

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Sistemi dinamici discreti unidimensionali: Introduzione al caos e cenni sui frattali

Relatore:  
Prof.ssa  
Simonetta Abenda

Presentata da:  
Riccardo Antonio Larocca

Anno Accademico 2023/2024

*Ai miei genitori*

## Sommario

Le equazioni alle differenze finite emergono in numerosi ambiti scientifici, dalla biologia alla fisica, dall'economia alle scienze sociali. Molti di questi sistemi, pur essendo descritti da equazioni deterministicamente semplici, manifestano comportamenti complessi, spesso caotici[4]. In questa tesi vengono introdotti i principali concetti matematici necessari per l'analisi dei sistemi dinamici discreti unidimensionali, con particolare attenzione al modello logistico, che permette di esplorare fenomeni come il caos e le biforcazioni. Infine, si fornisce un'introduzione ai frattali, alla dinamica olomorfa e si analizzano gli insiemi di Mandelbrot e Julia.

# Indice

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Sistemi dinamici discreti</b>                                       | <b>3</b>  |
| 1.1      | Confronto con sistemi dinamici discreti . . . . .                      | 3         |
| 1.2      | Punti fissi e periodici e analisi grafica . . . . .                    | 5         |
| 1.3      | Equazioni alle differenze . . . . .                                    | 10        |
| <b>2</b> | <b>Mappa logistica e biforcazioni</b>                                  | <b>13</b> |
| 2.1      | Modello logistico . . . . .  | 13        |
| 2.2      | Caos e dinamica simbolica . . . . .                                    | 24        |
| <b>3</b> | <b>Cenni sulla dinamica olomorfa e sui frattali</b>                    | <b>35</b> |
| 3.1      | Introduzione ai Frattali . . . . .                                     | 35        |
| 3.2      | Dinamica olomorfa e frattali . . . . .                                 | 38        |
|          | <b>Appendici</b>   | <b>44</b> |
| <b>A</b> | <b>Codici</b>  | <b>45</b> |
| A.1      | Codice per diagramma di biforcazione . . . . .                         | 45        |
| A.2      | Codice per insiemi di Julia . . . . .                                  | 47        |
| <b>B</b> | <b>Transizione dall'equazione logistica continua a quella discreta</b> | <b>52</b> |

# Introduzione

I sistemi dinamici, in generale, sono modelli matematici utilizzati per descrivere l'evoluzione di un sistema al fine di prevederne il comportamento nel tempo. I sistemi continui vengono descritti da una o più equazioni differenziali che agiscono su un dato insieme.

I sistemi dinamici discreti sono invece rappresentati dalle cosiddette equazioni alle differenze, che possono essere interpretate come l'iterazione di una funzione, detta mappa, su un insieme o a partire da un valore iniziale. In particolare, un'equazione alle differenze di ordine  $n$  collega lo stato del sistema all'iterazione  $n + 1$  con gli  $n$  stati precedenti. Tuttavia, per lo studio qualitativo, verrà adottato un approccio differente rispetto alla risoluzione diretta delle equazioni alle differenze.

Scopriremo che anche le mappe più semplici, come la mappa logistica  $L_r(x) = rx(1 - x)$ , la funzione  $f_c(x) = x^2 + c$ , e funzioni a tratti come la mappa a tenda, mostrano comportamenti estremamente particolari, specialmente per determinati valori dei parametri.

Nel primo capitolo verranno introdotte le nozioni matematiche fondamentali per lo studio dei sistemi dinamici discreti, partendo da un confronto con i sistemi continui e proponendo alcune motivazioni allo studio dei sistemi discreti [5, 7].

Nel secondo capitolo verrà approfondito lo studio del modello logistico discreto, utile per introdurre concetti semplici ma rilevanti, soprattutto nel contesto di sistemi di dimensioni superiori[2, 3]. Inoltre, verranno presentati alcuni strumenti di analisi dei sistemi dinamici discreti, come l'analisi grafica e la dinamica simbolica[2, 3, 6].

Infine, nel terzo capitolo, verrà fornita una breve introduzione ai frattali, con particolare attenzione agli insiemi di Mandelbrot e Julia[1, 3].

# Capitolo 1

## Sistemi dinamici discreti

I sistemi dinamici discreti possono emergere dallo studio dei sistemi dinamici continui, poiché, in alcuni casi, è possibile ridurre l'analisi del flusso di fase di un sistema continuo allo studio di una mappa iterativa, chiamata mappa di Poincaré. Questa riduzione offre diversi vantaggi: agisce su uno spazio di dimensione inferiore, semplificando così la visualizzazione, e permette di evitare la risoluzione diretta del sistema di equazioni differenziali, poiché l'orbita può essere ottenuta iterando la mappa [2].

Definiamo un sistema dinamico discreto con la notazione  $(f, M)$ , ossia una funzione  $f$  che agisce iterativamente sull'insieme  $M$ .

### 1.1 Confronto con sistemi dinamici discreti

Un sistema dinamico continuo, è rappresentato da un'equazione differenziale del tipo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \Phi(\mathbf{x}, t)$$

dove  $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  spazio delle configurazioni,  $t \in I$  intervallo di tempo,  $\Phi$  è un campo vettoriale che contiene le informazioni dinamiche del sistema. Per provare a giustificarsi meglio questa entità, si può fare un'analogia con l'equazione di Newton  $\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{F}}{a}$  dove  $x \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $x = (q, \dot{q})$  e  $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ , e la dinamica è racchiusa nel termine nella parte destra dell'equazione. Diciamo che il sistema è *autonomo*, se non dipende dal tempo.

La soluzione dell'equazione differenziale è data dal cosiddetto *flusso di fase* (o semplicemente *flusso*),  $\varphi(t; t_0, x_0)$  che da l'evoluzione del sistema nel tempo a partire dalla condizione iniziale  $(t_0, x_0)$  con  $x_0 = x(t_0)$ :

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(t; t_0, x_0)$$

Il flusso generalizza il concetto di equazione del moto: quest'ultima restituisce la traiettoria del moto dato un *punto* iniziale; il primo, invece, restituisce la traiettoria, nello spazio delle fasi, al variare delle condizioni iniziali.

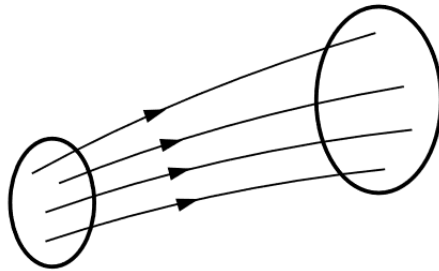


Figura 1.1: Rappresentazione del flusso di fase. Immagine presa da [7] a pag. 26.

Similmente, un sistema dinamico discreto è rappresentato da una funzione che agisce a intervalli di "tempo" discreti, anche detta *mappa*. Se per i sistemi dinamici continui il flusso di fase costituiva un gruppo continuo di trasformazioni, qui la mappa ne costituisce uno discreto, sempre sullo spazio  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

In questo caso, se  $M$  è la mappa che descrive il sistema, l'evoluzione di esso a partire dal punto  $\mathbf{x}_n$  è data da

$$\mathbf{x}_{n+1} = M(\mathbf{x}_n, n)$$

Diciamo che la mappa è *autonoma* se non dipende esplicitamente da  $n$ . Se la mappa è autonoma la traiettoria è l'insieme *discreto* dei punti  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tali che  $x_i = M^i(x_0)$ , ossia il punto  $i$ -esimo della traiettoria è dato dall'applicazione della mappa  $M$  sul punto iniziale  $x_0$ ,  $i$  volte:

$$x_i = M(M(\dots M(x_0)\dots)), \quad i \text{ volte}$$

ossia, se  $\circ$  è l'operazione di composizione per le mappe, allora

$$x_i = M \circ M \circ \dots M(x_0), \quad i \text{ volte}$$

Dato un sistema dinamico continuo, inoltre, è possibile ricondursi a un sistema dinamico discreto sezionando con una superficie l'orbita di un dato punto nello spazio delle fasi, associando quindi una mappa discreta (non autonoma) a un flusso di fase:

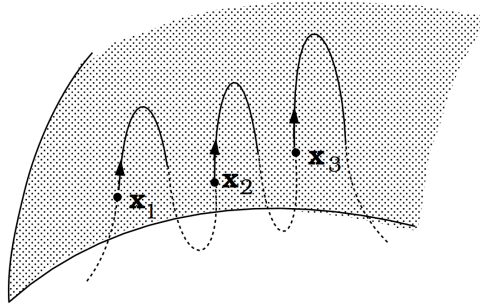


Figura 1.2: Sezione di Poincarè per il passaggio dal flusso di fase alla mappa discreta. Immagine presa da [7] a pag. 28.

## 1.2 Punti fissi e periodici e analisi grafica

In questa sezione verranno introdotti i concetti fondamentali, tra cui orbita, punti fissi, punti periodici e l'analisi grafica, un metodo efficace per lo studio qualitativo dei sistemi dinamici discreti.

**Definizione 1.2.1** (Orbita di un punto). *Sia  $f$  una funzione. L'orbita di un punto  $x$  è*

$$\gamma(x) = \{x^n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ con } x_0 = x \text{ e } x_{n+1} = f^n(x)\}$$

*Chiamiamo, inoltre, seme il punto  $x_0$ , ossia il punto da cui parte l'orbita.*

**Definizione 1.2.2** (Punto fisso). *Sia  $f(x)$  una funzione. Se  $c$  è un punto del dominio tale che  $f(c) = c$  allora  $c$  è un punto fisso di  $f(x)$ .*

Per i punti fissi esiste un importante teorema, infatti per una funzione continua esiste sempre almeno un punto fisso:

**Teorema 1.2.1.** *Se  $I$  è un intervallo chiuso e limitato e  $f : I \rightarrow I$  è una funzione continua, allora  $f$  possiede un punto fisso in  $I$ .*

Introdurremo ora una notazione per esprimere iterazioni multiple di una funzione. Sia  $f$  una funzione, l'iterata  $n$ -esima, denotata con  $f^n(x)$ , rappresenta l'applicazione ripetuta della funzione  $f$ ,  $n$  volte, cioè:

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f \circ f \circ \dots \circ f(x)$$

Con questa notazione allora viene facile introdurre il concetto di punto periodico:



**Definizione 1.2.3** (Punto periodico). *Sia  $f$  una funzione. Un punto  $x$  del dominio di  $f$  è un punto periodico di periodo  $k$  se vale  $f^k(x) = x$ .*

*Si dice che il periodo  $k$  è il periodo primo di  $x$  se è il più piccolo intero tale che  $f^k(x) = x$ , ossia se, ogni qual volta si prenda un intero  $n \in ]0, k[$  allora  $f^n(x) \neq x$ .*

Se il punto  $x_0$  è periodico di periodo  $k$  per  $f$ , allora l'orbita si riduce a  $k$  elementi  $\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}$ . In un'orbita periodica, dunque, ogni punto è un seme.

In altre parole, si può vedere un punto periodico di periodo  $k$  come il punto fisso della funzione  $f^k$ .

Esistono tuttavia punti che diventano fissi (periodici) dopo un numero finito di iterazioni, altri dopo un numero infinito. Chiamiamo i primi, punti eventualmente fissi (periodici), i secondi, punti asintotici.

**Definizione 1.2.4** (Punto eventualmente fisso e eventualmente periodico). *Sia  $f$  una funzione. Un punto  $x_0$  è detto eventualmente fisso se esiste un intero  $k$  tale che  $f^{k+1}(x_0) = f^k(x_0)$ .*

*Si dice, invece, che  $x_0$  è eventualmente periodico se esiste un intero  $m$  tale che  $f^{k+n}(x_0) = f^k(x_0)$  per  $n > m$ .*

**Definizione 1.2.5** (Punto asintotico in avanti). *Sia  $f$  una funzione con punto periodico  $x$  di periodo  $k$ . Diciamo che un punto  $x_0$  è asintotico in avanti verso  $x$  se la sequenza  $x_0, f^k(x_0), f^{2k}(x_0), \dots$  converge a  $x$ , ossia se*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{nk}(x_0) = x$$

*L'insieme di tutti i punti che tendono asintoticamente a  $x$  è detto insieme stabile di  $x$  e lo si denota con  $W^s(x)$ .*

*Se una certa orbita cresce all'infinito in modulo diciamo che il seme appartiene all'insieme stabile di infinito, cioè a  $W^s(\infty)$ .*

Nella definizione di orbita (1.2.1) è stato usato un valore di  $n \in \mathbb{Z}$ , il quale può dunque assumere valori negativi. In effetti si può fare una distinzione ulteriore per le orbite:

**Definizione 1.2.6** (Orbita forward e backward). *Chiamiamo orbita forward l'orbita formata soltanto dai punti successivi al seme, più precisamente*

$$\gamma_+(x) = \{f^n(x) | n \in \mathbb{N}\}$$

*mentre chiamiamo orbita backward l'orbita formata dai punti precedenti al seme, ossia*

$$\gamma_-(x) = \{f^n(x) | n \in \mathbb{Z}, n < 0\}$$

*anche detta storia passata.*

Date queste precisazioni possiamo riprendere il concetto di punto asintotico potendo formulare la definizione di un nuovo tipo di punto asintotico

**Definizione 1.2.7** (Punto asintotico all'indietro). *Sia  $f$  una funzione con un punto periodico  $x$  di periodo  $k$ . Diciamo che un punto  $x_0$  è un punto asintotico all'indietro verso  $x$  se la sua orbita backward  $\gamma_-(x)$  ha come seme il punto  $x$ . In altre parole, se esiste una sua storia passata  $x_k$  tale che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{-nk} = x$$

*Inoltre, l'insieme instabile di un punto  $x$  è l'insieme dei punti asintotici backward a  $x$ , denotato con  $W^u(x)$ .*

Questa distinzione ulteriore ci permette di creare una classificazione per i punti fissi, i punti iperbolici repulsivi e attrattivi.

**Definizione 1.2.8** (Punti attrattivi e repulsivi). *Un punto  $x$  tale che  $|f'(x)| \neq 1$  si dice iperbolico, altrimenti non-iperbolico o neutro. I punti iperbolici si distinguono in attrattivi e repulsivi.*

*Un punto  $x$  è attrattivo per  $f$  se esiste un intorno  $U$  di  $x$  contenuto nell'insieme stabile di  $x$ . Si dice, invece, repulsivo se esiste un intorno di  $x$  incluso nell'insieme instabile di  $x$ .*

*Un punto con derivata nulla si dice super attrattivo, mentre un punto con derivata uguale a  $\pm 1$  ma che manifesta comunque un comportamento di tipo attrattivo (repulsivo) si dice punto debolmente attrattivo (repulsivo).*

**Teorema 1.2.2** (Teorema di caratterizzazione dei punti fissi). *Sia  $f \in C^\infty$  con  $x$  punto fisso.*

- $\diamond$   *$x$  è attrattivo se  $|f'(x)| < 1$ ;*
- $\diamond$   *$x$  è repulsivo se  $|f'(x)| > 1$ ;*
- $\diamond$  *se  $|f'(x)| = 1$  non si può dire niente a priori.*

Inoltre, il seguente teorema stabilisce che un dato punto può appartenere all'insieme stabile di massimo un punto.

**Teorema 1.2.3.** *Gli insiemi stabili di due punti distinti  $x$  e  $y$  sono disgiunti, ossia*

$$W^s(x) \cap W^s(y) = \emptyset$$

*con  $x \neq y$ .*

Anche le orbite, così come i punti, possono essere attrattive o repulsive

**Definizione 1.2.9** (Orbita attrattiva e repulsiva). *Un'orbita  $\gamma$  è attrattiva se esiste un insieme  $U \supseteq \gamma$  contenuto nell'insieme stabile di  $\gamma$ .*

*Analogamente,  $\gamma$  è repulsiva se esiste un insieme  $U \supseteq \gamma$  contenuto nell'insieme instabile di  $\gamma$ .*

## Analisi grafica

L'analisi grafica è uno strumento per studiare i sistemi dinamici discreti in maniera qualitativa ma molto efficiente.

L'analisi grafica è utile per comprendere l'effetto dell'iterazione di una mappa su un dato valore iniziale e per individuare i punti fissi, analizzandone la natura. Procediamo inizialmente con l'analisi del primo aspetto.

Iterare una mappa significa prendere il valore iniziale, sia  $x_0$ , calcolare  $f(x_0) = x_1$  usare questo nuovo valore per calcolare il successivo,  $f(x_1) = x_2$  e così via. Graficamente equivale a prendere il punto iniziale lungo le ascisse e tirare una linea verticale verso il grafico, fino a raggiungere il punto  $(x_0, f(x_0))$ , successivamente prendere il punto  $f(x_0)$  lungo le **ascisse** (lo stiamo usando come nuovo input) e tirare una nuova linea verso il punto  $(f(x_0), f(f(x_0)))$ , e così via.

Un'analisi attenta fa saltare all'occhio che seguire questo procedimento equivale a tracciare la bisettrice del primo quadrante,  $y = x$ , e tirare le linee dal punto iniziale  $(x_0, x_0)$  verticalmente verso la funzione, trovando  $(x_0, f(x_0))$ , poi tirare orizzontalmente una linea verso la bisettrice, fino al punto  $(f(x_0), f(x_0))$ , e successivamente tirare una linea verticale verso il grafico trovando il punto  $(f(x_0), f(f(x_0)))$ . Questi due procedimenti sono mostrati in figura 1.3.

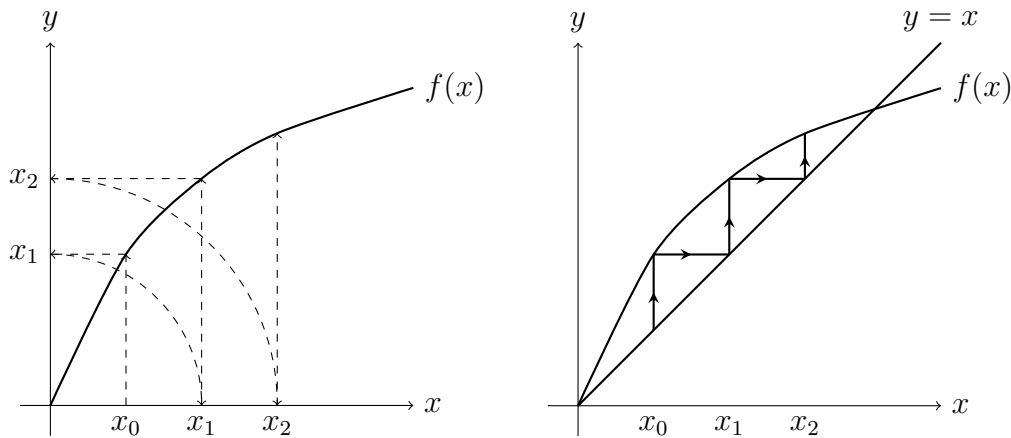


Figura 1.3: Visualizzazione e confronto dei due metodi

In effetti, tirare una linea orizzontalmente verso la bisettrice equivale a dire che l'*input* che della funzione a una data iterazione, è uguale all'*output* restituito dalla funzione all'iterazione precedente, questo poiché  $y = x$ .

Per trovare, invece, i punti fissi si segue un procedimento diverso ma analogo.

L'equazione per trovare i punti fissi è  $f(x) = x$ , che equivale a porre il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$$

ossia, stiamo cercando i punti di intersezione tra la funzione e la retta bisettrice del primo quadrante, come si vede in figura 1.4.

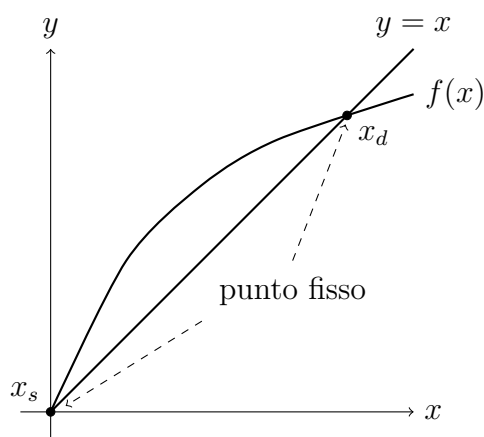


Figura 1.4: Punto fisso con analisi grafica

Trovato il punto fisso, possiamo stabilire la natura di esso. Per fare ciò, basta prendere un campione di punti e iterare la mappa su essi per vedere dove vanno a finire. Per quanto riguarda il grafico in fig. 1.4, il punto di intersezione  $x_d$  è attrattivo per tutti i punti del dominio  $I$  (ossia l'intervallo rappresentato) tranne per il punto  $x_s$ , che è un punto fisso repulsivo con insieme stabile formato solo da se stesso, quindi

$$W^s(x_s) = \{x_s\}, \quad W^s(x_d) = I \setminus \{x_s\}$$

Quindi, con l'analisi grafica possiamo fare gran parte del lavoro come trovare i punti fissi, che spesso sono impossibili da calcolare analiticamente, infatti basta pensare che se si volessero trovare i punti fissi di una banalissima funzione  $f^2(x)$  con  $f(x) = x^2 + 3$ , ci ritroveremmo a dover risolvere un polinomio di quarto grado. In più, è possibile **visualizzare l'orbita** di un punto.

**Osservazione.** *Si noti che cercare i punti fissi di una funzione  $f^2(x)$  significa cercare i punti periodici di periodo 2 per la funzione  $f(x)$ , come già anticipato sopra. Ovviamente questo ragionamento è generalizzabile a  $f^n(x)$ , ossia la ricerca di punti periodici di periodo  $n$  per  $f(x)$ .*

**Esempio 1.2.1.** *A titolo di esempio, in figura 1.5 si vede l'orbita del punto  $x = -0.7$  sotto l'iterazione della mappa  $f(x) = x^2 - 0.65$ . Si nota che l'orbita tende verso il punto di intersezione della funzione con la bisettrice  $y = x$ , che di conseguenza ci fa capire che il punto è attrattivo.*

Ovviamente l'analisi grafica è un modo **qualitativo**, come già anticipato: non è sempre detto che l'orbita evolva come ci si aspetta.

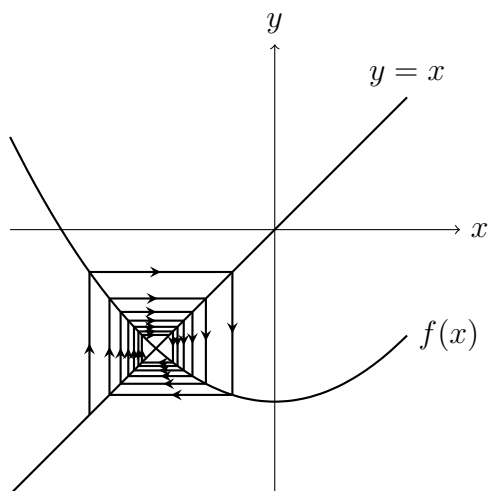


Figura 1.5: Visualizzazione orbita della funzione  $f(x) = x^2 - 0.65$

### 1.3 Equazioni alle differenze

Introduciamo ora un formalismo matematico per lo studio dei sistemi dinamici discreti, basato sulle equazioni alle differenze, che possono essere considerate come l'analogo discreto delle equazioni differenziali utilizzate nello studio dei sistemi dinamici continui.

Come già anticipato, i sistemi dinamici discreti sono costituiti da una mappa che agisce iterativamente su un dominio. La parola *iterativamente* sta a significare che l'output della funzione all'iterazione precedente è utilizzato come input per quella successiva, in altre parole:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

In questa sezione diamo un accenno alle equazioni alle differenze lineari (senza la pretesa di essere esaustivi), siccome la maggior parte (se non la totalità) dei sistemi non lineari si studia partendo dalla linearizzazione. Per rimanere generici formuliamo il tutto per un sistema  $n$ -dimensionale.

Un'equazione alle differenze lineare omogenea ha una forma del tipo:

$$x(m+1) = A(m)x(m), \quad \text{con } x(m_0) = x_0 \quad (1.1)$$

con  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  matrice quadrata  $n$ -dimensionale.

La soluzione di questa equazione, dato un punto iniziale  $x_0$ , è data dalla *matrice di soluzione principale*  $\Pi(m, m_0)$ :

$$x(m, m_0, x_0) = \Pi(m, m_0)x_0 \quad (1.2)$$

con

$$\Pi(m, m_0) = \prod_{j=m_0}^{m-1} A(j), \quad \text{con } m \geq m_0 \quad (1.3)$$

**Esempio 1.3.1.** *A titolo di esempio, cerchiamo la soluzione alla terza iterazione, dunque  $x(3)$ , partendo da  $m_0 = 0$ . Omettendo per semplicità il valore di  $m_0$ , la soluzione sarà quindi:*

$$x(3, x_0) = A(0)A(1)A(2)x_0$$

Si noti che la matrice  $A$  dipende dal parametro, ossia il *sistema non è autonomo*, come avevamo anticipato nella sezione 1. Per un *sistema autonomo* la matrice di soluzione principale in eq. (1.3) diventa

$$\Pi(m, m_0) = A^m \quad (1.4)$$

e la soluzione in eq. (1.2)

$$x(m, m_0, x_0) = A^m x_0 \quad (1.5)$$

siccome l'equazione alle differenze in eq. (1.1) diventa

$$x(m+1) = Ax(m) \quad (1.6)$$

Il sistema autonomo presenta delle equazioni sicuramente più familiari.

La matrice di soluzione principale risolve l'*equazione matriciale ai valori iniziali*

$$\Pi(m+1, m_0) = A(m)\Pi(m, m_0) \quad \text{con } \Pi(m_0, m_0) = \mathbb{I} \quad (1.7)$$

e soddisfa

$$\Pi(m, m_1)\Pi(m_1, m_0) = \Pi(m, m_0) \quad (1.8)$$

Se la matrice  $A(m)$  è invertibile vale la relazione

$$\Pi(m, m_0) = \left( \prod_{j=m_0}^{m-1} A(j) \right)^{-1}, \quad \text{con } m < m_0 \quad (1.9)$$

e in questo caso  $\Pi(m, m_0)$  è un isomorfismo con inversa  $\Pi(m, m_0)^{-1} = \Pi(m_0, m)$ .

Passiamo ora, brevemente, alle equazioni alle differenze lineari *non omogenee*. Queste sono del tipo

$$x(m+1) = A(m)x(m) + g(m), \quad \text{con } x(m_0) = x_0 \quad (1.10)$$

dove  $g(m) \in \mathbb{R}^n$ . La soluzione è data da

$$x(m) = \Pi(m, m_0)x_0 + \sum_{j=m_0}^{m-1} \Pi(m, j)g(j), \quad (10.28)$$

dove  $\Pi(m, m_0)$  è la matrice di soluzione principale del sistema omogeneo associato.

Se  $A(m)$  è invertibile, la formula precedente vale anche per  $m < m_0$  se poniamo

$$x(m) = \Pi(m, m_0)x_0 - \sum_{j=m-1}^{m_0-1} \Pi(m, j)g(j), \quad m < m_0. \quad (10.29)$$

# Capitolo 2

## Mappa logistica e biforcazioni

I sistemi dinamici si presentano frequentemente sotto forma di *famiglie di funzioni parametrizzate*, ossia insiemi di funzioni che condividono la stessa struttura ma variano nei loro coefficienti, in funzione di un parametro. Queste famiglie rappresentano un insieme di funzioni "simili" dal punto di vista strutturale. Iniziamo con un esempio per introdurre concetti che tratteremo successivamente, come le biforcazioni e il caos.

### 2.1 Modello logistico

Il modello logistico descrive, in generale, l'evoluzione di una popolazione di una determinata specie all'interno di un habitat con risorse limitate, e quindi incapace di sostenere una crescita indefinita.

Iniziamo analizzando il modello **continuo**, di più immediata comprensione, per poi passare alla sua versione discreta. Il modello logistico continuo è governato dalla cosiddetta *equazione logistica*:

$$\dot{x} = x(a - bx) \quad (2.1)$$

Esaminiamone ora l'interpretazione. Il termine  $\frac{\dot{x}}{x}$  rappresenta il tasso di crescita relativo della popolazione [5]. Se la popolazione potesse crescere indefinitamente, tale tasso rimarrebbe costante e pari a  $\frac{\dot{x}}{x} = a$ , dove  $a$ , dunque, rappresenta il tasso di crescita intrinseco della popolazione. In presenza di risorse limitate, tuttavia, il tasso di crescita diminuisce all'aumentare della popolazione, seguendo la relazione  $\frac{\dot{x}}{x} = a - bx$ . Il parametro  $b$  quantifica l'effetto della competizione: un valore elevato di  $b$  indica che la popolazione è soggetta a forti limitazioni (ad esempio, un habitat con capacità di sostentamento limitata o scarsità di risorse), con conseguente rallentamento della crescita.

Data la condizione iniziale  $x_0$ , la soluzione a questa equazione è

$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a - bx_0)e^{-at}} \quad (2.2)$$



Possiamo visualizzarla nel piano cartesiano (fig. 2.1)

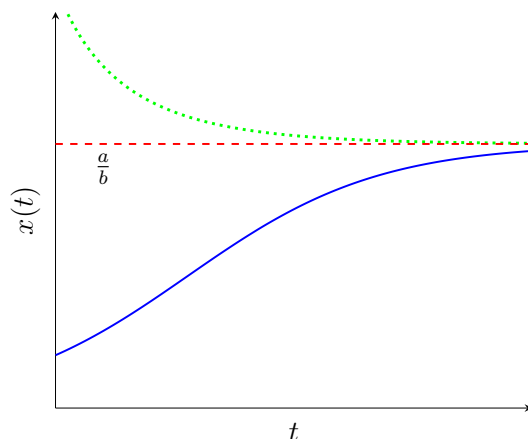


Figura 2.1: Grafico delle soluzioni dell'equazione logistica per valori di  $x_0$  ( $0 < b < a$ ): minori di  $a/b$  (blu, continuo), uguale ad  $a/b$  (rosso, tratteggiato), maggiori di  $a/b$  (verde, puntato).

Come possiamo vedere, innanzitutto, tutte le condizioni iniziali  $x_0$ , eccetto  $x = 0$ , tendono al valore  $x = \frac{a}{b}$ , che è quindi un *punto fisso attrattivo* con insieme stabile  $W^s(a/b) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Il punto  $x = 0$  è un punto fisso repulsivo del sistema ma con insieme stabile  $W^s(0) = \{0\}$ .

Analizziamo questi andamenti:

- $x_0 < a/b$  : la popolazione cresce fino a raggiungere la popolazione di equilibrio per tempi molto lunghi;
- $x_0 = a/b$  : la popolazione si trova nella condizione stabile, quindi non cresce e non decresce;
- $x_0 > a/b$  : la popolazione ha un eccesso di individui rispetto al numero che l'habitat può sostenere e quindi molti individui muoiono per tendere alla popolazione stabile.

D'altro canto, possiamo visualizzarla attraverso uno strumento che in questo caso sembrerà una forzatura, ma in più dimensioni torna spesso utile, il *ritratto di fase* o *linea di fase* (fig. 2.2).

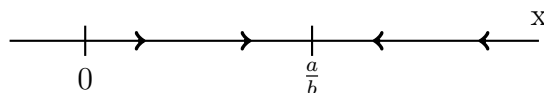


Figura 2.2: Ritratto di fase della soluzione della mappa logistica. Si ritrova che l'insieme stabile di  $x = \frac{a}{b}$  è  $W^s(\frac{a}{b}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

In pratica, si rappresenta lo spazio dei possibili valori della grandezza in esame, che in questo caso si tratta di uno spazio 1-dimensionale con i possibili valori di  $x$  e si usano le frecce per mostrare gli andamenti delle soluzioni per diversi valori iniziali, verso i punti fissi attrattivi (si sta, dunque, visualizzando gli insiemi stabili dei vari punti fissi).

Compresi i concetti fondamentali del modello logistico, passiamo, ora, al modello **discreto**. L'equazione logistica (2.1) cambia e diventa<sup>1</sup>:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.3)$$

dove  $r \geq 0$  è un parametro detto *fattore di crescita* e  $x_n$  varia in  $[0, 1]$ , ossia stiamo misurando la popolazione, non in valore assoluto, ma in frazione della capienza massima.

Dalla teoria dei sistemi dinamici discreti possiamo descrivere questo sistema attraverso l'iterazione di una mappa detta *mappa logistica*

$$L_r(x) = rx(1 - x) \quad (2.4)$$

Per familiarizzarsi con questo concetto è meglio visualizzarlo. Calcoliamo l'orbita di alcuni punti iniziali e eseguiamo 30 iterazioni della mappa, graficando i punti  $(n, x_n)$  (fig. 2.3).

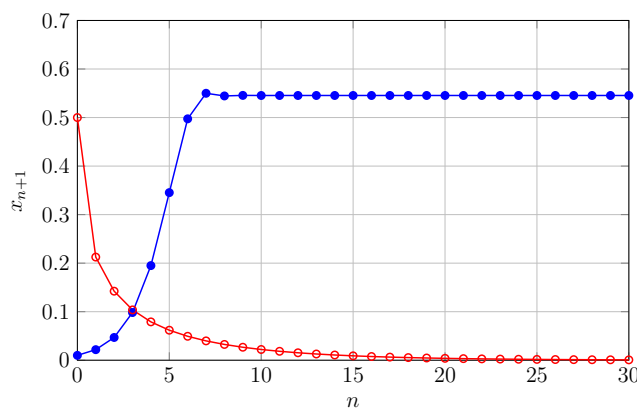


Figura 2.3: Iterazione della mappa logistica per  $r = 2.2$  e  $x_0 = 0.01$  (blu, continua), e per  $r = 0.85$  e  $x_0 = 0.5$  (rossa, tratteggiata).

Vediamo che per un fattore di crescita minore di 1 la popolazione è destinata a estinguersi, per qualsivoglia valore, mentre per  $r > 1$  la popolazione raggiunge *asintoticamente* un valore stabile. In figura 2.4 si vede l'andamento per  $r = 3.3$  e  $x_0 = 0.01$

<sup>1</sup>Per la dimostrazione è possibile consultare l'appendice B.

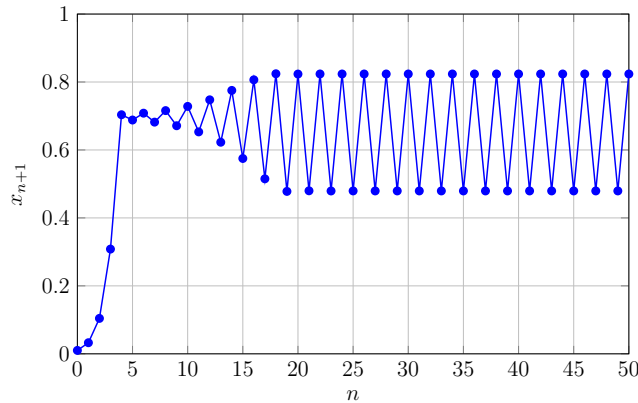


Figura 2.4: Iterazione della mappa logistica per  $r = 3.3$  e  $x_0 = 0.01$

Come si può vedere l'orbita non tende più a un punto fisso ma tende a un'orbita di periodo 2, cioè oscilla tra un valore minimo e uno massimo. Questo si può interpretare come una specie che ciclicamente cambia popolazione, per esempio d'inverno presenta un certo numero di individui e d'estate un altro, tornando al valore precedente all'inverno successivo. Troviamo, dunque un comportamento inaspettato: esiste un valore del parametro tale per cui il punto attrattivo scompare, e compare un'orbita periodica attrattiva di periodo 2.

Studiamo, dunque, alcuni casi della mappa logistica per diversi valori di  $r$  nell'intervallo  $x \in [0, 1]$ . In figura 2.5 sono riportati i grafici della funzione  $L_r(x) = rx(1-x)$  per  $r = 2.5$  e  $L_r^2(x)$  per  $r = 3.35$ .

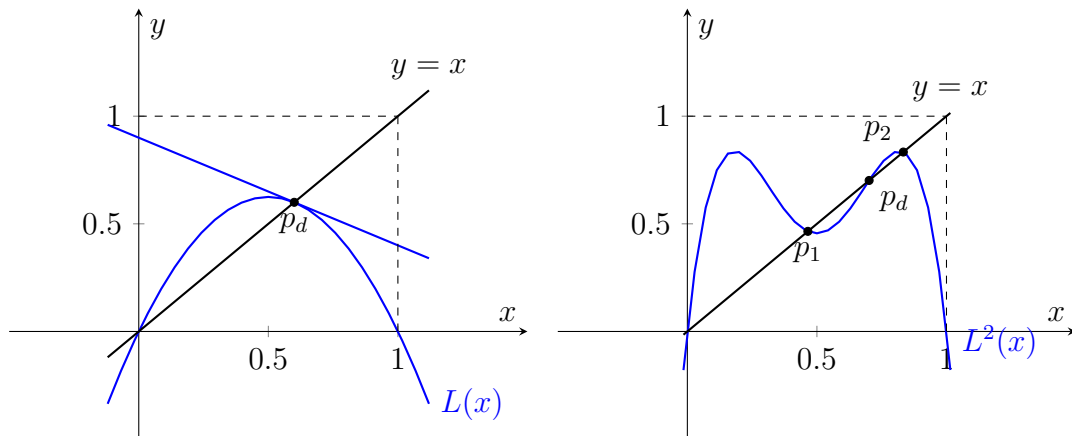


Figura 2.5: Grafici della funzione logistica  $L(x)$  per  $r = 2.5$  (sinistra) e  $L^2(x)$  per  $r = 3.35$  (destra).

La funzione  $L_{2.5}(x)$  ha due punti fissi,  $p_s = (0, 0)$  e  $p_d = (\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r})$ . La derivata di  $L_r(x)$  è  $L'_r(x) = r(1-2x)$ .

Il punto  $p_s$  è attrattivo per  $r \in [0, 1]$  poiché  $L'_r(x) = r$ . Questo coincide col fatto che una popolazione tende a estinguersi se il fattore di crescita è minore di 1.

Il punto  $x = 1$  è eventualmente fisso poichè  $L(1) = 0$ .

Il punto  $p_r$  è repulsivo per  $r \in [0, 1]$  mentre è attrattivo per  $r \in ]1, 3]$  (facilmente verificabile).

Per  $r > 3$  la situazione cambia poichè  $p_d$  diventa *repulsivo*, siccome la derivata non è più compresa tra -1 e 1, e compaiono due nuovi punti fissi *attrattivi*,  $p_1$  e  $p_2$  come si può vedere dal grafico di  $L_{3.35}^2(x)$ . Questi due punti sono periodici poichè  $L_{3.35}^2(p_1) = p_2$  e  $L_{3.35}^2(p_2) = p_1$ , quindi è comparsa un'orbita periodica attrattiva di periodo 2.

Per  $r \gtrsim 3.45$  la situazione cambia ancora: l'orbita periodica di periodo 2 diventa *repulsiva* e compare un'orbita periodica di periodo 4 attrattiva.

Se si continua ad aumentare il valore di  $r$  si ottiene un comportamento auto-similare, nel senso che continuano a comparire orbite di periodo doppio rispetto al precedente.

Il fenomeno che osservato è detto *biforcazione*:

**Definizione 2.1.1** (Biforcazione). *Una biforcazione è il fenomeno che occorre quando, al variare del parametro di una famiglia di funzioni, il comportamento delle funzioni cambia sensibilmente.*

*In altre parole, sia  $f_c(x)$  una famiglia di funzioni parametrizzata da  $c$ . Diciamo che c'è una biforcazione in  $c_0$  se esiste un  $\epsilon > 0$  tale che ogni volta che  $a$  e  $b$  soddisfano  $c_0 - \epsilon < a < c_0$  e  $c_0 < b < c_0 + \epsilon$ , allora le dinamiche di  $f_a$  e di  $f_b$  sono diverse.*

*In questo caso, lo si può vedere come il fenomeno che cambia il numero o la natura dei punti fissi.*

Una definizione rigorosa di cosa significa che due funzioni hanno *dinamiche diverse* verrà fornita più avanti nel testo, nella sezione sul caos, con la definizione di funzioni *topologicamente equivalenti*.

Prima di addentrarci nei diversi tipi di biforcazioni, introduciamo due strumenti fondamentali per una comprensione più approfondita: il *diagramma delle orbite* e il *diagramma di biforcazione*. Sebbene tali concetti siano nati per scopi prevalentemente pratici e computazionali, risultano essenziali per lo studio delle dinamiche non lineari. È importante precisare che le definizioni che seguiranno potrebbero non essere rigorosamente formali, poiché il loro impiego è legato principalmente all'analisi numerica e grafica.

**Definizione 2.1.2** (Diagramma delle orbite). *Il diagramma delle orbite è una rappresentazione grafica che illustra l'andamento dell'orbita di un valore iniziale. Sull'asse delle ascisse si riporta il numero dell'iterazione  $n$ , mentre sull'asse delle ordinate si rappresenta il valore della funzione alla  $n$ -esima iterazione. Un esempio di tale diagramma è visibile in figura 2.4.*

**Definizione 2.1.3** (Diagramma di biforcazione). *Il diagramma di biforcazione è una rappresentazione grafica che, sull'asse delle ascisse, riporta i valori del parametro del*

sistema dinamico, mentre sull'asse delle ordinate mostra le orbite a cui tende la funzione iterata. È importante notare che, in questo contesto, il seme iniziale viene mantenuto costante per tutti i valori del parametro  $r$ . In altre parole, a ciascun valore del parametro è associata la corrispondente linea di fase. La curva risultante rappresenta i punti di equilibrio per ciascun valore del parametro. Spesso, nelle vicinanze dei punti fissi, è utile disegnare l'andamento con linee verticali per evidenziare meglio il comportamento locale. Alcuni esempi di diagrammi di biforcazione possono essere osservati in figura 2.6 e figura 2.19.

**Definizione 2.1.4** (Biforcazione a sella o tangente). Una biforcazione a sella, o tangente, si verifica quando, al variare di un parametro, due punti fissi iperbolici si identificano in un punto fisso neutro, che successivamente scompare. Questo comportamento può avvenire anche in senso inverso. Un diagramma rappresentativo di questo tipo di biforcazione è mostrato in figura 2.6.

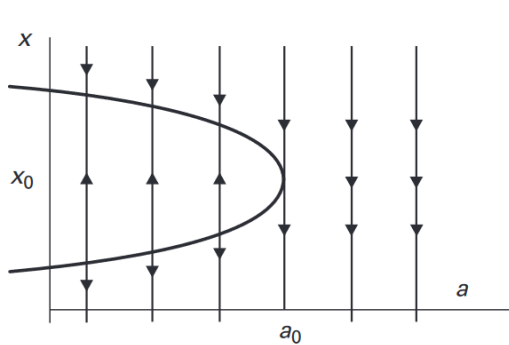


Figura 2.6: Diagramma di biforcazione per biforcazione a sella. Immagine presa da [2], pag. 179

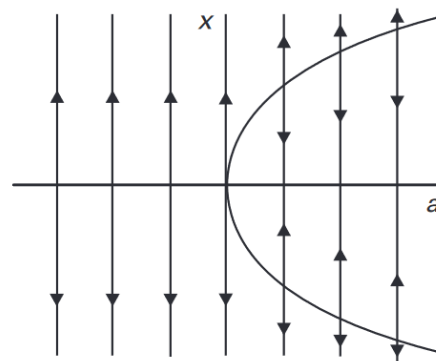


Figura 2.7: Diagramma di biforcazione per biforcazione a forcone. Immagine presa da [2], pag. 179.

**Definizione 2.1.5** (Biforcazione a forcone). È un tipo di biforcazione che avviene quando un punto periodico attrattivo si divide in un punto periodico repulsivo e un punto periodico attrattivo con stesso periodo del precedente.

Alternativamente, quando un punto periodico repulsivo si divide in un punto periodico attrattivo e due punti periodici repulsivi (fig. 2.7).

**Definizione 2.1.6** (Biforcazione transcritica). Biforcazione che si presenta quando due punti fissi, uno repulsivo e uno attrattivo (in ordine), diventano un unico punto non iperbolico e poi diventano un attrattivo e un repulsivo rispettivamente. In altre parole, sia prima che dopo la biforcazione ci sono, un punto fisso repulsivo ed uno attrattivo. Ad un certo valore del parametro i due punti coincidono e successivamente "si scambiano" i caratteri di stabilità (fig 2.8).

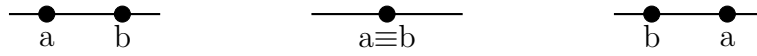


Figura 2.8: Rappresentazione di una biforcazione transcritica: i punti  $a$  e  $b$  sono punti fissi rispettivamente repulsivo e attrattivo.

**Definizione 2.1.7** (Biforcazione a raddoppio del periodo). *É una biforcazione che avviene quando un punto fisso attrattivo periodico diventa repulsivo e compare un punto fisso periodico attrattivo di periodo doppio (fig. 2.9)*

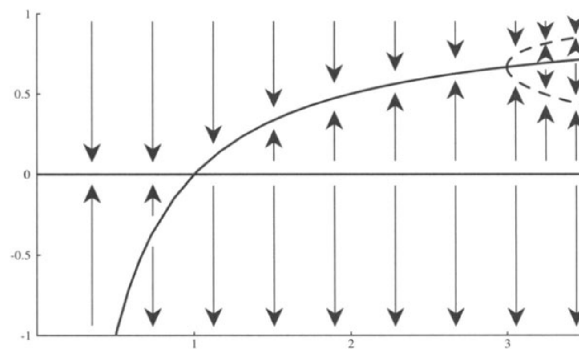


Figura 2.9: Biforcazione a raddoppio del periodo della mappa logistica. Immagine presa da [3], pag. 66.

Le biforcazioni transcritiche e quelle a forcone possono essere eradiccate con piccoli cambiamenti della famiglia di funzioni. Quelle a sella e a raddoppio del periodo invece no, per questo sono più importanti, e quindi studiate [3].

Di seguito riassumiamo i comportamenti della mappa logistica per diversi valori del parametro.

**Caso  $0 < r < 1$ :** i punti fissi sono  $p_s = 0$ , attrattivo, e  $p_r = \frac{r-1}{r} < 0$  (non rilevante in quanto non fisico), repulsivo:

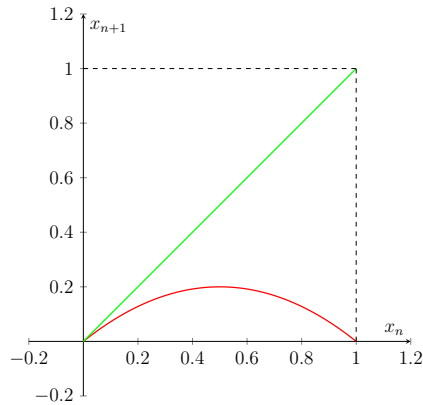


Figura 2.10: Grafico di  $L_r(x)$  per  $0 < r < 1$

In accordo con il fatto che se il fattore di crescita è minore di 1 allora la popolazione tende a estinguersi.

**Caso  $r = 1$ :** C'è una biforcazione transcritica, quindi i due punti iperbolici si identificano,  $p_s = p_d = p = 0$ .

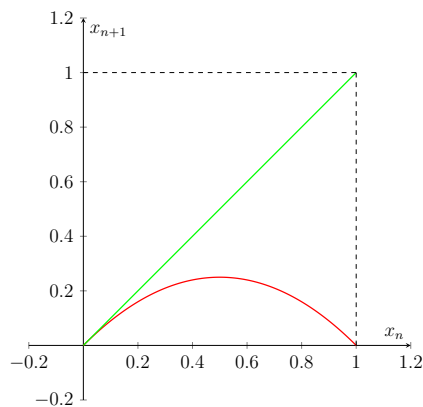


Figura 2.11: Grafico di  $L_r(x)$  per  $r = 1$

Gli insiemi stabili sono  $W^s(p) = [0, 1]$  e  $W^s(\infty) = ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[$ .

**Caso  $1 < r < 3$ :**  $p_s$  diventa un punto fisso repulsivo mentre  $p_r$  attrattivo

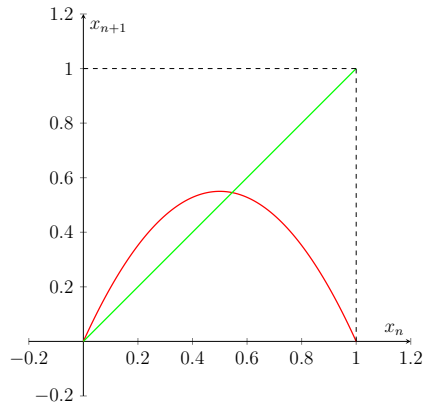


Figura 2.12: Grafico di  $L_r(x)$  per  $1 < r < 3$

In accordo con il fatto che se il tasso di crescita della popolazione,  $r$ , è maggiore di 1, allora la popolazione cresce tendendo alla popolazione di equilibrio. L'insieme stabile di  $p_s$  è  $W^s(p_s) = \{0, 1\}$ , ossia la popolazione si estingue se è già estinta (ovvio) o se è al massimo delle capacità dell'ecosistema (si ricordi che  $x$  è la frazione di abitanti), mentre l'insieme stabile di  $p_d$  è  $W^s(p_d) = ]0, 1[$ . Il resto appartiene all'insieme stabile di infinito, e  $W^s(\infty) = ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[$ ;

**Caso  $r = 3$ :** c'è una biforcazione a raddoppio del periodo, quindi  $p_r$  diventa un punto fisso *neutro*, *debolmente attrattivo*, poichè dall'analisi grafica è comunque possibile verificare che si comporta come un punto fisso attrattivo, e compare un'orbita periodica di periodo 2 attrattiva.

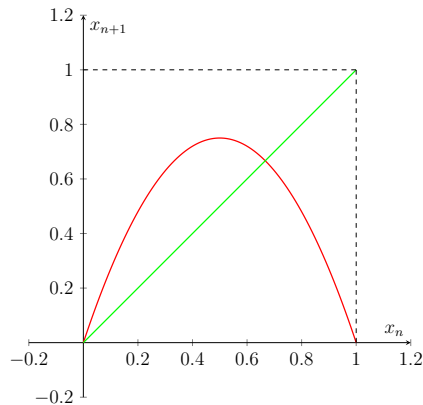


Figura 2.13: Grafico di  $L_r(x)$  per  $r = 3$

Gli insiemi stabili sono  $W^s(p_s) = \{0\}$ ,  $W^s(p_d) = ]0, 1[$  e  $W^s(\infty) = ]0, -\infty[ \cup ]1, \infty[$



**Caso  $3 < r \lesssim 3.45$ :**  $p_s$  e  $p_r$  sono entrambi repulsivi tuttavia l'insieme stabile di  $P_s$  è ancora  $\{0, 1\}$  e la maggior parte dei punti in  $(0, 1)$  appartiene all'insieme stabile dell'orbita attrattiva di periodo 2;

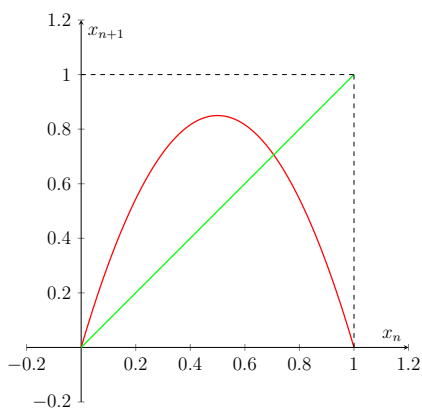


Figura 2.14: Grafico di  $L_r(x)$  con  $3 < r \lesssim 3.45$

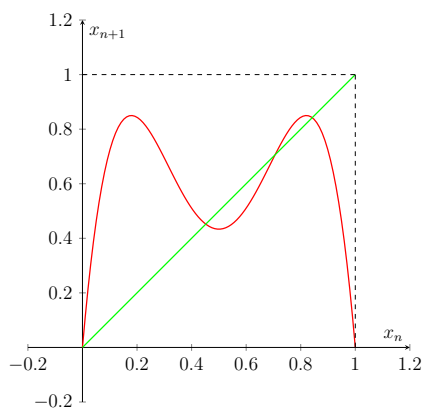


Figura 2.15: Grafico di  $L_r^2(x)$  con  $3 < r \lesssim 3.45$

**Caso  $r \approx 3.45$ :** c'è un altro raddoppio del periodo e l'orbita attrattiva di periodo 2 diventa repulsiva e nasce un'orbita di periodo 4 attrattiva;

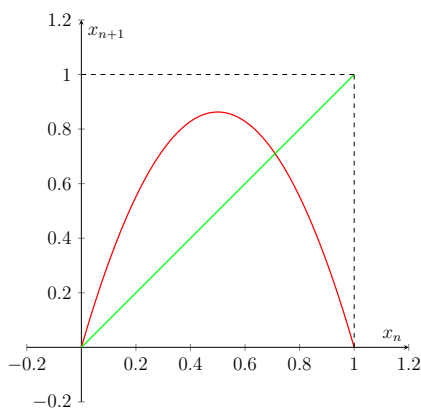


Figura 2.16: Grafico di  $L_r(x)$  per  $r \approx 3.45$

**Caso  $3.45 < r \leq 4$ :** è denso di cambiamenti, ci sono continue biforcazioni a raddoppio del periodo.

**Caso  $r > 4$ :** il punto  $p_m = 1/2$  è *asintotico forward* a infinito, poichè  $f_r(1/2) > 1$ . Inoltre, poichè  $f_r(0) = f_r(1) = 0$ , per il teorema del valore intermedio esistono  $x_1 \in$

$]0, 1/2[$  e  $x_2 \in ]1/2, 1[$  tali che  $f_r^2(x_1) = f_r^2(x_2) = 0$ , ossia  $x_1$  e  $x_2$  sono eventualmente fissi da  $f$ .

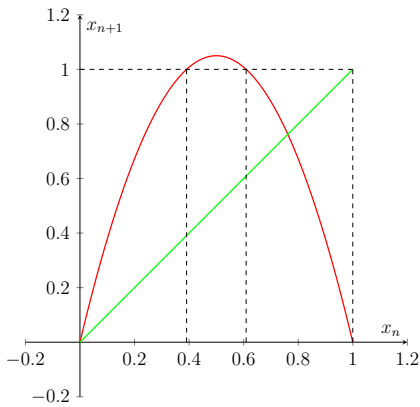


Figura 2.17: Grafico di  $L_r(x)$  con  $r = 4.2$

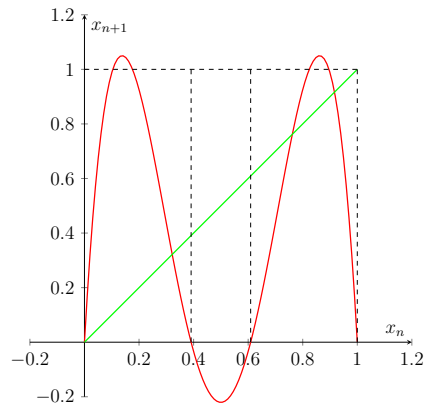


Figura 2.18: Grafico di  $L_r^2(x)$  con  $r = 4.2$

Tutte le proprietà elencate finora sono semplicemente riassunte nel diagramma di biforcazione della mappa logistica<sup>2</sup> in fig.2.19.

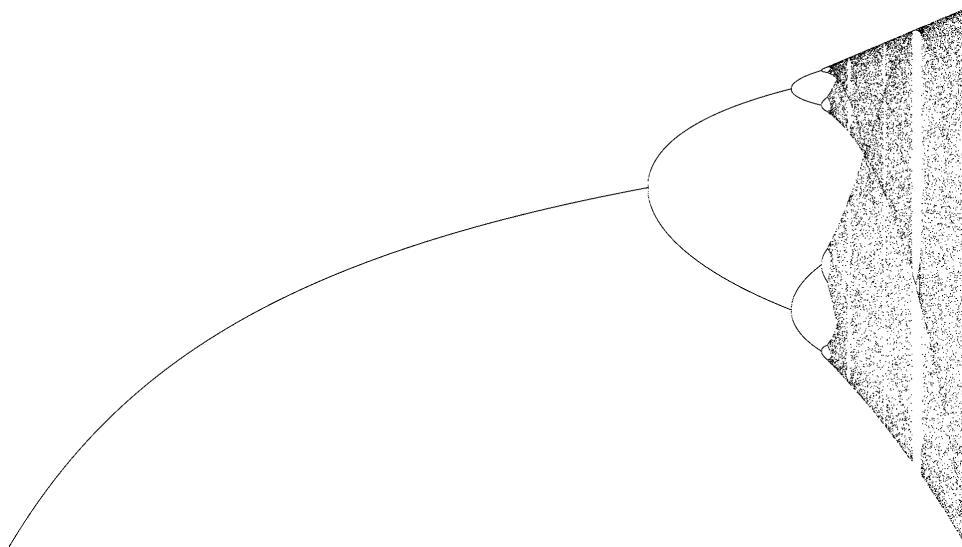


Figura 2.19: Diagramma di biforcazione della mappa logistica, con valori di  $0 < r < 4$ .

Per continuare lo studio della mappa logistica per valori del parametro maggiori di 4 c'è la necessità di introdurre alcuni concetti come il caos e l'insieme di Cantor, che faremo nella prossima sezione.

<sup>2</sup>Il codice in C++ per realizzare il diagramma in fig.2.19 si trova in appendice A.1.

## 2.2 Caos e dinamica simbolica

Dalla sezione precedente, è emerso come il comportamento della mappa logistica per valori di  $r > 4$  risulti in un certo senso *caotico*. Tornando allo studio della mappa logistica per valori di  $r > 4$ , possiamo osservare un fenomeno particolarmente interessante (fig.2.20):

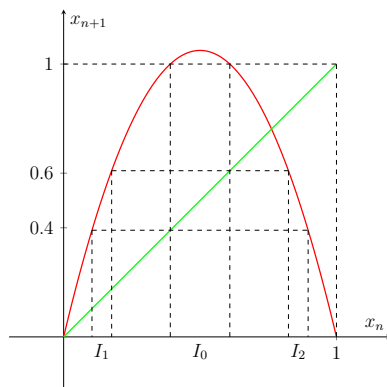


Figura 2.20: Grafico di  $L_r(x)$  per  $r > 4$ .

In particolare, si nota che esistono due intervalli, indicati come  $I_1$  e  $I_2$ , tali che, dopo una iterazione della mappa, i punti di questi intervalli vengono mappati all'interno di un altro intervallo  $I_0$ . I punti appartenenti a quest'ultimo intervallo sono inclusi nell'insieme stabile di  $-\infty$ , in quanto, osservando l'evoluzione della mappa, risulta che, dopo la prima iterazione, un punto in  $I_0$  assume un valore *maggiore* di 1. Da un punto di vista alternativo, possiamo affermare che l'intervallo  $I_0$  è l'immagine dei due intervalli  $I_1$  e  $I_2$ .

Un'analisi più approfondita rivela che anche gli intervalli  $I_1$  e  $I_2$  sono, a loro volta, immagine di altri due intervalli ciascuno. Questo porta alla scoperta di 4 insiemi di punti che, dopo due iterazioni della mappa logistica, assumono valori maggiori di 1.

Iterando questo ragionamento, possiamo dedurre che, per ogni iterazione  $n$ , esistono  $2^n$  intervalli disgiunti i cui punti non appartengono più all'intervallo  $[0, 1]$  dopo  $n$  iterazioni della mappa logistica. Definiamo l'insieme dei punti che, dopo la  $n$ -esima iterazione della mappa logistica, si trovano ancora nell'intervallo  $[0, 1]$ .

**Definizione 2.2.1.** *L'insieme dei punti che dopo  $n$  iterazioni restano all'interno di  $[0, 1]$  è definito come*

$$\Lambda_n = \{x \in [0, 1] \mid L_r^n(x) \in [0, 1]\}$$

Per esempio, l'insieme  $\Lambda_1 = I_0 \cup I_1$ . In generale, l'insieme  $\Lambda_n$  è costituito dall'unione di  $2^n$  intervalli disgiunti.

Inoltre, l'intersezione di tutti questi insiemi rappresenta l'insieme dei punti che non escono mai dall'intervallo  $[0, 1]$ :

**Definizione 2.2.2.** *L'insieme dei punti che rimane in  $[0, 1]$  dopo infinite iterazioni della mappa è denominato  $\Lambda$ , ed è dato dall'intersezione di tutti gli insiemi  $\Lambda_n$ :*

$$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda_n.$$

Il nostro obiettivo è ora comprendere meglio la natura dell'insieme  $\Lambda$ , ovvero l'insieme dei punti che non divergono. A tal proposito, esiste una proposizione fondamentale che riportiamo di seguito per una prima caratterizzazione di  $\Lambda$ .

**Proposizione 2.2.1** (Caratterizzazione dell'insieme *Lambda*). *Sia data la mappa logistica  $L_r(x) = rx(1 - x)$  con  $r > 4$  allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *L'insieme dei numeri reali  $x \in [0, 1]$  che dopo l'applicazione di  $L_r(x)$  non è più in  $[0, 1]$  è l'intervallo*

$$\left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right)$$

*Inoltre,*

$$\Lambda_1 = \left[ 0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r} \right] \cup \left[ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2 - 4r}}{2r}, 1 \right]$$

2. *L'insieme  $\Lambda_n$  consiste di  $2^n$  intervalli chiusi  $\forall n \in \mathbb{N}$*
3. *Se  $I$  è uno degli insiemi costituenti  $\Lambda_n$ , allora  $L_r : I \rightarrow [0, 1]$  è iniettiva e suriettiva.*

Come prima osservazione, notiamo che la costruzione dell'insieme  $\Lambda$ , che implica la continua rimozione di  $2^n$  insiemi, rappresenta un esempio della costruzione di un *insieme di Cantor*.

**Definizione 2.2.3** (Insieme di Cantor). *Un insieme non vuoto  $\Gamma \subset \mathbb{R}$  è un insieme di Cantor se:*

1.  *$\Gamma$  è compatto (quindi chiuso e limitato);*
2.  *$\Gamma$  è totalmente disconnesso (non contiene intervalli);*
3. *Ogni punto in  $\Gamma$  è un punto di accumulazione di  $\Gamma$  (un insieme con questa proprietà, quando è anche chiuso, è detto **perfetto**).*

Un esempio classico di insieme di Cantor è l'*insieme di Cantor del terzo centrale*. Si costruisce prendendo un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$ , che per semplicità possiamo assumere come  $I = [0, 1]$ , dividendolo in tre parti uguali e rimuovendo il *terzo centrale*. Successivamente, si ripete il processo per i due intervalli rimanenti, dividendo ciascuno in tre parti uguali e

rimuovendo nuovamente il terzo centrale. Iterando questo procedimento indefinitamente, si ottiene l'insieme di Cantor del terzo centrale (si veda fig. 2.21).

Formalmente, sia  $\Gamma_0$  l'intervallo iniziale. All'iterazione successiva si ottiene l'insieme

$$\Gamma_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

che è l'unione disgiunta di due intervalli chiusi e limitati, ottenuti rimuovendo il terzo centrale da  $\Gamma_0$ . Alla seconda iterazione, si ha:

$$\Gamma_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

ossia l'unione di quattro intervalli disgiunti, ottenuti rimuovendo il terzo centrale da ciascuno dei due intervalli di  $\Gamma_1$ . Alla terza iterazione si ottiene:

$$\Gamma_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right],$$

che è formato dall'unione di otto intervalli chiusi e limitati. Continuando all'infinito, si ottiene l'insieme di Cantor del terzo centrale come:

$$\Gamma = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Gamma_n.$$

Questo è un caso particolare di un insieme di Cantor  $\alpha$ -centrale, costruito dividendo un segmento in  $\alpha$  parti e rimuovendo la parte centrale.

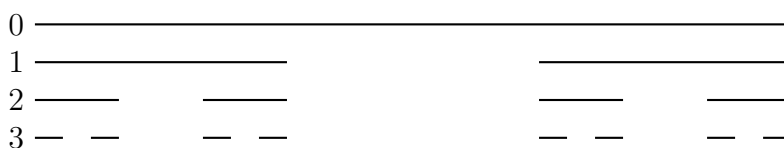


Figura 2.21: Costruzione dell'insieme di Cantor del terzo centrale per 3 iterazioni

Si può dimostrare la seguente proposizione relativa agli insiemi di Cantor  $\alpha$ -centrali.

**Proposizione 2.2.2.** *Se  $\Gamma_n$  è definito come nell'esempio precedente, esistono  $2^n$  intervalli chiusi in  $\Gamma_n$ , e la lunghezza di ciascun intervallo è  $(\frac{1-\alpha}{2})^n$ .*

*Inoltre, la lunghezza totale dell'insieme  $\Gamma_n$  è  $(1 - \alpha)^n$ , che tende a 0 per  $n \rightarrow \infty$ .*

Infine, enunciamo il seguente teorema che giustifica il nome "insieme di Cantor" per l'esempio descritto:

**Teorema 2.2.1.** *L'insieme di Cantor  $\alpha$ -centrale è un insieme di Cantor.*

Come avevamo anticipato, la costruzione dell'insieme di Cantor del terzo centrale è del tutto analoga a quella dell'insieme  $\Lambda$  nella mappa logistica. È possibile dimostrare che l'insieme  $\Lambda$ , definito in 2.2.2, ha la *stessa topologia* dell'insieme di Cantor del terzo centrale  $\Gamma$ , ovvero i due insiemi sono *omeomorfi*.

**Definizione 2.2.4** (Omeomorfismo). *Una funzione continua, biettiva e con inversa continua è detta omeomorfismo. In tal caso, dominio e codominio sono omeomorfi.*

**Proposizione 2.2.3.** *L'insieme  $\Lambda$  è omeomorfo all'insieme di Cantor  $\Gamma$ .*

Un fatto controintuitivo è che l'insieme di Cantor del terzo centrale non contiene solo gli estremi degli intervalli rimanenti, come si potrebbe pensare, ma un numero infinito di punti. In particolare:

**Proposizione 2.2.4.** *L'insieme di Cantor del terzo centrale è **non numerabile**, ovvero ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri reali  $\mathbb{R}$ .*

Questa proposizione si dimostra tramite un'analisi alternativa dell'insieme  $\Gamma$ , associando a ciascun punto una sequenza di lettere,  $L$  o  $R$ , a seconda di dove si trova dopo ogni iterazione. Se un punto si trova a sinistra del terzo centrale, si associa una  $L$ , mentre se è a destra si associa una  $R$ . Ad esempio, il punto all'estrema sinistra ha la sequenza  $LLLL\dots$ , mentre al punto  $1/3$  è associata la stringa  $LRRR\dots$ , poiché inizia a sinistra e, dopo la prima iterazione, si trova a destra.

La dimostrazione allora è analoga alla famosa dimostrazione della non contabilità dei numeri reali, ossia tramite l'*argomento diagonale di Cantor*:

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\Gamma$  sia numerabile. Questo significa che possiamo associare ogni punto in  $\Gamma$  con un numero naturale nel modo specificato sopra, ad esempio:

|   |   |               |
|---|---|---------------|
| 1 | : | $LLLL\dots$   |
| 2 | : | $RRRR\dots$   |
| 3 | : | $LRLR\dots$   |
| 4 | : | $RLRL\dots$   |
| 5 | : | $LRRLRR\dots$ |

e così via. Ma ora consideriamo l'indirizzo il cui primo elemento è l'opposto del primo elemento della sequenza 1, il cui secondo elemento è l'opposto del secondo elemento della sequenza 2, e così via. Questa è una nuova sequenza di  $L$  e  $R$  (che, nell'esempio sopra, inizia con  $RLRRL\dots$ ). Abbiamo quindi creato una sequenza di  $L$  e  $R$  che differisce nel punto  $n$  rispetto alla sequenza  $n$ -esima della nostra lista. Quindi questa sequenza non è nella nostra lista e così abbiamo fallito nella costruzione di una corrispondenza biunivoca con i numeri naturali. Questa contraddizione stabilisce il risultato. □

Si potrebbe rifare ora la stessa argomentazione ma con un procedimento diverso, ossia associando 0 e 2 invece di  $L$  e  $R$  rispettivamente. Questo procedimento è simile al precedente ma permette di esprimere i punti in  $\Gamma$  tramite l'*espansione ternaria*.

Tramite questa espansione è, inoltre, possibile dimostrare la seguente proposizione

**Proposizione 2.2.5.** *L'insieme di Cantor  $\Gamma$  ha lunghezza 0.*

Fatto che però non è vero per l'insieme di Cantor del quinto centrale, che ha lunghezza non nulla ma è comunque omeomorfo  $\Gamma$ .

Come ultimo fatto sull'insieme di Cantor, si noti che l'insieme di Cantor è un esempio di *frattale* poiché è autosimilare, ossia è omeomorfo a se stesso.

Tornando ora allo studio della mappa logistica, enunciamo di seguito alcuni importanti risultati. È possibile dimostrare che l'insieme  $\Lambda$ , per valori del parametro  $r > 4$ , è un insieme di Cantor.

**Teorema 2.2.2.** *Se  $r > 4$  allora l'insieme  $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Lambda_n$  è un insieme di Cantor.*

Tuttavia non sappiamo ancora quale sia la dinamica della mappa logistica su tale insieme, anche se si è potuto intuire essere "caotica". Introduciamo allora alcuni concetti per poter dare una definizione più rigorosa di *caos*.

**Proposizione 2.2.6.** *Ogni punto in  $\Lambda$  è un punto di accumulazione per  $\Lambda$ , cioè  $\forall x \in \Lambda$  è sempre possibile trovare un intorno di  $x$  contenente un elemento di  $\Lambda$  diverso da  $x$ .*

**Definizione 2.2.5** (Funzione topologicamente transitiva). *Una funzione  $f : D \rightarrow D$  è detta topologicamente transitiva su  $D$  se, per ogni coppia di insiemi aperti non vuoti  $U$  e  $V$  che intersecano  $D$ , esistono un punto  $z \in U \cap D$  e un intero positivo  $n$  tale che  $f^n(z) \in V$ .*

*In modo equivalente,  $f$  è topologicamente transitiva su  $D$  se, per ogni coppia di punti  $x, y \in D$  e per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un punto  $z \in D$  e un intero  $n$  tale che  $|x - z| < \epsilon$  e  $|f^n(z) - y| < \epsilon$ .*

**Proposizione 2.2.7.** *Se  $r > 4$ , la mappa logistica  $L_r(x) = rx(1 - x)$  è topologicamente transitiva su  $\Lambda$ .*

La definizione di funzione topologicamente transitiva implica che una funzione con tale proprietà ha la capacità di "trasportare" un punto da un insieme a un altro dopo un certo numero di iterazioni. In altre parole, ogni punto nell'insieme può essere mappato vicino a qualsiasi altro punto dopo un numero finito di iterazioni, facendo sì che la funzione *mescoli* efficacemente tutti i punti dell'insieme.

**Definizione 2.2.6** (Dipendenza critica dalle condizioni iniziali). *Una funzione  $f : D \rightarrow D$  mostra dipendenza critica dalle condizioni iniziali se esiste un  $\delta > 0$  tale che, per ogni  $x \in D$  e per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $y \in D$  tale che, se  $|x - y| < \epsilon$ , allora  $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$  per qualche  $n > 0$ .*

In termini semplici, se si applica iterativamente una funzione che possiede dipendenza critica dalle condizioni iniziali su un insieme di punti, le traiettorie di questi punti tenderanno ad allontanarsi l'una dall'altra. Ciò significa che anche piccole variazioni nelle condizioni iniziali possono portare a risultati notevolmente diversi dopo un certo numero di iterazioni.

**Proposizione 2.2.8.** *La mappa logistica sull'insieme  $\Lambda$  con  $r > 4$  mostra un comportamento di dipendenza critica dalle condizioni iniziali.*

*Più precisamente,  $\forall x \in \Lambda$  e  $\forall \epsilon > 0$ ,  $\exists y \in \Lambda$  che soddisfa  $|x-y| < \epsilon$  e  $|L^n(x) - L^n(y)| > \frac{1}{2}$  per qualche  $n$ .*

Infine, enunciamo la definizione di mappa caotica secondo Devaney<sup>3</sup>.

**Definizione 2.2.7** (Mappa caotica). *Una funzione  $f : D \rightarrow D$  è detta caotica se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *I punti periodici di  $f$  sono densi in  $D$ ;*
2.  *$f$  è topologicamente transitiva su  $D$ ;*
3.  *$f$  mostra sensibilità alle condizioni iniziali.*

In altre parole, richiedere che una mappa sia caotica equivale a chiedere che possieda una certa regolarità e che "mescoli bene" l'insieme  $D$  su cui è definita. La regolarità è garantita dal fatto che, per ogni punto di  $D$ , è possibile trovare un'orbita periodica in un suo intorno arbitrariamente piccolo. La proprietà di "mescolare" deriva dalla transitività topologica della funzione  $f$ .

**Proposizione 2.2.9.** *Sia  $f : D \rightarrow D$ . Se  $f$  è topologicamente transitiva su  $D$ , allora o  $D$  è l'orbita di un singolo punto periodico, oppure  $D$  è infinito, ossia contiene infiniti elementi.*

**Proposizione 2.2.10.** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}$  un insieme infinito e  $f : D \rightarrow D$  una funzione continua. Se  $f$  è topologicamente transitiva su  $D$  e i punti periodici di  $f$  sono densi in  $D$ , allora  $f$  è caotica su  $D$ .*

Per dimostrare che la mappa logistica  $L_r(x) : \Lambda \rightarrow \Lambda$  è caotica, dobbiamo introdurre alcuni concetti preliminari.

**Definizione 2.2.8** (Funzioni topologicamente coniugate o equivalenti). *Siano  $f : D \rightarrow D$  e  $g : E \rightarrow E$  due funzioni, diciamo che  $f$  è topologicamente coniugata a  $g$  se esiste un omeomorfismo  $\tau : D \rightarrow E$  tale che  $\tau \circ f = g \circ \tau$ . In questo caso,  $\tau$  è detta coniugazione topologica.*

---

<sup>3</sup>Esistono diversi tentativi di definizione di caos. Questa definizione, introdotta per la prima volta da Robert L. Devaney nel suo libro *Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, è la più comunemente utilizzata.



In base a questa definizione, due funzioni  $f$  e  $g$  sono topologicamente equivalenti tramite  $\tau$  se "producono lo stesso risultato" indipendentemente dal "percorso" scelto, sia esso  $\tau \circ f \circ g \circ \tau$ , come illustrato in figura 2.22, poiché  $g(\tau(x)) = \tau(f(x))$ .

Prima di procedere oltre, riprendiamo il concetto di sistemi dinamici con dinamica equivalente, fornendone una definizione più precisa.

**Definizione 2.2.9.** *Siano  $(f, D)$  e  $(g, E)$  due sistemi dinamici discreti, si dice che essi manifestano una dinamica equivalente se esiste una coniugazione topologica tra  $f$  e  $g$ .*

In altre parole, due sistemi dinamici discreti hanno una dinamica equivalente se il "percorso" seguito per passare da uno all'altro è indifferente.

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f} & D \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\
 E & \xrightarrow{g} & E
 \end{array}
 \quad \text{oppure} \quad
 \begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{f} & f(x) \\
 \tau \downarrow & & \downarrow \tau \\
 \tau(x) & \xrightarrow{g} & g(\tau(x))
 \end{array}$$

Figura 2.22: Rappresentazione della coniugazione topologica

Esiste un importante risultato per le funzioni topologicamente equivalenti.

**Teorema 2.2.3.** *Siano  $D$  ed  $E$  sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ , e siano  $f : D \rightarrow D$ ,  $g : E \rightarrow E$ , e  $\tau : D \rightarrow E$  una coniugazione topologica tra  $f$  e  $g$ . Allora valgono le seguenti proprietà:*

- a)  $\tau^{-1} : E \rightarrow D$  è una coniugazione topologica,
- b)  $\tau \circ f^n = g^n \circ \tau$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,
- c) Un punto  $p$  è periodico per  $f$  se e solo se  $\tau(p)$  è periodico per  $g$ . Inoltre, i periodi primi di  $p$  e  $\tau(p)$  coincidono,
- d) Se  $p$  è un punto periodico di  $f$  con insieme stabile  $W^s(p)$ , allora l'insieme stabile di  $\tau(p)$  è  $\tau(W^s(p))$ ,
- e) I punti periodici di  $f$  sono densi in  $D$  se e solo se i punti periodici di  $g$  sono densi in  $E$ ,
- f)  $f$  è topologicamente transitiva su  $D$  se e solo se  $g$  è topologicamente transitiva su  $E$ ,
- g)  $f$  è caotica su  $D$  se e solo se  $g$  è caotica su  $E$ .

Tuttavia, la sensibilità alle condizioni iniziali *non è preservata* dalla coniugazione topologica. In ogni caso, se gli insiemi sono chiusi e limitati, l'implicazione rimane valida.

**Proposizione 2.2.11.** *Siano  $f : D \rightarrow D$  e  $g : E \rightarrow E$  due funzioni topologicamente equivalenti, con  $D$  ed  $E$  insiemi chiusi e limitati. Se  $f$  è caotica su  $D$ , allora anche  $g$  è caotica su  $E$ .*

La caoticità della mappa logistica per  $r \geq 4$  si dimostra applicando il teorema 2.2.3, trovando una coniugazione topologica tra la mappa logistica e una mappa la cui caoticità è nota. La mappa di riferimento è la cosiddetta *mappa a tenda*, definita come segue:

$$T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \mu - \mu x, & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (2.5)$$

o, in modo equivalente:

$$T_\mu(x) = \frac{\mu}{2} (1 - |2x - 1|). \quad (2.6)$$

Per  $r = 4$ , si può dimostrare che la mappa  $L_4(x)$  è topologicamente equivalente alla mappa  $T_2(x)$  tramite la coniugazione topologica  $\varphi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)^2$  ([6], p. 299), e quindi  $\varphi(x)$  è un omeomorfismo tale che  $\varphi \circ T_2 = L_4 \circ \varphi$ . Inoltre, è noto che la mappa  $T_2(x)$  è caotica su  $[0, 1]$ .

Per valori di  $r > 4$  bisogna usare valori di  $\mu > 2$ . Tuttavia  $T_\mu$  non mappa più  $[0, 1]$  in se stesso, ma alcuni punti, analogamente alla mappa  $L_r(x)$ , divergono all'infinito. Studiamo ora i punti che non divergono all'infinito. Sia  $\Upsilon_0 = [0, 1]$ . Allora i punti che vengono mappati in  $\Upsilon_0$  dopo un'iterazione sono  $\left(\frac{1}{\mu}\Upsilon_0\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\mu}\Upsilon_0\right)$ , e chiamiamo questo insieme

$$\Upsilon_1 = \left[0, \frac{1}{\mu}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\mu}, 1\right]. \quad (2.7)$$

Tutti i punti in  $\mathbb{R} \setminus \Upsilon_1$  divergono a infinito siccome tutti i punti in  $\left(\frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu}\right)$  sono mappati in  $\mathbb{R} \setminus [0, 1]$  dopo un iterazione.

Similmente, i punti che vengono mappati in  $\Upsilon_1$  dopo un iterazione sono dati da  $\left(\frac{1}{\mu}\Upsilon_1\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\mu}\Upsilon_1\right)$ , e chiamiamo questo insieme

$$\Upsilon_2 = \left[0, \frac{1}{\mu^2}\right] \cup \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}, \frac{1}{\mu}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\mu}, 1 - \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2}\right] \cup \left[1 - \frac{1}{\mu^2}, 1\right] \quad (2.8)$$

con ha la proprietà che i punti in esso rimangono in  $[0, 1]$  dopo due iterazioni. Procedendo induttivamente otteniamo l'insieme

$$\Upsilon_n = \left(\frac{1}{\mu}\Upsilon_{n-1}\right) \cup \left(1 - \frac{1}{\mu}\Upsilon_{n-1}\right) \quad (2.9)$$

con la proprietà che i punti in esso rimangono in esso rimangono in  $[0, 1]$  dopo  $n$  iterazioni. Infine, l'insieme di punti che rimangono in  $[0, 1]$  dopo infinite iterazioni è

$$\Upsilon = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Upsilon_n \quad (2.10)$$

La costruzione di questo insieme è del tutto analoga a quella dell'insieme di Cantor dell' $\alpha$ -centrale e della mappa logistica, infatti è possibile dimostrare che questo è un insieme di Cantor siccome è *perfetto*, tutti i suoi punti sono punti di accumulazione ed è totalmente disconnesso.

Per studiare, dunque, la mappa  $T_\mu$  per  $\mu > 2$  bisogna di nuovo fare uso del teorema 2.2.3 e trovare una mappa che sia topologicamente equivalente a essa e che sia caotica. La mappa in questione è la *shift map*, una mappa molto importante siccome funge da prototipo di mappa caotica, siccome spesso la caoticità di molte mappe si dimostra trovando una coniugazione topologica con essa.

### Dinamica simbolica

Sia, dunque,  $\Sigma_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$  l'insieme delle sequenze che prendono solo i valori 0 e 1, detto **spazio dei simboli**.

Sia  $I_0 = [0, \frac{1}{\mu}]$ ,  $I_1 = [1 - \frac{1}{\mu}, 1]$ .

**Definizione 2.2.10.** *Definiamo la **mappa itinerario***

$$\begin{aligned} \varphi: \Upsilon &\rightarrow \Sigma_2 \\ x &\mapsto x_n = j \text{ se } T_\mu^n(x) \in I_j \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ossia, a ciascun punto di  $\Upsilon$ , associa 0 se appartiene all'intervallo di "sinistra" ( $I_0$ ), o 1 se appartiene all'intervallo di "destra" ( $I_1$ ).

Allora  $\varphi$  è ben definita e  $T_\mu$  agisce su  $x_n$  come una semplice *traslazione* poichè mappa un punto in  $I_0$  in un punto in  $I_1$  e viceversa. Quindi, se introduciamo la shift map:

**Definizione 2.2.11.** *Definiamo la **shift map** come*

$$\begin{aligned} \sigma: \Sigma_2 &\rightarrow \Sigma_2 \\ (x_0, x_1, \dots) &\mapsto (x_1, x_2, \dots) \end{aligned} \quad (2.12)$$

si ha  $\sigma \circ \varphi = \varphi \circ T_\mu$ , ossia i sistemi dinamici  $(T_\mu, \Upsilon)$  e  $(\sigma, \Sigma_2)$  sono topologicamente equivalenti. Per poter dimostrare ciò, abbiamo bisogno di ulteriori definizioni.

Innanzitutto, dobbiamo assicurarci che  $(\sigma, \Sigma_2)$  sia un sistema dinamico. È necessario introdurre una **metrica** su  $\Sigma_2$ . Prenderemo la seguente:

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \quad (2.13)$$

Notiamo che due punti nello spazio dei simboli si dicono *vicini* quanto più simboli iniziali hanno in comune, per esempio, il punto  $s = (s_0, s_1, \dots, s_i, \dots, s_n)$  è più vicino al punto  $t = (s_0, s_1, \dots, s_i, \dots, t_n)$  rispetto al punto  $k = (s_0, s_1, \dots, s_{i-1}, k_i, \dots, k_n)$ . Inoltre, la distanza massima tra due punti  $x$  e  $y$  è 2, poichè significherebbe che hanno tutte le cifre diverse e quindi

$$d[x, y] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{1}{2^n} = 2$$

**Proposizione 2.2.12.** *L'insieme  $\Sigma_2$  con la metrica  $d$  definita sopra è uno spazio metrico.*

Successivamente, con queste nozioni, è possibile dimostrare che  $\sigma$  è continua e che  $\varphi$  è un omeomorfismo, infatti ciò porta alla seguente proposizione.

**Proposizione 2.2.13.** *I due sistemi dinamici  $(T_\mu, \Upsilon)$  e  $(\sigma, \Sigma_2)$  sono topologicamente equivalenti tramite la coniugazione  $\varphi : \Upsilon \rightarrow \Sigma_2$ .*

**Osservazione.** *I concetti per gli spazi metrici sono del tutto analoghi a quelli per le funzioni di variabile reale, con l'unica accortezza di sostituire la distanza in  $\mathbb{R}$  con la distanza per gli spazi metrici  $d[x, y]$ . Di conseguenza troviamo che la quasi totalità dei teoremi e definizioni sono del tutto analoghi e quindi non stiamo a riscriverli.*

**Proposizione 2.2.14** (Caratterizzazione della shift map). *La shift map gode delle seguenti proprietà:*

- a) *L'insieme dei punti periodici della shift map è denso in  $\Sigma_2$ .*
- b) *La shift map ha  $2^n$  punti periodici di periodo  $n$ .*
- c) *L'insieme dei punti eventualmente periodici della shift map che non sono periodici è denso in  $\Sigma_2$ .*
- d) *Esiste un elemento di  $\Sigma_2$  la cui orbita è densa in  $\Sigma_2$ . Cioè, esiste  $s^*$  in  $\Sigma_2$  tale che l'insieme  $\{s^*, \sigma(s^*), \sigma^2(s^*), \sigma^3(s^*), \dots\}$  è denso in  $\Sigma_2$ .*
- e) *L'insieme dei punti che non è né periodico né eventualmente periodico è denso in  $\Sigma_2$ .*

Nel seguente teorema mostriamo che dai punti a) e d) della proposizione 2.2.14 possiamo dedurre che la shift map è topologicamente transitiva

**Proposizione 2.2.15.** *Sia  $(D, d)$  uno spazio metrico e  $f : D \rightarrow D$ . Se i punti periodici di  $f$  sono densi in  $D$  e c'è un punto la cui orbita sotto iterazione di  $f$  è densa in  $D$ , allora  $f$  è topologicamente transitiva in  $D$ .*

Si osserva dalle proposizioni 2.2.14, 2.2.15 e l'analogo per gli spazi metrici della proposizione 2.2.10 è possibile implicare che la shift map mostra una *dipendenza critica dalle condizioni iniziali*, come asserisce la seguente

**Proposizione 2.2.16.** *Sia  $s \in \Sigma_2$  e  $\epsilon > 0$ . Allora esiste un  $t \in \Sigma_2$  e un  $N$  tale che  $d[s, t] < \epsilon$  e  $d[f^n(s), f^n(t)] = 2$  per  $n > N$ .*

Come conseguenza immediata abbiamo che la shift map è dunque caotica

**Corollario 2.2.3.1.** *La shift map  $\sigma$  è caotica su  $\Sigma_2$ .*

*Dimostrazione.* Dal punto a) della proposizione 2.2.14 sappiamo che i punti periodici di  $\sigma$  sono densi su  $\Sigma_2$ . Dai punti a) e d) della proposizione 2.2.14 e dalla proposizione 2.2.15 sappiamo che  $\sigma$  è topologicamente transitiva su  $\Sigma_2$ . Infine, dalla proposizione 2.2.16 sappiamo che  $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$  ha una dipendenza critica dalle condizioni iniziali. Quindi,  $\sigma$  è caotica su  $\Sigma_2$ .  $\square$

Per concludere, definiamo la mappa  $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  e gli insiemi  $I_0 = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}\right]$  e  $I_1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{r^2-4r}}{2r}, 1\right]$ , ossia gli intervalli che formano l'insieme  $\Lambda_1$  della mappa logistica. Poichè  $\Lambda$  è incluso in  $\Lambda_1$ , significa che è incluso in  $I_0 \cup I_1$ . Quindi, per ogni  $x \in \Lambda$  assegniamo la sequenza  $\psi(x) = s_0s_1s_2\dots$  appartenente a  $\Sigma_2$  in modo tale che per ogni  $n$ ,  $s_n = 0$  se e solo se  $L^n(x) \in I_0$  e  $s_n = 1$  se e solo se  $L^n(x) \in I_1$ . Possiamo pensare la mappa  $\psi$  come una mappa itinerario. Allora

**Proposizione 2.2.17.** *La mappa  $\psi : \Lambda \rightarrow \Sigma_2$  è una coniugazione topologica, quindi:*

1. è un omeomorfismo;
2.  $\psi \circ L = \sigma \circ \psi$ .

**Corollario 2.2.3.2.** *La mappa logistica  $L_r(x) = rx(1-x)$  è caotica su  $\Lambda$ .*

# Capitolo 3

## Cenni sulla dinamica olomorfa e sui frattali

### 3.1 Introduzione ai Frattali

I frattali sono figure geometriche che possiedono una struttura auto-similare a tutte le scale di ingrandimento, ed emergono naturalmente nello studio di sistemi dinamici caotici. L'idea di frattale è stata introdotta da **Benoît Mandelbrot** nel 1975 per descrivere fenomeni naturali e matematici che mostrano irregolarità a tutte le scale. I frattali sono presenti in molte forme in natura, come le coste, le montagne e le nuvole. Matematicamente, un frattale può essere definito come un insieme le cui dimensioni di Hausdorff (o dimensioni frattali) sono maggiori della sua dimensione topologica.

Un aspetto cruciale dei frattali è la loro connessione con la teoria dei sistemi dinamici discreti, in particolare quando questi ultimi mostrano comportamenti non lineari e complessi.

In molti casi, l'iterazione di una mappa discreta, come la mappa logistica o la mappa quadratica  $f_c(z)z^2 + c$ , porta a risultati che possono essere rappresentati graficamente da insiemi frattali, come gli insiemi di Mandelbrot e di Julia.

La loro complessità non è soltanto una curiosità matematica, ma riflette anche la sensibilità alle condizioni iniziali tipica dei sistemi caotici, dove minime variazioni nello stato iniziale portano a traiettorie completamente diverse.

Dal punto di vista della fisica, i frattali e i sistemi dinamici caotici forniscono un quadro per descrivere fenomeni naturali complessi, come la crescita delle piante, la distribuzione delle galassie o la turbolenza nei fluidi. In questi contesti, l'auto-similarità frattale riflette l'invarianza delle leggi fisiche a diverse scale.

**Autosimilarità** L'autosimilarità è la proprietà principale dei frattali. Essa implica che un oggetto frattale è costituito da sottostrutture che, a un livello inferiore di ingran-

dimento, appaiono simili (o addirittura identiche) all'intero. Formalmente, un oggetto  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  si dice **autosimilare** se esistono trasformazioni omotetiche  $T_i$  tali che:

$$F = \bigcup_{i=1}^N T_i(F)$$

dove le trasformazioni  $T_i$  sono omotetie (o in alcuni casi più generali, similitudini) che comprimono l'insieme originale.

Un classico esempio già incontrato è *l'insieme di Cantor dell' $\alpha$ -centrale*, che può essere costruito iterativamente rimuovendo la parte centrale di un segmento e ripetendo l'operazione sulle parti rimanenti. Questo insieme è autosimilare poiché, a ogni iterazione, si ottengono due copie ridotte dell'insieme precedente.

### Dimensione Frattale

La **dimensione frattale** è una misura di quanto un frattale "riempie" lo spazio. Diversamente dalle figure geometriche tradizionali, come linee, superfici e volumi, i frattali possono avere dimensioni non intere. La dimensione frattale più comune è la **dimensione di Hausdorff**.

La dimensione di Hausdorff  $D_H$  di un insieme  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  è definita come:

$$D_H = \inf \{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(F) = 0\}$$

dove  $\mathcal{H}^d(F)$  è la misura di Hausdorff  $\alpha$ -dimensionale dell'insieme  $F$  definita come

$$\mathcal{H}^s(A) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}(U_i)^s \mid A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \text{diam}(U_i) < \delta \right\}$$

La dimensione di Hausdorff ( $D_H$ ) di un frattale perfettamente autosimilare è calcolata utilizzando la formula:

$$D_H = \frac{\log(N)}{\log(r)}$$

dove:

- $N$  è il numero di parti in cui l'insieme è diviso,
- $r$  è il fattore di riduzione della lunghezza (o scala) per ciascuna parte.

### Insieme di Cantor

L'insieme di Cantor dell' $\alpha$ -medio è creato dividendo un segmento in tre parti e rimuovendo la parte centrale. Ogni volta che si esegue questa operazione, si ottengono due segmenti (quindi  $N = 2$ ) e la lunghezza di ogni segmento è un terzo di quello precedente (quindi  $r = 3$ ).

La dimensione è quindi calcolata come:

$$D_H = \frac{\log(2)}{\log(3)} \approx 0.63$$

### Curva di Koch

La curva di Koch è una figura creata dividendo un segmento iniziale in tre parti uguali, rimuovendo quello centrale e rimpiazzandolo con un triangolo equilatero (senza base). Ottenendo quindi quattro segmenti partendo da uno solo, quindi  $N = 4$  e  $r = 3$ .

La dimensione frattale, nel caso di sistemi *esattamente* autosimilari, è calcolata come:

$$D_H = \frac{\log(4)}{\log(3)} \approx 1.26$$

### Dinamica dei Frattali: Insieme di Mandelbrot e insiemi di Julia

Il frattale più celebre è l'**insieme di Mandelbrot**, che emerge dallo studio delle iterazioni della funzione quadratica complessa:

$$f_c(z) = z^2 + c$$

dove  $c \in \mathbb{C}$  è un parametro complesso e  $z \in \mathbb{C}$  rappresenta il punto iniziale dell'iterazione.

L'insieme di Mandelbrot  $\mathcal{M}$  è definito come l'insieme dei valori di  $c$  per i quali l'iterazione della funzione  $f_c(z)$  a partire da  $z = 0$  rimane limitata. Formalmente:

$$\mathcal{M} = \left\{ c \in \mathbb{C} : \sup_n |f_c^n(0)| < \infty \right\}$$

L'insieme di Mandelbrot è autosimilare e presenta una struttura frattale infinita, con intricate "isole" e sottoinsiemi collegati all'insieme di Julia, un altro tipo di frattale.

L'**insieme di Julia** si ottiene studiando l'iterazione della funzione  $f_c(z) = z^2 + c$  per valori fissi di  $c$ , al variare di  $z$ . Gli insiemi di Julia possono essere **connessi** o **disconnessi**, a seconda del valore di  $c$ . L'insieme di Julia è definito come l'insieme dei punti  $z_0$  per cui l'iterazione della funzione  $f_c(z_0)$  non diverge.

Il collegamento tra l'insieme di Mandelbrot e gli insiemi di Julia sta nel fatto che se  $c$  appartiene all'insieme di Mandelbrot, l'insieme di Julia *corrispondente* sarà connesso; altrimenti sarà disconnesso, formando un insieme omeomorfo a un insieme di Cantor, detto informalmente *polvere frattale*.



## 3.2 Dinamica olomorfa e frattali

In questa sezione analizziamo la dinamica delle funzioni complesse, con particolare attenzione alle funzioni olomorfe.

**Definizione 3.2.1** (Funzione olomorfa). *Una funzione complessa di variabile complessa  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  si dice olomorfa se è differenziabile in senso complesso in ogni punto del suo dominio. In altre parole, se esiste il limite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \quad \forall z_0 \in U.$$

**Definizione 3.2.2** (Funzione analitica). *Una funzione  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  si dice analitica su  $U$  se, per ogni punto  $z_0 \in U$ ,  $f(z)$  è sviluppabile in una serie di potenze di  $(z - z_0)$ . Cioè, esistono un numero reale positivo  $\rho(z_0)$  e una serie di potenze con raggio di convergenza  $\rho(z_0)$  tali che:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{per } |z - z_0| < \rho(z_0).$$

**Proposizione 3.2.1.** *Ogni funzione olomorfa definita su un aperto  $U$  è anche analitica. Viceversa, ogni funzione analitica su  $U$  è olomorfa.*

I concetti relativi alle funzioni reali, come i punti fissi, i punti periodici e le orbite, così come i vari teoremi e proposizioni esposti nei capitoli precedente, si possono estendere in maniera naturale al caso delle funzioni complesse.

### Dinamica di alcune funzioni complesse

Consideriamo innanzitutto la dinamica della funzione  $f(z) = az$ , con  $a \in \mathbb{C}$  e  $|a| \neq 1$ . L'unico punto fisso di questa funzione è  $z = 0$ . Studiamo ora la dinamica per i punti  $z \neq 0$ .

In generale, l'iterata  $n$ -esima della funzione è data da:

$$f^n(z_0) = a^n z_0.$$

Riscrivendo  $a$  e  $z_0$  in forma esponenziale, ossia  $a = |a|e^{i\theta}$  e  $z_0 = |z_0|e^{i\arg(z_0)}$ , otteniamo:

$$a^n = |a|^n e^{in\theta},$$

così che l'espressione per l'iterata diventa:

$$f^n(z) = |a|^n |z_0| e^{i(n\theta + \arg(z_0))}.$$

Osserviamo che il modulo di  $f^n(z_0)$  dipende prevalentemente dal valore di  $|a|$ . In particolare:

- Se  $|a| < 1$ , abbiamo  $|f^n(z_0)| < 1$ , quindi l'orbita di  $z_0$  converge a 0.
- Se  $|a| > 1$ , abbiamo  $|f^n(z_0)| > 1$ , e l'orbita diverge a infinito.

Per quanto riguarda l'argomento, abbiamo:

$$\arg(f^n(z_0)) = \arg(z_0) + n\theta,$$

ossia, a ogni iterazione, l'argomento di  $a$  viene aggiunto a quello del punto  $z_0$ , facendo sì che  $z_0$  ruoti attorno all'origine.

Combinando questi due comportamenti, concludiamo che l'orbita di  $z_0$  descrive una spirale verso l'origine quando  $|a| < 1$ , o verso l'infinito se  $|a| > 1$  (si veda la figura 3.1).

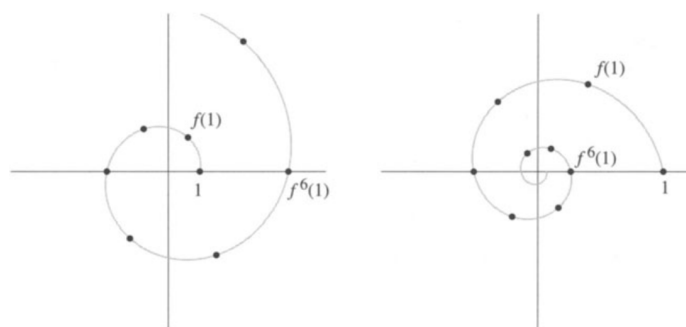


Figura 3.1: Orbita del punto  $z_0 = 1$  sotto iterazione della funzione  $f(z) = az$  con  $|a| < 1$  a destra e  $|a| > 1$  a sinistra. Immagine presa da [3], pag. 175.

Passiamo ora allo studio della dinamica della funzione  $f(z) = z^2$ , con un procedimento simile al caso precedente. Riportiamo tuttavia solo i punti fondamentali.

Un aspetto interessante del comportamento di questa funzione è che, se  $|z_0| = 1$ , allora  $|f^n(z_0)| = 1$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , quindi i punti sulla circonferenza unitaria vengono mappati su altri punti della stessa circonferenza.

D'altra parte, se  $|z_0| < 1$ , si ha  $|f^n(z_0)| < 1$ , e dunque l'orbita di  $z_0$  appartiene all'insieme stabile  $W^s(0)$ . Al contrario, se  $|z_0| > 1$ ,  $z_0$  appartiene all'insieme stabile  $W^s(\infty)$ .

In altre parole, la circonferenza unitaria funge da confine tra l'insieme dei punti che convergono a 0 e quelli che divergono verso infinito (si veda la figura 3.2).

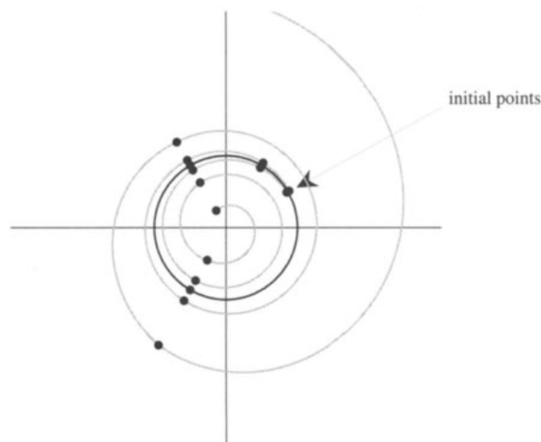


Figura 3.2: Orbita dei punti  $0.98e^{i\pi/6}$ ,  $e^{i\pi/6}$  e  $1.02e^{i\pi/6}$  sotto iterazione della funzione  $f(z) = z^2$ . Immagine tratta da [3], pag. 179.

La circonferenza nel piano complesso rappresenta un esempio di *insieme di Julia* per la funzione  $f(z) = z^2$ .

**Definizione 3.2.3** (Insieme di Julia, riempimento e complementare). *L'insieme di Julia di una funzione  $f$ , indicato con  $J(f)$ , è il confine tra i punti nel piano complesso che manifestano comportamenti differenti sotto iterazioni successive della funzione  $f$ . In altre parole, è l'insieme dei punti che mostrano sensibilità alle condizioni iniziali.*

*Il riempimento dell'insieme di Julia di  $f$ , indicato con  $K(f)$ , è l'insieme dei punti che non divergono, ossia che hanno un'orbita limitata (si veda la figura 3.4 o 3.5).*

*Il complementare del riempimento dell'insieme di Julia è detto insieme di Fatou, indicato con  $F(f)$ , ed è definito come l'insieme dei punti con comportamento regolare.*

*Dunque, si ha che:*

$$J(f) = \partial K(f) = \partial F(f).$$

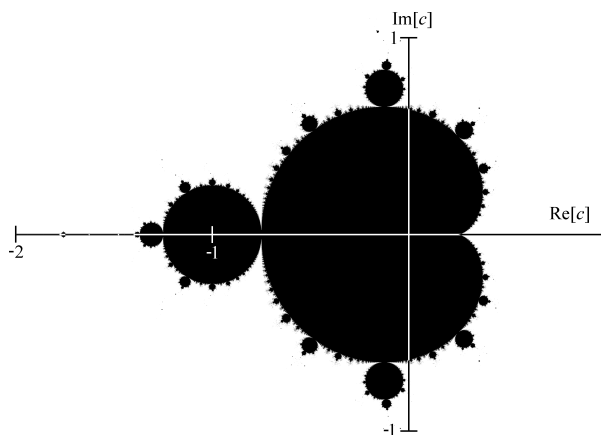


Figura 3.3: Insieme di Mandelbrot  $\mathcal{M}$ . Immagine presa da [Wikipedia](#).

Come ultimo caso, studiamo la funzione più importante nella dinamica complessa, la famosa *mappa di Mandelbrot*, definita come:

$$M_c(z) = z^2 + c \quad c \in \mathbb{C}.$$

Questa funzione rappresenta una delle espressioni più classiche della dinamica olomorfa e riveste un ruolo centrale nello studio degli insiemi di Julia e di Mandelbrot. Nel caso della mappa quadratica  $M_c(z)$ , il piano complesso viene diviso in punti che divergono e punti che non divergono sotto iterazione della funzione.

**Teorema 3.2.1.** *L'orbita di un numero complesso sotto iterazione di una funzione polinomiale quadratica o è limitata o appartiene all'insieme stabile  $W^s(\infty)$ , l'insieme dei punti che tendono a infinito.*

Quindi, per determinati valori di  $c \in \mathbb{C}$ , le orbite dei punti iniziali sotto iterazione di  $M_c$  possono rimanere limitate o divergere. Il comportamento complessivo della dinamica può essere caratterizzato dall'insieme di punti per cui l'orbita di 0 rimane limitata, definendo così l'insieme di Mandelbrot.

**Definizione 3.2.4.** *L'insieme di Mandelbrot è definito come l'insieme dei parametri  $c \in \mathbb{C}$  per i quali l'orbita di 0 sotto iterazione di  $M_c$  rimane limitata:*

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid M_c^n(0) \text{ è limitata}\}.$$

Poiché  $\mathcal{M}$  include i punti con orbita limitata, è naturale considerare l'esistenza di orbite periodiche. In particolare, l'insieme di Mandelbrot  $\mathcal{M}$  contiene l'unione degli insiemi  $\mathcal{M}_n$  definiti come

$$\mathcal{M}_n = \{c \mid M_c(z) \text{ ha un punto periodico attrattivo di periodo primo } n\}$$

quindi

$$\mathcal{M} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_n$$

In particolare, si può dimostrare che l'insieme  $\mathcal{M}_1$  è il corpo principale dell'insieme  $\mathcal{M}$ , ossia la *cardioide* di equazione  $\rho(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta} - \frac{1}{4}e^{2i\theta}$ , e  $\mathcal{M}_2$  è la circonferenza di raggio  $\frac{1}{4}$  e centro  $-1$  (fig. 3.3).

Inoltre, l'insieme  $\mathcal{M}$  non solo rappresenta i parametri  $c$  per cui l'orbita di  $0$  è limitata, ma racchiude in sé il comportamento dinamico degli insiemi di Julia corrispondenti.

### Relazione tra l'insieme di Mandelbrot e gli insiemi di Julia

Rammentiamo che l'insieme di Julia è definito per una data funzione  $f_c$  dunque per la mappa di Mandelbrot  $M_c$  otteniamo una famiglia di insiemi di Julia, ognuno associato a un diverso valore del parametro  $c$ . La relazione tra l'insieme di Mandelbrot e gli insiemi di Julia è racchiusa nel seguente risultato:

**Proposizione 3.2.2.** *Fissato un valore del parametro  $c$ , l'insieme di Julia della mappa quadratica  $M_c$  è connesso se e solo se  $c \in \mathcal{M}$ .*

Questo implica che i parametri  $c$  che appartengono all'insieme di Mandelbrot generano insiemi di Julia connessi, mentre per i valori di  $c$  al di fuori di  $\mathcal{M}$ , gli insiemi di Julia sono *totalmente disconnessi*. Quindi, l'insieme di Mandelbrot può essere visto come una "mappa" che descrive i diversi comportamenti dinamici degli insiemi di Julia al variare di  $c$ . In figura 3.4 e 3.5 sono riportati gli insiemi di Julia delle funzioni  $M(z) = z^2 + c$  con  $c = -1.3 + 0i$  e con  $c = -0.2 + 0.7i$  rispettivamente<sup>1</sup>.



Figura 3.4: Insieme di Julia della funzione  $M(z) = z^2 + c$  con  $c = -1.3 + 0i \in \mathcal{M}$ .



Figura 3.5: Insieme di Julia della funzione  $M(z) = z^2 + c$  con  $c = -0.2 + 0.7i \in \mathcal{M}$ .

<sup>1</sup>Le figure 3.4 e 3.5 sono state ottenute tramite il codice in appendice A.2 tramite le opportune modifiche.

## La connessione con la mappa logistica

Infine, vediamo la connessione tra l'insieme di Mandelbrot e la mappa logistica, una delle mappe più studiate nella teoria dei sistemi dinamici discreti reali. Si può dimostrare che tutte le mappe quadratiche, inclusa la mappa logistica, sono topologicamente equivalenti alla mappa quadratica reale associata all'insieme di Mandelbrot:

**Proposizione 3.2.3.** *Siano  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  e  $g(x) = x^2 + c$ . Allora  $\varphi(x) = \alpha x + \frac{\beta}{2}$  è una coniugazione topologica tra  $f(x)$  e  $g(x)$ .*

Questo risultato implica che i comportamenti dinamici osservati nella mappa logistica, come la biforcazione e la transizione al caos, sono in stretta relazione con quelli osservati nella dinamica complessa di  $M_c$ .

Questa relazione si spiega osservando il diagramma di biforcazione della mappa di Mandelbrot reale, quindi  $M_c(x) = x^2 + c$ , in fig. 3.6.

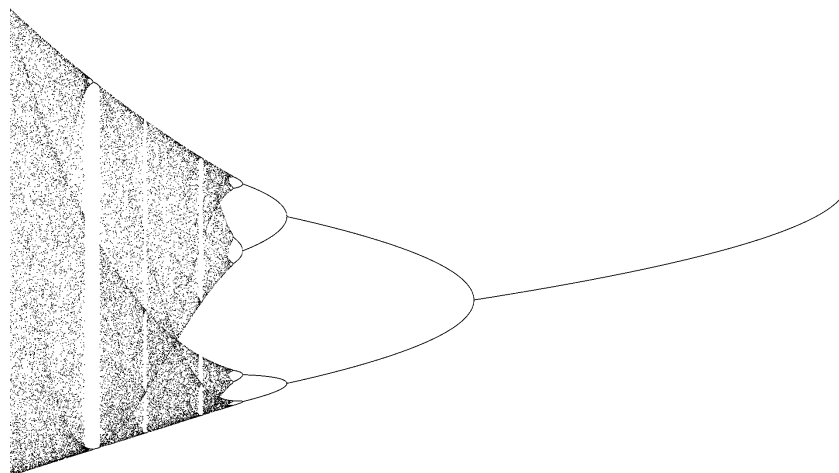


Figura 3.6: Diagramma di biforcazione della funzione  $M_c(x) = x^2 + c$ , con valori di  $-2 < c < 0.25$ .

Si evince immediatamente che la dinamica è *molto simile*, a quella della mappa logistica  $L_r(x) = rx(1 - x)$ , presentata nel capitolo precedente.

Come ultimo fatto, scontato ma non banale, poiché l'insieme di Mandelbrot  $\mathcal{M}$  include l'unione degli insiemi  $\mathcal{M}_n$ , significa che i numeri che giacciono sull'asse reale dell'insieme  $\mathcal{M}_1$ , corrispondono ai punti della mappa  $M_c(x) = x^2 + c$  con periodo primo 1, quelli in  $\mathcal{M}_2$  con periodo 2, e così via, come mostrato in figura 3.7

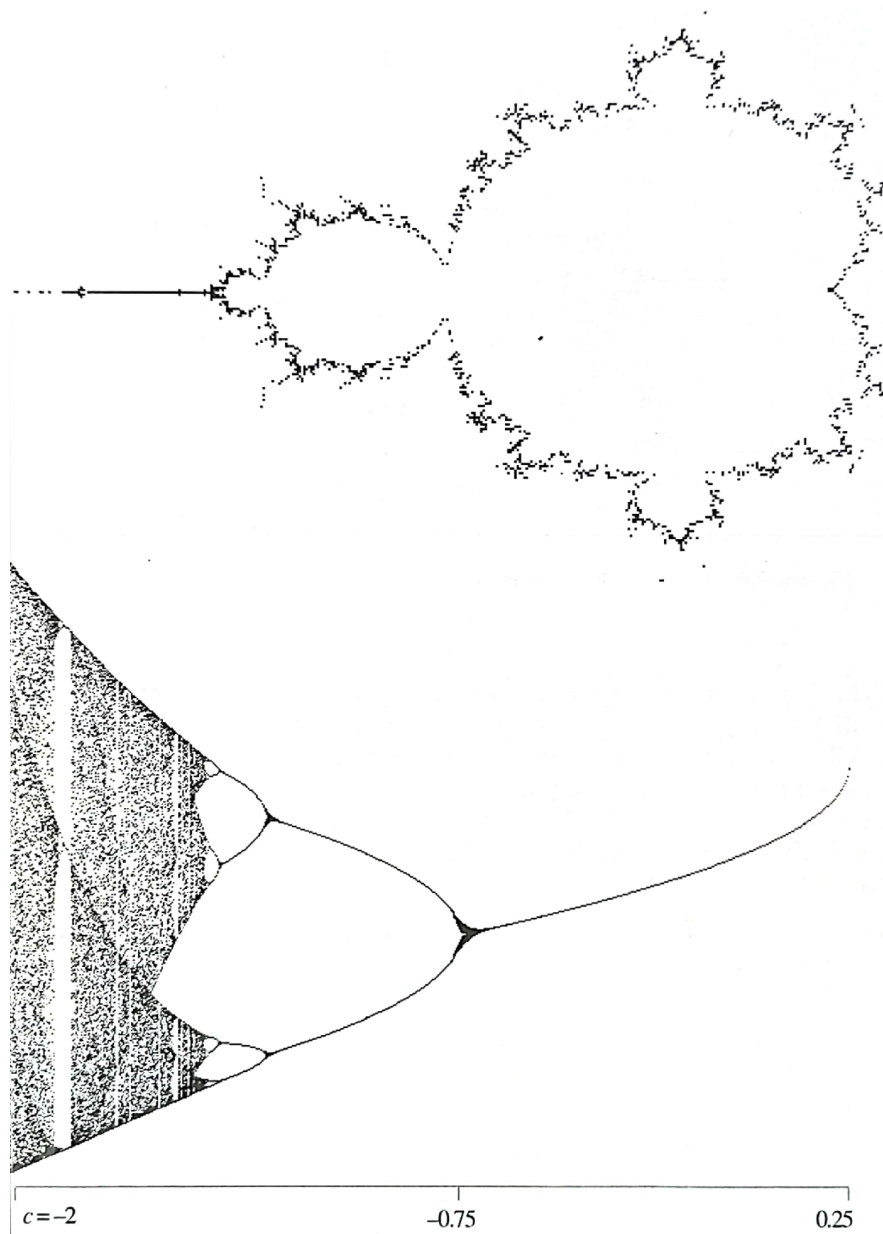


Figura 3.7: Rappresentazione grafica della relazione tra l'insieme di Mandelbrot e la mappa logistica. Immagine presa da [1] a pag. 146.

# Appendice A

## Codici

### A.1 Codice per diagramma di biforcazione

In questa sezione riportiamo il codice in C++ per la visualizzazione del diagramma di biforcazione della mappa logistica  $L_r(x) = rx(1 - x)$  e della mappa di Mandelbrot reale  $M_c(x) = x^2 + c$ . tramite la libreria *SFML*.

Il progetto è formato da un solo file: `main.cpp`.

Per compilare ed eseguire correttamente il codice, su Ubuntu 20.04, da terminale, bisogna eseguire le seguenti righe di codice:

```
1 $g++ main.cpp -lsfml-window -lsfml-system -lsfml-graphics
2
3 ./a.out
```

Il codice `main.cpp` è riportato di seguito

```
1 #include <SFML/Graphics.hpp>
2 #include <SFML/System.hpp>
3 #include <iostream>
4
5 struct Point {
6     sf::Vector2f pos;
7     sf::CircleShape s;
8
9     Point(double const x, double const y) : pos(x, y) {
10         s.setRadius(1);
11         s.setOrigin(s.getRadius(), s.getRadius());
12         s.setFillColor(sf::Color::Black);
13         s.setPosition(x, y);
```



```

14 }
15 void draw(sf::RenderWindow& wind) { wind.draw(s); }
16 };
17
18 int main() {
19     double x = 0; // sarebbe x_n; in [0, 1]
20     double y = 0; // sarebbe x_{n+1}
21     Point point(0, 0);
22
23     double const r_min = -1.99;
24     double const r_max = 0.25;
25
26     double y_min = -2;
27     double y_max = 2;
28
29     int num = 3000; // numero di punti
30     double h = (r_max - r_min) / num;
31
32     //----- SFML STUFF
33     //-----
34     const float display_width = sf::VideoMode::getDesktopMode()
35         .width;
36     const float display_height = sf::VideoMode::getDesktopMode
37         ().height;
38     // creo la finestra di SFML
39     sf::RenderWindow window(sf::VideoMode(display_width,
40         display_height),
41         "Logistic Map");
42
43     sf::Vector2f window_size(window.getSize());
44
45     sf::View view{sf::Vector2f{display_width * 0.5f, -
46         display_height * 0.5f},
47         window_size};
48
49     window.setView(view);
50     window.setPosition(sf::Vector2i(800, 210));
51
52     bool start = true;

```

```

50
51
52 while (window.isOpen()) {
53     sf::Event event;
54     while (window.pollEvent(event)) {
55         if (event.type == sf::Event::Closed) {
56             window.close();
57         };
58     }
59
60     if (start) {
61         window.clear(sf::Color::White);
62
63         for (double r = r_min; r < r_max; r += h) {
64             for (int nofIt1 = 270; nofIt1 < 300; ++nofIt1) {
65                 for (int i = 0; i < nofIt1; ++i) {
66                     y = x * x + r;
67                     x = y;
68                 }
69                 Point point((r - r_min) * display_width / (r_max -
70                             r_min),
71                             -(y - y_min) * display_height / (y_max
72                             - y_min));
73                 point.draw(window);
74             }
75         }
76         start = false;
77     }
78     window.display();
79 }
80 }

```

## A.2 Codice per insiemi di Julia

In questa sezione riportiamo il codice in C++ per la generazione delle figure degli insiemi di Julia, tramite l'uso della libreria *SFML*. Il codice è una versione modificata del codice presente in questa [repository di GitHub](#).

Il progetto è formato da 3 file:

**image.hpp e image.cpp:** in cui si definiscono le funzioni per la generazione della finestra grafica e della creazione dell'immagine;

**main.cpp:** file principale in cui si calcolano le orbite e in cui viene creata l'immagine.

Per compilare ed eseguire correttamente bisogna aggiungere i tre file in una cartella e, su Ubuntu 20.04, da terminale, bisogna eseguire le seguenti righe di codice:

```
1 $g++ main.cpp image.cpp julia.cpp -lsfml-window -lsfml-  
    system -lsfml-graphics  
2  
3 $./a.out
```

Il file **image.hpp** è elencato di seguito

```
1 #ifndef IMAGE_HPP  
2 #define IMAGE_HPP  
3  
4 #include <SFML/Graphics.hpp>  
5 #include <cassert>  
6  
7 class Image  
8 {  
9     sf::Image image;  
10  
11 public:  
12     Image(int width, int height)  
13     {  
14         assert(width > 0 && height > 0);  
15         image.create(static_cast<unsigned>(width), static_cast<  
16             unsigned>(height), sf::Color::White);  
17     }  
18     void set(int r, int c)  
19     {  
20         assert(r >= 0 && r < static_cast<int>(image.getSize().y))  
21         ;  
22         assert(c >= 0 && c < static_cast<int>(image.getSize().x))  
23         ;  
24         image.setPixel(static_cast<unsigned>(c), static_cast<  
25             unsigned>(r), sf::Color::Black);  
26     }  
27 }
```

```

23 void show() const;
24 void saveToFile(std::string const&);
25 };
26
27
28 #endif

```

Il file `image.cpp` è elencato di seguito

```

1 #include "image.hpp"
2
3 void Image::show() const {
4     sf::RenderWindow window(sf::VideoMode(image.getSize().x,
5     image.getSize().y),
6     "Mandelbrot Set");
7     window.setPosition(sf::Vector2i(800, 200));
8
9     window.setFramerateLimit(60);
10    sf::Texture texture;
11    texture.loadFromImage(image);
12    sf::Sprite sprite;
13    sprite.setTexture(texture);
14
15    while (window.isOpen()) {
16        sf::Event event;
17        while (window.pollEvent(event)) {
18            if (event.type == sf::Event::Closed) {
19                window.close();
20            }
21        }
22        window.clear();
23
24        window.draw(sprite);
25
26        window.display();
27    }
28 }

```

Il file `main.cpp` è elencato qui di seguito

```

1 #include <complex>
2 #include <iostream>
3
4 #include "image.hpp"
5
6 using Complex = std::complex<double>;
7
8 inline bool is_in_julia_set(Complex& z) {
9     int i{0};
10    while (i < 256 && std::norm(z) < 2.) {
11        ++i;
12        z = std::pow(z, 2) + Complex{-0.2, 0.7};
13    }
14
15    return i == 256;
16 }
17
18 int main() {
19     auto const x_min = -2.5;
20     auto const x_max = 2.5;
21     auto const y_min = -2.5;
22     auto const y_max = 2.5;
23
24     const float width = 0.7 * sf::VideoMode::getDesktopMode().
        width;
25     const float height = 0.7 * sf::VideoMode::getDesktopMode().
        height;
26
27     auto const dx = (x_max - x_min) / width;
28     auto const dy = (y_max - y_min) / height;
29
30     std::cout << " dx e dy" << dx << ' ' << dy << '\n';
31     sf::Texture t;
32     sf::Image i;
33
34     Image image{static_cast<int>(width), static_cast<int>(
        height)};
35     for (int i{0}; i != height; ++i) {
36         for (int j{0}; j != width; ++j) {
37             Complex z = {x_min + j * dx, y_min + i * dy};

```

```
38     if (is_in_julia_set(z)) {
39         image.set(i, j);
40     }
41 }
42 }
43
44 image.show();
45 }
```

## Appendice B

# Transizione dall'equazione logistica continua a quella discreta

L'equazione logistica del modello continuo, nella forma presentata precedentemente non rappresenta la formulazione più adatta per dimostrare il passaggio dal continuo al discreto. Pertanto, la riformuliamo nel seguente modo:

$$\dot{x}(t) = \kappa x(t) (L - x(t)), \quad (\text{B.1})$$

dove la popolazione  $x(t)$  è limitata da un massimo  $L$ . Come discusso nella Sezione 2, per qualsiasi popolazione iniziale positiva  $x_0$ , la specie tenderà eventualmente alla popolazione limite  $L$ . Ponendo  $t = n$  e considerando  $\kappa = \log(1 + k)$  per stabilire una connessione tra il tasso di crescita continuo e quello discreto, otteniamo la versione discreta:

$$x(n+1) - x(n) = kx(n) (L - x(n)). \quad (\text{B.2})$$

In alternativa, ponendo  $\tilde{L} = L + \frac{1}{k}$ , possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= x(n) (1 + k(L - x(n))) \\ &= x(n) (1 + kL - kx(n)) \\ &= kx(n) \left( \frac{1}{k} + L - x(n) \right) \\ &= kx(n) (\tilde{L} - x(n)), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Introducendo  $x_n = \frac{x(n)}{\tilde{L}}$  e  $r = k\tilde{L}$ , vediamo che è sufficiente considerare:

$$x_{n+1} = rx_n (1 - x_n), \quad (\text{B.4})$$

che è nota come *equazione logistica*. Introducendo la funzione quadratica:

$$L_r(x) = rx(1 - x), \tag{B.5}$$

possiamo scrivere la soluzione all' $n$ -esima iterazione come  $x_{n+1} = L_r^n(x)$ .



# Bibliografia

- [1] Robert L. Devaney. *Caos e frattali, Matematica dei sistemi dinamici e applicazioni al calcolatore*. Addison-Wesley Masson, 1993.
- [2] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, and Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Elsevier Inc., 2013.
- [3] Richard Holmgren. *A first course on discret dynamical systems*. Springer Inc., 1996.
- [4] Robert May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 1976.
- [5] Clark Robinson. *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*. CRC Press, 1995.
- [6] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 2012.
- [7] Giorgio Turchetti. *Dinamica classica dei sistemi fisici*. Zanichelli, 1998.