

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Rottura Spontanea di Simmetria

Relatore:  
Prof. Roberto Balbinot

Presentata da:  
Lorenzo Mariotti

Anno Accademico 2023/2024

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alla teoria della relatività ristretta</b>	<b>1</b>
1.1	Postulati e conseguenze della teoria della relatività ristretta . . . . .	2
1.2	Spazio-tempo di Minkowski e formalismo tensoriale . . . . .	4
1.2.1	Formalismo tensoriale . . . . .	4
1.2.2	Spazio-tempo di Minkowski . . . . .	6
1.3	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	8
1.3.1	Quadrivettori nello spazio-tempo di Minkowski . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Teoria relativistica dei campi</b>	<b>11</b>
2.1	Formalismo lagrangiano della teoria relativistica dei campi . . . . .	12
2.2	Campi scalari . . . . .	15
2.2.1	Dinamica dei campi scalari . . . . .	15
2.2.2	Campi scalari massivi e Lagrangiana di Klein-Gordon . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Accenni di teoria dei gruppi</b>	<b>18</b>
3.1	Gruppi e rappresentazioni . . . . .	19
3.1.1	Gruppi di Lie . . . . .	20
3.2	Il gruppo delle rotazioni $SO(3)$ . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Rottura spontanea di Simmetria</b>	<b>24</b>
4.1	Rottura spontanea di simmetria in un ferromagnete . . . . .	25
4.2	Rottura spontanea di simmetria nell'ambito della teoria quantistica dei campi . . . . .	26
4.2.1	Rottura spontanea di simmetria rispetto al gruppo $SO(2)$ . . . . .	27
4.3	Rottura spontanea di simmetria rispetto al gruppo $SO(3)$ . . . . .	30

# Prefazione

Il ventesimo secolo è stato un periodo di grandi rivoluzioni nell'ambito dello studio dei fenomeni naturali e che hanno profondamente scosso il mondo scientifico. La prima metà del secolo ha assistito all'avvento di teorie fisiche destinate a sconvolgere radicalmente i concetti fondanti di un'interpretazione classica della natura e sulle quali si basa la ricerca scientifica attuale.

La formulazione della *teoria della relatività ristretta* ad opera di A. Einstein esaudì la richiesta di una nuova teoria di spazio-tempo che sostituisse la *relatività galileiana* e fosse in grado di contenere la recente teoria dell'elettromagnetismo. In contemporanea si affermò la *meccanica ondulatoria* come teoria quantistica per la descrizione della dinamica delle particelle su scala atomica.

Il connubio tra la teoria della relatività ristretta e la meccanica ondulatoria, permise una descrizione relativistica ed unificata delle particelle elementari e delle loro interazioni, tramite ciò che sono generalmente denominate come *teorie quantistiche dei campi*. Queste hanno la caratteristica comune di assumere un nuovo principio dinamico: il *principio di Gauge*, il quale verte sulla relazione intrinseca tra interazioni e simmetrie interne di un sistema. Inoltre, al fine di perfezionare le teorie ottenute mediante tale principio, dette *Teorie di Gauge*, fu necessario introdurre il concetto di rottura spontanea di simmetria. Quest'ultimo è un fenomeno che si verifica quando lo stato fondamentale di un sistema non rispetta una sua simmetria interna. La rottura spontanea di simmetria gioca un ruolo chiave nell'ambito delle Teorie di Gauge in quanto su ciò si basa il *meccanismo di Higgs*, processo mediante il quale è possibile conferire massa ai campi mediatori delle interazioni modellizzate attraverso il principio di Gauge.

La seguente trattazione è suddivisa in quattro capitoli, di cui i primi tre servono a definire le basi necessarie ad una completa comprensione del quarto capitolo, in cui viene descritto il fenomeno della rottura spontanea di simmetria.

Il primo capitolo è un'introduzione alla teoria della relatività ristretta e del formalismo matematico che la caratterizza. Questo costituirà il framework in cui sono avvolti i concetti esposti nei capitoli 2 e 4.

Nel secondo capitolo è descritta la dinamica relativistica dei campi mediante il formalismo lagrangiano. La teoria descritta in questo capitolo è totalmente non quantistica, ma sono presenti alcuni accenni alla teoria quantistica dei campi in vista di quanto esposto

nel capitolo 4.

Il terzo capitolo rappresenta una trattazione dal punto di vista puramente algebrico della teoria dei gruppi e delle loro rappresentazioni, concludendo con ciò che sarà strettamente necessario sapere riguardo i gruppi di Lie. La necessità di questo capitolo è dettata dalla naturale astrazione del concetto di simmetria attraverso il linguaggio matematico della teoria dei gruppi.

Il quarto capitolo è quello conclusivo e riguarda il fenomeno della rottura spontanea di simmetria nell'ambito della teoria quantistica dei campi. L'argomento è prima trattato concettualmente tramite il classico esempio del ferromagnete infinito e poi quantitativamente con alcuni casi pratici.

# Ringraziamenti

La realizzazione di questo lavoro è stata possibile solamente grazie alla guida del prof. Roberto Balbinot, il quale desidero ringraziare per la sua disponibilità e prontezza nel chiarire dubbi e suggerire correzioni. Inoltre, ringrazio calorosamente i numerosi compagni con cui ho condiviso questi anni di studio e che li hanno resi un periodo indimenticabile. Un ringraziamento speciale a Fabio e Francesco, la cui presenza mi ha permesso di crescere e di scoprire nuovi orizzonti. Infine, desidero ringraziare con affetto tutte le persone che mi sono state emotivamente vicine, specialmente Agata, Caterina, Marcella, Marie, Roseline, Alberto e Roberta.

Dedico questa tesi ai miei genitori, che mi hanno sempre sostenuto e mostrato un modello a cui aspirare.

# Capitolo 1

## Introduzione alla teoria della relatività ristretta

Lo studio dei fenomeni naturali richiede necessariamente la formulazione di una teoria di spazio-tempo che definisca una corrispondenza tra la realtà fisica in cui avvengono tali fenomeni ed un dato insieme di oggetti matematici. Fino al primo decennio del ventesimo secolo, tutti i processi naturali erano studiati nell'ambito della *relatività galileiana*, la quale postula l'esistenza di un tempo assoluto e la validità del *principio di relatività*, secondo il quale le leggi fisiche devono assumere la stessa forma in ogni sistema di riferimento inerziale. Tuttavia, diventò evidente che la teoria della relatività galileiana introduceva delle apparenti incongruenze tra la teoria dell'interazione elettromagnetica ed il principio di relatività. Fu dunque necessario formulare una nuova teoria di spazio-tempo, la quale inglobasse tutti i fenomeni naturali in modo tale che le leggi fisiche che li rappresentano rispettino il principio di relatività. La relatività galileiana fu quindi sostituita dalla *relatività einsteiniana*, con numerose difficoltà ed opposizioni da parte del mondo scientifico, la quale risulta in grado di contenere le leggi fisiche dell'interazione elettromagnetica senza cadere in contraddizioni. In particolar modo, la relatività einsteiniana si suddivide in base al suo campo di applicazione in: *teoria della relatività ristretta* e *teoria della relatività generale*. E' importante sottolineare che una teoria della gravitazione in accordo con il principio di relatività sia possibile esclusivamente nell'ambito della teoria della relatività generale. E' nei nostri interessi discutere solamente la teoria della relatività ristretta, la quale costituisce il framework necessario alla formulazione della teoria relativistica dei campi.

## 1.1 Postulati e conseguenze della teoria della relatività ristretta

La descrizione di un fenomeno naturale richiede la capacità di associare ad ogni evento una posizione nello spazio e nel tempo. Occorre dunque la presenza di un *sistema di riferimento*, cioè l'insieme di un sistema di coordinate spaziali e di un orologio in ogni punto dello spazio. Diremo *inerziali* i sistemi di riferimento rispetto ai quali il moto di particelle libere, cioè non soggette ad alcuna interazione, risulta essere di tipo rettilineo uniforme. Chiaramente, individuato un sistema di riferimento inerziale, esiste un insieme infinito di sistemi di riferimento inerziali, i quali seguono un moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

L'esperienza conferma la validità del *principio di relatività*, il quale impone l'universalità delle leggi fisiche rispetto a tutti i sistemi di riferimento inerziali. Ciò equivale ad affermare che le equazioni rappresentanti le leggi fisiche di un dato processo, siano *invarianti in forma* rispetto ad una trasformazione delle coordinate spaziali, ed eventualmente del tempo, corrispondente ad un cambio di sistema di riferimento inerziale. Il principio di relatività è il primo dei due postulati su cui si fonda la teoria della relatività ristretta ed oltre ad essere un principio di natura empirica, è anche un principio di semplicità ed estetica nel quale si riflettono le profondità non solo dei fenomeni naturali ma anche della mente umana.

Nell'ambito della relatività galileiana, le interazioni tra particelle sono modellizzate tramite una certa funzione delle loro posizioni spaziali detta energia potenziale d'interazione. Secondo questa descrizione delle interazioni, la forza che ogni particella esercita sulle altre dipende unicamente dalla loro posizione relativa e non dall'istante temporale. Ciò presuppone necessariamente che la propagazione dell'interazione sia istantanea, cioè che una variazione dello stato di una particella si ripercuota immediatamente sulle altre. Tuttavia, l'esperienza dimostra che in natura non esistono interazioni istantanee. Questo è il risultato empirico di fondamentale importanza che ci permette di scartare la relatività galileiana come teoria di spazio-tempo.

Nella realtà fisica, l'interazione tra particelle non è istantanea ed è possibile misurare un certo intervallo temporale tra la modifica dello stato di una particella e le conseguenze che ciò scaturlisce sulle altre. Misurando la distanza tra le particelle ed il tempo necessario affinché l'interazione si propaghi, è possibile dedurre la *velocità di propagazione dell'interazione*. Dato che la modifica dello stato di una particella a seguito della variazione dello stato di un'altra particella, corrisponde alla ricezione di un'informazione da parte della prima riguardo lo stato della seconda, spesso si usa dire piuttosto *velocità di propagazione dell'informazione*. Inoltre, tale velocità si potrebbe più propriamente chiamare velocità *massima* di propagazione dell'informazione, così da riferirsi al metodo più rapido di trasmissione dell'informazione, il quale è sempre quello scelto in natura. In questo modo, è evidente che nessun moto possa avvenire con velocità superiore alla ve-

locità di propagazione del segnale, altrimenti si potrebbe utilizzare proprio questo moto per trasmetterlo più rapidamente.

Il secondo dei due postulati su cui si fonda la teoria della relatività ristretta, identifica la velocità di propagazione della radiazione elettromagnetica  $c = 2.998 \cdot 10^{10} m/s$  come la velocità massima di propagazione dell'informazione. Dal principio di relatività segue immediatamente che questo valore debba essere uguale per ogni sistema di riferimento inerziale, dunque la velocità di propagazione delle informazioni è una costante universale. In questo modo, la teoria della relatività ristretta concilia il principio di relatività con la teoria elettromagnetica.

Sia la relatività galileiana che la teoria della relatività ristretta fanno uso di uno *spazio relativo*. Infatti, il concetto di posizione spaziale di una data particella assume un senso soltanto se in relazione ad un sistema di riferimento. Il tempo è invece assoluto nell'ambito della relatività galileiana, in cui si assume che le misure di tempo siano indipendenti dal sistema di riferimento ed abbiano valenza universale. In particolar modo, ciò implica che se due eventi sono osservati simultaneamente da un dato sistema di riferimento inerziale, allora questi sono simultanei rispetto ad ogni sistema di riferimento inerziale. E' facile convincersi che un tempo assoluto non sia possibile nella teoria della relatività ristretta. Infatti, la legge di composizione vettoriale delle velocità, valida in relatività galileiana grazie alla presenza di un tempo assoluto, permetterebbe tramite un'adeguata scelta di sistemi di riferimento inerziali di far osservare ad uno di questi dei moti con velocità superiori alla velocità di propagazione della luce nel vuoto, il che è in piena contraddizione con i postulati della relatività ristretta.

I postulati della teoria della relatività ristretta conducono necessariamente all'esistenza di un *tempo relativo*, le cui misure dipendono dal sistema di riferimento inerziale considerato. In particolar modo, questo ha la diretta conseguenza di eliminare il carattere universale della simultaneità degli eventi. Nell'ambito della relatività ristretta, eventi simultanei per un dato sistema di riferimento inerziale non saranno necessariamente simultanei in ogni sistema di riferimento inerziale.

In questo modo, la teoria della relatività ristretta introduce dei cambiamenti radicali nei concetti più fondamentali della Fisica e richiede una profonda riconsiderazione del modo di intendere e studiare i fenomeni naturali. A questo punto, è necessario specificare che la teoria della relatività ristretta è una teoria di spazio-tempo che permette di conciliare la teoria elettromagnetica con il principio di relatività solo rispetto a sistemi di riferimento inerziali. La teoria della relatività generale permette di estendersi anche all'ambito dei sistemi di riferimento non inerziali, ma ciò va oltre i nostri scopi.



## 1.2 Spazio-tempo di Minkowski e formalismo tensoriale

Nell'ambito della relatività galileiana, la realtà fisica è modellizzata come uno *spazio euclideo tridimensionale*  $\mathbb{R}^3$ . Questa interpretazione matematica è ancora possibile nell'ambito della relatività ristretta, tuttavia conduce a grandi difficoltà nella manipolazione delle leggi fisiche ottenute. In particolar modo, la verifica della *covarianza* di una legge fisica rispetto ad un cambio di sistema di riferimento inerziale, può risultare notevolmente ostica attraverso il calcolo vettoriale in  $\mathbb{R}^3$ .

E' conveniente affidarsi ad una diversa astrazione matematica della realtà fisica, la quale viene modellizzata come uno *spazio pseudoeuclideo quadridimensionale* detto *spazio-tempo di Minkowski*  $\mathbb{M}$ . In questo modo, il calcolo vettoriale su  $\mathbb{R}^3$  viene naturalmente sostituito con il *calcolo tensoriale* su  $\mathbb{M}$ , attraverso il quale è possibile cogliere i tratti fondamentali della relatività ristretta. [1] [2]

### 1.2.1 Formalismo tensoriale

Introduciamo le nozioni di base del calcolo tensoriale su un generico spazio  $\mathbb{V}$  a  $N$  dimensioni. Indichiamo i punti di  $\mathbb{V}$  come  $N$ -uple di coordinate  $(x^1, x^2, \dots, x^N)$ , più brevemente scritte come  $x^i$ . Sia un insieme di  $N$  funzioni  $(A^1, A^2, \dots, A^N)$  delle coordinate, diremo che questo è un *vettore controvariante* in  $\mathbb{V}$  se, a seguito di una trasformazione non singolare e differenziabile delle coordinate  $x^i \mapsto x'^i$ , le  $A^i$  si trasformano come:

$$A^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j(x) \quad (1.1)$$

dove si sottintende una somma sugli indici ripetuti. Invece, si dice *vettore covariante* un insieme di  $N$  funzioni  $(A_1, A_2, \dots, A_N)$  delle coordinate che sotto le stesse ipotesi si trasformano come:

$$A'_i(x') = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j(x) \quad (1.2)$$

Notiamo come la posizione dell'indice se in alto o in basso, indichi rispettivamente la controvarianza o la covarianza del vettore.

Le definizioni appena viste possono essere generalizzate ad oggetti con un numero arbitrario di indici che variano su uno stesso intervallo. Sia un insieme di  $N^r$  funzioni  $T^{ij\dots k}$  delle coordinate, diremo che questo è un  *tensore controvariante di rango  $r$*  se, data una trasformazione non singolare e differenziabile delle coordinate, le  $T^{ij\dots k}$  si trasformano come:

$$T'^{ij\dots k}(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x'^j}{\partial x^m} \dots \frac{\partial x'^k}{\partial x^n} T^{lm\dots n}(x) \quad (1.3)$$

Analogamente a quanto visto sopra, chiameremo *tensore covariante di rango r* un insieme di  $N^r$  funzioni  $T_{ij\dots k}$  delle coordinate che si trasformano come :

$$T'_{ij\dots k}(x') = \frac{\partial x^l}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial x'^k} T_{lm\dots n}(x) \quad (1.4)$$

Infine, si definisce un *tensore misto di rango r*,  $p$  volte controvariante e  $q$  volte covariante, come un insieme di  $N^r$  funzioni  $T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p}$  delle coordinate che si trasformano come:

$$T'^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x') = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{l_p}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x'^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{m_q}}{\partial x'^{j_q}} T_{m_1\dots m_q}^{l_1\dots l_p}(x) \quad (1.5)$$

A questo punto è evidente che un vettore (covariante o controvariante), non è altro che il caso particolare di un tensore (covariante o controvariante) di rango 1.

Una funzione delle coordinate  $A$  è detta tensore di rango 0 o *scalare* se rimane invariata sotto una trasformazione non singolare e differenziabile delle coordinate:

$$A'(x') = A(x) \quad (1.6)$$

Seguono alcuni risultati elementari del calcolo tensoriale. Indichiamo come  $(p, q)$  un qualsiasi tensore  $p$  volte controvariante e  $q$  volte covariante. Le combinazioni lineari tra tensori sono ammesse solo se vige l'omogeneità rispetto al rango ed alla natura covariante o controvariante degli indici. In particolar modo, combinazioni lineari tra tensori danno luogo a tensori con gli stessi indici:

$$(p, q) \oplus (p, q) = (p, q) \quad (1.7)$$

Il prodotto diretto tra due tensori arbitrari, anche non dello stesso rango, genera un tensore i cui ranghi sono la somma degli ranghi dei tensori originali:

$$(p, q) \otimes (p', q') = (p + p', q + q') \quad (1.8)$$

Si definisce l'operazione di *contrazione* di un tensore come la somma su due suoi indici opposti, con conseguente diminuzione di 1 dei suoi ranghi covarianti e controvarianti:

$$(p, q) \mapsto (p - 1, q - 1) \quad (1.9)$$

$$T_{j_1\dots j_q}^{i_1\dots i_p} \mapsto T_{j_1\dots j_{q-1} i_q}^{i_1\dots i_{p-1} i_p} = T_{j_1\dots j_{q-1}}^{i_1\dots i_{p-1}} \quad (1.10)$$

Infine, l'operazione di *differenziazione* di un tensore rispetto ad un indice controvariante incrementa di 1 il rango covariante del tensore:

$$(p, q) \mapsto (p, q + 1) \quad (1.11)$$

$$T^{ij\dots k} \mapsto \frac{\partial T^{ij\dots k}}{\partial x^l} = S_l^{ij\dots k} \quad (1.12)$$

Analogamente l'operazione di differenziazione rispetto ad un indice covariante incrementa di 1 il rango controvariante del tensore:

$$(p, q) \mapsto (p + 1, q) \quad (1.13)$$

$$T_{ij\dots k} \mapsto \frac{\partial T_{ij\dots k}}{\partial x^l} = S_{ij\dots k}^l \quad (1.14)$$

E' rilevante sottolineare che i tensori di rango 2 possono essere rappresentati come delle matrici  $N \times N$ . In questo caso, è importante fissare delle convenzioni riguardo la notazione degli indici al fine di creare una corrispondenza tra l'algebra matriciale e l'algebra dei tensori di rango 2. Sia un tensore arbitrario  $\Lambda^i_j$ , la natura covariante o controvariante degli indici non si riflette sulla rappresentazione matriciale del tensore, l'indice a sinistra indica la riga mentre l'indice a destra indica la colonna. La matrice trasposta è ottenuta in notazione tensoriale scambiando gli indici  $(\Lambda^i_j)^T \equiv \Lambda^j_i$ . La matrice inversa è invece indicata dall'abbassamento degli indici alti e l'innalzamento degli indici bassi  $(\Lambda^i_j)^{-1} = \Lambda_i^j$ . Il prodotto riga per colonna tra matrici ha una corrispondenza solo per i tensori misti di rango 2 ed equivale alla contrazione su due indici opposti:

$$\Lambda^i_k \Theta^k_j = \Omega^i_j \quad (1.15)$$

Concludiamo notando che data un'uguaglianza tra tensori, in virtù della definizione stessa di tensore, questa rimane identicamente verificata a seguito di una qualsiasi trasformazione non singolare e differenziabile delle coordinate:

$$T^{ij\dots k} = S^{ij\dots k} \Rightarrow T'^{ij\dots k} = S'^{ij\dots k} \quad (1.16)$$

Un'equazione di natura tensoriale è dunque necessariamente covariante rispetto a trasformazioni delle coordinate. Questo fa sì che il calcolo tensoriale si confermi il linguaggio naturale con cui modellizzare in termini matematici i fenomeni fisici nell'ambito della relatività ristretta.

## 1.2.2 Spazio-tempo di Minkowski

Modellizziamo la realtà fisica come uno spazio pseudoeuclideo quadridimensionale detto spazio-tempo di Minkowski  $\mathbb{M}$ , composto da 3 dimensioni spaziali ed una temporale. Ogni *evento* corrisponde ad un punto di  $\mathbb{M}$  ed è quindi identificato dalle quattro coordinate  $(ct, x, y, z)$ , dove  $t$  è l'istante temporale al quale viene osservato l'evento rispetto al sistema di riferimento (inerziale) situato nell'origine del sistema di coordinate spaziali  $x, y, z$ . La coordinata temporale è moltiplicata per il fattore  $c$  al fine di ottenere l'omogeneità

dimensionale, trattandosi di una costante universale questo non ne altera in nessun modo l'interpretazione.

In notazione tensoriale, le coordinate di  $\mathbb{M}$  sono indicate come:

$$x^0 \equiv ct \quad x^1 \equiv x \quad x^2 \equiv y \quad x^3 \equiv z \quad (1.17)$$

Collettivamente, queste vengono indicate tramite un indice greco:

$$x^\mu \quad (\text{con } \mu = 0, 1, 2, 3) \quad (1.18)$$

D'ora in avanti gli indici greci  $(\alpha, \beta, \dots, \mu, \nu, \dots)$  assumeranno i valori 0, 1, 2, 3 mentre gli indici latini  $(i, j, k, \dots)$  assumeranno i valori 1, 2, 3. In accordo con quanto visto nel paragrafo precedente, l'indice in alto nella (1.18) indica che queste sono coordinate controvarianti.

Introduciamo ora una *metrica* in  $\mathbb{M}$ , così da conferirgli una struttura *riemanniana*. Si definisce la metrica di  $\mathbb{M}$  come la forma quadratica differenziale:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.19)$$

dove  $\eta_{\mu\nu}$  è il *tensore metrico* di  $\mathbb{M}$ , le cui componenti sono:

$$\eta_{00} = 1, \quad \eta_{11} = -1, \quad \eta_{22} = -1, \quad \eta_{33} = -1, \quad \eta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{per } \mu \neq \nu \quad (1.20)$$

Notiamo come  $\eta_{\mu\nu}$  risulta essere diagonale e simmetrico rispetto allo scambio di indici  $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$ .

Definiamo le coordinate covarianti  $x_\mu$  come:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \quad (1.21)$$

che esplicitamente si relazionano alle coordinate controvarianti come:

$$x_0 = x^0, \quad x_1 = -x^1, \quad x_2 = -x^2, \quad x_3 = -x^3 \quad (1.22)$$

In questo modo, l'intervallo  $ds^2$  può essere espresso come:

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu \quad (1.23)$$

il che rende evidente il suo carattere scalare.

Definiamo il *tensore metrico controvariante*  $\eta^{\mu\nu}$ , corrispondente all'inverso di  $\eta_{\mu\nu}$  nella sua rappresentazione matriciale, tramite la relazione:

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho \quad (1.24)$$

dove  $\delta^\mu_\nu$  è la delta di Kronecker quadridimensionale. In particolar modo, le componenti del tensore metrico controvariante  $\eta_{\mu\nu}$  sono uguali a quelle del tensore metrico covariante  $\eta^{\mu\nu}$ , questo fa sì che  $\mathbb{M}$  sia uno spazio *piatto* e per questo viene detto pseudoeuclideo. Da ciò segue che le coordinate controvarianti possano essere ottenute moltiplicando  $\eta^{\mu\nu}$  per le coordinate covarianti:

$$x^\mu = \eta^{\mu\nu} x_\nu \quad (1.25)$$

### 1.3 Trasformazioni di Lorentz

Ora che abbiamo rappresentato la realtà fisica tramite lo spazio-tempo di Minkowski, vediamo di definire le trasformazioni delle coordinate che corrispondono al passaggio da un sistema di riferimento inerziale ad un altro.

Nell'ambito della relatività ristretta, le trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali sono dette *trasformazioni di Lorentz* se omogenee e *trasformazioni di Poincaré* se comprensive di una traslazione. Definiamo una trasformazione di Lorentz come una trasformazione *lineare* ed omogenea delle coordinate:

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.26)$$

che lasci invariato l'intervallo  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Si definisce una trasformazione di Poincaré come una trasformazione di Lorentz a cui si aggiunge una traslazione costante  $a^\mu$ :

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (1.27)$$

Per una trasformazione di Lorentz, omogenea o non omogenea, i differenziali delle coordinate di trasformano come:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu \quad (1.28)$$

La richiesta di conservare l'intervallo  $ds^2$  si esprime dunque come:

$$\eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \quad (1.29)$$

che sostituendo la (1.28) due volte impone la seguente condizione su  $\Lambda^\mu_\nu$ :

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma dx^\rho dx^\sigma = \eta_{\rho\sigma} dx^\rho dx^\sigma \quad (1.30)$$

Uguagliando i coefficienti dei differenziali  $dx^\rho dx^\sigma$  si ottiene:

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.31)$$

Data la simmetria rispetto agli indici  $\rho$  e  $\sigma$ , la (1.31) rappresenta 10 vincoli indipendenti sulla forma di  $\Lambda^\mu{}_\nu$ . Si ha dunque che le trasformazioni di Lorentz dipendono da  $16 - 10 = 6$  parametri reali, mentre le trasformazioni di Poincaré da  $6 + 4 = 10$  parametri reali.

Dalla (1.31) ed altri assunti di natura fondamentale, come l'omogeneità e l'isotropia spaziale, è possibile ottenere la forma esplicita delle trasformazioni di Lorentz. Diremo *boost* una trasformazione di Lorentz che non comporta rotazione spaziale. In generale un boost può sempre essere composto con una rotazione spaziale, risultando ancora in una trasformazione di Lorentz. Le componenti della matrice  $\Lambda^\mu{}_\nu$  associata ad un boost tra sistemi di riferimento con assi paralleli ed in moto relativo con velocità  $\vec{v}$ , sono date da:

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_i = \Lambda^i{}_0 = -\beta_i \gamma, \quad \Lambda^i{}_j = \delta^i_j + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta^i \beta_j \quad (1.32)$$

dove  $\vec{\beta} = \vec{v}/c$  e  $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2}$ .

Infine, notiamo che il primo membro della (1.31) può essere riscritto come:

$$\Lambda^\mu{}_\rho \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = (\Lambda^\rho{}_\mu)^T \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\sigma = (\Lambda^T \eta \Lambda)_{\rho\sigma} \quad (1.33)$$

dunque, la (1.31) in notazione matriciale diventa:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \quad (1.34)$$

Se in (1.34) ci fosse l'identità anzi che  $\eta$ , allora  $\Lambda$  sarebbero le matrici ortogonali di  $\mathbb{R}^4$  e dunque le trasformazioni di Lorentz coinciderebbero semplicemente con le rotazioni in quattro dimensioni. Le matrici di Lorentz  $\Lambda$  soddisfano invece una relazione di ortogonalità generalizzata e per questo sono dette *pseudortogonali*.

### 1.3.1 Quadri-vettori nello spazio-tempo di Minkowski

Le rilevanti quantità fisiche sono rappresentate nell'ambito della relatività ristretta come grandezze scalari, vettoriali o tensoriali nello spazio-tempo di Minkowski. Un tensore in  $\mathbb{M}$  è definito secondo le relazioni (1.3, 1.4, 1.5), in cui le trasformazioni delle coordinate  $x^\mu \mapsto x'^\mu$  sono le trasformazioni di Poincaré, per cui si ha:

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda_\mu{}^\nu \quad (1.35)$$

In particolar modo, i vettori su  $\mathbb{M}$  sono detti *4-vettori* e sono definiti secondo le relazioni (1.1, 1.2). Dunque, le grandezze 4-vettoriali si trasformano a seguito di un cambio di sistema di riferimento inerziale come:

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \quad (1.36)$$

Ogni 4-vettore può essere espresso nei termini delle sue componenti controvarianti o covarianti, le quali sono in relazione tramite il tensore metrico:

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad (1.37)$$

Esplicitamente, le componenti covarianti sono uguali alle componenti controvarianti a meno del segno sugli indici spaziali:

$$A_0 = A^0, \quad A_1 = -A^1, \quad A_2 = -A^2, \quad A_3 = -A^3 \quad (1.38)$$

Definiamo il prodotto scalare tra due 4-vettori come:

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^i B_i = A^0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \quad (1.39)$$

dove  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3$  indica il prodotto scalare euclideo in  $\mathbb{R}^3$  tra le componenti spaziali dei 4-vettori. La (1.39) genera necessariamente uno scalare rispetto alle trasformazioni di Poincaré, trattandosi di una contrazione tra 4-vettori. Il prodotto scalare di un 4-vettore con se stesso restituisce la norma di questo, la quale per quanto appena detto è uno scalare secondo Lorentz e quindi assume lo stesso valore in ogni sistema di riferimento inerziale.

Alcuni 4-vettori di rilevanza generale sono il 4-momento  $P^\mu$  di una particella di massa  $m$  e velocità  $\vec{v}$ , il 4-gradiente  $\partial/\partial x^\mu \equiv \partial_\mu$  e la 4-corrente di una distribuzione di cariche  $J^\mu$ , definiti come:

$$P^0 = E/c, \quad P^i = p^i \quad (1.40)$$

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i = \nabla_i \quad (1.41)$$

$$J^0 = c\rho, \quad J^i = j^i \quad (1.42)$$

dove  $E = \gamma m c^2$  e  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  sono l'energia ed il momento relativistici della particella, mentre  $\rho$  e  $\vec{j}$  sono la densità volumica di carica e la densità di corrente della distribuzione di cariche.

## Capitolo 2

# Teoria relativistica dei campi

Lo studio classico dei fenomeni fisici postula la dualità tra *materia* ed *interazione*. Tale dualismo si traduce nella netta separazione tra i concetti di *particella*, intesa classicamente come ente elementare della materia, e *campo*, oggetto matematico che descrive le interazioni naturali. In questo capitolo, sono esposte le idee fondamentali della *teoria relativistica dei campi*, ovvero lo studio classico dei campi nell'ambito della teoria della relatività ristretta e con formalismo *lagrangiano*.

I concetti di particella e campo si fondono nella *teoria quantistica dei campi*, in cui sia la materia che le sue interazioni sono rappresentate da *campi quantistici*. Non è nostra intenzione affrontare una trattazione della teoria quantistica dei campi, tuttavia gli argomenti esposti nei capitoli 4 e 5 si trovano alla base dei meccanismi fondamentali dei campi quantistici e per questo, spesso verranno proposte delle interpretazioni che esulano da una visione puramente classica.

*Nota:* da questo capitolo in avanti viene adottato il sistema di unità di misura naturali, per cui si pone  $c = \hbar = 1$ .



## 2.1 Formalismo lagrangiano della teoria relativistica dei campi

Sia  $\phi(x)$  un qualsiasi campo scalare, spinoriale, vettoriale o tensoriale, definito sullo spazio-tempo di Minkowski, dove  $x$  indica un punto in  $\mathbb{M}$ . In analogia al formalismo lagrangiano della dinamica della particelle, definiamo il *funzionale d'azione*  $S$  associato al campo:

$$S = \int dx^0 L \quad (2.1)$$

dove  $L$  è la funzione Lagrangiana del campo  $\phi$ . Le *equazioni del moto* che determinano la dinamica del campo sono ottenute imponendo il *principio di Hamilton*, o di *azione stazionaria*, al funzionale d'azione del campo. Al fine di ottenere delle equazioni del moto covarianti, è dunque necessario richiedere che l'azione  $S$  sia uno scalare rispetto alle trasformazioni di Poincaré (1.27).

E' conveniente esprimere  $L$  in termini di una funzione *densità di Lagrangiana*  $\mathcal{L}$ :

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L} \quad (2.2)$$

dove  $d^3\mathbf{x}$  indica l'elemento di volume spaziale.

Dalla (2.1) e (2.2) è possibile riscrivere il funzionale d'azione del campo:

$$S = \int dx^4 \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.3)$$

In questo modo,  $S$  è uno scalare rispetto a trasformazioni di Poincaré se lo è la densità di Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , infatti la misura dell'integrazione nella (2.3) è anch'essa uno scalare rispetto a tali trasformazioni.

La densità di Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , a volte impropriamente detta *Lagrangiana*, è una funzione del campo  $\phi$  e delle sue derivate. A priori,  $\mathcal{L}$  può ammettere una dipendenza da derivate di ordine arbitrario del campo, tuttavia vedremo dalla forma delle equazioni del moto che al fine di evitare teorie alto-derivative, è necessario imporre una dipendenza esplicita dalle derivate al più del primo ordine. Inoltre, per garantire la natura scalare di  $\mathcal{L}$  non deve esserci dipendenza esplicita dal punto di osservazione  $x$ , mentre il campo  $\phi$  e le sue derivate  $\partial_\mu \phi$  dovranno combinarsi in modo da generare termini scalari.

Il principio di Hamilton stabilisce che la configurazione assunta dal campo è quella che rende stazionario il valore dell'azione:

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (2.4)$$

dove  $\Omega$  è un volume in  $\mathbb{M}$ . Consideriamo una variazione infinitesima arbitraria di  $\phi$ :

$$\phi \mapsto \phi + \delta\phi \quad (2.5)$$

che si annulli sulla frontiera  $\partial\Omega$ :

$$\delta\phi = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \quad (2.6)$$

Affinché  $S$  sia stazionaria rispetto alla variazione (2.5), richiediamo che la sua variazione al primo ordine sia nulla:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) = 0 \quad (2.7)$$

Essendo il volume  $\Omega$  fisso, la variazione di  $S$  è:

$$\delta S = \delta \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) = \int_{\Omega} d^4x \delta\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi) = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} \delta\partial_{\mu}\phi \right) \quad (2.8)$$

E' possibile riscrivere la variazione sulla derivata del campo nel seguente modo:

$$\delta\partial_{\mu}\phi = \partial_{\mu}(\phi + \delta\phi) - \partial_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\delta\phi \quad (2.9)$$

La (2.8) diventa allora:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} \partial_{\mu}\delta\phi \right) \quad (2.10)$$

Il secondo termine tra parentesi può essere integrato per parti, da cui otteniamo:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} \right) \delta\phi + \int_{\partial\Omega} d\sigma_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} \delta\phi \quad (2.11)$$

Per l'ipotesi (2.5) il secondo integrale è nullo e la (2.11) si riduce a:

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} \right) \delta\phi = 0 \quad (2.12)$$

Secondo il principio di Hamilton la variazione  $\delta S$  deve essere nulla per una variazione *arbitraria* del campo, dunque l'integranda nella (2.12) deve necessariamente essere nulla:

$$\partial_{\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_{\mu}\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad (2.13)$$

Questa è l'*equazione di Eulero-Lagrange* del campo  $\phi$  e rappresenta l'equazione del moto che avevamo anticipato.

Data la linearità della (2.13) rispetto alla densità di Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , la dinamica del campo rimane invariata rispetto ad un rescaling costante  $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}' = \alpha\mathcal{L}$ . Allo stesso modo, aggiungere ad  $\mathcal{L}$  dei termini di quadridivergenza di una funzione generica  $\Lambda^\mu$  del campo e del punto d'osservazione, non modifica l'equazione del moto. Infatti, per:

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu(\phi, x) \quad (2.14)$$

si ha che l'azione viene modificata come:

$$S \mapsto S' = \int_{\Omega} d^4x (\mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu) = S + \int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \Lambda^\mu \quad (2.15)$$

il secondo integrale nella (2.15) può essere riscritto secondo il Teorema di Gauss:

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_\mu \Lambda^\mu = \int_{\partial\Omega} d\sigma_\mu \partial_\mu \Lambda^\mu \quad (2.16)$$

Poiché la variazione del campo (2.5) si annulla sulla frontiera  $\partial\Omega$ , il termine integrale ottenuto nella (2.16) non subisce variazione e dunque non influisce sulla stazionarietà del funzionale d'azione.

Nel caso più generale di un sistema costituito da  $N$  campi distinti  $\phi_l$  (dove l'indice  $l = 1, 2, \dots, N$  etichetta il campo e non è un indice spaziale), si definisce il funzionale d'azione:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_l, \partial_\mu \phi_l) \quad (2.17)$$

e l'equazione di Eulero-Lagrange associata ad ognuno degli  $N$  campi è:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_l} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_l} = 0 \quad (2.18)$$

Sottolineamo a questo punto che l'azione, e quindi la densità di Lagrangiana, deve essere *reale*. Se  $\mathcal{L}$  fosse complessa, la parte reale ed immaginaria della (2.18) darebbero luogo a  $2N$  equazioni reali per  $N$  campi: il problema sarebbe dunque sovradeterminato. Concludiamo introducendo le nozioni basilari del formalismo Hamiltoniano per lo studio della dinamica dei campi, il quale risulterà occasionalmente utile nei capitoli 4 e 5. Sia un sistema di  $N$  campi  $\phi_l$  e  $\mathcal{L}$  la sua densità di Lagrangiana, definiamo i campi  $\pi_l$  *canonicamente coniugati* ai  $\phi_l$  come:

$$\pi_l(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_l} \quad (\dot{\phi} \equiv \partial \phi_l / \partial t) \quad (2.19)$$

Si definisce la *funzione Hamiltoniana*  $H$  del sistema come la trasformata di Legendre della Lagrangiana:

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L \quad (2.20)$$

La (2.20) può essere espressa nei termini della densità di Lagrangiana come:

$$H = \int d^3\mathbf{x} (\pi_l \dot{\phi}_l - \mathcal{L}) \quad (2.21)$$

L'integranda della (2.21) è ciò che viene detta *densità di Hamiltoniana*  $\mathcal{H}$ :

$$\mathcal{H} = \pi_l \dot{\phi}_l - \mathcal{L} \quad (2.22)$$

Come per lo studio della dinamica delle particelle, la funzione Hamiltoniana rappresenta fisicamente l'energia del sistema. La stessa interpretazione è possibile per lo studio dei campi ed in particolar modo verrà sfruttata per individuare la configurazione di minima energia, detta *ground state*.

## 2.2 Campi scalari

Sia una trasformazione di Poincaré delle coordinate :

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (2.23)$$

Un generico campo  $\phi$  si trasforma a seguito alla (2.23) tramite le relazioni (1.1-1.6) a seconda della sua natura. D'ora in avanti focalizzeremo la nostra trattazione sullo specifico caso di campi scalari, i quali restano invariati per trasformazioni di Poincaré:

$$\phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(x) \quad (2.24)$$

E' rilevante sottolineare che nel passaggio ad una teoria quantistica, i campi scalari vengono associati a particelle di *spin* 0.

### 2.2.1 Dinamica dei campi scalari

Sia  $\phi(x)$  un *campo scalare reale*, la sua dinamica è descritta da una Lagrangiana del tipo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.25)$$

Il primo termine è detto *termine cinetico* in analogia alla dinamica delle particelle, mentre  $V(\phi)$  è una generica funzione del campo  $\phi$ .

L'equazione del moto (2.13) assume esplicitamente la forma:

$$\square\phi = -\frac{dV}{d\phi} \quad (2.26)$$

dove  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$  è l'operatore d'alambertiano. La dinamica del campo  $\phi$  è determinata dalla scelta della funzione  $V(\phi)$  e consente numerose fenomenologie di campi con spin nullo. In ambito quantistico, una teoria di questo tipo è adatta a descrivere la dinamica di particelle neutre e con spin 0, ad esempio fotoni e pioni ( $\pi^0$ ).

Sia ora un *campo scalare complesso*  $\phi$ , in maniera analoga alla (2.25) si definisce la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - V(\phi^* \phi) \quad (2.27)$$

dove l'asterisco indica l'operazione di coniugazione complessa.

La dinamica dei campi complessi assume il doppio dei gradi di libertà rispetto al corrispettivo reale, i quali sono contenuti nel campo stesso  $\phi$  e nel suo complesso coniugato  $\phi^*$ , o in una loro qualsiasi combinazione lineare. Quindi, le equazioni della dinamica sono ora due e possono essere ottenute a partire dalla (2.18) considerando  $\phi$  e  $\phi^*$  come un doppietto di campi indipendenti:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (2.28)$$

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = 0 \quad (2.29)$$

Esplicitamente, le equazioni del moto assumono la forma:

$$\square\phi^* = -\frac{dV}{d\phi} \quad \square\phi = -\frac{dV}{d\phi^*} \quad (2.30)$$

La fenomenologia dei campi scalari complessi è notevolmente più ricca della loro controparte reale. Ciò è dovuto alla simmetria della Lagrangiana rispetto a *trasformazioni globali* del gruppo  $U(1)$ :  $\phi \mapsto e^{i\alpha} \phi$  con  $\alpha$  parametro reale costante. Infatti, la diretta conseguenza di tale simmetria è l'esistenza di una grandezza conservata<sup>1</sup>  $Q$  che identifichiamo a posteriori come la carica del campo. Nell'ambito di una teoria quantistica, campi scalari complessi sono associati a particelle *cariche* di spin 0.

---

<sup>1</sup>Qui stiamo citando il risultato del noto *Teorema di Noether* nell'ambito della teoria dei campi. Una sua discussione è esclusa da questa trattazione, ma può essere consultato al capitolo 10 del testo di Barone [1].

## 2.2.2 Campi scalari massivi e Lagrangiana di Klein-Gordon

Un esempio rilevante di campo scalare è dato dal campo scalare di *Klein-Gordon*. Si definisce la sua Lagrangiana come:

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 \quad (2.31)$$

Notiamo che  $\mathcal{L}_{KG}$  ha la forma (2.25), in cui si è posto  $V(\phi) = (1/2)\mu^2\phi^2$ . Il parametro  $\mu$  è detta *massa* del campo, infatti questo coincide con la massa della particella associata al campo nell'ambito di una teoria quantistica.

L'equazione del moto che si ottiene a partire dalla (2.26) coincide con l'*equazione di Klein-Gordon* per una particella libera di massa  $m$ :

$$(\square + \mu^2)\phi = 0 \quad (2.32)$$

Cerchiamo una soluzione della (2.32) nella forma di un'onda piana  $e^{-ik_\mu x^\mu}$ , dove  $k^\mu \equiv (k^0, \vec{k})$ :

$$(\square + \mu^2)e^{-ik_\mu x^\mu} = [(-i)^2 k_\mu k^\mu + \mu^2]e^{-ik_\mu x^\mu} = [-k_\mu k^\mu + \mu^2]e^{-ik_\mu x^\mu} = 0 \quad (2.33)$$

Quindi  $e^{-ik_\mu x^\mu}$  è soluzione della (2.32) se è soddisfatta l'equazione:

$$k_\mu k^\mu = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = \mu^2 \quad (2.34)$$

Posto  $k^0 = \omega$ , la (2.34) diventa:

$$\omega^2 - |\vec{k}|^2 = \mu^2 \quad (2.35)$$

A questo punto, identificando la frequenza  $\omega$  del campo con l'energia  $E$  di un'eventuale particella ed il vettore d'onda  $\vec{k}$  con il suo impulso  $\vec{p}$ , è dunque possibile ricondursi alla nota relazione *energia-impulso* per una particella di massa  $\mu$ :

$$E^2 - |\vec{p}|^2 = \mu^2 \quad (2.36)$$

Questo risultato giustifica il nome *massa* dato al parametro  $\mu$  e riduce la distanza tra i concetti di campo e particella, i quali coincidono nella teoria quantistica dei campi. Nell'ambito di una teoria quantistica, il campo scalare di Klein-Gordon costituisce la base su cui vengono costruiti i modelli per particelle *massive* con spin 0.

## Capitolo 3

# Accenni di teoria dei gruppi

La *teoria dei gruppi* e delle loro *rappresentazioni* costituisce il linguaggio naturale con cui astrarre in termini matematici il concetto di *simmetria*. Sebbene inizialmente questa branca dell'algebra astratta fu sviluppata indipendentemente dalle sue concrete applicazioni, nei primi decenni del ventesimo secolo si cominciò a comprendere la sua rilevanza nello sviluppo delle teorie fisiche moderne. Fu necessario poco tempo affinché lo studio delle simmetrie interne dei sistemi naturali avvenisse mediante la sistematica applicazione della teoria dei gruppi. A rendere ancor più rilevante questo connubio tra algebra e teorie fisiche furono le conferme sperimentali a favore delle *Teorie di Gauge* durante la seconda metà del secolo, le quali sono radicate su principi di simmetria.

In questo capitolo sono esposti i concetti basilari e strettamente necessari per l'impiego della teoria dei gruppi nello studio della dinamica dei campi. Una trattazione esaustiva dell'argomento richiederebbe uno sforzo che esula dai nostri scopi, per questo motivo verranno riportati principalmente risultati senza dimostrazione e senza la pretesa di una stringente formalità. [3]

## 3.1 Gruppi e rappresentazioni

Sia un insieme  $G$  ed una mappa:

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

detta *legge di composizione*. Diremo che la coppia composta da  $G$  e da una sua legge di composizione è un *gruppo* se le seguenti condizioni sono soddisfatte:

- *associatività*: la legge di composizione rispetta la proprietà associativa

$$g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 \quad g_1, g_2, g_3 \in G \tag{3.2}$$

- *esistenza dell'elemento neutro*: esiste un elemento del gruppo  $e \in G$ , detto *elemento neutro*, che soddisfa

$$e \cdot g = g \cdot e = g \quad g \in G \tag{3.3}$$

- *esistenza dell'inverso*: ogni elemento del gruppo  $g \in G$  ammette un *elemento inverso*  $g^{-1} \in G$  definito come

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e \tag{3.4}$$

In generale, la (3.1) non è commutativa:

$$g_1 \cdot g_2 \neq g_2 \cdot g_1 \quad g_1, g_2 \in G \tag{3.5}$$

Un gruppo dotato di legge di composizione commutativa è detto *Abeliano*.

D'ora in avanti, al fine di alleggerire la notazione chiameremo *prodotto* la legge di composizione e la indicheremo senza alcun simbolo esplicito:  $g_1 \cdot g_2 \equiv g_1 g_2$ .

Siano uno spazio vettoriale  $\mathcal{V}$  su un campo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$  e  $U$  un gruppo di operatori lineari definiti su di esso. Sia ora un gruppo  $G$ , diremo che  $U(G)$  è una *rappresentazione* di  $G$  se esiste un omomorfismo:

$$\begin{aligned} G &\rightarrow U(G) \\ g &\mapsto u(g) \end{aligned} \tag{3.6}$$



che associa ad ogni elemento del gruppo un operatore lineare. Se la (3.6) è iniettiva diremo che  $U(G)$  è una rappresentazione *fedele* di  $G$ . La dimensione dello spazio vettoriale su cui sono definiti gli elementi di  $U(G)$  è detta *dimensione della rappresentazione*. Essendo un omomorfismo, la (3.6) conserva la struttura del gruppo  $G$  ed il suo prodotto:

$$u(g_1)u(g_2) = u(g_1g_2) \quad (3.7)$$

$$u(e) = \mathbb{1} \quad (3.8)$$

$$u(g^{-1}) = u(g)^{-1} \quad (3.9)$$

dove  $\mathbb{1}$  indica l'operatore identità.

### 3.1.1 Gruppi di Lie

E' doveroso sottolineare che idealmente lo studio generale dei *gruppi di Lie* vada affrontato con particolare cura data la loro rilevanza in diverse branche della matematica. Noi ci limiteremo ad una trattazione parziale e pragmatica dell'argomento.

Sia un gruppo  $G$ , diremo che questo è un gruppo di Lie se esiste una parametrizzazione continua ed iniettiva dei suoi elementi:

$$g = g(\theta^a) \quad g \in G \quad (3.10)$$

dove  $\theta^a$  è una  $N$ -upla di parametri continui che può comodamente essere rappresentata come un vettore  $\vec{\theta}$ . Se la parametrizzazione è un'applicazione di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , allora è possibile visualizzare  $G$  come una *varietà differenziale* con struttura di gruppo.

E' convenzione assumere che il vettore nullo sia contenuto nello spazio dei parametri e che corrisponda all'elemento neutro del gruppo, che qui indichiamo come  $e \equiv 1$ :

$$g(\vec{0}) = 1 \quad (3.11)$$

Data la continuità della parametrizzazione (3.10), per piccoli valori di un'opportuna norma di  $\vec{\theta}$  è possibile espandere gli elementi del gruppo secondo lo sviluppo:

$$g(\vec{\theta}) = 1 + \theta^a t_a + O(\theta^2) \quad (3.12)$$

dove i  $t_a$  sono detti *generatori infinitesimi* del gruppo di Lie.

Da un punto di vista geometrico, dato che:

$$t_a = \left. \frac{\partial g(\vec{\theta})}{\partial \theta^a} \right|_{\vec{\theta}=\vec{0}} \quad (3.13)$$

i generatori infinitesimi costituiscono una base dello spazio tangente a  $G$  in un intorno dell'elemento neutro.

Definiamo il *commutatore* dei generatori infinitesimi come:

$$[t_a, t_b] = t_a t_b - t_b t_a \quad (3.14)$$

I generatori infinitesimi di un gruppo di Lie sono algebricamente chiusi rispetto alla (3.14):

$$[t_a, t_b] = f_{ab}^c t_c \quad (3.15)$$

I  $t_a$  danno luogo ad una struttura algebrica detta *algebra di Lie*, caratterizzata dalle relazioni:

$$[t_a, t_b] + [t_b, t_a] = 0 \quad (3.16)$$

$$[t_a, [t_b, t_c]] + [t_b, [t_c, t_a]] + [t_c, [t_a, t_b]] = 0 \quad (3.17)$$

Le costanti  $f_{ab}^c$  che compaiono nella (3.15) sono dette *costanti di struttura dell'algebra di Lie*. Tali costanti caratterizzano  $G$  a un livello fondamentale, infatti assumono gli stessi valori indipendentemente dalla rappresentazione del gruppo. Inoltre, queste soddisfano delle relazioni analoghe alle (3.16-3.17):

$$f_{ab}^c + f_{ba}^c = 0 \quad (3.18)$$

$$f_{ae}^d f_{bc}^e + f_{be}^d f_{ca}^e + f_{ce}^d f_{ab}^e = 0 \quad (3.19)$$

Ad ogni parametrizzazione (3.10) di un gruppo di Lie è associata una *parametrizzazione esponenziale*:

$$g(\vec{\theta}) = e^{\theta^a t_a} \quad (3.20)$$

Infatti, se la (3.10) è sufficientemente regolare allora il limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} g(\vec{\theta}/N)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} (1 + \theta^a t_a/N + O(1/N^2))^N = e^{\theta^a t_a} \quad (3.21)$$

è contenuto in  $G$ . La parametrizzazione (3.20) è la più utilizzata per indicare gli elementi di un gruppo di Lie date le sue comode proprietà.

## 3.2 Il gruppo delle rotazioni $SO(3)$

Definiamo il gruppo delle rotazioni in 3 dimensioni come il gruppo delle trasformazioni lineari continue che lasciano invariata la norma  $|\vec{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$  dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$ :

$$|\vec{x}|^2 \mapsto |\vec{x}'|^2 = |\vec{x}|^2 \quad (3.22)$$

per  $\vec{x} = (x, y, z)$ ,  $\vec{x}' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ .

Una sua possibile rappresentazione è tramite il gruppo  $SO(3)$  delle matrici ortogonali  $3 \times 3$  con determinante  $+1$ . Infatti, queste costituiscono un gruppo di operatori lineari che agiscono su  $\mathbb{R}^3$  conservando la norma euclidea:

$$R : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.23)$$

$$\vec{x} \mapsto \vec{x}' = R\vec{x} \quad (3.24)$$

dove  $R \in SO(3)$ . Si verifica banalmente che la (3.23) soddisfa sempre la (3.22):

$$(\vec{x}')^T \vec{x}' = \vec{x}^T R^T R \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} \quad (3.25)$$

con  $\vec{x}^T \vec{x} = |\vec{x}|^2$  norma euclidea di  $\vec{x}$  e nella seconda uguaglianza è stata utilizzata la definizione di matrice ortogonale  $R^T = R^{-1}$ .

Il gruppo  $SO(3)$  è un gruppo di Lie a 3 parametri reali, una sua parametrizzazione continua può essere realizzata mediante gli angoli  $(\phi, \psi, \theta)$  associati rispettivamente alle rotazioni attorno agli assi ordinati  $(x, y, z)$ . Esplicitamente, gli elementi di  $SO(3)$  rappresentanti le rotazioni attorno agli assi ordinati sono:

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$R_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Mediante la (3.13) è possibile ottenere dalle (3.26-3.28) i generatori infinitesimi di  $SO(3)$ :

$$J_x = \frac{1}{i} \frac{dR_x(\phi)}{d\phi} \Big|_{\vec{\phi}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$J_y = \frac{1}{i} \frac{dR_y(\psi)}{d\psi} \Big|_{\vec{\psi}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$J_z = \frac{1}{i} \frac{dR_z(\theta)}{d\theta} \Big|_{\vec{\theta}=0} = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

dove il fattore moltiplicativo  $1/i$  è stato aggiunto per convenzione.

I generatori infinitesimi  $(J_x, J_y, J_z) \equiv \vec{J}$  soddisfano la relazione di commutazione:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ij}^k J_k \quad i, j, k = x, y, z \quad (3.32)$$

dove  $\epsilon_{ij}^k$  è il tensore totalmente antisimmetrico di rango 3 definito come:

$$\epsilon_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{per permutazioni pari di } i, j, k \\ -1 & \text{per permutazioni dispari di } i, j, k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.33)$$

Inoltre, notiamo dalle (3.29-3.31) che i generatori sono hermitiani:  $J_i^T = J_i^*$ .

I generatori infinitesimi  $\vec{J}$  con la relazione di commutazione (3.32) formano l'algebra di Lie del gruppo  $SO(3)$ , le cui costanti di struttura sono  $\epsilon_{ij}^k$ . In particolar modo, i  $\vec{J}$  soddisfano le relazioni (3.16-3.17) mentre le costanti  $\epsilon_{ij}^k$  soddisfano le (3.18-3.19).

In base alla (3.20) è possibile esprimere gli elementi di  $SO(3)$  secondo la parametrizzazione esponenziale:

$$R(\vec{\theta}) = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} \quad (3.34)$$

dove si è definito il vettore  $\vec{\theta} = (\phi, \psi, \theta)$  su un opportuno spazio euclideo ausiliario.

## Capitolo 4

# Rottura spontanea di Simmetria

A partire dalla seconda metà del ventesimo secolo, il metodo principale per ottenere la teoria dinamica dell'interazione per un campo quantistico si è confermato essere l'applicazione del *principio di Gauge*. Il principio di Gauge è un principio dinamico il cui concetto fondamentale consiste nell'imporre una determinata simmetria interna *locale* alla dinamica libera di un campo, ottenendo di conseguenza un modello per l'interazione associata al gruppo di simmetria selezionato. La rilevanza delle teorie dinamiche ottenute secondo questo processo, dette Teorie di Gauge, risiede nella loro caratteristica di essere *rinormalizzabili*<sup>1</sup>.

Tuttavia, le teorie quantistiche dei campi ottenute mediante il principio di Gauge prevedono che i campi mediatori delle interazioni siano necessariamente *massless*, cioè associati a particelle con massa nulla. Ciò è in contraddizione con l'osservazione sperimentale di alcuni campi mediatori dotati di massa, specificatamente i bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$ .

Nel 1964 il fisico britannico P. Higgs formulò un metodo per conferire massa ai campi d'interazione nelle Teorie di Gauge, noto come *meccanismo di Higgs*. Questo processo sfrutta i risultati ottenuti nei primi anni '60 dai fisici teorici Y. Nambu e J. Goldstone riguardo al fenomeno della *rottura spontanea di simmetria*, il quale si verifica quando lo stato fondamentale di un sistema dinamico non rispetta una simmetria interna della sua Lagrangiana.

In questo capitolo ci limiteremo ad introdurre concettualmente la rottura spontanea di simmetria per un campo quantistico ed a valutarne alcuni esempi rilevanti. La nostra trattazione si concluderà con la discussione di tale fenomeno rispetto al gruppo di simmetria  $SO(3)$ , il quale rappresenta un esempio significativo e dalle frequenti applicazioni. [5]

---

<sup>1</sup>La rinormalizzazione di una teoria quantistica dei campi è una tecnica di rimozione degli infiniti che consente il confronto tra le previsioni teoriche del modello ed i risultati sperimentali. Tale concetto non verrà discusso ulteriormente in questa trattazione e si rimanda al capitolo 9 del testo di Ryder [4]

## 4.1 Rottura spontanea di simmetria in un ferromagnete

Il concetto di rottura spontanea di simmetria era già noto nell'ambito della fisica degli stati condensati prima che acquistasse rilevanza nella teoria quantistica dei campi. L'esempio paradigmatico per introdurre tale concetto riguarda la magnetizzazione di un ferromagnete.

Si consideri un ferromagnete infinito, nel suo stato paramagnetico sopra la temperatura di Curie  $T > T_C$  le fluttuazioni termiche dominano sulle interazioni dipolo-dipolo tra i singoli atomi descritte da un'Hamiltoniana invariante per rotazioni, di conseguenza il loro spin risulta orientato isotropicamente nello spazio. Ciò fa sì che la magnetizzazione del sistema sia nulla e questo esibisca una simmetria rotazionale rappresentata dal gruppo di simmetria  $SO(3)$ .

Ora si supponga di diminuire la temperatura del ferromagnete al di sotto della sua temperatura di Curie  $T < T_C$ , nel processo gli spin degli atomi tenderanno ad orientarsi coerentemente tra di loro, generando una magnetizzazione non nulla in una specifica direzione dello spazio. In questo stato il sistema non esibisce più invarianza rotazionale rispetto al gruppo di simmetria  $SO(3)$  a causa dell'esistenza di una direzione privilegiata, ma risulta essere simmetrico solamente rispetto a trasformazioni del gruppo  $SO(2)$  attorno all'asse identificato dal vettore magnetizzazione. In particolar modo, ciò è possibile data l'invarianza rotazionale delle interazioni dipolo-dipolo attorno a tale asse. Diremo allora che si è verificata la rottura spontanea di simmetria dal gruppo  $SO(3)$  al gruppo  $SO(2)$ .

E' importante sottolineare che lo stato del ferromagnete in cui emerge una magnetizzazione netta non è unico, ma infinitamente degenero. Infatti, la direzione del vettore magnetizzazione è scelta casualmente al momento del passaggio al di sotto della temperatura di Curie e non può essere determinata a priori, né altera la fisica del sistema. Notiamo inoltre che tutti i possibili stati con magnetizzazione non nulla sono collegati tra loro mediante trasformazioni del gruppo  $SO(3)$ . Questo non è un caso, ma la conseguenza della simmetria iniziale del sistema che è stata rotta riducendo la temperatura al di sotto di un valore critico, rappresentato dalla temperatura di Curie.

Sottolineiamo i punti chiave di questo esempio che incapsulano completamente il concetto di rottura spontanea di simmetria:

- Esiste un ground state del sistema che può essere raggiunto variando con continuità un determinato parametro. In questo caso il parametro è rappresentato dalla temperatura  $T$  del ferromagnete ed il suo ground state è raggiunto per  $T < T_C$ .
- Il ground state rispetta solo parzialmente una simmetria interna del sistema o non esibisce alcuna simmetria. Si è visto come il ferromagnete ammetta una simmetria

interna rispetto al gruppo  $SO(3)$ , mentre il suo ground state esibisce una simmetria solamente rispetto al gruppo  $SO(2)$ .

- Il ground state non è univoco ed è degenere rispetto a trasformazioni del gruppo di simmetria originale del sistema. Infatti, i diversi ground states del ferromagnete sono collegati da trasformazioni del gruppo  $SO(3)$ .

Vedremo come queste caratteristiche generali emergano analogamente anche nell'ambito della teoria quantistica dei campi.

## 4.2 Rottura spontanea di simmetria nell'ambito della teoria quantistica dei campi

Il fenomeno della rottura spontanea di simmetria gioca un ruolo chiave nella teoria quantistica dei campi, permettendo di conciliare le Teorie di Gauge per le interazioni fondamentali con le osservazioni sperimentali di campi mediatori dotati di massa. Al fine di poter approfondire tale concetto, è necessario introdurre i concetti di simmetria interna e di ground state per un sistema nell'ambito della teoria dei campi  $\phi_l$ .

Consideriamo un sistema di campi  $\phi_l$  descritto da una Lagrangiana  $\mathcal{L}$ . Diremo che un dato gruppo di trasformazioni agenti esclusivamente sui  $\phi_l$  e non sulle coordinate, rappresenta una *simmetria interna* del sistema se la Lagrangiana rimane invariata nel processo:

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}' = \mathcal{L} \quad (4.1)$$

In particolar modo, le equazioni di Eulero-Lagrange per i campi  $\phi_l$  risulteranno inalterate. Più in generale, è a volte possibile rilassare questa condizione imponendo che solamente le equazioni del moto rimangano uguali ed ammettendo che nella Lagrangiana compaiano dei termini aggiuntivi, i quali tuttavia devono essere trasparenti rispetto alla dinamica dei campi.

Consideriamo un campo scalare<sup>2</sup> reale  $\phi$ , la cui dinamica è rappresentata dalla Lagrangiana (2.25). In accordo con la (2.22), la sua densità di Hamiltoniana è data da:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \quad (4.2)$$

dove  $\dot{\phi}$  è definito nella (2.19).

Definiamo il ground state del campo  $\phi$  come la configurazione che minimizza la sua energia, cioè il valore di  $\mathcal{H}$ . Dalla (4.2) segue che il ground state del campo  $\phi$  è dato dalla

---

<sup>2</sup>In questa trattazione saranno discussi solamente campi scalari, ma il fenomeno della rottura spontanea di simmetria assume la stessa rilevanza anche per le altre tipologie di campi.

sua configurazione costante che minimizza il valore del potenziale  $V(\phi)$ .

Consideriamo ora un multipletto di  $N$  campi scalari reali  $\phi_i$  ed indichiamoli schematicamente tramite il vettore  $\vec{\phi}$  di un opportuno spazio ausiliario. Assumiamo che i campi  $\vec{\phi}$  seguano una dinamica descritta dalla Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - V(\vec{\phi}^2) \quad (4.3)$$

dove:  $\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} = \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 + \dots$  e  $\vec{\phi}^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \dots$ .

Notiamo che chiaramente una dinamica di questo tipo non è di natura generale, ma servirà specificatamente alla discussione dei prossimi paragrafi. In particolar modo, notiamo che esibisce una simmetria interna rispetto al gruppo di trasformazioni  $SO(N)$ .

Applicando nuovamente la definizione (2.22), segue che la densità di Hamiltoniana del sistema è data da:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\phi}}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \vec{\phi})^2 + V(\vec{\phi}^2) \quad (4.4)$$

dove:  $\dot{\vec{\phi}}^2 = \dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2 + \dots$  e  $(\nabla \vec{\phi})^2 = (\nabla \phi_1)^2 + (\nabla \phi_2)^2 \dots$ .

Dunque, analogamente a quanto visto per un unico campo scalare, il ground state di un sistema di campi scalari  $\vec{\phi}$  che seguono una dinamica dettata dalla (4.3), è dato dalla configurazione costante dei singoli campi che minimizza il potenziale  $V(\vec{\phi}^2)$ .

### 4.2.1 Rottura spontanea di simmetria rispetto al gruppo $SO(2)$

Consideriamo un doppietto di campi scalari reali  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2)$  la cui dinamica è descritta da una Lagrangiana  $\mathcal{L}$  data dalla (4.3). Notiamo immediatamente che la Lagrangiana  $\mathcal{L}$  è invariante rispetto a trasformazioni del gruppo  $SO(2)$  sui campi  $\vec{\phi}$ :

$$\vec{\phi} \mapsto \vec{\phi}' = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \vec{\phi} \quad (4.5)$$

Sia ora il potenziale  $V(\vec{\phi}^2)$  definito come:

$$V(\vec{\phi}^2) = \frac{1}{2} \mu^2 \vec{\phi}^2 + \frac{1}{4} \lambda (\vec{\phi}^2)^2 \quad (4.6)$$

così che la Lagrangiana del sistema diventi:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{2} \mu^2 \vec{\phi}^2 - \frac{1}{4} \lambda (\vec{\phi}^2)^2 \quad (4.7)$$

Notiamo che i primi due termini in  $\mathcal{L}$  sono la somma delle Lagrangiane di Klein-Gordon (2.31) di due campi scalari  $\phi_1, \phi_2$  entrambi con massa  $\mu$ . Inoltre, si è aggiunto un termine di interazione tra i due campi, la cui intensità è dettata dalla costante positiva  $\lambda$ .



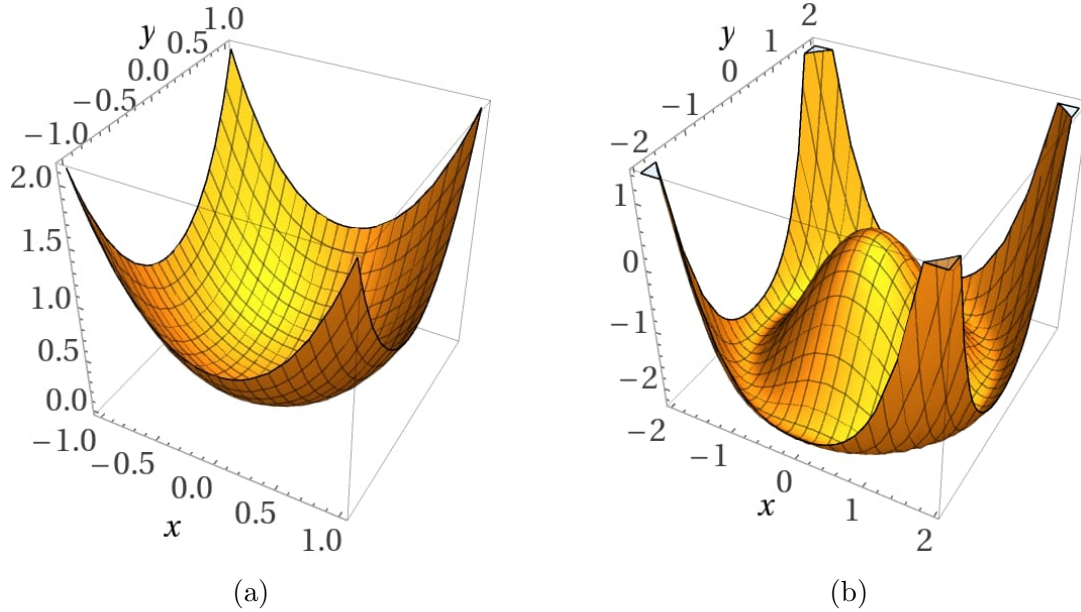


Figura 4.1: Grafici del potenziale (4.6) per  $\mu^2 > 0$  (4.1a) e per  $\mu^2 < 0$  (4.1b).

E' rilevante sottolineare che la costante di accoppiamento  $\lambda$  debba essere necessariamente positiva affinché il potenziale (4.6) ammetta un punto di minimo, infatti per  $\lambda < 0$  questo assume valori che non sono inferiormente limitati.

Per  $\mu^2 > 0$  (Fig. 4.1a), il potenziale (4.6) ha un unico minimo in  $\vec{\phi}_0 = (0, 0)$ , il quale è dunque identificato come il ground state del sistema. In particolare modo, il ground state  $\vec{\phi}_0$  è mappato in se stesso per trasformazioni del gruppo  $SO(2)$ , quindi soddisfa la stessa simmetria della Lagrangiana.

La Lagrangiana  $\mathcal{L}_{PO}$  delle piccole oscillazioni in un intorno di  $\vec{\phi}_0$  è:

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{2} \mu^2 \vec{\phi}^2 \quad (4.8)$$

Notiamo come la (4.8) sia simmetrica rispetto a trasformazioni del gruppo  $SO(2)$  e descriva la dinamica del ground state come due campi scalari  $\phi_1, \phi_2$  entrambi dotati di massa  $\mu$ .

Consideriamo ora il caso in cui  $\mu^2 < 0$ , la (4.7) diventa:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} + \frac{1}{2} |\mu^2| \vec{\phi}^2 - \frac{1}{4} \lambda (\vec{\phi}^2)^2 \quad (4.9)$$

la quale se sviluppata in prossimità di  $\vec{\phi}_0 = (0, 0)$  fornisce la seguente Lagrangiana delle piccole oscillazioni:

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} + \frac{1}{2} |\mu^2| \vec{\phi}^2 \quad (4.10)$$

Ora però notiamo un evidente problema, infatti la (4.10) descrive una teoria malsana per due campi scalari massivi  $\phi_1, \phi_2$  entrambi con massa immaginaria. Chiaramente ciò non è accettabile ed infatti, è necessario rendersi conto che ora la configurazione del sistema per  $\vec{\phi}_0 = (0, 0)$  è un massimo locale di  $V(\vec{\phi}^2)$  e non più un minimo. Nel caso in cui  $\mu^2 < 0$  (Fig. 4.1b), il potenziale (4.6) ammette infiniti punti di minimo identificati dalla condizione:

$$\vec{\phi}_0^2 = \frac{|\mu^2|}{\lambda} \equiv \nu^2 \quad (4.11)$$

Selezioniamo arbitrariamente un punto di minimo, ad esempio  $\vec{\phi}_0 = (\nu, 0)$ , il quale è dunque identificato come il ground state del sistema. Notiamo immediatamente che in questo caso, il ground state del sistema non è mappato in se stesso a seguito di trasformazioni del gruppo  $SO(2)$  ed in particolar modo, ciò è indipendente dalla scelta del punto di minimo. Siamo quindi in presenza del fenomeno della rottura spontanea di simmetria rispetto al gruppo  $SO(2)$ . Vediamo quali sono le conseguenze sulla dinamica dei campi  $\phi_1, \phi_2$ .

Definiamo le oscillazioni dei campi  $\phi_1, \phi_2$  rispetto al ground state:  $\vec{\phi}' \equiv \vec{\phi} - \vec{\phi}_0 \equiv (\eta, \xi)$ . Sviluppando il potenziale (4.6) in un intorno di  $\vec{\phi}_0$  si ottiene la Lagrangiana delle piccole oscillazioni per i campi  $\eta, \xi$ :

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi}' \cdot \partial^\mu \vec{\phi}' + \eta^2 (|\mu^2| - 3\lambda\nu^2) + \xi^2 (|\mu^2| - \lambda\nu^2) \quad (4.12)$$

la quale, richiamando la (4.11) si semplifica in:

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi - |\mu^2| \eta^2 \quad (4.13)$$

La (4.13) descrive la dinamica libera di un campo  $\eta$  dotato di massa  $2|\mu|$  e di un campo  $\xi$  massless. Il carattere massless del campo  $\xi$  può essere interpretato come l'assenza di una "forza" di richiamo rispetto a perturbazioni del ground state nella direzione del luogo geometrico dei minimi del potenziale. Quindi, le eventuali osservazioni di particelle massless corrisponderebbero a fluttuazioni di energia nulla da un possibile ground state ad un altro.

Questi risultati possono essere generalizzati in ciò che è noto sotto il nome di *Teorema di Goldstone*, il quale assicura che, in caso di rottura spontanea di simmetria, nel ground state del sistema compaia un numero di campi massless pari al numero di generatori della simmetria rotta.

### 4.3 Rottura spontanea di simmetria rispetto al gruppo $SO(3)$

Consideriamo un tripletto di campi scalari reali  $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , la cui dinamica è descritta da una Lagrangiana  $\mathcal{L}$  del tipo (4.3). Chiaramente, la Lagrangiana  $\mathcal{L}$  così definita è invariante rispetto a trasformazioni del gruppo  $SO(3)$ :

$$\vec{\phi} \mapsto \vec{\phi}' = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}} \vec{\phi} \quad (4.14)$$

dove  $e^{i\vec{J}\cdot\vec{\theta}}$  in accordo con la (3.34) rappresenta la generica matrice di rotazione attorno ad una terna orientata di assi ortogonali nello spazio ausiliario a cui appartiene il vettore  $\vec{\phi}$ . Quindi il sistema esibisce una simmetria interna rispetto al gruppo di trasformazioni  $SO(3)$ .

Sia ora il potenziale:

$$V(\vec{\phi}^2) = \frac{1}{2}\mu^2\vec{\phi}^2 + \frac{1}{4}\lambda(\vec{\phi}^2)^2 \quad (4.15)$$

Dunque, la Lagrangiana del sistema assume la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi} \cdot \partial^\mu\vec{\phi} - \frac{1}{2}\mu^2\vec{\phi}^2 - \frac{1}{4}\lambda(\vec{\phi}^2)^2 \quad (4.16)$$

Analogamente a quanto visto nel paragrafo precedente, la (4.16) descrive la dinamica di 3 campi scalari dotati di massa  $\mu$ , i quali sono accoppiati mediante un'interazione la cui intensità è dettata dalla costante positiva  $\lambda$ .

Nel caso in cui  $\mu^2 > 0$ , il potenziale (4.14) ammette un unico minimo in  $\vec{\phi}_0 = (0, 0, 0)$ , il quale corrisponde al ground state del sistema. Inoltre, questo rimane invariato sotto trasformazioni del gruppo  $SO(3)$ , dunque esibisce la stessa simmetria della Lagrangiana (4.16) e non si verifica il fenomeno della rottura spontanea di simmetria.

Poniamo ora  $\mu^2 < 0$ , in questo caso il potenziale (4.14) ammette infiniti punti di minimo definiti dalla condizione:

$$\vec{\phi}_0^2 = \frac{|\mu^2|}{\lambda} \equiv a^2 \quad (4.17)$$

Identifichiamo arbitrariamente il ground state del sistema con la configurazione di minimo  $\vec{\phi}_0 = (0, 0, a)$ , orientata lungo la direzione  $\hat{e}_3$  del terzo asse ordinato dello spazio ausiliario. Chiaramente, il ground state  $\vec{\phi}_0$  non è mappato in se stesso a seguito di una trasformazione generica del gruppo di simmetria  $SO(3)$ , quindi si verifica la rottura spontanea di simmetria. Tuttavia, notiamo che il ground state  $\vec{\phi}_0$  è ancora invariante rispetto al sottogruppo di  $SO(3)$  delle trasformazioni di rotazione  $SO(2)$  attorno all'asse  $\hat{e}_3$ . In questo caso, si è dunque verificata la rottura spontanea di simmetria rispetto ai generatori  $J_1, J_2$  del gruppo  $SO(3)$ , mentre è rimasta integra la simmetria rispetto al

generatore  $J_3$ .

In generale, detta  $\hat{n}$  la direzione identificata dalla configurazione di minimo scelta come ground state del sistema, rimarrà sempre integra la simmetria rotazionale del ground state rispetto a trasformazioni del gruppo  $SO(2)$  attorno all'asse  $\hat{n}$ . Quindi, indipendentemente dalla scelta della configurazione di ground state del sistema, si verifica la rottura spontanea di simmetria dal gruppo  $SO(3)$  al gruppo  $SO(2)$ . Vediamo come si riflette ciò sulla dinamica del sistema.

Siano  $\vec{\phi}' \equiv \vec{\phi} - \vec{\phi}_0 \equiv (\zeta, \xi, \eta)$  le perturbazioni dei campi  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  dal ground state del sistema. Sviluppando il potenziale (4.14) in un intorno di  $\vec{\phi}_0$  otteniamo la Lagrangiana delle piccole oscillazioni per i campi  $\zeta, \xi, \eta$ :

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi}' \cdot \partial^\mu \vec{\phi}' + \zeta(|\mu^2| - \lambda a^2) + \xi(|\mu^2| - \lambda a^2) + \eta(|\mu^2| - 3\lambda a^2) \quad (4.18)$$

la quale, richiamando la definizione (4.17) del termine costante  $a$  diventa:

$$\mathcal{L}_{PO} = \frac{1}{2} \partial_\mu \zeta \partial^\mu \zeta + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - |\mu^2| \eta^2 \quad (4.19)$$

La (4.19) descrive la dinamica libera di un campo  $\eta$  dotato di massa  $2\mu$  e di due campi  $\zeta$  e  $\xi$  dal carattere massless.

Si conclude che a seguito della rottura spontanea di simmetria dal gruppo  $SO(3)$  al gruppo  $SO(2)$ , in accordo con l'enunciato del Teorema di Goldstone, nella dinamica del ground state del sistema compaiono due campi massless, corrispondenti al numero di generatori della simmetria rotta.

# Bibliografia

- [1] V. Barone. *Relatività. Principi e applicazioni*. Bollati Boringhieri, 2004.
- [2] Lev D. Landau e Evgenij M. Lifšic. *Fisica Teorica 2: Teoria dei campi*. Editori Riuniti, 1976.
- [3] W.K. Tung. *Group Theory in Physics*. World Scientific, 1985.
- [4] L. Ryder. *Quantum Field Theory, Second Edition*. Cambridge University Press, 1996.
- [5] C. Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions: Second Edition*. Princeton University Press, 2013.