ , l' $i$ -esimo elemento della base canonica di  $\mathbb{R}^3 \simeq T_e\mathbb{R}^3 = \mathbf{r}^3$ , su  $X$  è data dal campo vettoriale costante

$$\varphi_{e_i}^X : (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^*, \rho, \dot{\rho}^*) \longmapsto (e_i, 0, 0, 0) \quad (4.12)$$

dove nell'immagine  $e_i$  è inteso come elemento della base canonica di  $\mathbb{R}^3 \simeq T_q\mathbb{R}^3$ . Infatti, l'azione infinitesima di  $\mathbf{r}^3$  su  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  è

$$\left( \varphi_{e_i}^{\mathbb{R}^3} \right)_{\mathbf{x}} = \Phi_{\mathbf{0}+e_i t}^{\mathbb{R}^3}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + e_i t \simeq e_i \quad (4.13)$$

siccome  $\mathbb{R}^3 \ni e_i \simeq (\mathbf{0} + e_i t) \in T_0\mathbb{R}^3$  e l'azione di  $\mathbb{R}^3$  sulle altre componenti è banale. Allo stesso tempo, il valore della mappa comomento associata a  $e_i$  in ciascun punto è

$$P_{e_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}^*, \rho, \dot{\rho}^*) = \dot{\mathbf{q}}^* e_i = \dot{q}_i^* \quad (4.14)$$

dove nel membro di mezzo  $\dot{\mathbf{q}}^*$  è considerato come elemento di  $T_q^*\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^3 \simeq T_0^*\mathbb{R}^3 = \mathbf{r}^{3*}$  ed  $e_i$  come elemento di  $\mathbb{R}^3 \simeq T_0\mathbb{R}^3 = \mathbf{r}^3$ . Nella base simplettica di  $T^*(\mathbb{R}^3 \times SO(3))$ , data semplicemente dalla concatenazione delle basi simplettiche di  $\mathbb{R}^3$  e  $SO(3)$ , siccome la mappa comomento è costante sulle componenti derivanti da  $T^*SO(3)$  il campo hamiltoniano della mappa comomento per un dato  $e_i$  è fornito da

$$V_{P_{e_i}} = -J \nabla P_{e_i} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e_i \\ 0 \end{pmatrix} = (e_i, 0, 0, 0) \quad (4.15)$$

ovvero esattamente il campo dell'azione infinitesima. Quanto all'equivarianza, siccome  $\mathbb{R}^n$  è commutativo l'azione aggiunta  $Ad$  è banale, e quindi lo è anche l'azione coaggiunta. L'equivarianza è soddisfatta poiché in effetti  $\mu$  non dipende dalla configurazione in  $\mathbb{R}^3$ , così che  $\mu(\mathbf{q} + \mathbf{a}) = \mu(\mathbf{q}) = Ad^*(\mu(\mathbf{q}))$ . Quindi  $\mu$  è una mappa momento e  $\Phi^X$  è un'azione hamiltoniana.

Siccome  $\mathbb{R}^n$  è commutativo e l'azione coaggiunta è banale, si ha anche che  $G_p = G$  per ogni  $p \in \mathbf{r}^3$ , e siccome per ogni coppia di elementi  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  esiste un terzo

elemento  $\mathbf{c}$  tale che  $\mathbf{a} = \mathbf{c} + \mathbf{b}$ , tutti gli elementi di  $\mathbb{R}^3$  sono equivalenti sotto l'azione di  $\mathbb{R}^3$ . Da queste osservazioni e dal fatto che per un dato  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \simeq T_0^*\mathbb{R}^3 = \mathfrak{r}^3$  si ha che

$$\mu^{-1}(\mathbf{p}) = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \rho, \dot{\rho}^*) \mid \mathbf{q} \in \mathbb{R}^3, \rho \in SO(3), \dot{\rho}^* \in T_\rho^*SO(3)\} \simeq \mathbb{R}^3 \times T^*SO(3) \quad (4.16)$$

segue che  $\mu^{-1}(\mathbf{p})/\mathbb{R}^3 \simeq T^*SO(3)$ . Per il teorema di Marsden-Weinstein,  $T^*SO(3)$  ha una struttura simplettica data dalla forma simplettica ridotta, mentre l'evoluzione del sistema è governata dall'hamiltoniana su  $X$ , ristretta a  $T^*SO(3)$ . Si può dimostrare che la forma simplettica ridotta è quella canonica, mentre l'hamiltoniana differisce da quella su  $X$  per una costante. Ciò significa che il moto di rotazione di un corpo rigido libero che trasla condivide le proprietà fisiche di quello dello stesso corpo che ruota senza traslare.

Si ha quindi una sorta di spazio delle configurazioni ridotto  $\pi(T^*SO(3)) = SO(3)$ . In modo simile a quanto fatto per  $\mathbb{R}^3$ , si faccia agire  $SO(3)$ -gruppo su  $SO(3)$ -varietà secondo la moltiplicazione a sinistra:

$$L_\sigma : \rho \longmapsto \sigma\rho \quad (4.17)$$

Il moto del sistema in  $SO(3)$  sarà un'applicazione  $\bar{\rho} : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$ . La velocità generalizzata in un punto  $\rho$  della varietà sarà naturalmente un vettore  $\dot{\rho}(t) \in T_{\bar{\rho}(t)}SO(3)$ . Tuttavia, si considera solitamente una quantità equivalente alla velocità, la *velocità angolare*  $\psi$  definita dal push-forward di  $\dot{\rho}$  nello spazio tangente all'identità  $T_eSO(3) = \mathfrak{so}(3)$ :

$$\psi := (DL_{\rho^{-1}})(\dot{\rho}) \quad (4.18)$$

Analogamente, si definisce *momento angolare* (del corpo rigido) la quantità, equivalente al momento generalizzato  $\dot{\rho}^*(t) \in T_{\bar{\rho}(t)}^*SO(3)$ , definita dal pull-back di  $\dot{\rho}^*$  nello spazio cotangente all'identità  $T_e^*SO(3) = \mathfrak{so}(3)^*$

$$\lambda := (R_\rho^*)(\dot{\rho}^*) \quad (4.19)$$

dove  $R_\rho$  indica la moltiplicazione a destra:  $R_\rho : \sigma \mapsto \sigma\rho$ . Siccome l'algebra di Lie di  $SO(3)$  è tridimensionale, sia la velocità angolare che il momento angolare possono essere identificati con vettori di  $\mathbb{R}^3 \simeq (\mathbb{R}^3)^*$ , e siccome l'azione di  $SO(3)$  su  $\mathfrak{so}(3)$  è la stessa che su  $\mathbb{R}^3$  essi vengono trasformati da una rotazione del corpo rigido nella stessa maniera in cui lo sono i vettori posizione delle particelle che compongono il corpo stesso. Per questo motivo, velocità e momento angolari sono trattati come vettori in meccanica newtoniana; la loro natura nella formulazione simplettica è tuttavia appunto quella di elementi di algebra e coalgebra di Lie di  $SO(3)$ .

Dato che si sta considerando il corpo rigido libero, l'hamiltoniana coinciderà sostanzialmente con l'energia cinetica. Per sua natura, questa dovrà essere definita tramite una norma sulle velocità: l'introduzione della velocità angolare consente di definire questa norma solo su  $\mathfrak{so}(3)$  invece che su ciascun  $T_\rho SO(3)$ . La norma viene solitamente introdotta tramite un prodotto scalare definito positivo  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Esso consente di definire un'identificazione  $I$ , detta *tensore d'inerzia*, tra  $\mathfrak{so}(3)$  e  $\mathfrak{so}(3)^*$ , tramite

$$I : \psi \mapsto \psi^* \quad \text{tale che} \quad \psi^*(\psi) = \langle \psi, \psi \rangle \quad (4.20)$$

L'identificazione tra velocità e momenti angolari fornita da  $I$  è analoga a quella tra velocità e momenti lineari fornita dalla massa. I valori numerici del prodotto scalare dipendono dalla distribuzione di massa del corpo in considerazione. L'energia cinetica (e quindi l'hamiltoniana) può essere definita su  $T^*SO(3)$  tramite il tensore d'inerzia, la norma su  $\mathfrak{so}(3)$  e il pullback dei covettori da  $T_\rho^*SO(3)$  a  $T_e^*SO(3)$ , come

$$\mathcal{H}(\rho, \dot{\rho}^*) := \left\langle I^{-1}(L_\rho^* \dot{\rho}^*), I^{-1}(L_\rho^* \dot{\rho}^*) \right\rangle \quad (4.21)$$

$SO(3)$ -varietà ammette chiaramente  $SO(3)$ -gruppo come simmetria, e per il teorema di Noether genera quindi un'azione hamiltoniana su  $T^*SO(3)$ . Si può dimostrare che la mappa momento di questa azione è data da

$$\mu^{SO(3)} : (\rho, \dot{\rho}^*) \longmapsto R_\rho^* \dot{\rho}^* \quad (4.22)$$

ovvero proprio dal momento angolare corrispondente al momento generalizzato  $\dot{\rho}^*$ . Per semplicità, si ponga  $\mu := \mu^{SO(3)}$ . Dato che i valori di  $\mu$  si conservano, si è ritrovata la legge di conservazione del momento angolare. Il riottenimento di questa legge, nota dalla meccanica newtoniana, è la motivazione principale per la definizione di velocità e momento angolari in  $\mathfrak{so}(3)$  ed  $\mathfrak{so}(3)^*$  e per l'uso dell'azione destra nella definizione del momento angolare.

Per un dato  $\lambda \in \mathfrak{so}(3)^*$ , è possibile dimostrare che  $\mu^{-1}(\lambda)/SO(3)_\lambda \simeq S^2$ , l'insieme degli elementi  $\psi \in \mathfrak{so}(3)$  con norma pari a  $\|\lambda\|_{\mathbb{R}^3}$ , dove  $\psi, \lambda$  sono visti come elementi di  $\mathfrak{so}(3)^* \simeq \mathbb{R}^3$  e  $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^3}$  è la norma euclidea in  $\mathbb{R}^3$ . Di nuovo, essa avrà una struttura simplettica data dalla forma simplettica ridotta, mentre la dinamica sarà governata dall'hamiltoniana  $\mathcal{H}$ , ristretta a  $S^2$ . Il significato della riduzione dello spazio delle fasi a  $S^2$  è che lo stato di rotazione del sistema (sia la sua configurazione che i suoi momenti) è completamente specificato dalla posizione del suo asse di rotazione, una volta fissate le condizioni iniziali.

È inoltre possibile fare una considerazione del tutto generale sulla stabilità delle rotazioni. Siccome l'hamiltoniana si conserva nel corso del moto, questo dovrà svolgersi sulle intersezioni di  $S^2$  con le superfici di livello di  $\mathcal{H}$ . Essendo una forma quadratica, essa avrà superfici di livello ellissoidali, per via del teorema spettrale. La sfera intersecherà l'ellissoide intorno agli assi. Le intersezioni vicine all'asse maggiore e minore resteranno nell'intorno dell'asse, mentre quelle vicine all'asse intermedio ne usciranno. Ciò significa che, a livello fisico, le rotazioni di un corpo rigido libero attorno agli assi con momento d'inerzia minore e maggiore sono stabili, mentre le rotazioni attorno all'asse intermedio sono instabili. Questo risultato è noto come *teorema di Poincaré*.



# Riferimenti bibliografici

- [1] V.I. Arnold, R. Bernieri e B. Tirozzi. *Metodi matematici della meccanica classica*. Editori Riuniti University Press, 2010. ISBN: 978-8-864-73204-6.
- [2] M. Fecko. *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*. Cambridge University Press, 2006. ISBN: 978-0-521-84507-6.
- [3] A.T. Fomenko. *Symplectic Geometry*. Advanced Studies in Contemporary Mathematics. Taylor & Francis, 1995. ISBN: 978-2-881-24901-9.
- [4] Maxim Jeffs. *Classical Mechanics and Symplectic Geometry*. Lecture notes. 2022. URL: <https://mjeffs.net/symplectic.html>.
- [5] J. M. Lee. *Introduction to Smooth manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2012. ISBN: 978-1-489-99475-2.
- [6] B. F. Schutz. *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1980. ISBN: 978-0-521-23271-6.
- [7] A.C. da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Lecture Notes in Mathematics No. 1764. Springer, 2001. ISBN: 978-3-540-42195-5.

# Ringraziamenti

Una laurea triennale non è tanto una fine quanto un punto di snodo. Ciò non toglie che a questo punto di snodo non avrebbe avuto senso arrivare senza le persone che ho avuto accanto in questi tre anni e, ancora prima, lungo tutto il mio cammino. La fisica è umana, come tutto: varietà differenziabili e forme simplettiche non hanno ragione di esistere senza le persone.

Ringrazio per prima cosa i miei genitori, Elena e Luca, che lungo tutta la mia vita mi hanno sostenuto e indirizzato con il loro amore, i loro consigli e il loro esempio. Ringrazio i miei nonni, Adriana, Anna e Novello, per l'aiuto e l'amore che hanno dato sia a loro che a me.

Ringrazio Sara, che cammina instancabilmente con me ormai da quattro anni, per il suo amore sincero e profondo, per la sua immancabile presenza e per aver contribuito in maniera insostituibile alla persona che ora sono.

Ringrazio Lorenzo, Claudio, Luca, Lucia, Marco, Piero e Viola, per la loro amicizia da che io sono io. Ringrazio Emma e Rebecca, per questi tre anni. Ringrazio Camilla, per aver condiviso con me l'esperienza di Groningen dandomi aiuto e una possibilità di confronto. Ringrazio Margherita, per avermi aiutato a metabolizzare e fissare Groningen. Ringrazio Alessandro, Andrea, Beatrice, Camilla, Fabio, Francesco, Giovanni, Lorenzo, Lorenzo, Maria, Riccardo, Simone e Veronica, che hanno condiviso con me questa triennale.

Ringrazio i collegiali, troppi per nominarvi tutti: vivere con voi, con ognuno di voi nella sua unicità comprensiva di uno sfuggente qualcosa che ci accomuna, ha reso veramente unici questi tre anni. Ringrazio in particolare il primo piano, che con me ha condiviso pasti, tisane e pensieri: Alberto, Caterina, Chiara, Elisa, Francesco, Francesco, Gaetano, Giulia, Giulia, Lorenzo, Luca, Marco, Nicolò e Shivani.

Ringrazio, nonostante il tempo trascorso, chi mi ha indirizzato su questa strada, che mi sembra fatta su misura: Andrea, Benedetta, Edoardo, Francesco, Giulia, Leonardo, Luca, Pietro e Vanessa, che per primi mi hanno mostrato il lato umano di questa disciplina, e prof. Fertili, prof. Targa e prof. Brognara.

Ringrazio infine il mio relatore, prof. Latini, per la disponibilità, l'interesse e la competenza che mi ha mostrato durante la redazione di questa tesi.