Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Coomologie delle Algebre di Lie ed Applicazione alla Quantizzazione BRST

Relatore:
Prof. Emanuele Latini

Presentata da:
Alessandro Rotondi

Anno Accademico 2023/2024

Sommario

In questa tesi si vuole studiare la teoria delle coomologie in matematica e fisica, con lo scopo di mettere in risalto le applicazioni alle teorie di gauge di cui modello standard delle particelle elementari ne è un esempio. In particolare si introducono nel primo capitolo elementi di geometria differenziale ed algebra come varietà differenziabili, gruppi di Lie ed algebre di Lie, fornendo esempi ed esaminando le relative proprietà sia algebriche che geometriche. Nel secondo capitolo vengono presentati i tensori, le forme differenziali e gli integrali di linea su varietà. Attraverso questi oggetti è possibile introdurre il concetto di coomologia, partendo nello specifico dalla coomologia di De Rham e fornendo gli esempi necessari a comprendere il motivo della definizione di tale struttura. Il terzo capitolo riguarda la coomologia delle algebre di Lie e le relative proprietà, presentando la notazione in termini di ghost ed antighost maggiormente utilizzata in fisica. Si da poi una panoramica della quantizzazione e della coomologia BRST, evidenziando le corrispondenze con la coomologia delle algebre di Lie. Infine, viene presentato un semplice esempio di applicazione all'algebra $Sp(2)$ con lo scopo di ricavare le equazioni di Maxwell del campo elettromagnetico nel caso stazionario.

Indice

Capitolo 1

Varietà Differenziabili, Gruppi ed Algebre di Lie

I concetti matematici di gruppo di Lie ed algebra di Lie possono essere studiati sia da un punto di vista algebrico che geometrico. Entrambi gli approcci sono importanti per comprendere il significato di queste strutture matematiche e dunque capirne le applicazioni.

L'obiettivo del presente capitolo dunque è quello di mostrare come si arriva a definire le strutture sopracitate sia da un punto di vista geometrico che da un punto di vista algebrico. A tale proposito, nelle sezioni 1.1, 1.2, 1.3 ed 1.4, si introducono concetti di geometria differenziale [5] volti a dare poi nella sezione 1.5 la definizione di gruppo di Lie [4] e nella 1.7 una definizione geometrica rigorosa di algebra di Lie [5]. Nella setssa sezione viene inoltre data una definizione più algebrica della struttura di algebra di Lie [4] e del concetto di rappresentazione, mostrando infine che le definizioni sopracitate coincidono. La sezione 1.6 vuole invece essere una rassegna di esempi e proprietà dei principali gruppi di matrici utilizzati in fisica e nelle applicazioni [4].

Dare una definizione formale e rigorosa di algebra di Lie è di notevole importanza al fine di introdurre in modo consistente la coomologia di De Rham ed in seguito la comologia delle algebre di Lie.

1.1 Varietà Differenziabili

Definizione (varietà differenziabile) 1.1.1. *Una varietà differenziabile n-dimensionale M^n è data da:*

1. *uno spazio topologico (T, τ), con T insieme e τ topologia su T*

2. *un insieme di omeomorfismi Φ_α tali che*

$$\forall U_\alpha \in \tau \;\; \Phi(U_\alpha) = V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \tag{1.1.1}$$

chiamate carte.

3. *gli omeomorfismi*

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.1.2}$$

tra aperti di $\mathbb{R}^n$ sono 1:1, invertibili e lisci. Le $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ sono chiamate funzioni di transizione.

La prima condizione della definizione 1.1.1 deriva dal fatto che la più semplice struttura che possiamo dare ad un insieme per poterne dire qualcosa è quella di spazio topologico.

Avendo fissato una topologia τ è dunque possibile definire le mappe Φ_α chiamate carte, le quali devono essere omeomorfismi tra aperti $U_\alpha \in T$ ed aperti $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Le carte ci permettono di associare ad ogni punto $P \in U_\alpha \subset T$ una coordinata in $\mathbb{R}^n$, identificando localmente la varietà topologica con uno spazio euclideo.

L'ultima condizione impone la compatibilità tra le carte, ovvero assicura che la funzione di transizione tra le coordinate definite da Φ_α e Φ_β sia ben definita e liscia, garantendo una corretta identificazione delle coordinate tra le varie carte che coprono la varietà. In particolare la condizione che la funzione di transizione $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ sia liscia è cio che distingue una varietà differenziabile da una varietà topologica.

Definizione (atlante e coordinate locali) 1.1.2. *Data una varietà topologica $M^n = (T, \tau)$, $U_\alpha \in \tau$ aperto, se una famiglia di carte $\Phi_\alpha : T \supset U_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ è tale che $\bigcup_\alpha U_\alpha = T$, allora*

$$A = \{U_\alpha, \Phi_\alpha\} \tag{1.1.3}$$

è un atlante per M^n. $\forall P \in U_\alpha$ le coordinate

$$\Phi_\alpha(P) = (x_1, ..., x_n) \in V_\alpha \subset \mathbb{R}^n \tag{1.1.4}$$

sono chiamate coordinate locali.

Definizione (ricoprimento e sottoricoprimento) 1.1.3. *Dato uno spazio topologico (T, τ), si definisce ricoprimento una famiglia di insiemi $\{U_\alpha\}$ tali che*

$$T \subset \bigcup_\alpha U \tag{1.1.5}$$

con $U_\alpha \in \tau$. Si definisce sottoricoprimento una generica sottofamiglia $\Lambda \subseteq \{U_\alpha\}$ tali che

$$T \subset \Lambda \tag{1.1.6}$$

Un sottoricoprimento si dice finito se ottenuto da una famiglia di insiemi con un numero finito di elementi.

Definizione (spazio topologico compatto) 1.1.4. *Uno spazio topologico T si dice compatto se ogni ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito.*

Esempio 1.1.1. Consideriamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, allora $\mathbb{R}^n$ è una varietà differenziabile in quanto $\forall U$ aperto $\exists \Phi : U \to \mathbb{R}^n$ definita come l'identità

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n) \tag{1.1.7}$$

invertibile e continua. La funzione di transizione

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.1.8}$$

definita come

$$(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n) \tag{1.1.9}$$

con $(x_1, ..., x_n) \in \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ e la sua inversa sono anch'esse l'applicazione identità dunque omeomorfismi di classe C^∞. Le coordinate locali in questo caso sono

$$\Phi(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n) \tag{1.1.10}$$

e coincidono con le coordinate euclidee. Lo spazio euclideo rappresenta dunque una varietà differenziabile.

Esempio 1.1.2. Consideriamo la circonferenza unitaria S^1 immersa in $\mathbb{R}^2$ attraverso la mappa $g : S^1 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$g(P) = (x, y) = (x, \pm\sqrt{1 - x^2}) \tag{1.1.11}$$

con $P \in S^1$. Su questo insieme è possibile definire le carte $\Phi_\alpha : S^1 \supset U_\alpha \to \mathbb{R}$ e $\Phi_\beta : S^1 \supset U_\beta \to \mathbb{R}$, definite come

$$\Phi_\alpha(x, y) = \frac{x}{1 - y} \qquad \Phi_\beta(x, y) = \frac{x}{1 + y} \tag{1.1.12}$$

Le due mappe, dove definite, sono le proiezioni stereografiche di $P = (x, y)$ su $\mathbb{R}$ ed hanno le rispettive inverse date da: $\Phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R} \to U_\alpha \subset S^1$ e $\Phi_\beta^{-1} : \mathbb{R} \to U_\alpha \subset S^1$, definite come

$$\Phi_\alpha^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right) \qquad \Phi_\beta^{-1}(t) = \left(\frac{2t}{t^2 + 1}, \frac{1 - t^2}{t^2 + 1}\right) \tag{1.1.13}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si nota immediatamente che

$$U_\alpha = S^1 \backslash (0,1) \qquad U_\beta = S^1 \backslash (0,-1) \tag{1.1.14}$$

dunque le carte ristrette ai rispettivi aperti e le loro inverse sono continue, avendo coordinate scrivibili come rapporto di funzoni continue. Le due carte $\Phi_\alpha : S^1 \supset U_\alpha \to \mathbb{R}$ e $\Phi_\beta : S^1 \supset U_\beta \to \mathbb{R}$ coprono completamente la sfera ($U_\alpha \cup U_\beta = S^1$) e costituiscono dunque l'atlante $A = \{U_i, \Phi_i\}$ con $i = \alpha, \beta$. Consideriamo ora la funzione di transizione

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : \Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \tag{1.1.15}$$

ben definita in $\Phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, con $U_\alpha \cap U_\beta = S^1 \backslash \{(0,1),(0,-1)\}$. Questi punti vengono mappati in $\Phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{R}$, in particolare

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1})(t) &= \phi_\alpha \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1} \right) = \frac{1}{t} \\ (\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1})(t) &= \phi_\beta \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) = \frac{1}{t} \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

$\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Concludiamo che la funzione di transizione e la sua inversa sono di classe C^∞. Le coordinate locali in questo caso sono

$$\Phi_\alpha(x,y) = \frac{x}{1-y} \qquad \Phi_\beta(x,y) = \frac{x}{1+y} \tag{1.1.17}$$

mentre le coordinate euclidee sono $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il cerchio rappresenta dunque una varietà differenziabile.

Esempio 1.1.3. Consideriamo l'iperbole H^1 immerso in $\mathbb{R}^2$ attraverso la mappa $g : H^1 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$g(P) = (x,y) = (\pm\sqrt{y^2+1}, y) \tag{1.1.18}$$

con $P \in H^1$. Su questo insieme è possibile definire le carte $\Phi_\alpha : H^1 \supset U_\alpha \to \mathbb{R}$ e $\Phi_\beta : H^1 \supset U_\beta \to \mathbb{R}$, definite come

$$\Phi_\alpha(x,y) = y \qquad \Phi_\beta(x,y) = y \tag{1.1.19}$$

Le due mappe, dove definite, sono le proiezioni sull'asse y di $P = (x,y)$ ed hanno le rispettive inverse date da: $\Phi_\alpha^{-1} : \mathbb{R} \to U_\alpha \subset H^1$ e $\Phi_\beta^{-1} : \mathbb{R} \to U_\alpha \subset H^1$, definite come

$$\Phi_\alpha^{-1}(t) = (\sqrt{t^2-1}, t) \qquad \Phi_\beta^{-1}(t) = (-\sqrt{t^2-1}, t) \tag{1.1.20}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Si nota immediatamente che

$$U_\alpha = \{(x,y) \in H^1 : x \geqslant 1\} \tag{1.1.21}$$

ed

$$U_\beta = \{(x,y) \in H^1 : x \leqslant -1\} \tag{1.1.22}$$

dunque le carte ristrette ai rispettivi aperti e le loro inverse sono continue, avendo come coordinate funzioni continue. Le due carte $\Phi_\alpha : H^1 \supset U_\alpha \to \mathbb{R}$ e $\Phi_\beta : H^1 \supset U_\beta \to \mathbb{R}$ coprono completamente l'iperbole ($U_\alpha \cup U_\beta = H^1$) e costituiscono dunque l'atlante $A = \{U_i, \Phi_i\}$ con $i = \alpha, \beta$. Si noti che $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$, dunque non ho funzioni di transizione. Le coordinate locali in questo caso sono

$$\Phi_\alpha(x,y) = y \qquad \Phi_\beta(x,y) = y \tag{1.1.23}$$

mentre le coordinate euclidee sono le $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'iperbole rappresenta dunque una varietà differenziabile.

Esempio 1.1.4. Consideriamo lo spazio proiettivo

$$P^n_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}) / \sim \tag{1.1.24}$$

con la relazione di equivalenza

$$(z_0, ..., z_n) \sim (\lambda z_0, ..., \lambda z_n) \tag{1.1.25}$$

allora $P^n_{\mathbb{C}}$ è una varietà differenziabile. Fissiamo la topologia di Zariski, ovvero $A \subset P^n_{\mathbb{C}}$ è un chiuso se e solo se

$$A = V(I) = \{P \in P^n_{\mathbb{C}} : f(P) = 0 \ \forall f \in I\} \tag{1.1.26}$$

per un qualche $I \subset \mathbb{C}[z_0, ..., z_n]$ ideale di polinomi omogenei. Definiamo gli insiemi aperti

$$U_i = \{[z_0, ..., z_n] \in P^n_{\mathbb{C}} : z_i \neq 0\} = \{[\frac{z_0}{z_i}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_i}] : z_i \neq 0\} \tag{1.1.27}$$

tali che $\bigcup_i^n U_i = P^n_{\mathbb{C}}$. Allora $\exists \alpha_i : U_i \to \mathbb{C}^n$ tali che

$$\alpha_i \left[\frac{z_0}{z_i}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_i}\right] = \left(\frac{z_0}{z_i}, .., \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i} .., \frac{z_n}{z_i}\right) = (x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n) \in \mathbb{C}^n \tag{1.1.28}$$

isomorfismi, con $\mathbb{C}^n$ a sua volta isomorfo ad $\mathbb{R}^{2n}$ mediante $\Psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ tale che

$$\Psi(x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_n) = (a_0, b_0, .., a_{i-1}, b_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, ..a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \tag{1.1.29}$$

concludiamo che $\exists \Phi_i = \Psi \circ \alpha_i : P^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}^{2n}$ tale che

$$\Phi_i \left[\frac{z_0}{z_i}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_i}\right] = (a_0, b_0, .., a_{i-1}, b_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, ..a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n} \tag{1.1.30}$$

isomorfismo continuo. Analogamente $\exists \Phi_i^{-1} = (\Psi \circ \alpha_i)^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to P^n_{\mathbb{C}}$ tale che

$$\Phi_i^{-1}(a_0, b_0, .., a_{i-1}, b_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, ..a_n, b_n) = \left[\frac{z_0}{z_i}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_i}\right] \in P^n_{\mathbb{C}} \tag{1.1.31}$$

isomorfismo continuo, allora Φ_i è un omeomorfismo. Mostriamo inoltre che esiste il seguente isomorfismo $\beta_{ij} : U_i \supset U_i \cap U_j \to U_i \cap U_j \subset U_j$ tale che

$$\alpha_{ij}\left[\frac{z_0}{z_i}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_i}\right] = \left[\frac{z_0}{z_j}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_j}\right] = \left[\frac{z_0}{z_i}\frac{z_i}{z_j}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_i}\frac{z_i}{z_j}\right] \tag{1.1.32}$$

che induce mediante α_i ed α_j gli isomorfismi $\gamma_{ij} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tale che

$$\begin{aligned} &\gamma_{ij}(x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, .., x_n) = \\ &(y_0, .., y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, .., y_{j-1}, y_{j+1}, .., y_n) = \\ &\left(\frac{x_0}{x_j}, ..., \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_{i+1}}{x_j}, .., \frac{x_{j-1}}{x_j}, .. \frac{x_{j+1}}{x_j}, .., \frac{x_n}{x_j}\right) \end{aligned} \tag{1.1.33}$$

e $\gamma_{ij}^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tale che

$$\begin{aligned} &\gamma_{ij}^{-1}(y_0, .., y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, .., y_{j-1}, y_{j+1}, .., y_n) = \\ &(x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, .., x_n) = \\ &\left(\frac{y_0}{y_i}, ..., \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{y_{i+1}}{y_i}, .., \frac{y_{j-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \frac{y_{j+1}}{y_i}, .., \frac{y_n}{y_i}\right) \end{aligned} \tag{1.1.34}$$

Le carte $\Phi_i : P^n_{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}^{2n}$ coprono completamente $P^n_{\mathbb{C}}$ e costituiscono dunque l'atlante $A = \{U_i, \Phi_i\}$ con $0 \leqslant i \leqslant n$. Consideriamo ora la funzione di transizione

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \Phi_j(U_i \cap U_j) \to \Phi_i(U_i \cap U_j) \tag{1.1.35}$$

ben definita in

$$\begin{aligned} &\Phi_j(U_i \cap U_j) = \\ &\{(a_0, b_0, .., a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}.., a_{j-1}, b_{j-i}, a_{j+1}, a_{j+1}, .., a_n, b_n)\} \end{aligned} \tag{1.1.36}$$

con

$$\begin{aligned} (\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})(a_0, b_0, .., a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1}.., a_{j-1}, b_{j-i}, a_{j+1}, a_{j+1}, .., a_n, b_n) = \\ (a_0, b_0.., a_{i-1}, b_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, .., a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, .., a_n, b_n) \end{aligned} \tag{1.1.37}$$

Inoltre si ha

$$(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^{-1} : \Phi_i(U_i \cap U_j) \to \Phi_j(U_i \cap U_j) \tag{1.1.38}$$

con

$$(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^{-1}(a_0, b_0.., a_{i-1}, b_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, .., a_{j-1}, b_{j-1}, a_j, b_j, a_{j+1}, b_{j+1}, .., a_n, b_n) = \\ (a_0, b_0, .., a_{i-1}, b_{i-1}, a_i, b_i, a_{i+1}, b_{i+1} .., a_{j-1}, b_{j-i}, a_{j+1}, a_{j+1}, .., a_n, b_n) \tag{1.1.39}$$

Entrambe le mappe $(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})$ e $(\Phi_i \circ \Phi_j^{-1})^{-1}$ sono di classe C^∞. Le coordinate locali in questo caso sono le

$$\Phi_i \left[\frac{z_0}{z_i}, .., 1, .., \frac{z_n}{z_i} \right] = (a_0, b_0, .., a_{i-1}, b_{i-1}, a_{i+1}, b_{i+1}, ..a_n, b_n) \tag{1.1.40}$$

Lo spazio proiettivo rappresenta dunque una varietà differenziabile.

La circonferenza unitaria S^1 dell'esempio 1.1.2 è una varietà differenziabile compatta, lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ dell'esempio 1.1.1 e l'iperbole H^1 dell'esempio 1.1.3 sono varietà differenziabili non compatte.

Date due varietà differenziabili M_1^n ed M_2^q, è possibile definire la varietà differenziabile $M_1^n \times M_2^q$ di dimensione $n+q$. Un atlante per questa struttura si ottiene dagli atlanti $A_1 = \{U_{1\alpha}, \Phi_{1\alpha}\}$ e $A_2 = \{U_{2\beta}, \Phi_{2\beta}\}$ rispettivamente di M_1^n ed M_2^q, ponendo

$$A = \{U_{1\alpha} \times U_{2\beta}, \Phi_{1\alpha} \oplus \Phi_{2\beta}\} \tag{1.1.41}$$

con $\Phi_{1\alpha} \oplus \Phi_{2\beta} : U_{1\alpha} \times U_{2\beta} \to \mathbb{R}^{n+q}$ tale che

$$\Phi_{1\alpha} \oplus \Phi_{2\beta}(P_1, P_2) = (\Phi_{1\alpha}(P_1), \Phi_{2\beta}(P_2)) \tag{1.1.42}$$

Esempio 1.1.5.: Il toro $T^2 = S^1 \times S^1$ è una varietà differenziabile, in quanto prodotto cartesiano delle due varietà differenziabili S^1. Le carte per T^2 si definiscono mediante l'equazione 1.1.42.

1.2 Spazio Tangente

Definizione (funzione liscia su una varietà differenziabile) 1.2.1. *Data una varietà differenziabile M^n, definiamo la funzione $f : M^n \to \mathbb{R}^q$. Allora f è una funzione liscia se per ogni $P \in M^n$ esiste una carta $\Phi : M^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ tale che*

$$f \circ \Phi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q \tag{1.2.1}$$

è liscia, con $P \in U$.

Un caso particolare delle funzioni liscie sulla varietà differenziabile M^n della definizione 1.2.1 sono le funzioni $f : M^n \supset U \to \mathbb{R}$, che caratterizzeremo come appartenenti all'insieme $C^\infty(M^n)$.

Definizione (derivata direzionale su $\mathbb{R}^n$) 1.2.2. *Date le funzioni liscie $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definiamo derivate direzionali su $\mathbb{R}^n$ le funzioni $D_v|_P : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tali che*

$$D_v|_P f = D_v f(P) = \frac{df(P + tv)}{dt}|_{t=0}. \tag{1.2.2}$$

con $v \in \mathbb{R}^n$ vettore tangente in $P \in \mathbb{R}^n$.

Le derivate direzionali della definizione 1.2.2 soddisfano la regola di Leibniz:

$$D_v|_P(fg) = f(P)D_v|_P g + g(P)D_v|_P f \tag{1.2.3}$$

Inoltre, dalla regola della catena, vale che:

$$D_v|_P f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) \tag{1.2.4}$$

con $v_P = v^i e_i|_P \in \mathbb{R}^n$ ed $\{e_i\}$ base canonica.

Definizione (derivazione su $\mathbb{R}^n$) 1.2.3. *Date le funzioni liscie $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, definiamo derivazione in P su $\mathbb{R}^n$ la funzione $w : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ tale che w è lineare e*

$$w(fg) = f(P)wg + g(P)wf \tag{1.2.5}$$

Definiamo inoltre $T_P\mathbb{R}^n$ l'insieme di tutte le derivazioni in P su $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.1. *Lo spazio T_PM^n è uno spazio vettoriale.*

Dimostrazione: Consideriamo le derivazioni $w_1, w_2 \in T_PM^n$ e la funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definiamo le operazioni di somma

$$(w_1 + w_2)f = w_1 f + w_2 f \tag{1.2.6}$$

e di prodotto per uno scalare

$$(\lambda w_1)f = \lambda(w_1 f) \tag{1.2.7}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Con queste operazioni così definite lo spazio T_PM^n ha la struttura di spazio vettoriale.

Proposizione 1.2.1. *Consideriamo le derivate direzionali* $D_v|_P : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *ed il vettore* $v_P = v^i e_i|_P \in \mathbb{R}^n$*, allora*

1. *per ogni vettore* v_P*, la mappa* $D_v|_P$ *è una derivazione in* P*.*
2. *la mappa* $\theta : \mathbb{R}^n \to T_P\mathbb{R}^n$ *è un isomorfismo.*

Corollario 1.2.1. *Considero le derivazioni* $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ *tali che* $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P f = \frac{\partial f(P)}{\partial x^i}$*, allora le* $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ *formano una base per* $T_P\mathbb{R}^n$*.*

In seguito generalizzeremo il concetto espresso nella definizione 1.2.3 di derivazione alle varietà differenziabili M^n per poi definire lo spazio tangente T_PM^n ad un generico punto $P \in M^n$. Si noti che la definizione della base come nel corollario 1.2.1 per lo spazio $T_P\mathbb{R}^n$ sarebbe priva di senso nel contesto di una varietà differenziabile, in quanto per quest'ultima è necessario fissare un sistema di coordinate locali mediante delle carte.

Definizione (derivazione su M^n) 1.2.4. *Date le funzioni liscie* $f, g \in C^\infty(M^n)$*, definiamo derivazione in* P *su* M^n *la funzione* $v : C^\infty(M^n) \to \mathbb{R}$*, con* v *lineare e*

$$v(fg) = f(P)vg + g(P)vf \tag{1.2.8}$$

Definizione (spazio tangente) 1.2.5. *Definiamo lo spazio tangente* T_PM^n *al punto* $P \in M^n$ *alla varietà* M^n *come l'insieme di tutte le derivazioni* v *in* P*.*

Consideriamo $P \in M^n$ varietà differenziabile e consideriamo la carta locale $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ tale che $\forall Q \in M^n$ $\Phi(Q) = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $P \in U$ ed $(x_1, ..., x_n)$ coordinate locali. Definiamo le funzioni

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P : C^\infty(M^n) \to \mathbb{R}^n \tag{1.2.9}$$

tali che

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P (f) = \left(\frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial u_i}\right)(\Phi(P)) \tag{1.2.10}$$

dove le u_i sono le coordinate globali euclidee di $\mathbb{R}^n$. Per definizione $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P \in T_PM^n$ ed in particolare le $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P$ costituiscono una base per lo spazio tangente.

Lo spazio tangente T_PM^n è uno spazio vettoriale e la dimostrazione è analoga al caso di $T_P\mathbb{R}^n$.

Definizione (campo vettoriale su una varietà differenziabile) 1.2.6. *Data la varietà differenziabile M^n e lo spazio tangente $T_P M^n$ in $p \in M^n$, definiamo il campo vettoriale X_p su M^n come la mappa liscia*

$$X : M^n \to T_P M^n \tag{1.2.11}$$

con $X(P) = X_P \in T_P M^n$.

Consideriamo $P \in M^n$ varietà differenziabile e consideriamo la carta locale $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ tale che $\forall Q \in M^n$ $\Phi(Q) = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ con $P \in U$ ed $(x_1, ..., x_n)$ coordinate locali. Consideriamo le funzioni $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, allora possiamo scrivere il campo vettoriale X_P come

$$X_P = X^i(P) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P \tag{1.2.12}$$

con $X^i : U \to \mathbb{R}$ componenti di X. Se le funzioni X^i sono funzioni liscie, allora il campo vettoriale si dice liscio. Indichiamo con $\chi(M^n)$ l'insieme dei campi vettoriali lisci.

Esistono molte altre definizioni oltre alla 1.2.3 di spazio tangente ad una varietà. In seguito ne forniremo altre due, nonostante quella precedentemente esposta sia quella che verrà utilizzata maggiormente.

Definizione (curva liscia) 1.2.7. *Data una varietà differenziabile M^n immersa in $\mathbb{R}^m$, una curva liscia γ in M^n è una funzione $\gamma : I \to M^n$ con $I \in \mathbb{R}$ aperto tale che $\forall t \in I$, $P = \gamma(t)$ esiste una qualche parametrizzazione*

$$\alpha : \mathbb{R}^n \supset \Omega \to U \subset M^n \tag{1.2.13}$$

con $P \in U$ e un qualche intervallo aperto $]t - \epsilon, t + \epsilon[\in I$ tali che la curva

$$\alpha^{-1} \circ \gamma :]t - \epsilon, t + \epsilon[\to \mathbb{R}^n \tag{1.2.14}$$

è liscia.

Definizione (spazio tangente) 1.2.8. *Data una varietà differenziabile M^n immersa in $\mathbb{R}^m$, per ogni punto $P \in M^n$ lo spazio tangente $T_P M^n$ in P è l'insieme di tutti i vettori di $\mathbb{R}^m$ nella forma*

$$\gamma'(0) = \frac{d\gamma}{dt} \tag{1.2.15}$$

dove $\gamma : I \to M^n$ è una generica curva liscia in M^n tale che $P = \gamma(0)$.

Consideriamo la varietà differenziabile M^n, per ogni aperto $V \subset M^n$ tale che $P \in V$ definiamo

$$\xi(V) = \{f : V \to \mathbb{R}^n : f \ liscia\} \tag{1.2.16}$$

Introduciamo una relazione di equivalenza tale che

$$f \sim g \iff f|_W = g|_W \tag{1.2.17}$$

con $W \subset M^n$. La classe di equivalenza così ottenuta si chiama *germe liscio* in P e l'insieme $\xi_P = \xi/\sim$ si chiama *spiga* su P.

Si può dimostrare che se si introducono le operazioni di somma: $[f] + [g] = [f + g]$, prodotto: $[f][g] = [fg]$ e prodotto per uno scalare $\lambda[f] = [\lambda f]$ si ottiene una $\mathbb{R}$-algebra.

Possiamo dare un ulteriore definizione di spazio tangente per capirne meglio la struttura e le proprietà che torneranno utili quando si discuterà l'algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie.

Definizione (vettore tangente e spazio tangente) 1.2.9. *Un vettore v tangente alla varietà differenziabile M^n nel punto $P \in M^n$ è un applicazione $v : \xi_P \to \mathbb{R}$ tale che v è lineare e che*

$$v([f][g]) = f(p)v([g]) + v([f])g(p) \tag{1.2.18}$$

L'insieme T_pM^n dei vettori tangenti alla varietà in P è lo spazio tangente ad M^n in P.

1.3 Spazio Cotangente

Definizione (spazio cotangente) 1.3.1. *Data la varietà differenziabile M^n e lo spazio tangente T_PM^n in $p \in M^n$, definiamo lo spazio cotangente $T_P^*M^n$ in $p \in M^n$ come*

$$T_P^*M^n = (T_PM^n)^* \tag{1.3.1}$$

I vettori $\omega \in T_P^*M^n$ sono chiamati covettori.

Lo spazio cotangente è uno spazio vettoriale, essendo definito come il duale di uno spazio vettoriale.

Definizione (campo covettoriale) 1.3.2. *Data la varietà differenziabile M^n e lo spazio cotangente $T_P^*M^n$ in $p \in M^n$, definiamo il campo covettoriale η_p su M^n come la mappa*

$$\eta : M^n \to T_P^*M^n \tag{1.3.2}$$

con $\eta(P) = \eta_P \in T^*_P M^n$.

Definizione (differenziale) 1.3.3. *Data una funzione liscia* $f : M^n \supset U \to \mathbb{R}$*, il differenziale* $df : U \to T^*_P M^n$ *è un campo covettoriale sulla varietà* M *tale che*

$$df(P) = df_P \quad e \quad df_P(v) = vf \tag{1.3.3}$$

Sappiamo che una base $\{v_\alpha\}$ in uno spazio vettoriale V induce naturalmente una base duale $\{\epsilon^\alpha\}$ tale che

$$\epsilon^i(v_j) = \delta^i_j \ , \quad \epsilon^i(a) = a_i \ , \quad \omega(v_i) = \omega^i \tag{1.3.4}$$

con $a = \sum_i v_i a^i$ ed $\omega = \sum_i \epsilon^i \omega_i$. Dato che $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P$ sono una base per lo spazio tangente $T_P M^n$, allora questi indurranno una base per lo spazio cotangente $T^*_P M^n = (T_P M^n)^*$, che indichiamo con λ^i_P. Consideriamo il vettore

$$a = a^i v_i \in T_P M^n \tag{1.3.5}$$

ed il covettore

$$\omega = \omega_i \epsilon^i = \omega_i \lambda^i_P \in T^*_P M^n \tag{1.3.6}$$

ed applichiamo loro il cambio di coordinate

$$x^j \to x'^j = \Lambda^j_i x^i \iff \Lambda^j_i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} \tag{1.3.7}$$

I vettori a e ω si trasformano rispettivamente come

$$a'^j = \Lambda^j_i a^i = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i} a^i \tag{1.3.8}$$

$$\omega_i = \omega(v^i) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \omega\left(\frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x'^j}\right) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\omega\left(\frac{\partial}{\partial x'^j}\right) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^i}\omega'_j \tag{1.3.9}$$

I vettori nello spazio tangente sono dunque vettori covarianti, mentre quelli nello spazio cotangente sono controvarianti (si noti che nel mostrarlo non è stato necessario fissare la base duale λ^i_P). Consideriamo ora una funzione liscia $f : M^n \supset U \to \mathbb{R}$ ed il suo differenziale df_P, allora

$$g_i(P) = df_P(\epsilon_i) = \epsilon_i f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_P \tag{1.3.10}$$

per una qualche funzione $g_i : U \to \mathbb{R}$. Considerando che df_P appartiene allo spazio duale $T^*_P M^n$ e che $(\frac{\partial}{\partial x_i})_P$ è un elemento della base di $T_P M^n$, allora $(\frac{\partial f}{\partial x_i})_P$ sarà la componente i-esima del differenziale di f, ovvero

$$df_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_P \lambda^i_P \tag{1.3.11}$$

Se consideriamo il caso particolare in cui $f = x^j$ otteniamo

$$dx^j_P = \left(\frac{\partial x^j}{\partial x_i}\right)_P \lambda^i_P = \lambda^j_P \tag{1.3.12}$$

Concludiamo che $\{dx^\alpha_P\}$ è una base per lo spazio vettoriale cotangente e che

$$df_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_P dx^i_P \tag{1.3.13}$$

oppure, considerando il campo covettoriale, si ha analogamente

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx^i \tag{1.3.14}$$

Possiamo dunque esprimere la generica componente $\eta_i(P)$ del campo covettoriale η_P come

$$\eta_i(P) = \eta_P \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P \tag{1.3.15}$$

1.4 Funzioni tra Varietà Differenziabili

Definizione (funzione liscia tra varietà differenziabili) 1.4.1. *Date M^n_1 ed M^q_2 varietà differenziabili, una funzione $f : M^n_1 \to M^q_2$ è liscia se $\forall P \in M^n_1$ esistono delle parametrizzazioni $\alpha : \Omega_1 \to U_1 \subset M^n_1$ e $\beta : \Omega_2 \to U_2 \subset M^q_2$ tali che*

$$f(U_1) \subseteq U_2 \tag{1.4.1}$$

ed inoltre la mappa

$$\beta^{-1} \circ f \circ \alpha : \Omega_1 \to \mathbb{R}^q \tag{1.4.2}$$

è liscia.

Definizione (differenziale di funzioni lisce tra varietà) 1.4.2. *Data una funzione liscia f tra le varietà differenziabili M^n, M^q, allora il differenziale df nel punto $P \in M^n$ è una mappa lineare tra gli spazi tangenti alle varietà, definita come*

$$df_P : T_P M^n \to T_{f(P)} M^q \tag{1.4.3}$$

tale che

$$df_P(X_P)(g) = X_P(g \circ f) \tag{1.4.4}$$

con $X_P \in T_P M^n$ campo vettoriale e $g \in \xi_P$.

Si noti che la definizione 1.4.2 non definisce necessariamente un campo vettoriale su M^q. Ad esempio, se f non è suriettiva, non c'è modo di stabilire che vettore $v \in T_{f(P)}M^q$ può essere assegnato ad un punto $f(P) \in M^q \setminus f(M^n)$. Analogamente, se f non è iniettiva, per certi punti $f(P) \in M^q$ potrebbero esserci più vettori ottenuti applicando *df* ad un certo punto $P \in M^n$.

Normalmente, se si riesce a trovare un campo vettoriale $Y_{f(P)}M^q$ tale che

$$df_P(X_P) = Y_{f(P)}M^q \quad \forall P \in M^n \tag{1.4.5}$$

dato un certo campo vettoriale X_P su M^n, si dice che le varietà M^n ed M^q sono $f - related$.

Teorema 1.4.1. *Date le varietà differenziabili M^n ed M^q e dato il diffeomorfismo $f : M^n \to M^q$, allora*

$$\forall X \in \chi(M)\ \exists!\ Y \in \chi(M^q) \tag{1.4.6}$$

con Y campo vettoriale liscio su M^q tale che Y è f-related ad X. In questo caso si indica df con f_* ed $Y = f_*X$, con f_*X chiamato $pushforward$ di X mediante f.

Dimostrazione: Consideriamo $Y \in \chi(M^q)$ tale che Y è f-related ad $X \in \chi(M^n)$ mediante il diffeomorfismo f. Dunque

$$f_*|_P X_P = T_P\ \forall P \in M^n \tag{1.4.7}$$

dove indichiamo *df* con f_* essendo f un diffeomorfismo. Definiamo Y come

$$Y_Q = f_*|_{f^{-1}(Q)} X_{f^{-1}(Q)} \tag{1.4.8}$$

che risulta dunque essere l'unico campo vettoriale f-related ad X. Inoltre, dato che $Y : M^q \to TM^q$ è tale che

$$Y = f_* \circ X \circ f^{-1} : M^q \to M^n \to TM^n \to TM^q \tag{1.4.9}$$

con f_*, X, f^{-1} funzioni liscie, allora Y è un campo vettoriale liscio $\implies Y \in \chi(M^q)$.

Il teorema 1.4.1 ci permette di trovare un identificazione immediata ed unica tra un campo vettoriale sulla varietà di partenza ed un campo vettoriale sulla varietà di arrivo mediante un diffeomorfismo tra le varietà. In seguito ci riferiremo solamente a funzioni che sono diffeomorfismi di varietà, per questo continueremo a denominare $differenziale$ la mappa $f_* : T_PM^n \to T_{f(P)}M^q$.

Il differenziale di un diffeomorfismo tra varietà definito come nella 1.4.2 risulta sostanzialmente in una matrice $f_*|_P$ che agisce sul vettore

$$v = \sum_i v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P \in T_P M^n \tag{1.4.10}$$

il quale agisce a sua volta sulla funzione

$$g \in \xi_P \tag{1.4.11}$$

liscia sulla varietà e scrivibile rispetto le coordinate locali (d'ora in avanti omettiamo il simbolo di classe di equivalenza considerandone solo un generico rappresentante). Consideriamo $f : M^n \to M^m$ e prendiamo le carte

$$\Phi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \qquad \Psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^m \tag{1.4.12}$$

rispettivamente su M^n e su M^m. Abbiamo allora le coordinate locali

$$x_i = \Phi_i(P) \qquad y_i = \Psi_i(Q) \tag{1.4.13}$$

rispettivamente su M^n e su M^m. Consideriamo poi gli elementi di base dello spazio tangente ad M^n in P dati da $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P$. Per trovare l'elemento ij della matrice che rappresenta $f_*|_P$ svolgiamo

$$\begin{gathered} f_*|_P \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P y_j = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_P (y_j \circ f) = \left(\frac{\partial (y_j \circ f \circ \Phi_i^{-1})}{\partial u_i}\right) (\Phi(P)) = \\ \left(\frac{\partial (\Psi_j \circ f \circ \Phi_i^{-1})}{\partial u_i}\right) (\Phi(P)) \end{gathered} \tag{1.4.14}$$

Dunque la matrice associata al differenziale $f_*|_P$ è la matrice jacobiana

$$J_{\Phi(P)} f_{\alpha\alpha} \tag{1.4.15}$$

dove $f_{\alpha\alpha} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è tale che

$$f_{\alpha\alpha}(x_1, ...x_n) = (y_1, ..., y_m) \tag{1.4.16}$$

Definizione (pullback attraverso una funzione tra varietà) 1.4.3. *Date le varietà differenziabili M^n, M^q e la funzione liscia tra varietà differenziabili $f : M^n \to M^q$, consideriamo il differenziale $df_P : T_P M^n \to T_{f(P)} M^n$, allora definiamo il pullback in P attraverso f come la mappa*

$$df_P^* : T_{f(P)}^* M^q \to T_P^* M^n \tag{1.4.17}$$

tale che

$$(df_P^* \omega)(v) = \omega(df_P(v)) \tag{1.4.18}$$

con $\omega \in T_{f(P)}^* M^q$, $v \in T_P M^n$ e $P \in M^n$.

Definizione (pullbacks di campi covettoriali) 1.4.4. *Date le varietà differenziabili* M^n, M^q *e la funzione liscia tra varietà differenziabili* $f : M^n \to M^q$, *consideriamo il differenziale* $df_P : T_P M^n \to T_{f(P)} M^n$, *allora definiamo il campo covettoriale* $f^*\omega$ *chiamato pullback di* ω *attraverso* f *come la mappa*

$$(f^*\omega)_P = df_P^*(\omega_{f(P)}) \tag{1.4.19}$$

tale che

$$(f^*\omega)_P(v) = df_P^*(\omega_{f(P)}(v)) = \omega_{f(P)}(df_P(v)) \tag{1.4.20}$$

con $\omega \in T^*_{f(P)} M^q$, $v \in T_P M^n$ *e* $P \in M^n$.

Se $\omega \in T^*_{f(P)} M^q$ come nella definizione 1.4.4 è un campo covettoriale liscio allora anche $f^*\omega \in T^*_P M^n$ è un campo covettoriale liscio.

Due proprietà utili per i calcoli dei pullbacks di campi covettoriali sono

$$f^*(u\omega) = (u \circ f) f^*\omega \tag{1.4.21}$$

e

$$f^* du = d(u \circ f) \tag{1.4.22}$$

Con $u : M^q \to \mathbb{R}$ liscia. Dalle formule 1.4.21 e 1.4.22, scrivendo ω mediante le coordinate locali y^i di M^q tali che

$$\omega = \omega_j dy^j \tag{1.4.23}$$

si ottiene

$$f^*\omega = f^*(\omega_j dy^j) = (\omega_j \circ f) f^* dy^j = (\omega_j \circ f) d(y^j \circ f) = (\omega_j \circ f) df^j \tag{1.4.24}$$

con f^j componente j-esima di f nelle coordinate $\{y\}$.

Si noti che le formule 1.4.21 e 1.4.22 sono una conseguenza diretta della definizione di pullback e della linearità di quest'ultimo, infatti

$$\begin{aligned}(f^*(u\omega))_P = df_P^*((u\omega)_{f(P)}) = df_P^*(u(f(P))\omega_{f(P)}) = \\ u(f(P)) df_P^*(\omega_{f(P)}) = (u \circ f)_P (f^*\omega)_P\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

che verifica la 1.4.21. Poi, sfruttando la definizione di differenziale (inserire ref) e di differenziale di funzioni tra varietà (inserire ref), si ottiene

$$\begin{aligned}(f^* du)_P(v) = (df_P^*(du_{f(P)}))(v) = du_{f(P)}(df_P(v)) = \\ (df_P(v))(u) = v(u \circ f) = d(u \circ f)(v)\end{aligned} \tag{1.4.26}$$

che verifica la 1.4.11, con $v \in T_P M^n$.

1.5 Gruppi di Lie

Definizione (gruppo) 1.5.1. *Dato un insieme G ed un operazione $\circ$, la coppia $(G, \circ)$ è un gruppo se valgono le seguenti proprietà:*

1. *se $g_i, g_j \in G$, allora $g_i \circ g_j \in G$*
2. *se $g_i, g_j, g_k \in G$, allora $(g_i \circ g_j) \circ g_k = g_i \circ (g_j \circ g_k)$*
3. *$\exists I \in G$ tale che $\forall g_i \in G$ $g_i \circ I = I \circ g_i = g_i$*
4. *$\forall g_i \in G$ $\exists g_i^{-1} \in G$ tale che $g_i \circ g_i^{-1} = g_i^{-1} \circ g_i = I$*

Esempio 1.5.1. Definiamo il gruppo speciale ortogonale in 2 dimensioni come

$$SO(2, K) = \{A \in M_{2,2} : AA^T = A^T A = I, \det(A) = 1\} \tag{1.5.1}$$

con $M_{2,2}$ spazio vettoriale delle matrici 2x2 a coefficienti in K. Il gruppo $SO(2, \mathbb{R})$ costituisce un gruppo mediante l'operazione di prodotto di matrici: $(SO(2, \mathbb{R}), \circ)$. infatti, se scegliamo una parametrizzazione per il gruppo mediante degli angoli $\theta \in \mathbb{R}$ e $\phi \in \mathbb{R}$, la definizione di gruppo è soddisfatta

1.
$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\theta)cos(\phi) - sin(\theta)sin(\phi) & -cos(\theta)sin(\phi) - sin(\theta)cos(\phi) \\ sin(\theta)cos(\phi) + cos(\theta)sin(\phi) & cos(\theta)cos(\phi) - sin(\theta)sin(\phi) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\theta + \phi) & -sin(\theta + \phi) \\ sin(\theta + \phi) & cos(\theta + \phi) \end{pmatrix} \in SO(2, \mathbb{R})$$

2.
$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \right] =$$
$$\left[\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

3. $\exists\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SO(2, \mathbb{R})$ tale che

$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$$

4. $\exists\ g(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2,\mathbb{R})$ tale che
$$\begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Si noti che per il gruppo $SO(2,\mathbb{R})$ definito nell'esempio 1.5 la parametrizzazione può essere scelta reale e continua ($\theta \in \mathbb{R}$) oppure reale e discreta ($\theta = n\pi, n \in \mathbb{N}$). Il concetto di parametrizzazione è molto importante per legare algebra e geometria nella teoria dei gruppi. Tale corrispondenza sarà meglio chiarita una volta considerate le definizioni di varietà topologica e gruppo di Lie.

Esempio 1.5.2. Consideriamo le trasformazioni di Lorentz, ovvero tutte le trasformazioni lineari Λ di $\mathbb{R}^4$ che lasciano invariata la forma quadratica
$$\begin{gathered} < v, \eta w >= c^2tt' - xx' - yy' - zz' \iff \\ \eta_{\mu\nu}v^\mu w^\nu = v^\mu w_\mu = v^0 w_0 - v^1 w_1 - v^2 w_2 - v^3 w_3 \end{gathered} \tag{1.5.2}$$
con $v = (ct, x, y, z), w = (ct', x', y', z') \in \mathbb{R}^4$ e con
$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.5.3}$$
da cui segue che
$$\begin{gathered} < \Lambda v, \eta \Lambda w >=< v, \eta w > \iff \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \\ \iff \det(\Lambda)^2 = 1 \iff \det(\Lambda) = \pm 1 \end{gathered} \tag{1.5.4}$$
L'insieme delle trasformazioni di Lorentz con $\det(\Lambda) = 1$ definisce il gruppo di Lorentz o gruppo ortogonale generalizzato $O(1,3)$ rispetto al prodotto matriciale:

1. $$(\Lambda_1\Lambda_2)^T \eta \Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T\Lambda_1^T \eta \Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta \implies \Lambda_1\Lambda_2 \in O(1,3) \tag{1.5.5}$$

2. $$(\Lambda_1\Lambda_2)\Lambda_3 = \Lambda_1(\Lambda_2\Lambda_3) \tag{1.5.6}$$
   poichè il prodotto matriciale è associativo per costruzione.

3. $\exists I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tale che
   $$\Lambda I = \Lambda \tag{1.5.7}$$
   Inoltre $I \in O(1,3)$ poichè $I^T \eta I = \eta$.

4. $\exists \Lambda^{-1} \in O(1,3)$ tale che
$$\Lambda\Lambda^{-1} = I \tag{1.5.8}$$
poichè $det(\Lambda) = \pm 1$.

Corollario 1.5.1. *Si possono considerare casi particolari dell'esempio 1.5.2. precedente in cui le coordinate spaziali si riducono a due (x, y) o ad una (x). In questi casi i gruppi sono rispettivamente $O(1,2)$ ed $O(1,1)$ e la definizione si verifica in modo analogo all'esempio.*

Definizione (sottogruppo) 1.5.2. *Il sottogruppo $(H, \circ)$ del gruppo $(G, \circ)$ è dato dal sottoinsieme H di G che è a sua volta un gruppo rispetto all'operazione $\circ$.*

Teorema 1.5.1. *Dati i sottogruppi $H_1 \subset G$ e $H_2 \subset G$, con G gruppo, allora $H_1 \cap H_2$ è un sottogruppo di G.*

Dimostrazione:

1. $a, b \in H_1 \cap H_2 \implies a, b \in H_1$ ed $a, b \in H_2 \implies a \circ b \in H_1$ ed $a \circ b \in H_2 \implies a \circ b \in H_1 \cap H_2$.
2. $a, b, c \in H_1 \cap H_2 \implies a, b, c \in H_1$ ed $a, b, c \in H_2 \implies (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ in H_1 ed H_2, dunque in particolare $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ in $H_1 \cap H_2$.
3. $a \in H_1 \cap H_2 \implies a \in H_1$ ed $a \in H_2 \implies I \in H_1$ ed $I \in H_2$ con $a \circ I = a \implies \exists I \in H_1 \cap H_2$ tale che $a \circ I = a$.
4. $a \in H_1 \cap H_2 \implies a \in H_1$ ed $a \in H_2 \implies a^{-1} \in H_1$ ed $a^{-1} \in H_2$ con $a \circ a^{-1} = I \implies \exists a^{-1}$ tale che $a \circ a^{-1} = I$.

Verificando così gli assiomi della definizione di gruppo.

Definizione (gruppo di Lie) 1.5.3. *$(G, \circ)$ è un gruppo di Lie se gli elementi $g(x) \in G$ soddisfano la definizione di gruppo mediante l'operazione $\circ : G \times G \to G$ e se G è una varietà differenziabile, con x parametro. Inoltre devono valere i seguenti assiomi:*

1. *La mappa di composizione $\circ$ degli elementi del gruppo G è una funzione liscia tra varietà differenziabili*
$$\forall g(x), g(y) \in G \; g(x) \circ g(y) = g(z) = g(\Phi(x, y)) \in G \tag{1.5.9}$$
con $z = \Phi(x, y)$ liscia.

2. La mappa di inversione $^{-1}$ *degli elementi del gruppo* G *è una funzione liscia tra varietà differenziabili*

$$\forall g(x) \in G \ g(x)^{-1} = g(y) = g(\Psi(x)) \in G \tag{1.5.10}$$

con $y = \Psi(x)$ *liscia.*

Nella definizione 1.5.3, richiedere che $\circ$ e $^{-1}$ siano funzioni lisce tra varietà è equivalente a chiedere che $\Phi(x, y) = z$ e $\Psi(x) = y$ siano lisce. Per non confondere l'operazione $\circ$ tra gli elementi del gruppo G e l'usuale composizione di funzioni, poniamo

$$f = \circ : G \times G \to G \qquad h =^{-1}: G \to G \tag{1.5.11}$$

mentre indichiamo l'operazione di composizione di funzioni con $\circ$. Dalla definizione 1.4.1 esistono le parametrizzazioni

$$\alpha : \Omega_1 \times \Omega_2 \to U_1 \times U_2 \subset G \times G \tag{1.5.12}$$

e

$$\beta : \Omega_3 \to U_3 \subset G \tag{1.5.13}$$

con $(x, y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ e $z \in \Omega_3$, dato che il prodotto cartesiano di varietà differenziabili è una varietà differenziabile. Allora la funzione

$$\Phi = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_3 \tag{1.5.14}$$

tale che

$$\Phi(x, y) = z \tag{1.5.15}$$

è liscia. Sempre dalla definizione 1.4.1 esistono le parametrizzazioni

$$\alpha' : \Omega_1 \to U_1 \subset G \qquad \beta : \Omega_2 \to U_2 \subset G \tag{1.5.16}$$

con $x \in \Omega_1$ e $y \in \Omega_2$. Allora la funzione

$$\Psi = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha' : \Omega_1 \to \Omega_2 \tag{1.5.17}$$

tale che

$$\Psi(x) = y \tag{1.5.18}$$

è liscia.

Esempio 1.5.3. Il gruppo delle rotazioni in due dimensioni $SO(2, \mathbb{R})$ è un gruppo di Lie. In particolare si ha che $SO(2, \mathbb{R})$ è equivalente alla circonferenza unitaria S^1 immersa in $\mathbb{R}^2$ mediante $g : S^1 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$g(P) = (x, y) = (cos(\theta), sin(\theta)) \tag{1.5.19}$$

Abbiamo già mostrato che la circonferenza unitaria S^1 è una varietà differenziabile nell'esempio 1.1.2 e che $SO(2,\mathbb{R})$ è un gruppo nell'esempio 1.5.1, perciò restano da mostrare gli assiomi 1. e 2. della definizione 1.5.3. Considero

$$g_1(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \in SO(2,\mathbb{R}) \tag{1.5.20}$$

e

$$g_2(\phi) = \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix} \in SO(2,\mathbb{R}) \tag{1.5.21}$$

con $\theta, \phi \in [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ parametri, allora

1.
$$\begin{aligned} &g_1(\theta) \circ g_2(\phi) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) \\ sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} cos(\theta+\phi) & -sin(\theta+\phi) \\ sin(\theta+\phi) & cos(\theta+\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \implies \\ &\alpha = \Phi(\theta, \phi) = \theta + \phi \end{aligned} \tag{1.5.22}$$

   con $\theta + \phi$ differenziabile.

2.
$$\begin{aligned} &g_1(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ -sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} cos(-\beta) & sin(-\beta) \\ -sin(-\beta) & cos(-\beta) \end{pmatrix} \implies \beta = \Psi(\theta) = -\theta \end{aligned} \tag{1.5.23}$$

   con $-\theta$ differenziabile.

Nell'esempio 1.5.3, è interessante notare come le mappe $\Phi(\theta)$ e $\Psi(\theta)$ nelle equazioni 1.5.22 e 1.5.23 descrivano in modo chiaro come si modifica la variabile angolare che parametrizza la varietà differenziabile a seguito delle operazioni algebriche tra gli elementi del gruppo.

La composizione $g_1(\theta) \circ g_2(\phi)$, con $g_1(\theta), g_2(\phi) \in SO(2,\mathbb{R})$, corrisponde ad una rotazione dalla coordinata θ fino alla coordinata $(\theta + \phi)$. L'operazione di inversione g_1^{-1} corrisponde invece ad una rotazione di un certo angolo θ ma nel verso opposto, ovvero una rotazione fino alla coordinata $-\theta$.

Esempio 1.5.4. Il gruppo di Lorentz $O(1,3)$ è un gruppo di Lie. Mostriamo il caso particolare delle trasformazioni di Lorentz per un unica coordinata spaziale x, ovvero per il gruppo $O(1,1)$. Tale gruppo è equivalente all'iperbole H^1 immerso in $\mathbb{R}^2$ mediante $g : H^1 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$g(P) = (cosh(\theta), sinh(\theta)) \tag{1.5.24}$$

Abbiamo già mostrato che H^1 è una varietà differenziabile nell'esempio 1.1.3 e che $O(1,1)$ è un gruppo con l'esempio 1.5.2 ed il corollario 1.5.1, perciò restano da mostrare gli assiomi 1. e 2. della definizione. Per farlo scegliamo una parametrizzazione delle trasformazioni di Lorentz mediante la rapidità $\theta = \ln(\gamma(1+\beta))$ per un boost lungo la coordinata x, in particolare consideriamo

$$g_1(\theta) = \begin{pmatrix} cosh(\theta) & -sinh(\theta) \\ -sinh(\theta) & cosh(\theta) \end{pmatrix} \in O(1,1) \tag{1.5.25}$$

e

$$g_2(\phi) = \begin{pmatrix} cosh(\phi) & -sinh(\phi) \\ -sinh(\phi) & cosh(\phi) \end{pmatrix} \in O(1,1) \tag{1.5.26}$$

con $\theta, \phi \in \mathbb{R}$ parametri, allora:

1.
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} cosh(\theta) & -sinh(\theta) \\ -sinh(\theta) & cosh(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosh(\phi) & -sinh(\phi) \\ -sinh(\phi) & cosh(\phi) \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} cosh(\theta+\phi) & -sinh(\theta+\phi) \\ -sinh(\theta+\phi) & cosh(\theta+\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosh(\alpha) & -sinh(\alpha) \\ -sinh(\alpha) & cosh(\alpha) \end{pmatrix} \implies \\ &\alpha = \Phi(\theta, \phi) = \theta + \phi \end{aligned} \tag{1.5.27}$$

   con $\theta + \phi$ differenziabile.

2.
$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} cosh(\theta) & -sinh(\theta) \\ sinh(\theta) & cosh(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} cosh(\theta) & -sinh(\theta) \\ -sinh(\theta) & cosh(\theta) \end{pmatrix} = \\ &\begin{pmatrix} cosh(\beta) & -sinh(\beta) \\ -sinh(\beta) & cosh(\beta) \end{pmatrix} \implies \beta = \Psi(\theta) = \theta \end{aligned} \tag{1.5.28}$$

   con θ differenziabile.

Definizione (gruppo di Lie compatto) 1.5.4. *Un gruppo di Lie $(G, \circ)$ si dice compatto se la varietà differenziabile M^n equivalente al gruppo è compatta.*

Definizione (gruppo di Lie lineare) 1.5.5. *Un gruppo di Lie lineare G è un gruppo di Lie che è anche un sottogruppo di $GL(n, \mathbb{R})$, il quale è un gruppo di Lie.*

1.6 Gruppi di Matrici

Definizione (rappresentazione) 1.6.1. *Dati il gruppo G e gli spazi vettoriali A e B, la rappresentazione di G sullo spazio vettoriale A è un omomorfismo*

$$T : G \to Hom(A, B) \tag{1.6.1}$$

tale che $Hom(A, B) \supset T(g) : A \to B$ è un omomorfismo tra A e B, con $g \in G$.

Nelle considerazioni precedenti abbiamo tacitamente trattato dei gruppi utilizzando la loro rappresentazione in termini di matrici. Di fatto la definizione di gruppo è prettamente astratta, tuttavia è sempre possibile trovare una rappresentazione definita come sopra tra il gruppo in questione ed un *gruppo di matrici*.

Esempio 1.6.1. Il gruppo $GL(2, \mathbb{R})$ con il prodotto riga per colonna è un gruppo di matrici, dato in particolare da tutte le matrici invertibili

$$GL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2,2} : \det(a) \in \mathbb{R}\backslash 0\} \tag{1.6.2}$$

con $M_{2,2}$ spazio vettoriale delle matrici 2x2. La generica matrice A del gruppo può essere parametrizzata mediante le variabili $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \tag{1.6.3}$$

con $\det(A) \in \mathbb{R}\backslash 0$.

Esempio 1.6.2. Il gruppo $SL(2, \mathbb{R})$ con il prodotto riga per colonna è un gruppo di matrici, dato in particolare da tutte le matrici con determinante unitario

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det(a) = 1\} \tag{1.6.4}$$

La generica matrice A del gruppo puo essere parametrizzata mediante le variabili $a, b \in \mathbb{R}$: come

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \tag{1.6.5}$$

con $\det(A) = 1$.

Esempio 1.6.3. Il gruppo $O(2, \mathbb{R})$ con il prodotto riga per colonna è un gruppo di matrici, dato in particolare da tutte le matrici ortogonali

$$O(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I\} \tag{1.6.6}$$

La generica matrice A del gruppo puo essere parametrizzata mediante la variabile $\theta \in [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ come

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.6.7}$$

con $A^T = A^{-1}$.

Esempio 1.6.4. Il gruppo $SO(2, \mathbb{R})$ con il prodotto riga per colonna è un gruppo di matrici, dato in particolare da tutte le matrici ortogonali e con determinante unitario

$$SO(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I, \det(A) = 1\} \tag{1.6.8}$$

La generica matrice A del gruppo puo essere parametrizzata mediante la variabile reale $\theta \in [0, 2\pi[\subset \mathbb{R}$ come

$$A = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.6.9}$$

con $A^T = A^{-1}, \det(A) = 1$.

Consideriamo l'insieme dato da $O(2, \mathbb{R}) \cap SL(2, \mathbb{R})$. Essendo l'intersezione di due gruppi, per il teorema precedente è a sua volta un gruppo. Inoltre sappiamo che

$$O(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I\} \tag{1.6.10}$$

e che

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : \det(A) = 1\} \tag{1.6.11}$$

dunque entrambi $O(2, \mathbb{R})$ e $SL(2, \mathbb{R})$ sono sottogruppi di $GL(2, \mathbb{R})$. In particolare avremo

$$O(2, \mathbb{R}) \cap SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL(2, \mathbb{R}) : AA^T = A^T A = I, \det(A) = 1\} = SO(2, \mathbb{R}) \tag{1.6.12}$$

Esempio 1.6.5. Il gruppo $SL(n, \mathbb{C})$ con il prodotto riga per colonna è un gruppo di matrici, dato in particolare da tutte le matrici con determinante unitario

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : \det(a) = 1\} \tag{1.6.13}$$

Esempio 1.6.6. Il gruppo $U(n, \mathbb{C})$ con il prodotto riga per colonna è un gruppo di matrici, dato in particolare da tutte le matrici unitarie

$$U(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{nn} : A^\dagger A = I\} \tag{1.6.14}$$

Esempio 1.6.7. Il gruppo $SU(n, \mathbb{C})$ con il prodotto riga per colonna è un gruppo di matrici, dato in particolare da tutte le matrici unitarie e con determinante unitario

$$SU(2, \mathbb{C}) = \{A \in U(n, \mathbb{C}) : \det(a) = 1\} \tag{1.6.15}$$

Le matrici che rappresentano i gruppi possono essere catalogate in diverse strutture più o meno ricorrenti. Tali strutture sono generate imponendo determinati vincoli, i quali possono essere di natura lineare o bilineare. In seguito alcuni esempi.

- Vincoli lineari:

  1. $UT(p,q)$ sono tutte le matrici $n\times n$ triangolari superiori ($n=p+q$), ovvero tali che $m_{ij}=0$, con $p+1\leqslant i\leqslant p+q$ ed $1\leqslant j\leqslant p$. Nel caso di $UT(1,1)$ che agisce sul piano (x,y) si ha

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ dy \end{pmatrix} \tag{1.6.16}$$

  Se consideriamo $(x,y)\in\mathbb{R}^2=V_x\oplus V_y$ con $V_x=\{(x,y):y=0\}$ e $V_y=\{(x,y):x=0\}$ allora una generica matrice $A\in UT(1,1)$ sarà tale che $A:V_x\to V_x$.

  2. $HT(p,q)\subset UT(p,q)$ sono tutte le matrici $n\times n$ triangolari superiori $n=(p+q)$ e tali che $m_{ij}=\delta_{ij}$, con $p+1\leqslant i\leqslant p+q$ ed $1\leqslant j\leqslant p$. Nel caso di $HT(1,1)$ che agisce sul piano (x,y) si ha

  $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ y \end{pmatrix} \tag{1.6.17}$$

  Dunque valgono le stesse considerazioni delle matrici $UT(p,q)$ ma con la caratteristica che la coordinata y viene dilatata di un fattore 1.

  3. $Nil(n)\subset UT(p,q)$ sono tutte le matrici $n\times n$ triangolari superiori $n=(p+q)$ e tali che $m_{ii}=1$, con $p+1\leqslant i\leqslant p+q$ ed $1\leqslant j\leqslant p$. Ad esempio nel caso di $Nil(3)$ si ha: $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$.

- Vincoli bilineari:

  1. $G=\{M\in M_{nn}:M^\dagger\Lambda M=\Lambda\}$ compatto, con Λ matrice simmetrica definita positiva, dunque identificabile con la matrice identità I. Il gruppo G contiene tutte le matrici che preservano una determinata matrice metrica. Alcuni esempi sono i gruppi $O(n,\mathbb{R})$, $U(n,\mathbb{C})$ (cfr. 1.6.3 ed 1.6.6) con la metrica euclidea data dalla matrice identità I ed i rispettivi sottogruppi. Questi gruppi infatti sono compatti, in quanto rappresentano rotazioni sulle sfere $S^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ ed $S^n\subset\mathbb{C}^{n+1}$ che sono varietà differenziabili compatte.

  2. $G=\{M\in M_{nn}:M^\dagger\Lambda M=\Lambda\}$ non compatto, con Λ matrice simmetrica non definita positiva, dunque identificabile con una matrice diagonale $I_{p,q}\in M_{n,n}$, $p+q=n$ con p elementi pari a $+1$ e q elementi pari a -1 in base alla

segnatura della metrica. Il gruppo G contiene tutte le matrici che preservano una determinata matrice metrica. Un esempio è il gruppo $O(1,1)$ (cfr. 1.5.4) con la metrica di Minkowski data dalla matrice

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.6.18}$$

Questo gruppo infatti non è compatto, in quanto rappresenta una rotazione sull'iperbole $H^1 \subset \mathbb{R}$ che è una varietà differenziabile non compatta (cfr. 1.1.3).

1.7 Algebre di Lie

Definizione (Algebra su campo) 1.7.1. *Un'algebra è uno spazio vettoriale V su un campo K munito di un operazione di prodotto $\cdot : V \times V \to V$ che deve soddisfare le seguenti proprietà di bilinearità:*

1. *se $x, y, z \in V$ ed $a, b \in K$, allora*

$$x \cdot (ay + bz) = a(x \cdot y) + b(x \cdot z) \tag{1.7.1}$$

2. *se $x, y, z \in V$ ed $a, b \in K$, allora*

$$(ax + by) \cdot z = a(x \cdot z) + b(y \cdot z) \tag{1.7.2}$$

Definizione (Algebra di Lie) 1.7.2. *Un algebra di Lie è un algebra in cui il prodotto, indicato con $[,]$, ha le seguenti proprietà:*

1. *soddisfa l'identità di Jacobi*

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0 \tag{1.7.3}$$

2. *è nilpotente*

$$[x, x] = 0 \tag{1.7.4}$$

Il prodotto $[,]$ di un algebra di Lie viene chiamato *prodotto di Lie* o *commutatore*.

Un gruppo di Lie G è dotato per la definizione 1.5.3 di un operazione $\circ$ tra gli elementi del gruppo, in particolare se $g(x) \circ g(y) = g(z)$ allora $z = \Phi(x, y)$, con $\Phi(x, y)$ liscia ed in genere non lineare e dunque difficile da studiare. Un modo per semplificare la struttura di questa mappa Φ è quella di linearizzare il gruppo G in un intorno dell'identità $I \in G$. Il modo per farlo è quello di rendere i parametri del gruppo infinitesimi

$$g(z) \to g(\delta z) \tag{1.7.5}$$

per poi espandere gli elementi del gruppo g in termini di questi infinitesimi. L'obiettivo è quello di portare il gruppo nella forma

$$g(\delta z) = I + \delta z X \tag{1.7.6}$$

dove l'elemento X è il generatore dell'algebra di Lie associata al gruppo di Lie G. Più in generale, linearizzare un elemento del gruppo di Lie $g(z_1, ..., z_n) \in G$ che dipende in modo continuo dai parametri $z_1, ..., z_n$ significa portarlo nella forma

$$g(z_1, ..., z_n) \to g(\delta z_1, ..., \delta z_n) = I + \delta z_1 X_1 + ... + \delta z_n X_n \tag{1.7.7}$$

con $X_1, ..., X_n \in (V, [,])$ algebra di Lie associata al gruppo di Lie G. Si noti che la struttura algebrica così costruita è una particolare algebra di Lie che abbiamo denominato *algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie* e che il procedimento di linearizzazione di un gruppo di Lie non è condizione necessaria per ottenere un'algebra di Lie. Una volta definita la mappa esponenziale mostreremo che il meccanismo di liearizzazione sopracitato è ben posto al fine di ottenere un algebra di Lie, solo in seguito daremo una definizione formale di algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie.

Definizione (mappa esponenziale) 1.7.3. *Dato $M_{n,n}$ spazio vettoriale delle matrici e data $X \in M_{n,n}$, allora si definisce la mappa esponenziale di X come*

$$\exp(X) = e^X = \lim_{k\to\infty} \left(I + \frac{X}{k}\right)^k \tag{1.7.8}$$

Consideriamo $X \in V$ con $(V, [,])$ algebra di Lie e G gruppo di Lie. In base alle considerazioni precedenti

$$g(\beta_1) = I + \beta_1 X \tag{1.7.9}$$

è un elemento del gruppo di Lie G vicino all'identità. Possiamo tentare di allontanarci sempre più dall'identità (rimanendo nel gruppo) iterando il seguente procedimento:

$$\begin{gathered}(I + \beta_2 X)(I + \beta_2 X) = (I + \beta_2 X)^2 = \\ I + 2\beta_2 X + \beta_2^2 X^2 = I + \epsilon_1 X + \epsilon_2 X^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(I + \beta_3 X)(I + \beta_3 X)(I + \beta_3 X) = (I + \beta_3 X)^3 = \\ I + 3\beta_3 X + 3\beta_3^2 X^2 + \beta_3^3 X^3 = I + \epsilon_1 X + \epsilon_2 X^2 + \epsilon_3 X^3\end{gathered}$$

ecc.

Ottenendo l'espressione

$$\lim_{k\to\infty}(I+\beta_k X)^k = \sum_{n=1}^{\infty}(I+\epsilon_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty}\epsilon_n X^n \tag{1.7.10}$$

Siamo interessati alla convergenza di questa serie con ϵ_n generalmente piccolo, allora poniamo $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, ottenendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n} = \exp(X) = e^X \tag{1.7.11}$$

Esiste così un importante corrispondenza tra gruppo di Lie ed algebra di Lie mediata dalla mappa esponenziale della definizone 1.7.3.

Teorema 1.7.1. *Dati $g, h \in (G, \circ)$ gruppo di Lie, $X, Y \in (V, [,])$ algebra di Lie e $a, b \in K$ campo, con $g = I + \epsilon X$ e $h = I + \beta Y$, allora*

$$g \circ h \in G \iff (aX + bY) \in V \tag{1.7.12}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} &g \circ h \in G \iff g \circ h = (I+\epsilon X)(I+\beta Y) = \\ &(I+\gamma(aX+bY)) \in G \iff (aX+bY) \in V \end{aligned} \tag{1.7.13}$$

tenendo solo i termini di ordine minore e ponendo $\epsilon = a\gamma$ e $\beta = b\gamma$.

Teorema 1.7.2. *Dati $g, h \in (G, \circ)$ gruppo di Lie, $X, Y \in (V, [,])$ algebra di Lie, con $g = I + \epsilon X$ e $h = I + \epsilon Y$, allora*

$$g \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1} \in G \iff [X, Y] \in V \tag{1.7.14}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} &g \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1} \in G \iff g \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1} = e^X e^Y e^{-X} e^{-Y} = \\ &(I+\epsilon X)(I+\alpha Y)(I-\epsilon X)(I-\alpha Y) = I + \epsilon\alpha(XY - YX) = \\ &I + \epsilon\alpha[X, Y] \in G \iff [X, Y] \in V \end{aligned} \tag{1.7.15}$$

tenendo solo i termini di ordine minore.

I teoremi precedenti mostrano che la definizione e le proprietà algebriche dei gruppi di Lie inducono naturalmente la struttura di algebra di Lie mediante linearizzazione.

Vogliamo ora dare qualche nozione preliminare prima di arrivare alla definizione formale di algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie. In particolare, essendo i gruppi di Lie caratterizzati anche da una struttura geometrica, mostreremo come questa si rifletta sulla struttura di algebra di Lie.

Definizione (campo vettoriale su un gruppo di Lie) 1.7.4. *Un campo vettoriale X su un gruppo di lie G è una funzione che associa ad ogni punto $g \in G$ un vettore $X_g \in T_gG$.*

La definizione 1.7.4 di campo vettoriale su un gruppo di Lie è analoga alla definizione 1.2.6 di campo vettoriale su una varietà differenziabile, essendo le due strutture algebricamente equivalenti. Valgono dunque tutte le considerazioni fatte precedentemente riguardo il differenziale di funzioni liscie tra varietà differenziabili.

Definizione (invariante a sinistra) 1.7.5. *Consideriamo $\forall a \in G$ la seguente applicazione: $L_a : G \to G$ tale che $L_a(g) = ag$, con $g \in G$ gruppo di Lie. Sia X un campo vettoriale analitico su G, allora X si dice invariante a sinistra se*

$$(L_a)_*|_g X_g = X_{L_a(g)} = X_{ag} \tag{1.7.16}$$

oppure in generale se $(L_a)_*X = X$.

Consideriamo i differenziali

$$(L_a)_*|_b : T_bG \to T_{ab}G \tag{1.7.17}$$

ed

$$(L_b)_*|_I : T_IG \to T_{Ib}G = T_bG \tag{1.7.18}$$

con $a, b; I \in G$ gruppo di Lie ed I identità sul gruppo, allora

$$(L_a)_*|_b(L_b)_*|_I = (L_{ab})_*|_I : T_IG \to T_{ab}G \tag{1.7.19}$$

Teorema 1.7.3. *Se X, Y sono campi vettoriali sul gruppo di Lie G invarianti a sinistra, allora anche λX, $X + Y$ ed $[X, Y]$ sono campi vettoriali invarianti a sinistra.*

Dimostrazione: λX e $X + Y$ sono invarianti a sinistra, in quanto il differenziale è un applicazione lineare. Data una funzione scalare $f \in C^\infty$, allora

$$\begin{aligned}&(L_a)_*([X,Y])(f) = [X,Y](f \circ L_a) = XY(f \circ L_a) - YX(f \circ L_a) = \\ &X(L_a)_*(Y)(f) - Y(L_a)_*(X)(f) = XY(f) - YX(f) = [X,Y](f) \\ &\implies (L_a)_*([X,Y]) = [X,Y]\end{aligned} \tag{1.7.20}$$

provando così la tesi.

Definizione (algebra di Lie associata ad un gruppo di Lie) 1.7.6. *L'algebra di Lie di un gruppo di Lie è un algebra $(V, [,])$ dove*

$$V = \{X \;:\; X \text{ campo vettoriale invariante a sinistra}\} \tag{1.7.21}$$

con $[,]$ che soddisfa la definizione di algebra di Lie.

Teorema 1.7.4. *Dato G gruppo di Lie e data V l'algebra di Lie associata a G, allora la mappa*

$$\Psi : V \to T_I G \tag{1.7.22}$$

è un isomorfismo, con $I \in G$ identità del gruppo G.

Dimostrazione: Consideriamo $Y_I \in T_I G$. Definiamo

$$X_b = (L_b)_*|_I Y_I = \Psi^{-1}(Y_I) \tag{1.7.23}$$

allora

$$(L_a)_*|_b X_b = (L_a)_*|_b (L_b)_*|_I Y_I = (L_{ab})_*|_I Y_I = X_{ab} \tag{1.7.24}$$

ovvero $\forall Y_I \; \exists X_b \in V$ tale che

$$Y_I = \Psi(X_b) \tag{1.7.25}$$

ovvero Ψ è suriettiva. Inoltre si ha che

$$Y_I = 0 \implies X_b(f) = (L_b)_*|_I(0)(f) = (0)(f \circ L_b) = 0 \tag{1.7.26}$$

ovvero Ψ è iniettiva. Concludiamo che Ψ è un isomorfismo.

Il teorema 1.7.4 mostra che l'algebra di Lie $(V, [,])$ associata ad un gruppo di Lie G è isomorfa al piano tangente $T_I G$ alla varietà differenziabile G nell'elemento identità I.

Linearizzare G significa generare lo spazio vettoriale V in cui ad ogni $v \in V$ corrisponde un $w \in T_I G$ permettendoci di effettuare l'identificazione $v \equiv w$.

Definizione (rappresentazione di un algebra di Lie) 1.7.7. *Data l'algebra di Lie $(V, [,])$ sul gruppo di Lie G e gli spazi vettoriali A e B, abbiamo la rappresentazione $T : G \to Hom(A, B)$ per G. Allora definiamo la rappresentazione di V sullo stesso spazio vettoriale A come un omomorfismo*

$$T : V \to Hom(A, B) \tag{1.7.27}$$

tale che

$$Hom(A,B) \supset T(X) : A \to B \tag{1.7.28}$$

omomorfismo tra A e B, con $X \in V$.

Esempio 1.7.1. Consideriamo il gruppo delle rotazioni $SO(2,\mathbb{R})$ dell'esempio 1.6.4 e ricaviamo la sua algebra di Lie V. Considriamo l'elemento $g \in SO(2,\mathbb{R})$ ed $I \in SO(2,\mathbb{R})$ elemento identità, allora

$$\begin{aligned} &g \circ g^T = I \implies (I+\epsilon A)(I+\epsilon A^T) = \\ &I \iff I + \epsilon(A+A^T) = I \iff A = -A^T \iff A \in V \end{aligned} \tag{1.7.29}$$

è antisimmetrica. Inoltre, dalla relazione $det(\exp A) = \exp tr(A)$, si ha che

$$1 = det(g) = det(\exp A) = \exp tr(A) \iff tr(A) = 0 \tag{1.7.30}$$

dove $tr(A)$ denota la traccia di A. Da queste proprietà deduciamo che l'algebra V del gruppo $SO(2,\mathbb{R})$ è data da tutte le matrici 2×2 antisimmetriche e con traccia nulla. Possiamo allora scrivere l'elemento generatore dell'algebra come

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.31}$$

Esempio 1.7.2. Consideriamo il gruppo delle rotazioni $SO(3,\mathbb{R})$. Consideriamo le matrici di rotazione $g_x(\theta), g_y(\theta), g_z(\theta)$ ottenute considerando come assi di rotazione rispettivamente x, y, z e parametrizzate con la variabile reale $\theta \in [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$

$$g_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{1.7.32}$$

$$g_y(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & 0 & -sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ sin(\theta) & 0 & cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{1.7.33}$$

$$g_z(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.7.34}$$

Una generica rotazione $g \in SO(3,\mathbb{R})$ può sempre essere scritta come composizione delle rotazioni $g_x(\theta), g_y(\theta'), g_z(\theta'')$ rispetto gli assi coordinati, da cui segue che

$$g_x(\theta) \circ g_y(\theta') \circ g_z(\theta'') = g \in SO(3,\mathbb{R}) \iff (X+Y+Z) \in V \tag{1.7.35}$$

con V algebra di Lie associata al gruppo $SO(3,\mathbb{R})$. Linearizziamo le tre rotazioni $g_x(\theta), g_y(\theta'), g_z(\theta'')$ attorno all'identità I rendendo θ infinitesimo

$$\theta \to \delta\theta \implies g_i(\theta) \to g_i(\delta\theta) \approx g_i(0) + \frac{\partial g_i}{\partial \theta}|_{\theta=0}\delta\theta + o(\theta) \tag{1.7.36}$$

notando che $g_i(0) = I$. Otteniamo così le seguenti rotazioni infinitesime

$$g_x(\delta\theta) \approx I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta\theta \\ 0 & \delta\theta & 0 \end{pmatrix} = I + X\delta\theta \tag{1.7.37}$$

$$g_y(\delta\theta') \approx I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta\theta' \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta\theta' & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + Y\delta\theta' \tag{1.7.38}$$

$$g_z(\delta\theta'') \approx I + \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta'' & 0 \\ \delta\theta'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I + Z\delta\theta'' \tag{1.7.39}$$

Dalle precedenti considerazioni segue che, per la rotazione generica $g \in SO(3,\mathbb{R})$, si ha

$$g \approx I + X\delta\theta + Y\delta\theta' + Z\delta\theta'' \tag{1.7.40}$$

mostrando effettivamente che le matrici X, Y, Z sono generatori dell'algebra V associata a $SO(3,\mathbb{R})$. Il commutatore dei generatori dell'algebra vale rispettivamente

$$[X,Y] = Z \qquad [Z,X] = Y \qquad [Y,Z] = X \tag{1.7.41}$$

Esempio 1.7.3. Consideriamo il gruppo di Lie $SL(2,\mathbb{R})$ dell'esempio 1.6.2 e ricaviamo la sua algebra di Lie V. Consideriamo $g \in SL(2,\mathbb{R})$, allora dalla relazione $det(\exp A) = \exp tr(A)$ si ha che

$$1 = det(g) = det(\exp A) = \exp tr(A) \iff tr(A) = 0 \tag{1.7.42}$$

dove $tr(A)$ denota la traccia di $A \in V$. Da queste proprietà deduciamo che l'algebra V del gruppo $SO(2,\mathbb{R})$ è data da tutte le matrici 2×2 con traccia nulla. Parametrizziamo g mediante i parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$, allora

$$g = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & (1+bc)/(1+a) \end{pmatrix} \tag{1.7.43}$$

Linearizziamo g attorno all'identità $I \in SL(2,\mathbb{R})$ rendendo i parametri a, b, c infinitesimali

$$\begin{aligned} &(a,b,c) \to (\delta a, \delta b, \delta c) \implies \\ &g \approx \begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & (1+\delta b\delta c)/(1+\delta a) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & 1-\delta a \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.7.44}$$

Possiamo allora scrivere i generatori dell'algebra come

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.7.45}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.46}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7.47}$$

concludendo che

$$g \approx I + X\delta a + Y\delta b + Z\delta c \tag{1.7.48}$$

Consideriamo ora i generatori X_i di un algebra di Lie $(V, [,])$. Il commutatore $[X_i, X_j]$ tra due elementi della base sarà un elemento dello spazio vettoriale V, di conseguenza esprimibile come una combinazione lineare $f_{ij}^k X_k$ degli elementi della base X_k. Otteniamo dunque che esistono delle costanti $f_{ij}^k \in \mathbb{C}$ tali che valga la relazione

$$[X_i, X_j] = f_{ij}^k X_k \tag{1.7.49}$$

chiamate *costanti di struttura*.

Nello studio delle proprietà algebriche delle algebre di Lie è stata utilizzata la notazione $(V, [,])$ per evidenziare la struttura di spazio vettoriale munito di un operazione binaria. Qualora risultasse superfluo specificare tale struttura o quest'ultima fosse già chiara dal contesto, ci riferiremo ad un algebra di Lie con $\mathfrak{g}$. Dunque le notazioni $\mathfrak{g}$ e $(V, [,])$ sono intercambiabili.

Capitolo 2

Forme Differenziali e Coomologia di De Rham

La coomologia più semplice e fondamentale da introdurre è quella di De Rham, in quanto è probabilmente quella che risulta maggiormente intuitiva da un punto di vista geometrico. Infatti, il concetto alla base della sua definizione è quello di studiare la presenza di "buchi" nelle varietà differenziabili. L'obiettivo è quello di mostrare che questo fatto si traduce nell'impossibilità di parametrizzare in modo continuo una curva chiusa sulla varietà, portando a conseguenze nelle proprietà delle forme differenziali integrate su tale curva.

Chiarito lo scopo del presente capitolo, vengono prima di tutto date delle nozioni introduttive di algebra multilineare e tensori nella sezione 2.1 [5], concentrandosi principalmente sui tensori alternanti. Vengono poi definiti gli oggetti fondamentali per introdurre le coomologie di De Rham, ovvero le forme differenziali nella sezione 2.2 [5] e gli integrali di linea su varietà differenziabili nella 2.3 [5]. Per i motivi sopracitati, l'accento viene posto sulle proprietà di chiusura ed esattezza delle forme differenziali, nonché sulle implicazioni dovute alla struttura della varietà differenziale sulla quale sono definite. Infine, nella sezione 2.4, viene data la definizione generale di coomologia e quella più specifica di coomologia di De Rham [5].

I concetti sulle coomologie introdotti in questo capitolo saranno utilizzati nelle definizioni di coomologia delle algebre di Lie e di complesso di Chevalley - Eilenberg, nozioni che trovano un applicazione in fisica.

2.1 Algebra Multilineare e Tensori

Definizione (mappa multilineare) 2.1.1. *Dati gli spazi vettoriali reali e finitamente generati* $\{V_i\}$ *e* W*, la mappa* $F : V_1 \times V_2 \times ... \times V_k \to W$ *è una mappa multilineare se*

$$F(v_1, ..., \lambda v_i, \beta u_i, ..., v_k) = \lambda F(v_1, ..., v_i, ..., v_k) + \beta F(v_1, ..., u_i, ..., v_k) \tag{2.1.1}$$

con $v_j \in V_j$ $\forall 1 \leq j \leq k$ *ed* $u_i \in V_i$*. Denotiamo con* $L(V_1, ..., V_k; W)$ *l'insieme di tutte le funzioni multilineari così definite.*

Definizione (prodotto tensoriale) 2.1.2. *Dato* V *spazio vettoriale e dati* $\omega_i \in V^*$*, definiamo la funzione prodotto tensoriale degli* ω_i *come la mappa* $\omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k : V \times ... \times V \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k(v_1, ..., v_k) = \omega_1(v_1)...\omega_k(v_k) \tag{2.1.2}$$

Dalla definizione 2.1.2 di prodotto tensoriale e dalla linearità dei covettori ω_i segue che $\omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k$ è multilineare, dunque $\omega_1 \otimes ... \otimes \omega_k \in L(V, ...V; \mathbb{R})$. Inoltre, è possibile generalizzare la definizione di prodotto tensoriale, considerando $F \otimes G : V \times ... \times V \to \mathbb{R}$, dove $F, G \in L(V, ..., V; \mathbb{R})$.

Consideriamo ora una base $\{\epsilon^1, \epsilon^2\}$ di $(\mathbb{R}^2)^*$ spazio vettoriale. Costruiamo la forma bilineare $\epsilon^1 \otimes \epsilon^2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$\epsilon^i \otimes \epsilon^j((v^1, v^2), (w^1, w^2)) = v^i w^j \tag{2.1.3}$$

con $1 \leq i, j \leq 2$. Possiamo dunque definire le funzioni $\epsilon^i \otimes \epsilon^j$ una base per $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Si puo generalizzare in modo immediato al caso di k spazi vettoriali $V_1, ..., V_k$ considerando $\epsilon^1_{(j)}, ..., \epsilon^{n(j)}_{(j)}$ base dello spazio duale V_j^*, dove $n(j)$ denota la sua dimensione. Definiamo una base per lo spazio $L(V_1, ..., V_k, \mathbb{R})$ l'insieme

$$\{\epsilon^{i_1}_{(1)} \otimes ... \otimes \epsilon^{i_k}_{(k)} \ : \ 1 \leq i_1 \leq n_1, ..., k \leq i_k \leq n_k\} \tag{2.1.4}$$

dove i pedici $(1)..., (k)$ indicizzano lo spazio vettoriale mentre gli apici $i_1, ..., i_k$ indicizzano il vettore della base. Lo spazio $L(V_1, ..., V_k, \mathbb{R})$ ha dunque dimensione $n_1, ..., n_k$.

Definizione (prodotto tensoriale di spazi vettoriali) 2.1.3. *Dati gli spazi vettoriali* $V_1, ..., V_k$ *definiamo lo spazio dato prodotto tensoriale di questi ultimi come*

$$V_1 \otimes ... \otimes V_k = F(V_1 \times ... \times V_k)/R \tag{2.1.5}$$

con $F(V_1 \times ... \times V_k)$ *insieme di tutte le combinazioni lineari dei vettori in* $V_1 \times ... \times V_k$ *ed* $R \subset F(V_1 \times ... \times V_k)$ *tale che* R *è lo span degli elementi nella forma*

$$\begin{aligned} &(v_1, ..., \lambda v_i, ..., v_k) - \lambda(v_1, ..., v_i, ..., v_k) \\ &(v_1, ..., v_i + v_i', ..., v_k) - (v_1, ..., v_i, ..., v_k) - (v_1, ..., v_i', ..., v_k) \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Proposizione 2.1.0.1. *Dati gli spazi vettoriali $V_1, ..., V_k$, esiste l'isomorfismo canonico*

$$\theta : V_1^* \otimes ... \otimes V_k^* \to L(V_1, ..., V_k, \mathbb{R}) \tag{2.1.7}$$

La definizione 2.1.3 consiste in un insieme di classi di equivalenza che racchiudano l'idea della bilinearità degli elementi nel prodotto tensoriale di spazi vettoriali. Infatti, le relazioni di equivalenza sono tali che

$$(v_1, ..., \lambda v_i, ..., v_k) \sim \lambda(v_1, ..., v_i, ..., v_k) \tag{2.1.8}$$

e

$$(v_1, ..., v_i + v_i', ..., v_k) \sim (v_1, ..., v_i, ..., v_k) + (v_1, ..., v_i', ..., v_k) \tag{2.1.9}$$

Si noti che, dalla stessa definizione, è possibile costruire lo spazio $V_1^* \otimes ... \otimes V_k^*$ prodotto tensoriale dei covettori $V_1^*, ..., V_k^*$.

Definizione (tensori covarianti) 2.1.4. *Dati gli spazi vettoriali V, definiamo il tensore covariante di rango k come la forma multilineare*

$$\alpha : V \times ... \times V \to \mathbb{R} \tag{2.1.10}$$

dove il prodotto cartesiano è tra k spazi vettoriali V. Denotiamo l'insieme dei tensori covarianti di rango k con

$$T^k(V^*) = V^* \otimes ... \otimes V^* \tag{2.1.11}$$

Definizione (tensori controvarianti) 2.1.5. *Dati gli spazi vettoriali duali V^*, definiamo il tensore controvariante di rango k come la forma multilineare*

$$\alpha : V^* \times ... \times V^* \to \mathbb{R} \tag{2.1.12}$$

dove il prodotto cartesiano è tra k spazi vettoriali duali $V*$. Denotiamo l'insieme dei tensori controvarianti di rango k con

$$T^k(V) = V \otimes ... \otimes V \tag{2.1.13}$$

Definizione (tensori misti) 2.1.6. *Dati gli spazi vettoriali V e V^*, definiamo il tensore misto di rango (k, l) come la forma multilineare*

$$\alpha : V \times ... \times V \times V^* \times ... \times V^* \to \mathbb{R} \tag{2.1.14}$$

dove il prodotto cartesiano è tra k spazi vettoriali V ed l spazi vettoriali V^*. Denotiamo l'insieme dei tensori misti di rango (k, l) con

$$T^{(k,l)}(V^*) = V^* \otimes ... \otimes V^* \otimes V \otimes ... \otimes V \tag{2.1.15}$$

Esempi 2.1.1:

- Il prodotto interno $<,>$ è un tensore covariante di rango 2. Infatti, dalla definizione di prodotto interno, vale che

$$< v, \lambda w + \beta u >= \lambda < v, w > +\beta < v, w > \tag{2.1.16}$$

e

$$< \lambda v + \beta w, u >= \lambda < v, u > +\beta < w, u > \tag{2.1.17}$$

con $v, w, u \in V$ spazio vettoriale e $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Allora possiamo definire un tensore covariante $alpha : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

$$\alpha(v, w) =< v, w > \tag{2.1.18}$$

- Esiste un isomorfismo canonico tra tutti gli endomorfismi $End(V)$ e i tensori misti di rango $(1, 1)$.

Consideriamo lo spazio vettoriale V ed il suo duale V^*, allora i seguenti insiemi costituiscono una base per i rispettivi spazi tensoriali su V

$$\begin{aligned}
&\{\epsilon^{i_1} \otimes ... \otimes \epsilon^{i_k} \; : \; 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n\} \in T^k(V^*) \\
&\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_k} \; : \; 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n\} \in T^k(V) \\
&\{e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_k} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes ... \otimes \epsilon^{j_l} \; : \; 1 \leq i_1, ..., i_k \leq n \; ; \; 1 \leq j_1, ..., j_l \leq n\} \in T^{(k,l)}(V)
\end{aligned} \tag{2.1.19}$$

con n dimensione di V. una volta fissata la base possiamo scrivere un generico tensore misto come

$$\alpha = \alpha^{j_1,...,j_l}_{i_1,...,i_k} e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_k} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes ... \otimes \epsilon^{j_l} \tag{2.1.20}$$

dove le componenti $\alpha^{j_1,...,j_l}_{i_1,...,i_k}$ sono date da

$$\alpha^{j_1,...,j_l}_{i_1,...,i_k} = \alpha(e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_k} \otimes \epsilon^{j_1} \otimes ... \otimes \epsilon^{j_l}) \tag{2.1.21}$$

Esistono principalmente due sottoinsiemi di tensori: i tensori *simmetrici* ed i tensori *alternanti* o antisimmetrici. Per arrivare a definire le forme differenziali è necessario concentrarsi sui tensori covarianti alternanti, perciò approfondiremo questi ultimi mentre definiremo i tensori simmetrici limitandoci soltanto al caso covariante (il caso controvariante è del tutto analogo).

Definizione (tensori simmetrici) 2.1.7. *Dato V spazio vettoriale, un tensore covariante alpha di rango k è detto simmetrico se*

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = \alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) \tag{2.1.22}$$

Definiamo l'insieme di tutti i tensori simmetrici covarianti di rango k con

$$\Sigma^k(V^*) \tag{2.1.23}$$

Esempio 2.1.2. Il tensore

$$\alpha(v, w) =< v, w > \tag{2.1.24}$$

che rappresenta il prodotto scalare euclideo tra due vettori $v, w \in V$ spazio vettoriale è un tensore simmetrico, poichè per definizione di prodotto scalare $< v, w >=< w, v >$, allora

$$\alpha(v, w) = \alpha(w, v) \tag{2.1.25}$$

Definizione (tensori alternanti) 2.1.8. *Dato V spazio vettoriale, un tensore covariante alpha di rango k è detto alternante se*

$$\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k) = -\alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_k) \tag{2.1.26}$$

Definiamo l'insieme di tutti i tensori alternanti covarianti di rango k con

$$\Lambda^k(V^*) \tag{2.1.27}$$

Consideriamo un generico tensore simmetrico $\alpha \in \Lambda^k(V^*)$. Allora, dalla definizione, segue che

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) = (sgn(\sigma))\alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \tag{2.1.28}$$

dove σ denota una permutazione e $sgn\sigma = +1$ se σ è pari mentre $sgn\sigma = -1$ se σ è dispari.

Definizione (campi tensoriali su una varietà differenziabile) 2.1.9. *Data la varietà differenziabile M^n, allora*

1. *la mappa $A : M^n \to T^k T_P^* M$ è un campo tensoriale covariante su M, tale che $A(P) = A_P$.*

2. *la mappa $A : M^n \to T^k T_P M$ è un campo tensoriale controvariante su M, tale che $A(P) = A_P$.*

3. *la mappa $A : M^n \to T^{(k,l)} T_P M$ è un campo tensoriale misto su M, tale che $A(P) = A_P$.*

Un generico campo tensoriale A può dunque essere espresso, localmente in una data carta, come

1. $A = A_{i_1,...,i_k} dx^{i_1} \otimes ... \otimes dx^{i_k}$,
2. $A = A^{i_1,...,i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}$,
3. $A = A^{i_1,...,i_k}_{j_1,...,j_l} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes ... \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}} \otimes dx^{j_1} \otimes ... \otimes dx^{j_l}$.

Se le funzioni $A_{i_1,...,i_k}$, $A_{i_1,...,i_k}$, $A^{i_1,...,i_k}_{j_1,...,j_l}$ sono liscie, allora i rispettivi campi vettoriali si dicono lisci. Definiamo l'insieme dei campi vettoriali covarianti, controvarianti e misti lisci rispettivamente come

$$\Gamma(T^k T^*_P M) \qquad \Gamma(T^k T_P M) \qquad \Gamma(T^{(k,l)} T_P M) \tag{2.1.29}$$

2.2 Forme Differenziali

I tensori covarianti alternanti vengono chiamati forme esterne e, come già definito nella 2.1.8, l'insieme di tutte le forme esterne si indica con $\Lambda(V^*)$. In seguito daremo alcune proprietà dei tensori alternanti., per poi arrivare a definire i *tensori alternanti elementari* ed il *prodotto wedge*.

Lemma 2.2.1. *Sia α un tensore covariante di rango k, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

1. *α è alternante.*
2. *$\alpha(v_1, ..., v_k) = 0$ quando $v_1, ..., v_k$ sono linearmente dipendenti.*
3. *$\alpha(v_1, ..., w, ..., w, ..., v_k) = 0$.*

Dimostrazione:

1. 1. $\Longrightarrow$ 2. ipotizziamo che $v_1 = \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k$, allora

$$\begin{aligned} &\alpha(v_1, ..., v_k) = \alpha(\lambda_2 v_2 + ... + \lambda_k v_k, v_2, ..., v_k) = \\ &\lambda_2 \alpha(v_2, v_2, ..., v_k) + ... + \lambda_k \alpha(v_k, v_2, ..., v_k) = \\ &-(\lambda_2 \alpha(v_2, v_2, ..., v_k) + ... + \lambda_k \alpha(v_k, v_2, ..., v_k)) \\ &\iff \alpha(v_1, ..., v_k) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

2. 1. $\implies$ 3.

$$\begin{aligned} &\alpha(v_1, ..., w, ..., w, ..., v_k) = -\alpha(v_1, ..., w, ..., w, ..., v_k) = \\ \iff &\alpha(v_1, ..., w, ..., w, ..., v_k) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

3. 2. $\implies$ 3. se considero $\alpha(v_1, ..., w, ..., w, ..., v_k)$, allora w è una combinazione lineare di tutti gli altri argomenti

$$w = \lambda_1 v_1 + ... + \beta w + ... + \lambda_k v_k \tag{2.2.3}$$

con $\lambda_i = 0$ e $\beta = 1$, allora

$$\alpha(v_1, ..., w, ..., w, ..., v_k) \tag{2.2.4}$$

4. 3. $\implies$ 1.

$$\begin{aligned} &0 = \alpha(v_1, ..., v_i + v_j, ..., v_i + v_j, ..., v_k) = \\ &\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_i, ..., k) + \alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_j, ..., k) + \\ &\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., k) + \alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., k) = \\ &\alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., k) + \alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., k) \\ &\iff \alpha(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., k) = -\alpha(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., k) \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Dato lo spazio vettoriale V, è possibile definire la proiezione

$$Alt : T^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*) \tag{2.2.6}$$

tale che

$$(Alt\alpha)(v_1, ..., v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (sgn\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)}) \tag{2.2.7}$$

chiamata *alternazione*, con σ permutazione degli elementi k e S_k gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{k\}$. Se consideriamo ad esempio $k = 2$ avremo che

$$(Alt\alpha)(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\alpha((v_1, v_2)) - \frac{1}{2}\alpha((v_2, v_1)) \tag{2.2.8}$$

che è un tensore alternante.

Definizione (tensore alternante elementare) 2.2.1. *Dato V spazio vettoriale, fissiamo $\epsilon^1, ..., \epsilon^n$ base duale per V^*, allora definiamo i covettori ϵ^i tali che*

$$\epsilon^I(v_1, ..., v_k) = \det \begin{pmatrix} \epsilon^{i_1}(v_1) & ... & \epsilon^{i_1}(v_k) \\ & & \\ \epsilon^{i_k}(v_1) & ... & \epsilon^{i_k}(v_k) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & ... & v_k^{i_1} \\ & & \\ v_1^{i_k} & ... & v_k^{i_k} \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

con $I = (i_1, ..., i_k)$ multiindice tale che $1 \leq i_1, ..., i_k \leq n$ e $v_1, ..., v_k \in V$.

Nella definizione precedente i rappresenta l'elemento i-esimo della base $\epsilon^1, ..., \epsilon^n$ mentre k rappresenta il vettore k-esimo dello spazio vettoriale V e dunque anche la riga della matrice della quale si svolge il determinante.

Considerando una generica permutazione σ degli indici k tale che $I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, ..., i_{\sigma(k)})$, segue dalle proprietà del determinante che $\epsilon^{I_\sigma} = (sgn\sigma)\epsilon^I$, ovvero ϵ^I è alternante. Seguono le proprietà gia viste precedentemente per i tensori alternanti.

Consideriamo lo spazio vettoriale V dove fissiamo la base $e_1, ..., e_k = \{e_j\}$, consideriamo poi V^* dove fissiamo la base $\epsilon^1, ..., \epsilon^k = \{\epsilon^i\}$, allora

$$\epsilon^I(e_{j_1}, ..., e_{j_k}) = \delta^I_J \tag{2.2.10}$$

con $I = (i_1, ..., i_k)$ e $J = I_\sigma = (i_{\sigma(1)}, ..., i_{\sigma(k)}) = (j_1, ..., j_k)$.

Il tensore alternante elementare è utile perchè permette di costruire in modo semplice una base per lo spazio $\Lambda^k(V^*)$. Tuttavia è chiaro che il numero di vettori che si possono ottenere che sono del tipo ϵ^I è sovrabbondante, in quanto permutazioni diverse che coinvolgono lo stesso indice portano a vettori multipli tra loro per un certo scalare. Dunque il modo corretto per definire una base per $\Lambda^k(V^*)$ è considerare un insieme di multiindici detto *crescente*, ovvero tale che $i_1 < ... < i_k$. Notiamo che fissare un certo i significa fissare l'elemento $\epsilon^i \in V^*$ con $\dim V^* = n$. In seguito indicheremo con I' il multiindice crescente quando sarà necessario restringersi ad una somma su tali multiindici.

Definizione (base per $\Lambda^k(V^*)$) 2.2.2. *Dato lo spazio vettoriale V di dimensione n e data una base $\{\epsilon^i\}$ per V^*, allora per ogni intero positivo $k \le n$, l'insieme E di covettori ϵ^I tali che*

$$E = \{\epsilon^{I'} \ : \ I' \text{ multiindice crescente di lunghezza } k\} \tag{2.2.11}$$

è una base per $\Lambda^k(V^*)$, inoltre

$$\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k} \tag{2.2.12}$$

Se $n \le k$, allora $\dim \Lambda^k(V^*) = 0$.

Esempio 2.2.1. Consideriamo $\Lambda^n(V^*)$ con $\dim V = n$, ovvero tutti i tensori controvarianti alternanti di rango n. Allora

$$\dim \Lambda^n(V^*) = 1 \tag{2.2.13}$$

poichè se consideriamo l'insieme dei multiindici crescenti definito come

$$IDX = \{I' \ : \ I' \ \textit{multiindice crescente di lunghezza} \ n\} \tag{2.2.14}$$

abbiamo che

$$IDX = \{(i_1, ..., i_n)\} \tag{2.2.15}$$

poichè esiste un solo modo di ordinare n elementi in raggruppamenti da n posti mantenendo la convenzione $i_j < i_{j+1}$.

Definizione(prodotto wedge) 2.2.3. *Dati due tensori alternanti $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ e $\eta \in \Lambda^p(V^*)$, si definisce il prodotto wedge come il covettore di rango $k+q$ tale che*

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+p)!}{k!p!} Alt(\omega \otimes \eta) \tag{2.2.16}$$

Il motivo per il quale si aggiunge il coefficente $\frac{(k+p)!}{k!p!}$ sarà noto una volta aver dimostrato il seguente lemma.

Lemma 2.2.2. *Dato V spazio vettoriale di dimensione n e data $\{\epsilon^i\}$ base per V^*, allora*

$$\epsilon^{I'} \wedge \epsilon^{J'} = \epsilon^{I'J'} \tag{2.2.17}$$

dove $I' = (i_1, ..., i_k)$, $J' = (j_1, ..., j_p)$ e $I'J' = (i_1, ..., i_k, j_{k+1}, ..., j_p)$.

Dimostrazione: Fissiamo $\{e_{i_1}, ..., e_{i_{k+p}}\}$ base di V e $L = (l_1, ..., l_{k+p})$. Basta provare il lemma 2.2.2 per $\epsilon^{I'} \wedge \epsilon^{J'}(e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}}) = \epsilon^{I'J'} e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}}$. Consideriamo innanzitutto il caso in cui L contiene un indice ripetuto ed il caso in cui L contenga un indice non presente ne in I' e ne in J'. In entrambi i casi l'equazione 2.2.17 si riduce all'identità $0 = 0$ per il lemma 2.2.1. L'unico caso rilevante è quello in cui $L = I'J'$ e L non contiene indici ripetuti. In questo caso infatti, per il lemma 2.2.1

$$\epsilon^L e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}} = \epsilon^{I'J'} e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}} = 1 \tag{2.2.18}$$

Allora bisogna mostrare che $\epsilon^{I'} \wedge \epsilon^{J'}(e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}}) = 1$.

$$\begin{aligned} &\epsilon^{I'} \wedge \epsilon^{J'}(e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}}) = \frac{(k+p)!}{k!p!} Alt(\epsilon^I \otimes \epsilon^J)(e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}}) = \\ &\frac{1}{k!p!} \sum_{\sigma \in S_{k+p}} (sgn\ \sigma) \epsilon^I(e_{l_{\sigma(1)}}, ..., e_{l_{\sigma(k+p)}}) \epsilon^J(e_{l_{\sigma(1)}}, ..., e_{l_{\sigma(k+p)}}) \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Chiaramente l'ultima somma si annulla per ogni permutazione $\sigma \in S_{I'+J'}$ che mescola gli indici di I' con quelli di J'. Di conseguenza σ deve essere nella forma $\sigma = \tau\eta$, con $\tau \in S_k$ e $\eta \in S_p$. Possiamo dunque ridurre la somma da $\sum_{\sigma \in S_{k+p}}$ a $\sum_{\tau \in S_k, \eta \in S_p} = \sum_{\tau \in S_k} \sum_{\eta \in S_p}$. Allora

$$
\begin{aligned}
&\epsilon^{I'} \wedge \epsilon^{J}(e_{l_1}, ..., e_{l_{k+p}}) = \\
&\left(\frac{1}{k!} \sum_{\tau \in S_k} (sgn\ \tau) \epsilon^{I'}(e_{l_{\tau(1)}}, ..., e_{l_{\tau(k)}}) \right) \left(\frac{1}{p!} \sum_{\eta \in S_p} (sgn\ \eta) \epsilon^{I'}(e_{l_{k+\eta(1)}}, ..., e_{l_{k+\eta(p)}}) \right) = \quad (2.2.20) \\
&Alt(\epsilon^{I'})(e_{l_1}, ..., e_{l_k}) Alt(\epsilon^{J})(e_{l_{k+1}}, ..., e_{l_{k+p}}) = 1
\end{aligned}
$$

Proposizione 2.2.1. *Dati α, β, γ, ω e η covettori sullo spazio vettoriale V, allora valgono le seguenti proprietà*

1. *Il prodotto wedge è bilineare*

$$
\begin{aligned}
&(a\alpha + b\beta) \wedge \gamma = a(\alpha \wedge \gamma) + b(\beta \wedge \gamma) \\
&\gamma \wedge (a\alpha + b\beta)
\end{aligned} \tag{2.2.21}
$$

2. *Il prodotto wedge è associativo*

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \tag{2.2.22}$$

3. *Il prodotto wedge è anticommutativo, infatti dati $\omega \in \Lambda^k(V^*)$ ed $\eta in \Lambda^p(V^*)$ vale che*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kp} \eta \wedge \omega \tag{2.2.23}$$

4. *Data $\{\epsilon^i\}$ base di V^* e dato $I' = (i_1, ..., i_k)$ multiindice, allora*

$$\epsilon^{i_1} \wedge ... \wedge \epsilon^{i_k} = \epsilon^{I'} \tag{2.2.24}$$

5. *Dati i covettori $\omega^1, ..., \omega^k$ ed i vettori $v_1, ..., v_k$, allora*

$$\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^k(v_1, ..., v_k) = \det(\omega^j(v^i)) \tag{2.2.25}$$

Con $a, b \in \mathbb{R}$.

Definizione (algebra graduata) 2.2.4. *Un' algebra A si dice graduata se*

$$A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A^k \tag{2.2.26}$$

e se il prodotto $\cdot$ soddisfa $v \cdot w \in A^{k+p}$, con $v \in A^k$ e $w \in A^p$.

Esempio 2.2.3. Consideriamo l'anello dei polinomi $K[x_1, ..., x_n]$ a coefficenti nell'anello commutativo K. L'anello dei polinomi $K[x_1, ..., x_n]$ è in particolare un algebra commutativa, chiamata *algebra dei polinomi*. Normalmente si definisce l'algebra dei polinomi su un campo, tuttavia la definizione più generale prevede che si tratti di un algebra su un anello. L'algebra dei polinomi è un algebra graduata, che verifichiamo nel caso di polinomi in una variabile. Dati due polinomi

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x^1 + ... + a_kx^k \in K^k[x] \\ g(x) &= b_0 + b_1x^1 + ... + b_px^p \in K^p[x] \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

(dove k e p indicano i rispettivi gradi), allora entrambi sono scrivibili in modo unico come la seguente somma

$$\begin{aligned} f(x) &= a_1x^1 + ... + a_kx^k \in K^0[x] \oplus K^1[x] \oplus ... \oplus K^k[x] \\ g(x) &= b_0 + b_1x^1 + ... + b_px^p \in K^0[x] \oplus K^1[x] \oplus ... \oplus K^p[x] \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

Inoltre

$$f \cdot g = \sum_{0 \leq i \leq k,\ 0 \leq j \leq p} a_ib_jx^ix^j \in K^0[x] \oplus ... \oplus K^k[x] \oplus K^{k+1}[x] \oplus ... \oplus K^{k+p}[x] \tag{2.2.29}$$

Generalizzare al caso di $K[x_1, ..., x_n]$ è immediato.

Proposizione 2.2.2. *Dato lo spazio vettoriale V, allora lo spazio $\Lambda(V^*)$ è un'algebra anticommutativa graduata, data da*

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V^*) \tag{2.2.30}$$

Dimostrazione Dalla proposizione 2.2.1 segue che gli spazi $\Lambda^k(V^*)$ sono algebre anticommutative, dunque $\Lambda(V^*)$ è un algebra anticommutativa. Si tratta inoltre di un algebra graduata poichè il prodotto wedge è una mappa definita come

$$\wedge : \Lambda^k(V^*) \times \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^{k+p}(V^*) \tag{2.2.31}$$

L'algebra $\Lambda(V^*)$ viene chiamata *algebra esterna* o *algebra di Grassmann* di V.

Definizione (campo vettoriale dei tensori alternanti su una varietà differenziabile) 2.2.5. *Data M^n varietà differenziabile e dato l'insieme dei tensori covarianti $T^kT^*_PM^n$ di rango k su M^n con T_PM^n spazio tangente ad M^n in P, definiamo l'insieme dei tensori covarianti alternanti su M^n come il sottoinsieme*

$$\Lambda^kT^*_PM^n \subset T^kT^*_PM^n \tag{2.2.32}$$

Definizione (k-forma differenziale su una varietà) 2.2.6. *Data M^n varietà differenziabile e dato il campo vettoriale $\omega : M^n \to \Lambda^k T_P^* M^n$ su M^n tale che*

$$\omega(P) = \omega_P \in \Lambda^k T_P^* M^n \tag{2.2.33}$$

allora ω è una k-forma differenziale su M^n.

Dalla definizione 2.1.8 segue che una generica k-forma differenziale ω può essere espressa come

$$\omega = \omega_{I'} dx^{I'} = \omega_{I'} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \tag{2.2.34}$$

Inoltre vale che

$$dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}) = \delta^{I'}_{J'} \tag{2.2.35}$$

e la componente ω_I si ottiene mediante

$$\omega_{I'} = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}) \tag{2.2.36}$$

con $I' = (i_1, ..., i_k)$ e $J' = (j_1, ..., j_k)$ multiindici crescenti. Ricordiamo che l'indice i rappresenta l'elemento i-esimo della base $dx^1, ..., dx^n$ di $T_P^* M^n$ mentre k rappresenta il vettore k-esimo dello spazio vettoriale $T_P M^n$ su cui agisce dx^{i_k}.

Se le funzioni $\omega_{I'}$ sono liscie, allora la k-forma ω è liscia. Definiamo l'insieme delle k-forme differenziali liscie su M come

$$\Omega(M^n) = \Gamma(\Lambda^k T_P^* M^n) \tag{2.2.37}$$

Per la proposizione 2.2.2 e dato che il prodotto wedge di una k-forma differenziale liscia ω con una p-forma differenziale liscia η è ancora una $(k+p)$-forma differenziale liscia $\omega \wedge \eta$, allora lo spazio $\Omega^k(M)$ è un algebra associativa, anticommutativa e graduata tale che

$$\Omega(M^n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(M^n) \tag{2.2.38}$$

Esempio 2.2.4. Consideriamo la varietà $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$, allora

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{2.2.39}$$

è una 1-forma differenziale liscia, poiche $\frac{x}{x^2+y^2}$ ed $\frac{y}{x^2+y^2}$ sono di classe C^∞.

Esempio 2.2.5. Consideriamo la varietà $\mathbb{R}^3$, allora

$$\omega = sin(xyz) dy \wedge dz \tag{2.2.40}$$

è una 2-forma differenziale liscia, poiche $sin(xyz)$ è di classe C^∞.

$$\eta = xdy \wedge dz + \frac{y}{z} dx \wedge dy \tag{2.2.41}$$

non è una 2-forma differenziale liscia, poiche $\frac{y}{z}$ non è derivabile in $z = 0$.

Una 1-forma differenziale liscia ω su una generica forma differenziale M^n è un campo covettoriale.

Definizione (Derivata esterna) 2.2.7. *Data la varietà differenziabile M^n con le coordinate locali $\{x^i\}$ e la k-forma $\omega = \omega_I dx^I$, allora definiamo derivata esterna come la $(k+1)$-forma*

$$\begin{aligned} &d\omega = d(\omega_{I'}\ dx^{I'}) = d\omega_{I'} \wedge dx^{I'} \iff \\ &d\omega = d(\omega_{I'}\ dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}) = d\omega_{I'} \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} = \\ &\frac{\partial \omega_{I'}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} = \frac{\partial \omega_{I'}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{I'} \end{aligned} \tag{2.2.42}$$

con $d\omega_{I'} = \frac{\partial \omega_{I'}}{\partial x^j} dx^j$.

Nel caso particolare in cui ω è un campo covettoriale, si ha

$$d\omega = d(\omega_i dx^i) = d\omega_i \wedge dx^i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \tag{2.2.43}$$

lasciando la notazione di Einstein, scriviamo

$$\begin{aligned} d\omega = &\sum_{i,j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \\ &\sum_{i<j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i + \sum_{i>j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \\ &\sum_{i<j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i + \sum_{i<j} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \\ &\sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} \right) dx^j \wedge dx^i \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Nel caso particolare in cui ω è una funzione liscia f (ovvero una 0-forma), dato un campo covettoriale X, si ha che df è tale che

$$df(X) = Xf \tag{2.2.45}$$

Fissando una carta e delle coordinate locali $\{x_i\}$, possiamo esprimere la derivata esterna rispetto alla base $\{dx^i\}$ come

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx^i \tag{2.2.46}$$

e la definizione si riduce alla 1.3.3 di differenziale di una funzione liscia su una varietà differenziabile M^n.

Nel caso particolare in cui ω è una 1-forma, dati due campi vettoriali X, Y, allora vale che

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]) \tag{2.2.47}$$

Proposizione 2.2.3. *Data la varietà differenziabile M^n e la forma differenziale ω su M^n, consideriamo la derivata esterna d, allora $d \circ d \equiv 0$*

2.3 Integrali di Linea

Definizione (Integrale di una forma differenziale) 2.3.1. *Dato l'intervallo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e dato il campo covettoriale liscio $\omega = f(t)dt$ su $[a,b]$ con $t \in [a,b]$, definiamo l'integrale di ω su $[a,b]$ come*

$$\int_{[a,b]} \omega = \int_a^b f(t)dt \tag{2.3.1}$$

Consideriamo una varietà differenziabile M^n ed una curva $\gamma : [a,b] \to M^n$ tale che $\gamma(t) \in M^n$ $\forall t \in [a,b]$. L'idea per definire un integrale di linea sulla curva $\gamma \subset M^n$ è quella di ridursi ad un integrale come nella definizione 2.3.1 su $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Il modo per farlo è sfruttare il pullback del campo covettoriale ω mdiante γ, pensando γ come una funzione tra le varietà differenziabili $[a,b] \in \mathbb{R}$ ed M^n.

Definizione (Integrale di linea di una forma differenziale) 2.3.2. *Data la curva liscia $\gamma : \mathbb{R} \supset [a,b] \to M^n$ tale che $\gamma(t) \in M^n$ $\forall t \in [a,b]$ e dato il campo covettoriale liscio ω su $[a,b]$, definiamo l'integrale di ω su $[a,b]$ come*

$$\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega \tag{2.3.2}$$

Esempio 2.3.1. Consideriamo la varietà $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ sulla quale definiamo la carta $\Phi : \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ tale che

$$\Phi(x,y) = (x,y) = (\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)) \tag{2.3.3}$$

Definiamo il campo covettoriale liscio come nell'esempio 2.2.4

$$\omega = \frac{x\ dy - y\ dx}{x^2 + y^2} \tag{2.3.4}$$

Definiamo inoltre la curva $\gamma : \mathbb{R} \supset [0.2\pi] \to M^n$ tale che

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \tag{2.3.5}$$

Allora $\gamma^*\omega\ \forall t \in [a,b]$ risulta essere, dalla 1.4.23 e per la linearità del pullback

$$\begin{aligned}
&(\gamma^*\omega)_t = \gamma^*\left(\frac{x}{x^2+y^2}dy\right) - \gamma^*\left(\frac{y}{x^2+y^2}dx\right) = \\
&\frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d(\phi_1(\gamma(t))) - \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} d(\phi_2(\gamma(t))) = \\
&\frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t\ dt - \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t)\ dt
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Allora

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \omega = \int_{[0,2\pi]} \left(\frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \cos t\ dt - \frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t)\ dt\right) = \\
&\int_0^{2\pi} dt = 2\pi
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

E' importante chiarire l'idea che guida la risoluzione dell'integrale precedente. Immaginiamo di avere una varietà differenziabile M^n e fissiamo la carta $\phi(P) = (x^1, ..., x^n)$. Definiamo poi su M^n la seguente forma differenziale

$$\omega = \omega_i(x^1, ..., x^n)dx^i \tag{2.3.8}$$

scritta rispetto alle coordinate locali di M^n. Consideriamo la curva $\gamma : [a,b] \to M^n$. Per risolvere l'integrale $\int_\gamma \omega$ è necessario scriverlo come un integrale di una forma differenziale sulla varietà euclidea $[a,b]$, per il quale abbiamo la soluzione data dalla formula 2.3.1. Il modo per farlo è fare il pullback

$$(\gamma^*\omega)_t = d\gamma_t^*\ \omega_{\gamma(t)}\ \forall t \in [a,b] \tag{2.3.9}$$

con

$$d\gamma_t^* : T^*_{\gamma(t)}M^n \to T^*_t[a,b] = [a,b] \tag{2.3.10}$$

in modo da definire un campo covettoriale su $[a,b]$, il quale può poi essere integrato mediante la 2.3.1. Le proprietà del pullback date dalla 1.4.24 ci dicono che

$$\gamma^*(\omega_i(x^1, ..., x^n)dx^i) = (\omega(\gamma(t))(\gamma^* dx^i)_t \tag{2.3.11}$$

ovvero che il pullback lascia uscire le funzioni liscie delle coordinate locali dal suo argomento, le quali vengono però calcolate in $\gamma(t)$. Inoltre

$$(\gamma^* dx^i)_t = d\gamma_t^* \ dx^i_{\gamma(t)} \tag{2.3.12}$$

ovvero il pullback di dx^i è definito come l'applicazione del pullback del differenziale al covettore dx^i, che definisce un covettore in $T_t^*[a,b] = [a,b]$. Infine. dalla 1.4.22, si ha

$$d\gamma_t^* \ dx^i_{\gamma(t)} = d(x^i(\gamma(t))) = d(\phi(\gamma(t))) \tag{2.3.13}$$

Proposizione (derivata di una funzione lungo una curva) 2.3.1. *Data una varietà differenziabile M^n, una curva $\gamma : \mathbb{R} \supset [a,b] \to M^n$ ed una funzione $f : M^n \to \mathbb{R}$ definita su M^n, allora la derivata $(f \circ \gamma)'$ della funzione $(f \circ \gamma)$ è data da*

$$(f \circ \gamma)'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) \tag{2.3.14}$$

Notiamo che la derivata di $(f \circ \gamma)$ nella proposizione 2.3.1 è ben definita in quanto dalla definizione 1.2.8 si ha

$$\gamma' \in T_{\gamma(t)} M^n \tag{2.3.15}$$

e dalla definizione di differenziale tra varietà 1.4.2 si ha che

$$(f \circ \gamma)'(t) \in T_{f(\gamma(t))}\mathbb{R} = \mathbb{R} \tag{2.3.16}$$

Teorema (teorema fondamentale per gli integrali di linea) 2.3.1. *Data M^n varietà differenziabile, consideriamo f funzione liscia su M^n e $\gamma : \mathbb{R} \supset [a,b] \to M^n$ una curva liscia su M^n, allora*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \tag{2.3.17}$$

Dimostrazione: Consideriamo un covettore ω sulla varietà M^n su cui fissiamo le coordinate locali $\{dx^i\}$, allora dalla 1.4.23, se scriviamo $\omega = \omega_i dx^i$ e consideriamo $\gamma^i(t)$ la componente i-esima di gamma rispetto alle coordinate locali $\{dx^i\}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma \omega = \int_{[a,b]} \gamma^* \omega = \int_{[a,b]} d\gamma_t^*(\omega_{\gamma(t)}) = \\
&\int_{[a,b]} d\gamma_t^*(\omega_{i\gamma(t)} \ dx^i_{\gamma(t)}) = \int_{[a,b]} \omega_i(\gamma(t)) d\gamma_t^*(dx^i_{\gamma(t)}) = \\
&\int_{[a,b]} \omega_i(\gamma(t)) d(x^i \circ \gamma)_t = \int_{[a,b]} \omega_{i\gamma(t)} d\gamma^i = \int_{[a,b]} \omega_{\gamma(t)} \gamma'(t) dt
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Considerando $\omega = df$ e dato che γ è liscia, dalla proposizione 2.3.1 e dal teorema fondamentale del calcolo in $\mathbb{R}$ si ha

$$\int_\gamma df = \int_a^b df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) dt = \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \tag{2.3.19}$$

Si noti che nella dimostrazione del teorema 2.3.1 abbiamo ipotizzato che il campo covettoriale $\omega \in T_P^*M^n$ possa essere scritto come il differenziale della funzione $f \in C^\infty(M^n)$. I covettori $\omega \in T_P^*M^n$ che soddisfano questa proprità sono detti $differenziali\ esatti$. Allora la funzione f è chiamata *potenziale* per ω.

Dal teorema fondamentale del calcolo è ovvio che un differenziale esatto $\omega = df$, con $f \in C^\infty(M^n)$, possiede la proprietà di essere indipendente dalla curva $\gamma : \mathbb{R} \supset [a,b] \to M^n$ scelta per congiungere i punti $\gamma(a)$, $\gamma(b)$, infatti

$$\int_\gamma df = \int_{\gamma'} df = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)) \tag{2.3.20}$$

Si noti che di conseguenza

$$\oint df = 0 \tag{2.3.21}$$

Definiamo i campi covettoriali ω tali che $\oint df = 0$ come *conservativi*, i quali hanno la proprità che

$$\int_\gamma df = \int_{\gamma'} df \tag{2.3.22}$$

con $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Proposizione 2.3.2. *Data M^n varietà differenziabile. Un campo covettoriale liscio su M^n è conservativo se e solo se è esatto.*

Esempio 2.3.2 Consideriamo il campo covettoriale dell'esempio 2.2.4 definito su $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ dove fissiamo la carta Φ come nell'esempio 2.3.1. La formula 2.3.7 ci dice che il campo covettoriale ω definito su $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ non è conservativo, per cui per la proposizione 2.3.2 non è esatto.

Consideriamo la funzione f liscia sulla varietà M^n su cui fissiamo le coordinate locali $\{x^i\}$, allora dal teorema di Shwartz vale che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \tag{2.3.23}$$

Consideriamo ora il campo covettoriale $\omega = \omega_i dx^i$ su M^n. Se $\omega = df$ allora

$$\omega = df = \omega_i dx^i \implies \omega_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{2.3.24}$$

Dunque se ω è esatto deve valere

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \tag{2.3.25}$$

I campi covettoriali che soddisfano la 2.3.25 sono detti *chiusi* e dalle considerazioni precedenti segue che tutti i campi covettoriali esatti sono anche chiusi.

Notiamo che la relazione 2.3.25 implica che

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = 0 \tag{2.3.26}$$

ovvero che la derivata esterna del campo covettoriale chiuso ω ricavata nell'equazione 2.2.44 si annulla

$$d\omega = \sum_{i<j} (\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}) dx^j \wedge dx^i = 0 \tag{2.3.27}$$

Esempio 2.3.3 Consideriamo il campo covettoriale dell'esempio 2.2.4 definito su $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ dove fissiamo la carta Φ come nell'esempio 2.4.1. Un calcolo diretto ci mostra che

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{y}{x^2+y^2}) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{x^2+y^2}) \iff -\frac{2xy}{x^2+y^2} = -\frac{2yx}{x^2+y^2} \tag{2.3.28}$$

per cui ω è una forma differenziale chiusa.

Esempio 2.3.4 Consideriamo nuovamente il campo covettoriale dell'esempio 2.2.4 definito questa volta su $\mathbb{R}^2$ dove fissiamo la parametrizzazione $\Phi : [0, \infty] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta) \tag{2.3.29}$$

con $r \in [0, \infty]$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Allora

$$\omega = \frac{r\cos\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} r\cos\theta \; d\theta - \frac{r\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}(-r\sin\theta) \; d\theta = d\theta \tag{2.3.30}$$

con $\theta \in \mathbb{R}$ variabile continua e differenziabile, per cui $\omega = d\theta$ è una forma differenziale esatta. Procedendo in modo analogo all'esempio 2.3.3 si può mostrare che anche in questo caso ω è una forma differenziale chiusa.

Gli esempi 2.3.2 e 2.3.3 mostrano che sebbene tutte le forme differenziali esatte siano anche chiuse, non tutte le forme differenziali chiuse sono anche esatte.

Gli esempi 2.3.2 e 2.3.4 mostrano che la proprietà di esattezza per una forma differenziale cambia se si modifica la varietà sulla quale è definita. Nel caso specifico mostrato negli esempi, se la varietà $\mathbb{R}$ presenta un "buco" in $(0, 0) \in \mathbb{R}$, allora la forma differenziale ω che nel caso di $M^n = \mathbb{R}$ era esatta, in $M^n = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ non lo è più (pur mantenendo la proprietà di chiusura).

Notiamo infine che la derivata esterna definita dall'equazione 2.2.44 è per costruzione una forma differenziale su una varietà M^n, la quale possiede però la proprietà aggiuntiva di annullarsi se agisce su una forma differenziale chiusa.

Le precedenti considerazioni assieme alla proprità data dalla proposizione 2.2.3 sono ciò che porta a definire le coomologie di De Rham.

2.4 Coomologia di De Rham

Definizione (coomologia) 2.4.1. *Dati gli spazi vettoriali V_i tali che $V = \bigoplus_{i=0} V_i$ e una mappa lineare $d : V \to V$ tale che $d|_{V_i} : V_i \to V_{i+1}$ e $d \circ d|_{V_i} = d|_{V_{i+1}} \circ d|_{V_i} = 0$, o semplicemente $d \circ d = 0$, allora definiamo una coomologia come*

$$H(V_i, d) = Ker(d|_{V_i} : V_i \to V_{i+1})/Im(d|_{V_{i-1}} : V_{i-1} \to V_i) \tag{2.4.1}$$

dove chiamiamo gli spazi V_i catene, la mappa d differenziale, $ker(d|_{V_i})$ cocicli, $Im(d|_{V_{i-1}})$ confine e le coppia (V_i, d) complesso differenziale.

Notiamo che la definizione ha senso in quanto dalla proprietà $d \circ d = 0$ segue che

$$Im(d|_{V_{i-1}}) \subset Ker(d|_{V_i}) \tag{2.4.2}$$

L'idea base che guida alla costruzione delle coomologie è quella di studiare vettori $v \in ker(d|_{V_{i+1}})$ ma che non appartengano ad $Im(d|_{V_i})$.

Definizione (coomologia di De Rham) 2.4.2. *Consideriamo la varietà differenziabile M^n ed il differenziale (derivata esterna) $d|_{\Omega^k} : \Omega^k(M^n) \to \Omega^{k+1}(M^n)$, allora definiamo la coomologia di De Rham di grado k come*

$$H(\Omega^k, d) = ker(d|_{\Omega^k} : \Omega^k \to \Omega^{k+1})/Im(d|_{\Omega^{k-1}} : \Omega^{k-1} \to \Omega^k) \tag{2.4.3}$$

Notiamo che

$$ker(d|_{\Omega^k}) = \{k - forme\ chiuse\ su\ M^n\} \tag{2.4.4}$$

$$Im(d|_{\Omega^{k-1}}) = \{k - forme\ esatte\ su\ M^n\} \tag{2.4.5}$$

e che la definizione ha senso in quanto per la proposizione 2.2.3 si ha $d|_{\Omega^k} \circ d|_{\Omega^{k-1}} = 0$.

Il motivo della definizione della coomologia di De Rham è quello di studiare le forme differenziali chiuse ma non esatte, in quanto dagli esempi 2.3.2, 2.3.3 e 2.3.4 si ha che non tutte le forme chiuse sono esatte e che questo fatto deriva da particolari proprietà della varietà su cui sono definite le forme differenziali (ad esempio la presenza di un "buco" come nell'esempio 2.3.2). Di fatto si definisce la coomologia $H(\Omega^k, d)$ come l'insieme delle classi di equivalenza di k-forme $[\omega]$ tali che

$$\omega \sim \eta \iff \omega - \eta = \alpha \tag{2.4.6}$$

con α k-forma differenziale esatta.

Dall'espressione 2.2.38 si ha che $\Omega(M^n)$ è un algebra graduata, di conseguenza è possibile costruire la seguente successione di catene

$$\begin{aligned}
&d|_{\Omega^0} : \Omega^0(M^n) \to \Omega^1(M^n) \\
&d|_{\Omega^1} : \Omega^1(M^n) \to \Omega^2(M^n) \\
&... \\
&d|_{\Omega^k} : \Omega^k(M^n) \to \Omega^{k+1}(M^n) \\
&...
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

La coppia $(\Omega^k(M^n), d)$ viene chiamata *complesso di De Rham.*

La coomologia di De Rham, mediante il differenziale d, ha la seguente struttura di spazio vettoriale graduato

$$H(\Omega(M^n), d) = \bigoplus_k H^k \tag{2.4.8}$$

dove abbiamo denotato con $H^k = H(\Omega^k, d)$ il gruppo coomologico di De Rham di grado k. Naturalmente per una varietà differenziabile M^n tale che $\dim M^n = n$ la catena terminerà con la mappa $d|_{\Omega^{n-1}} : \Omega^{n-1} \to \Omega^n$, in quanto $\Omega^p = 0$ per $p > n$.

Esempio 2.4.1. Dagli esempi 2.3.3 e 2.3.2 si ha che esiste almeno una 1-forma chiusa e non esatta sulla varietà $\mathbb{R}^2\backslash 0$, di conseguenza abbiamo la coomologia

$$H(\Omega(\mathbb{R}^2\backslash 0), d) = H^1(\Omega^1(\mathbb{R}^2\backslash 0), d|_{\Omega^1}) \neq \emptyset \tag{2.4.9}$$

Capitolo 3

Coomologia delle Algebre di Lie e Quantizzazione BRST

Le coomologie delle algebre di Lie sono uno strumento importante che trova applicazione alle teorie di gauge del modello standard che descrive la fisica delle particelle elementari. In particolare trovano applicazione nella quantizzazione BRST con lo scopo di eliminare gradi di liberta ridondanti e non fisici nella teoria. Infatti, per togliere questi gradi di libertà e restringersi alle sole particelle fisiche, è necessario introdurre un vincolo chiamato carica BRST. La struttura che permette di rimuovere queste ridondanze è di fatto una coomologia, chiamata coomologia BRST, nella quale questa carica funge da differenziale. L'obiettivo è quello di dare una definizione matematicamente rigorosa di coomologia delle algebre di lie, per poi fare un parallelismo con la coomologia BRST per la teoria dei campi e la meccanica relativistica.

A tale proposito, nella sezione 3.1 vengono introdotte le coomologie delle algebre di Lie [2] concentrandosi sulla scrittura del differenziale in termini di ghosts ed antighosts, terminologia utilizzata nella letteratura fisica. In seguito, nella sezione 3.2, viene data una panoramica della quantizzazione BRST [3] e della coomologia BRST [1] cercando di porre l'accento sulla necessità fisica di tali strutture. Infine, nella sezione 3.3, viene portata un applicazione della teoria delle coomologie al caso di una particella non massiva di spin 1.

3.1 Coomologia delle Algebre di Lie

Definizione ($\mathfrak{g}$ - modulo) 3.1.0.1. *Dato uno spazio vettoriale V ed un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ con una rappresentazione $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$, allora V è un $\mathfrak{g}$ - modulo.*

Notiamo che, dato che ρ è un omomorfismo di Algebre di Lie, il commutatore $[,]$ sullo spazio $End(V)$ soddisfa

$$[\rho(X), \rho(Y)] = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X) \tag{3.1.1}$$

con $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Si noti che nel caso particolare in cui $\rho : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ con $\rho(X)$ tale che $\rho(X)Y = [X, Y]$, la formula 3.1.1 si riduce all'identità di Jacobi.

Consideriamo gli spazi

$$L(V, W; \mathbb{R}) = \{f : V \times W \to \mathbb{R}\ bilineari\} \tag{3.1.2}$$

$$V^* \otimes W^* \tag{3.1.3}$$

$$L(V; W^*) = \{g : V \to W^*\ lineari\} \tag{3.1.4}$$

con V, W spazi vettoriali, allora valgono i seguenti isomorfismi di spazi vettoriali

$$L(V, W; \mathbb{R}) \simeq V^* \otimes W^* \simeq L(V; W^*) \tag{3.1.5}$$

Di conseguenza possiamo interpretare ogni elemento di $V^* \otimes W^*$ come una mappa $V \to W^*$. Consideriamo ad esempio l'elemento $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes W^*$, allora

$$(\alpha \otimes \beta)v = \alpha(v)\beta \tag{3.1.6}$$

con $v \in V$.

Consideriamo ora lo spazio $\mathfrak{g}^* \otimes V$ con $\mathfrak{g}$ algebra di Lie e V una sua rappresentazione. Prendiamo poi il generico elemento $\alpha \otimes v \in \mathfrak{g}^* \otimes V$ tale che $\alpha \otimes v : \mathfrak{g} \times V^* \to \mathbb{R}$ definita come

$$(\alpha \otimes v)(X, \beta) = \alpha(X)\beta(v) \tag{3.1.7}$$

con $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, $\beta \in V^*$, $X \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Dall'osservazione precedente si ha che

$$\mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\mathfrak{g}, V) \tag{3.1.8}$$

con $\alpha \otimes v \in L(\mathfrak{g}, V)$ tale che $\alpha \otimes v : \mathfrak{g} \to V$ definita mediante

$$(\alpha \otimes v)(X) = \alpha(X)v \tag{3.1.9}$$

Definiamo ora le due catene

$$C^0 = V \tag{3.1.10}$$

e

$$C^1 = \mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\mathfrak{g}; V) \tag{3.1.11}$$

con V $\mathfrak{g}$ - modulo e $\mathfrak{g}$ algebra di Lie, allora definiamo il differenziale

$$d|_{C^0} : V \to \mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\mathfrak{g}; V) \tag{3.1.12}$$

come

$$dv(X) = \rho(X)v \tag{3.1.13}$$

il quale risulta ben definito dalle considerazioni sopra, infatti possiamo pensare $dv \in \mathfrak{g}^* \otimes V$ come la mappa $dv : \mathfrak{g} \to V$.

Consideriamo ancora la catena $C^1 = \mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\mathfrak{g}; V)$ e definiamo

$$C^2 = \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\Lambda^2\mathfrak{g}, V) \tag{3.1.14}$$

allora definiamo il differenziale

$$d|_{C^1} : \mathfrak{g}^* \otimes V \to \Lambda^2\mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\Lambda^2\mathfrak{g}, V) \tag{3.1.15}$$

come

$$d(\alpha, v) = d\alpha \otimes v - \alpha \otimes dv \tag{3.1.16}$$

tale che

$$\begin{aligned} &d(\alpha, v)(X, Y) = (d\alpha \otimes v - \alpha \otimes dv)(X, Y) = \\ &d\alpha(X, Y) \otimes v - \frac{1}{2}(\alpha(X)dv(Y) - \alpha(Y)dv(X)) \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

dove definiamo $d\alpha(X, Y) = \alpha[X, Y]$.

Estendiamo infine le definizioni precedenti introducendo le catene

$$C^p = \Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\Lambda^p\mathfrak{g}; V) \tag{3.1.18}$$

e

$$C^{p+1} = \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\Lambda^{p+1}\mathfrak{g} \to V) \tag{3.1.19}$$

e definiamo il differenziale

$$d|_{c^p} : \Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes V \to \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^* \otimes V \tag{3.1.20}$$

come

$$d(\omega \otimes v) = d\omega \otimes v + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge dv \tag{3.1.21}$$

con $\omega \in \Lambda^p\mathfrak{g}^*$ ed $|\omega|$ grado della forma differenziale (in questo caso $|\omega| = p$). dv è gia stato introdotto precedentemente come $dv(X) = \rho(X)v \in V$, definiamo dunque $d\omega$ come

- se $\omega = \alpha \in \mathfrak{g}^*$, allora $d\alpha : \Lambda^2\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, $d\alpha \in \Lambda^2\mathfrak{g}^*$ e

$$d\alpha(X, Y) = \alpha([X, Y]) \tag{3.1.22}$$

  con $X, Y \in \mathfrak{g}$

- se $\omega = \alpha \wedge \beta \in \Lambda^p\mathfrak{g}^*$ con $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, allora $d\omega : \Lambda^{p+1}\mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$, $d\omega \in \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^*$ e

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge d\beta \tag{3.1.23}$$

Possiamo allora sfruttare le considerazioni precedenti per definire in modo generico la catena

$$C^p(\mathfrak{g}, V) = Hom(\Lambda^p\mathfrak{g}, V) \simeq \Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes V \tag{3.1.24}$$

ed il differenziale $d|_{C^p} : C^p(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g}, V)$. Tali definizioni permettono di costruire le seguenti mappe:

$$\begin{aligned} &d|_{C^0} : C^0(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^1(\mathfrak{g}, V) \\ &d|_{C^1} : C^1(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^2(\mathfrak{g}, V) \\ &... \\ &d|_{C^p} : C^p(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g}, V) \\ &... \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

La coppia $(C^p(\mathfrak{g}, V), d)$ viene chiamata *complesso di* $Chevalley - Eilenberg$.

Definizione (Coomologia delle algebre di Lie) 3.1.0.2. *Dati l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$, il $\mathfrak{g}$ - modulo V ed il complesso di Chevalley - Eilenberg, allora si definisce la coomologia dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ come*

$$H^p(\mathfrak{g}, V) = Ker(d|_{C^p})/Im(d|_{C^{p-1}}) = \frac{Ker(d|_{C^p} : C^p(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{p+1}(\mathfrak{g}, V))}{Im(d|_{C^{p-1}} : C^{p-1}(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^p(\mathfrak{g}, V))} \tag{3.1.26}$$

La coomologia delle algebre di Lie, mediante il differenziale d, ha la seguente struttura di spazio vettoriale graduato

$$H(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{p=0}^{dim\mathfrak{g}} H^p(\mathfrak{g}, V) \tag{3.1.27}$$

con $dim\mathfrak{g}$ dimensione dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$.

Per semplicità di esposizione introduciamo la mappa $\epsilon(\alpha) : \Lambda^p\mathfrak{g}^* \rightarrow \Lambda^{p+1}\mathfrak{g}^*$ tale che

$$\epsilon(\alpha)\omega = \alpha \wedge \omega \tag{3.1.28}$$

con $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ e $\omega \in \Lambda^p\mathfrak{g}^*$, la quale altro non è che il prodotto wedge tra due forme differenziali. Definiamo inoltre $\mathfrak{i}(X) : \Lambda^p\mathfrak{g}^* \to \Lambda^{p-1}\mathfrak{g}^*$ tale che

$$\mathfrak{i}(X)(\alpha \wedge \beta) = \mathfrak{i}(X)\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \mathfrak{i}(X)\beta \tag{3.1.29}$$

con $\mathfrak{i}(X)\alpha = \alpha(X)$ e con $X \in \mathfrak{g}$, $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ e $(\alpha \wedge \beta) \in \Lambda^p\mathfrak{g}^*$. Fissiamo ora le basi $\{b_i\}$ e $\{\beta^i\}$ rispettivamente di $\mathfrak{g}$ e di $\mathfrak{g}^*$, dunque è possibile esprimere il differenziale come

$$d = \epsilon(\beta^i)\rho(b_i) - \frac{1}{2}\epsilon(\beta^i)\epsilon(\beta^j)\mathfrak{i}([b_i, b_j]) \tag{3.1.30}$$

Introducendo il *ghost* $g^i = \epsilon(\beta^i)$ e l'*antighost* $a_i = \mathfrak{i}(b_i)$, anticommutanti per costruzione, ed esprimendo il commutatore attraverso le costanti di struttura $[b_i, b_j] = f^k_{ij}b_k$ si ottiene

$$d = g^i b_i - \frac{1}{2}f^k_{ij}g^i g^j a_k \tag{3.1.31}$$

dove con b_i si considera la rappresentazione $\rho(b_i)$ dell'elemento i-esimo della base $\{b_i\}$. Mostriamo in seguito che l'operatore dato dall'espressione 3.1.31 ristretto a $d|_{C^1}$ è analogo al differenziale 3.1.16. Vediamo prima di tutto come agisce il differenziale della 3.1.31 quando gli applichiamo un generico $\alpha \otimes v \in \mathfrak{g}^* \otimes V$

$$\begin{aligned}
&d(\alpha \otimes v) = g^i b_i(\alpha \otimes v) - \frac{1}{2}f^k_{ij}g^i g^j a_k(\alpha \otimes v) = \\
&g^i b_i(\alpha_j\beta^j \otimes v) - \frac{1}{2}f^k_{ij}g^i g^j a_k(\alpha_l\beta^l \otimes v) = g^i\alpha_j\beta^j b_i \otimes v - \frac{1}{2}f^k_{ij}g^i g^j \alpha_l \mathfrak{i}(b_k)(\beta^l) \otimes v = \\
&\alpha_j\beta^j \otimes g^i b_i(v) - \frac{1}{2}f^k_{ij}g^i g^j \alpha_l\beta^l(b_k) \otimes v = \alpha_j\beta^j \otimes g^i b_i(v) - \frac{1}{2}f^k_{ij}g^i g^j \alpha_k \otimes v
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

con $\alpha_j = \alpha(b_j)$ componente j-esima di α. Consideriamo ora la definizione 3.1.31 e scriviamo i termini $d\alpha \otimes v$ e $\alpha \otimes dv$ rispetto agli elementi della base cominciando dal primo. Abbiamo che $d\alpha$ è una 2-forma differenziale, dunque dall'espressione 2.2.36 e dalla definizione di derivata esterna 2.2.7 abbiamo che

$$d\alpha = \alpha_i b_j \beta^j \wedge \beta^i \tag{3.1.33}$$

allora, dalla definizione 2.2.3 di prodotto wedge, si ha che

$$\begin{aligned}
&d\alpha(b_k, b_l) = (\alpha_i b_j\beta^j \wedge \beta^i)(b_k, b_l) = \left(\alpha_i b_j \frac{(1+1)!}{1!1!}Alt(\beta^j \otimes \beta^i)\right)(b_k, b_l) = \\
&\alpha_i b_j 2\frac{1}{2!}(\beta^j(b_k)\beta^i(b_l) - \beta^j(b_l)\beta^i(b_k)) = \alpha_i b_j(\delta^j_k\delta^i_l - \delta^j_l\delta^i_k)
\end{aligned} \tag{3.1.34}$$

quindi

$$\begin{aligned}
&d\alpha = \frac{1}{2}d\alpha(b_k, b_l)\beta^k \wedge \beta^l = \frac{1}{2}\alpha_i b_j(\delta_k^j\delta_l^i - \delta_l^j\delta_k^i)\beta^k \wedge \beta^l = \\
&\frac{1}{2}\alpha_i b_j(\beta^j \wedge \beta^i - \beta^i \wedge \beta^j) = \alpha_i b_j \beta^j \wedge \beta^i
\end{aligned} \tag{3.1.35}$$

dunque, ricordando che il prodotto wedge è antisimmetrico, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
&d\alpha \otimes v = -\frac{1}{2}d\alpha(b_i, b_j)\beta^i \wedge \beta^j \otimes v = -\frac{1}{2}\alpha([b_i, b_j])\beta^i \wedge \beta^j \otimes v = \\
&-\frac{1}{2}f_{ij}^k\alpha(b_k)\beta^i \wedge \beta^j \otimes v = -\frac{1}{2}f_{ij}^k\alpha_k\beta^i \wedge \beta^j \otimes v
\end{aligned} \tag{3.1.36}$$

Occupiamoci ora del secondo termine

$$\alpha \otimes dv = \alpha_j\beta^j \otimes b_i\beta^i v = \alpha_j\beta^j \otimes \beta^i b_i(v) \tag{3.1.37}$$

dove $b_i(v) = \rho(b_i)(v)$ con ρ rappresentazione di g^*. Inserendo quanto ottenuto nella 3.1.31 otteniamo

$$d(\alpha \otimes v) = \alpha_j\beta^j \otimes \beta^i b_i(v) - \frac{1}{2}f_{ij}^k\beta^i \wedge \beta^j\alpha_k \otimes v \tag{3.1.38}$$

analoga alla 3.1.32.

Possiamo mostrare che $d|_{C^1} \circ d|_{C^0} = 0$, infatti

$$dv = g^i b_i(v) - \frac{1}{2}f_{ij}^k g^i g^j a_k(v) = g^i b_i(v) \tag{3.1.39}$$

inoltre

$$\begin{aligned}
&(d \circ d)v = d(g^i b_i(v)) = g^l b_l g^i b_i(v) - \frac{1}{2}f_{lm}^n g^l g^m a_n g^i b_i(v) = \\
&g^l g^i \left(\frac{1}{2}b_l b_i - \frac{1}{2}b_i b_l\right)(v) - \frac{1}{2}f_{lm}^n g^l g^m a_n(g^i) b_i(v) = \\
&\frac{1}{2}f_{li}^k g^l g^i b_k(v) - \frac{1}{2}f_{lm}^n g^l g^m \delta_n^i b_i(v) = \frac{1}{2}f_{li}^k g^l g^i b_k(v) - \frac{1}{2}f_{lm}^n g^l g^m b_n(v) = \\
&\frac{1}{2}f_{li}^k g^l g^i b_k(v) - \frac{1}{2}f_{li}^k g^l g^i b_k(v) = 0
\end{aligned} \tag{3.1.40}$$

con $v \in C^0 = V$. Il passaggio $a_n(g^i) = \delta_n^i$ è giustificato dal fatto che, dalle espressioni 3.1.28 di ghost e 3.1.29 di antighost, si ha che

$$\begin{aligned}
&g^j a_i\alpha = g^j \mathfrak{i}(b_i)\alpha = g^j \mathfrak{i}(b_i)\alpha_k\beta^k = g^j\beta^k(b_i)\alpha_k = g^j\delta_i^k\alpha_k = g^j\alpha_i = \\
&\beta^j \wedge \alpha_i = \alpha_i\beta^j = \alpha_i\delta_i^j\beta_i = \delta_i^j\alpha
\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

con $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, di conseguenza possiamo intendere a_i come $\frac{\partial}{\partial g^i}$, infatti

$$g^j a_i = \frac{\partial}{\partial g^i} g^j = \delta_i^j \tag{3.1.42}$$

Notiamo inoltre che, considerando la constrazione di un ghost g^i con se stesso, otteniamo

$$g^i g^i \alpha = \beta^i \wedge \beta^i \wedge \alpha = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathfrak{g}^* \tag{3.1.43}$$

3.2 Quantizzazione BRST e Coomologia

La quantizzazione BRST è un metodo per quantizzare funzioni f nello spazio delle fasi e promuoverle ad operatori O_f che agiscono su determinati stati ψ di un sistema fisico. Gli stati ψ appartengono allo spazio $\mathcal{F}_\mu$ chiamato *spazio di Fock*, definito come la somma diretta di spazi di Hilbert nel seguente modo

$$\mathcal{F}_\mu = \bigoplus_{n=0}^{\infty} S_\mu \mathcal{H}^{\otimes n} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus S_\mu(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus ... \tag{3.2.1}$$

dove $\mu = \pm 1$, $S_1 = Sym$ ed $S_{-1} = Alt$, con Alt definita dall'espressione 2.2.7 e $(Sym\alpha)(v_1, ..., v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \alpha(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(k)})$ con σ permutazione degli elementi k, S_k gruppo delle permutazioni dell'insieme $\{k\}$ ed α tensore covariante di rango k. $\mathcal{H}^{\otimes n}$ indica invece il prodotto tensoriale di n spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ definito dalla 2.1.3. Lo spazio di Fock rappresenta lo spazio degli stati di un sistema contenente un generico numero di particelle, definito partendo da un singolo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

Possiamo scrivere un generico stato $\psi \in \mathcal{F}_\mu$ come

$$\psi = a\phi_0 + a_i\phi_i + (a_{ij}\phi_i \otimes \phi_j + a_{ji}\phi_j \otimes \phi_i) + ... \tag{3.2.2}$$

con $a, a_i, a_{ij} \in \mathbb{C}$, con $\phi_i \in \mathcal{H}$ ed $a_{ij}\phi_i \otimes \phi_j + a_{ji}\phi_j \otimes \phi_i \in S_\mu(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$. Se $\mu = 1$ allora a_{ij} sono le componenti di un tensore simmetrico mentre se $\mu = -1$ possiamo identificare a_{ij} come le componenti di un tensore antisimmetrico. Lo stato ϕ_0 è un vettore di norma unitaria e rappresenta il vuoto.

Nel meccanismo di quantizzazione BRST si ottengono gradi di libertà che non sono fisici e di conseguenza, anlogamente allo spazio delle fasi classico, è necessario imporre dei vincoli. Tali vincoli sono dati dall'operatore Q_{brst} chiamato *carica BRST*. L'operatore Q_{brst} deve essere autoaggiunto e nilpotente, ovvero $Q_{brst}^+ = Q_{brst}$ e $Q_{brst}^2 = 0$. Di conseguenza, se si fissa un prodotto scalare, per un generico stato $\psi \in \mathcal{F}$ si ottiene

$$||Q_{brst}\psi||^2 = < \psi \ , \ Q_{brst}^+ Q_{brst}\psi > = < \psi \ , \ Q_{brst}Q_{brst}\psi > = 0 \tag{3.2.3}$$

ovvero gli stati $Q_{brst}\psi$ hanno norma nulla. Tuttavia la norma è non degenere, ovvero deve esistere un solo stato a norma nulla, dato da 0, dunque

$$Q_{brst}\psi = 0 \tag{3.2.4}$$

Nella quantizzazione BRST gli stati dello spazio $\mathcal{F}_\mu$ sono espandibili in una serie di autostati con coefficenti dati da ghost anticommutanti g^i. Questo poichè, come detto precedentemente, nel processo di quantizzazione si ottengono gradi di libertà che sono non fisici e che devono dunque essere tolti tramite la carica BRST. Questi gradi di libertà non fisici vengono espressi con i ghosts. Dunque se consideriamo un algebra $\mathfrak{g}$, l'algebra duale $\mathfrak{g}^*$ e le rispettive basi $\{b_i\}$ e $\{\beta^i\}$, per $\Psi \in \mathcal{F}_\mu$ abbiamo

$$\Psi = \psi_0 + g^{i_1}\psi_{i_1} + g^{i_1}g^{i_2}\psi_{i_1 i_2} + ... \tag{3.2.5}$$

Possiamo definire un operatore G tale che soddisfi la relazioni agli autovalori

$$G\Psi = \lambda_g \Psi \tag{3.2.6}$$

con λ_g autovalore intero e $\Psi \in \mathcal{F}_\mu$ autostato. L'operatore G "conta" il numero di ghost, ovvero il numero λ_g di ghosts presenti in Ψ. Notiamo che mediante l'operatore G si può dotare $\mathcal{F}_\mu$ della struttura di spazio vettoriale graduato (tralasciando il parametro μ per semplicità di notazione) dato dalla seguente definizione

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{\lambda_g}^{dim\mathfrak{g}} \mathcal{F}_{\lambda_g} \tag{3.2.7}$$

e dalla carica BRST

$$Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g}} : \mathcal{F}_{\lambda_g} \to \mathcal{F}_{\lambda_g+1} \tag{3.2.8}$$

Infatti, dalla relazione 3.2.4, si ha

$$\begin{aligned}&[G, Q_{brst}]\Psi = GQ_{brst}\Psi - Q_{brst}G\Psi = -\lambda_g Q_{brst}\Psi = 0 = \\ &Q_{brst}\Psi \implies [G, Q_{brst}] = Q_{brst}\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

e per uno stato tale che $G\Psi = \lambda_\mu \Psi$ otteniamo

$$\begin{aligned}&GQ_{brst}\Psi = (Q_{brst}G + [G, Q_{brst}])\Psi = (Q_{brst}G + Q_{brst})\Psi = \\ &\lambda_\mu Q_{brst}\Psi + Q_{brst}\Psi = (\lambda_\mu + 1)Q_{brst}\Psi\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

ovvero Q_{brst} aumenta il numero di ghost di 1.

Consideriamo ora

$$Ker\ Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g}} = \{\Psi : Q_{brst}\Psi = 0\} \tag{3.2.11}$$

$$Im\ Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g-1}} = \{Q_{brst}\Psi : \Psi \in \mathcal{F}_{\lambda_g-1}\} \tag{3.2.12}$$

e definiamo la *coomologia BRST* come

$$H^{\lambda_g}(Q_{brst}) = \frac{Ker(Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g}} : \mathcal{F}_{\lambda_g} \to \mathcal{F}_{\lambda_g+1})}{Im(Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g-1}} : \mathcal{F}_{\lambda_g-1} \to \mathcal{F}_{\lambda_g})} \tag{3.2.13}$$

dove gli spazi $\mathcal{F}_{\lambda_g}$ sono le catene, $Ker\ Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g}}$ sono i cocicli, $Im\ Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g-1}}$ sono i confini e l'operatore Q_{brst} è il differenziale. La definizione risulta ben posta in quanto dall'espressione 3.2.4 si ha che $Im\ Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g-1}} \in Ker\ Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g}}$.

Le classi di equivalenza nella coomologia $H^{\lambda_g}(Q_{brst})$ sono date da

$$\begin{aligned} &\Psi \sim \Phi \iff \Psi - \Phi \in Im\ Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g-1}} \iff \\ &\Psi - \Phi = Q_{brst}|_{\mathcal{F}_{\lambda_g-1}}\Theta \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

con $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}_{\lambda_g}$ e $\Theta \in \mathcal{F}_{\lambda_g-1}$.

La coomologia BRST, mediante la carica BRST Q_{brst}, ha la seguente struttura di spazio vettoriale graduato

$$H(Q_{brst}) = \bigoplus_{\lambda_g=0}^{dim\mathfrak{g}} H^{\lambda_g}(Q_{brst}) \tag{3.2.15}$$

Dalle considerazioni sulla coomologia delle algebre di Lie e su quella BRST, abbiamo le seguenti corrispondenze

Coomologia delle algebre di Lie $\longleftrightarrow$ **Coomologia BRST**

$$C^0(\mathfrak{g}, V) \simeq V \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{F}_0$$

$$C^p(\mathfrak{g}, V) \simeq \Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\Lambda^p\mathfrak{g}; V) \longleftrightarrow \mathcal{F}_p \simeq \Lambda^p\mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{F}_0 \simeq L(\Lambda^p\mathfrak{g}; \mathcal{F}_0)$$

$$H(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{p=0}^{dim\mathfrak{g}} H^p(\mathfrak{g}, V) \quad \longleftrightarrow \quad H(Q_{brst}) = \bigoplus_{\lambda_g=0}^{dim\mathfrak{g}} H^{\lambda_g}(Q_{brst})$$

$$d|_{C^p} : C^p(\mathfrak{g}, V) \to C^{p+1}(\mathfrak{g}, V) \quad \longleftrightarrow \quad Q_{brst}|_{\mathcal{F}_p} : \mathcal{F}_p \to \mathcal{F}_{p+1}$$

3.3 L'Esempio dei Fotoni

L'esempio più semplice di coomologia BRST che può essere formulato è quella per particelle non massive di spin 1, ovvero i fotoni.

Consideriamo innanzitutto l'algebra $Sp(2)$

$$\mathfrak{g} = \{ \ div \ , \ grad \ , \ \Delta \ \} \tag{3.3.1}$$

e consideriamo i polinomi nelle variabili ausiliarie z^i con coefficienti in $C^0(M^n)$

$$f(z^i) = f_0 + f_i z^i + f_{ij} z^i z^j + ... \tag{3.3.2}$$

Gli operatori $grad = z^i \partial_i$ e $div = \frac{\partial}{\partial z^i} \partial_i$ formano allora una rappresentazione dell'algebra $Sp(2)$. La relazione di chiusura è data da

$$[div, grad] = \Delta \tag{3.3.3}$$

Definiamo la carica BRST come

$$Q_{brst} = c\Delta + \gamma div - \delta grad - \gamma\delta \frac{\partial}{\partial c} \tag{3.3.4}$$

dove c, γ, δ sono ghosts e $\frac{\partial}{\partial c}$ è un antighost.

Consideriamo lo spazio di Fock

$$\mathcal{F}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus Sym(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \oplus ... \tag{3.3.5}$$

in cui possiamo considerare un sistema con un certo numero di particelle in base a dove si tronca la somma dirtta di sottospazi. Per semplicità di notazione ci limiteremo a scrivere $\mathcal{F}$ pur riferendoci allo spazio $\mathcal{F}_1$.

Consideriamo ora la catena C^0 con numero di ghost $\lambda_g = 0$, definita come

$$C^0 = \{ \ \alpha \in \mathcal{F}_0 \ : \ \alpha = \alpha_0 + \alpha_i z^i + \alpha_{ij} z^i z^j + ... \ \} \tag{3.3.6}$$

con $z^i z^j$ tensore simmetrico.

Consideriamo poi la catena C^1 con numero di ghost $\lambda_g = 1$, definita come

$$C^1 = \{ \ \Psi \in \mathcal{F}_1 \ : \ \Psi = c\psi_c + \gamma\psi_\gamma + \delta\psi_\delta \ \} \tag{3.3.7}$$

con $\psi_c, \psi_\gamma, \psi_\delta \in \mathcal{F}_0$.

Come precedentemente detto, gli stati nella catena C^0 rappresentano i gradi di libertà fisici, mentre gli stati nella catena C^1 rappresentano i gradi di libertà non fisici.

Si noti che, se si utilizza la notazione del complesso di Chevalley-Eilenberg del capitolo 3.1, abbiamo che $C^0 = \mathcal{F}_0 = V$ e $C^1 = \mathcal{F}_1 = \mathfrak{g}^* \otimes \mathcal{F}_0 = \mathfrak{g}^* \otimes V \simeq L(\mathfrak{g}; V) = L(\mathfrak{g}; \mathcal{F}_0)$, dove $\mathfrak{g}$ è l'algebra di Lie e V è lo spazio vettoriale della rappresentazione $\rho : \mathfrak{g} \to End(V)$.

Di conseguenza, nella quantizzazione BRST, le funzioni d'onda scritte in serie di ghosts sono viste come funzioni d'onda nello spazio di Fock che rappresentano gradi di libertà ridondanti, mentre nella coomologia delle algebre di Lie queste funzioni d'onda vengono viste come mappe $\Psi : \mathfrak{g} \to \mathcal{F}_0$. Si noti che identifichiamo il vuoto $\phi_0 \in \mathcal{F}$ con la mappa identicamente nulla.

A questo punto, utilizzando la relazione di equivalenza 3.2.14, possiamo scrivere

$$\Psi \sim \Psi + Q_{brst}|_{\mathcal{F}_0}\alpha \tag{3.3.8}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} &\psi_c \sim \psi_c + \Delta\alpha \\ &\psi_\gamma \sim \psi_\gamma + div\ \alpha \\ &\psi_\delta \sim \psi_\delta - grad\ \alpha \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Si noti che la relazione $\psi_\delta \sim \psi_\delta - grad\ \alpha$ è la *trasformazione di gauge* in forma covariante dell'elettromagnetismo.

Se scegliamo un α tale che $\psi_\gamma \sim 0$ ed utilizziamo la relazione 3.1.43 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} &(Q_{brst}|_{\mathcal{F}_1})\Psi|_{\psi_\gamma=0} = (c\Delta + \gamma\ div - \delta\ grad - \gamma\delta\frac{\partial}{\partial c})(c\psi_c + \delta\psi_\delta) = \\ &c\delta\Delta\psi_\delta + c^2\Delta\psi_c + \gamma\delta\ div\ \psi_\delta + \gamma c\ div\ \psi_c + \delta^2\ grad\ \psi_\delta - \\ &\delta c\ grad\ \psi_c - \gamma\delta\psi_c = \\ &c\delta(\Delta\psi_\delta - grad\ \psi_c) + \gamma\delta(div\ \psi_\delta - \psi_c) + \gamma c\ div\ \psi_c \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Dall'espressione 3.2.4 si ha che

$$(Q_{brst}|_{\mathcal{F}_1})\Psi|_{\psi_\gamma=0} = 0 \tag{3.3.11}$$

dunque

$$\begin{aligned} &\Delta\psi_\delta - grad\ \psi_c = 0 \\ &\psi_c = div\ \psi_\delta \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

dalle quali concludiamo

$$grad\ div\ \psi_\delta - \Delta\psi_\delta = 0 \tag{3.3.13}$$

ovvero l'equazione di Maxwell per il potenziale vettore in assenza di sorgenti e nel caso stazionario. Infatti, se consideriamo l'equazione di Ampère - Maxwell in assenza di sorgenti $rot\ \vec{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ e la definizione di potenziale vettore $\vec{B} = rot\ \vec{A}$, otteniamo

$$rot\ (rot\ \vec{A}) = grad\ div\ \vec{A} - \Delta\vec{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{3.3.14}$$

che nel caso stazionario si riduce a

$$grad\ div\ \vec{A} - \Delta\vec{A} = 0 \tag{3.3.15}$$

analoga all'espressione 3.3.13 con $\psi_\delta = \vec{A}$.

Bibliografia

[1] José M. Figueroa-O'Farrill e Takashi Kimura. «THE COHOMOLOGY OF BRST COMPLEXES». In: *Communications in Mathematical Physics* (1988). URL: `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:125981607`.

[2] José Miguel Figueroa-O'Farrill. «BRST Cohomology». In: *Minicourse on BRST Cohomology* (2006).

[3] Bastianelli Fiorenzo, Corradini Olindo e Waldron Andrew. «Detours and paths: BRST complexes and worldline formalism». In: *Journal of High Energy Physics* 2009.05 (mag. 2009), pp. 017–017. ISSN: 1029-8479. DOI: `10.1088/1126-6708/2009/05/017`. URL: `http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2009/05/017`.

[4] Robert Gilmore. *Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. Cambridge University Press, 2008. ISBN: 9780521884006.

[5] John Marshall Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2014. ISBN: 9781489994752.