

**ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA**

**DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE, CHIMICA,
AMBIENTALE E DEI MATERIALI**

**CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA CIVILE
CURRICULUM STRUTTURE**

**Tesi di Laurea in
DIAGNOSTICA E SPERIMENTAZIONE DELLE STRUTTURE**

**INDAGINI SPERIMENTALI E NUMERICHE SUL
COMPORTAMENTO DINAMICO DI UNA TRAVE:
INFLUENZA DEL DANNO E DELLA TEMPERATURA**

RELATORE:
Chiar.ma Prof.ssa
CRISTINA GENTILINI

CANDIDATO:
MARIA GRAZIA MARSANO
Matricola n° 0000998631

Anno Accademico 2023 - 2024
Sessione I

A mia mamma, stretta alleata.

A mio papà, forza motrice.

A Maria Pia, costante presenza.

Con dedizione e rigore scientifico
sono stata accompagnata
nel mondo della ricerca.
Per avermi trasmesso passione,
curiosità e voglia di continuare
ad imparare.
Grazie Professoressa

INDICE

INTRODUZIONE	7
Capitolo 1: TRATTAZIONE ANALITICA	10
1.1 VIBRAZIONI FLESSIONALI DELLE TRAVI	10
1.1.1 Equazioni delle forme modali e dei moti armonici	13
1.1.2 Soluzione dell'equazione dei modi normali	15
1.1.3 Autovalori ed autofunzioni	17
1.2 PULSAZIONI NATURALI PER DIFFERENTI CONDIZIONI DI VINCOLO	19
1.2.1 Trave appoggiata agli estremi	27
1.2.2 Trave incastrata agli estremi	33
1.3 CASO STUDIO	42
1.3.1 Trattazione analitica trave incastrata agli estremi	48
Capitolo 2: TRATTAZIONE NUMERICA	51
2.MODELLAZIONE FEM	51
2.1 RICHIAMI DI ANALISI MODALE	51
2.1.1 Matrice di Massa	53
2.2 MODELLAZIONE FEM DELLA TRAVE SANA	55
2.2.1 Analisi Natural Frequency	62
2.2.2 Analisi di Convergenza	63
2.2.3 Confronto frequenze Analitico - Numeriche	68
2.3 MODELLAZIONE FEM DELLA TRAVE DANNEGGIATA	68
2.3.1 Analisi Natural Frequency	75
2.4 IDENTIFICAZIONE DEL DANNO	80
2.4.1 Identificazione del danno mediante variazione di curvatura	81
2.4.2 Algoritmo di identificazione del danno	84
2.5 MODELLAZIONE FEM TRAVE 12 ELEMENTI FINITI	97
2.5.1 Identificazione danno trave 12 elementi finiti	102

Capitolo 3: TRATTAZIONE SPERIMENTALE	111
3. PROVE DINAMICHE SPERIMENTALI	111
3.1 FASI OPERATIVE DI UNA PROVA DINAMICA	111
3.2 IDENTIFICAZIONE DINAMICA	113
3.2.1 Eccitazione della struttura	114
3.2.2 Apparecchiature di eccitazione	116
3.2.3 Rilevazione delle grandezze fisiche	118
3.2.4 Acquisizione ed analisi dei dati	122
3.2.5 Funzione di Trasferimento	123
3.2.6 Teorema del campionamento	124
3.2.7 Roving Hammer e Roving Sensor	125
3.3 PROVE DINAMICHE SU TRAVE SANA	127
3.3.1 Preparazione alla prova	128
3.3.2 Strumentazione utilizzata per la prova	130
3.3.3 Esecuzione prova ed acquisizione dati	139
3.3.4 Frequenze e Modi di Vibrare con Roving Hammer	143
3.3.5 Confronto Frequenze	162
3.3.6 Frequenze e Modi di Vibrare con Roving Sensor	163
3.3.7 Confronto Frequenze	185
3.4 EFFETTI DELLA TEMPERATURA SULLE PROVE DINAMICHE	185
3.4.1 Influenza della temperatura nel caso studio	187
Capitolo 4: TRATTAZIONE SPERIMENTALE DANNO	194
4 RIPRODUZIONE DANNO SPERIMENTALE	194
4.1 PROVE DINAMICHE SU TRAVE DANNEGGIATA	194
4.1.1 Primo Step di danno	195
4.1.2 Valutazione parametri dinamici primo Step di danno	200
4.1.3 Secondo Step di danno	207
4.1.4 Valutazione parametri dinamici secondo Step di danno	209
4.1.5 Terzo Step di danno	216
4.1.6 Valutazione parametri dinamici terzo Step di danno	220

4.1.7 Quarto Step di danno	225
4.1.8 Valutazione parametri dinamici quarto Step di danno	228
4.1.9 Quinto Step di danno	234
4.1.10 Valutazione parametri dinamici Quinto Step di danno	235
4.1.11 Confronto frequenze numeriche e sperimentali	241
4.2 IDENTIFICAZIONE DEL DANNO SPERIMENTALE	241
4.2.1 Algoritmo di identificazione del danno	246
4.2.2 Identificazione del danno con valori trave sana 18.4.'24	247
4.2.3 Identificazione del danno con valori trave sana 22.4.'24	261
4.2.4 Identificazione del danno con valori trave sana 15.5.'24	265
4.3 PARAMETRO GLOBALE DANNO E FREQUENZE SPERIMENTALI	271
4.4 TRATTAZIONE SPERIMENTALE TRAVE 12 ELEMENTI FINITI	277
4.4.1 Prove dinamiche su trave sana 12 Elementi Finiti	277
4.4.2 Prove dinamiche su trave danneggiata 12 Elementi Finiti	282
4.4.3 Identificazione del danno trave 12 Elementi Finiti	286
4.4.4 Identificazione del danno con valori trave sana 18.4.'24	287
4.4.5 Identificazione del danno con valori trave sana 22.4.'24	292
4.4.6 Identificazione del danno con valori trave sana 15.5.'24	298
Capitolo 5: PROVE STATICHE CON ESTENSIMETRI	306
5. CALCOLO DELLA DEFORMAZIONE	306
5.1 STRUMENTI DI MISURA DELLA DEFORMAZIONE	306
5.1.1 Montaggio estensimetri su una trave incastro-incastro	308
5.2 CALCOLO DELLA DEFORMAZIONE NEL CASO STUDIO	309
5.2.1 Trattazione Analitica	310
5.2.2 Trattazione Numerica	313
5.2.3 Trattazione Sperimentale	316
CONCLUSIONI	332
BIBLIOGRAFIA	337

**INDAGINI SPERIMENTALI E NUMERICHE SUL
COMPORTAMENTO DINAMICO DI UNA TRAVE:
INFLUENZA DEL DANNO E DELLA TEMPERATURA**

INTRODUZIONE

Il presente elaborato si pone l'obiettivo di eseguire prove dinamiche su una trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi al fine di identificare i parametri dinamici che la caratterizzano, ossia le frequenze naturali e i modi di vibrare.

Inoltre, si procederà al danneggiamento di una porzione specifica sull'altezza della sezione di un elemento della trave e, grazie alla caratterizzazione dinamica eseguita sia sulla trave integra sia sulla trave danneggiata si vuole identificare la posizione esatta del danno, utilizzando un algoritmo implementato in Matlab. Un danneggiamento provoca infatti una riduzione di rigidità e altera le caratteristiche dinamiche di una struttura, in particolare: periodi propri, frequenze naturali e indici di smorzamento.

Nell'algoritmo di identificazione del danno si forniranno in input i parametri dinamici sia della trave integra sia della trave danneggiata e, attraverso la variazione di curvatura si valuterà la posizione della porzione di trave danneggiata.

Si procederà alla caratterizzazione dinamica attraverso:

- Trattazione analitica;
- Trattazione numerica tramite il software Straus7;
- Trattazione sperimentale.

Per la valutazione sperimentale delle frequenze e delle corrispondenti forme modali si eseguiranno le prove dinamiche utilizzando due tecniche differenti: la tecnica del Roving Hammer e la tecnica del Roving Sensor. In particolare, tramite la tecnica del Roving Hammer si ricava la funzione di trasferimento (FFT) a partire dal rapporto dell'output dell'accelerometro e dell'input del martello; con la tecnica del Roving Sensor invece, si ricava la FFT dal rapporto dell'output dell'accelerometro mobile e dell'output dell'accelerometro mantenuto

fisso sulla trave in esame.

Si eseguirà la modellazione numerica sul software Straus7 sia della trave integra che della trave danneggiata e si estrapoleranno i parametri d'interesse avviando un'analisi "Natural Frequency".

Si procederà con la riproduzione di un danno progressivo e localizzato sia nel modello che presso il laboratorio LISG dell'università di Bologna.

Si effettuerà un confronto tra i risultati numerici ed i risultati sperimentali ottenuti per la trave in alluminio incastrata agli estremi discretizzata sia con 24 elementi finiti che con 12 elementi finiti, ossia con una discretizzazione più rada.

In particolare, nel presente lavoro di tesi si vuole identificare la soglia minima di danno che l'algoritmo riesce a identificare fornendo in input in prima battuta la caratterizzazione dinamica ottenuta dal Software Straus7 ed in un secondo momento eseguendo la stessa procedura utilizzando i valori delle frequenze e dei modi di vibrare ottenuti sperimentalmente.

Il presente lavoro seguirà il seguente schema logico: nel capitolo uno si esporrà la trattazione analitica di una trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi come sistema al continuo e si proporranno i calcoli per determinare i valori delle prime quattro frequenze.

Nel capitolo due si proporrà la trattazione numerica ossia la modellazione e la caratterizzazione dinamica effettuata attraverso il software Straus 7.

Nel capitolo tre verrà analizzato il caso studio sperimentale, in particolare si riporteranno le prove dinamiche effettuate in laboratorio per la trave sana sia con la tecnica del Roving Hammer che con la tecnica del Roving Sensor. Inoltre, in questo capitolo si proporrà lo studio sulla variazione delle frequenze in funzione della temperatura ambientale.

Nel capitolo quattro si riporterà la riproduzione del danno sperimentale eseguita in laboratorio e verrà proposto in maniera dettagliata lo studio sull'identificazione del danno attraverso l'algoritmo, dopo aver

caratterizzato i parametri dinamici sulla trave danneggiata con la tecnica del Roving Sensor.

Nel capitolo cinque si proporrà la trattazione analitica, numerica e sperimentale per il calcolo della deformazione sulla trave doppiamente incastrata oggetto di studio.

In coda al lavoro si riassumeranno tutte le osservazioni conclusive.

Capitolo 1

TRATTAZIONE ANALITICA

1. VIBRAZIONI FLESSIONALI DELLE TRAVI

In questo capitolo, si analizzano le piccole oscillazioni trasversali delle travi, nell'intorno della configurazione di equilibrio statico.

Il modello che meglio descrive il comportamento del sistema in oggetto è quello di trave come sistema continuo, lo schema di vincolo adottato permette di ricondurre lo studio delle caratteristiche dinamiche al caso notevole di trave continua incastrata agli estremi sollecitata a flessione.

Si introduce di seguito una trattazione analitica che conduce a tali caratteristiche a partire dalle equazioni del moto forzato della trave, tratta dal testo *Viola E., "Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture" volume secondo, capitolo 3 "vibrazioni flessionali delle travi"*.

Si suppone il moto secondo una direzione principale d'inerzia della sezione retta della trave.

Combinando le relazioni di equilibrio, di congruenza e di legame elastico, si ricava l'equazione del moto forzato della trave ad asse rettilineo e a sezione variabile, oscillante nel piano $x - y$, sotto l'azione della forzante esterna $f(x, t)$.

Si ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)$$

Dove μ, A, I, E rappresentano nell'ordine, la densità, l'area della sezione retta, il momento d'inerzia ed il modulo di elasticità normale.

La funzione $v = v(x, t)$ denota lo spostamento trasversale della sezione retta, situata all'ascissa x al tempo t , che si mantiene sempre piana ed ortogonale all'asse geometrico.

Se nell'equazione del moto si pone il carico esterno uguale a zero, si ricava l'equazione del moto libero nell'ipotesi che $EI = costante$:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

La soluzione del moto libero a regime viene assunta nella forma:

$$v = v(x, t) = V(x)g(t)$$

Tale espressione porta a due equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{\partial^4 V(x)}{\partial x^4} - \lambda^4 V(x) = 0$$

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

La prima rappresenta l'equazione delle forme modali $V(x)$, mentre la seconda denota l'equazione differenziale dei moti armonici.

Il sistema in esame è conservativo e perturbato nell'intorno di una posizione di quiete, che è di equilibrio stabile.

I parametri λ e ω sono legati dalla relazione:

$$\lambda^4 = \frac{\mu A}{EI} \omega^2$$

Le costanti della soluzione dell'equazione delle forme modali $V(x)$, si determinano in base alle condizioni di vincolo, mentre le costanti della soluzione dell'equazione differenziale dei moti armonici si ricavano in base alle condizioni iniziali.

Si conduce lo studio delle oscillazioni forzate attraverso il procedimento dell'analisi modale, che porta ad un sistema di n equazioni modali

$$M_n \ddot{g}_n(t) + K_n g_n(t) = f_n(t)$$

per $n = 1, 2, 3, \dots$ dove M_n è la massa modale e K_n è la rigidità modale.

L'espressione:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)$$

esprime l'equazione del moto forzato della trave ad asse rettilineo e a sezione variabile, vibrante nel piano principale $x - y$, sotto l'azione del carico trasversale $f(x, t)$.

Inoltre, l'equazione del moto forzato, prende anche il nome di equazione delle vibrazioni forzate della trave.

Se la sezione trasversale del solido è costante, ed il modulo di elasticità $E = E(x)$ non dipende da x , l'equazione assume l'aspetto:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t)$$

In differente notazione, indicando con gli apici le derivate rispetto alla variabile x e con i puntini sopra le lettere le derivate rispetto a t , si ha:

$$EIv'''' + \mu A\ddot{v} = f(x, t)$$

L'equazione del moto forzato in argomento è un'equazione differenziale alle derivate parziali, lineare, del quarto ordine. Inoltre, è un'equazione approssimata, poiché descrive la vibrazione forzata senza considerare il contributo delle deformazioni taglianti e dell'inerzia rotazionale, ossia di quelle deformazioni prodotte dalle forze inerziali, indotte dalle rotazioni delle sezioni terminali dei tronchi elementari in cui può immaginarsi decomposta la trave. L'equazione differenziale non include gli effetti flettenti dovuti alla presenza di forze che possono essere applicate assialmente alla trave.

Se si scrive l'equazione del moto forzato nella forma:

$$-EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + f(x, t) - \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

si riconoscono le seguenti azioni:

- forza (reazione) elastica, $f_E = -EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$
- forza (forzante) esterna, $f = f(x, t)$
- forza d'inerzia, $f_I = \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$

Dunque, l'equazione sopra riportata ammette la rappresentazione:

$$f_E + f + f_I = 0$$

Dalla seguente rappresentazione appare che la forzante esterna $f(x, t)$ risulta equilibrata, istante per istante, dalla risultante della reazione elastica della trave f_E e della forza d'inerzia f_I .

Se si indica con $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$ l'operatore di elasticità, detto anche operatore fondamentale, oppure operatore di equilibrio, l'equazione del moto forzato ammette la rappresentazione:

$$Lv + \mu A \ddot{v} = f(x, t)$$

Nello studio delle oscillazioni libere, invece, ponendo $f(x, t) = 0$, l'equazione del moto prende la forma:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = \mu A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

In questo caso, invece, si può porre:

$$L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$$

e l'equazione del moto diventa:

$$Lv = \mu A \ddot{v}$$

1.1 OSCILLAZIONI LIBERE

1.1.1 Equazioni delle forme modali e dei moti armonici

Se il carico esterno $f(x, t) = 0$ è assente e la trave ha sezione uniforme, l'equazione differenziale omogenea risulta:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

con $\bar{m} = \mu A$ che denota la massa per unità di lunghezza della trave. L'espressione è denominata equazione differenziale del moto libero. Assumendo:

$$\beta = \frac{\bar{m}}{EI} = \frac{\mu A}{EI}$$

l'equazione diventa:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \beta \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

In differente notazione, indicando con l'apice la derivata rispetto a x e con il punto la derivata rispetto al tempo, si scrive:

$$v'''' + \beta \ddot{v} = 0$$

La soluzione $v = v(x, t)$ dell'equazione differenziale delle oscillazioni libere della trave, che rappresenta una classica equazione a variabili separabili, può scriversi come prodotto di una funzione $V = V(x)$ della sola x e di una funzione $g = g(x, t)$ del tempo:

$$v(x, t) = V(x)g(t)$$

La funzione spaziale $V(x)$ è detta funzione di forma, funzione normale oppure forma modale.

Se si deriva la funzione $v(x, t)$ rispetto alle variabili x e t , si ottiene:

$$v''''(x, t) = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \frac{d^4 V(x)}{dx^4} g(t) = V''''(x)g(t)$$
$$\ddot{v}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = V(x) \frac{d^2 g(x)}{dt^2} = V(x)\ddot{g}(t)$$

Dunque, l'equazione delle oscillazioni libere ammette la rappresentazione:

$$V''''(x)g(t) + \beta V(x)\ddot{g}(t) = 0$$

Da cui risulta:

$$\frac{1}{\beta} \frac{V''''(x)}{V(x)} = - \frac{\ddot{g}(t)}{g(t)}$$

Il primo membro dell'uguaglianza risulta essere una funzione della sola variabile x , mentre il secondo membro è una funzione del tempo.

Affinché l'identità possa sussistere, ciascun termine deve essere uguale ad una costante.

Indicando con ω^2 tale valore costante, si ricavano le due equazioni differenziali ordinarie:

- $\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$

- $V''''(x) - \beta\omega^2V(x) = 0$ oppure $V''''(x) - \lambda^4V(x) = 0$ dove nella seconda si è posto:

$$\lambda^4 = \beta\omega^2 = \frac{\mu A}{EI}\omega^2$$

da cui si ricava la pulsazione naturale, detta anche pulsazione propria oppure frequenza circolare:

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}} = (\lambda l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

Nell'uguaglianza più a destra si è posto $\bar{m} = \mu A$ e si è moltiplicato numeratore e denominatore per l^2 .

L'espressione $\ddot{g}(t) + \omega^2g(t) = 0$ esprime l'equazione differenziale dei moti armonici, la cui soluzione può scriversi in varie forme.

Ad esempio, si può porre:

$$g(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

con A e B costanti di integrazione, oppure si può scrivere:

$$g(t) = G\cos(\omega t - \varphi)$$

dove G e φ denotano, nell'ordine, l'ampiezza e la fase.

Le costanti A e B , oppure G e φ , si determinano in base alle condizioni iniziali assegnate al sistema al tempo $t = 0$.

1.1.2 Soluzione dell'equazione dei modi normali

L'equazione differenziale:

$$V''''(x) - \lambda^4V(x) = 0$$

prende il nome di equazione dei modi normali oppure equazione delle forme modali.

Si risolve ponendo la funzione normale, detta anche funzione naturale o funzione principale, nella forma:

$$V(x) = Ce^{rx}$$

Essendo:

$$V''''(x) = \frac{d^4V(x)}{dx^4} = r^4 C e^{rx} = r^4 V(x)$$

l'equazione delle forme modali assume l'aspetto:

$$(r^4 - \lambda^4)V(x) = 0$$

Le radici dell'equazione caratteristica:

$$r^4 - \lambda^4 = 0 \text{ oppure } (r^2 + \lambda^2)(r^2 - \lambda^2) = 0$$

risultano essere:

- $r_1 = \lambda$
- $r_2 = -\lambda$
- $r_3 = i\lambda$
- $r_4 = -i\lambda$

La sostituzione di ciascuna delle quattro radici soprariportate, nell'espressione:

$$V(x) = C e^{rx}$$

fornisce quattro soluzioni particolari dell'equazione differenziale dei modi normali:

- $C e^{r_1 x}$
- $C e^{r_2 x}$
- $C e^{r_3 x}$
- $C e^{r_4 x}$

La soluzione generale dell'equazione delle forme modali è data dalla combinazione lineare delle quattro soluzioni particolari.

Si ha:

$$V(x) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 e^{i\lambda x} + A_4 e^{-i\lambda x}$$

Le costanti arbitrarie A_1, A_2, A_3, A_4 includono la costante C .

Le funzioni esponenziali che intervengono possono esprimersi in termini di funzioni trigonometriche e di funzioni iperboliche:

$$e^{\pm\lambda x} = \cosh \lambda x \pm \sinh \lambda x$$

$$e^{\pm i\lambda x} = \cos \lambda x \pm i \sin \lambda x$$

Per tali espressioni, la soluzione generale assume l'aspetto:

$$V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

dove sono introdotte le nuove costanti C_1, C_2, C_3, C_4 .

Se si ricavano le funzioni iperboliche $\cosh \lambda x$ e $\sinh \lambda x$, termini presenti all'interno delle funzioni esponenziali e si sostituisce nella $V(x)$, si può scrivere l'integrale generale dell'equazione delle forme modali nella forma:

$$V(x) = D_1 e^{\lambda x} + D_2 e^{-\lambda x} + D_3 \cos \lambda x + D_4 \sin \lambda x$$

dove D_1, D_2, D_3, D_4 sono le nuove costanti arbitrarie.

Le quattro costanti arbitrarie caratterizzano la forma modale ossia il modo normale di vibrare della trave. Tali costanti devono essere calcolate in base alle condizioni di vincolo agli estremi della trave.

Le condizioni di vincolo sono due per ogni sezione terminale della trave e si dicono condizioni ai limiti, oppure, condizioni al contorno.

Le condizioni ai limiti permettono di esprimere tre delle costanti in funzione della quarta e di ricavare l'equazione delle frequenze, da cui si deduce il parametro λ .

Trattandosi di vibrazioni libere, non è possibile valutare la quarta costante, la quale definisce l'ampiezza del moto, che dipende dalle condizioni iniziali.

1.1.3 Autovalori ed autofunzioni

Per le seguenti equazioni:

$$g(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

$$g(t) = G \cos(\omega t - \varphi)$$

la soluzione stazionaria del moto libero a regime $v(x, t) = V(x)g(t)$ può esprimersi nella forma:

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

oppure

$$v(x, t) = V(x)(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$$

Nella soluzione, la costante G è assorbita dalle costanti di $V(x)$.

Per le espressioni sopra riportate di $V(x)$, tale soluzione definisce il moto trasversale di una trave, comunque siano le condizioni al contorno o le condizioni iniziali.

Con riferimento all'espressione:

$$V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

si è detto che le costanti $C_i (i = 1, 2, 3, 4)$ si determinano in base alle condizioni ai limiti.

Dall'esame di tali condizioni, si riconosce che esse possono essere soddisfatte solo se il parametro λ assume particolari valori detti autovalori, valori caratteristici, valori latenti, valori principali, oppure valori propri:

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$$

Al generico autovalore, corrisponde la frequenza propria ω_n che si deduce dalla formula:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}} = (\lambda_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

per $n = 1, 2, \dots$

Oltre che la pulsazione naturale ω_n espressa dalla formula precedente, all'autovalore λ_n corrisponde l'autofunzione $V_n(x)$ detta anche funzione caratteristica, oppure funzione propria, definita a meno di una costante.

La funzione spaziale $V_n(x)$, che definisce la deformata assunta dalla trave in corrispondenza della generica pulsazione propria ω_n , prende anche il nome di *n-esimo modo (naturale o proprio) di vibrare del sistema*.

Potendo scrivere in corrispondenza di ω_n ,

$$g_n(t) = A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)$$

il generico integrale particolare dell'equazione:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

ammette la rappresentazione:

$$v_n(x, t) = V_n(x)(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

Essendo l'equazione delle oscillazioni libere della trave lineare, allora l'integrale generale è fornito dalla combinazione lineare delle soluzioni:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n v_n(x, t)$$

Inglobando i coefficienti $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ nelle costanti A_n e B_n si ha:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t)$$

Se la soluzione del moto armonico corrispondente a λ_n si scrive come segue:

$$g_n(t) = G \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

allora l'integrale generale dell'equazione:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \bar{m} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

ammette la rappresentazione:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x) \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

L'espressione soprariportata esprime l'equazione della deformata dell'asse geometrico della trave in vibrazione libera, dove si può assumere per la funzione principale $V_n = V_n(x)$ tale espressione:

$$V_n(x) = C_1 \cos \lambda_n x + C_2 \sin \lambda_n x + C_3 \cosh \lambda_n x + C_4 \sinh \lambda_n x$$

relativa all'autovalore n -esimo.

1.2 PULSAZIONI NATURALI PER DIFFERENTI CONDIZIONI DI VINCOLO

Per la trave omogenea a sezione costante, le pulsazioni naturali ω_n e i modi propri di vibrare dipendono dalle condizioni di vincolo agli estremi della trave.

È da notare che, indipendentemente dalle condizioni al contorno, le frequenze naturali ω_n si possono calcolare in base alla formula:

$$\omega_n = (\lambda_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

dove:

- λ_n : n-esima radice dell'equazione caratteristica;
- l : lunghezza della trave;
- E : modulo elastico del materiale;
- I : momento d'inerzia della sezione della trave;
- $\bar{m} = \mu A$: massa per unità di lunghezza.

Per la trave appoggiata agli estremi, dall'equazione delle frequenze:

$$\sin \lambda l = 0$$

si ricava l'espressione di $\lambda_n l$:

$$\lambda_n l = n\pi, \text{ con } n = 1, 2, \dots$$

Per la trave a mensola, l'equazione delle frequenze risulta:

$$\cos \lambda l \cosh \lambda l + 1 = 0$$

da cui si deducono le prime tre radici:

$$\lambda_1 l = 1,875$$

$$\lambda_2 l = 4,694$$

$$\lambda_3 l = 7,855$$

Per la trave vincolata agli estremi con incastro ed appoggio, dall'equazione caratteristica:

$$\operatorname{tg} \lambda l - \operatorname{tgh} \lambda l = 0$$

si ricavano i valori delle prime cinque radici.

La trave avente gli estremi liberi ha l'equazione delle frequenze:

$$\cos \lambda l \cosh \lambda l = 1$$

Tale equazione è analoga anche per una trave con gli estremi incastrati.

È da notare, però, che la radice nulla

$$\lambda_0 l = (\lambda l)_0 = 0$$

comporta uno spostamento rigido solo per la trave con estremi liberi.

Per avere una visione unitaria delle varie condizioni di vincolo che determinano le frequenze di vibrazione, si riassumono di seguito dieci differenti condizioni di vincolo e si riportano i valori dei primi tre coefficienti $\lambda_n l$ che intervengono nella formula per determinare ω_n

$$(\lambda_n l)^2 = (\lambda l)_n^2$$

Per ciascuna condizione di vincolo si esprimono per la trave inflessa, le condizioni al contorno e i valori di $\lambda_n l$ per $n = 1, 2, 3$. Inoltre per $n > 3$ si riporta anche la formula generale per il calcolo del suddetto coefficiente $(\lambda l)_n$.

- Trave con estremi liberi

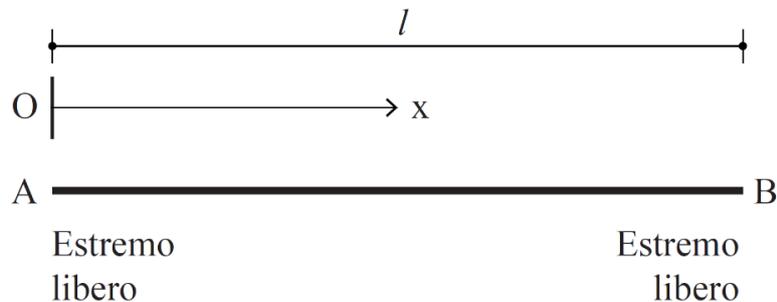


Figura 1.1: Trave con estremi liberi;

Condizioni ai limiti:

- In A: $M(0, t) = 0$ e $T(0, t) = 0$
- In B: $M(l, t) = 0$ e $T(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda l)_n$:

$$\lambda_1 l = 0 \quad \lambda_2 l = 4,730 \quad \lambda_3 l = 7,853 \quad \lambda_n l = \frac{2n-1}{2} \pi$$

- Trave con estremo libero e doppio pendolo

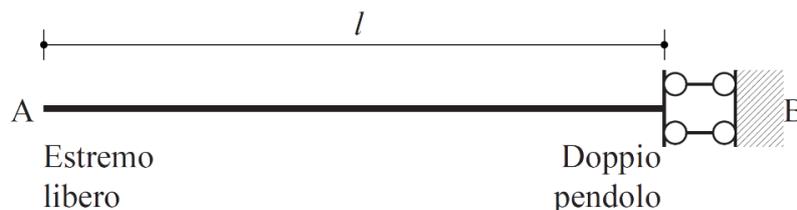


Figura 1.2: Trave con estremo libero e doppio pendolo;

Condizioni ai limiti:

- In A: $M(0, t) = 0$ e $T(0, t) = 0$
- In B: $\varphi(l, t) = 0$ e $T(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda)_n$:

$$\lambda_1 l = 0 \quad \lambda_2 l = 2,365 \quad \lambda_3 l = 5,498 \quad \lambda_n l = \frac{4n-5}{4} \pi$$

- Trave con estremo libero ed appoggio

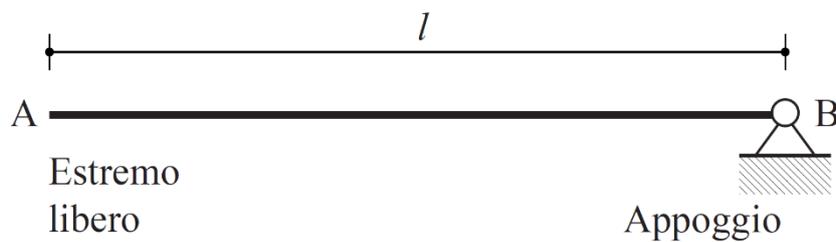


Figura 1.3: Trave con estremo libero ed appoggio;

Condizioni ai limiti:

- In A: $M(0, t) = 0$ e $T(0, t) = 0$
- In B: $v(l, t) = 0$ e $M(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda)_n$:

$$\lambda_1 l = 0 \quad \lambda_2 l = 3,927 \quad \lambda_3 l = 7,069 \quad \lambda_n l = \frac{4n-3}{4} \pi$$

- Trave con doppio pendolo agli estremi

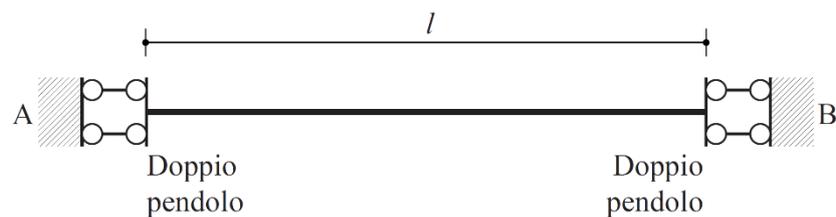


Figura 1.4: Trave con doppio pendolo agli estremi;

Condizioni ai limiti:

- In A: $\varphi(0, t) = 0$ e $T(0, t) = 0$
- In B: $\varphi(l, t) = 0$ e $T(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda)_n$:

$$\lambda_1 l = 0 \quad \lambda_2 l = 3,142 \quad \lambda_3 l = 6,283 \quad \lambda_n l = (n-1)\pi$$

- Trave con doppio pendolo ed appoggio

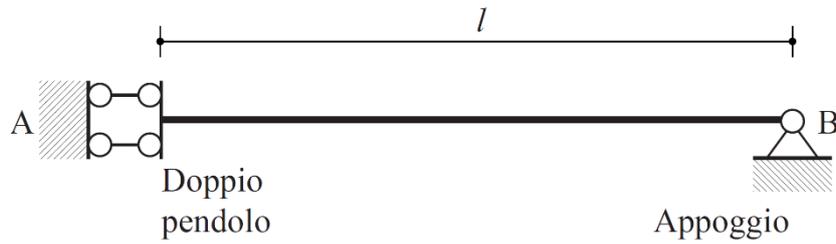


Figura 1.5: Trave con doppio pendolo ed appoggio;

Condizioni ai limiti:

- In A: $\varphi(0, t) = 0$ e $T(0, t) = 0$
- In B: $v(l, t) = 0$ e $M(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda l)_n$:

$$\lambda_1 l = 1,571 \quad \lambda_2 l = 4,712 \quad \lambda_3 l = 7,854 \quad \lambda_n l = \frac{2n-1}{2} \pi$$

- Trave con incastro ed estremo libero

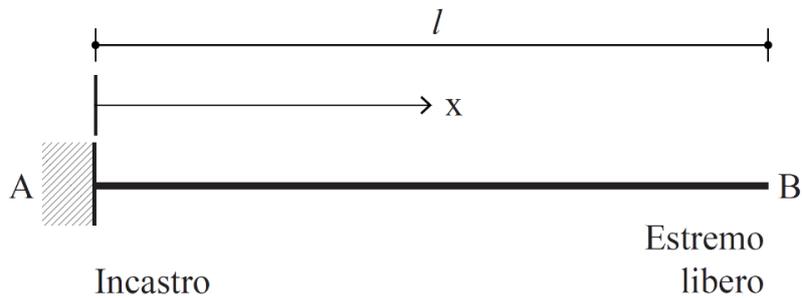


Figura 1.6: Trave con incastro ed estremo libero;

Condizioni ai limiti:

- In A: $v(0, t) = 0$ e $\varphi(0, t) = 0$
- In B: $M(l, t) = 0$ e $T(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda l)_n$:

$$\lambda_1 l = 1,571 \quad \lambda_2 l = 4,712 \quad \lambda_3 l = 7,854 \quad \lambda_n l = \frac{2n-1}{2} \pi$$

- Trave appoggiata agli estremi

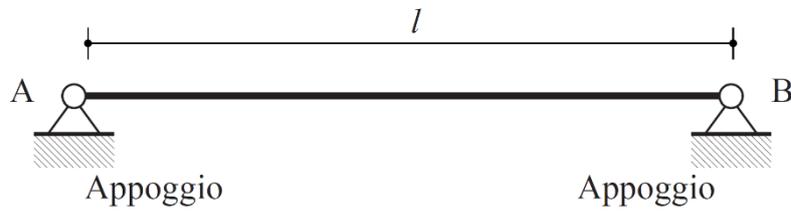


Figura 1.7: Trave appoggiata agli estremi;

Condizioni ai limiti:

- In A: $v(0, t) = 0$ e $M(0, t) = 0$
- In B: $v(l, t) = 0$ e $M(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda)_n$:

$$\lambda_1 l = 3,142 \quad \lambda_2 l = 6,283 \quad \lambda_3 l = 9,425 \quad \lambda_n l = n\pi$$

- Trave con incastro ed appoggio

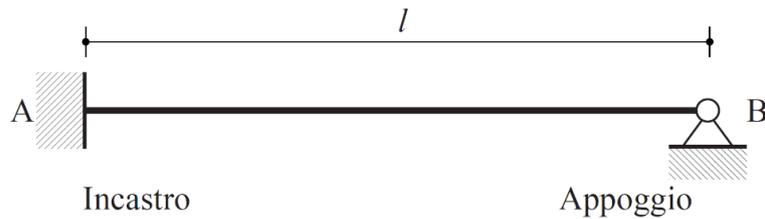


Figura 1.8: Trave con incastro ed appoggio;

Condizioni ai limiti:

- In A: $v(0, t) = 0$ e $\varphi(0, t) = 0$
- In B: $v(l, t) = 0$ e $M(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda)_n$:

$$\lambda_1 l = 3,927 \quad \lambda_2 l = 7,069 \quad \lambda_3 l = 10,210 \quad \lambda_n l = \frac{4n+1}{4}\pi$$

- Trave con incastro e doppio pendolo

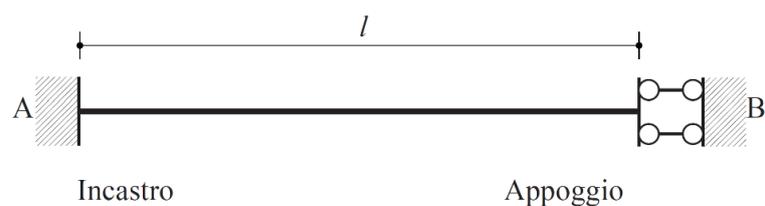


Figura 1.9: Trave con incastro e doppio pendolo;

Condizioni ai limiti:

- In A: $v(0, t) = 0$ e $\varphi(0, t) = 0$
- In B: $\varphi(l, t) = 0$ e $T(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda l)_n$:

$$\lambda_1 l = 2,365 \quad \lambda_2 l = 5,498 \quad \lambda_3 l = 8,639 \quad \lambda_n l = \frac{4n-1}{4} \pi$$

- Trave incastrata agli estremi

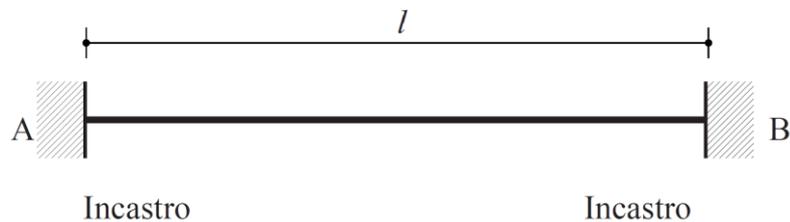


Figura 1.10: Trave incastrata agli estremi;

Condizioni ai limiti:

- In A: $v(0, t) = 0$ e $\varphi(0, t) = 0$
- In B: $v(l, t) = 0$ e $\varphi(l, t) = 0$

Coefficienti $(\lambda l)_n$:

$$\lambda_1 l = 4,730 \quad \lambda_2 l = 7,853 \quad \lambda_3 l = 10,996 \quad \lambda_n l = \frac{2n+1}{2} \pi$$

Si è riportato il quadro sinottico delle condizioni al contorno e dei valori dei coefficienti $(\lambda l)_n$ per diverse condizioni di vincolo per una trave inflessa.

Si procede ricavando l'espressione di λl dall'equazione caratteristica, a cui si perviene dopo l'applicazione delle condizioni al contorno alla soluzione:

$$V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

dell'equazione differenziale dei modi naturali di vibrare:

$$\frac{d^4 V(x)}{dx^4} - \lambda^4 V(x) = 0 \quad \text{oppure} \quad V''''(x) - \lambda^4 V(x) = 0$$

Essendo:

$$\omega = \lambda^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \quad \text{oppure} \quad \omega_n = (\lambda l)_n^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

Le condizioni al contorno sono di tipo cinematico (dette anche di tipo geometrico, o di tipo essenziale) e di tipo meccanico (dette anche di tipo statico o di tipo naturale).

Le condizioni di tipo cinematico si esprimono in termini:

- di spostamento: $v(x, t)$
- di rotazione: $\varphi(x, t) = -\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \theta = v'(x, t)$

Le condizioni al contorno di tipo statico risultano espresse in termini di caratteristiche di sollecitazione, quali il momento flettente $M(x, t)$ e lo sforzo di taglio $T(x, t)$.

È noto che:

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = -EI v''(x, t)$$

$$T(x, t) = -EI \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} = -EI v'''(x, t)$$

mentre per la $v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi)$

Essendo, in generale, $\cos(\omega t - \varphi) \neq 0$ al variare del tempo t , le condizioni al contorno in termini di spostamento $v(x, t)$, di rotazione $\varphi(x, t)$, di momento flettente $M(x, t)$ e taglio $T(x, t)$, si possono esprimere attraverso la funzione di forma $V(x)$ e le sue derivate:

$$V'(x) = \frac{dV(x)}{dx}$$

$$V''(x) = \frac{d^2V(x)}{dx^2}$$

$$V'''(x) = \frac{d^3V(x)}{dx^3}$$

Difatti, tra la funzione spostamento $v(x, t)$ e la funzione principale $V(x)$ esiste il legame:

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

mentre la rotazione $\varphi(x, t)$ si può esprimere nella forma:

$$\varphi(x, t) = -\frac{\partial v}{\partial x} = -V'(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

Le espressioni del momento flettente ed il taglio ammettono le rappresentazioni:

$$M(x, t) = -EI \cos(\omega t - \varphi) V''(x)$$

$$T(x, t) = -EI \cos(\omega t - \varphi) V'''(x)$$

Pertanto, se all'ascissa $x = x_0$ ed al tempo t risultano nulli i valori dello spostamento $v(x, t)$, della rotazione $\varphi(x, t)$, del momento $M(x, t)$ e del taglio $T(x, t)$, devono annullarsi, nell'ordine, la funzione di forma e le sue prime tre derivate, come indicato di seguito:

$$v(x_0, t) = 0 \Rightarrow V(x_0) = 0$$

$$\varphi(x_0, t) = 0 \Rightarrow V'(x_0) = 0$$

$$M(x_0, t) = 0 \Rightarrow V''(x_0) = 0$$

$$T(x_0, t) = 0 \Rightarrow V'''(x_0) = 0$$

È da notare che per $\cos(\omega t - \varphi) = 1$ le espressioni sopra riportate forniscono i valori massimi di $v(x, t)$ e dei moduli di $\varphi(x, t)$, $M(x, t)$, $T(x, t)$.

1.2.1 Trave appoggiata agli estremi

Si studiano le oscillazioni libere della trave, a sezione costante, appoggiata agli estremi illustrata di seguito.

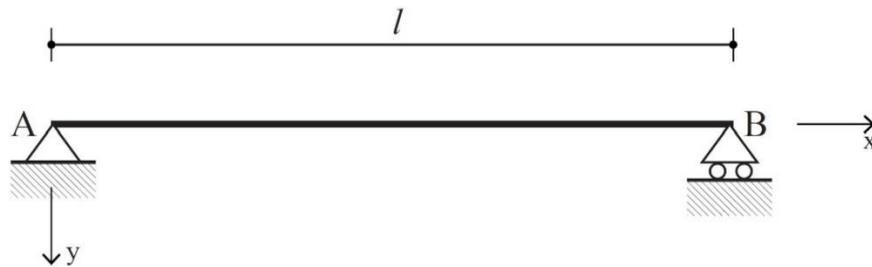


Figura 1.11: Trave appoggiata agli estremi

L'equazione differenziale delle oscillazioni libere della trave può scriversi nella forma:

$$v'''' + \beta \ddot{v} = 0$$

dove con l'apice e con il punto sono indicate rispettivamente le derivate rispetto alla coordinata x ed al tempo t .

La soluzione dell'equazione ammette la rappresentazione

$$v(x, t) = V(x)g(t)$$

oppure

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

Fissato x , $V(x)$ denota l'ampiezza del moto armonico nella sezione della trave posta all'ascissa x .

L'espressione della funzione di forma $V(x)$, detta anche funzione normale, oppure forma modale, assume l'aspetto:

$$V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

La derivata seconda di $V(x)$ è:

$$V''(x) = \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\lambda^2 (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x - C_3 \cosh \lambda x - C_4 \sinh \lambda x)$$

Dato che l'appoggio semplice inibisce, in qualsiasi istante t , lo spostamento $v = v(x, t)$ secondo l'asse y e non è capace di reagire a momento flettente $M = M(x, t)$, le condizioni ai limiti prendono la forma

$$v(0, t) = 0 \quad M(0, t) = 0 \quad \text{in } x = 0$$

$$v(l, t) = 0 \quad M(l, t) = 0 \quad \text{in } x = l$$

Per l'espressione:

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

le condizioni al contorno si esprimono in termini dei valori assunti da $V(x)$:

$$V(0) = 0 \quad V''(0) = 0 \quad \text{in } x = 0$$

$$V(l) = 0 \quad V''(l) = 0 \quad \text{in } x = l$$

Per quanto detto, l'espressione della funzione di forma $V(x)$ e della sua derivata seconda $V''(x)$ forniscono:

$$C_1 + C_3 = 0$$

$$C_1 - C_3 = 0$$

Quindi $V(x)$ e $V''(x)$ diventano nell'ordine:

$$V(x) = C_2 \sin \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

$$V''(x) = -\lambda^2(C_2 \sin \lambda x - C_4 \sinh \lambda x)$$

Per le condizioni di $V(x)$ in $x = l$, si può scrivere:

$$C_2 \sin \lambda l + C_4 \sinh \lambda l = 0$$

$$-C_2 \sin \lambda l + C_4 \sinh \lambda l = 0$$

Sommando membro a membro si ha:

$$2C_4 \sinh \lambda l = 0$$

Dato che $\sinh \lambda l \neq 0$ per qualunque valore dell'argomento λl , segue che $C_4 = 0$, quindi l'espressione di $V(x)$ diventa:

$$V(x) = C_2 \sin \lambda x$$

Escludendo la soluzione banale:

$$C_2 = 0$$

si ricava quindi l'equazione delle frequenze:

$$\sin \lambda l = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono del tipo:

$$\lambda_n l = n\pi$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori o valori caratteristici.

La sostituzione delle radici nella formula:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}} = (\lambda_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

fornisce le frequenze naturali:

$$\omega_n = (\lambda_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}} = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

Si riportano le forme modali per trave a sezione costante appoggiata agli estremi.

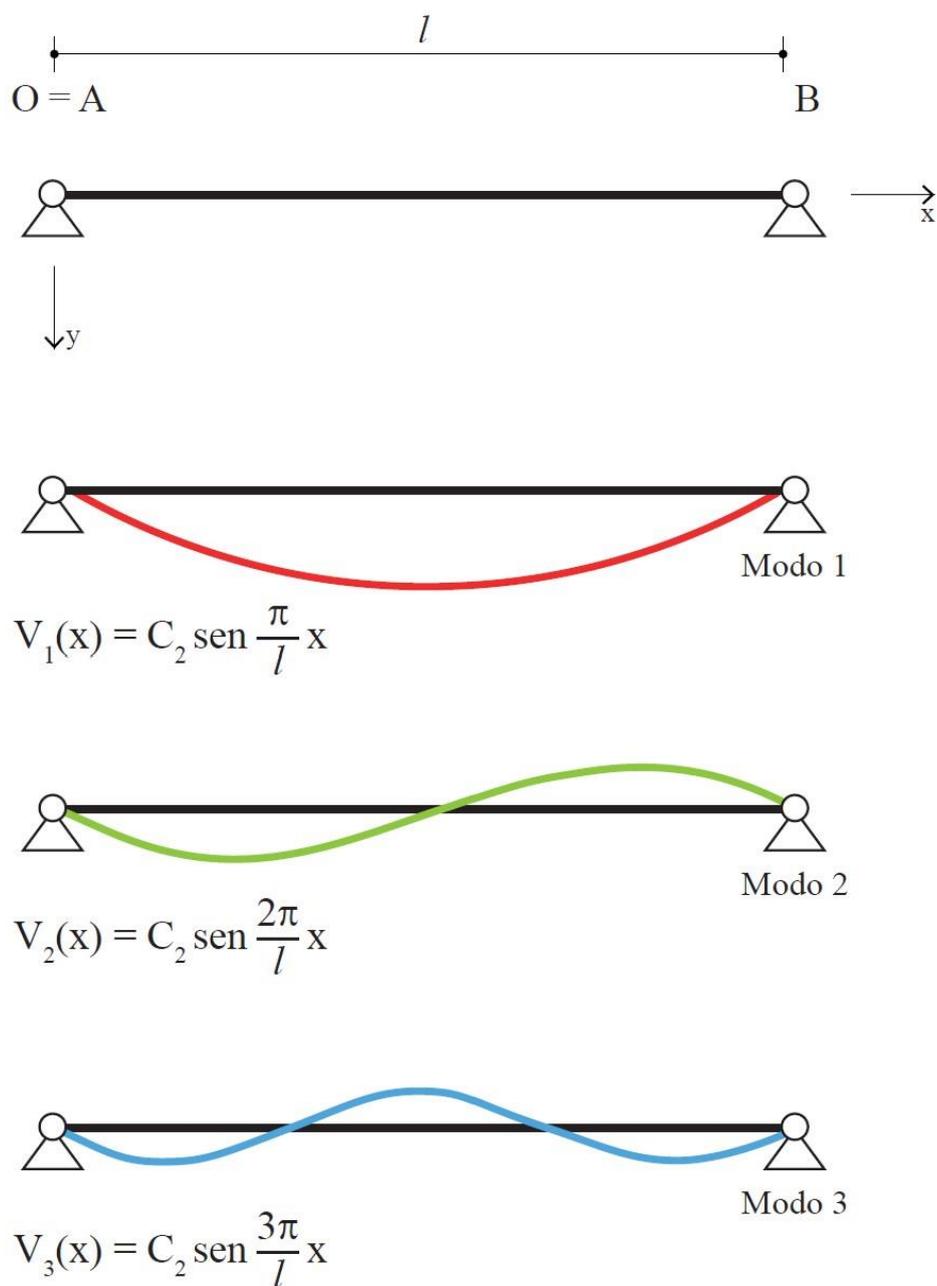


Figura 1.12: Forme modali per trave a sezione costante appoggiata agli estremi

In corrispondenza dell' n -esimo modo di vibrare, caratterizzato dalla frequenza propria ω_n l'espressione

$$V(x) = C_2 \sin \lambda x$$

consente di esprimere la funzione di forma come segue:

$$V_n(x) = C_2 \sin(\lambda_n x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x$$

La funzione $V_n = V_n(x)$ è detta autofunzione, funzione caratteristica, oppure funzione normale, ovvero funzione principale.

Si riportano le prime tre autofunzioni che esprimono i primi tre modi naturali di vibrazione, illustrati nella figura sovrastante.

$$V_1 = C_2 \sin \frac{\pi}{l} x$$

$$V_2 = C_2 \sin \frac{2\pi}{l} x$$

$$V_3 = C_2 \sin \frac{3\pi}{l} x$$

La pulsazione naturale associata all'n-esimo modo di vibrare risulta n^2 volte più grande della pulsazione fondamentale.

Una qualsiasi combinazione lineare delle funzioni di forma $V_n(x)$:

$$V(x) = \gamma_1 C_1 \sin \frac{\pi}{l} x + \gamma_2 C_2 \sin \frac{2\pi}{l} x + \dots + \gamma_n C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

è soluzione dell'equazione differenziale di seguito riscritta:

$$V''''(x) - \lambda^4 V(x) = 0$$

dove $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sono scalari arbitrari.

Se si introducono i coefficienti:

$$B_1 = \gamma_1 C_1$$

$$B_2 = \gamma_2 C_2$$

$$B_n = \gamma_n C_n$$

la soluzione diventa:

$$V(x) = B_1 \sin \frac{\pi}{l} x + B_2 \sin \frac{2\pi}{l} x + \dots + B_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

che può anche assumere l'aspetto:

$$V_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

In corrispondenza dell'ennesimo autovalore, l'espressione di v_n ammette la rappresentazione:

$$v_n(x, t) = V_n(x) \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

oppure

$$v_n(x, t) = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale del moto in vibrazione libera della trave appoggiata agli estremi risulta:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

Si suppone che siano note le condizioni iniziali al tempo $t = 0$

$$v(x, 0) = v_0 \sin \frac{\pi x}{l} = V_1(x)$$

$$\dot{v}(x, 0) = 0$$

La prima indica che la deformata impressa alla trave corrisponde al primo modo di vibrare, dove v_0 rappresenta lo spostamento nella mezzaria della trave stessa.

Per l'espressione di $v(x, t)$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos(-\varphi_n) &= v_0 \sin \frac{\pi x}{l} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin(-\varphi_n) &= 0 \end{aligned}$$

Dato che $\omega_n, B_n, \sin \frac{n\pi}{l} x$ possono essere differenti da zero, dalla seconda delle precedenti segue che:

$$\sin(-\varphi_n) = 0 \text{ oppure } \varphi_n = 0 \text{ per } n = 1, 2, \dots$$

e la prima diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = v_0 \sin \frac{\pi}{l} x$$

Per il principio di identità dei polinomi, risulta:

$$B_1 = v_0$$

$$B_2 = B_3 = \dots = B_n = 0$$

e si ha che

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos(\omega_n t - \varphi_n)$$

ammette la rappresentazione

$$v(x, t) = v_0 \sin \frac{\pi}{l} x \cos \omega_1 t = V_1(x) \cos \omega_1 t$$

Tale soluzione avverte che, in assenza di forze esterne, imprimendo come deformata iniziale il primo modo di vibrare, la trave oscilla con legge sinusoidale, mantenendo inalterata la sua forma.

In generale, si può affermare che, quando la condizione iniziale è definita da una deformata rappresentata da un'autofunzione e da velocità iniziale nulla, il sistema oscilla con legge armonica senza variare la sua forma.

Per tale motivo le autofunzioni prendono il nome di modi propri di vibrare.

Se sul sistema che vibra in accordo con la soluzione $v(x, t)$, si eseguono delle fotografie scattate ad istanti intervallati di $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, si vedrà la trave immobile.

1.2.2 Trave incastrata agli estremi

Si ripete quanto fatto per la trave appoggiata agli estremi ma in questo paragrafo si studiano le frequenze naturali ed i modi normali di vibrazione per la trave di lunghezza l a sezione omogenea e costante, incastrata agli estremi. La trave è vincolata con un incastro sia in A che in B.

Si riporta di seguito lo schema di trave in esame.

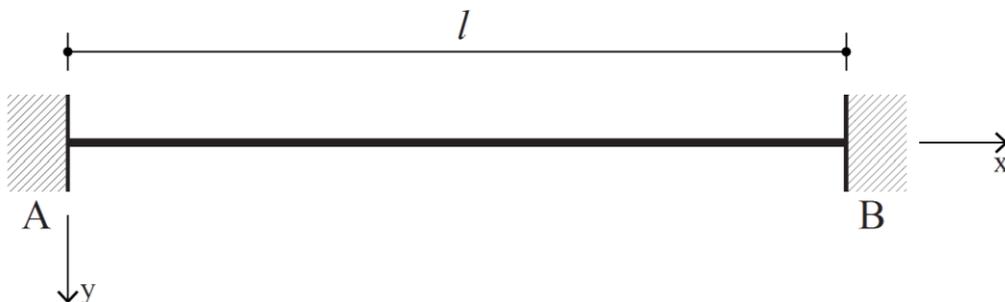


Figura 1.13: Trave incastrata agli estremi

L'equazione differenziale delle oscillazioni libere della trave può scriversi nella forma:

$$v'''' + \beta \ddot{v} = 0$$

dove con l'apice e con il punto sono indicate rispettivamente le derivate rispetto alla coordinata x ed al tempo t .

La soluzione dell'equazione ammette la rappresentazione

$$v(x, t) = V(x)g(t)$$

oppure

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

Fissato x , $V(x)$ denota l'ampiezza del moto armonico nella sezione della trave posta all'ascissa x .

L'espressione della funzione di forma $V(x)$, detta anche funzione normale, oppure forma modale, assume l'aspetto:

$$V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

La derivata prima di $V(x)$ è:

$$V'(x) = \frac{dV(x)}{dx} = \lambda (-C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \sinh \lambda x + C_4 \cosh \lambda x)$$

Le condizioni di vincolo agli estremi A e B della trave in esame sono di tipo cinematico, infatti l'incastro inibisce, in qualsiasi istante t , lo spostamento $v = v(x, t)$ secondo l'asse y e la rotazione $v' = v'(x, t) \Rightarrow \varphi = \varphi(x, t)$.

Dunque, le condizioni ai limiti assumono la forma:

- In $x = 0 \rightarrow v(0, t) = 0 \quad \varphi(0, t) = 0$
- In $x = l \rightarrow v(l, t) = 0 \quad \varphi(l, t) = 0$

Per l'espressione che definisce il moto trasversale di una trave:

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t - \varphi)$$

Essendo in generale al variare del tempo t , $\cos(\omega t - \varphi) \neq 0$, le condizioni al contorno in termini di spostamento $v = v(x, t)$ e di rotazione $\varphi = \varphi(x, t)$ si possono esprimere attraverso i valori assunti dalla funzione di forma $V(x)$ e dalla sua derivata $V'(x) = \frac{dV(x)}{dx}$.

Si hanno quindi le seguenti condizioni sulle funzioni di forma:

- $\ln x = 0 \rightarrow V(0) = 0 \quad V'(0) = 0$
- $\ln x = l \rightarrow V(l) = 0 \quad V'(l) = 0$

Per le condizioni al contorno l'espressione della funzione di forma $V(x)$ e della sua derivata prima $V'(x)$ risultano:

- $\ln x = 0$

$$V(0) = C_1 + C_3 = 0$$

$$V'(0) = \lambda(C_2 + C_4) = 0$$

Si giunge a tale risultato tenendo conto che le funzioni seno iperbolico $\sinh x$ e coseno iperbolico $\cosh x$, sono definite come segue:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- $\ln x = l$

$$V(l) = C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l + C_3 \cosh \lambda l + C_4 \sinh \lambda l = 0$$

$$V'(l) = \lambda (-C_1 \sin \lambda l + C_2 \cos \lambda l + C_3 \sinh \lambda l + C_4 \cosh \lambda l) = 0$$

Da cui:

- $\ln x = 0$

$$C_1 + C_3 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_3$$

$$C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_4$$

- $\ln x = l$

$$V(l) = C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l + C_3 \cosh \lambda l + C_4 \sinh \lambda l = 0$$

$$\frac{V'(l)}{\lambda} = -C_1 \sin \lambda l + C_2 \cos \lambda l + C_3 \sinh \lambda l + C_4 \cosh \lambda l = 0$$

Si procede sostituendo $C_3 = -C_1$ e $C_4 = -C_2$ sia in $V(l)$ e $V'(l)$ e si ottiene:

$$V(l) = C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l - C_1 \cosh \lambda l - C_2 \sinh \lambda l = 0$$

$$V'(l) = -C_1 \sin \lambda l + C_2 \cos \lambda l - C_1 \sinh \lambda l - C_2 \cosh \lambda l = 0$$

Si raccolgono i coefficienti C_1 e C_2 :

$$V(l) = C_1 (\cos \lambda l - \cosh \lambda l) + C_2 (\sin \lambda l - \sinh \lambda l) = 0$$

$$V'(l) = C_1 (-\sin \lambda l - \sinh \lambda l) + C_2 (\cos \lambda l - \cosh \lambda l) = 0$$

Il sistema di queste due equazioni ammette una soluzione diversa da quella banale (soluzione ovvia) se e solo se è nullo il determinante della matrice dei coefficienti C_1 e C_2 :

$$V(l) = C_2(\sin \lambda l - \sinh \lambda l) + C_1(\cos \lambda l - \cosh \lambda l) = 0$$

$$V'(l) = +C_2(\cos \lambda l - \cosh \lambda l) + C_1(-\sin \lambda l - \sinh \lambda l) = 0$$

Da cui:

$$\begin{vmatrix} \sin \lambda l - \sinh \lambda l & \cos \lambda l - \cosh \lambda l \\ \cos \lambda l - \cosh \lambda l & -\sin \lambda l - \sinh \lambda l \end{vmatrix} = 0$$

Si procede sviluppando il determinante al fine di ottenere l'equazione delle frequenze per la trave doppiamente incastrata.

$$\det\{(\sin \lambda l - \sinh \lambda l) \cdot (-\sin \lambda l - \sinh \lambda l) - [(\cos \lambda l - \cosh \lambda l) \cdot (\cos \lambda l - \cosh \lambda l)]\} = 0$$

$$\det\{-\sin^2 \lambda l - \sin \lambda l \sinh \lambda l + \sinh \lambda l \sin \lambda l + \sinh^2 \lambda l - [\cos^2 \lambda l - \cos \lambda l \cosh \lambda l - \cosh \lambda l \cos \lambda l + \cosh^2 \lambda l]\} = 0$$

$$\det\{-\sin^2 \lambda l - \sin \lambda l \sinh \lambda l + \sinh \lambda l \sin \lambda l + \sinh^2 \lambda l - \cos^2 \lambda l + \cos \lambda l \cosh \lambda l + \cosh \lambda l \cos \lambda l - \cosh^2 \lambda l\} = 0$$

A questo punto si tiene conto di due identità fondamentali della trigonometria, ossia:

$$\sin^2 \lambda l + \cos^2 \lambda l = 1 \Rightarrow -\sin^2 \lambda l - \cos^2 \lambda l = -1$$

$$\cosh^2 \lambda l - \sinh^2 \lambda l = 1 \Rightarrow \sinh^2 \lambda l - \cosh^2 \lambda l = -1$$

E sostituendo nel determinante si ottiene:

$$\det\{-1 + 2(\cos \lambda l \cosh \lambda l) - 1\} = 0$$

$$\det\{2(\cos \lambda l \cosh \lambda l) - 2\} = 0$$

$$2(\cos \lambda l \cosh \lambda l) = 2$$

Da cui l'equazione delle frequenze della trave in esame doppiamente incastrata assume l'aspetto:

$$\cos \lambda l \cosh \lambda l = 1$$

Tale equazione è analoga anche per una trave avente gli estremi liberi.

L'equazione delle frequenze, $\cos \lambda l \cosh \lambda l = 1$ è un'equazione trascendentale non lineare e non ha una soluzione analitica espressa in termini di funzioni elementari. Tuttavia, si cerca una soluzione grafica, rappresentando il lato sinistro della equazione come una funzione di λl e individuando i punti di intersezione.

Si riporta di seguito il plot delle funzioni al fine di ottenere la soluzione grafica cercata.

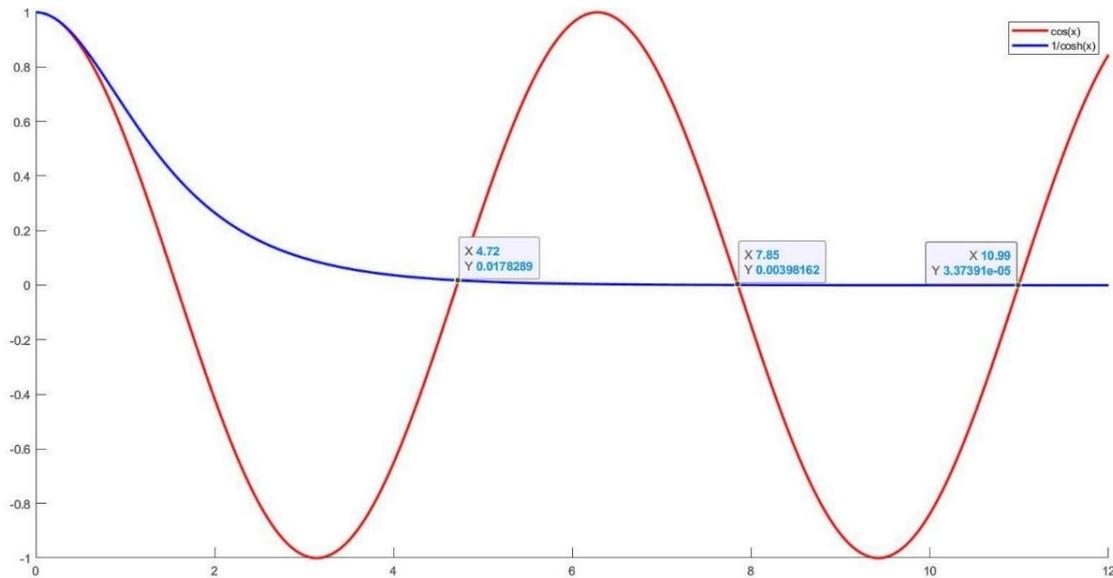


Figura 1.14: Soluzione grafica con plot delle funzioni

Le soluzioni dell'equazione caratteristica risultano del tipo:

$$\begin{aligned}\lambda_1 l &= 4,730 \\ \lambda_2 l &= 7,853 \\ \lambda_3 l &= 10,996 \\ \lambda_4 l &= 14,137 \\ \lambda_n l &= \frac{2n + 1}{2} \pi\end{aligned}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori o valori caratteristici.

La sostituzione di ciascuna delle radici precedentemente determinate, nella formula:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}} = (\lambda_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

fornisce le frequenze naturali ω_n , dove il pedice n denota l'ordine delle frequenze:

$$\omega_1 = (\lambda_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}} = (4,730)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

$$\omega_2 = (\lambda_2 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}} = (7,853)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

$$\omega_3 = (\lambda_3 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}} = (10,996)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

$$\omega_4 = (\lambda_4 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}} = (14,137)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

Note quindi le frequenze angolari ω_n ($n = 1,2,3,4 \dots$), è possibile determinare le frequenze cicliche f_n ($n = 1,2,3,4 \dots$), dalla formula:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Da cui:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}; f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}; f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi}; f_4 = \frac{\omega_4}{2\pi};$$

Si procede determinando le funzioni di forma $V_n(x)$, corrispondenti a ω_n , le quali descrivono l'andamento teorico dei modi naturali di vibrare per la trave a sezione costante incastrata agli estremi in esame.

L'espressione della funzione di forma $V(x)$

$$V(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x + C_3 \cosh \lambda x + C_4 \sinh \lambda x$$

per le condizioni ai limiti in $x = 0$, ossia:

$$C_1 = -C_3$$

$$C_2 = -C_4$$

diventa:

$$V(x) = C_1 (\cos \lambda x - \cosh \lambda x) + C_2 (\sin \lambda x - \sinh \lambda x)$$

Dall'espressione di $V(x)$ in $x = l$,

$$V(l) = C_1 (\cos \lambda l - \cosh \lambda l) + C_2 (\sin \lambda l - \sinh \lambda l)$$

Si ricava una costante in funzione dell'altra e sostituendo in $V(x)$, si determina l'equazione della generica forma modale $V_n(x)$, corrispondenti a ω_n .

Da $V(l)$, si ha:

$$C_2 (\sin \lambda l - \sinh \lambda l) = -C_1 (\cos \lambda l - \cosh \lambda l)$$

$$\frac{C_2}{C_1} (\sin \lambda l - \sinh \lambda l) = -\frac{C_2}{C_1} (\cos \lambda l - \cosh \lambda l)$$

$$\frac{C_2}{C_1} (\sin \lambda l - \sinh \lambda l) = (\cosh \lambda l - \cos \lambda l)$$

$$\frac{C_2 (\sin \lambda l - \sinh \lambda l)}{C_1 (\sin \lambda l - \sinh \lambda l)} = \frac{(\cosh \lambda l - \cos \lambda l)}{(\sin \lambda l - \sinh \lambda l)}$$

Si ottiene dunque per il generico λ_n , il seguente rapporto tra le costanti:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l}{\sin \lambda_n l - \sinh \lambda_n l}$$

Da cui l'espressione della generica funzione di forma $V_n(x)$, assume l'aspetto:

$$V_n(x) = C_1 [\cos \lambda_n x - \cosh \lambda_n x + \frac{\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l}{\sin \lambda_n l - \sinh \lambda_n l} (\sin \lambda_n x - \sinh \lambda_n x)]$$

Si indica con $\alpha_n = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\cosh \lambda_n l - \cos \lambda_n l}{\sin \lambda_n l - \sinh \lambda_n l}$, il rapporto tra le costanti in corrispondenza della frequenza naturale ω_n , quindi si può scrivere $V_n(x)$ come:

$$V_n(x) = C_1 [\cos \lambda_n x - \cosh \lambda_n x + \alpha_n (\sin \lambda_n x - \sinh \lambda_n x)]$$

Da cui si evince che la funzione di forma $V_n(x)$, corrispondente a ω_n , è definita a meno della costante C_1 che rappresenta l'ampiezza dell' n -esimo modo di vibrare. Tale ampiezza dipende dalle condizioni iniziali imposte.

Si riportano di seguito gli andamenti delle prime quattro forme modali ottenute mediante uno script Matlab. Il codice, calcola e plotta i primi 4 modi di vibrazione di una trave incastro-incastro. Le forme modali sono calcolate utilizzando la funzione seno normalizzata. Ogni forma modale viene rappresentata con un colore diverso per facilitare la distinzione.

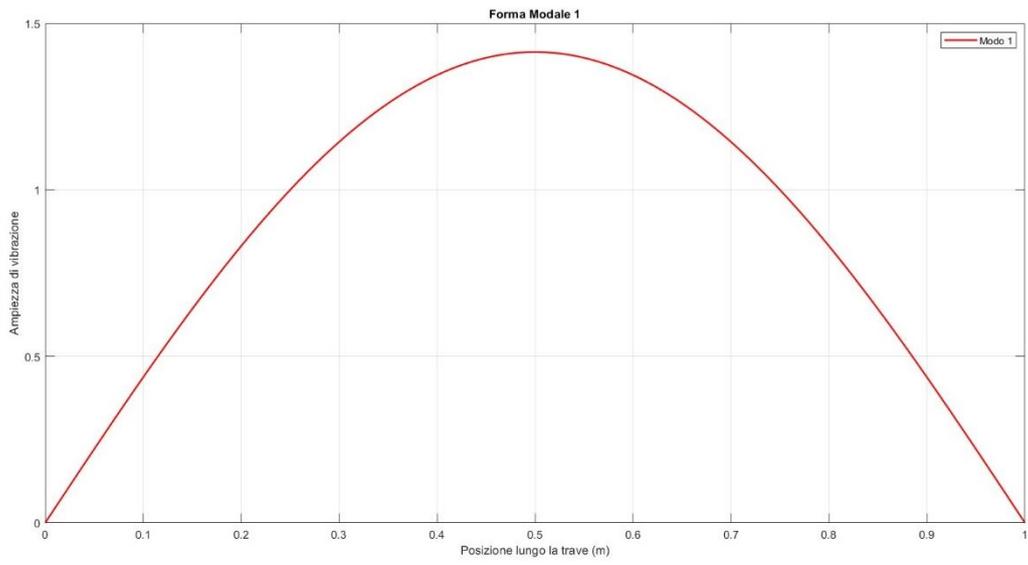


Figura 1.15: Modo 1, trave incastro-incastro

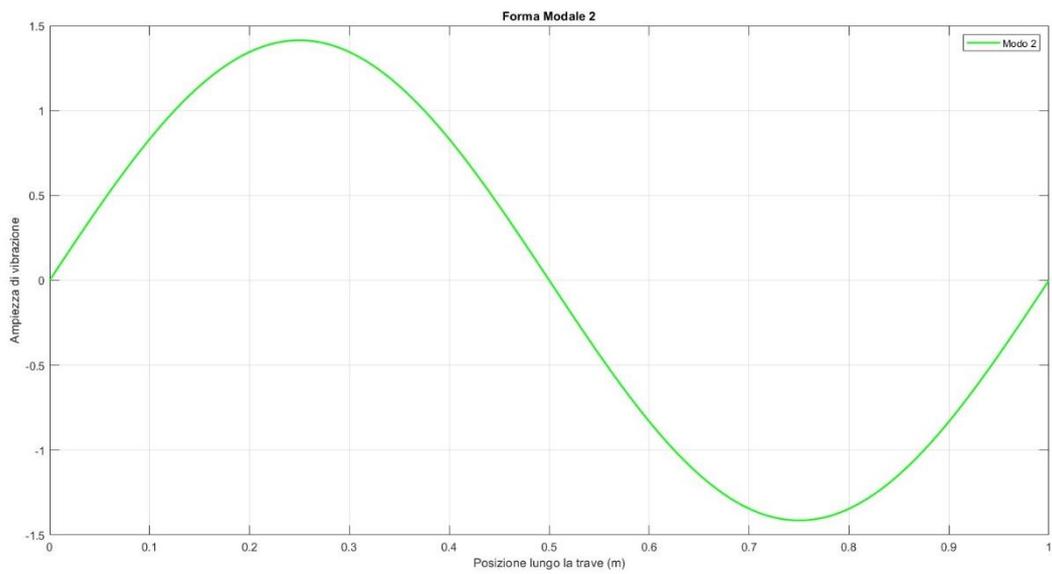


Figura 1.16: Modo 2, trave incastro-incastro

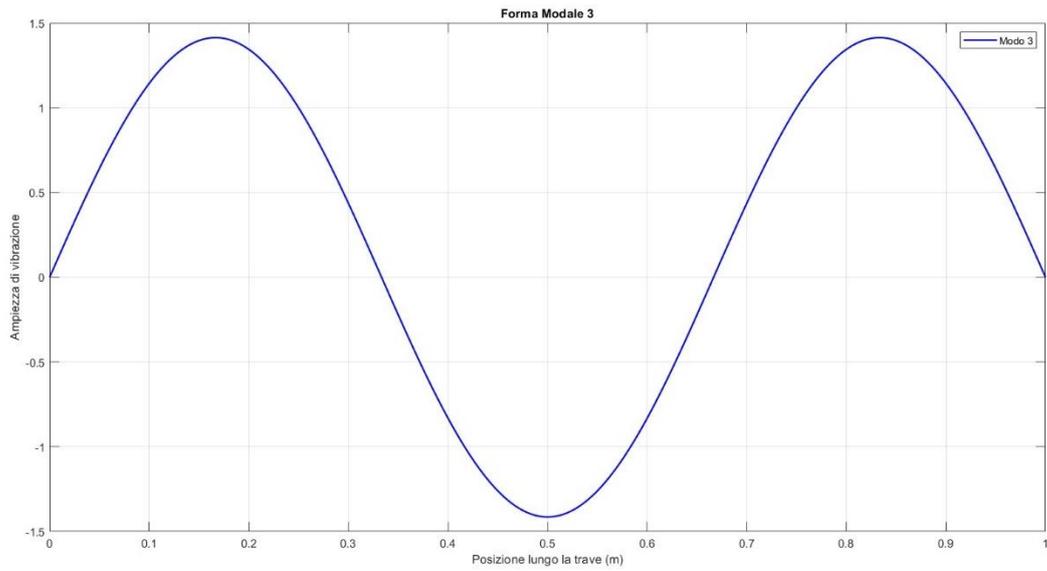


Figura 1.17: Modo 3, trave incastro-incaastro

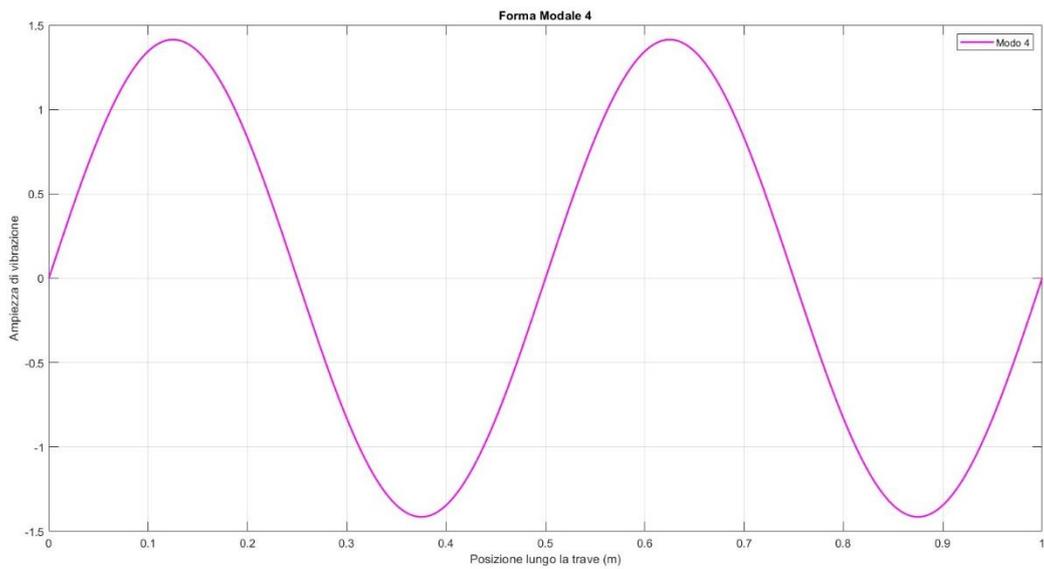


Figura 1.18: Modo 4, trave incastro-incaastro

Per visualizzare un quadro globale rappresentativo per una trave doppiamente incastrata agli estremi si riporta di seguito in Figura 1.19, le prime quattro forme modali sovrapposte.

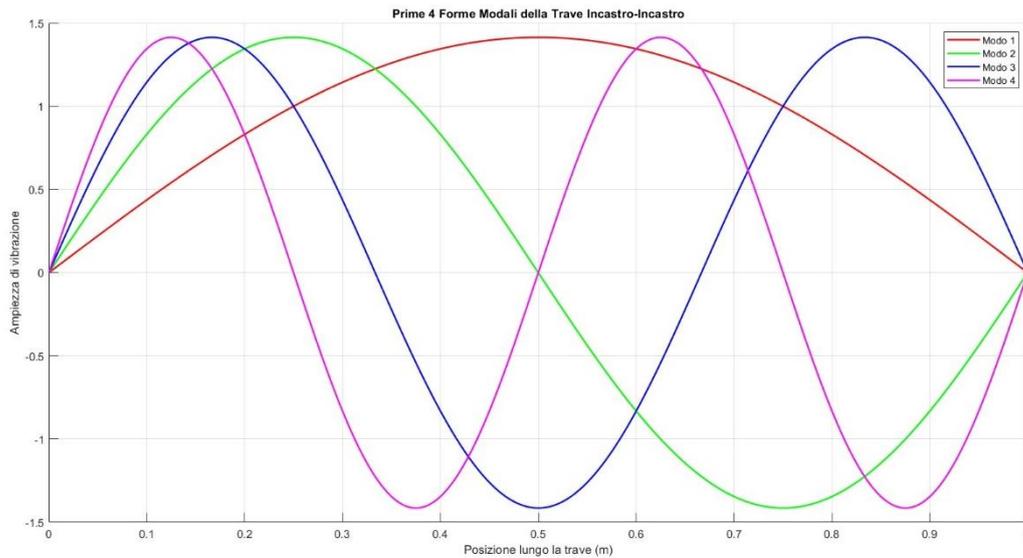


Figura 1.19: Forme Modali trave incastrata agli estremi

1.3 CASO STUDIO

Oggetto di studio è una trave in alluminio, lunga 3,01 m a sezione costante quadrata di dimensioni 0,02x0,02 m.

Ai fini di effettuare lo studio su una trave doppiamente incastrata agli estremi si è proceduto alla riproduzione in laboratorio dei vincoli d'incastro, grazie all'utilizzo di due piastre metalliche sovrapposte ed opportunamente ammorsate con bulloni.

Si posizionano le piastre, di lunghezza 0,240 m, ad una distanza di 0,06 m dall'estremo libero sia a destra che a sinistra tale da avere una lunghezza libera d'inflessione della trave pari a 2,4 m.

Si riporta di seguito la trave in alluminio incastrata agli estremi, a sezione costante oggetto di studio e si propongono inoltre, degli zoom illustrativi dei vincoli realizzati e la misurazione della sezione della trave.



Figura 1.20: Trave in alluminio incastrata agli estremi;



Figura 1.21: Trave in alluminio incastro- incastro;

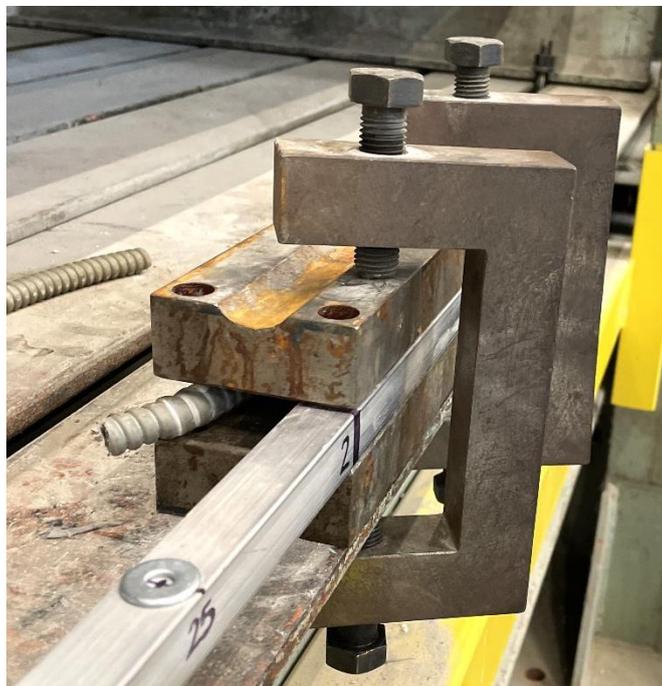


Figura 1.22: Riproduzione in laboratorio del vincolo;



Figura 1.23: Lunghezza piastra incastro;



Figura 1.24: Zoom incastro a sinistra;



Figura 1.25: Zoom incastro a destra;

Per la misurazione della sezione della trave si è fatto uso in laboratorio di due strumenti di misura: il flessometro ed il calibro digitale.



Figura 1.26: Misura sezione con flessometro;

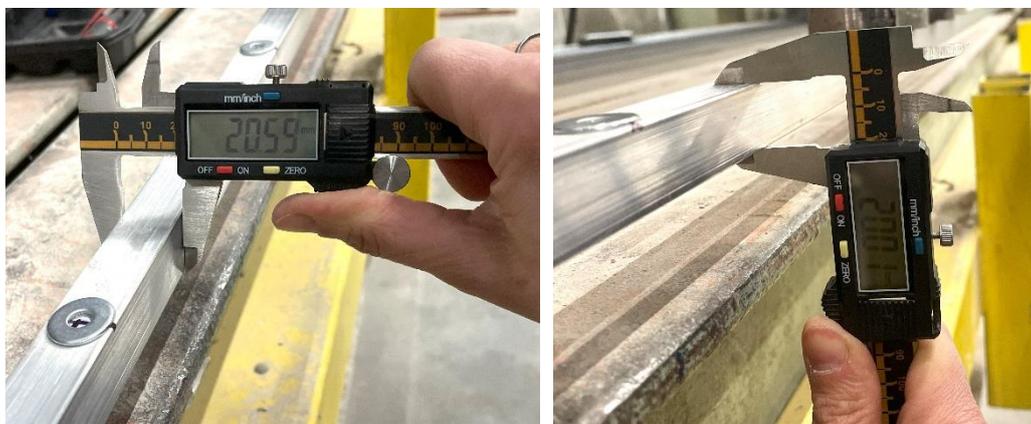


Figura 1.27: Misura sezione con calibro digitale;

Il flessometro, comunemente conosciuto come metro a nastro, è uno strumento utilizzato per misurare lunghezze e distanze. È composto da un nastro di metallo flessibile, di solito realizzato in acciaio, che è avvolto in una custodia portatile. Il nastro ha delle tacche incise che indicano le unità di misura, solitamente in millimetri e centimetri. È dotato di un meccanismo a molla che permette al nastro di ritirarsi automaticamente nella custodia.

Il calibro, invece, è uno strumento di precisione utilizzato per misurare lo spessore, il diametro interno ed esterno e la profondità di oggetti.

Esistono diversi tipi di calibri, tra cui:

- **Calibro a corsoio**: è composto da un'asta principale con una scala graduata e un corsoio mobile con una seconda scala chiamata nonio. La combinazione delle due scale permette misurazioni molto precise.
- **Calibro digitale**: simile al calibro a corsoio, ma dotato di un display digitale che mostra direttamente la misurazione, facilitando la lettura.
- **Calibro micrometrico**: utilizzato per misurazioni estremamente precise di piccole dimensioni, funziona mediante una vite micrometrica che permette di ottenere letture con alta precisione.

I calibri sono strumenti utilizzati dove è necessaria una misurazione precisa delle dimensioni degli oggetti.

Si riportano le misurazioni effettuate con entrambe le strumentazioni.

Inoltre, al fine di valutare la densità della trave in oggetto, è necessario conoscere la massa ed il volume.

La densità ρ è definita come la massa per unità di volume e si calcola con la formula:

$$\rho = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

Per determinare la densità della trave si utilizza una bilancia per avere la misura della massa in kg e si procede al calcolo del volume conoscendo tutte le dimensioni della trave, attraverso la formula:

$$V = L \times B \times H$$

Si riporta la misurazione della massa effettuata in laboratorio.



Figura 1.28: Misurazione della massa;



Figura 1.29: Valore della massa;

Nota la misura della massa: $M = 3,3 \text{ kg}$, si procede grazie all'utilizzo di Excel, prima al calcolo del volume ed in seguito della densità.

Nel caso in esame il volume risulta:

$$V = L \times B \times H = 3,01 \times 0,02 \times 0,02 = 0,0012 \text{ m}^3$$

Di conseguenza, la densità:

$$\rho = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} = \frac{3,3}{0,0012} = 2740,86 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Si riporta una tabella esplicativa dei risultati ottenuti.

Lunghezza_L	3,01	[m]
Massa_M	3,3	[kg]
Volume_V	0,001204	[m ³]
Densità_ρ = M/V	2740,864	[kg/m ³]

Tabella 1.1: Calcolo densità con Excel;

1.3.1 Trattazione analitica trave incastrata agli estremi

In riferimento alla trave oggetto di studio sperimentale, si valutano analiticamente le pulsazioni proprie ω_n e le frequenze naturali f_n servendoci delle formule precedentemente dimostrate:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}} = (\lambda_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Si calcolano i valori analitico-teorici al fine di effettuare successivamente un confronto con i dati numerici e sperimentali ottenuti rispettivamente dalla modellazione con un software agli elementi finiti e dalle prove sperimentali in laboratorio.

Note le caratteristiche geometriche, riassunte di seguito:

Proprietà Geometriche Trave Alluminio		
L	2,4	[m]
B	0,02	[m]
H	0,02	[m]
A	0,0004	[m ²]

Tabella 1.2: Proprietà geometriche trave;

Si determinano le proprietà meccaniche per una trave in alluminio a sezione quadrata:

- Modulo Elastico Alluminio $\rightarrow E = 70000 \text{ MPa}$

- *Momento Inerzia* $\rightarrow I = \frac{H^4}{12} = \frac{(0,02)^4}{2} m^4$
- *Densità* $\rightarrow \rho = \frac{massa}{volume} = \frac{3,3}{0,0012} \frac{kg}{m^3}$

I calcoli, effettuati in Excel, si propongono tabellati nella Figura 1.3 sottostante.

Proprietà Meccaniche Trave Alluminio		
E	7E+10	[N/m ²]
I	1,33E-08	[m ⁴]
ρ	2740,864	[kg/m ³]

Tabella 1.3: Proprietà meccaniche trave;

Caratterizzata la trave in esame, si esegue il calcolo analitico delle pulsazioni proprie ω_n e delle frequenze naturali f_n .

Allo scopo di applicare la formulazione analitica, si riassumono in tabella le radici ottenute dall'equazione caratteristica, precedentemente dimostrata nel 1.2.2, dove $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori o valori caratteristici.

λl_tabellati	
λ₁*L	4,73
λ₂*L	7,853
λ₃*L	10,996
λ₄*L	14,137
λ₅*L	17,27876
λ₆*L	20,420352

Tabella 1.4: Soluzioni equazione caratteristica;

La sostituzione di ciascuna delle radici precedentemente determinate, nella formula:

$$\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu A}} = (\lambda_n l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

fornisce le frequenze naturali ω_n , dove il pedice n denota l'ordine delle frequenze:

$$\omega_1 = (\lambda_1 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}} = (4,730)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m} l^4}}$$

$$\omega_2 = (\lambda_2 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}} = (7,853)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

$$\omega_3 = (\lambda_3 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}} = (10,996)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

$$\omega_4 = (\lambda_4 l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}} = (14,137)^2 \sqrt{\frac{EI}{\bar{m}l^4}}$$

Si riportano i calcoli, eseguiti e tabellati in Excel:

Pulsazioni Naturali ω		
ω_1	113,330	[1/s] o [Hz]
ω_2	312,387	[1/s] o [Hz]
ω_3	612,480	[1/s] o [Hz]
ω_4	1012,364	[1/s] o [Hz]
ω_5	1512,333	[1/s] o [Hz]
ω_6	2112,266	[1/s] o [Hz]

Tabella 1.5: Valori pulsazioni naturali

Note quindi le frequenze angolari ω_n ($n = 1,2,3,4 \dots$), è possibile determinare le frequenze cicliche f_n ($n = 1,2,3,4 \dots$), dalla formula:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

Da cui, i valori delle frequenze analitiche della trave in oggetto risultano:

Frequenze		
f_1	18,037	[1/s] o [Hz]
f_2	49,718	[1/s] o [Hz]
f_3	97,479	[1/s] o [Hz]
f_4	161,123	[1/s] o [Hz]
f_5	240,695	[1/s] o [Hz]
f_6	336,178	[1/s] o [Hz]

Tabella 1.5: Frequenze analitiche trave alluminio a sezione quadrata

Capitolo 2

TRATTAZIONE NUMERICA

2. MODELLAZIONE FEM

2.1 RICHIAMI DI ANALISI MODALE

Si sviluppa un modello numerico utilizzando il software agli elementi finiti Straus7. Si conduce un'Analisi Modale, avviando sul software il comando Natural Frequency.

L'Analisi Modale rappresenta una procedura convenzionale di valutazione degli effetti dell'azione sismica e viene effettuata con riferimento alla determinazione dei modi di vibrazione della struttura considerata in campo elastico.

Il calcolo delle frequenze modali di una struttura è di fondamentale importanza per capire quali azioni esterne possono mandare il sistema in risonanza. Tale fenomeno, infatti, avviene quando la struttura subisce un'eccitazione la cui frequenza risulta pari alla sua frequenza naturale. In questo caso, l'azione esterna viene amplificata dall'oscillazione risonante della struttura, portando al collasso della struttura se lo smorzamento non è sufficientemente elevato. In dinamica delle strutture il sistema più semplice è l'oscillatore semplice, ovvero un modello a 1GDL con rigidità k , massa m e nessun smorzamento. Quando si impone uno spostamento e si lascia oscillare il sistema senza l'applicazione di carichi esterni, l'oscillatore inizierà a vibrare con una frequenza naturale data da:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Un sistema con più gradi di libertà, invece, avrà un certo numero di frequenze naturali e per ciascuna di esse esisterà il corrispondente modo di vibrare, chiamato anche forma modale. Sia le frequenze naturali che le corrispondenti forme modali sono proprietà del sistema, ossia completamente determinate dalle proprietà del sistema ed in particolare dalla matrice di massa e rigidità globali del sistema. Alcuni parametri che possono invece modificare le frequenze naturali sono eventuali carichi o tensioni imposte.

Matematicamente, il calcolo delle frequenze naturali e delle forme modali di un sistema consiste nel cercare la soluzione di un problema agli autovalori.

Gli autovalori ottenuti rappresentano le frequenze naturali, mentre gli autovettori corrispondono alle forme modali. Conoscere le frequenze naturali di una struttura è di particolare importanza in quanto semplifica notevolmente ogni tipo di analisi dinamica basata sul metodo di sovrapposizione modale. Quest'ultimo consiste nel disaccoppiare le equazioni di equilibrio di un sistema dinamico, che in origine erano interdipendenti, tramite un'opportuna trasformazione di coordinate. Come matrice di trasformazione viene usata proprio la matrice delle forme modali. In particolare, l'equazione di equilibrio per una struttura non smorzata e senza carichi esterni assume la seguente forma:

$$M\ddot{u} + Ku = 0$$

Dove:

- M : matrice di massa globale;
- K : matrice di rigidità globale;
- u : vettore degli spostamenti nodali;
- \ddot{u} : derivata seconda di u rispetto al tempo.

Considerando una forma armonica della soluzione del tipo:

$$u = \varphi \cos(\omega t)$$

con φ : vettore delle forme modali;

Dunque, l'equazione dell'oscillatore semplice si semplifica nella forma di un problema agli autovalori generalizzato:

$$K\varphi = \omega M\varphi$$

Risolvendo il sistema di equazioni è possibile quindi calcolare:

- Autovalori: frequenze naturali.
- Autovettori: modi di vibrare.

Questo sistema di equazioni è risolto con il *Subspace Iteration Method*, fornendo così le frequenze naturali e i modi di vibrare, rispettivamente autovalori e autovettori della struttura in esame. Si precisa che φ non contiene dei veri e propri spostamenti in senso fisico ma è solo un vettore di valori di spostamento che rappresentano la forma modale.

In Straus7 ogni autovettore è scalato così che la “massa modale” sia pari a 1, ossia φ è tale che:

$$\varphi^T m \varphi = d$$

2.1.1. Matrice di Massa

La matrice di massa M di una struttura esprime come sono distribuite le masse lungo la stessa, così come accade per la matrice di rigidezza K per quanto riguarda la distribuzione delle rigidezze degli elementi del modello. Tuttavia, mentre la matrice di rigidezza entra in gioco sia in campo statico che in campo dinamico, la matrice di massa assume un ruolo fondamentale solo quando c'è bisogno di considerare gli effetti inerziali, ovvero quando si effettuano analisi dinamiche.

In un sistema fisico reale la massa è distribuita su tutte le componenti in modo continuo, mentre in un modello agli elementi finiti può essere rappresentata solamente ai nodi, così da richiedere che venga discretizzata e distribuita tra i nodi della mesh.

La matrice di massa si ottiene proprio a seguito del processo di discretizzazione al livello di elemento finito.

Nel caso più generale, esistono 6 componenti di massa, ovvero 3 traslazionali e 3 rotazionali legate ai gradi di libertà nodali.

La matrice di massa globale è poi ottenuta assemblando le matrici di massa dei singoli elementi fino ad avere la struttura completa. A seconda del livello di discretizzazione che si vuole avere, la matrice di massa può essere ottenuta in due modi:

- Matrice di massa *Consistent* è una matrice piena.
- Matrice di massa *Lumped* è una matrice diagonale.

Matrice Di Massa Consistent ossia “coerente”, calcolata secondo l’espressione:

$$M_e = \int_{V_e} (N^T \rho N) dV$$

Dove:

- V_e è il dominio di riferimento generico dell’elemento
- $\rho(x, y, z)$ è la densità del sistema (eventualmente variabile nel dominio)
- $N(x, y, z)$ è la matrice delle funzioni di forma.

L’integrale è calcolato analiticamente o numericamente a seconda del tipo di elemento. Inoltre, per un sistema generico, la matrice di massa si può ottenere considerando la matrice di inerzia I , che contiene i contributi delle inerzie rotazionali e traslazionali ed è costruita a partire dal modello cinematico $d = A u$.

$$M_e = \int_{V_e} (N^T I N) dV$$

Il termine “Consistent” deriva dal fatto che le funzioni di forma N usate per calcolare la matrice di massa sono le stesse di quelle usate per la costruzione della matrice di rigidezza.

$$K = \int_B (DN)^T C (DN)^T dV$$

La matrice di massa risulterà piena, proprio perché include sia gli effetti delle inerzie traslazionali che di quelle rotazionali. I termini fuori diagonale

implicano che vi sia accoppiamento tra i vari gradi di libertà, in questo caso, infatti, un carico inerziale agente in una direzione relativa ad un grado di libertà produce un effetto su un altro grado di libertà.

Matrice Di Massa Lumped ossia “concentrata”, rappresenta la massa distribuita lungo un elemento concentrandola ai suoi nodi in modo che la somma delle masse nodali associate ai gradi di libertà traslazionali in tutte le direzioni, sia uguale alla massa totale dell’elemento.

In questo caso, quindi, non è presente alcuna inerzia rotazionale e nessun accoppiamento tra i vari gradi di libertà, ciò significa che la matrice di massa Lumped è diagonale. Per elementi di forma regolare, la matrice di massa Lumped si può ottenere in maniera intuitiva. Per esempio, nel caso di un elemento *plate* quadrato a 4 nodi, verrà assegnata 1/4 della massa totale dell’elemento ad ogni nodo. Nella maggior parte dei casi, un approccio con masse Lumped produrrà una soluzione meno accurata di quella che si otterrebbe utilizzando una matrice di massa Consistent, in particolare se la struttura presenta significative inerzie rotazionali, come nei problemi flessionali.

Si può migliorare notevolmente la soluzione ottenuta con approccio Lumped raffittendo la mesh. Sebbene la matrice di massa Consistent sia quella teoricamente più corretta, nella pratica le meshes contengono un numero di elementi sufficiente a far sì che i risultati ottenuti con approccio Lumped e Consistent siano comparabili.

Alla luce delle considerazioni sopracitate, nel caso in esame si esegue un’Analisi Modale considerando come matrice delle masse l’approccio Lumped, dato di default dal programma Straus7 all’avvio dell’analisi Natural Frequency.

2.2 MODELLAZIONE FEM DELLA TRAVE SANA

Si procede alla trattazione numerica grazie all’utilizzo del software di calcolo Straus7. Si vogliono calcolare le pulsazioni di una trave doppiamente

incastrata agli estremi, schematizzata come in figura, grazie all'utilizzo del programma Ftool:

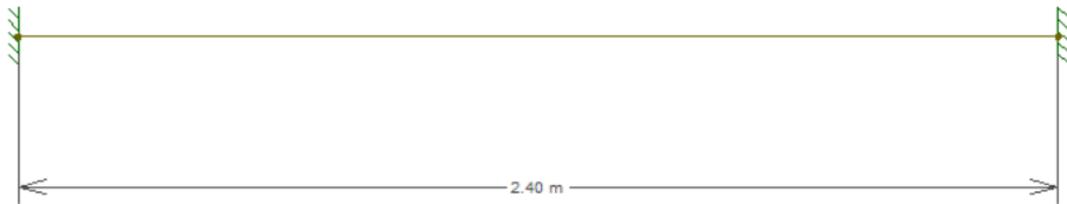


Figura 2.1: Trave incastrata agli estremi

Si modella con il software di calcolo Straus7, utilizzando esclusivamente elementi “Beam”. Si utilizza la geometria in oggetto ed il materiale viene scelto dalla libreria del calcolatore, tenendo conto delle proprietà meccaniche precedentemente determinate. In particolare, si ricorda che la l’elemento trave in esame ha una lunghezza libera d’inflessione pari a:

$L = 2400 \text{ mm}$ e presenta una sezione quadrata di dimensioni: $200 \times 200 \text{ mm}$.

All’apertura di un nuovo file, Straus7 richiede l’impostazione delle unità di misura, si adottano quelle del sistema internazionale SI che il programma propone di default al suo avvio.

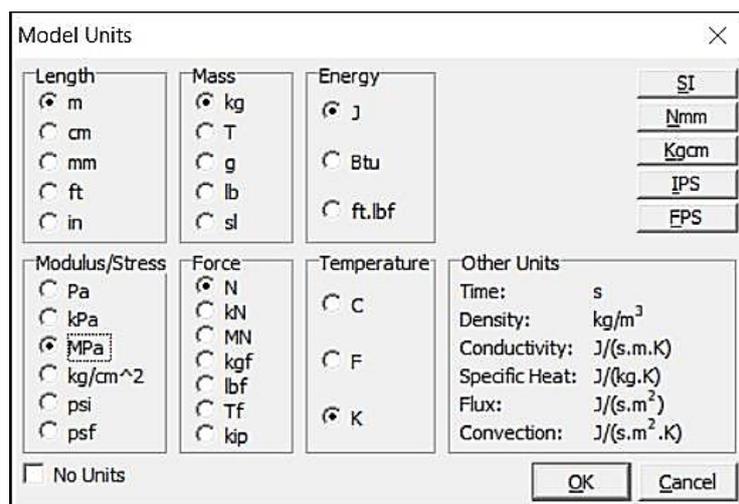


Figura 2.2: Impostazione delle unità di misura su Straus7

Si procede modellando inizialmente una mesh costituita esclusivamente da due nodi ed un solo elemento finito, per poi successivamente raffittire discretizzando il dominio in 3, 6, 12, 24 ,48 elementi.

Si propone la modellazione della trave con 2 nodi ed un solo elemento.

Si inseriscono i nodi in corrispondenza dei vincoli esterni.

Per l'inserimento dei nodi si utilizza il comando:

Create -> Node

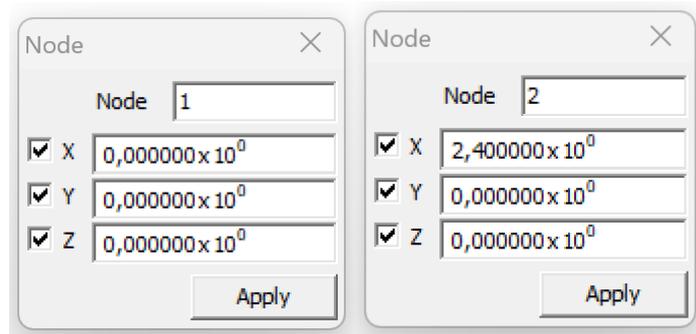


Figura 2.3: Inserimento nodi in Straus7;

Si assegnano le proprietà geometriche, meccaniche e del materiale attraverso il comando:

Property -> Beam

Per attribuire le caratteristiche del materiale si seleziona la sezione "Materials" e si sceglie dalla libreria Straus7 "Cast Aluminium Alloy: 520.0" modificando opportunamente la densità ed il modulo elastico coerentemente con quanto ottenuto sperimentalmente.

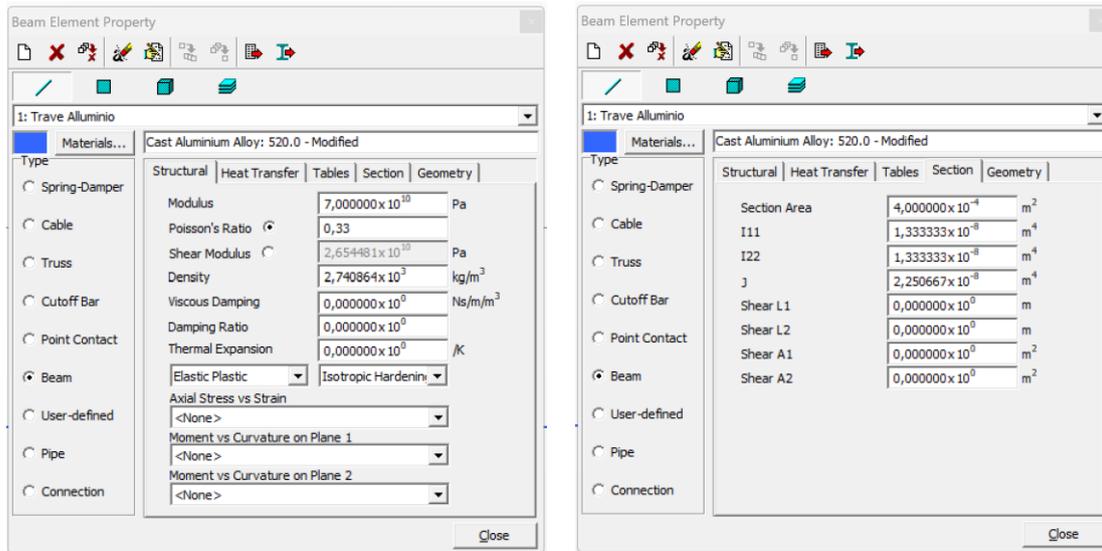


Figura 2.4: Finestre di attribuzione proprietà;

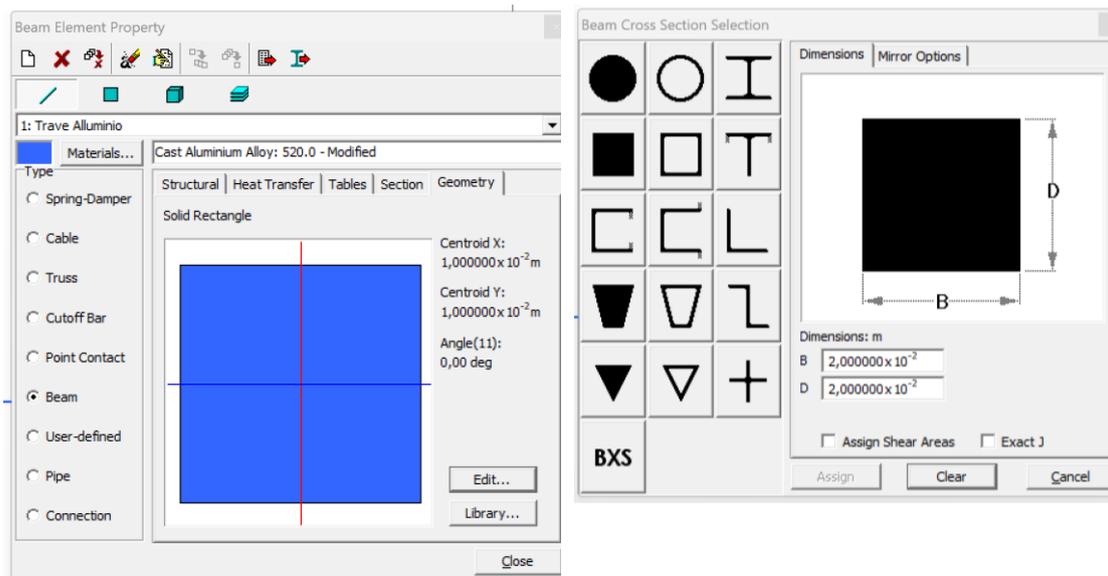


Figura 2.5: Finestre di attribuzione delle proprietà della sezione;

Al fine di utilizzare un modello alla Eulero-Bernoulli viene tolta la spunta dal flag “Assign Shear Areas” nella finestra di definizione della geometria della sezione. Si nota che i valori di Shear A1 e Shear A2 nella finestra delle proprietà, sono nulli, questo a conferma che il software modella la trave secondo la teoria alla Eulero-Bernoulli.

Una volta inseriti i nodi e definite le proprietà della sezione, si creano gli elementi collegando i nodi tramite il comando:

Create -> Element -> Beam2

Si utilizza “Beam 2” in quanto orienta automaticamente l’elemento con l’asse 2 del sistema di riferimento locale concorde con l’asse Y del sistema di riferimento globale.

Nel caso in esame, poiché la struttura risulta essere una trave piana caricata nel piano (2D), si definisce la bidimensionalità del problema bloccando le rotazioni attorno all’asse X e all’asse Y, e le traslazioni lungo l’asse Z.

Questo si effettua tramite il comando:

Load and Freedom Cases -> Global -> 2DBeam

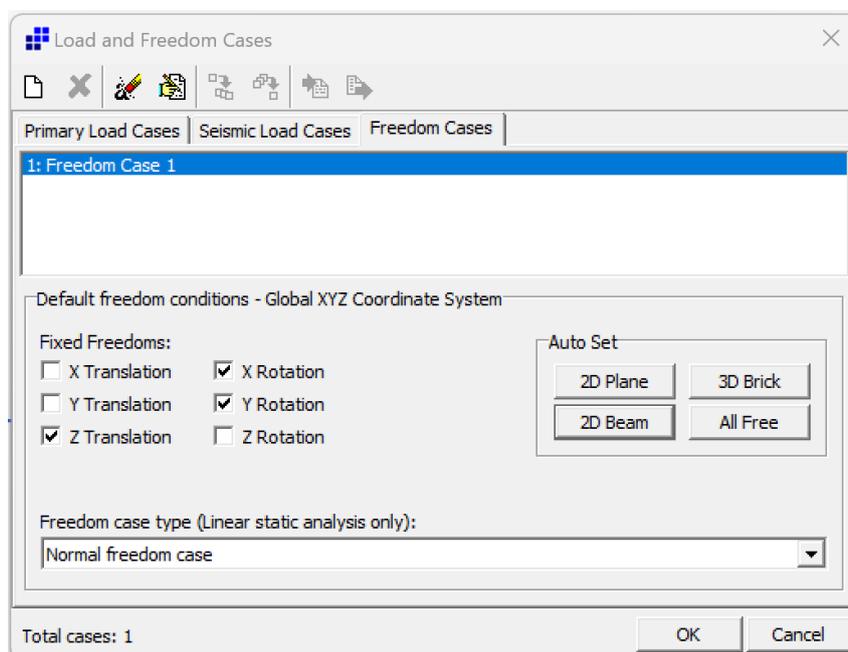


Figura 2.6: Finestra di assegnazione del Freedom Cases “2D Beam”;

Si ha ora una configurazione in cui la struttura ha 3 GDL (e non più 6), si procede al vincolamento considerando i soli spostamenti ammissibili nel piano.

Si posizionano gli incastri agli estremi impedendo gli spostamenti lungo X e Y e la rotazione attorno a Z

Per l’imposizione dei vincoli di estremità ai nodi si ricorre al comando:

Attributes -> Node -> Restrain

Si attribuiscono gli incastri alle estremità selezionando prima il nodo 1 e successivamente il nodo 2.

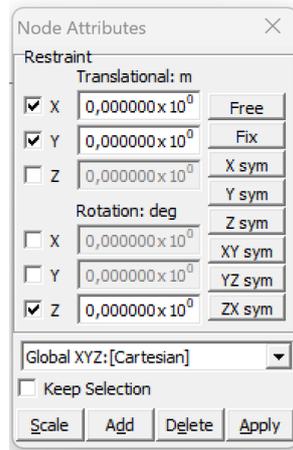


Figura 2.7: Finestra attribuzione dei vincoli;

Si riporta la modellazione ottenuta:

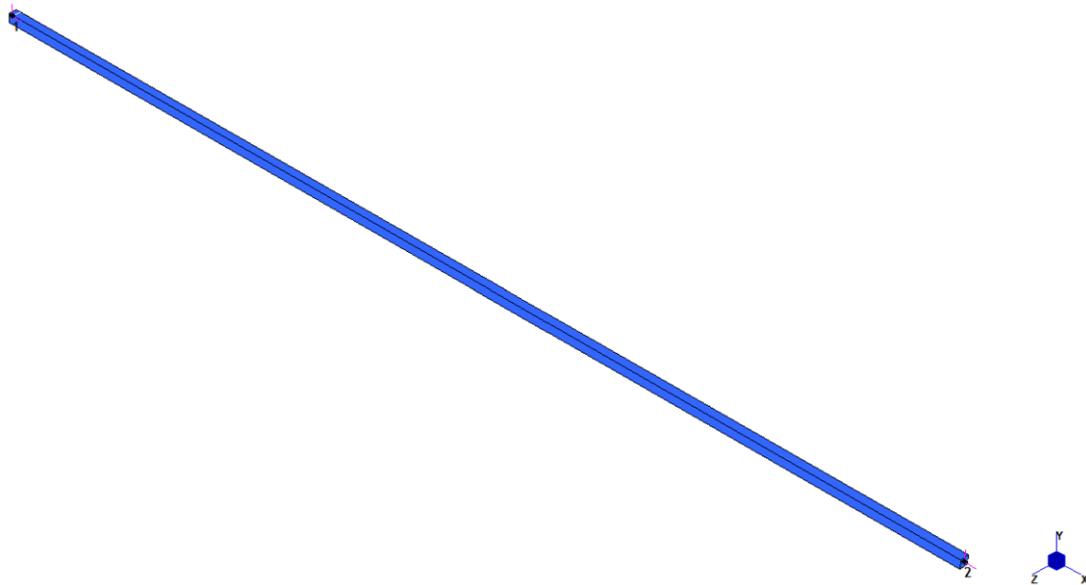


Figura 2.8: Modellazione trave, vista isometrica "Solid"



Figura 2.9: Modellazione trave, "Line" vista nel piano x-y;

Si è optato, nelle figure sovrastanti, sia per una visualizzazione nel formato "Solid" in vista isometrica grazie al quale è possibile osservare lo sviluppo tridimensionale della trave modellata, che per una visualizzazione "line" in vista nel piano x-y dove è possibile osservare l'asse interno della trave.

La mesh iniziale che modella la struttura è costituita da un solo elemento finito, successivamente viene progressivamente raffinata; in particolare, si

sceglie di raddoppiare di volta in volta il numero di elementi finiti che la compongono.

Si considerano 5 diverse discretizzazioni in 3,6,12,24,48 elementi.

Si esegue dapprima una copia del modello iniziale attraverso il comando:

Tools -> Copy -> By Increments

Si procede alla suddivisione delle copie negli elementi desiderati con:

Tools -> Subdivide

Le copie vengono discretizzate tramite il comando:

Tools · Subdivide

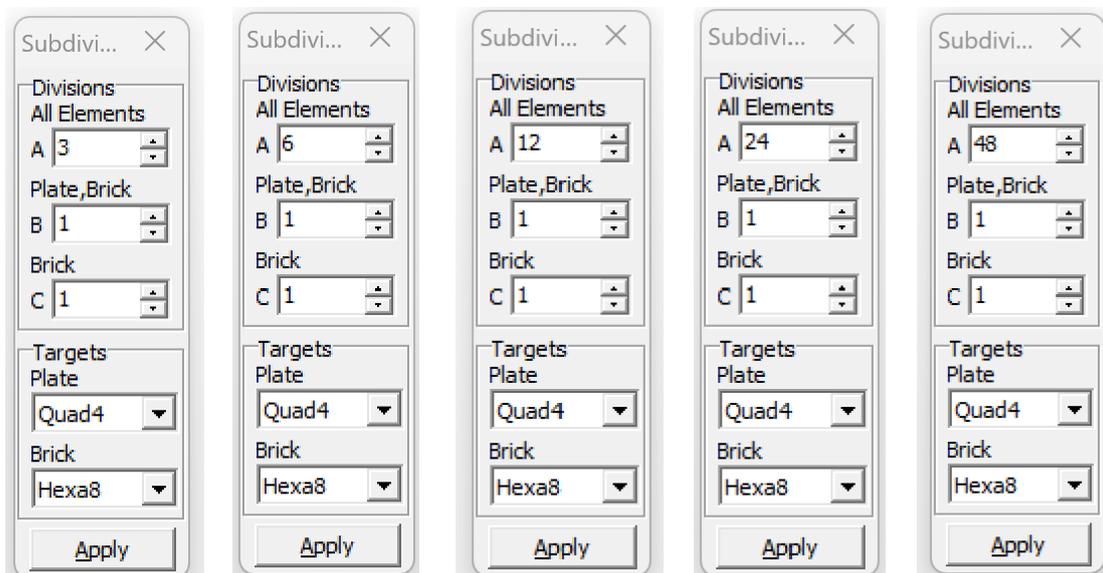


Figura 2.10: Finestre comando di suddivisione;

Si riporta la modellazione con le diverse discretizzazioni ottenute:



Figura 2.11: Modello trave discretizzata con 3 elementi finiti;



Figura 2.12: Modello trave discretizzata con 6 elementi finiti;



Figura 2.13: Modello trave discretizzata con 12 elementi finiti;

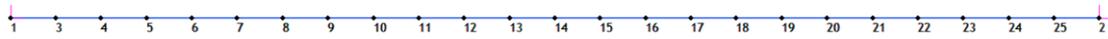


Figura 2.14: Modello trave discretizzata con 24 elementi finiti;

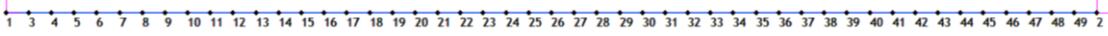


Figura 2.15: Modello trave discretizzata con 48 elementi finiti;

2.2.1 Analisi Natural Frequency

Si procede con l'effettuare un'analisi dinamica lineare che permette di calcolare le caratteristiche dinamiche di una struttura tramite un'analisi lineare. È un'analisi che permette di ottenere le frequenze naturali del sistema, essa infatti non restituisce le reazioni vincolari, gli strain o gli stress.

In Straus7 l'Analisi Dinamica Lineare viene eseguita tramite il comando:

Solver -> Natural Frequency.

L'interfaccia grafica permette di inserire il numero di modi di vibrare e la tipologia di matrice di massa, Lumped o Consistent, con cui ricavare la soluzione.

Nel caso in esame l'analisi si esegue con matrice di massa Lumped e imponendo al calcolatore di fornire in output i primi 6 modi di vibrare.

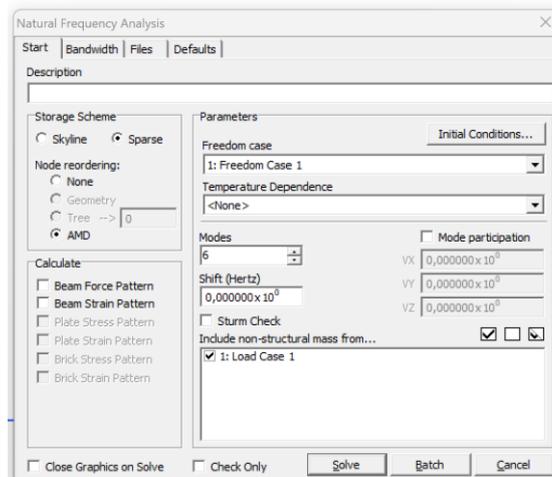


Figura 2.16: Finestra avvio Natural Frequency Analysis;

Si riportano tabellati in Excel i valori delle 6 frequenze ottenute con l'Analisi Dinamica per ogni discretizzazione modellata.

	f_3 elementi		f_6 elementi		f_12 elementi		f_24 elementi		f_48 elementi	
f_1	17,773		18,0297		18,037		18,0373		18,0373	
f_2	41,3007		49,4973		49,7124		49,7202		49,7205	
f_3	1005,39	[Hz]	95,1422	[Hz]	97,4021	[Hz]	97,4689	[Hz]	97,472	[Hz]
f_4	1741,39		147,153		160,76		161,111		161,126	
f_5	/		187,346		239,256		240,64		240,692	
f_6	/		1040,86		331,583		336,018		336,169	

Tabella 2.1: Valori frequenze per ogni modello di trave discretizzata;

2.2.2 Analisi di Convergenza

Al fine di effettuare un'analisi di convergenza si procede a valutare anche il valore di scarto che intercorre tra i valori numerici delle frequenze ottenute con le varie discretizzazioni. I risultati sono:

	$\Delta(f_{6el} - f_{3el})$		$\Delta(f_{12el} - f_{6el})$		$\Delta(f_{24el} - f_{12el})$		$\Delta(f_{48el} - f_{24el})$	
f_1	0,2567		0,0073		0,0003		0	
f_2	8,1966		0,2151		0,0078		0,0003	
f_3	-910,248	[Hz]	2,2599	[Hz]	0,0668	[Hz]	0,0031	[Hz]
f_4	-1594,24		13,607		0,351		0,015	
f_5	/		51,91		1,384		0,052	
f_6	/		-709,277		4,435		0,151	

Tabella 2.2: Valori di scarto sulle frequenze;

Si osserva facilmente dai risultati che lo scarto ottenuto sulla prima frequenza tra il modello a 24 elementi finiti e quello a 48 elementi, è nullo; mentre sulle altre frequenze si ha uno scarto dell'ordine di 10^{-4} . Poiché l'ordine di grandezza di tale scarto, è piccolo, si ritiene opportuno assumere come modello rappresentativo della realtà la discretizzazione della trave oggetto di studio con 24 elementi finiti. Il raggiungimento della convergenza è dunque garantito dalla scelta effettuata.

È possibile osservare graficamente la convergenza attraverso le curve illustrate di seguito. I grafici in figura, presentano sulle ascisse il numero degli elementi di discretizzazione della trave mentre sulle ordinate il valore

della frequenza associata. Si è scelto per una migliore visualizzazione della convergenza di tenere conto dei valori delle frequenze a partire dalla discretizzazione a 6 elementi finiti.

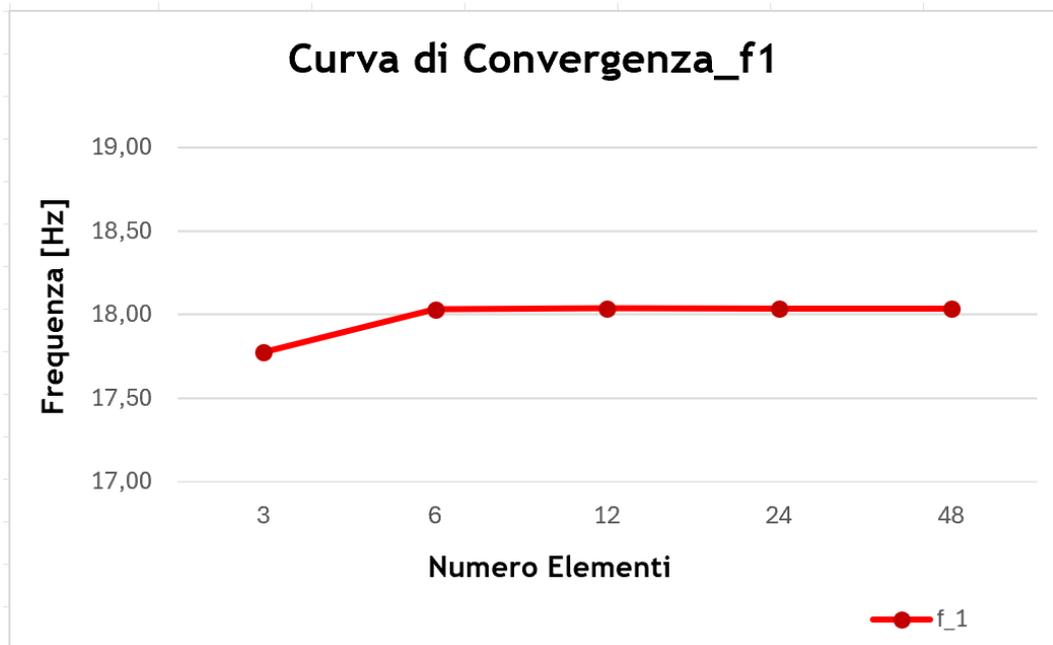


Figura 2.17: Curva di Convergenza relativa alla Prima Frequenza;

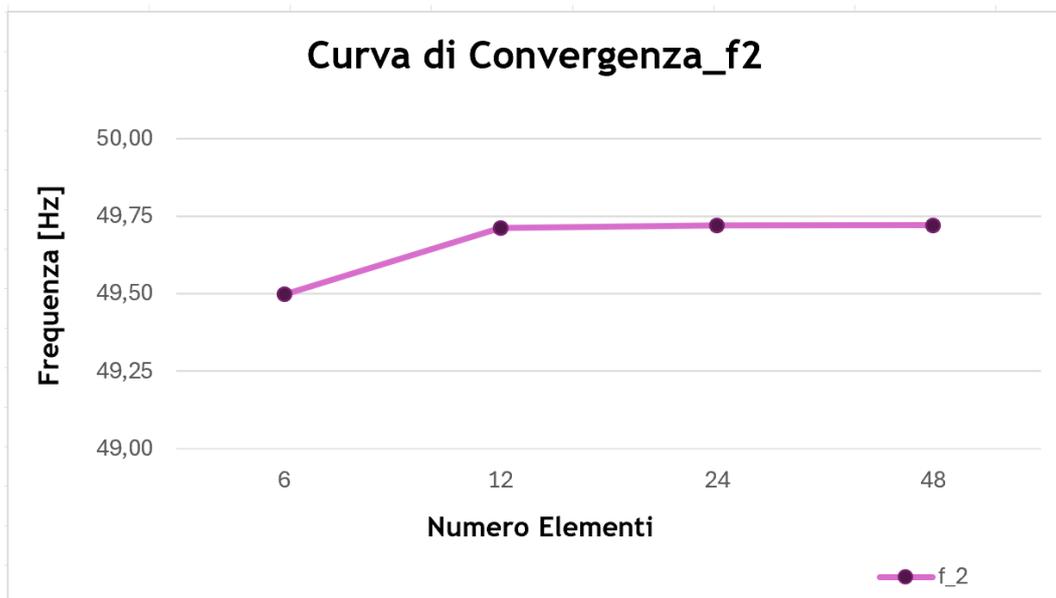


Figura 2.18: Curva di Convergenza relativa alla Seconda Frequenza;

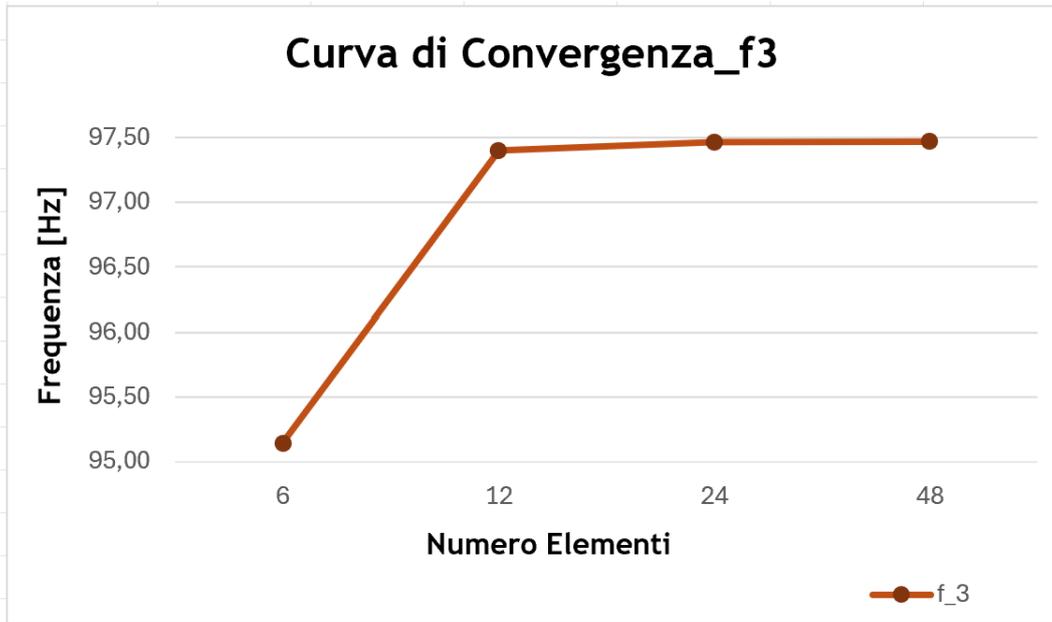


Figura 2.19: Curva di Convergenza relativa alla Terza Frequenza;

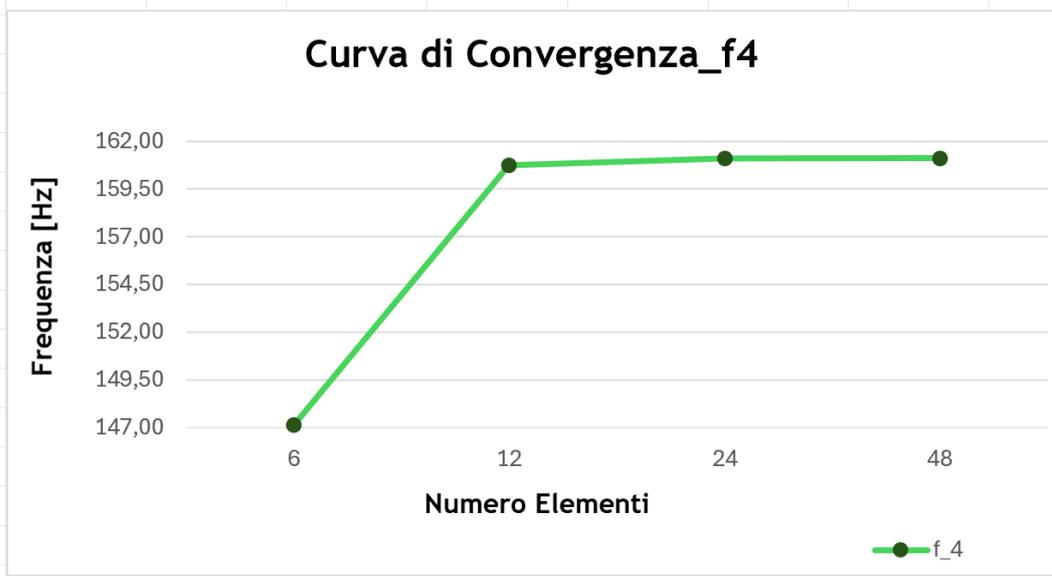


Figura 2.20: Curva di Convergenza relativa alla Quarta Frequenza;

Si riporta la modellazione completa della trave in esame discretizzata con 24 elementi finiti in visualizzazione “Solid”.



Figura 2.21: Trave discretizzata con 24 elementi, visualizzazione “Solid”;

Per la trave discretizzata con 24 elementi finiti, si riportano tabellati i valori delle prime 4 frequenze e le corrispondenti forme modali estrapolate dal programma dopo l'avvio dell'Analisi Natural Frequency.

	f_FEM_24 elementi	
f_1	18,0373	[Hz]
f_2	49,7202	
f_3	97,4689	
f_4	161,111	

Tabella 2.3: Valori frequenze trave discretizzata con 24 elementi finiti;

Si riportano graficati di seguito i 4 modi di vibrare, ottenuti dall'analisi.

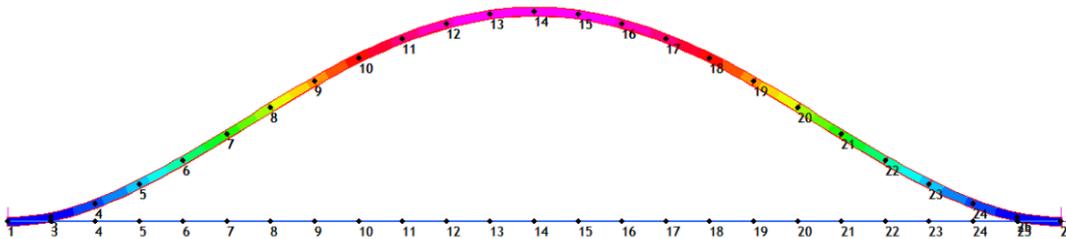


Figura 2.22: Primo Modo di Vibrare;

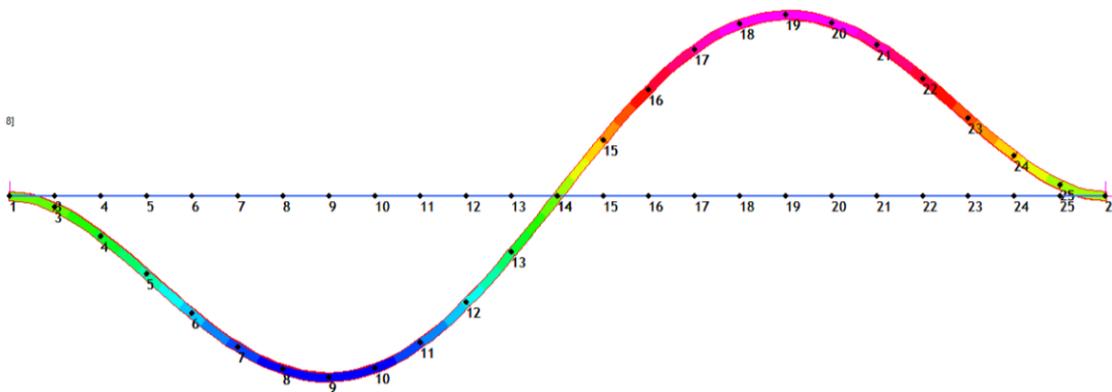


Figura 2.23: Secondo Modo di Vibrare;

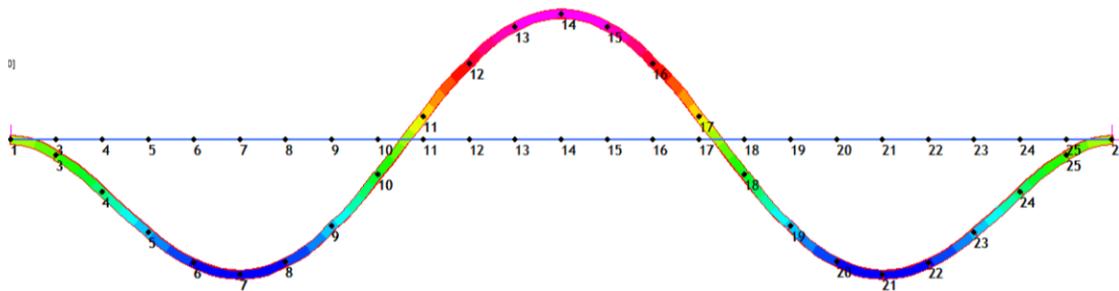


Figura 2.24: Terzo Modo di Vibrare;

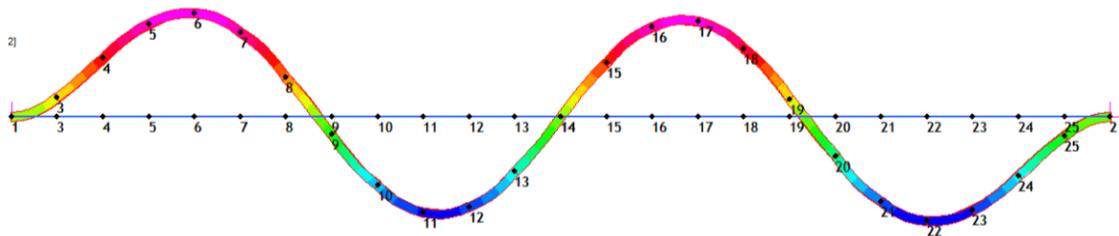


Figura 2.25: Quarto Modo di Vibrare;

Con l'obiettivo di ottenere un confronto incrociato tra la modellazione FEM e la realtà in esame, si è proceduto alla modellazione completa della trave tenendo conto dell'effettiva lunghezza dell'elemento, ossia $L = 3000 \text{ mm}$ e vincolando con incastri i nodi corrispondenti all'effettiva lunghezza delle piastre che realizzano i vincoli utilizzati in laboratorio, ossia $L_{\text{vincoli}} = 240 \text{ mm}$. Per avere elementi di 60 mm si è proceduto discretizzando in maniera molto fitta la mesh, considerando 50 elementi finiti.

La modellazione, in visualizzazione "Line" risulta:

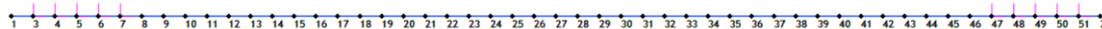


Figura 2.26: Modellazione trave $L=3000 \text{ mm}$;

Si perviene, attraverso questa modellazione esattamente agli stessi valori di frequenza ottenuti utilizzando esclusivamente la lunghezza libera di inflessione, assunta pari a $L = 2400 \text{ mm}$ della modellazione precedente.

2.2.3 Confronto frequenze Analitico - Numeriche

Alla luce dei risultati ottenuti con la modellazione semplificata, si procede ad effettuare un confronto tra i valori delle frequenze ottenute analiticamente, determinate precedentemente e quelle ottenute tramite l'Analisi Dinamica effettuata con il calcolatore Straus7. Si ha:

	f_analitiche		f_FEM_24 elementi		$\Delta(f_{24el}-f_a)$	
f_1	18,037012	[Hz]	18,0373	[Hz]	0,000288	[Hz]
f_2	49,717984		49,7202		0,002216	
f_3	97,47916		97,4689		-0,01026	
f_4	161,12274		161,111		-0,01174	
f_5	240,69521		240,64		-0,05521	
f_6	336,1776		336,018		-0,1596	

Tabella 2.4: Confronto valori frequenze analitiche e numeriche;

È possibile constatare che lo scarto tra le frequenze analitiche e le frequenze numeriche è dell'ordine di 10^{-4} sulle frequenze più basse.

2.3 MODELLAZIONE FEM DELLA TRAVE DANNEGGIATA

Si procede alla modellazione del danno utilizzando il software Straus7, con l'obiettivo di utilizzare successivamente l'algoritmo Matlab che lo identifica. Tenendo conto del modello di trave sana discretizzata con 24 elementi finiti, si ricrea il danno modellando un cambio di sezione sull'elemento interessato.

Si sceglie di danneggiare l'elemento 10 della trave, corrispondente ai nodi 11 e 12 del modello FEM e si modella il cambio sezionale dell'elemento attraverso la creazione di una nuova proprietà.

Si opta di danneggiare in maniera localizzata e progressiva. Il danno si esegue quindi sempre sullo stesso elemento, l'elemento 10, il quale

presenta una lunghezza fissa di 10 *cm* ed un'altezza variabile in base allo step di danno considerato.

Si modellano 7 differenti livelli di danno, partendo da un danneggiamento minimo corrispondente al 10 % dell'altezza iniziale dell'elemento 10 fino ad un danno massimo pari al 70% della geometria di partenza.

Lasciando invariate le proprietà meccaniche e del materiale, si realizza in Straus7 la proprietà che modella il cambio di sezione dell'elemento 10, tramite il comando: Property -> Beam -> New Property.

Si precisa che in fase di creazione dell'elemento Beam con la nuova proprietà si è ritenuto necessario procedere alla giusta regolazione dell'elemento attraverso i comandi di regolazione degli assi principali: Attribute -> Beam -> Principal Axis Angle e di settaggio dell'offset attraverso: Attribute -> Beam -> Offset, al fine di modellare esattamente il danno nella pozione effettivamente ricreata successivamente in fase sperimentale.

Si riportano per ogni step: le proprietà della sezione danneggiata, la modellazione effettiva della trave e per maggiore chiarezza, uno zoom in visualizzazione "Solid" nel piano x-y della zona danneggiata dell'elemento 10.

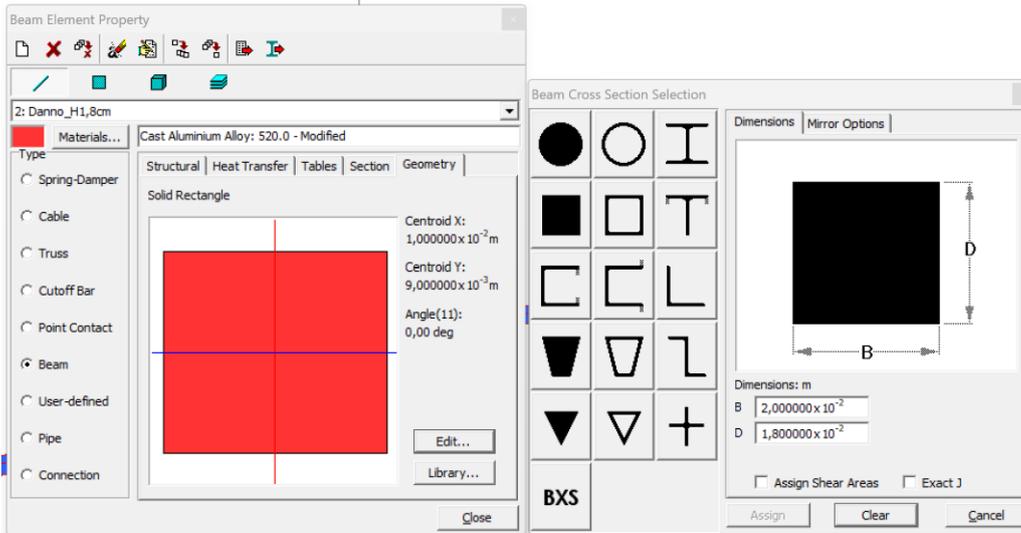


Figura 2.27: Attribuzione proprietà sezione Danno 1;



Figura 2.28: Modello trave Danno 1;



Figura 2.29: Zoom elemento 10, Danno 1;

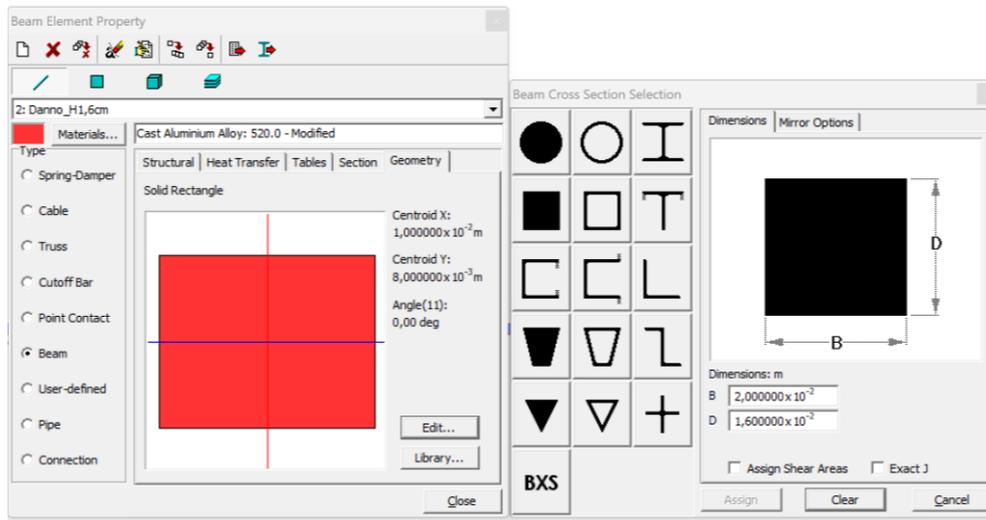


Figura 2.30: Attribuzione proprietà sezione Danno 2;



Figura 2.31: Modello trave Danno 2;

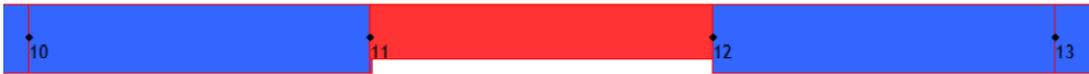


Figura 2.32: Zoom elemento 10, Danno 2;

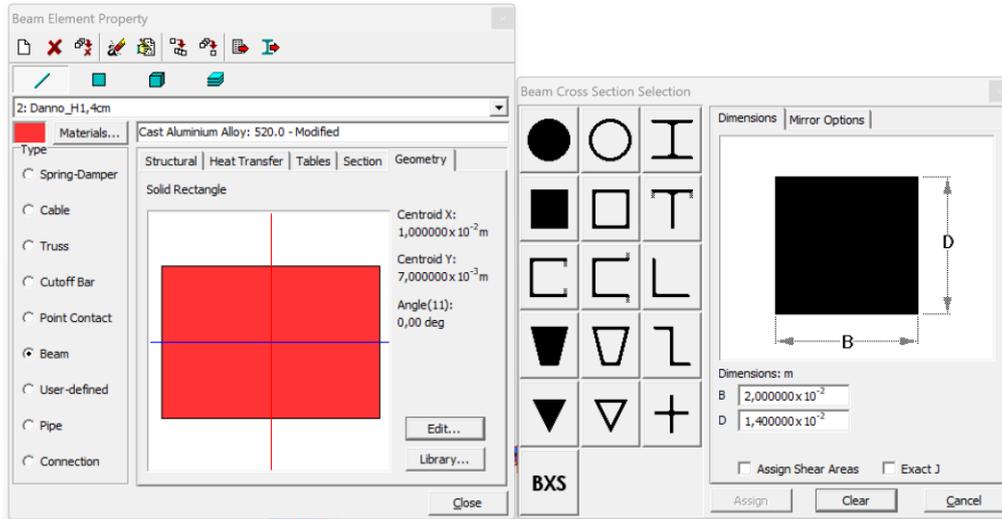


Figura 2.33: Attribuzione proprietà sezione Danno 3;



Figura 2.34: Modello trave Danno 3;



Figura 2.35: Zoom elemento 10, Danno 3;

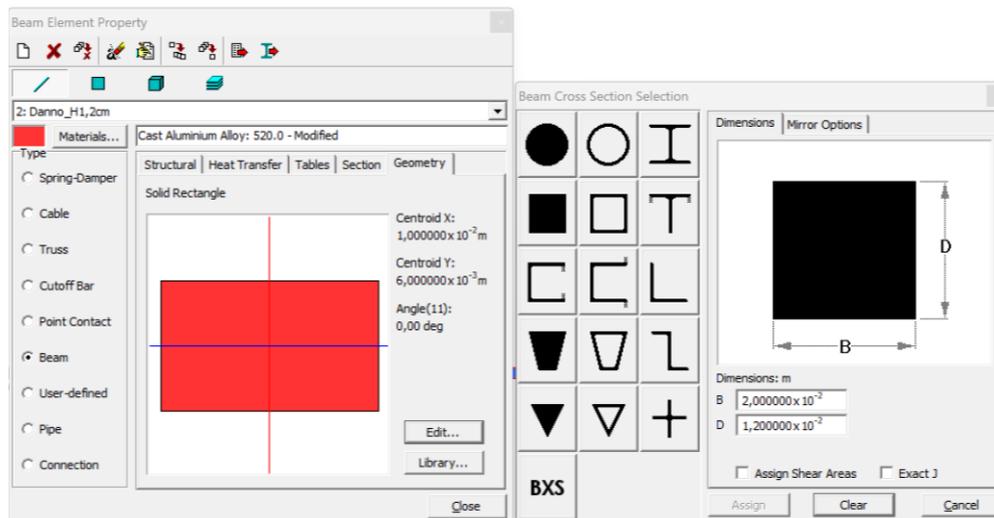


Figura 2.36: Attribuzione proprietà sezione Danno 4;



Figura 2.37: Modello trave Danno 4;



Figura 2.38: Zoom elemento 10, Danno 4;

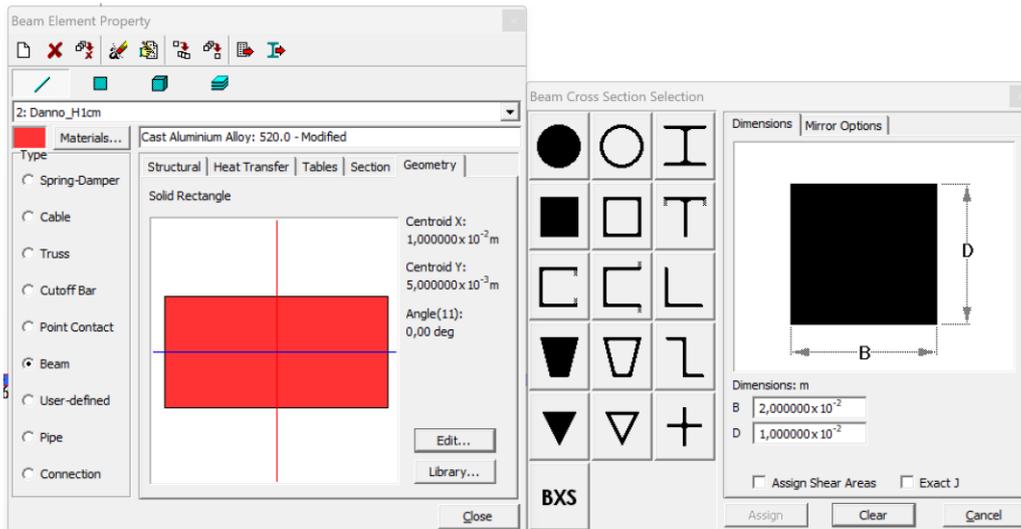


Figura 2.39: Attribuzione proprietà sezione Danno 5;



Figura 2.40: Modello trave Danno 5;



Figura 2.41: Zoom elemento 10, Danno 5;

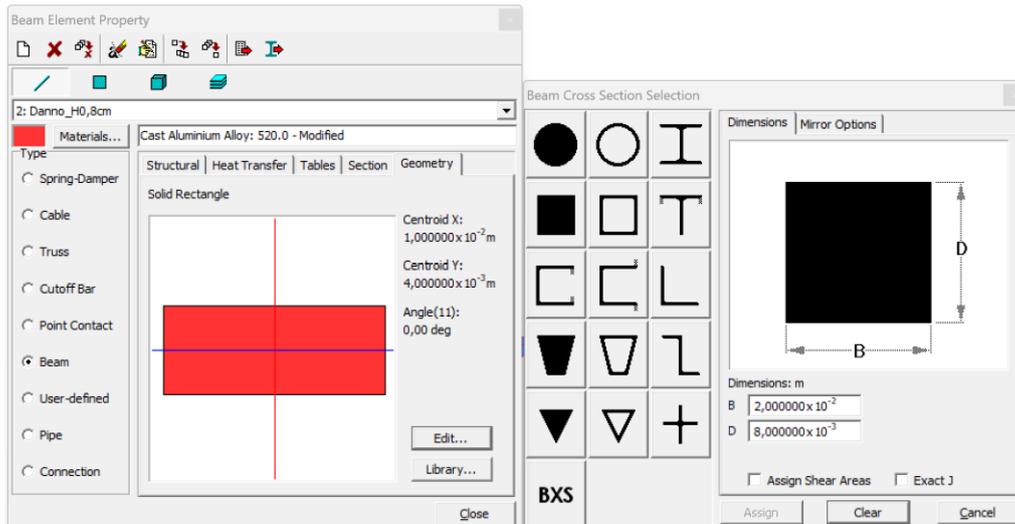


Figura 2.42: Attribuzione proprietà sezione Danno 6;



Figura 2.43: Modello trave Danno 6;



Figura 2.44: Zoom elemento 10, Danno 6;

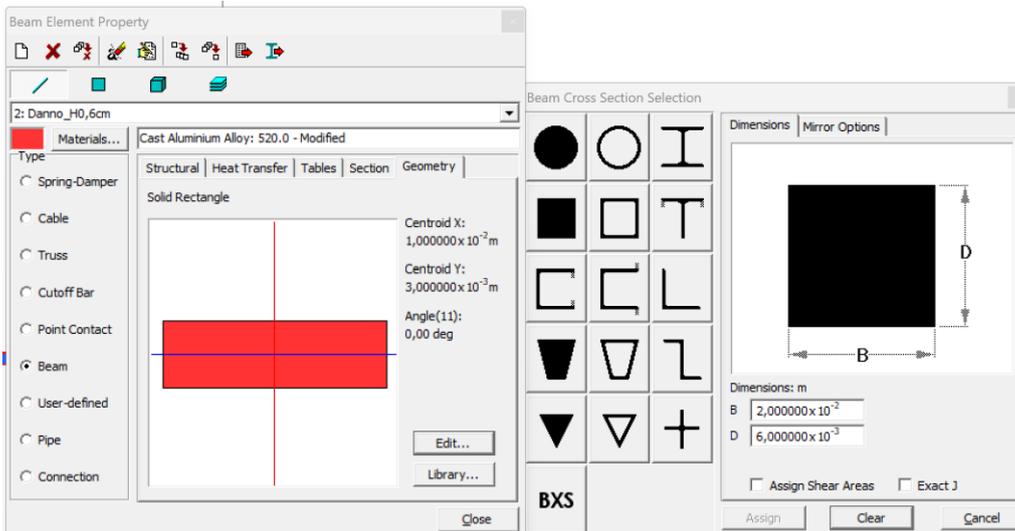


Figura 2.45: Attribuzione proprietà sezione Danno 7;



Figura 2.46: Modello trave Danno 7;



Figura 2.47: Zoom elemento 10, Danno 7;

Cambiando la geometria della sezione dell'elemento 10, cambia di conseguenza anche la rigidità dell'elemento, ovvero l'inerzia. Dunque, la rigidità di tutta la trave sarà minore e, come si vedrà dai risultati delle frequenze, anche queste risulteranno minori essendo direttamente proporzionali alla rigidità K della trave.

Si propone nelle figure sottostanti, la variazione del momento d'inerzia rispettivamente per il minimo e massimo livello di danno modellato.

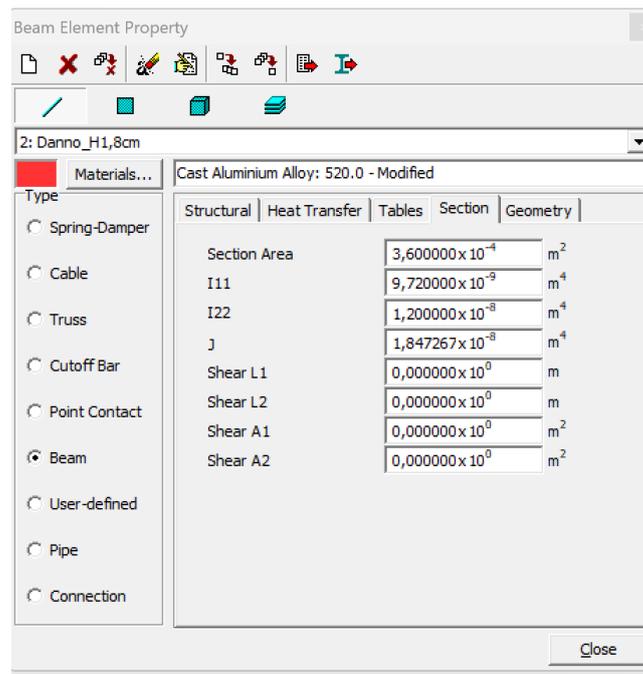


Figura 2.47: Inerzia e Area elemento 10, Danno 1

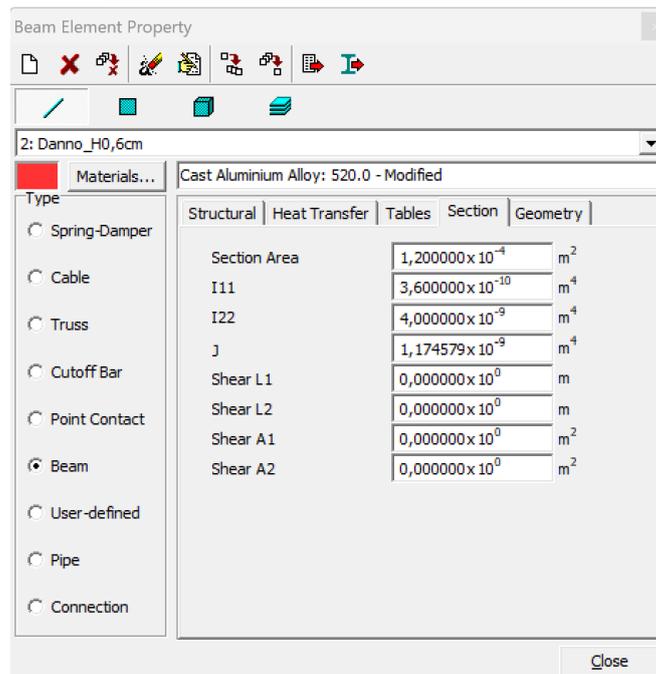


Figura 2.47: Inerzia e Area elemento 10, Danno 7;

2.3.1 Analisi Natural Frequency

Si esegue l'Analisi Modale per ogni livello di danno modellato e si propongono di seguito i valori delle prime 4 frequenze ottenuti:

TraveAlluminio_discretizzata con 24 ELEMENTI								
DANNEGGIAMENTO SEZIONE BEAM 11-12 (B_2cm e H_variabile)								
	H_2cm	H_1,8cm	H_1,6cm	H_1,4cm	H_1,2cm	H_1,0cm	H_0,8cm	H_10,6cm
f_1	18,0373	17,9747	17,8541	17,6512	17,344	16,9409	16,5283	16,2637
f_2	49,7202	49,4773	49,1018	48,5539	47,8163	46,9491	46,1346	45,5701
f_3	97,4689	97,2776	96,9862	96,5602	95,9718	95,2224	94,313	92,905
f_4	161,111	159,502	157,282	154,407	151,038	147,675	145,084	143,849

Tabella 2.5: Valori frequenze numeriche per ogni step di danno;

Dalla tabella sovrastante si evince che i valori delle frequenze, rispetto a quelle della trave sana, diminuiscono progressivamente all'aumentare del danno ovvero al diminuire della rigidità dell'elemento; coerentemente con il rapporto di proporzionalità diretta che sussiste tra frequenza f e rigidità K . Dalla formula:

$$f = \frac{1}{2\pi} \omega = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dopo aver condotto l'Analisi Modale per tutti gli step di danno, si procede utilizzando Excel al calcolo della differenza tra i valori delle frequenze ottenute per la trave integra ed i valori delle frequenze ricavate per la trave danneggiata.

Si propongono i risultati numerici e grafici del calcolo effettuato.

VARIAZIONE FREQUENZE							
$\Delta(f_{\text{sana}} - f_{\text{danno}})$							
	Δf_{Danno1} H_1,8cm	Δf_{Danno2} H_1,6cm	Δf_{Danno3} H_1,4cm	Δf_{Danno4} H_1,2cm	Δf_{Danno5} H_1,0cm	Δf_{Danno6} H_0,8cm	Δf_{Danno7} H_0,6cm
f_1	0,0626	0,1832	0,3861	0,6933	1,0964	1,509	1,7736
f_2	0,2429	0,6184	1,1663	1,9039	2,7711	3,5856	4,1501
f_3	0,1913	0,4827	0,9087	1,4971	2,2465	3,1559	4,5639
f_4	1,609	3,829	6,704	10,073	13,436	16,027	17,262

Tabella 2.6: Differenza valori frequenze tra trave integra e trave danneggiata;

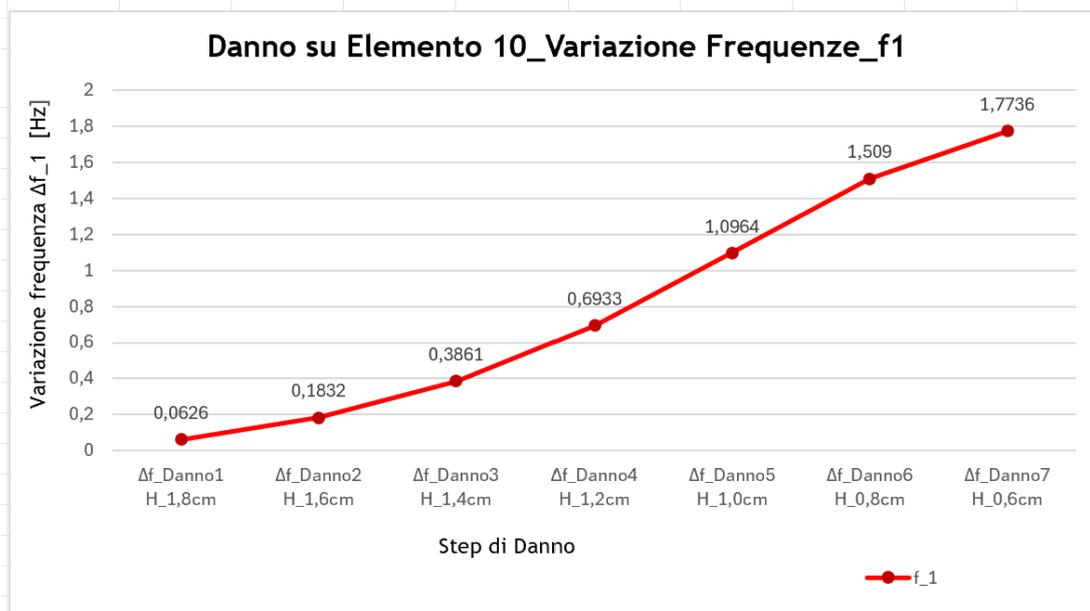


Figura 2.48: Andamento differenze per la frequenza1 tra trave integra e trave danneggiata;

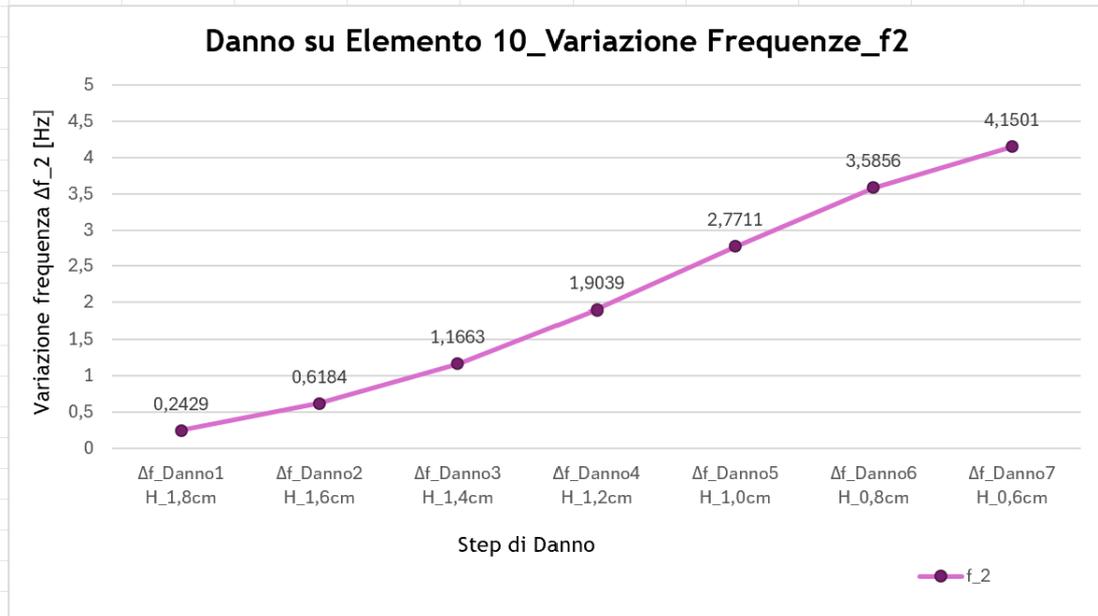


Figura 2.49: Andamento differenze per la frequenza 2 tra trave integra e trave danneggiata;

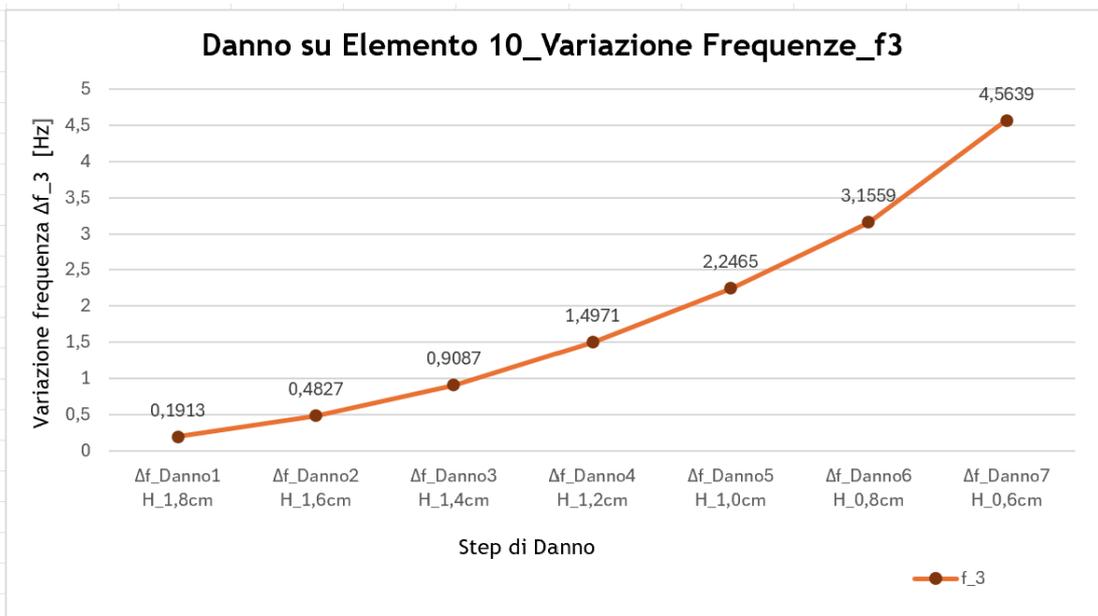


Figura 2.50: Andamento differenze per la frequenza 3 tra trave integra e trave danneggiata;

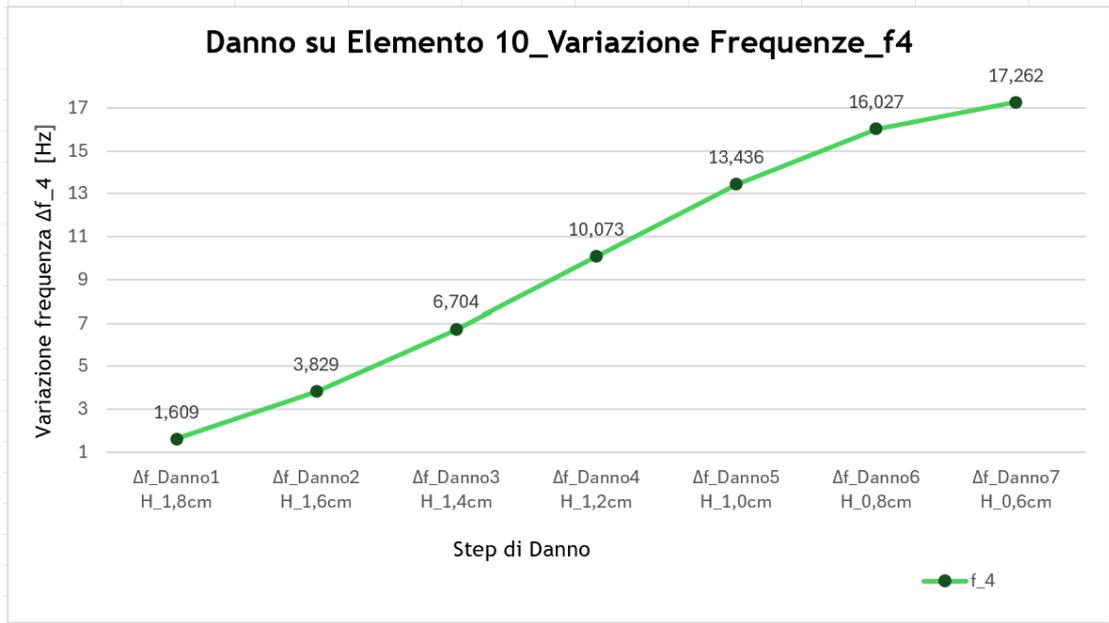


Figura 2.51: Andamento differenze per la frequenza 4 tra trave integra e trave danneggiata;

Dall'analisi si perviene, oltre ai valori delle 4 frequenze anche all'andamento dei primi 4 modi di vibrare.

Si riportano illustrate di seguito le 4 deformate modali sia per la trave danneggiata con il minimo livello di danno che per la trave con il massimo danno modellato su Strau7.

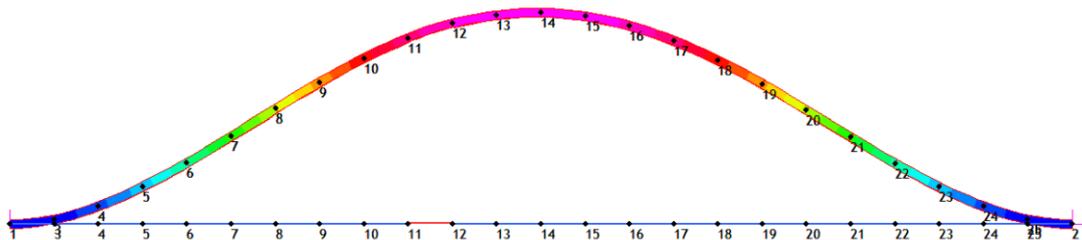


Figura 2.52: Primo Modo di Vibrare, trave Danno 1 minimo;



Figura 2.53: Secondo Modo di Vibrare, trave Danno 1 minimo;

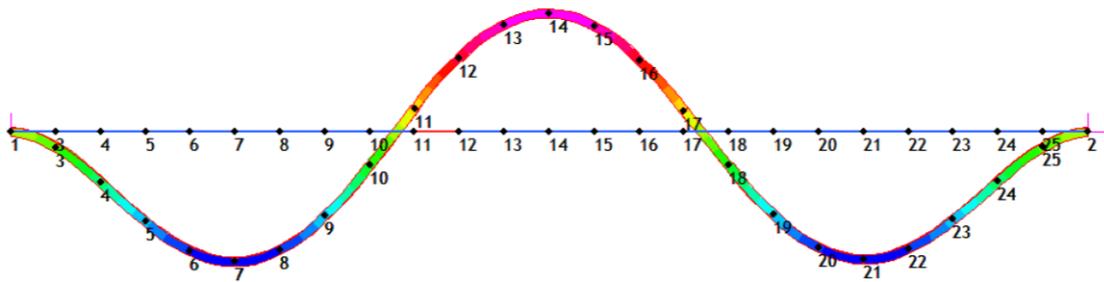


Figura 2.54: Terzo Modo di Vibrare, trave Danno 1 minimo;

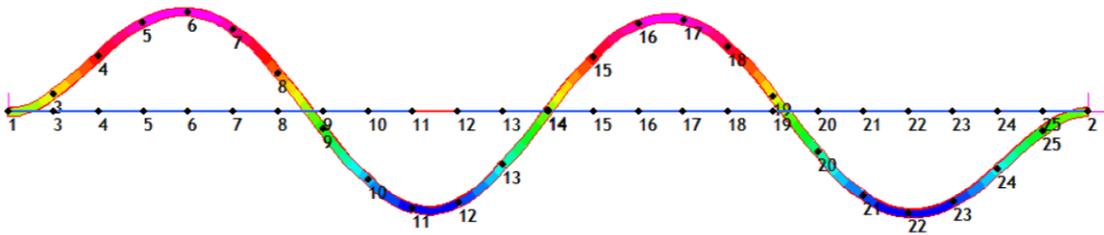


Figura 2.55: Quarto Modo di Vibrare, trave Danno 1 minimo;

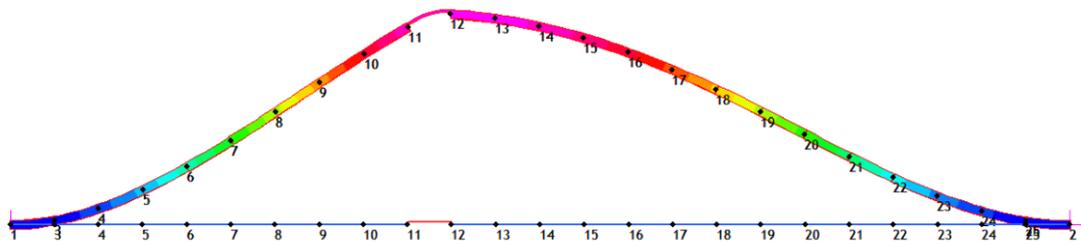


Figura 2.56: Primo Modo di Vibrare, trave Danno 7 massimo;

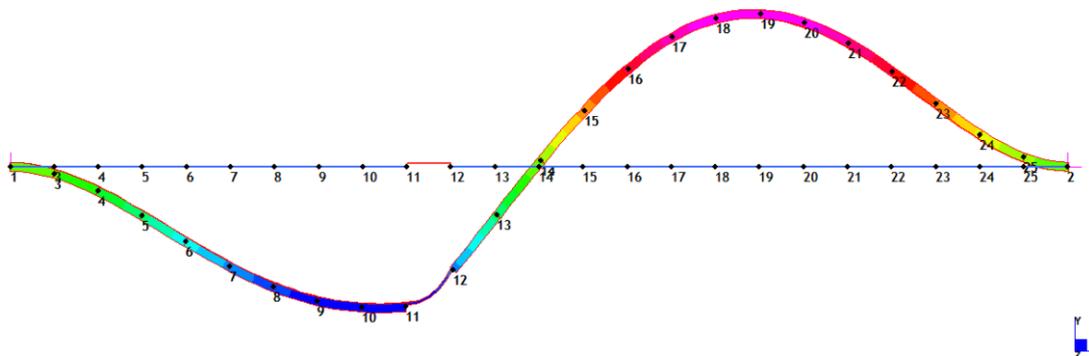


Figura 2.57: Secondo Modo di Vibrare, trave Danno 7 massimo;

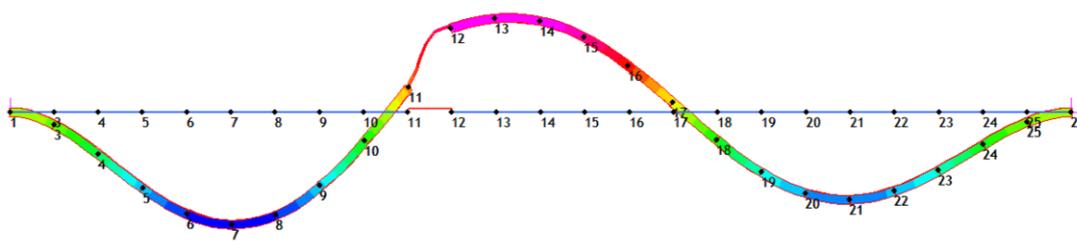


Figura 2.58: Terzo Modo di Vibrare, trave Danno 7 massimo;

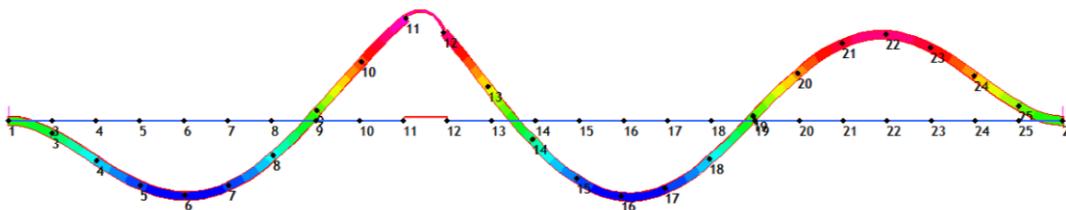


Figura 2.59: Quarto Modo di Vibrare, trave Danno 7 massimo;

2.4 IDENTIFICAZIONE DEL DANNO

Il problema di manutenzione e riparazione delle strutture di ingegneria civile esistenti comporta l'individuazione dei danni in una fase precoce. Il costo della riparazione è ovviamente inferiore a quello necessario per ricostruire l'intera struttura. La tecnica di ispezione visiva ha una capacità limitata di rilevare i danni, soprattutto quando i danni si trovano all'interno della struttura e non sono visibili. Lo studio di parametri dinamici come le frequenze naturali, il rapporto di smorzamento e le forme modali,

nell'ultimo decennio, ha trovato grande applicazione per rilevare i danni qualitativamente e quantitativamente.

La ragione dell'ampio utilizzo di prove dinamiche risiede nella facilità di misurare i parametri modali su strutture reali. Le frequenze naturali e le forme modali sono direttamente correlate alla rigidità della struttura. Pertanto, la diminuzione delle frequenze naturali ed il cambiamento delle forme modali sono indice di una perdita di rigidità. Man mano che le crepe creano nuove superfici, il rapporto di smorzamento aumenterà con l'avanzare del danno nella struttura. Un danno in una struttura altera le sue caratteristiche dinamiche. La modifica è caratterizzata da cambiamenti nei parametri quali frequenze, valori di smorzamento e forme modali associate a ciascuna frequenza modale. I cambiamenti si verificano anche in alcuni dei parametri strutturali; vale a dire, le matrici di massa, smorzamento, rigidità e flessibilità della struttura. È dimostrato che la matrice di flessibilità può essere facilmente ed accuratamente stimata da alcuni dei modi di vibrare a bassa frequenza della struttura, che possono essere facilmente misurati. In primo luogo, con semplici modelli analitici, si studia l'effetto della presenza di danni in una struttura sulla sua flessibilità. Utilizzando questi modelli analitici, viene dimostrata l'efficacia dell'utilizzo dei cambiamenti nella matrice di flessibilità nel rilevare e localizzare i danni.

2.4.1 Identificazione del danno mediante variazione di curvatura

Per una migliore localizzazione del danno sono stati proposti altri parametri dinamici: densità spettrali di potenza e curvatura delle forme modali che hanno mostrato una maggiore sensibilità al danno rispetto alle forme modali stesse. Tale tecnica rappresenta "l'approccio basato sulla risposta" poiché i dati di risposta sono direttamente correlati al danno. Questo approccio è quindi veloce ed economico. Un altro metodo noto come "the model-based approach" è stato proposto per rilevare i danni in base all'aggiornamento di

alcuni parametri per ottenere un perfetto accordo tra i parametri modali misurati sperimentalmente ed un “modello agli elementi finiti” iniziale.

I parametri aggiornati possono essere utilizzati successivamente per valutare il danno ed identificarne la posizione.

Si è constatato inoltre che le curvature modali sono altamente sensibili al danno e possono essere utilizzate per localizzare lo stesso. Si ha quindi, in presenza di un danno, una riduzione della rigidità flessionale e di conseguenza un aumento della curvatura, il rapporto di proporzionalità si visualizza dalla formula:

$$\chi = v'' = \frac{M}{EI}$$

Dove:

- χ è la curvatura in una generica sezione
- v'' è la derivata seconda dello spostamento nel tempo
- M è il momento flettente della sezione
- E è il modulo elastico di Young
- I è il momento d'inerzia della sezione.

Tracciando la differenza nella curvatura modale (MC) tra la struttura integra e quella danneggiata, appare un picco in corrispondenza dell'elemento danneggiato che indica la presenza di un difetto. Si utilizza un'approssimazione della differenza centrale per derivare le forme modali di curvatura dalle forme modali di spostamento, ovvero:

$$(V_i'')_n = \frac{(v_{i+1})_n - 2(v_i)_n + (v_{i-1})_n}{h^2}$$

Dove:

- h è la lunghezza dell'elemento che discretizza la trave
- v_i è la coordinata modale i-esima del vettore modale $(v)_n$
- $(V_i'')_n$ è la coordinata i-esima del vettore $(v'')_n$.

Un modo per confrontare le forme modali è tramite l'indice MAC acronimo di “Modal Assurance Criterion”. L'indice MAC può indicare solo consistenza e

non validità tra le forme modali, ed è maggiormente sensibile a grandi cambiamenti delle componenti modali.

È definito come:

$$MAC(\Phi_a; \Phi_e) = |\{\Phi\}_i^T|^2 \frac{|\{\Phi_a\}_i^T \{\Phi_e\}_i^T|^2}{|\{\Phi_a\}_i^T \{\Phi_a\}_i^T| |\{\Phi_e\}_i^T \{\Phi_e\}_i^T|}$$

Il pedice “i” identifica l’ordine del modo di vibrare e Φ_a, Φ_e sono le matrici modali da correlare. Attraverso la matrice di rigidità è necessario lo sviluppo di un modello analitico della struttura e si devono misurare tutti i modi di vibrare della struttura, soprattutto i modi ad alte frequenze. La matrice di flessibilità invece, che è l’inverso della matrice di rigidità, necessita solo di alcuni modi di vibrare, in particolare quelli a basse frequenze. Le forme modali calcolate, si ortonormalizzano come:

$$\phi^T M \phi = 1$$

La matrice di rigidità k e la matrice di flessibilità f si esprimono come:

$$K = M \phi \Omega \phi^T M = M \left(\sum_{i=1}^n \omega^2 \phi_i \phi_i^T \right) M$$

$$F = \phi \Omega^{-1} \phi^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i \phi_i^T$$

Dove:

- $\phi = [\phi_1, \phi_2 \dots \phi_n]$ è la matrice delle forme modali, dove in colonna ci sono i modi di vibrare caratterizzati dalle rotazioni in z e dagli spostamenti verticali lungo y
- $\Omega = \text{diag}(\omega_i^2)$ è la matrice spettrale
- n sono i gradi di libertà.

La matrice di rigidezza è composta da forze che producono spostamenti unitari applicati nei gradi di libertà, mentre le componenti della matrice di flessibilità sono spostamenti e rotazioni dati da una forza unitaria applicata ai gradi di libertà.

La matrice di flessibilità non si impiega come la matrice di rigidezza solo per rilevare i danni ma anche per localizzare gli stessi lungo la struttura. L'operazione di identificazione del danno e della sua posizione, si effettua da indagini numeriche. Per fare ciò, si utilizza un algoritmo implementato nel software di calcolo "MATLAB", con il quale si calcola la curvatura χ mediante la formula delle differenze centrali, riscritta di seguito per comodità.

$$(V_i'')_n = \frac{(v_{i+1})_n - 2(v_i)_n + (v_{i-1})_n}{h^2}$$

2.4.2 Algoritmo di identificazione del danno

Si utilizza un algoritmo di identificazione del danno implementato nel software "Matlab", il quale individua la posizione dell'elemento danneggiato.

Nel caso in esame si è danneggiato l'elemento 10 della trave, ossia l'elemento di nodi 11-12 in Straus7. Tale numerazione nel software è dovuta al fatto che gli incastri sono posizionati alle estremità di nodi rispettivamente 1 e 2. L'elemento 10 danneggiato, si identifica invece in Matlab con i nodi 10-11 in quanto le estremità fornite in input, hanno numerazione 1 e 25.

Si assegnano in prima battuta in input all'algoritmo i dati geometrici e meccanici della trave. Successivamente, attraverso un file ".mat" si assegnano i valori delle frequenze e degli spostamenti verticali relativi ai modi di vibrare sia per la trave integra che per i 7 livelli di trave

danneggiata ottenuti mediante Analisi Natural Frequency dalla modellazione agli elementi finiti effettuata con Straus7.

Si riportano tabellati i valori delle 4 frequenze e dei 4 modi di vibrare per la trave sana e per ogni scenario di danno modellato.

Frequenze TraveSana_H_2cm		Modi di Vibrare_Trave Sana_H_2cm				
f_und [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
18,0373	49,7202	1	0	0	0	0
97,4689	161,111	2	0,0224	-0,0588	-0,1097	-0,172
		3	0,0834	-0,2065	-0,3604	-0,5235
		4	0,1738	-0,4008	-0,6403	-0,8304
		5	0,2846	-0,602	-0,8537	-0,9305
		6	0,4068	-0,7747	-0,9324	-0,7575
		7	0,5321	-0,8907	-0,8451	-0,3517
		8	0,6527	-0,9304	-0,6	0,1601
		9	0,7617	-0,8841	-0,2418	0,6112
		10	0,853	-0,753	0,1595	0,8525
		11	0,9218	-0,548	0,5234	0,8045
		12	0,9646	-0,2884	0,7763	0,4844
		13	0,9791	0	0,8668	0,0007
		14	0,9646	0,2884	0,7763	-0,483
		15	0,9218	0,548	0,5234	-0,8034
		16	0,853	0,753	0,1595	-0,8517
		17	0,7617	0,8841	-0,2418	-0,6107
		18	0,6527	0,9304	-0,6	-0,16
		19	0,5321	0,8907	-0,8451	0,3516
		20	0,4068	0,7747	-0,9324	0,7572
		21	0,2846	0,602	-0,8537	0,9301
		22	0,1738	0,4008	-0,6403	0,8301
		23	0,0834	0,2065	-0,3604	0,5234
		24	0,0224	0,0588	-0,1097	0,172
		25	0	0	0	0

Tabella 2.7: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave sana;

Frequenze_Danno1 H_1,8cm		Modi di Vibrare_Danno1_H_1,8cm				
f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17,9747	1	0	0	0	0
f_2	49,4773	2	0,0224	-0,0579	-0,1108	-0,1693
f_3	97,2776	3	0,0837	-0,2035	-0,3643	-0,5159
f_4	159,502	4	0,1745	-0,3954	-0,6473	-0,8202
		5	0,286	-0,5947	-0,863	-0,9224
		6	0,4093	-0,7671	-0,9423	-0,7554
		7	0,5361	-0,8846	-0,8534	-0,3559
		8	0,6587	-0,9283	-0,6041	0,155
		9	0,7703	-0,8888	-0,2387	0,6164
		10	0,8649	-0,7674	0,1727	0,8847
		11	0,9335	-0,5628	0,5387	0,8327
		12	0,9722	-0,2956	0,7814	0,4797
		13	0,9834	-0,0018	0,8652	-0,0176
		14	0,9663	0,2901	0,7713	-0,4999
		15	0,9216	0,5515	0,5181	-0,8098
		16	0,8515	0,7573	0,1562	-0,8454
		17	0,7593	0,8883	-0,2416	-0,5952
		18	0,65	0,934	-0,596	-0,1415
		19	0,5294	0,8935	-0,8379	0,3669
		20	0,4045	0,7767	-0,9237	0,7658
		21	0,2828	0,6032	-0,8452	0,9318
		22	0,1726	0,4015	-0,6337	0,8276
		23	0,0828	0,2068	-0,3565	0,5203
		24	0,0222	0,0589	-0,1085	0,1706
		25	0	0	0	0

Tabella 2.8: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave danneggiata 1;

Frequenze_Danno2 H_1,6cm		Modi di Vibrare_Danno2_H_1,6cm				
f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17,8541	1	0	0	0	0
f_2	49,1018	2	0,0225	-0,0565	-0,1125	-0,1655
f_3	96,9862	3	0,0839	-0,1987	-0,3699	-0,5055
f_4	157,282	4	0,1752	-0,3869	-0,6573	-0,8063
		5	0,2876	-0,5832	-0,8764	-0,9113
		6	0,4123	-0,7545	-0,957	-0,7527
		7	0,5411	-0,8739	-0,866	-0,3623
		8	0,6665	-0,9229	-0,6109	0,1463
		9	0,7817	-0,8927	-0,2358	0,6202
		10	0,8808	-0,7845	0,1894	0,9225
		11	0,9488	-0,5806	0,5588	0,8649
		12	0,9817	-0,3029	0,7873	0,47
		13	0,9881	-0,0018	0,8616	-0,0439
		14	0,9672	0,2946	0,7632	-0,5232
		15	0,9197	0,5584	0,5097	-0,8184
		16	0,8476	0,7648	0,151	-0,8367
		17	0,7544	0,8954	-0,2415	-0,5737
		18	0,6447	0,9399	-0,5901	-0,1159
		19	0,5244	0,8981	-0,8273	0,3884
		20	0,4002	0,7798	-0,9106	0,7781
		21	0,2795	0,6051	-0,8324	0,9348
		22	0,1705	0,4024	-0,6237	0,8248
		23	0,0817	0,2071	-0,3508	0,5164
		24	0,0219	0,0589	-0,1067	0,1689
		25	0	0	0	0

Tabella 2.9: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave danneggiata 2;

Frequenze_Danno3 H_1,4cm		Modi di Vibrare_Danno3_H_1,4cm				
f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
17,6512	48,5539	1	0	0	0	0
48,5539	96,5602	2	0,0225	-0,0544	-0,1148	-0,1605
96,5602	154,407	3	0,0842	-0,1919	-0,3775	-0,4916
154,407		4	0,1761	-0,3745	-0,671	-0,7874
		5	0,2895	-0,5663	-0,8949	-0,8958
		6	0,416	-0,7358	-0,9773	-0,7481
		7	0,5476	-0,8572	-0,8839	-0,37
		8	0,6767	-0,9132	-0,6213	0,1343
		9	0,7967	-0,8952	-0,2334	0,622
		10	0,902	-0,8049	0,2103	0,9649
		11	0,9691	-0,6017	0,5849	0,8993
		12	0,9935	-0,3099	0,794	0,4536
		13	0,993	0,0007	0,8556	-0,0798
		14	0,9667	0,303	0,7509	-0,554
		15	0,9152	0,5696	0,4973	-0,8296
		16	0,8405	0,7767	0,1434	-0,8251
		17	0,7459	0,9063	-0,2414	-0,5456
		18	0,6359	0,9489	-0,5817	-0,0822
		19	0,5162	0,9048	-0,8122	0,417
		20	0,3932	0,7844	-0,892	0,7954
		21	0,2742	0,6078	-0,8143	0,9403
		22	0,1671	0,4038	-0,6095	0,8226
		23	0,08	0,2077	-0,3425	0,5124
		24	0,0214	0,0591	-0,1041	0,167
		25	0	0	0	0

Tabella 2.10: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave danneggiata 3;

Frequenze_Danno4 H_1,2cm		Modi di Vibrare_Danno4_H_1,2cm				
f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
17,344	47,8163	1	0	0	0	0
47,8163	95,9718	2	0,0225	-0,0517	-0,1176	-0,1544
95,9718	151,038	3	0,0844	-0,1829	-0,3868	-0,4747
151,038		4	0,177	-0,358	-0,6879	-0,7642
		5	0,2918	-0,5437	-0,918	-0,8759
		6	0,4206	-0,7103	-1,003	-0,7406
		7	0,5556	-0,8341	-0,907	-0,3773
		8	0,6896	-0,8986	-0,6356	0,1206
		9	0,8161	-0,8961	-0,232	0,6222
		10	0,9296	-0,8283	0,2344	1,0092
		11	0,9955	-0,6253	0,618	0,9327
		12	1,0084	-0,3159	0,802	0,4305
		13	0,9984	0,0067	0,8469	-0,1235
		14	0,9646	0,316	0,7343	-0,5902
		15	0,9077	0,5859	0,4808	-0,8423
		16	0,8294	0,7932	0,1333	-0,8111
		17	0,733	0,9212	-0,2412	-0,5121
		18	0,6228	0,961	-0,5705	-0,0418
		19	0,5041	0,9137	-0,7921	0,452
		20	0,383	0,7903	-0,8674	0,8177
		21	0,2666	0,6113	-0,7902	0,949
		22	0,1621	0,4056	-0,5907	0,8221
		23	0,0775	0,2083	-0,3316	0,5089
		24	0,0207	0,0592	-0,1007	0,1653
		25	0	0	0	0

Tabella 2.11: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave danneggiata 4;

Frequenze_Danno5 H_1,0cm		Modi di Vibrare_Danno5_H_1,0cm				
f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
16,9409	46,9491	1	0	0	0	0
46,9491	95,2224	2	0,0225	-0,0487	-0,1204	-0,1484
95,2224	147,675	3	0,0846	-0,1725	-0,3961	-0,4576
147,675		4	0,1779	-0,3391	-0,705	-0,7401
		5	0,2943	-0,5176	-0,9416	-0,8544
		6	0,4258	-0,681	-1,0299	-0,7307
		7	0,565	-0,8071	-0,932	-0,382
		8	0,7048	-0,8809	-0,6523	0,109
		9	0,8391	-0,8956	-0,2331	0,6231
		10	0,9626	-0,8532	0,257	1,0525
		11	1,0271	-0,6485	0,6576	0,961
		12	1,0258	-0,3196	0,8121	0,4046
		13	1,0041	0,0159	0,8374	-0,1679
		14	0,9613	0,3328	0,7153	-0,6259
		15	0,8977	0,6057	0,4615	-0,8539
		16	0,8151	0,8129	0,1214	-0,7959
		17	0,7166	0,9385	-0,2414	-0,4775
		18	0,6061	0,9748	-0,558	-0,0002
		19	0,4887	0,9237	-0,7693	0,4887
		20	0,3701	0,7968	-0,8392	0,842
		21	0,2569	0,615	-0,7627	0,9599
		22	0,1558	0,4073	-0,5691	0,8234
		23	0,0743	0,2089	-0,3191	0,5067
		24	0,0199	0,0593	-0,0968	0,1639
		25	0	0	0	0

Tabella 2.12: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave danneggiata 5;

Frequenze_Danno6 H_0,8cm		Modi di Vibrare_Danno6_H_0,8cm				
f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
16,5283	46,1346	1	0	0	0	0
46,1346	94,313	2	0,0225	-0,046	-0,1217	-0,1442
94,313	145,084	3	0,0847	-0,1636	-0,401	-0,4458
145,084		4	0,1787	-0,3227	-0,7146	-0,7236
		5	0,2965	-0,4952	-0,956	-0,8396
		6	0,4307	-0,6558	-1,0478	-0,7237
		7	0,5739	-0,7843	-0,9508	-0,3841
		8	0,7195	-0,8669	-0,668	0,1041
		9	0,8615	-0,8974	-0,24	0,6304
		10	0,9949	-0,8781	0,2657	1,0956
		11	1,0592	-0,6661	0,7042	0,9815
		12	1,0437	-0,3202	0,8283	0,3842
		13	1,0104	0,0263	0,8325	-0,2012
		14	0,9584	0,3492	0,6991	-0,6513
		15	0,8882	0,6241	0,4432	-0,8602
		16	0,8014	0,8304	0,1084	-0,7817
		17	0,7007	0,9533	-0,2443	-0,4488
		18	0,59	0,9861	-0,5493	0,0331
		19	0,4738	0,9314	-0,7509	0,5174
		20	0,3576	0,8014	-0,8153	0,8609
		21	0,2475	0,6173	-0,7387	0,9682
		22	0,1497	0,4081	-0,5501	0,8244
		23	0,0713	0,2091	-0,308	0,5049
		24	0,019	0,0593	-0,0934	0,1628
		25	0	0	0	0

Tabella 2.13: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave danneggiata 6

Frequenze_Danno7 H_0,6cm		Modi di Vibrare_Danno7_H_0,6cm						
f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]						
f_1	f_2	f_3	f_4	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
16,2637	45,5701	92,905	143,849	1	0	0	0	0
				2	0,0225	-0,0447	-0,1191	-0,1448
				3	0,0848	-0,1595	-0,3929	-0,4481
				4	0,1791	-0,3156	-0,7019	-0,7283
				5	0,2979	-0,4861	-0,9424	-0,8466
				6	0,4337	-0,6469	-1,0384	-0,7314
				7	0,5796	-0,7788	-0,9508	-0,3887
				8	0,729	-0,8685	-0,6805	0,1091
				9	0,8762	-0,9104	-0,2655	0,6546
				10	1,0162	-0,9071	0,23	1,1517
				11	1,0843	-0,6691	0,7731	0,9895
				12	1,0591	-0,3149	0,8642	0,3752
				13	1,0178	0,036	0,8427	-0,2126
				14	0,9596	0,3601	0,6915	-0,6558
				15	0,8847	0,6341	0,4263	-0,8543
				16	0,7947	0,838	0,09	-0,7672
				17	0,6923	0,9579	-0,2582	-0,4307
				18	0,581	0,9878	-0,5554	0,049
				19	0,4653	0,9309	-0,7487	0,5269
				20	0,3504	0,7994	-0,8069	0,8626
				21	0,242	0,6149	-0,7276	0,964
				22	0,1462	0,4061	-0,54	0,8179
				23	0,0695	0,2078	-0,3016	0,4998
				24	0,0185	0,0589	-0,0913	0,1609
				25	0	0	0	0

Tabella 2.14: Valori numerici frequenze e modi di vibrare trave danneggiata 7;

Si carica nell'algoritmo un file "final_data.mat" contenente i vettori relativi ai quattro valori delle frequenze di trave sana "f_und", di trave danneggiata "f_dam" e le quattro forme modali sia per la trave sana che danneggiata, rispettivamente sotto il nome di "shape_und" e "shape_dam".

L'algoritmo restituisce il plot delle forme modali numeriche della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la differenza assoluta tra le curvature valutando così la posizione esatta del danno.

Si riportano i plot delle forme modali e della differenza di curvatura per tre scenari significativi di danno, ossia per il danno sull'elemento H_1,8cm, H_1,0 e H_0,6 cm. Infine, si propongono i plot di identificazione del danno per tutti e sette gli scenari di danno modellati.

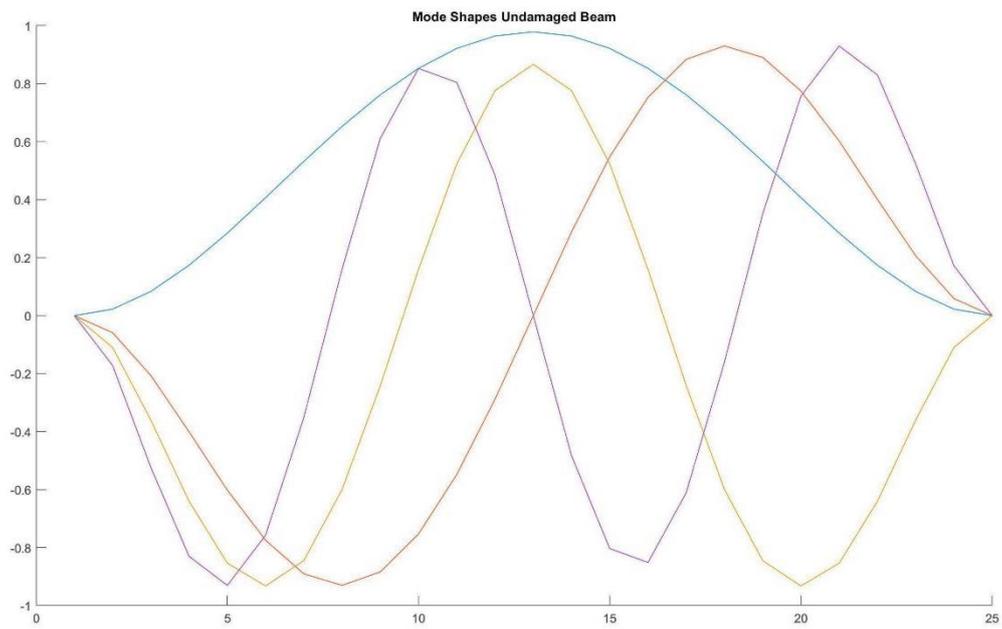


Figura 2.60: Plot forme modali numeriche trave sana;

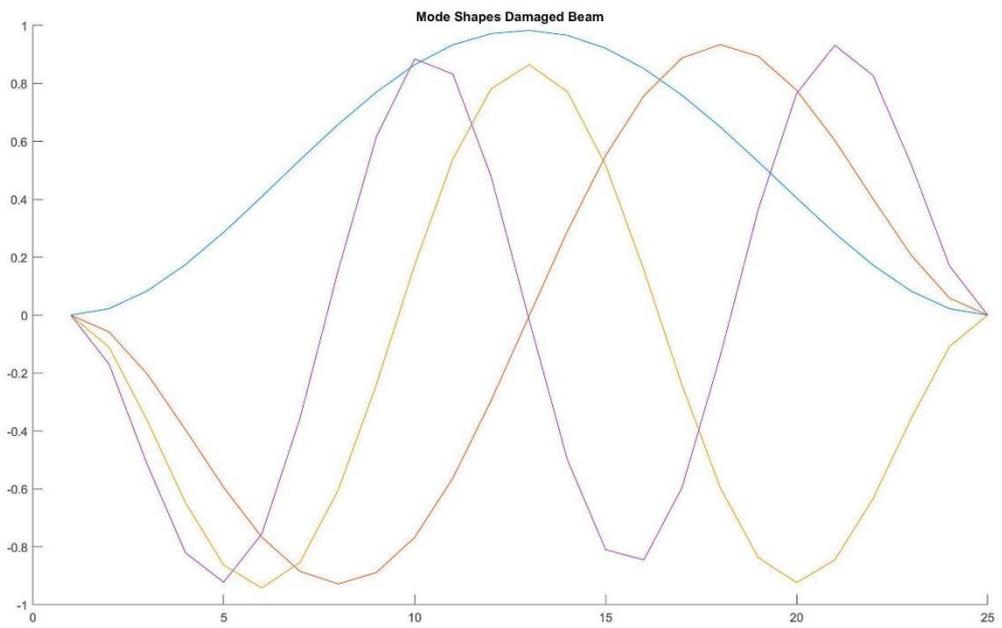


Figura 2.61: Plot forme modali numeriche trave danneggiata 1 H_1,8cm;

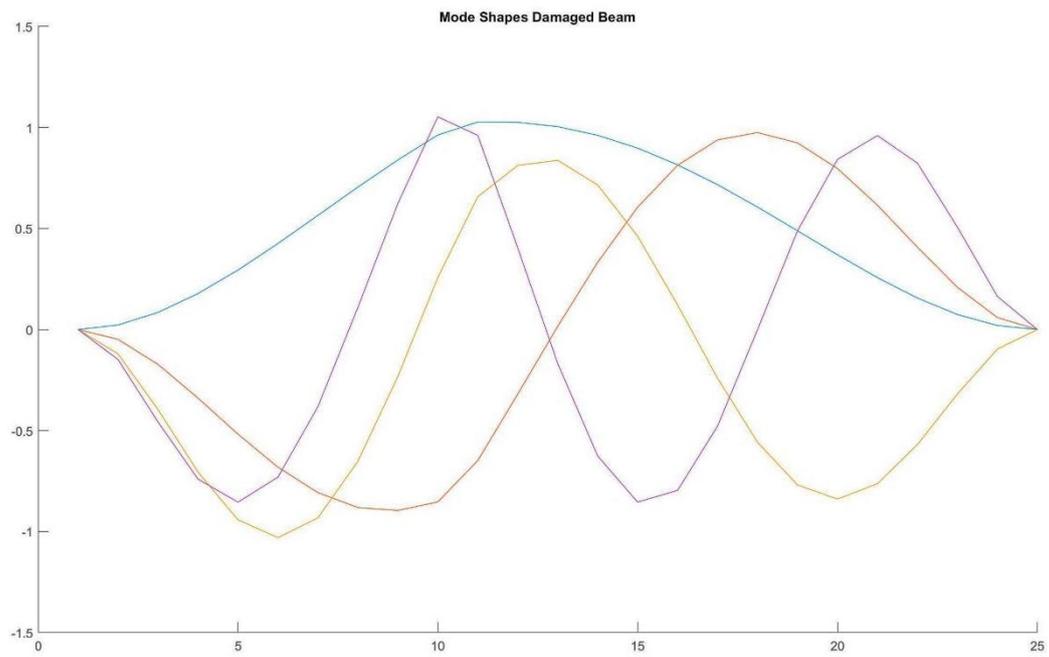


Figura 2.62: Plot forme modali numeriche trave danneggiata 5 H_1,0cm

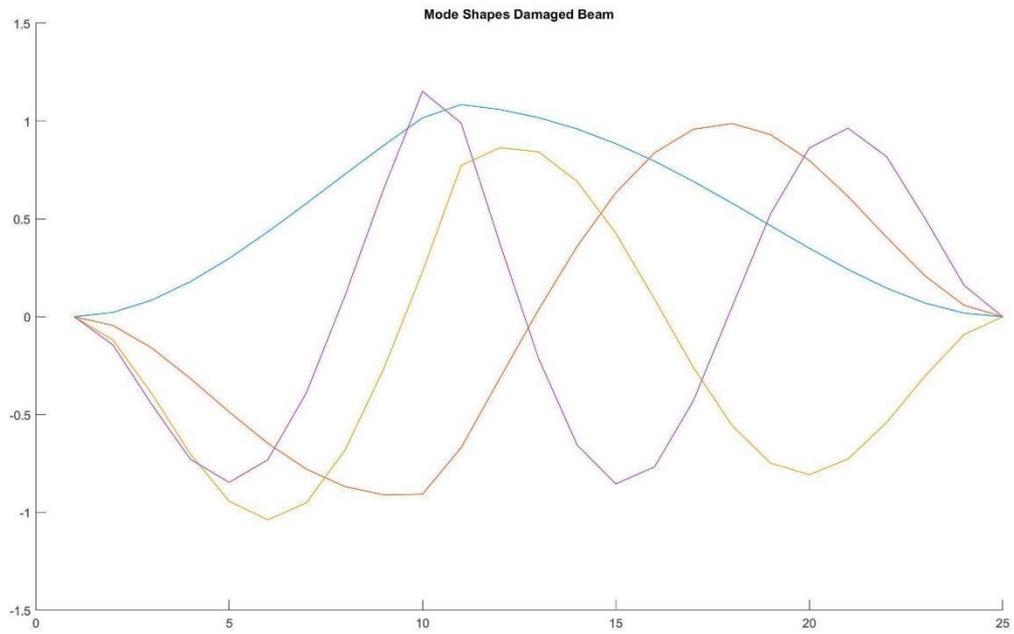


Figura 2.63: Plot forme modali numeriche trave danneggiata 7 H_0,6cm

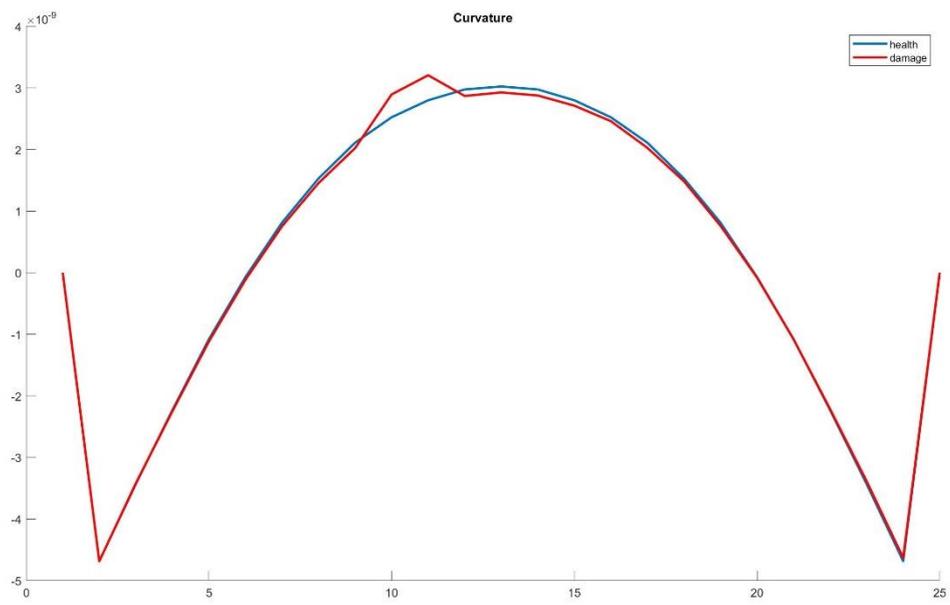


Figura 2.64: Plot differenza di curvatura danno 1 H_{1,8} cm

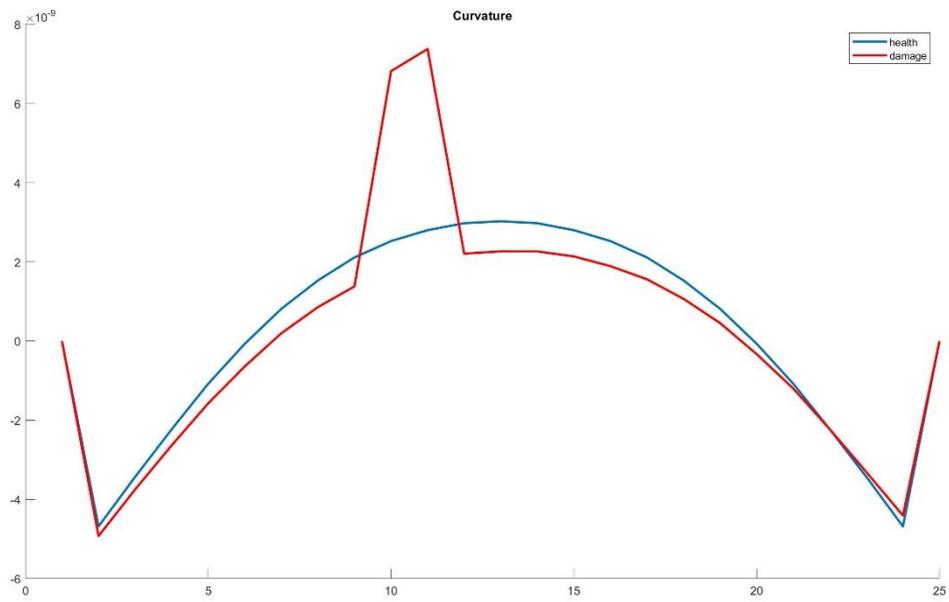


Figura 2.65: Plot differenza di curvatura danno 5 H_{1,0} cm

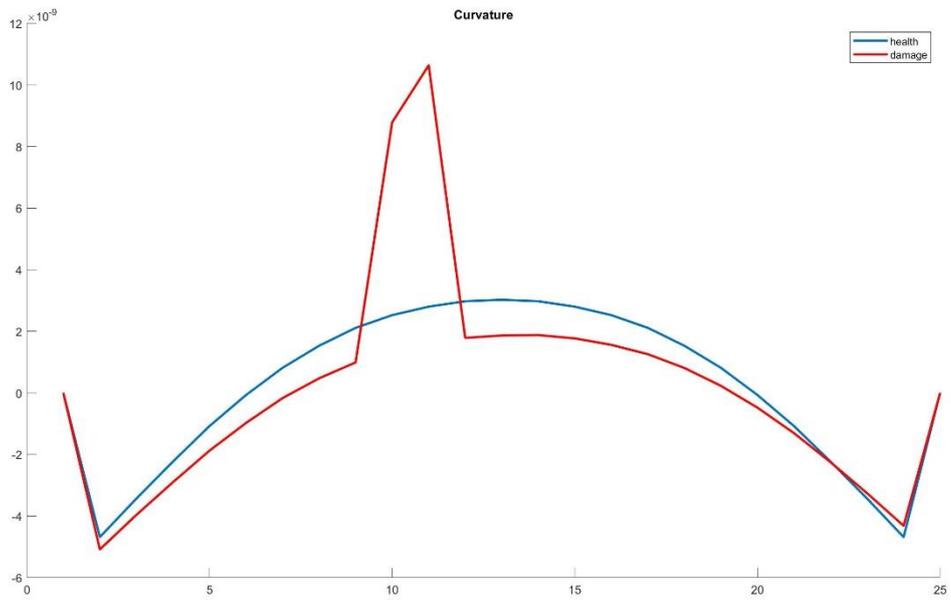


Figura 2.66: Plot differenza di curvatura danno 7 H_{1,0} cm

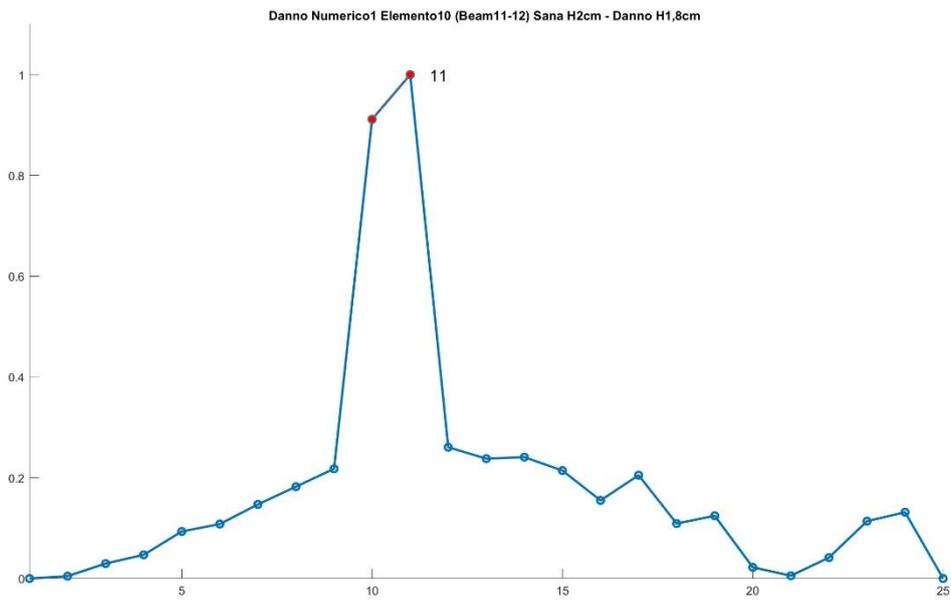


Figura 2.67: Plot di identificazione del danno nella trave con danno 1, H_{1,8};

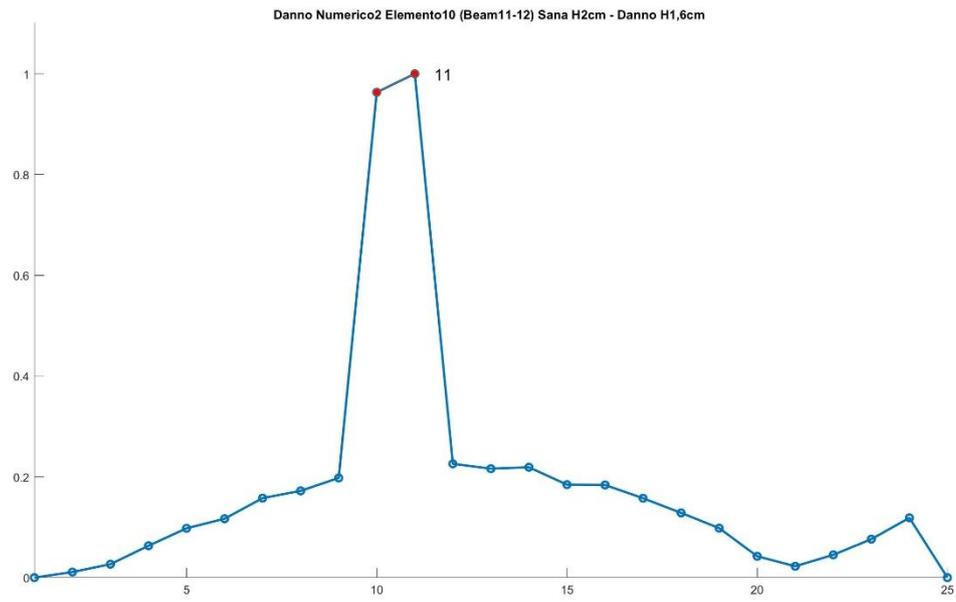


Figura 2.68: Plot di identificazione del danno nella trave con danno 2, $H_{1,6}$

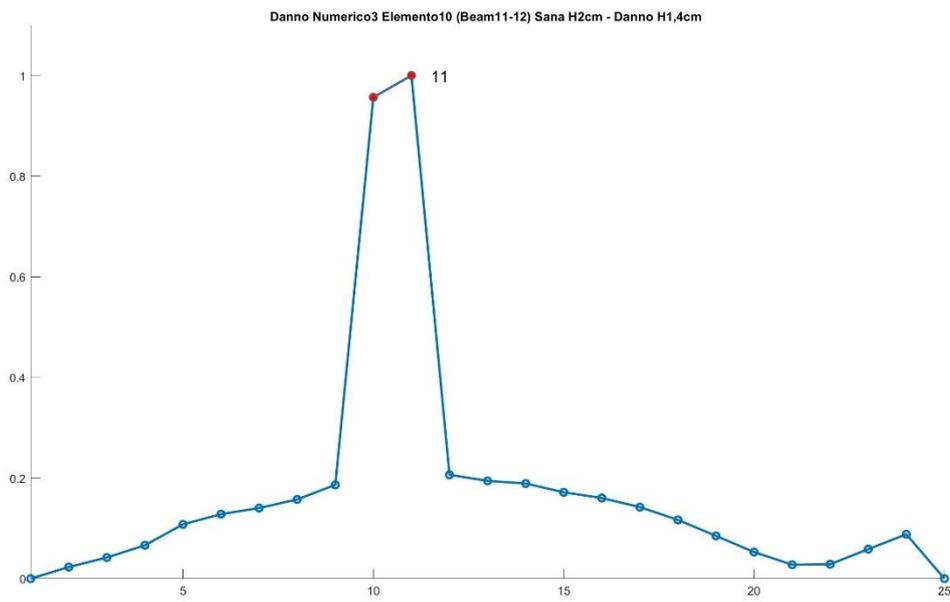


Figura 2.69: Plot di identificazione del danno nella trave con danno 3, $H_{1,6}$

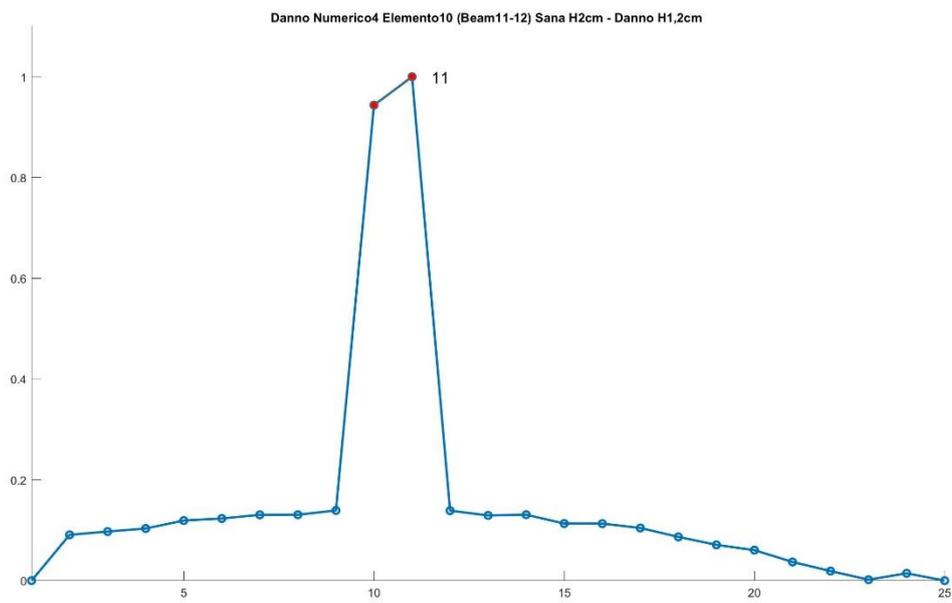


Figura 2.70: Plot di identificazione del danno nella trave con danno 4, H_{1,2}

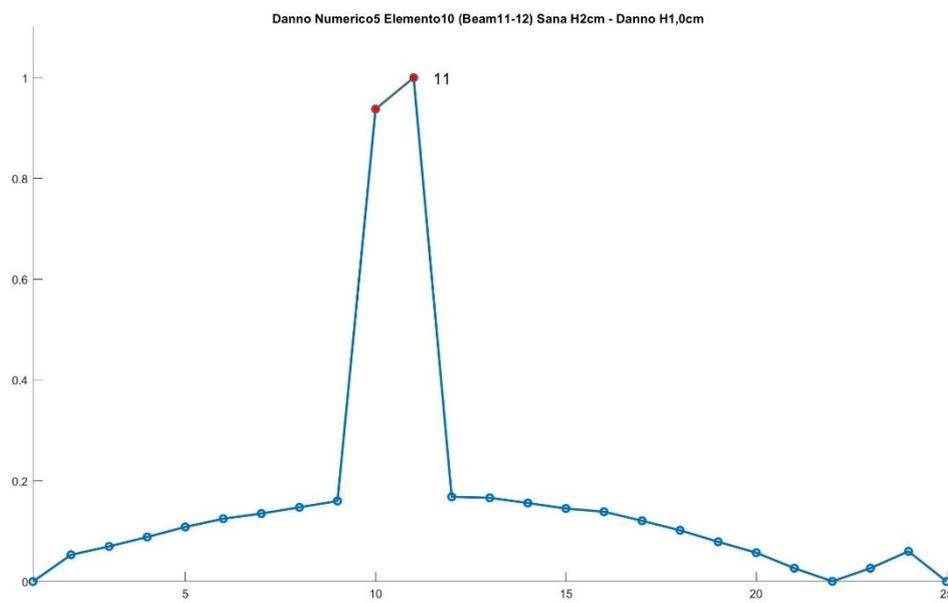


Figura 2.71: Plot di identificazione del danno nella trave con danno 5, H_{1,0}

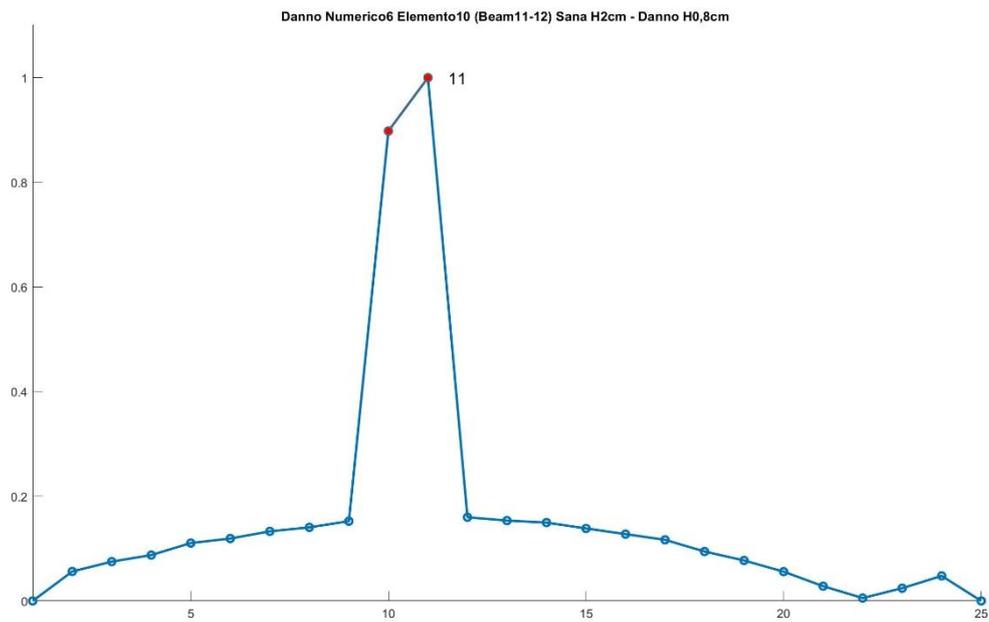


Figura 2.72: Plot di identificazione del danno nella trave con danno 6, H_{0,8}

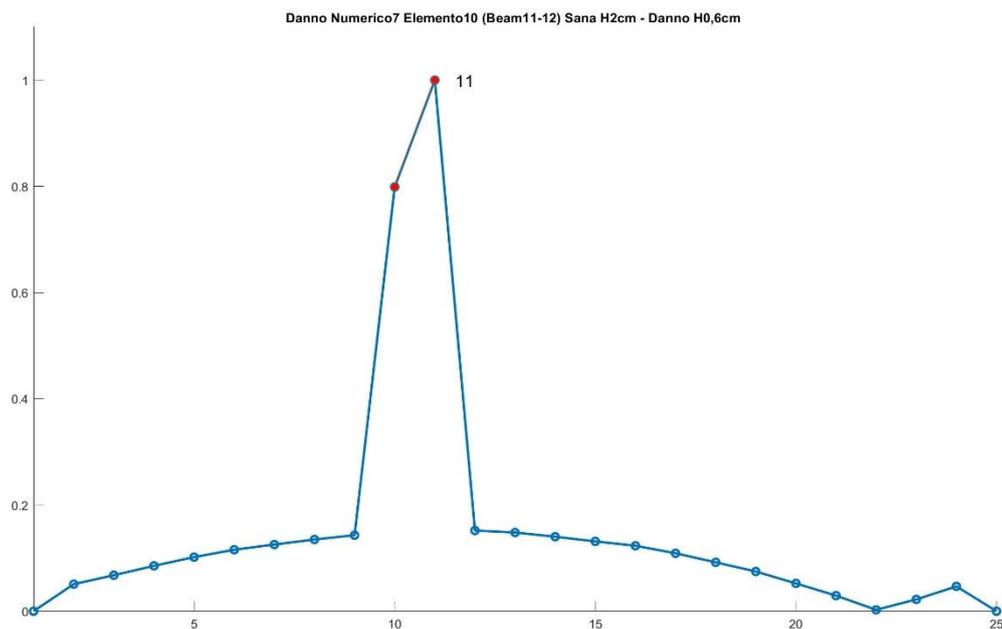


Figura 2.72: Plot di identificazione del danno nella trave con danno 6, H_{0,6}

Si evince dalle figure sovrastanti che l'algoritmo identifica correttamente la posizione dell'elemento Beam in cui è presente il danno simulato nell'analisi

numerica, ovvero l'elemento 10. Si conclude che l'algoritmo risulta prestante per ogni step di danno modellato e per i dati numerici in input.

2.5 MODELLAZIONE FEM TRAVE 12 ELEMENTI FINITI

Si modella attraverso il software Straus7 la trave doppiamente incastrata agli estremi con le stesse proprietà geometriche, meccaniche e del materiale della trave descritta nella precedente trattazione. Una volta modellata la trave sana, si procede anche in questo caso alla modellazione del danno. Per la trave discretizzata con 12 elementi finiti si danneggia l'elemento 5, corrispondente ai nodi 6-7. Si ricrea il danno modellando un cambio di sezione sull'elemento interessato, attraverso la creazione di una nuova proprietà.

Si opta di danneggiare in maniera localizzata e progressiva. Il danno si esegue quindi sempre sullo stesso elemento, l'elemento 5, il quale presenta una lunghezza fissa di 10 *cm* ed un'altezza variabile in base allo step di danno considerato.

Si modellano 5 differenti livelli di danno, partendo da un danneggiamento minimo corrispondente al 10 % dell'altezza iniziale dell'elemento 5 fino ad un danno massimo pari al 50% della geometria di partenza, ovvero si passa dalla condizione di trave sana con l'altezza dell'elemento 5 pari a $H = 2 \text{ cm}$ fino al danneggiamento massimo $H = 1 \text{ cm}$;

Si sceglie di ripetere esattamente lo studio dei paragrafi precedenti ma di diminuire il raffittimento della mesh al fine di effettuare un confronto con i risultati ottenuti con la trave discretizzata con 24 elementi finiti e soprattutto di verificare il livello di danno riconosciuto dall'algoritmo di identificazione del danno.

Per identificare i parametri dinamici necessari allo studio, si estrapolano dal software Straus7, avviando un'Analisi Natural Frequency, i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia per la trave sana che per cinque step di danno.

Si propone di seguito la modellazione della trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi discretizzata con 12 elementi finiti. Per il modello di trave sana e per ogni step di danno modellato si riportano tabellati i valori delle frequenze e dei modi di vibrare. Per sintesi di trattazione, si riporta l'andamento grafico dei 4 modi di vibrare esclusivamente per il modello di trave sana.



Figura 2.73: Modello trave sana discretizzata con 12 elementi, visualizzazione "Solid";

TRAVE SANA		MODELLO FEM 12 ELEMENTI FINITI				
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	18,746	3	0,086	0,213	-0,372	-0,541
f_2	51,667	4	0,294	0,621	-0,881	-0,959
f_3	101,232	5	0,549	0,919	-0,872	-0,362
f_4	167,081	6	0,786	0,912	-0,249	0,630
		7	0,951	0,565	0,540	0,829
		8	1,010	0,000	0,894	0,000
		9	0,951	-0,565	0,540	-0,829
		10	0,786	-0,912	-0,249	-0,630
		11	0,549	-0,919	-0,872	0,362
		12	0,294	-0,621	-0,881	0,959
		13	0,086	-0,213	-0,372	0,541

Tabella 2.15: Valori frequenze e modi di vibrare trave sana, 12 Elementi Finiti;

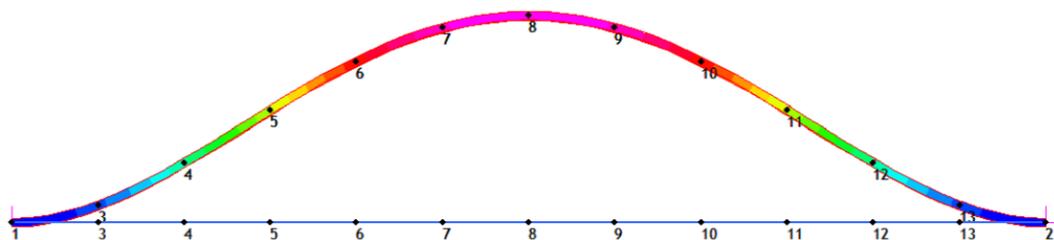


Figura 2.74: Primo Modo di Vibrare, trave sana 12 Elementi Finiti;

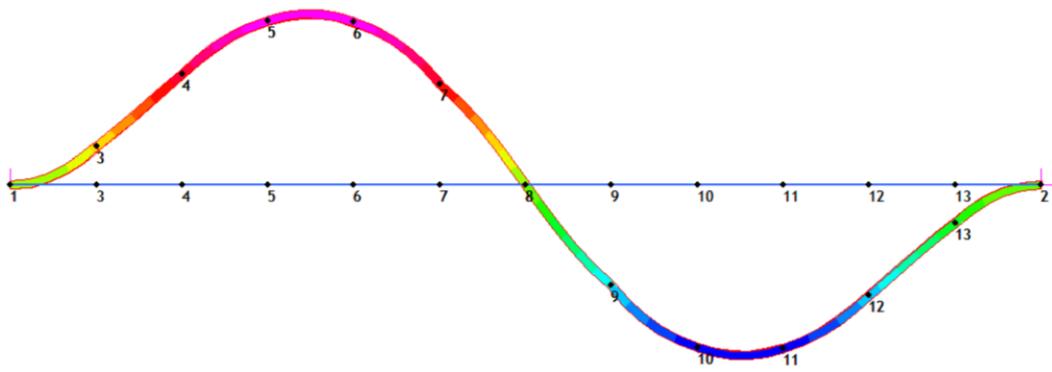


Figura 2.75: Secondo Modo di Vibrare, trave sana 12 Elementi Finiti;

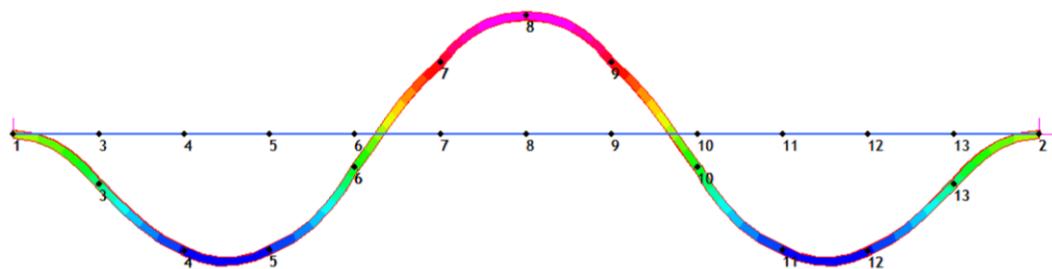


Figura 2.76: Terzo Modo di Vibrare, trave sana 12 Elementi Finiti;

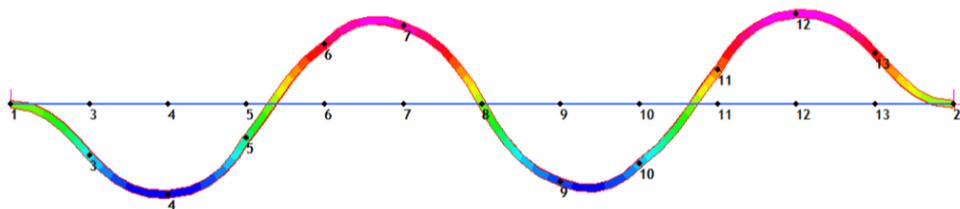


Figura 2.77: Quarto Modo di Vibrare, trave sana 12 Elementi Finiti;



Figura 2.78: Modello trave 12 Elementi Finiti, Danno 1



Figura 2.79: Zoom elemento 5, Danno 1;

DANNO 1_H1,8cm_BEAM 6-7						
MODELLO FEM 12 ELEMENTI FINITI						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	18,656	3	0,087	0,207	-0,376	0,539
f_2	51,072	4	0,297	0,609	-0,891	0,964
f_3	101,087	5	0,559	0,913	-0,882	0,373
f_4	164,201	6	0,805	0,934	-0,249	-0,669
		7	0,970	0,588	0,556	-0,856
		8	1,017	-0,001	0,893	0,035
		9	0,951	-0,574	0,536	0,831
		10	0,782	-0,919	-0,248	0,595
		11	0,545	-0,921	-0,864	-0,384
		12	0,291	-0,621	-0,873	-0,950
		13	0,085	-0,213	-0,368	-0,528

Tabella 2.16: Valori frequenze e modi di vibrare trave 12 Elementi Finiti, Danno1;



Figura 2.80: Modello trave12 Elementi Finiti, Danno 2;



Figura 2.81: Zoom elemento 5, Danno 2;

DANNO 2_H1,6cm_BEAM 6-7						
MODELLO FEM 12 ELEMENTI FINITI						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	18,495	3	0,088	0,200	-0,381	0,534
f_2	50,279	4	0,302	0,592	-0,902	0,967
f_3	100,809	5	0,570	0,903	-0,894	0,385
f_4	160,871	6	0,830	0,958	-0,251	-0,709
		7	0,994	0,610	0,577	-0,884
		8	1,024	-0,007	0,892	0,075
		9	0,948	-0,586	0,529	0,832
		10	0,774	-0,928	-0,248	0,556
		11	0,537	-0,924	-0,855	-0,411
		12	0,286	-0,620	-0,861	-0,943
		13	0,083	-0,212	-0,363	-0,516

Tabella 2.17: Valori frequenze e modi di vibrare trave 12 Elementi Finiti, Danno2;



Figura 2.82: Modello trave12 Elementi Finiti, Danno 3;



Figura 2.83: Zoom elemento 5, Danno 3;

DANNO 3_H1,4cm_BEAM 6-7	
MODELLO FEM 12 ELEMENTI FINITI	
MEDIA VALORI FREQUENZE	
FREQUENZE	
f_1	18,258
f_2	49,316
f_3	100,315
f_4	157,386

MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
3	0,089	0,191	-0,385	0,528
4	0,307	0,572	-0,913	0,967
5	0,584	0,890	-0,907	0,396
6	0,859	0,984	-0,258	-0,747
7	1,022	0,632	0,608	-0,912
8	1,032	-0,016	0,890	0,116
9	0,942	-0,603	0,518	0,833
10	0,764	-0,940	-0,251	0,515
11	0,527	-0,928	-0,845	-0,440
12	0,279	-0,620	-0,847	-0,939
13	0,081	-0,211	-0,357	-0,506

Tabella 2.18: Valori frequenze e modi di vibrare trave 12 Elementi Finiti, Danno3;



Figura 2.84: Modello trave 12 Elementi Finiti, Danno 4;



Figura 2.85: Zoom elemento 5, Danno 4;

DANNO 4_H1,2cm_BEAM 6-7	
MODELLO FEM 12 ELEMENTI FINITI	
MEDIA VALORI FREQUENZE	
FREQUENZE	
f_1	17,964
f_2	48,294
f_3	99,432
f_4	154,243

MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
3	0,090	0,183	-0,386	0,520
4	0,312	0,554	-0,919	0,961
5	0,599	0,879	-0,921	0,402
6	0,890	1,013	-0,276	-0,781
7	1,055	0,651	0,652	-0,942
8	1,040	-0,027	0,889	0,150
9	0,936	-0,621	0,501	0,835
10	0,751	-0,951	-0,257	0,479
11	0,514	-0,931	-0,834	-0,469
12	0,271	-0,618	-0,830	-0,940
13	0,079	-0,210	-0,348	-0,499

Tabella 2.19: Valori frequenze e modi di vibrare trave 12 Elementi Finiti, Danno4;



Figura 2.86: Modello trave 12 Elementi Finiti, Danno 5;



Figura 2.87: Zoom elemento 5, Danno 5;

DANNO 5_H1,0cm_BEAM 6-7																																																																		
MODELLO FEM 12 ELEMENTI FINITI																																																																		
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">MEDIA VALORI FREQUENZE</th> </tr> <tr> <th colspan="2">FREQUENZE</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>f_1</td> <td>17,680</td> </tr> <tr> <td>f_2</td> <td>47,393</td> </tr> <tr> <td>f_3</td> <td>97,748</td> </tr> <tr> <td>f_4</td> <td>152,006</td> </tr> </tbody> </table>		MEDIA VALORI FREQUENZE		FREQUENZE		f_1	17,680	f_2	47,393	f_3	97,748	f_4	152,006																																																					
MEDIA VALORI FREQUENZE																																																																		
FREQUENZE																																																																		
f_1	17,680																																																																	
f_2	47,393																																																																	
f_3	97,748																																																																	
f_4	152,006																																																																	
<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="5">MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE</th> </tr> <tr> <th>Nodo</th> <th>MODO_1</th> <th>MODO_2</th> <th>MODO_3</th> <th>MODO4</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>3</td> <td>0,091</td> <td>0,177</td> <td>-0,379</td> <td>0,510</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>0,317</td> <td>0,542</td> <td>-0,910</td> <td>0,948</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0,613</td> <td>0,877</td> <td>-0,931</td> <td>0,399</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>0,919</td> <td>1,047</td> <td>-0,318</td> <td>-0,808</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>1,088</td> <td>0,663</td> <td>0,725</td> <td>-0,978</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>1,051</td> <td>-0,038</td> <td>0,892</td> <td>0,171</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>0,932</td> <td>-0,635</td> <td>0,474</td> <td>0,839</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0,741</td> <td>-0,958</td> <td>-0,275</td> <td>0,456</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>0,504</td> <td>-0,931</td> <td>-0,826</td> <td>-0,493</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>0,264</td> <td>-0,615</td> <td>-0,810</td> <td>-0,947</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>0,076</td> <td>-0,208</td> <td>-0,338</td> <td>-0,498</td> </tr> </tbody> </table>		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE					Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4	3	0,091	0,177	-0,379	0,510	4	0,317	0,542	-0,910	0,948	5	0,613	0,877	-0,931	0,399	6	0,919	1,047	-0,318	-0,808	7	1,088	0,663	0,725	-0,978	8	1,051	-0,038	0,892	0,171	9	0,932	-0,635	0,474	0,839	10	0,741	-0,958	-0,275	0,456	11	0,504	-0,931	-0,826	-0,493	12	0,264	-0,615	-0,810	-0,947	13	0,076	-0,208	-0,338	-0,498
MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE																																																																		
Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4																																																														
3	0,091	0,177	-0,379	0,510																																																														
4	0,317	0,542	-0,910	0,948																																																														
5	0,613	0,877	-0,931	0,399																																																														
6	0,919	1,047	-0,318	-0,808																																																														
7	1,088	0,663	0,725	-0,978																																																														
8	1,051	-0,038	0,892	0,171																																																														
9	0,932	-0,635	0,474	0,839																																																														
10	0,741	-0,958	-0,275	0,456																																																														
11	0,504	-0,931	-0,826	-0,493																																																														
12	0,264	-0,615	-0,810	-0,947																																																														
13	0,076	-0,208	-0,338	-0,498																																																														

Tabella 2.20: Valori frequenze e modi di vibrare trave 12 Elementi Finiti, Danno5;

2.5.1 Identificazione danno trave 12 elementi finiti

Si utilizza il medesimo algoritmo di identificazione del danno implementato nel software “Matlab”, il quale individua la posizione dell’elemento danneggiato.

Nel caso in esame, di trave discretizzata con 12 elementi finiti si è modellato in Straus7 il danno sull’elemento 5 della trave, ossia l’elemento di nodi 6-7. Tale numerazione nel software è dovuta al fatto che gli incastri sono posizionati alle estremità di nodi rispettivamente 1 e 2. L’elemento 5 danneggiato, si identifica invece in Matlab con i nodi 5-6 in quanto le estremità fornite in input, hanno numerazione 1 e 13.

Si assegnano in prima battuta in input all' algoritmo i dati geometrici e meccanici della trave. Successivamente, attraverso un file ".mat" si assegnano i valori delle frequenze e degli spostamenti verticali relativi ai modi di vibrare sia per la trave integra che per i 5 livelli di trave danneggiata ottenuti mediante Analisi Natural Frequency dalla modellazione agli elementi finiti effettuata con Straus7.

Si carica nell' algoritmo un file "final_data.mat" contenente i vettori relativi ai quattro valori delle frequenze di trave sana "f_und", di trave danneggiata "f_dam" e le quattro forme modali sia per la trave sana che danneggiata, rispettivamente sotto il nome di "shape_und" e "shape_dam"

L' algoritmo restituisce il plot delle forme modali numeriche della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la differenza assoluta tra le curvature valutando così la posizione esatta del danno.

Si riportano i plot delle forme modali e della differenza di curvatura per danno massimo e minimo, ossia per il danno sull' altezza dell' elemento 5 pari a: H_1,8cm, H_1,0. Infine, si propongono i plot di identificazione del danno per tutti gli scenari di danno modellati.

- Identificazione danno numerico 1

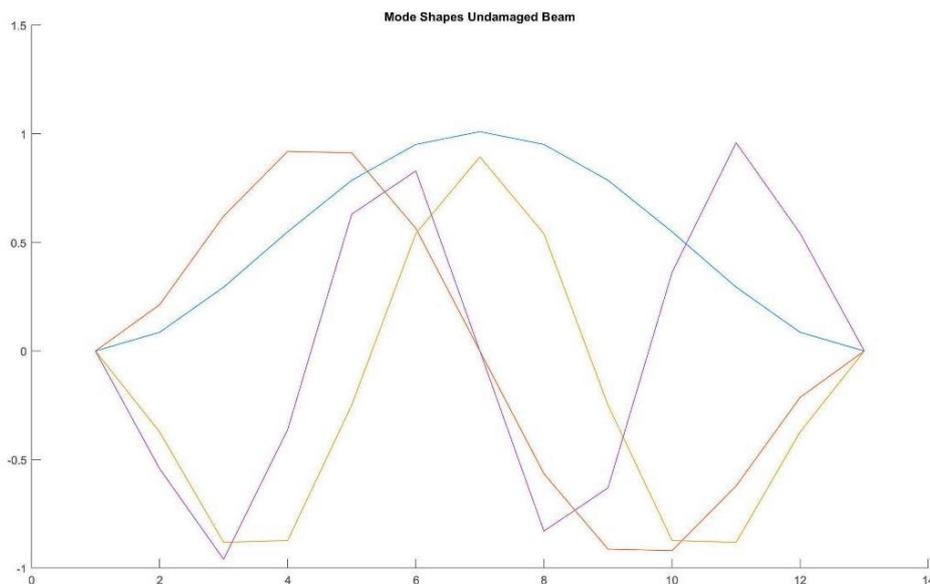


Figura 2.88: Plot forme modali numeriche trave sana, 12 Elementi finiti;

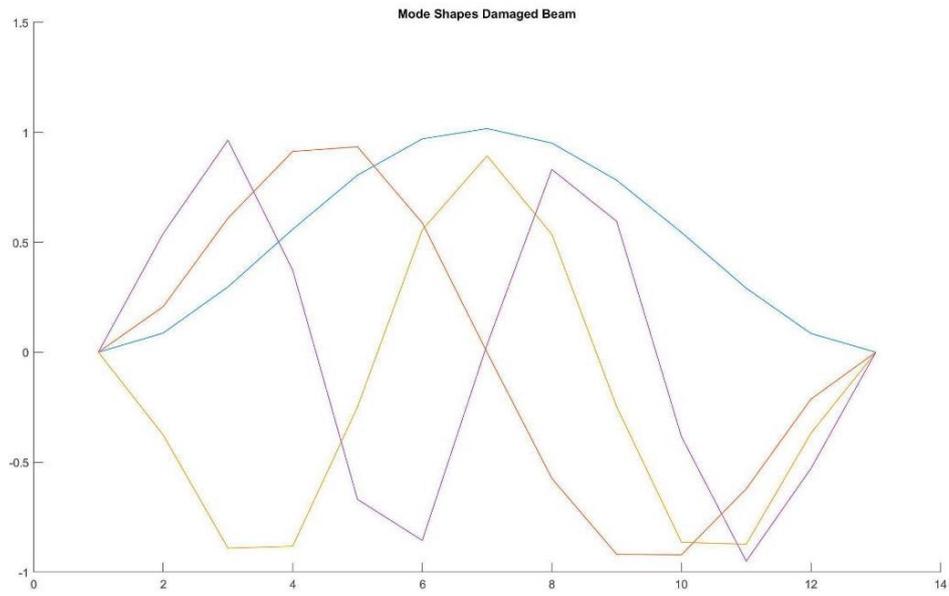


Figura 2.89: Plot forme modali numeriche trave danneggiata 1 H_1,8cm;

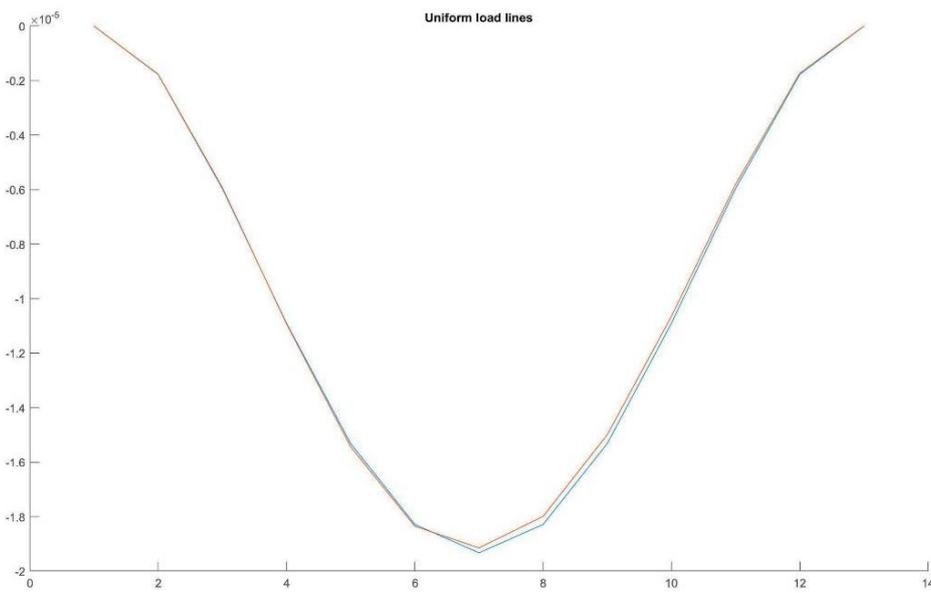


Figura 2.80: Plot Uniform Load Line danno 1 H_1,8 cm;

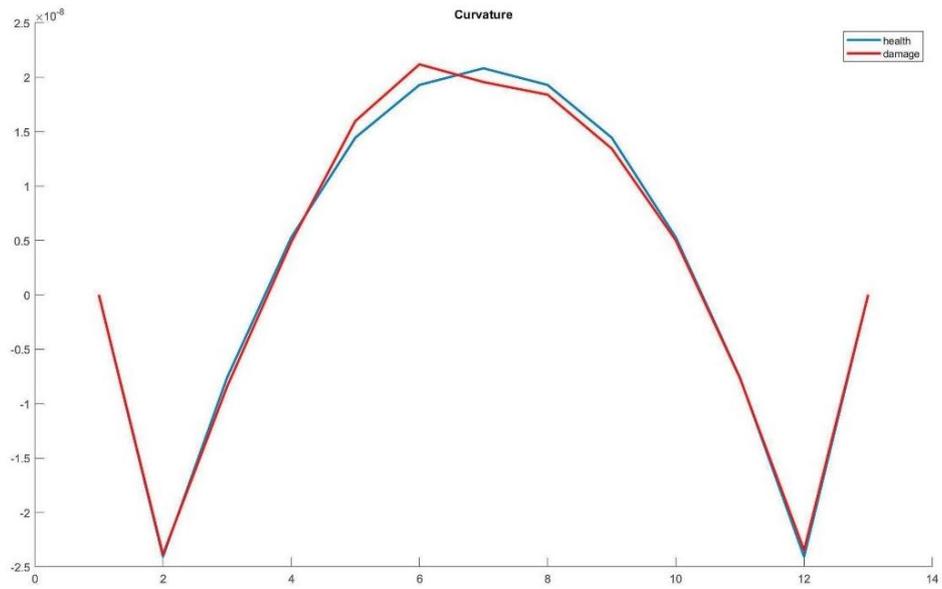


Figura 2.91: Plot differenza di curvatura danno 1 H_{1,8} cm;

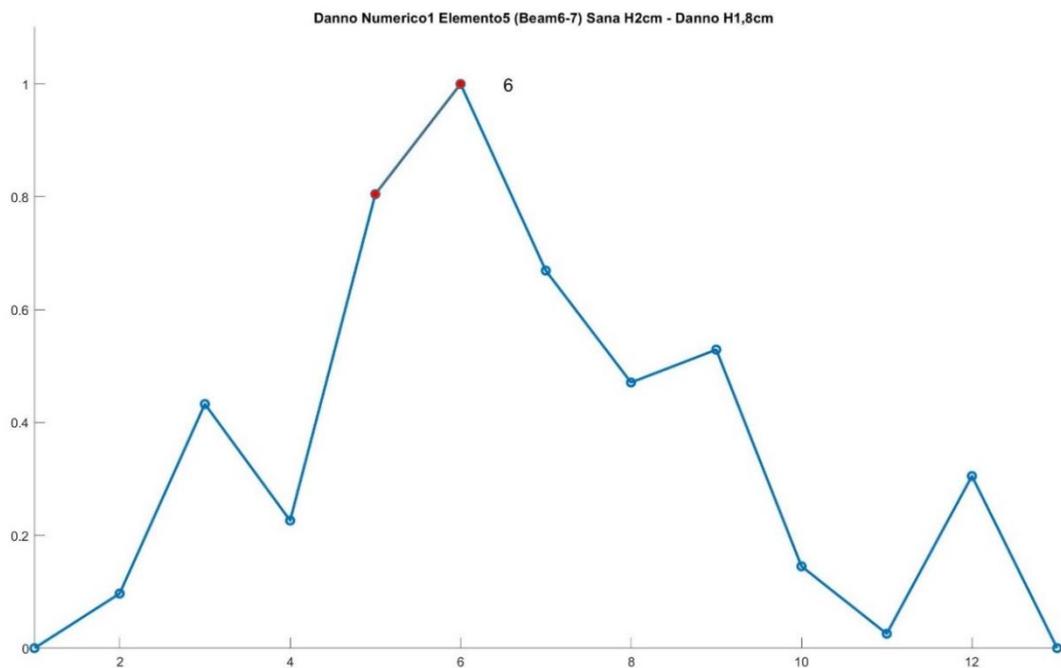


Figura 2.92: Plot di identificazione del danno, trave 12 Elementi Finiti con danno 1, H_{1,8};

- Identificazione danno numerico 2

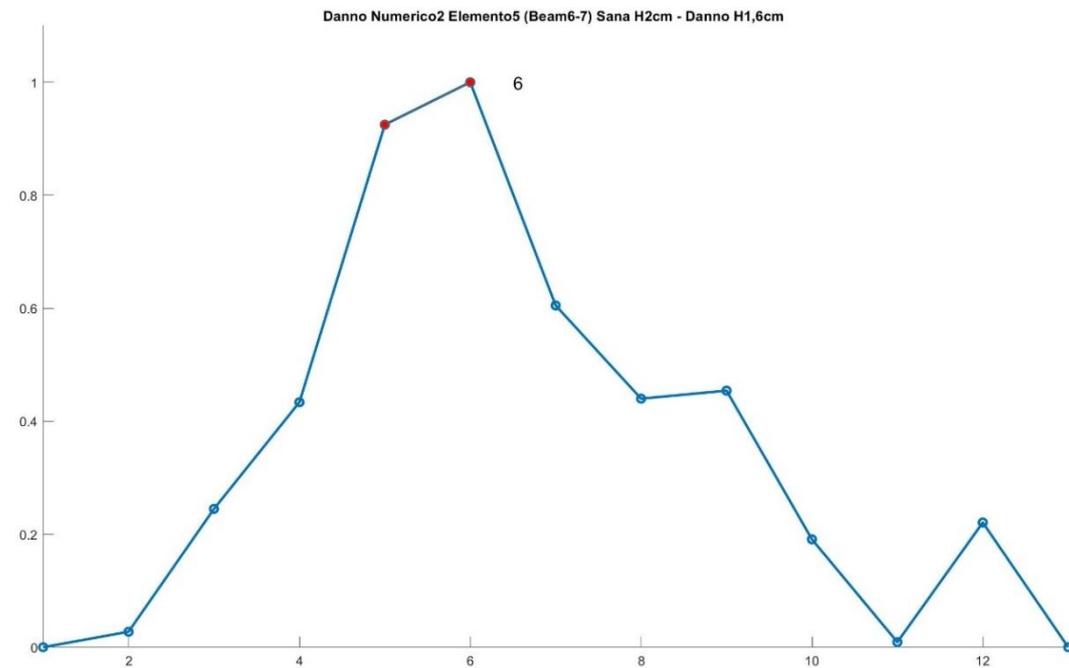


Figura 2.93: Plot di identificazione del danno, trave 12 Elementi Finiti con danno 2, H_{1,6};

- Identificazione danno numerico 3

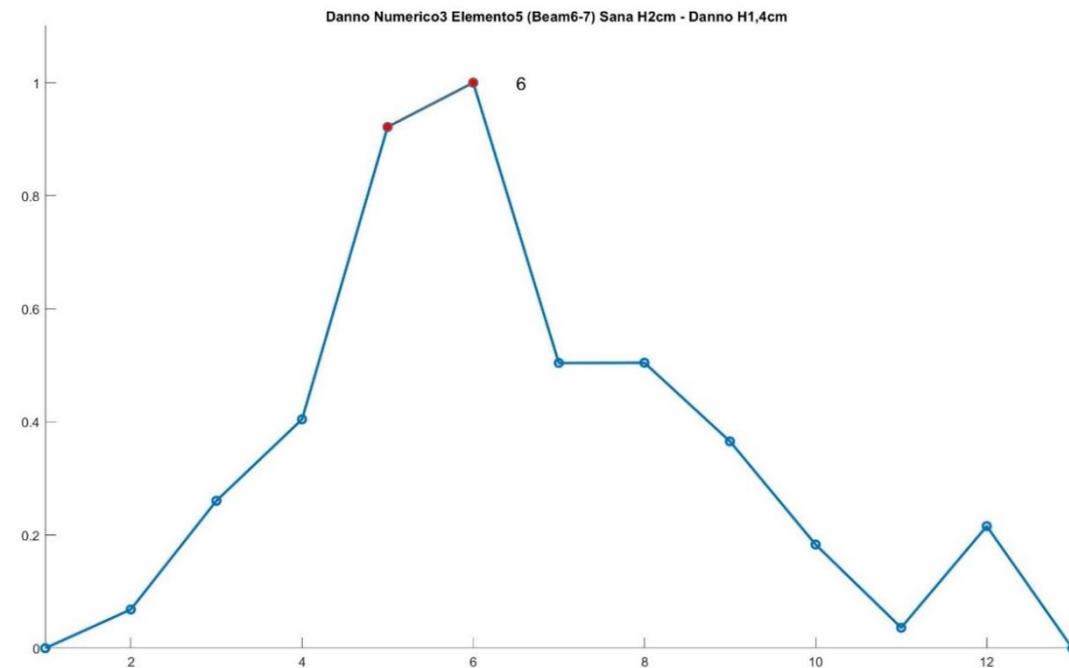


Figura 2.94: Plot di identificazione del danno, trave 12 Elementi Finiti con danno 3, H_{1,4};

- Identificazione danno numerico 4

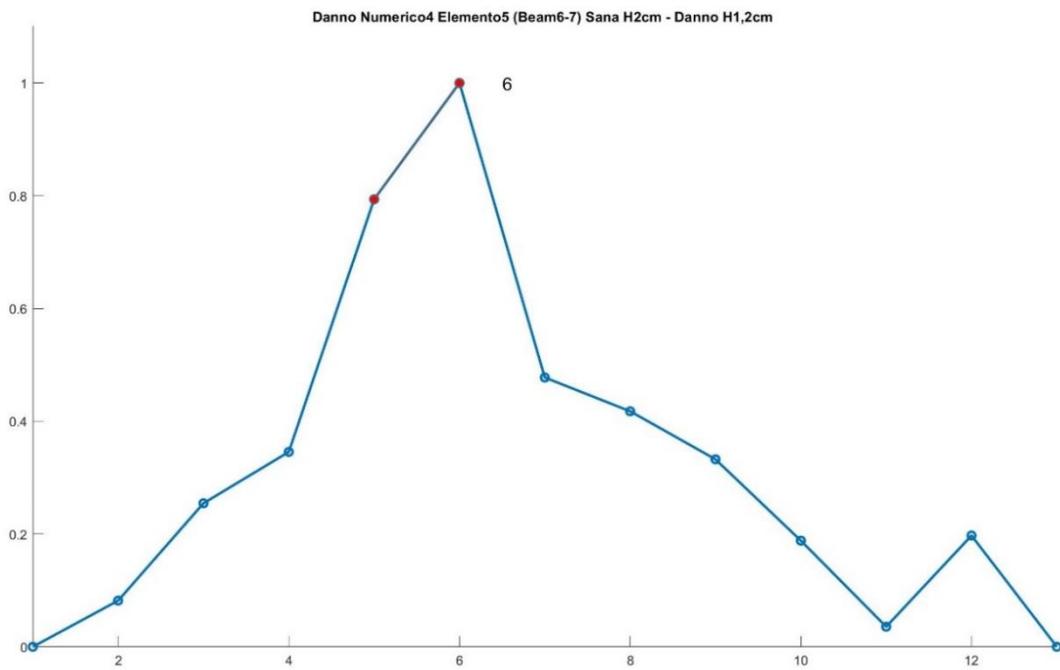


Figura 2.95: Plot di identificazione del danno, trave 12 Elementi Finiti con danno 4, H_{1,2};

- Identificazione danno numerico 5

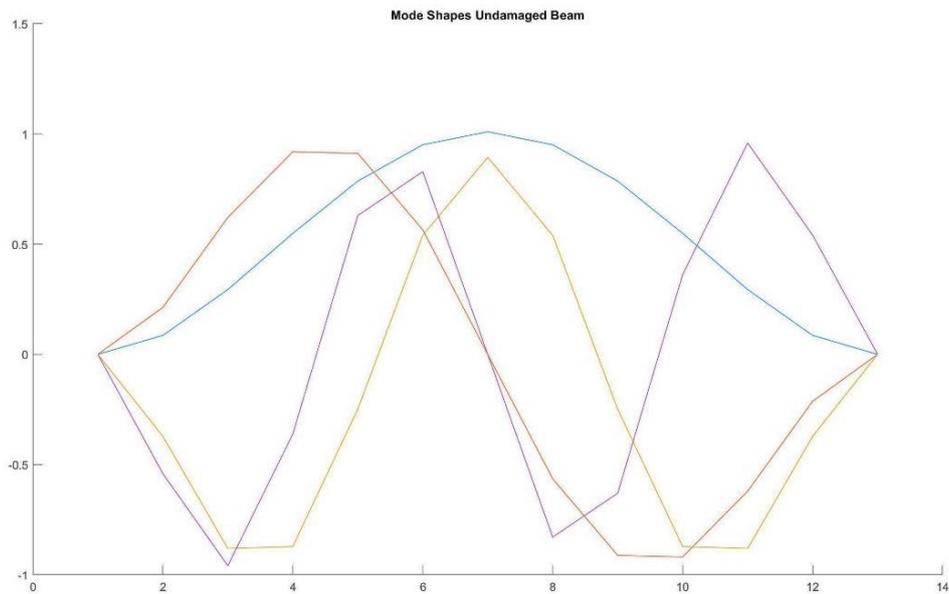


Figura 2.96: Plot forme modali numeriche trave sana, 12 Elementi finiti;

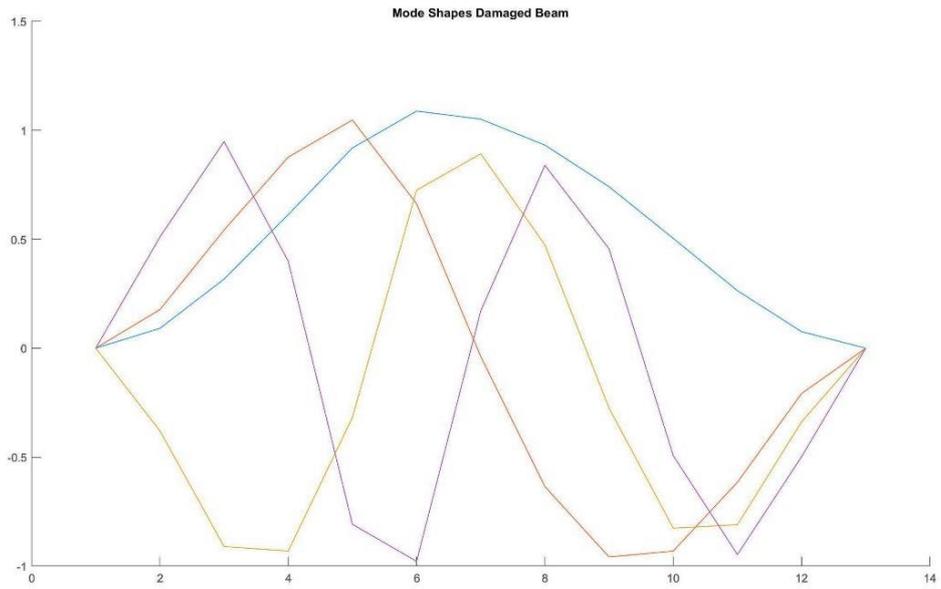


Figura 2.97: Plot forme modali numeriche trave danneggiata 5 H_{1,0}cm;

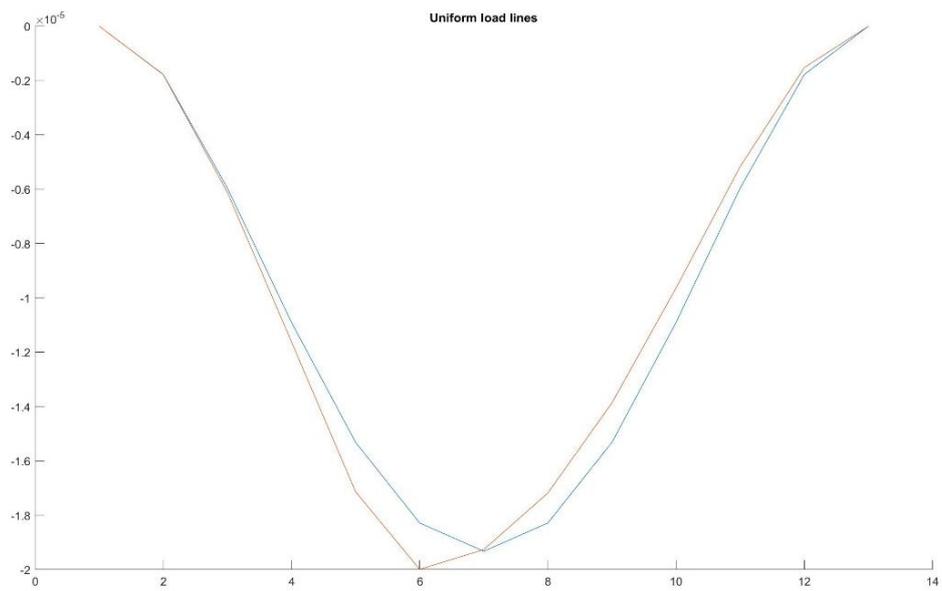


Figura 2.98: Plot Uniform Load Line danno 5 H_{1,0} cm;

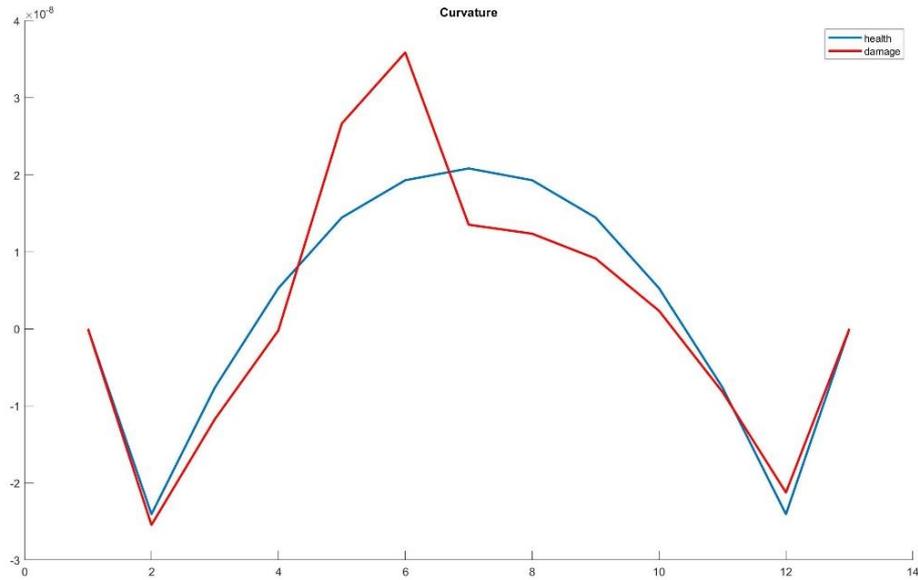


Figura 2.99: Plot differenza di curvatura danno 5 H_{1,0} cm;

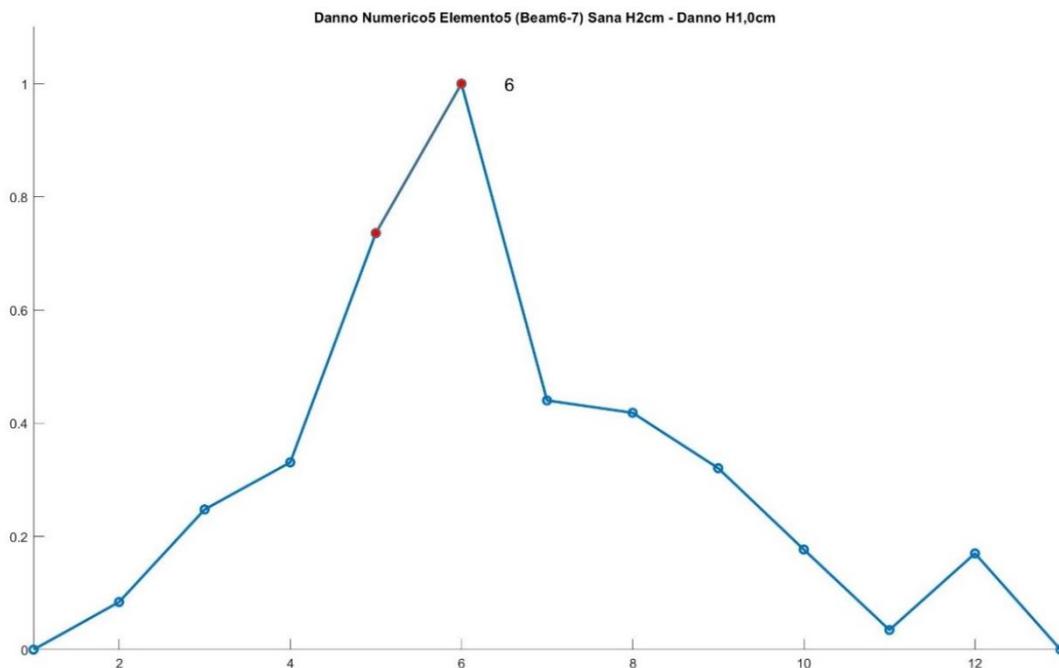


Figura 2.100: Plot di identificazione del danno, trave 12 Elementi Finiti con danno 5, H_{1,0};

Dalle figure sovrastanti il picco del “Damage Index” ricade per ogni step di danno sul nodo 6, è evidente che l’algoritmo, quindi, identifica correttamente la posizione in cui è stato modellato il danno, ovvero l’elemento 5 corrispondente ai nodi 5 e 6.

Si afferma che caricando in input i valori ottenuti da analisi numerica, l'algoritmo identifica esattamente la posizione dove viene modellato il difetto sia per la trave discretizzata con 24 elementi finiti che con la trave discretizzata con 12 elementi finiti. In tutte e due le tipologie di mesh, più fitta e più rada, l'algoritmo risulta certamente prestante per ogni step di danno.

Capitolo 3

TRATTAZIONE SPERIMENTALE

3. PROVE DINAMICHE SPERIMENTALI

3.1 FASI OPERATIVE DI UNA PROVA DINAMICA

Le prove di carico dinamiche sono effettuate sottoponendo la struttura da analizzare ad una vibrazione forzata, spesso ad una eccitazione armonica controllata, e registrandone la risposta in termini di spostamenti, di velocità e di accelerazioni.

A grandi linee, l'esecuzione di una prova dinamica comporta le seguenti fasi: Costruzione di un modello interpretativo, un modello numerico ad elementi finiti è uno strumento indispensabile per stimare le frequenze teoriche e le forme modali della struttura oggetto della sperimentazione dinamica.

Quando la prova sperimentale viene eseguita in laboratorio su una struttura semplice, come può essere una trave incastrata agli estremi, come quella oggetto di studio allora si impiega anche un modello matematico per interpretare i risultati.

Sulla base dei risultati del modello numerico, si stabiliscono il numero, il tipo e le posizioni degli eccitatori e dei sensori. Il modello numerico può essere impiegato anche per stimare il livello di eccitazione necessario ad ottenere una risposta nel campo di sensibilità dei sensori.

Sulla struttura vengono posizionate le apparecchiature di eccitazione e i trasduttori di misura. Tutte le attrezzature vengono collegate ad un laboratorio mobile, dove è installato il sistema di controllo dell'eccitazione e di acquisizione delle risposte.

La prova è condotta in modo che la risposta della struttura ad una data frequenza possa essere identificata con la risposta ad una eccitazione stazionaria.

Le eccitazioni (ampiezza e fase di ogni eccitatore) e le risposte (ampiezza e fase di ogni trasduttore) sono acquisite e conservate per le successive elaborazioni.

Le risposte dei vari punti di misura possono essere correlate con le forze eccitanti, determinando le funzioni di trasferimento sperimentali.

La generica funzione di trasferimento viene ricavata eccitando la struttura con una forzante armonica, la cui frequenza eccitante Ω viene fatta variare nel campo di frequenza di interesse.

L'esame dei picchi presenti nei grafici di tali funzioni rivela il numero dei modi di vibrare contenuti nel campo di frequenza esplorato e fornisce una prima stima delle frequenze proprie, degli smorzamenti e delle relative forme modali.

I picchi di amplificazione sufficientemente distanti della curva di risposta, indicano che i modi di vibrare sono disaccoppiati. Pertanto, in corrispondenza di una risonanza ω_i ($i = 1,2,3$) l'ampiezza di un picco non è alterata dalla presenza dei picchi attigui. Con questa ipotesi, la risposta globale della struttura, nell'intorno della frequenza propria ω_i è fornita dal contributo del solo modo risonante, essendo piccoli i contributi dei modi non risonanti.

I risultati sono tanto più accurati quanto minore è lo smorzamento della struttura, poiché risulta meno importante il contributo dei modi di vibrare non risonanti.

Giova rilevare che, occorre sempre analizzare funzioni di trasferimento sperimentali relative a differenti punti della struttura. Difatti, il metodo può causare una errata determinazione di una frequenza propria, se la funzione di trasferimento sperimentale è relativa ad un nodo del generico modo di vibrare in osservazione. In pratica, è spesso difficile applicare la frequenza di risonanza, poiché le apparecchiature di eccitazione funzionano con passi discreti di frequenze.

Per quanto riguarda la precisione della valutazione della funzione di trasferimento $H_{ij}^*(\Omega)$, essa dipende dagli inevitabili errori (rumore) sempre presenti nelle varie misure.

Gli errori sono associati ai vari metodi impiegati. È da notare che la presenza del rumore può essere rilevata dalla funzione di coerenza.

Al termine delle prove, si procede allo smantellamento delle installazioni provvisorie ed al recupero delle attrezzature per ulteriori impieghi. Inoltre, il modello numerico ad elementi finiti viene calibrato sulla base delle rilevazioni accelerometriche sperimentali operando, ad esempio, sulle caratteristiche meccaniche dei materiali. La schematizzazione numerica può essere considerata una rappresentazione attendibile della realtà, tanto più affidabile quanto più accuratamente il modello numerico è in grado di riprodurre i dati sperimentali.

3.2 IDENTIFICAZIONE DINAMICA

Il presente paragrafo ha l'obiettivo di introdurre alla modalità di identificazione delle caratteristiche dinamiche adottate per le indagini sperimentali.

La sperimentazione comprende le seguenti fasi:

- 1) eccitazione della struttura;
- 2) rilevazione delle grandezze fisiche;
- 3) acquisizione e analisi dei dati.

Le caratteristiche geometriche ed il peso della struttura determinano sia il tipo di eccitazione che il tipo di strumentazione di misura.

L'eccitazione e la strumentazione, poi, condizionano la tecnica di analisi.

Ogni ricerca sperimentale va progettata in modo che la risposta misurata contenga tutte le informazioni necessarie.

In linea con il processo di identificazione dei parametri di un sistema, proposto dal testo *Viola E. "Fondamenti di dinamica e vibrazione delle*

strutture” volume secondo capitolo 6 “Tecniche di identificazione dinamica” si descrivono di seguito le principali fasi.

3.2.1 Eccitazione della struttura

L'eccitazione viene applicata alla struttura mediante opportune attrezzature capaci di generare forze, oppure di imporre spostamenti, aventi un andamento prefissato nel tempo.

L' eccitazione può essere

- Artificiale, generata da apposite apparecchiature di eccitazione dinamica
- Naturale, denominata eccitazione ambientale in quanto non richiede la messa in opera di un eccitatore per forzare il sistema ma si tratta delle azioni che operano normalmente sulla struttura di esercizio ne sono un esempio il vento per una ciminiera oppure il traffico per un ponte.

Le prove condotte con l'eccitazione naturale sono più semplici da eseguire, poiché non richiedono la messa in opera di un eccitatore, ma risulta più complessa l'elaborazione dei risultati, poiché l'eccitazione non è controllabile.

Per la generazione di forze controllate nel tempo si impiegano gli eccitatori, detti anche vibratori.

Le apparecchiature di eccitazione dinamica necessarie per imprimere la forzante possono essere in distinte come:

- Eccitatori fissi, poiché collegati alla struttura durante le operazioni di eccitazione
- Eccitatori non fissi

Gli eccitatori meccanici, elettrodinamici ed elettroidraulici si dicono eccitatori a contatto, oppure eccitatori fissi, poiché sono collegati alla struttura durante tutte le operazioni di eccitazione, indipendentemente dal tipo di eccitazione generata.

Altri dispositivi quali razzi, armi da fuoco, martelli, pendoli d'impatto prendono il nome di eccitatori non fissi.

In base alle modalità di generazione della forza dinamica, i generatori di vibrazione comprendono:

- eccitatori meccanici (vibrochina);
- eccitatori elettrodinamici;
- eccitatori elettroidraulici;
- eccitatori idraulici;
- martelli ad impatto.

In base alle, caratteristiche della forza erogata, si possono avere i seguenti tipi di eccitazione:

- eccitazione sinusoidale semplice;
- eccitazione sinusoidale a frequenza lentamente variabile (slow sine sweep);
- eccitazione periodica;
- eccitazione casuale;
- eccitazione impulsiva.

Nell'analisi sperimentale, le forzanti si applicano al sistema per ricavare le funzioni sperimentali di risposta in frequenza. È da notare che, per un sistema lineare, le frequenze misurate dalle curve di risposta del sistema risultano indipendenti dal tipo di eccitazione impiegata nella sperimentazione.

Nello studio effettuato, si utilizzano eccitatori non fissi e il tipo di eccitazione generata dallo strumento è impulsiva.

Tra tutte le tipologie di eccitazione sopra elencate si propone in maniera dettagliata la descrizione dell'eccitazione sinusoidale e poi quella impulsiva selezionata come modalità per effettuare le prove dinamiche sulla trave oggetto di studio.

L'eccitazione sinusoidale semplice è costituita dalla forzante armonica

$$p_k = p_k(t) = P_{0k}e^{i\Omega t}$$

di ampiezza P_{0k} e frequenza assegnata Ω .

La variazione della pulsazione Ω della forzante viene comandata a passi discreti $\Delta\Omega$, in modo manuale o automatico.

Per misurare la risposta dinamica $u_{rk}(\Omega + \Delta\Omega)$, nel punto τ , corrispondente alla frequenza $\Omega + \Delta\Omega$, una volta nota la risposta $u_{rk}(\Omega)$, occorre aspettare la scomparsa del transitorio innescato dalla variazione di frequenza $\Delta\Omega$.

Questa metodologia consente di infittire i punti di analisi nelle vicinanze delle frequenze proprie ω_k , e di diradarli nelle zone lontane da queste, essendo possibile imporre il passo $\Delta\Omega$.

La funzione di trasferimento sperimentale $H_{rk}^*(\Omega)$ viene definita, per ogni pulsazione Ω della forzante e per ogni punto di misura τ sulla struttura, dalla relazione (6.3.36):

$$H_{rk}^* = \frac{u_r}{p_k} = \frac{u_{0\tau}}{p_{0k}}$$

essendo la risposta nel punto τ :

$$u_r = U_r e^{i(\Omega t - \varphi_r)} = u_0 e^{i(\Omega t - \varphi_\tau)}$$

Nell'espressione, φ_τ denota la differenza di fase della risposta rispetto alla forzante.

Il metodo in esame viene impiegato per costruire la curva di risposta in frequenza;

il comportamento del sistema è dominato da un basso numero di frequenze discrete, poiché viene eccitato un singolo modo risonante per volta.

L'eccitazione impulsiva è prodotta da un impulso generato, ad esempio, da un martello dinamometrico.

È da rilevare che, mentre con il metodo sinusoidale la funzione di trasferimento viene costruita punto per punto, variando la frequenza eccitante, con il metodo impulsivo, essa viene ricavata simultaneamente per tutte le pulsazioni della forzante.

3.2.2 Apparecchiature di eccitazione

Tra i generatori di vibrazioni si ricordano:

- Vibrodina

La vibrodina, è detta anche vibratore meccanico a masse eccentriche. Si compone di due masse montate eccentricamente su due dischi, che ruotano in un piano alla stessa velocità ed in versi opposti. La velocità ai dischi è impressa da un motore elettrico, comandato da un regolatore esterno, che consente la variazione della velocità di rotazione secondo un programma prefissato.

- Eccitatore elettrodinamico
- Eccitatore elettroidraulico
- Tavola vibrante
- Vibrodina idraulica
- Martello ad impatto

Il martello ad impatto è lo strumento utilizzato per le prove dinamiche effettuate in laboratorio. È un comune martello al quale vengono aggiunti un trasduttore di forza ed una punta, che può essere di acciaio, di plastica, oppure di gomma. La rigidità della punta, a parità di rigidità della struttura e di massa totale del martello, caratterizza il periodo $T = T_c$ e, quindi, la forma dell'impulso. Tale periodo T_c cresce passando dalla punta di acciaio a quella di gomma.

Il periodo T_c dipende dalla massa di impatto e dalla rigidità delle superfici a contatto. Inoltre, T_c cresce all'aumentare della massa d'impatto.

Lo spettro di frequenza è continuo, con ampiezza quasi costante nell'intervallo da zero a $\Omega_c = 1 / T_c$.

La forza realmente eccitante la struttura è uguale alla massa totale del martello per l'accelerazione durante l'impatto. Tale forza è diversa da quella misurata dal trasduttore, poiché si riferisce ad una massa differente che non contempla la punta del martello e il trasduttore di forza.

I martelli possono essere costruiti con masse variabili da pochi grammi fino ad alcune tonnellate. I campi di frequenza interessati dall'eccitazione variano da zero a 5000 Hz per i martelli più piccoli, e da 0 a 10 Hz per quelli più grandi. La combinazione costituita dalla testa e dalla massa del martello consente di trasferire energia alla struttura nel campo di frequenza di interesse.

Il martello ad impatto, che rappresenta lo strumento più comune per generare eccitazioni impulsive, presenta vantaggi e svantaggi.

Per quanto concerne i pregi, occorre rilevare che questo strumento è relativamente poco costoso ed è adatto per misure rapide.

Sul fronte opposto, deve essere evidenziata la difficoltà di riprodurre impulsi successivi uguali a quelli precedenti. Inoltre, per trasmettere sufficiente energia alla struttura sono richieste forze con picchi molto alti, che possono danneggiare localmente la struttura nel punto in cui le forze vengono applicate.

È da notare, inoltre, la particolare attenzione che merita l'esecuzione di un impatto. Esso deve essere isolato, poiché la produzione di impatti multipli crea difficoltà nella fase di trattamento dei segnali.

Si riporta la forma d'onda prodotta da un impatto e il relativo spettro di frequenza.

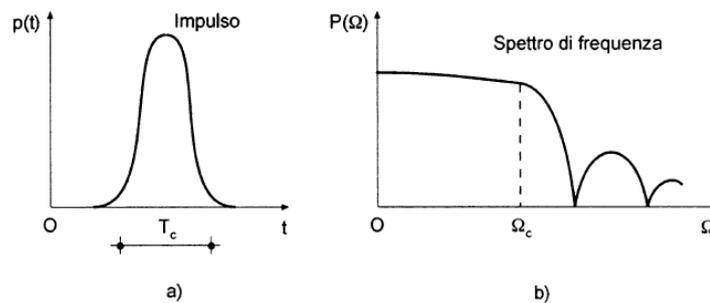


Figura 3.1: Impulso e Spettro di Frequenza;

3.2.3 Rilevazione delle grandezze fisiche

Le grandezze fisiche di interesse riguardano principalmente:

- spostamenti;
- velocità;
- accelerazioni;
- deformazioni;
- forze;
- pressioni.

La rilevazione delle suddette grandezze fisiche avviene, generalmente, sotto forma di tensione elettrica, mediante strumenti di misura, detti trasduttori, oppure sensori.

Gli strumenti di misura, applicati alla struttura, sono in grado di generare un segnale elettrico proporzionale al valore assunto dalla grandezza da misurare.

Esistono trasduttori di spostamenti, di velocità (sismometri), di accelerazioni, di deformazioni, di forze e di pressioni.

Le caratteristiche principali degli strumenti di misura delle grandezze fisiche riguardano la sensibilità e la precisione, il campo di frequenza d'impiego, nonché il numero di canali di misura registrabili contemporaneamente.

In ogni posizione da strumentare si può scegliere di installare solo un sensore, oppure una terna per la determinazione completa della risposta vettoriale locale.

Lo strumento di misura comprende un circuito elettrico, nel quale un elemento sensibile rivela la variazione, prodotta su di esso dalla vibrazione, attraverso le modifiche di un parametro elettrico del circuito. La variazione, dopo essere rivelata, viene amplificata e analizzata. Generalmente, lo strumento di misura viene accoppiato ad una centralina, in grado di condizionare il segnale proveniente dal trasduttore. Pertanto, si fa riferimento alla catena di misura (strumento accoppiato a centralina), piuttosto che al sensore.

La sensibilità statica è il rapporto tra la tensione elettrica di uscita $e(t)$ ed il valore della grandezza meccanica di ingresso, $g(t)$.

La risoluzione viene definita come il più piccolo cambiamento misurabile nella grandezza di ingresso.

È da notare che, il segnale di uscita di uno strumento di misura (o dell'intera catena) non è nullo, neppure quando è nullo il valore della grandezza di ingresso. Ogni uscita elettrica non causata direttamente dall'ingresso, viene definita rumore.

La maggior parte dei trasduttori disponibili sul mercato ha una massa variabile tra 10 e 50 grammi, con un campo di frequenza tra zero e 12.000 Hz.

Esistono anche accelerometri della massa di 0,5 grammi, con un campo di frequenza utile fra 1 e 25.000 Hz.

La massa dell'accelerometro merita attenzione quando si esegue la misura su piccoli oggetti. Difatti, una massa eccessiva può alterare le frequenze di misura dell'oggetto. Come regola generale, la massa dell'accelerometro non deve superare un decimo della massa dinamica della parte vibrante su cui è montato.

Nella scelta dell'accelerometro, occorre sempre assicurarsi che il suo campo di frequenza copra il campo di interesse.

Un accelerometro non riesce, in generale, a misurare accelerazioni inferiori a $0,001\text{m} / \text{s}^2$ a causa del rumore elettrico introdotto dai cavi e dal circuito amplificatore. Il limite superiore, invece, è determinato dalla resistenza strutturale dell'accelerometro, oppure, dalla frequenza risonante del sistema massa-molla dell'accelerometro stesso.

Nel seguito viene descritto l'accelerometro piezoelettrico.

Il trasduttore più impiegato nelle misure di vibrazione è l'accelerometro piezoelettrico. Il principio di funzionamento è basato sulla proprietà, manifestata da alcuni cristalli, di generare cariche elettriche proporzionali alle forze ad essi applicate.

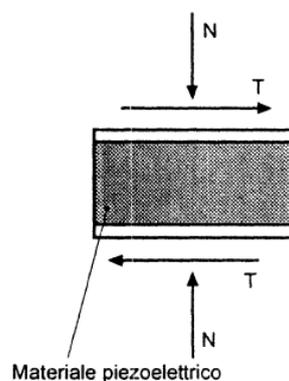


Figura 3.2: Principio di funzionamento di un accelerometro piezoelettrico;

Si riporta in figura il principio di funzionamento di un accelerometro piezoelettrico.

Le configurazioni più comuni dell'accelerometro piezoelettrico sono quelle a compressione e a taglio.

La distinzione deriva dalle forze di compressione N , o di taglio T esercitate dalla massa sismica sull'elemento piezoelettrico, disposto all'interno del corpo cilindrico dell'accelerometro piezoelettrico rappresentato nella figura sottostante.

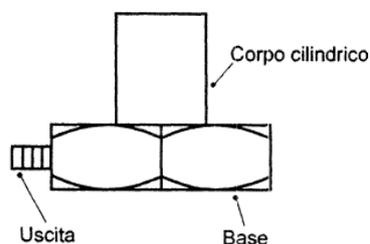


Figura 3.3: Geometria di un accelerometro piezoelettrico

L'accelerometro può essere fissato al punto di misura mediante un perno filettato, oppure viene incollato con un sottile strato di cera d'api o di colla epossidica.

Se il punto di misura appartiene ad una superficie piana e magnetica, per il fissaggio dell'accelerometro si può impiegare un magnete permanente. In alcuni casi l'accelerometro è montato sulla parte superiore di una sonda impugnata manualmente.

Per i vari sistemi di fissaggio, si ottengono le frequenze di risonanza dell'accelerometro di prova. Giova rilevare che, per contenere gli errori sulle frequenze misurate, la frequenza di impiego dell'accelerometro non deve superare $1/3$ della sua frequenza di risonanza.

I moderni accelerometri e i relativi cavi sono studiati in modo da ridurre al minimo l'influenza dell'ambiente (umidità, variazioni di temperatura, rumore acustico, sostanze corrosive, vibrazioni trasversali, ecc.) sulla misura della risposta.

3.2.4 Acquisizione ed analisi dei dati

Le grandezze rilevate dai trasduttori fissati sulla struttura vengono trasmesse allo strumento di misura mediante un collegamento elettrico. I segnali vanno acquisiti e registrati per le successive elaborazioni.

La registrazione dei segnali provenienti dai trasduttori di misura delle grandezze relative all'eccitazione ed alla risposta può essere diretta sia in forma analogica sia in maniera digitale.

Per quanto concerne l'acquisizione in forma digitale, i segnali provenienti dai trasduttori vengono inviati all'unità di conversione analogico/digitale A/D e quindi immagazzinati sotto forma di una sequenza di numeri, nella memoria del calcolatore.

I convertitori A/D accettano in ingresso decine e decine di segnali ed hanno frequenze di campionamento dell'ordine 50-100 k Hz.

L'acquisizione digitale richiede la conoscenza a priori delle frequenze massime contenute nei segnali, per poter scegliere le frequenze di campionamento opportune.

Sui segnali acquisiti in ingresso e in uscita vi sono programmi che effettuano

- trasformate ed anti trasformate di Fourier;
- densità spettrale auto ed incrociata di potenza e di energia;
- funzioni di trasferimento e di coerenza;
- analisi statistiche.

Si precisa che l'unità di acquisizione dei segnali elettrici e l'unità di controllo dell'eccitazioni sono integrate in un'unica centralina.

L'esecuzione delle prove dinamiche è controllata da un calcolatore di processo che svolge le seguenti funzioni:

- 1) regola automaticamente i parametri dell'eccitazione: ampiezza e frequenza della forza applicata alla struttura;
- 2) acquisisce i dati relativi alla risposta.

Gli strumenti quali accelerometri, estensimetri (per la misura delle deformazioni e, quindi, degli sforzi) vengono collegati ad un convertitore analogico-digitale, che campiona ad istanti prefissati i vari segnali;

3) costruisce e conserva in memoria le varie funzioni di trasferimento. Per ciascuna grandezza misurata e per ogni valore della frequenza eccitante, il calcolatore di processo calcola l'intensità U_τ dell'armonica fondamentale e la sua differenza di fase φ_τ rispetto alla forza. La conoscenza delle funzioni di trasferimento $H_{\tau k}(\Omega)$ consente di ricavare i parametri modali.

3.2.5 Funzione di Trasferimento

La metodologia adottata per descrivere la relazione tra le variabili di ingresso e di uscita è il modello delle funzioni di trasferimento, anche denominato modello della risposta in frequenza, basato appunto sulla conoscenza delle funzioni di trasferimento anche denominate funzioni di risposta in frequenza.

La generica componente H_{rs} , denominata recettanza, è definita dal rapporto:

$$H_{rs} = \frac{u_r(t)}{p_s(t)}$$

Dove:

- $u_r(t)$ è lo spostamento del nodo r ;
- $p_s(t)$ è la forzante applicata al nodo s ;

Si farà riferimento all'inertanza, definita come:

$$A_{rs} = \frac{a_r(t)}{p_s(t)}$$

Con:

- $a_r(t)$ accelerazione del nodo r .

Si farà riferimento all'inertanza in quanto gli strumenti che forniscono le variabili di uscita adottati nelle indagini sperimentali sono accelerometri, dunque, anche la simulazione numerica verrà esposta sulla base delle funzioni di trasferimento in termini di accelerazione.

Il rapporto che sussiste tra recettanza ed inertanza è esprimibile tramite:

$$A(\Omega) = -\Omega^2 H(\Omega)$$

Considerando la trave oggetto di studio come un sistema discreto ad N gradi di libertà, il modello matematico è definito dalla matrice delle funzioni $H_{rs} = H_{sr}$ di trasferimento:

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} & \cdots & H_{1N} \\ H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} & \cdots & H_{1N} \\ & & \cdots & & & \\ H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} & \cdots & H_{1N} \\ & & \cdots & & & \\ H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1s} & \cdots & H_{1N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_r(t) \\ \vdots \\ p_N(t) \end{bmatrix}$$

3.2.6 Teorema del campionamento

I segnali generati dai trasduttori sono, per loro natura, analogici. La loro conversione in segnali digitali, ossia in una serie di numeri che devono possedere le stesse caratteristiche del segnale originario, avviene attraverso un processo di «digitalizzazione». Tale processo consiste nel misurare i valori assunti dal segnale continuo originario in un certo insieme di istanti. L'intervallo di tempo Δt tra due misure successive viene chiamato intervallo di campionamento, mentre il numero di valori (campioni) prelevati in un secondo è detto frequenza di campionamento f_s del segnale ed è misurata in Hz.

Affinché il segnale campionato conservi tutta l'informazione connessa con il segnale originario, il teorema di Shannon, detto anche teorema del campionamento afferma che si deve avere:

$$f_s \geq 2f_{\max}$$

essendo f_{\max} la frequenza più elevata contenuta nel segnale, ossia la larghezza di banda.

Se si indica con T_c l'intervallo di osservazione, nel quale cade un numero N_c di campioni presi con frequenza f_s , risulta $T_c = f_s N_c$.

È da notare che, se si impone la condizione

$$f_s \geq 2f_{\max}$$

il minimo numero di campioni deve essere:

$$N_c = 2f_{\max}T_c$$

Il numero N_c viene denominato gradi di libertà del segnale.

Nelle ipotesi del teorema di Shannon, i valori campionati consentono di ricostruire il segnale originario in modo esatto solo quando i valori stessi risultano campionati su un intervallo di ampiezza infinita. L'errore dovuto alla ricostruzione del segnale, fatta con un numero finito di campioni, viene detto errore di troncamento. Nella ricostruzione di un segnale, a partire dai valori campionati, si possono avere altre tipologie di errori, quali:

- errore di aliasing, dovuto alla non limitazione di banda;
- errore dovuto al rumore;
- errore dovuto al non perfetto sincronismo degli istanti di campionamento.

Le analisi generalmente possono essere condotte:

- nel dominio del tempo;
- nel dominio delle frequenze;
- sulle ampiezze.

3.2.7 Roving Hammer e Roving Sensor

Nelle prove dinamiche su una trave, quando si parla di "Roving Hammer" e "Roving Sensor" ci si riferisce a tecniche specifiche utilizzate per valutare le proprietà dinamiche del materiale e della struttura. Queste tecniche si impiegano nell'ingegneria strutturale nella ricerca per analizzare il comportamento dinamico delle travi sotto varie condizioni di carico e sollecitazione. Si propone una spiegazione dettagliata:

Il "Roving Hammer" è una tecnica di prova dinamica che utilizza un martello strumentato per applicare un impulso di forza ad una struttura, nel caso in esame ad una trave in alluminio. La peculiarità di tale tecnica si trova nel posizionare gli accelerometri in due posizioni significative della struttura e variando di volta in volta la posizione della battuta con il martello. Tale

tecnica è utilizzata per determinare le caratteristiche dinamiche della struttura, come le frequenze naturali e le modalità di vibrazione.

La trave in alluminio viene posizionata su supporti che consentono il libero movimento. Si fissano gli accelerometri o altri tipi di sensori di movimento in punti chiave lungo la trave. La posizione dei sensori dipende dai modi di vibrazione che si vogliono analizzare. Il martello utilizzato è dotato di un sensore di forza che misura l'impulso applicato. Questi martelli possono avere punte intercambiabili (in gomma, plastica, acciaio) per variare la natura dell'impulso (più o meno smorzato). Prima dell'uso, il martello deve essere calibrato per garantire la precisione della misura dell'impulso e successivamente si utilizza per colpire la trave in un punto specifico. L'impulso deve essere applicato in modo rapido e preciso. Il sensore di forza nel martello registra l'entità e la durata dell'impulso applicato. Gli accelerometri misurano la risposta della trave all'impulso. Questi dati vengono raccolti da un sistema di acquisizione dati e possono includere accelerazione, velocità e spostamento. I dati raccolti vengono analizzati per determinare le frequenze naturali, le modalità di vibrazione e le risposte dinamiche della trave. Si utilizza l'analisi in frequenza (trasformata di Fourier) per ottenere le frequenze naturali. La tecnica del Roving Hammer è semplice da eseguire e consente di ottenere rapidamente dati utili, fornendo dati accurati sulle caratteristiche dinamiche della struttura.

Il "Roving Sensor" è una tecnica di monitoraggio avanzata che utilizza sensori per analizzare in dettaglio le caratteristiche dinamiche della trave sotto varie condizioni di carico. In particolare, questa tecnica utilizza sia sensori di movimento fissi che mobili.

Nello specifico, si posiziona un accelerometro in un punto fisso della struttura per tutta la durata della prova e si fa variare la posizione del secondo accelerometro; in questo caso si eseguono le battute con il martello sempre in un punto.

Nel caso studio, si sceglie di variare la posizione del secondo accelerometro. La trave viene preparata e posizionata su supporti, simile al setup per il Roving Hammer. I sensori di movimento si posizionano in punti strategici

lungo la trave, scelti in base alla distribuzione prevista delle modalità di vibrazione.

I sensori registrano le variazioni di spostamento, accelerazione, e deformazione. I dati vengono raccolti in tempo reale da un sistema di acquisizione dati. I dati raccolti possono essere visualizzati in tempo reale su un monitor, consentendo una valutazione immediata della risposta dinamica della trave. I dati sono analizzati utilizzando software specializzati per determinare le frequenze naturali, i modi di vibrazione, e altre caratteristiche dinamiche.

La tecnica del Roving Sensor, consente un monitoraggio continuo delle caratteristiche dinamiche della trave, fornisce una comprensione approfondita delle risposte dinamiche sotto diverse condizioni di carico e ambientali. Tale tecnica risulta molto versatile, in quanto i sensori possono essere facilmente riposizionati per coprire diverse aree della trave e per varie configurazioni di prova.

Entrambe le tecniche sono utilizzate in numerosi settori, tra cui l'ingegneria strutturale al fine di valutare la sicurezza e la stabilità di strutture come ponti, edifici e altre infrastrutture. Si utilizzano anche nella ricerca e nello sviluppo di materiali per studiare le proprietà dinamiche di nuovi materiali e compositi. Infine, tali tecniche trovano ampio utilizzo nella manutenzione di strutture esistenti per monitorare le condizioni delle strutture in servizio e prevenire guasti attraverso l'analisi delle risposte dinamiche.

Le tecniche del Roving Hammer e del Roving Sensor, con i loro approcci complementari, forniscono un quadro completo delle proprietà dinamiche al fine di garantire strutture sicure e affidabili.

3.3 PROVE DINAMICHE SU TRAVE SANA

Nel presente paragrafo, si illustrano i risultati ottenuti dall'analisi sperimentale effettuata presso il laboratorio LISG di Ingegneria Strutturale e Geotecnica dell'Università di Bologna. Si procede descrivendo nel dettaglio

tutti gli step necessari all'esecuzione della prova dinamica volta all'identificazione delle caratteristiche dinamiche della trave doppiamente incastrata in alluminio oggetto di studio.

3.3.1 Preparazione alla prova

In prima battuta si discretizza la trave esattamente come fatto nel modello numerico; si divide in 24 elementi finiti ognuno di lunghezza pari a 10 cm. Si identificano i nodi assegnando ad essi la stessa numerazione della modellazione in Straus7. Inoltre, trattandosi di una trave in alluminio, non è possibile applicare direttamente il sensore con un magnete in quanto l'alluminio è un materiale inerte rispetto ai campi magnetici.

Dunque, per poter collocare i sensori per l'avvio della prova dinamica, si posizionano in corrispondenza dei nodi delle rondelle in acciaio di diametro pari a 2 cm incollandole sulla trave con colla cianoacrilica.

Si riporta di seguito la documentazione fotografica.



Figura 3.4: Discretizzazione trave in alluminio;



Figura 3.5: Incollaggio rondelle metalliche di 2 cm;



Figura 3.5: Numerazione nodi;



Figura 3.6: Numerazione nodi e ammortamento vincoli;



Figura 3.7: Trave in alluminio posizionata per la prova dinamica;

Posizionati i vincoli d'incastro e ammortati alle estremità, si procede al fissaggio della strumentazione per l'avvio della prova dinamica.

3.3.2 Strumentazione utilizzata per la prova

La strumentazione utilizzata per eseguire la caratterizzazione dinamica della trave è la seguente:

- accelerometri piezoelettrici unidirezionali;
- martello strumentato;
- centralina di acquisizione;

- computer fisso dotato di scheda di acquisizione dati.

Si effettua una prima acquisizione su trave sana con la tecnica del Roving Hammer.

Si utilizzano due accelerometri, mantenuti fissi per tutta la durata della prova. Si posiziona il primo sul nodo 14 corrispondente alla mezzeria della trave ed il secondo in corrispondenza del nodo 10, ossia ad $L/3$ dell'intera lunghezza d'inflessione della trave.

Si riporta lo zoom di posizionamento degli accelerometri con magneti sulle rondelle nei punti sopra indicati.



Figura 3.8: Accelerometro 1 sul nodo 14 ad $L/2$;



Figura 3.9: Accelerometro 2 sul nodo 10 ad $L/3$;



Figura 3.10: Posizionamento degli accelerometri;

Si utilizzano, *accelerometri piezoelettrici* in particolare uniassiali a compressione, i quali si basano sulla proprietà di alcuni cristalli contenuti al loro interno di generare delle cariche elettriche proporzionali alle forze applicate. Il cristallo piezoelettrico si trova sotto la massa sismica e i due elementi dell'involucro che viene poi collegato alla struttura.

Questi strumenti operano in modo quasi statico, dove il rapporto di frequenza risulta:

$$r = \frac{\Omega}{\omega} \ll 1$$

dove:

- Ω : frequenza propria della struttura;
- ω : frequenza propria dell'accelerometro

Essendo la pulsazione propria definita come:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Considerando la massa sismica contenuta nell'accelerometro molto piccola, allora la pulsazione propria dell'oscillatore risulterà elevata e di conseguenza il rapporto r molto minore di uno. Lavorando in zona quasi statica, lo strumento riesce a seguire la risposta della struttura alla quale è collegato in quanto il coefficiente di amplificazione dinamica è circa nullo.

Per contenere gli errori sulle frequenze ottenute sperimentalmente, la frequenza di impiego dell'accelerometro non deve superare $\frac{1}{3}$ della

frequenza di risonanza, dove quest'ultima varia in funzione della tipologia di collegamento utilizzato per collegare lo strumento alla struttura; si riporta in fig.3.11 la risposta in frequenza teorica dell'accelerometro in funzione del collegamento.

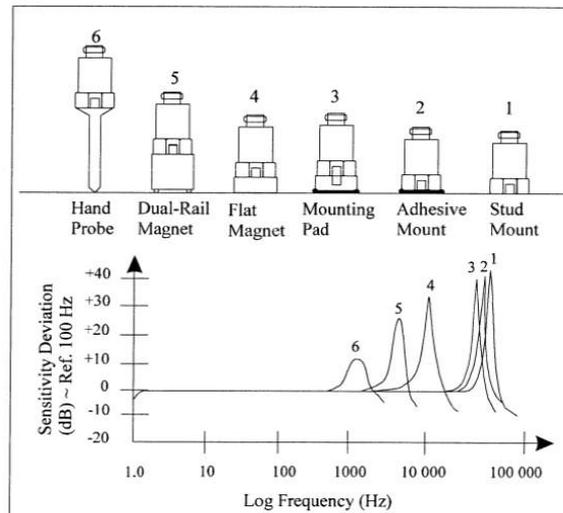


Figura 3.11: Risposta in frequenza dell'accelerometro in funzione del collegamento;

Si riportano, le specifiche degli accelerometri in questione estrapolate dal manuale degli strumenti.

Performance	ENGLISH	SI	
Sensitivity(± 10 %)	500 mV/g	51.0 mV/(m/s ²)	
Measurement Range	± 10 g pk	± 98 m/s ² pk	
Frequency Range(± 5 %)	0.5 to 3000 Hz	0.5 to 3000 Hz	
Resonant Frequency	≥ 20 kHz	≥ 20 kHz	
Phase Response(± 5 °)	2 to 3000 Hz	2 to 3000 Hz	
Broadband Resolution(1 to 10,000 Hz)	0.00005 g rms	0.0005 m/s ² rms	[1]
Non-Linearity	≤ 1 %	≤ 1 %	[2]
Transverse Sensitivity	≤ 5 %	≤ 5 %	[3]

Figura 3.12: Specifiche accelerometri;

Il cavo di collegamento tra l'accelerometro e la centralina di acquisizione è caratterizzato da un attacco di tipo VLC mentre per il collegamento cavo-accelerometro si utilizza un attacco di tipo Thread coassiale filettato.



Figura 3.13: Collegamento Cavo-Accelerometro;

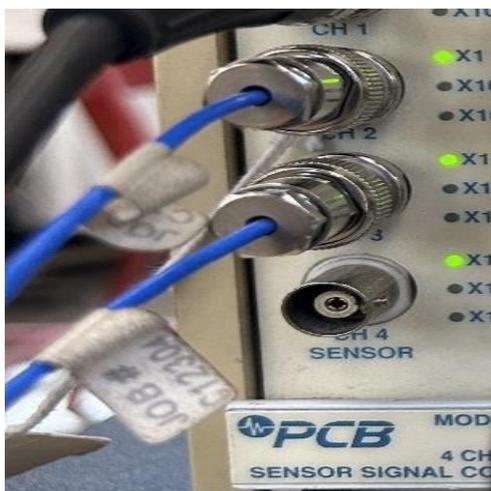


Figura 3.14: Cavo di collegamento Accelerometro-Centralina;

Per eccitare la struttura si utilizza il *martello ad impulso* che imprime la forza impulsiva alla trave. A seconda della tipologia di punta utilizzata, come riportato nel certificato di calibrazione, si utilizza un coefficiente di conversione da millivolt (mV) a Newton (N) differente. Si riporta il certificato di calibrazione ed uno schema del martello tratti dal manuale dello strumento.

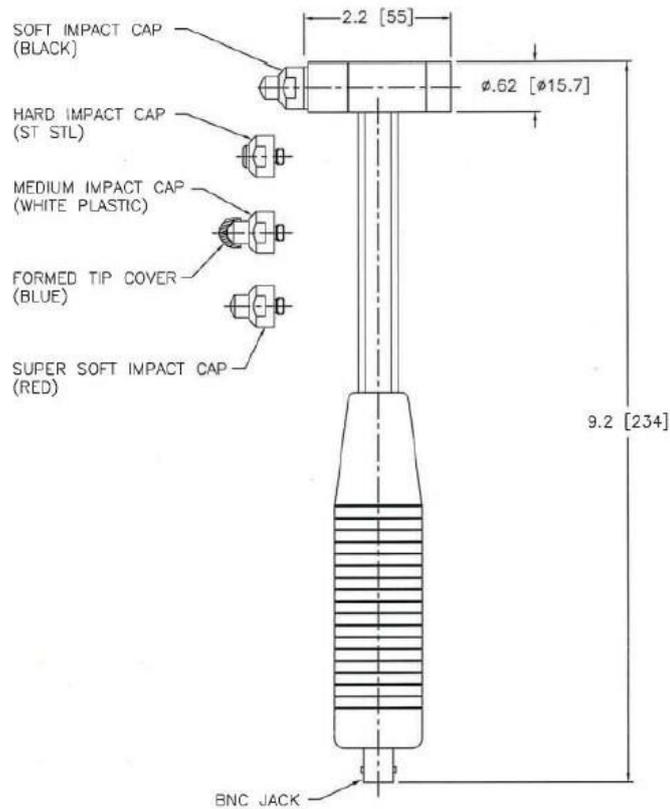


Figura 3.15: Schema martello ad impulso;

HAMMER SENSITIVITY:

Hammer Configuration	Tip	Plastic/Vinyl, with tuning mass.	Plastic/Vinyl, with tuning mass.	Plastic/Vinyl
Extender		None	Aluminum	None
Hammer Sensitivity	mV/lb	55.9	58.1	51.8
	(mV/N)	12.56	13.06	11.65

Above data is valid for all supplied tips.

Figura 3.16: Certificato di calibrazione del martello ad impulso

Attraverso la prova dinamica per la trave in esame, si identificano le prime quattro frequenze, dove per la quarta ci si aspetta come da analisi numerica una frequenza pari circa a $f_4 = 161,11 \text{ Hz}$; per tale motivo si adotta una punta di tipo "soft", in particolare quella di colore nero; questa scelta è stata valutata sulla base del grafico riportato in

fig.3.17, dove è visibile la curva di risposta del martello al variare della tipologia di punta utilizzata.

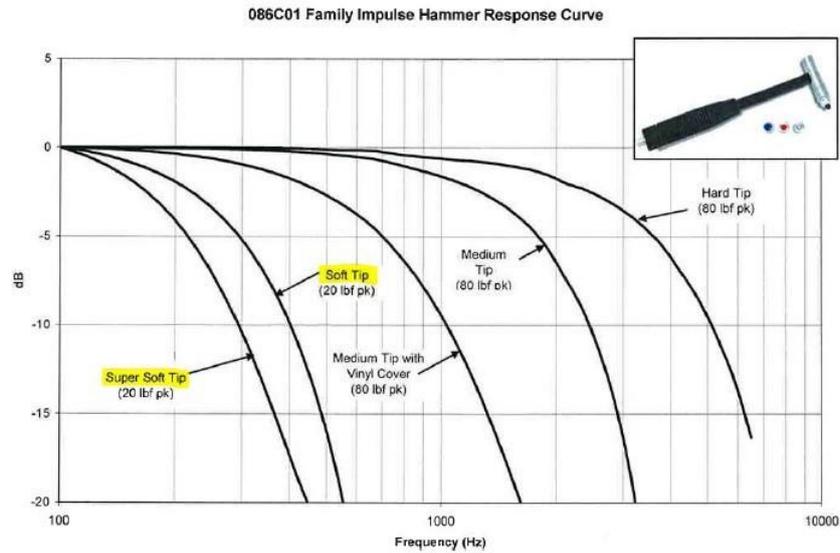


Figura 3.17: Curve di risposta del martello al variare della punta utilizzata;

Si riportano in dettaglio la punta di colore nero utilizzata per la prova ed il cavo di connessione utilizzato per il collegamento con la centralina. Il cavo è dotato di connettori di tipo BNC coassiali in ingresso e in uscita, come visibile in fig.3.19.



Figura 3.18: Punta utilizzata per la prova;



Figura 3.19: Connettori BNC Martello-Centralina;

Si collegano in input i connettori del martello e degli accelerometri, precedentemente descritti, alla centralina di acquisizione dati.

Il cavo del martello si collega al canale CH1, l'accelerometro 1 posizionato ad L/2 si collega al canale CH2 e l'accelerometro 2 posizionato ad L/3 al canale CH3. Si riporta lo schema di collegamento dei cavi acquisita dal manuale della strumentazione e per maggiore chiarezza si rappresenta una foto del pannello frontale della centralina utilizzata in laboratorio per l'acquisizione dei dati d'interesse.

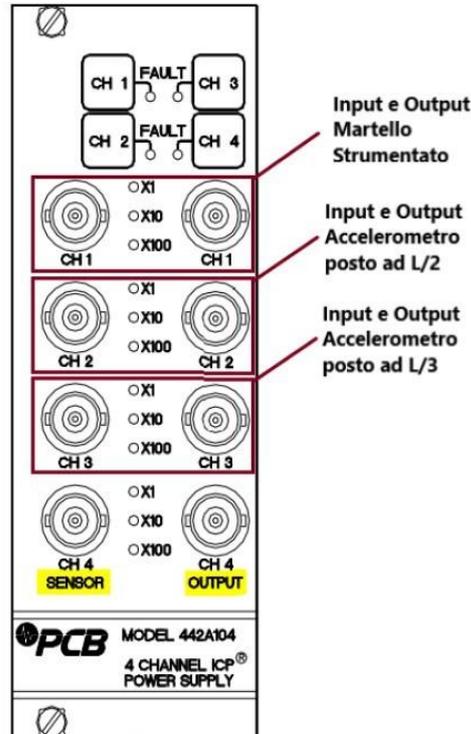


Figure 5.1 Model 442B104 Front Panel

Figura 3.20: Pannello a 4 canali riportato sul manuale;

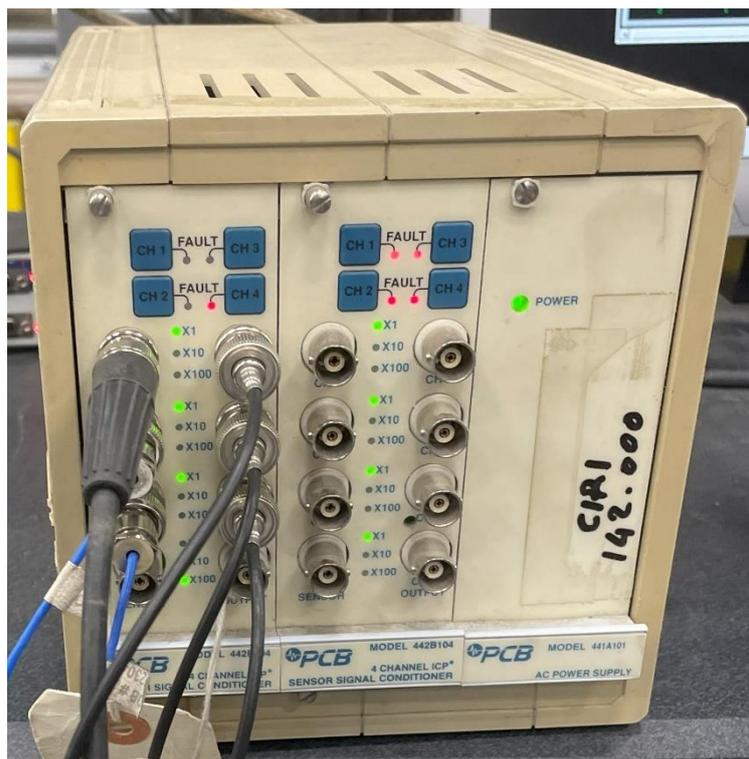


Figura 3.21: Centralina di acquisizione;

La centralina utilizzata permette di amplificare il segnale ricevuto nei vari canali di 10 o 100 volte. Nel caso di studio trattato non è stata applicata alcuna amplificazione.

Al pannello della centralina si collegano inoltre i tre cavi necessari ad inviare il segnale di output al computer dotato di scheda di acquisizione.

In particolare, i canali utilizzati nel computer sono:

- Il canale CH0 per il martello;
- Il canale CH1 per l'accelerometro 1 posto nel nodo 14 ad L/2;
- Il canale CH2 per l'accelerometro 2 posto nel nodo 10 ad L/3;

Si riporta di seguito il pannello della scheda di acquisizione del computer.

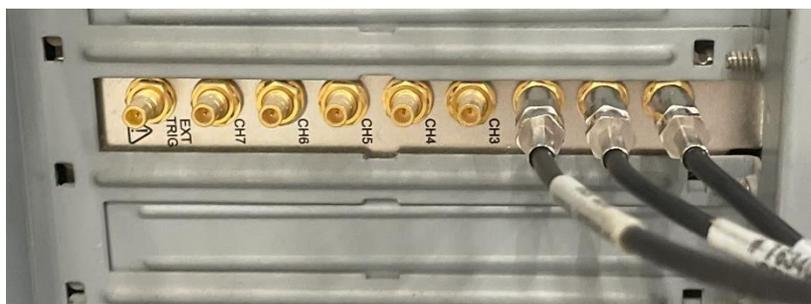


Figura 3.22: Pannello della scheda di acquisizione del computer;

3.3.3 Esecuzione prova ed acquisizione dati

Si esegue una prima prova su trave sana con la tecnica del Roving Hammer. Si fissano gli accelerometri sui nodi 10 e 14 come spiegato precedentemente e si effettuano con il martello ad impulso 3 battute per ognuno dei nodi nello specifico dal nodo 3 al nodo 25 al fine di estrapolare i valori delle frequenze e ricostruire le forme modali corrispondenti.

Per acquisire l'output del martello e degli accelerometri si utilizza il software "LabVIEW" installato sul computer dotato di scheda di acquisizione.

All'avvio del programma "LabVIEW 2014" si seleziona "AcqCatena8NI4472rev1.vi", nella schermata si impostano i parametri necessari ossia la frequenza di campionamento e il numero di punti; nel caso in esame si considera $f_s = 1000 \text{ Hz}$ e $Punti = 8192$.

La Frequenza di campionamento f_s detta anche frequenza di Nyquist, rappresenta il numero di valori prelevati in un secondo; f_s è definita in Hz ossia $1/s$ e per il teorema del campionamento, spiegato nel dettaglio nel paragrafo 3.2.6 si determina come:

$$f_s \geq 2f_{max}$$

Si assume $f_{max} = 161,11 \text{ Hz}$ ossia il valore della quarta frequenza ottenuta dalla modellazione numerica in Strau7. Dunque, l'assunzione $f_s = 1000 \text{ Hz}$ è ampiamente lecita essendo:

$$1000 \text{ Hz} \geq 2 * 161,11 \text{ Hz}$$

Impostati i parametri, si avvia il comando "Run" attraverso la freccia posta in alto a sinistra della finestra di esecuzione del programma.

Prima di procedere alle battute, si disarma il martello ossia si effettuano dei colpi a vuoto; tale procedura è di fondamentale importanza in quanto permette di assicurarsi sia che il sistema di acquisizione dati sia configurato correttamente ed anche che i dati raccolti siano precisi e privi di rumore indesiderato, ciò garantisce la corretta esecuzione della prova.

In ultimo, si imposta la schermata di salvataggio: si indica la cartella di

destinazione delle acquisizioni e il nome del file “.txt” restituito in output dalle battute. Si eseguono 3 battute per nodo ed il numero progressivo presente nel nome del file si aggiorna automaticamente dove si indica con 0 1 e 2 rispettivamente la prima, la seconda e la terza battuta.

Si riporta graficamente: la schermata di avvio, l'impostazione dei parametri, il procedimento di salvataggio delle acquisizioni necessari all'avvio dell'esecuzione delle battute.

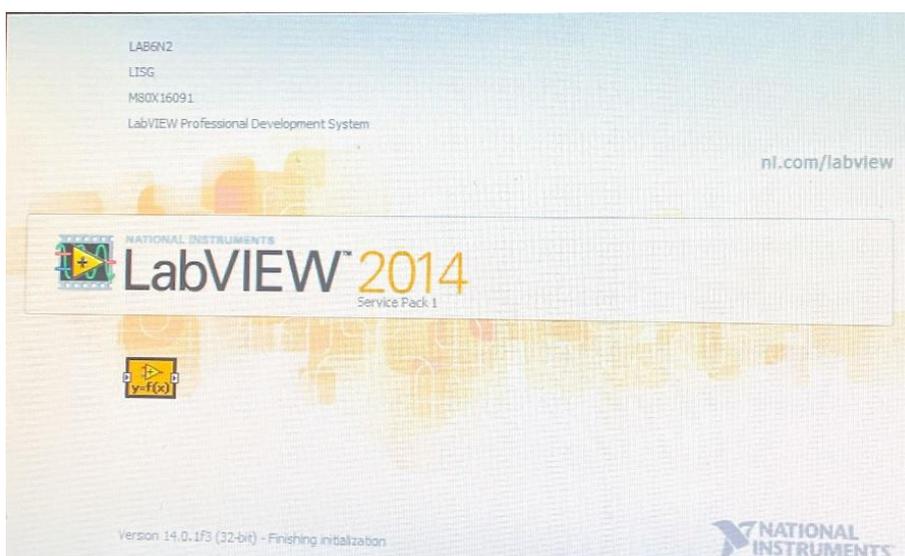


Figura 3.23: Pannello di avvio LabView;

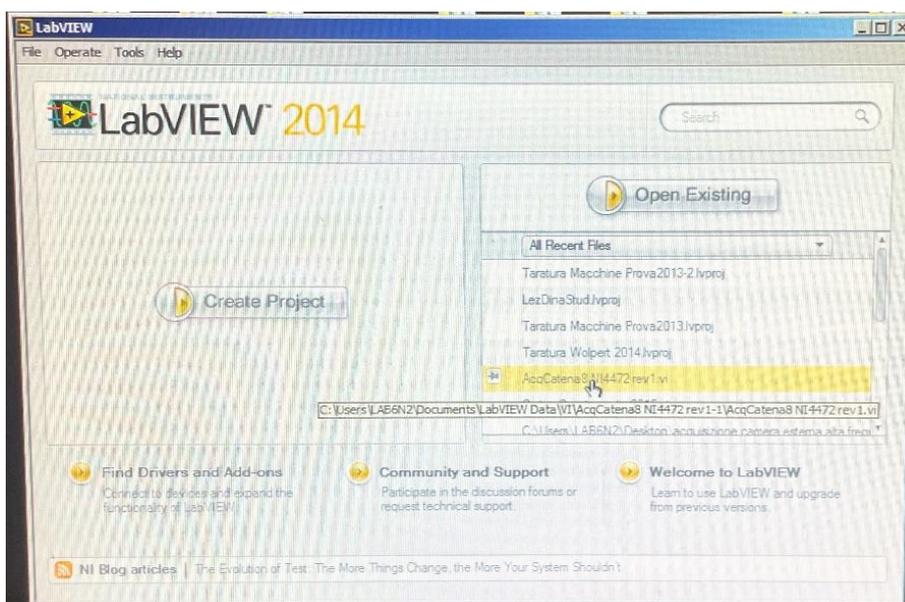


Figura 3.24: Impostazione di avvio LabView;

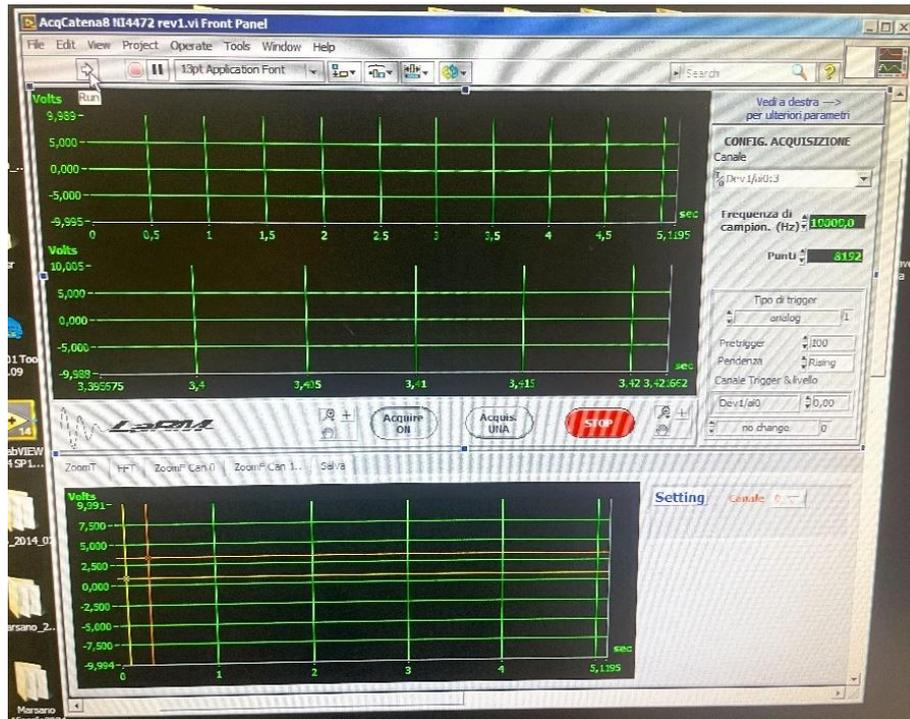


Figura 3.25: Impostazione parametri e avvio Run;

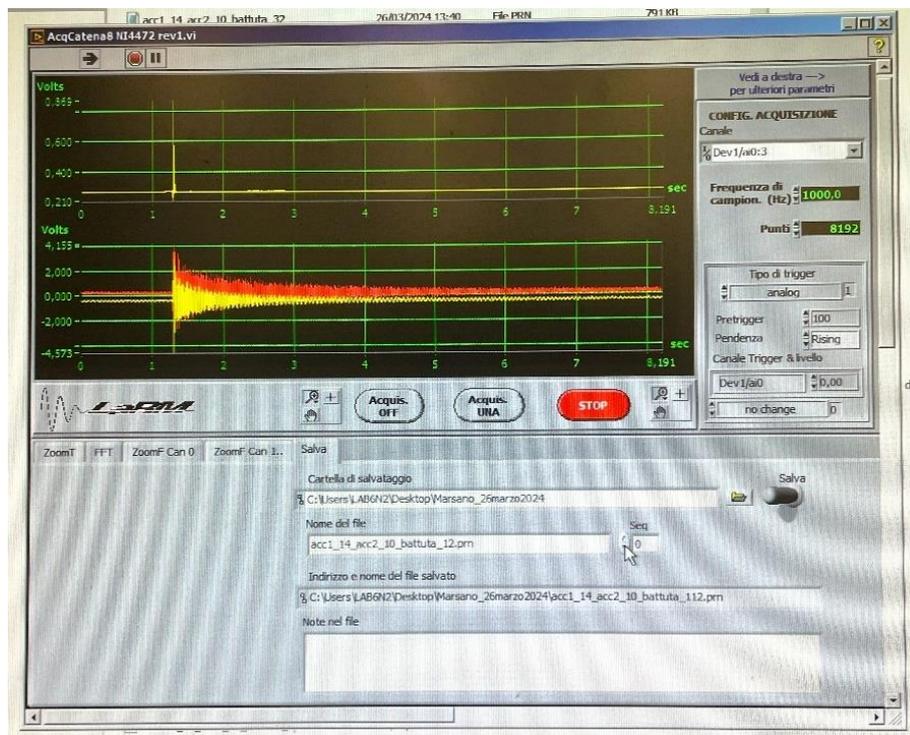


Figura 3.26: Impostazione salvataggio;

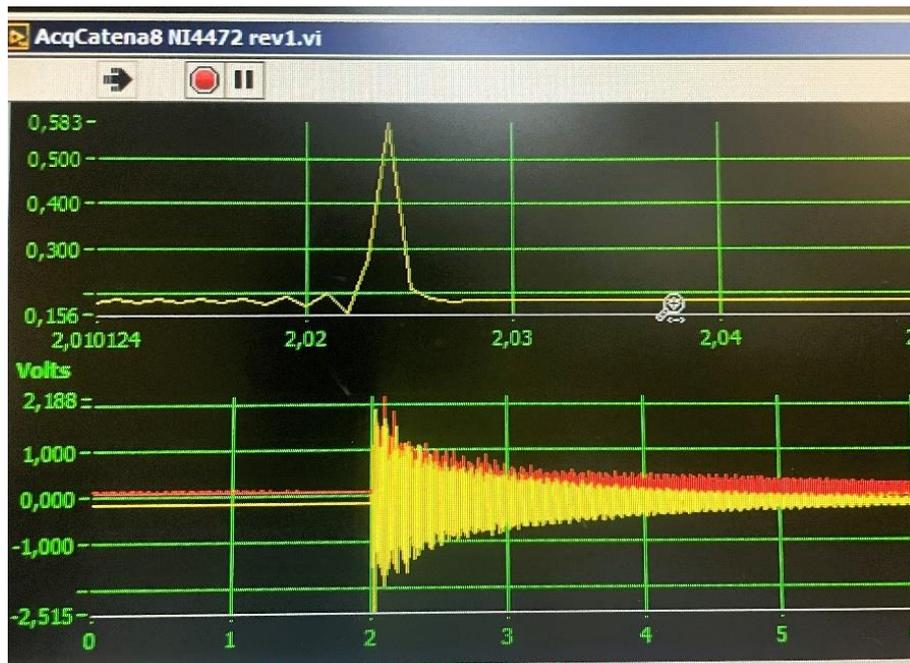


Figura 3.27: Zoom grafici di acquisizione;

In definitiva, si avvia la prova dinamica e si effettuano sulla trave in alluminio doppiamente incastrata le tre battute per ogni nodo. Si visualizza di volta in volta nella schermata di “LabVIEW”, come riportato nella figura 3.27: un primo grafico in alto che rappresenta l’output del canale CH0 nel dominio del tempo, ovvero del martello ed un secondo grafico in basso che raffigura l’output dei canali CH1 o CH2 nel dominio del tempo, ovvero gli output dei due accelerometri.

Si esegue la tecnica del Roving Hammer e si colpisce la trave imprimendo un colpo deciso con il martello strumentato ed il più possibile perpendicolare rispetto la trave.

Si riporta la posizione degli accelerometri ed un esempio di battuta su uno dei nodi ispezionati, in particolare sul nodo 8.



Figura 3.28: Posizione accelerometri tecnica Roving Hammer;

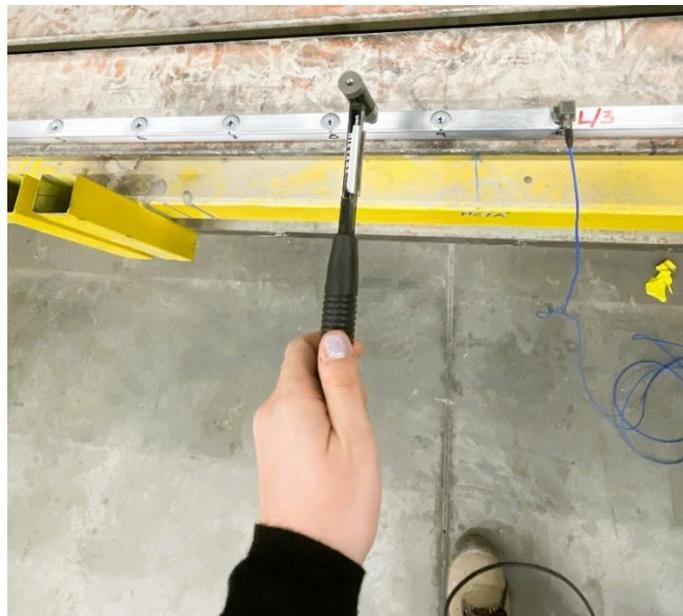


Figura 3.29: Esempio di battuta sul nodo 8;

Al termine della prova, nella cartella di salvataggio, si consultano 69 file “.txt” e al fine di rielaborare i dati presenti nei file non si utilizza il software LabVIEW ma si impiega un algoritmo implementato nel software di calcolo Matlab.

3.3.4 Frequenze e Modi di Vibrare con Roving Hammer

Si effettuano, nel periodo di sperimentazione, diverse acquisizioni con la tecnica del Roving Hammer sulla trave sana nelle date riportate di seguito in tabella.

Data Prova_TraveSana
26_Marzo_2024
15_Aprile_2024
18_Aprile_2024
22_Aprile_2024
10_Maggio_2024
14_Maggio_2024
15_Maggio_2024

Tabella 3.1: Date prova su trave sana con tecnica Roving Hammer;

Si procede ad una fitta acquisizione di dati nelle varie giornate di prova al fine di estrapolare innanzitutto i parametri dinamici di interesse ossia frequenze e modi di vibrare ma soprattutto per monitorare la variazione delle frequenze al variare della temperatura.

Si rielaborano i dati di tutte le acquisizioni effettuate grazie all'utilizzo di un algoritmo implementato in Matlab il quale restituisce in output i grafici delle funzioni di trasferimento sia per l'accelerometro 1 che per l'accelerometro 2 ed inoltre fornisce il plot della forzante, necessaria per la tecnica del Roving Hammer per la determinazione dei modi di vibrare.

Si ricavano le prime quattro frequenze sperimentali della trave, mediante trasformata di Fourier (FFT) dell'output dato dagli accelerometri.

La funzione di trasferimento tra il punto di applicazione del carico e il punto in cui si rileva la risposta, si ottiene dal rapporto della trasformata dell'output e la trasformata dell'input.

Il metodo utilizzato per determinare le frequenze proprie della trave è stato quello del *Peak Picking*, poiché la determinazione delle frequenze è ottenuta dalla frequenza corrispondente ai picchi nei grafici delle funzioni di risposta in frequenza.

Inoltre, le forme modali per i primi quattro modi di vibrare, si ricavano con la tecnica del Roving Hammer secondo stima diretta, dividendo la trasformata dell'output dell'accelerometro 2 per la trasformata dell'input, ossia della forzante.

Si ottengono, avviando l'algoritmo, 23 figure contenenti i plot delle trasformate degli output e dell'input.

Si riportano di seguito, solo per i nodi significativi 10 e 14, i grafici esplicativi ottenuti dall'algoritmo Matlab per la prova eseguita in data 15 aprile 2024.

Nei grafici si identificano con colori diversi le trasformate degli output degli accelerometri e dell'input delle tre battute effettuate sul nodo in questione.

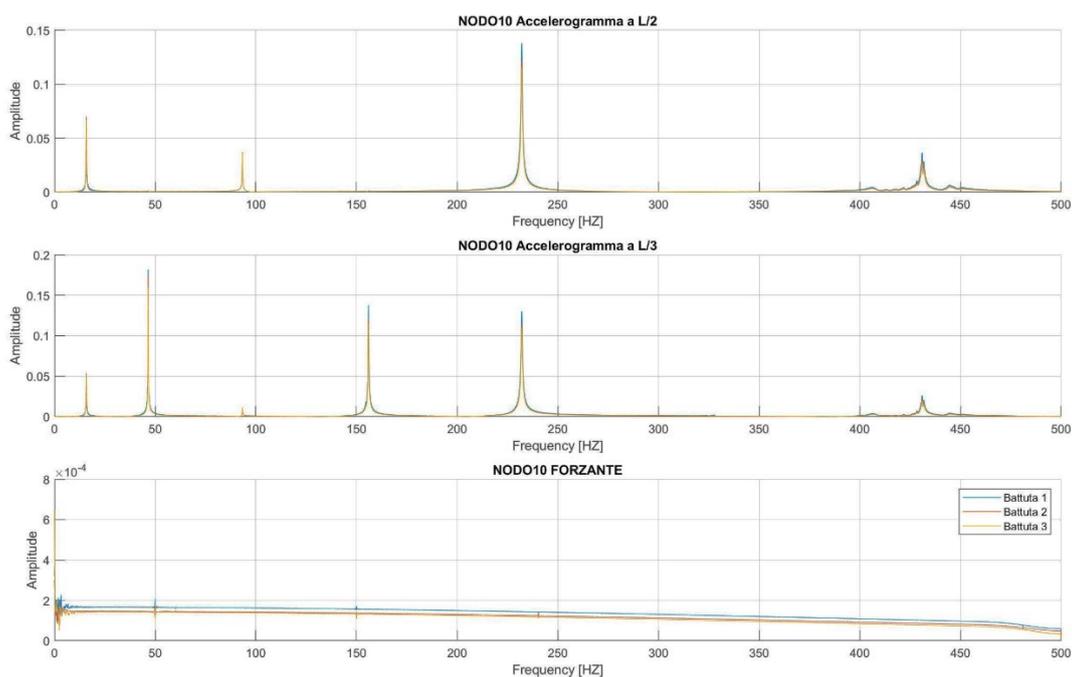


Figura 3.30: Plot degli output su trave sana con tecnica Roving Hammer, nodo 10;

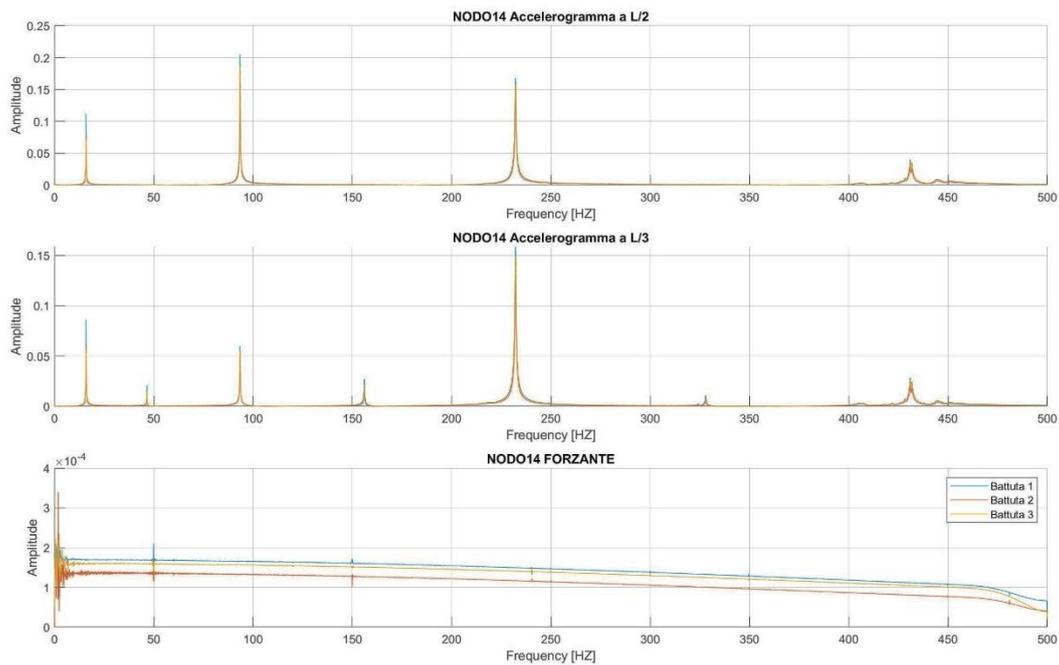


Figura 3.31: Plot degli output su trave sana con tecnica Roving Hammer, nodo 14;

Si propongono di seguito le tabelle relative all'estrapolazione dei valori necessari a identificare le prime quattro forme modali.

Nello specifico, per la prova eseguita con Roving Hammer il 15 Aprile, si ha: nella prima colonna il valore della frequenza estratto dall'ascissa dell'output dell'accelerometro 2; nella seconda e nella terza colonna si riportano rispettivamente i valori delle ordinate corrispondenti alla frequenza associata dei valori dell'output dell'accelerometro 2 e della forzante; nella quarta colonna si ottiene il valore che identifica l'andamento del modo di vibrare associato alla frequenza, tramite il rapporto delle due colonne precedenti.

Battuta 1				
Nodo	f1_X	f1_Y FFT(acc2)	f1_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 1
3	15.8691	0.00784	0.00023	34.087
4	15.8691	0.0085	0.00013	65.385
5	15.8691	0.01167	0.00013	89.769
6	15.8691	0.02246	0.00017	132.118
7	15.8691	0.01985	0.00009	213.717
8	15.8691	0.0452	0.00017	265.882
9	15.8691	0.05167	0.00018	287.056
10	15.8691	0.05364	0.00016	335.250
11	15.8691	0.05434	0.00014	388.143
12	15.8691	0.06854	0.00016	428.375
13	15.8691	0.07813	0.00016	488.313
14	15.8691	0.08577	0.00016	536.063
15	15.8691	0.0646	0.00015	430.667
16	15.8691	0.05324	0.00014	380.286
17	15.8691	0.05364	0.00014	383.143
18	15.8691	0.03766	0.00012	313.833
19	15.8691	0.03643	0.00013	280.231
20	15.8691	0.03131	0.00015	208.733
21	15.8691	0.02335	0.00014	166.786
22	15.8691	0.0114	0.00013	87.692
23	15.8691	0.01006	0.00014	71.857
24	15.9912	0.00458	0.00016	28.625
25	15.8691	0.00108	0.00017	6.353
MEDIA_f	15.8744			

Tabella 3.2: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 1-Primo Modo di Vibrare;

Battuta 1				
Nodo	f2_X	f2_Y FFT(acc2)	f2_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 2
3	46.6309	0.0426	0.00023	185.217
4	46.6309	0.04261	0.00013	327.769
5	46.6309	0.06595	0.00013	507.308
6	46.5088	0.12226	0.00016	764.125
7	46.5088	0.08593	0.00009255	928.471
8	46.5088	0.21646	0.00016	1352.875
9	46.5088	0.25461	0.00018	1414.500
10	46.5088	0.18138	0.00016	1133.625
11	46.5088	0.13742	0.00014	981.571
12	46.6309	0.09126	0.00016	570.375
13	46.6309	0.05364	0.00016	335.250
14	46.6309	0.02088	0.00016	130.500
15	46.6309	0.07321	0.00014	522.929
16	46.6309	0.1184	0.00013	910.769
17	46.6309	0.14709	0.00014	1050.643
18	46.6309	0.14165	0.00012	1180.417
19	46.6309	0.16937	0.00013	1302.846
20	46.6309	0.19544	0.00015	1302.933
21	46.6309	0.16081	0.00014	1148.643
22	46.6309	0.08896	0.00013	684.308
23	46.6309	0.07404	0.00015	493.600
24	46.6309	0.03811	0.00016	238.188
25	46.6309	0.01133	0.00017	66.647
MEDIA_f	46.5990			

Tabella 3.3: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 1 - Secondo Modo di Vibrare;

Battuta 1				
Nodo	f3_X	f3_Y FFT(acc2)	f3_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 3
3	93.5059	0.02598	0.00023	112.957
4	93.3838	0.02933	0.00012	244.417
5	93.3838	0.04657	0.00013	358.231
6	93.3838	0.07682	0.00016	480.125
7	93.3838	0.04808	0.00008959	536.667
8	93.3838	0.07606	0.00016	475.375
9	93.3838	0.05791	0.00017	340.647
10	93.3838	0.01039	0.00016	64.938
11	93.3838	0.01804	0.00014	128.857
12	93.3838	0.04251	0.00015	283.400
13	93.3838	0.05727	0.00016	357.938
14	93.3838	0.05996	0.00016	374.750
15	93.3838	0.04453	0.00014	318.071
16	93.5059	0.02715	0.00013	208.846
17	93.3838	0.00681	0.00013	52.385
18	93.5059	0.01561	0.00012	130.083
19	93.5059	0.03753	0.00012	312.750
20	93.5059	0.05808	0.00015	387.200
21	93.5059	0.05918	0.00013	455.231
22	93.5059	0.04641	0.00012	386.750
23	93.5059	0.03977	0.00014	284.071
24	93.5059	0.02437	0.00016	152.313
25	93.5059	0.00742	0.00017	43.647
MEDIA_f	93.4369			

Tabella 3.4: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 1 - Terzo Modo di Vibrare;

Battuta 1				
Nodo	f4_X	f4_Y FFT(acc2)	f4_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 4
3	156.128	0.08825	0.00022	401.136
4	156.128	0.09794	0.00011	890.364
5	156.006	0.13223	0.00012	1101.917
6	156.006	0.18195	0.00016	1137.188
7	156.006	0.0739	0.00008462	873.316
8	156.006	0.05074	0.00016	317.125
9	156.006	0.04922	0.00017	289.529
10	156.006	0.13767	0.00015	917.800
11	156.006	0.1471	0.00013	1131.538
12	156.006	0.12983	0.00015	865.533
13	156.128	0.07374	0.00015	491.600
14	156.128	0.02718	0.00015	181.200
15	156.128	0.09565	0.00014	683.214
16	156.128	0.13217	0.00013	1016.692
17	156.128	0.13509	0.00013	1039.154
18	156.128	0.08391	0.00011	762.818
19	156.128	0.02084	0.00012	173.667
20	156.128	0.07338	0.00014	524.143
21	156.128	0.13532	0.00013	1040.923
22	156.128	0.1383	0.00012	1152.500
23	156.128	0.139	0.00013	1069.231
24	156.128	0.09783	0.00015	652.200
25	156.128	0.03626	0.00016	226.625
MEDIA_f	156.0856			

Tabella 3.5: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 1 - Quarto Modo di Vibrare;

Si riporta per completezza la medesima procedura eseguita sia per la seconda che per la terza battuta.

Battuta 2				
Nodo	f1_X	f1_Y FFT(acc2)	f1_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 1
3	15.8691	0.00617	0.00017	36.294
4	15.8691	0.00755	0.00013	58.077
5	15.8691	0.01323	0.00011	120.273
6	15.8691	0.02276	0.00017	133.882
7	15.8691	0.03333	0.00018	185.167
8	15.8691	0.03486	0.00013	268.154
9	15.8691	0.04078	0.00015	271.867
10	15.8691	0.05315	0.00014	379.643
11	15.8691	0.05784	0.00014	413.143
12	15.8691	0.0654	0.00016	408.750
13	15.8691	0.04922	0.00012	410.167
14	15.8691	0.06054	0.00014	432.429
15	15.8691	0.05647	0.00013	434.385
16	15.8691	0.07402	0.00015	493.467
17	15.8691	0.04248	0.00011	386.182
18	15.8691	0.04252	0.00014	303.714
19	15.8691	0.0346	0.00015	230.667
20	15.8691	0.02472	0.00012	206.000
21	15.8691	0.02192	0.00012	182.667
22	15.8691	0.01361	0.00013	104.692
23	15.8691	0.01204	0.00013	92.615
24	15.8691	0.00526	0.00012	43.833
25	15.8691	0.00129	0.0001	12.900
MEDIA_f	15.8691			

Tabella 3.6: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 2 - Primo Modo di Vibrare;

Battuta 2				
Nodo	f2_X	f2_Y FFT(acc2)	f2_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 2
3	46.6309	0.01635	0.00017	96.176
4	46.6309	0.04036	0.00013	310.462
5	46.6309	0.06013	0.00011	546.636
6	46.5088	0.13393	0.00016	837.063
7	46.5088	0.18461	0.00017	1085.941
8	46.5088	0.16797	0.00013	1292.077
9	46.5088	0.18824	0.00015	1254.933
10	46.5088	0.17367	0.00014	1240.500
11	46.5088	0.13356	0.00014	954.000
12	46.6309	0.10289	0.00016	643.063
13	46.6309	0.03465	0.00013	266.538
14	46.6309	0.01344	0.00013	103.385
15	46.6309	0.06593	0.00013	507.154
16	46.6309	0.14169	0.00015	944.600
17	46.6309	0.12107	0.00011	1100.636
18	46.6309	0.17651	0.00014	1260.786
19	46.6309	0.20299	0.00015	1353.267
20	46.6309	0.14861	0.00012	1238.417
21	46.6309	0.14024	0.00012	1168.667
22	46.6309	0.10049	0.00013	773.000
23	46.6309	0.07271	0.00013	559.308
24	46.6309	0.0328	0.00012	273.333
25	46.6309	0.00852	0.0001	85.200
MEDIA_f	46.5990			

Tabella 3.7: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 2 - Secondo Modo di Vibrare;

Battuta 2				
Nodo	f3_X	f3_Y FFT(acc2)	f3_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 3
3	93.5059	0.01719	0.00016	107.438
4	93.3838	0.03013	0.00012	251.083
5	93.3838	0.04337	0.0001	433.700
6	93.3838	0.07744	0.00016	484.000
7	93.3838	0.08789	0.00017	517.000
8	93.3838	0.06286	0.00013	483.538
9	93.3838	0.0447	0.00015	298.000
10	93.3838	0.01088	0.00014	77.714
11	93.3838	0.0165	0.00014	117.857
12	93.3838	0.04133	0.00015	275.533
13	93.3838	0.04623	0.00013	355.615
14	93.3838	0.04714	0.00013	362.615
15	93.3838	0.03836	0.00012	319.667
16	93.5059	0.02923	0.00015	194.867
17	93.5059	0.0038	0.0001	38.000
18	93.5059	0.01748	0.00013	134.462
19	93.5059	0.04385	0.00015	292.333
20	93.5059	0.047	0.00011	427.273
21	93.5059	0.05466	0.00012	455.500
22	93.5059	0.04912	0.00013	377.846
23	93.5059	0.03635	0.00012	302.917
24	93.5059	0.01912	0.00011	173.818
25	93.5059	0.00562	0.0001	56.200
MEDIA_f	93.4422			

Tabella 3.8: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 2 - Terzo Modo di Vibrare;

Battuta 2				
Nodo	f4_X	f4_Y FFT(acc2)	f4_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 4
3	156.128	0.05873	0.00016	367.063
4	156.128	0.09849	0.00012	820.750
5	156.006	0.11138	0.00009913	1123.575
6	156.006	0.17767	0.00015	1184.467
7	156.006	0.14638	0.00017	861.059
8	156.006	0.04437	0.00012	369.750
9	156.006	0.04799	0.00014	342.786
10	156.006	0.12173	0.00013	936.385
11	156.006	0.1448	0.00013	1113.846
12	156.006	0.13337	0.00015	889.133
13	156.128	0.05446	0.00012	453.833
14	156.128	0.01634	0.00012	136.167
15	156.128	0.0842	0.00012	701.667
16	156.128	0.1479	0.00014	1056.429
17	156.128	0.10794	0.0001	1079.400
18	156.128	0.09569	0.00013	736.077
19	156.128	0.01861	0.00014	132.929
20	156.128	0.05994	0.00011	544.909
21	156.128	0.11779	0.00011	1070.818
22	156.128	0.14417	0.00012	1201.417
23	156.128	0.12598	0.00012	1049.833
24	156.128	0.0761	0.00011	691.818
25	156.128	0.02402	0.00009433	254.638
MEDIA_f	156.0856			

Tabella 3.9: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 2 - Quarto Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f1_X	f1_Y FFT(acc2)	f1_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 1
3	15.8691	0.00297	0.00015	19.800
4	15.8691	0.00823	0.00014	58.786
5	15.8691	0.01157	0.0001	115.700
6	15.8691	0.01582	0.00012	131.833
7	15.8691	0.02985	0.00018	165.833
8	15.8691	0.04432	0.00018	246.222
9	15.8691	0.03441	0.00011	312.818
10	15.8691	0.05113	0.00014	365.214
11	15.8691	0.05863	0.00015	390.867
12	15.8691	0.04242	0.00012	353.500
13	15.8691	0.06624	0.00014	473.143
14	15.8691	0.05533	0.00015	368.867
15	15.8691	0.05616	0.00014	401.143
16	15.8691	0.06762	0.00015	450.800
17	15.8691	0.04194	0.00011	381.273
18	15.8691	0.04239	0.00013	326.077
19	15.8691	0.03927	0.00016	245.438
20	15.8691	0.03088	0.00014	220.571
21	15.8691	0.02243	0.00015	149.533
22	15.8691	0.00767	0.00008221	93.298
23	15.8691	0.00961	0.00014	68.643
24	15.8691	0.00547	0.00015	36.467
25	15.8691	0.00141	0.00016	8.813
MEDIA_f	15.8691			

Tabella 3.10: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 3 - Primo Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f2_X	f2_Y FFT(acc2)	f2_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 2
3	46.6309	0.01877	0.00015	125.133
4	46.6309	0.04214	0.00014	301.000
5	46.6309	0.05423	0.0001	542.300
6	46.5088	0.08962	0.00011	814.727
7	46.5088	0.18582	0.00018	1032.333
8	46.5088	0.21681	0.00018	1204.500
9	46.5088	0.14872	0.00011	1352.000
10	46.5088	0.16009	0.00014	1143.500
11	46.5088	0.14118	0.00015	941.200
12	46.6309	0.07315	0.00012	609.583
13	46.6309	0.04805	0.00014	343.214
14	46.6309	0.01536	0.00015	102.400
15	46.6309	0.06987	0.00014	499.071
16	46.6309	0.14129	0.00016	883.063
17	46.6309	0.11518	0.00011	1047.091
18	46.6309	0.15452	0.00013	1188.615
19	46.6309	0.20506	0.00016	1281.625
20	46.6309	0.19346	0.00014	1381.857
21	46.6309	0.17693	0.00015	1179.533
22	46.6309	0.06263	0.00008185	765.180
23	46.6309	0.07862	0.00015	524.133
24	46.6309	0.03571	0.00015	238.067
25	46.6309	0.01107	0.00016	69.188
MEDIA_f	46.5990			

Tabella 3.11: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 3 - Secondo Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f3_X	f3_Y FFT(acc2)	f3_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 3
3	93.3838	0.01366	0.00015	91.067
4	93.3838	0.03135	0.00013	241.154
5	93.3838	0.03993	0.0001	399.300
6	93.3838	0.05826	0.00011	529.636
7	93.3838	0.08767	0.00018	487.056
8	93.3838	0.08078	0.00018	448.778
9	93.3838	0.03631	0.00011	330.091
10	93.3838	0.01061	0.00013	81.615
11	93.3838	0.01556	0.00015	103.733
12	93.3838	0.02886	0.00011	262.364
13	93.3838	0.04701	0.00013	361.615
14	93.3838	0.05472	0.00015	364.800
15	93.5059	0.04242	0.00014	303.000
16	93.5059	0.02823	0.00015	188.200
17	93.5059	0.00589	0.00011	53.545
18	93.5059	0.01773	0.00013	136.385
19	93.5059	0.04379	0.00015	291.933
20	93.5059	0.05411	0.00014	386.500
21	93.5059	0.06553	0.00015	436.867
22	93.5059	0.03073	0.00007905	388.741
23	93.5059	0.04211	0.00015	280.733
24	93.5059	0.0219	0.00015	146.000
25	93.5059	0.00778	0.00016	48.625
MEDIA_f	93.4422			

Tabella 3.12: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 3 - Terzo Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f4_X	f4_Y FFT(acc2)	f4_Y FFT(forzante)	MODO DI VIBRARE 4
3	156.128	0.05551	0.00014	396.500
4	156.128	0.10086	0.00012	840.500
5	156.006	0.10404	0.00009297	1119.071
6	156.006	0.12734	0.00011	1157.636
7	156.006	0.14924	0.00017	877.882
8	156.006	0.0594	0.00017	349.412
9	156.006	0.035188	0.0001	351.880
10	156.006	0.11408	0.00013	877.538
11	156.006	0.15153	0.00014	1082.357
12	156.006	0.09617	0.00011	874.273
13	156.128	0.06498	0.00012	541.500
14	156.128	0.02204	0.00015	146.933
15	156.128	0.08888	0.00012	740.667
16	156.128	0.1479	0.00014	1056.429
17	156.128	0.11211	0.0001	1121.100
18	156.128	0.09153	0.00012	762.750
19	156.128	0.02422	0.00015	161.467
20	156.128	0.0677	0.00013	520.769
21	156.128	0.14419	0.00014	1029.929
22	156.128	0.08981	0.00007362	1219.913
23	156.128	0.143094	0.00014	1022.100
24	156.128	0.08945	0.00014	638.929
25	156.128	0.03561	0.00015	237.400
MEDIA_f	156.0856			

Tabella 3.13: Estrapolazione dati Roving Hammer 15 Aprile, Battuta 3 - Quarto Modo di Vibrare;

In sintesi, si riporta tabellata la media per le tre battute sia delle frequenze che dei modi di vibrare. Si procede, grazie all'utilizzo di

Excel, alla rappresentazione grafica della media delle tre battute dei primi quattro modi di vibrare relativi alla prova eseguita in data 15 aprile 2024 sulla trave doppiamente incastrata, oggetto di studio.

Per le frequenze, si ha:

MEDIA FREQUENZA 1			f_1
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
15.8744087	15.8691	15.8691	15.8709

Tabella 3.14: Media frequenza 1, prova del 15 Aprile 2024;

MEDIA FREQUENZA 2			f_2
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
46.5990	46.5990	46.5990	46.5990

Tabella 3.15: Media frequenza 2, prova del 15 Aprile 2024;

MEDIA FREQUENZA 3			f_3
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
93.4369	93.4422	93.4422	93.4404

Tabella 3.16: Media frequenza 3, prova del 15 Aprile 2024;

MEDIA FREQUENZA 4			f_4
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
156.0856	156.0856	156.0856	156.0856

Tabella 3.17: Media frequenza 4, prova del 15 Aprile 2024;

In definitiva, si ha per le frequenze:

MEDIA FREQUENZE 15Aprile_RH	
f_1	15.871
f_2	46.599
f_3	93.440
f_4	156.086

Tabella 3.18: Quadro riassuntivo della media frequenze 15 Aprile, Roving Hammer

Per i modi di vibrare si ottiene:

Nodo	MODO DI VIBRARE 1			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	34.087	36.294	19.800	30.060
4	65.385	58.077	58.786	60.749
5	89.769	120.273	115.700	108.581
6	132.118	133.882	131.833	132.611
7	213.717	185.167	165.833	188.239
8	265.882	268.154	246.222	260.086
9	287.056	271.867	312.818	290.580
10	335.250	379.643	365.214	360.036
11	388.143	413.143	390.867	397.384
12	428.375	408.750	353.500	396.875
13	488.313	410.167	473.143	457.207
14	536.063	432.429	368.867	445.786
15	430.667	434.385	401.143	422.065
16	380.286	493.467	450.800	441.517
17	383.143	386.182	381.273	383.532
18	313.833	303.714	326.077	314.542
19	280.231	230.667	245.438	252.112
20	208.733	206.000	220.571	211.768
21	166.786	182.667	149.533	166.329
22	87.692	104.692	93.298	95.227
23	71.857	92.615	68.643	77.705
24	28.625	43.833	36.467	36.308
25	6.353	12.900	8.813	9.355

Tabella 3.19: Media Modo di Vibrare 1, prova del 15 Aprile 2024;

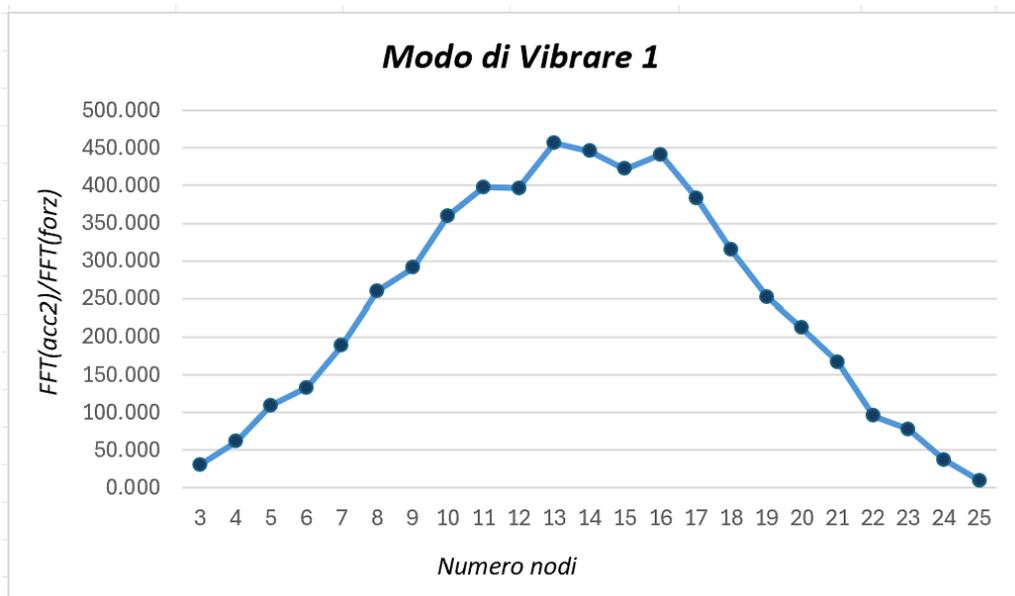


Figura 3.32: Modo di vibrare 1, prova 15 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

Nodo	MODO DI VIBRARE 2			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	185.217	96.176	125.133	-135.509
4	327.769	310.462	301.000	-313.077
5	507.308	546.636	542.300	-532.081
6	764.125	837.063	814.727	-805.305
7	928.471	1085.941	1032.333	-1015.582
8	1352.875	1292.077	1204.500	-1283.151
9	1414.500	1254.933	1352.000	-1340.478
10	1133.625	1240.500	1143.500	-1172.542
11	981.571	954.000	941.200	-958.924
12	570.375	643.063	609.583	-607.674
13	335.250	266.538	343.214	-315.001
14	130.500	103.385	102.400	112.095
15	522.929	507.154	499.071	509.718
16	910.769	944.600	883.063	912.811
17	1050.643	1100.636	1047.091	1066.123
18	1180.417	1260.786	1188.615	1209.939
19	1302.846	1353.267	1281.625	1312.579
20	1302.933	1238.417	1381.857	1307.736
21	1148.643	1168.667	1179.533	1165.614
22	684.308	773.000	765.180	740.829
23	493.600	559.308	524.133	525.680
24	238.188	273.333	238.067	249.863
25	66.647	85.200	69.188	73.678

Tabella 3.20: Media Modo di Vibrare 2, prova del 15 Aprile 2024;

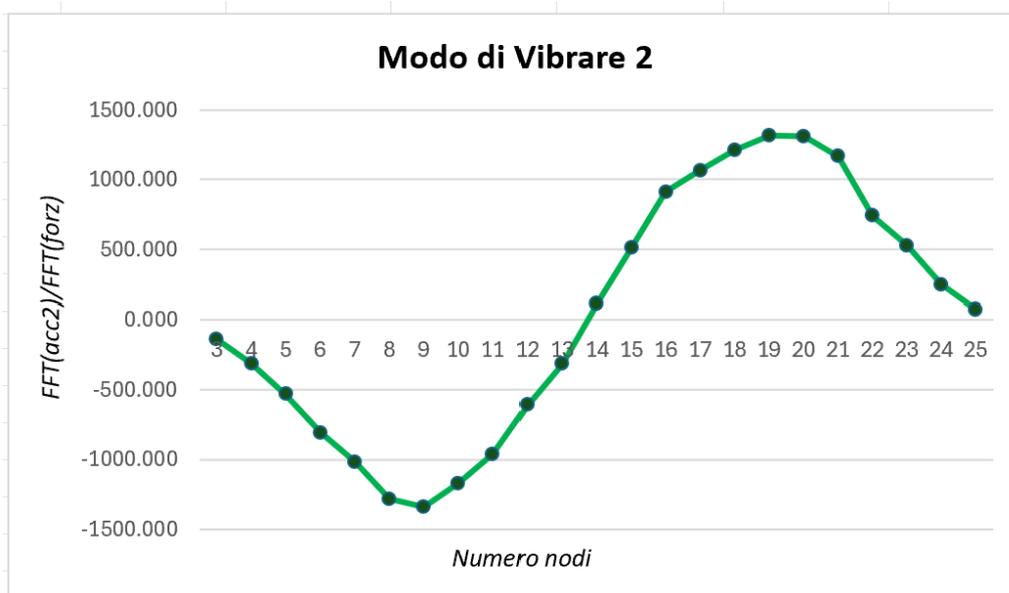


Figura 3.33: Modo di vibrare 2, prova 15 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

Nodo	MODO DI VIBRARE 3			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	112.957	107.438	91.067	-103.820
4	244.417	251.083	241.154	-245.551
5	358.231	433.700	399.300	-397.077
6	480.125	484.000	529.636	-497.920
7	536.667	517.000	487.056	-513.574
8	475.375	483.538	448.778	-469.230
9	340.647	298.000	330.091	-322.913
10	64.938	77.714	81.615	-74.756
11	128.857	117.857	103.733	116.816
12	283.400	275.533	262.364	273.766
13	357.938	355.615	361.615	358.389
14	374.750	362.615	364.800	367.388
15	318.071	319.667	303.000	313.579
16	208.846	194.867	188.200	197.304
17	52.385	38.000	53.545	47.977
18	130.083	134.462	136.385	-133.643
19	312.750	292.333	291.933	-299.006
20	387.200	427.273	386.500	-400.324
21	455.231	455.500	436.867	-449.199
22	386.750	377.846	388.741	-384.446
23	284.071	302.917	280.733	-289.240
24	152.313	173.818	146.000	-157.377
25	43.647	56.200	48.625	-49.491

Tabella 3.21: Media Modo di Vibrare 3, prova del 15 Aprile 2024;

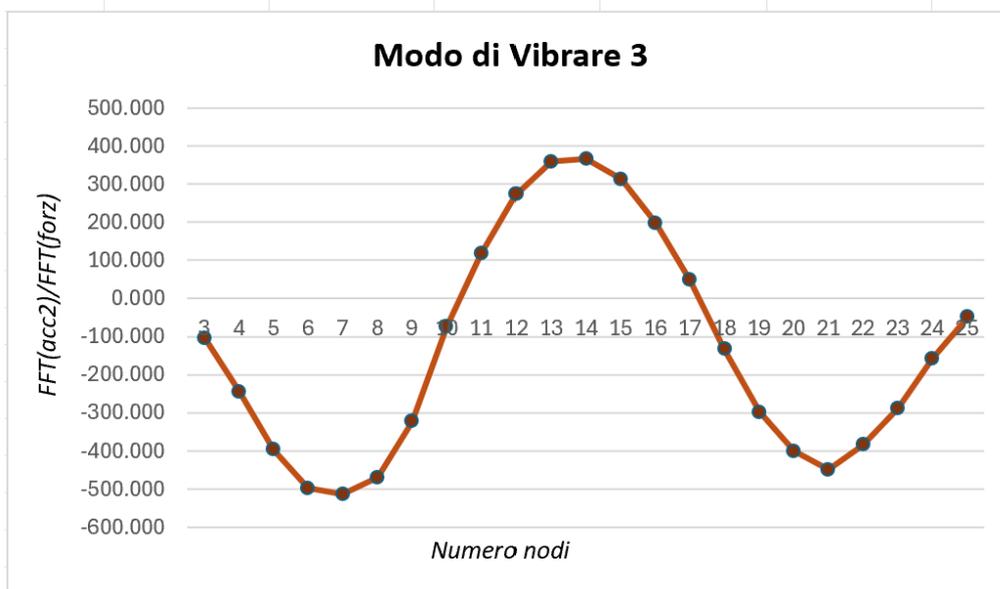


Figura 3.34: Modo di vibrare 3, prova 15 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

Nodo	MODO DI VIBRARE 4			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	401.136	367.063	396.500	-388.233
4	890.364	820.750	840.500	-850.538
5	1101.917	1123.575	1119.071	-1114.854
6	1137.188	1184.467	1157.636	-1159.764
7	873.316	861.059	877.882	-870.752
8	317.125	369.750	349.412	-345.429
9	289.529	342.786	351.880	328.065
10	917.800	936.385	877.538	910.574
11	1131.538	1113.846	1082.357	1109.247
12	865.533	889.133	874.273	876.313
13	491.600	453.833	541.500	495.644
14	181.200	136.167	146.933	-154.767
15	683.214	701.667	740.667	-708.516
16	1016.692	1056.429	1056.429	-1043.183
17	1039.154	1079.400	1121.100	-1079.885
18	762.818	736.077	762.750	-753.882
19	173.667	132.929	161.467	-156.021
20	524.143	544.909	520.769	529.940
21	1040.923	1070.818	1029.929	1047.223
22	1152.500	1201.417	1219.913	1191.277
23	1069.231	1049.833	1022.100	1047.055
24	652.200	691.818	638.929	660.982
25	226.625	254.638	237.400	239.554

Tabella 3.22: Media Modo di Vibrare 4, prova del 15 Aprile 2024;

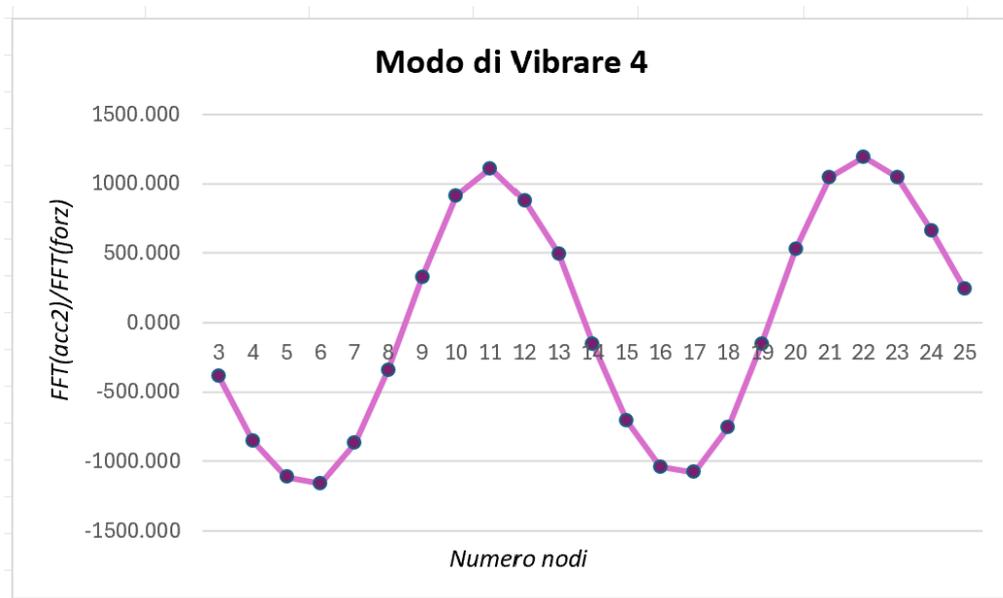


Figura 3.35: Modo di vibrare 4, prova 15 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

Quanto sopra riportato, si esegue anche per le prove dinamiche effettuate con la tecnica del Roving Hammer in altre due giornate di prova, in particolare il 18 Aprile 2024 ed il 22 Aprile 2024. Le prove in

oggetto si eseguono allo scopo di avere un quadro dettagliato della variazione delle frequenze.

Si riportano sinteticamente i valori delle frequenze, dei modi di vibrare ed i grafici ottenuti per i modi di vibrare nelle citate giornate di prova.

TRAVE SANA		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
18 Aprile 2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE						
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.578	3	18.087	-205.105	-102.611	-363.574
f_2	48.925	4	55.438	-537.668	-274.810	-1099.463
f_3	96.069	5	104.262	-793.388	-440.835	-1511.077
f_4	159.033	6	158.123	-1351.694	-571.215	-1583.344
		7	203.487	-1624.209	-563.683	-1078.179
		8	276.961	-1683.615	-490.690	-375.466
		9	369.383	-1396.776	-305.380	361.674
		10	418.259	-1289.713	-72.467	1056.529
		11	483.829	-1099.097	122.843	1313.362
		12	484.157	-713.300	306.913	1115.544
		13	445.983	-320.532	437.310	564.393
		14	494.978	127.189	477.232	-204.583
		15	529.081	553.847	407.988	-837.967
		16	507.138	851.100	241.914	-1245.480
		17	405.981	1134.225	43.200	-1219.407
		18	407.720	1409.222	-151.165	-842.726
		19	319.445	1540.433	-347.685	-111.364
		20	249.477	1365.560	-471.981	604.699
		21	196.783	1238.436	-524.022	1168.526
		22	138.785	917.834	-478.239	1457.826
		23	79.342	607.210	-349.230	1294.687
		24	28.190	317.461	-189.939	834.644
		25	7.332	91.860	-55.653	273.937

Tabella 3.23: Valori media frequenze e modi di vibrare trave sana 18 Aprile, Roving Hammer,

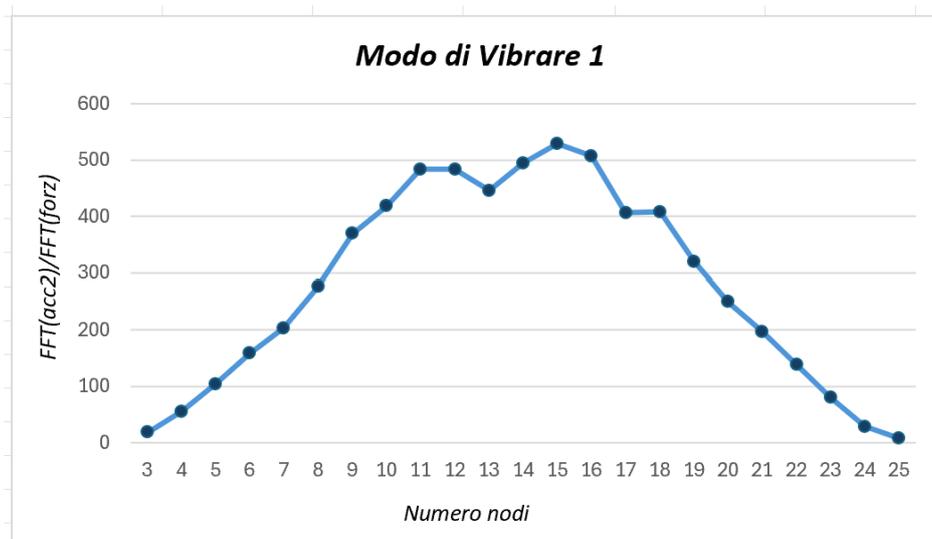


Figura 3.36: Modo di vibrare 1, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

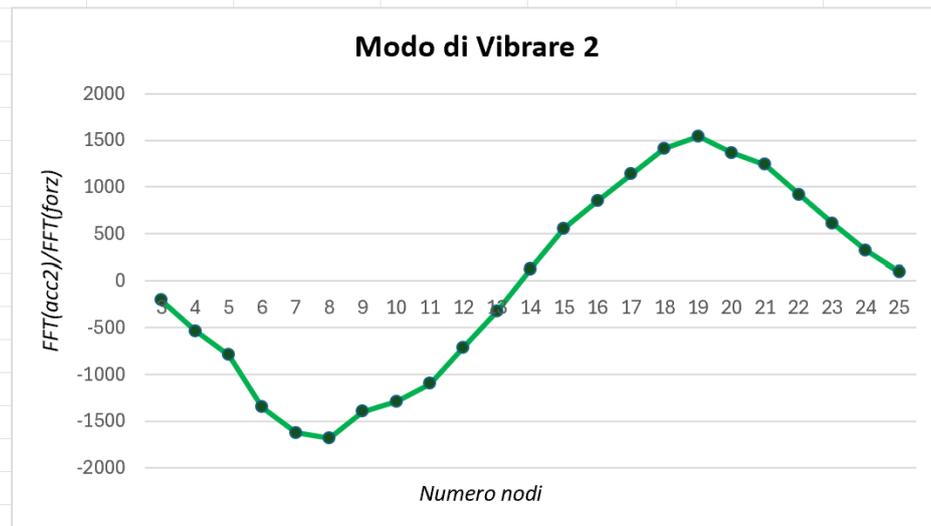


Figura 3.37: Modo di vibrare 2, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

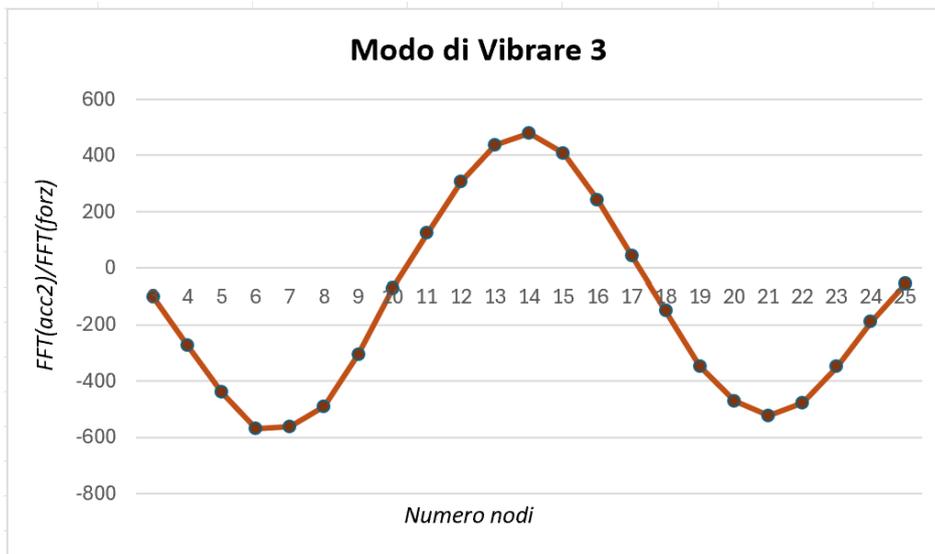


Figura 3.38: Modo di vibrare 3, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

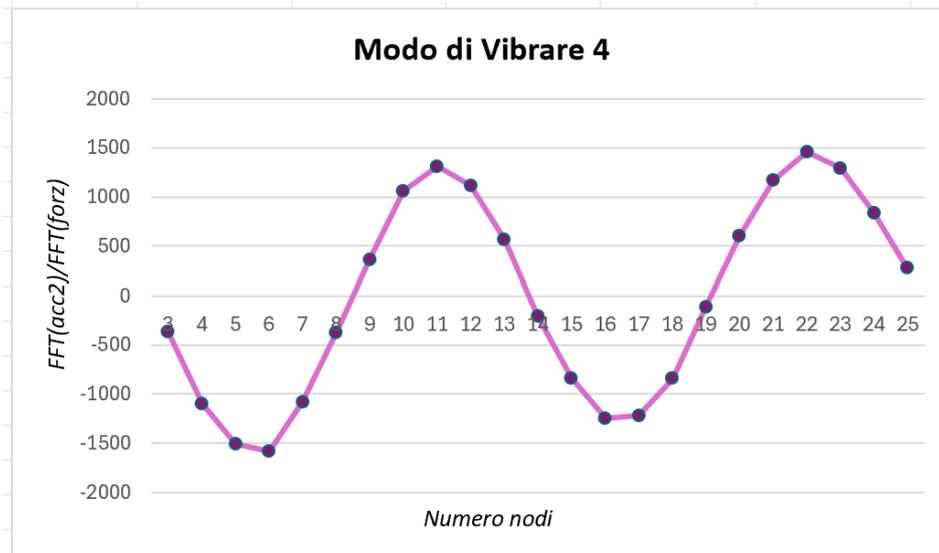


Figura 3.39: Modo di vibrare 4, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

TRAVE SANA						
22 Aprile 2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
f_1	18.381	3	9.094	-186.506	-120.563	-503.750
f_2	50.001	4	46.167	-427.284	-314.593	-1227.878
f_3	97.299	5	93.935	-996.895	-490.350	-1660.213
f_4	160.336	6	158.406	-1038.023	-592.130	-1698.725
		7	306.222	-2060.879	-424.513	-1201.193
		8	448.890	-2114.055	-487.947	-423.752
		9	618.468	-1956.811	-423.062	439.144
		10	620.961	-1712.434	-87.706	1324.701
		11	663.790	-1288.865	175.870	1616.530
		12	663.545	-938.193	465.374	1290.815
		13	861.604	-398.016	491.704	610.118
		14	697.350	215.040	406.642	-237.739
		15	726.481	679.550	343.843	-890.473
		16	723.855	1320.070	216.989	-1328.337
		17	612.264	1657.602	24.832	-1377.362
		18	579.439	1728.485	-130.727	-937.792
		19	431.947	1514.515	-271.371	-140.936
		20	315.026	1347.686	-390.233	656.759
		21	207.725	1637.272	-433.035	1278.632
		22	137.634	1179.645	-389.359	1664.584
		23	108.951	877.901	-271.624	1510.743
		24	66.000	388.338	-158.728	936.561
		25	14.756	132.050	-46.480	280.499

Tabella 3.23: Valori media frequenze e modi di vibrare trave sana 22 Aprile, Roving Hammer,

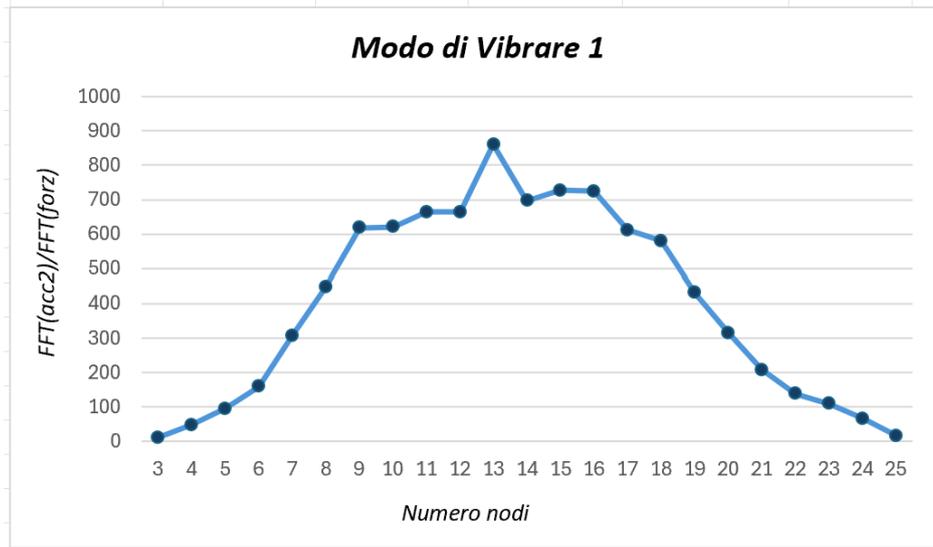


Figura 3.40: Modo di vibrare 1, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

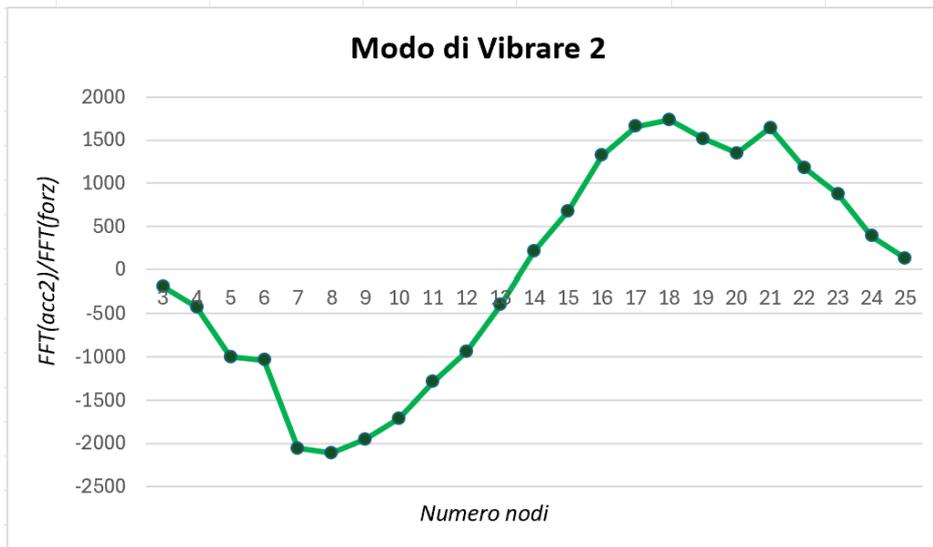


Figura 3.41: Modo di vibrare 2, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

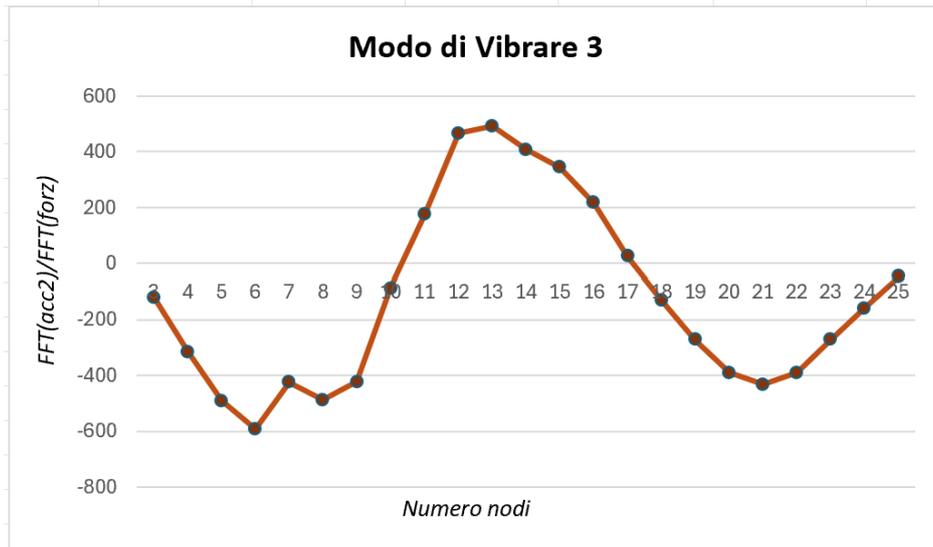


Figura 3.42: Modo di vibrare 3, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

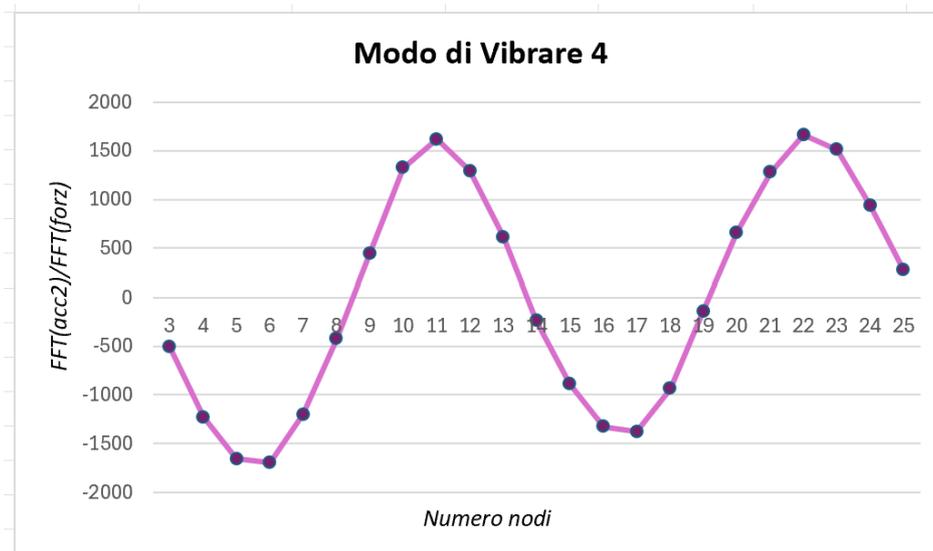


Figura 3.43: Modo di vibrare 4, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Hammer;

3.3.5 Confronto Frequenze

Si propone una tabella riassuntiva con i valori delle frequenze determinate analiticamente, numericamente con il software Straus7 e sperimentalmente con la tecnica del Roving Hammer.

Le frequenze sperimentali risultano la media dei valori ottenuti dalle 3 misurazioni effettuate nei giorni di prova

CONFRONTO FREQUENZE TRAVE SANA								
Frequenze Analitiche			Frequenze FEM_24 elementi			Frequenze Sperimentali_Roving Hammer		
f_1	18.037	[Hz]	f_1	18.037	[Hz]	f_1	17.277	[Hz]
f_2	49.718		f_2	49.720		f_2	48.509	
f_3	97.479		f_3	97.469		f_3	95.603	
f_4	161.123		f_4	161.111		f_4	158.485	

Tabella 3.24: Confronto frequenze analitiche, numeriche e sperimentali con Roving Hammer

3.3.6 Frequenze e Modi di Vibrare con Roving Sensor

Le forme modali ricavate sperimentalmente con la tecnica del “Roving Hammer” risultano imprecise; pertanto, si adotta per le misurazioni seguenti su trave sana, la tecnica del “Roving Sensor”.

La tecnica del “Roving Sensor” consiste nel considerare in fase di rilevamento sperimentalmente un accelerometro fisso in un punto ed un accelerometro mobile, il quale viene spostato di volta in volta dal nodo 3 al nodo 25. In questo caso, la posizione della battuta avviene sempre sul nodo 18 trovandosi nella posizione diametralmente opposta alla posizione dell’accelerometro fisso posto sul nodo 10 ad $L/3$.

Nel caso in esame si esegue la prova fissando l’accelerometro 2 in corrispondenza del nodo 10 e la battuta con il martello strumentato sul nodo 18. L’accelerometro 1 invece viene spostato da nodo a nodo, nello specifico dal nodo 3 al nodo 25 per l’intera durata della prova; per tale motivo si predispone all’intradosso nella trave in corrispondenza del nodo 10 una rondella per poter avere in quel punto il rilevamento dei parametri con la doppia strumentazione ovvero sia con l’accelerometro 1 che con l’accelerometro 2.

Si avvia la prova posizionando l’accelerometro fisso sul nodo 10 e l’accelerometro mobile sul nodo 3 e imprimendo con il martello ad impulso 3 battute sul nodo 18 per avere maggiore veridicità ed attendibilità dei risultati. Si prosegue in questo modo spostando di volta in volta l’accelerometro mobile fino al nodo 25.



Figura 3.44: Posizione accelerometro 2 fissa sul nodo 10, tecnica Roving Sensor;



Figura 3.45: Posizione battuta fissa sul nodo 18, tecnica Roving Sensor;



Figura 3.46: Incollaggio rondella intradosso nodo 10, tecnica Roving Sensor;



Figura 3.47: Doppia strumentazione, accelerometro 1 mobile intradosso, tecnica Roving Sensor;



Figura 3.48: Accelerometro 2 fisso e accelerometro 1 mobile nodo 10, tecnica Roving Sensor;

Si effettuano, anche in questo caso, tre acquisizioni con la tecnica del Roving Sensor sulla trave sana al fine di avere un quadro completo sull'andamento delle frequenze nei diversi giorni di prova.

Si ha una fitta acquisizione di dati per estrapolare anche con questa tecnica i parametri dinamici di interesse ossia frequenze e modi di vibrare ma soprattutto per monitorare la variazione delle frequenze prima di procedere al danneggiamento definitivo della trave oggetto di studio.

Si riportano le date delle prove eseguite con Roving Sensor su trave sana:

Data Prova_TraveSana
18_Aprile_2024
22_Aprile_2024
15_Maggio_2024

Tabella 3.25: Date prova su trave sana con tecnica Roving Sensor;

Si rielaborano i dati di tutte le acquisizioni effettuate grazie all'utilizzo di un algoritmo implementato in Matlab il quale restituisce in output i grafici delle funzioni di trasferimento sia per l'accelerometro 1 mobile che per l'accelerometro 2 fisso ed inoltre per completezza fornisce il plot della forzante.

Si ricavano le prime quattro frequenze sperimentali della trave, mediante trasformata di Fourier (FFT) dell'output dato dagli accelerometri.

La funzione di trasferimento tra il punto di applicazione del carico e il punto in cui si rileva la risposta, si ottiene dal rapporto della trasformata dell'output dell'accelerometro mobile e dell'accelerometro fisso.

Il metodo utilizzato per determinare le frequenze proprie della trave è stato quello del *Peak Picking*, poiché la determinazione delle frequenze è ottenuta dalla frequenza corrispondente ai picchi nei grafici delle funzioni di risposta in frequenza.

Inoltre, le forme modali per i primi quattro modi di vibrare, si ricavano con la tecnica del Roving Sensor secondo stima diretta, dividendo la

trasformata dell'output dell'accelerometro mobile per la trasformata dell'output dell'accelerometro fisso posto sul nodo 10.

Si ottengono, avviando l'algoritmo, 23 figure contenenti i plot delle trasformate degli output e dell'input.

Si riportano di seguito grafici esplicativi ottenuti dall'algoritmo Matlab per la prova eseguita in data 18 aprile 2024 con la tecnica in esame.

Nei grafici si identificano con tre colori diversi le trasformate degli output degli accelerometri e dell'input delle tre battute effettuate sul nodo 18, solo per i due casi significativi in cui l'accelerometro mobile è fissato sui nodi 10 e 14.

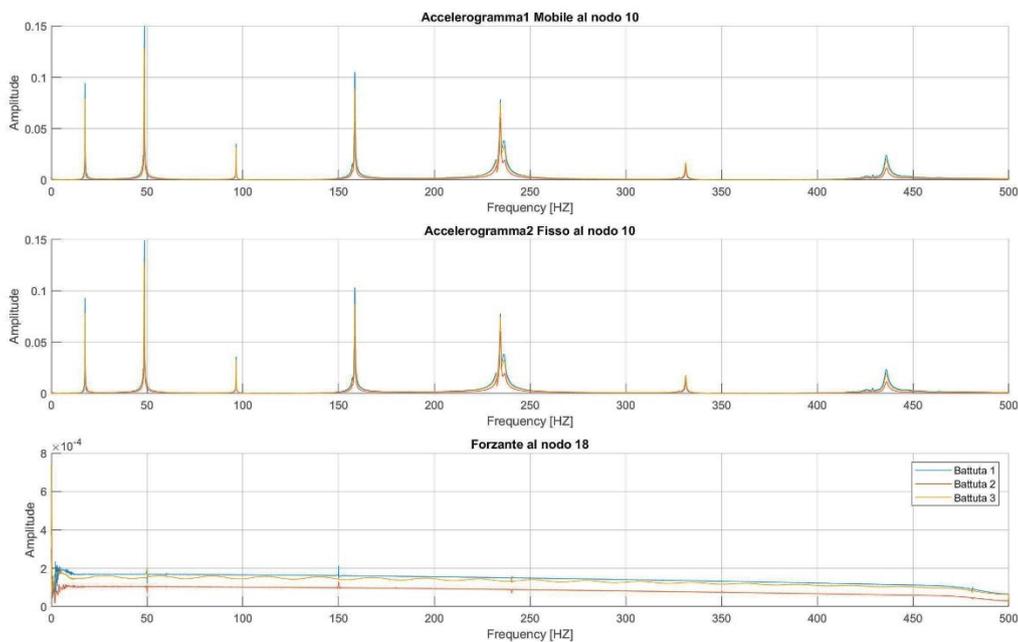


Figura 3.49: Plot degli output su trave sana con tecnica Roving Sensor, nodo 10;

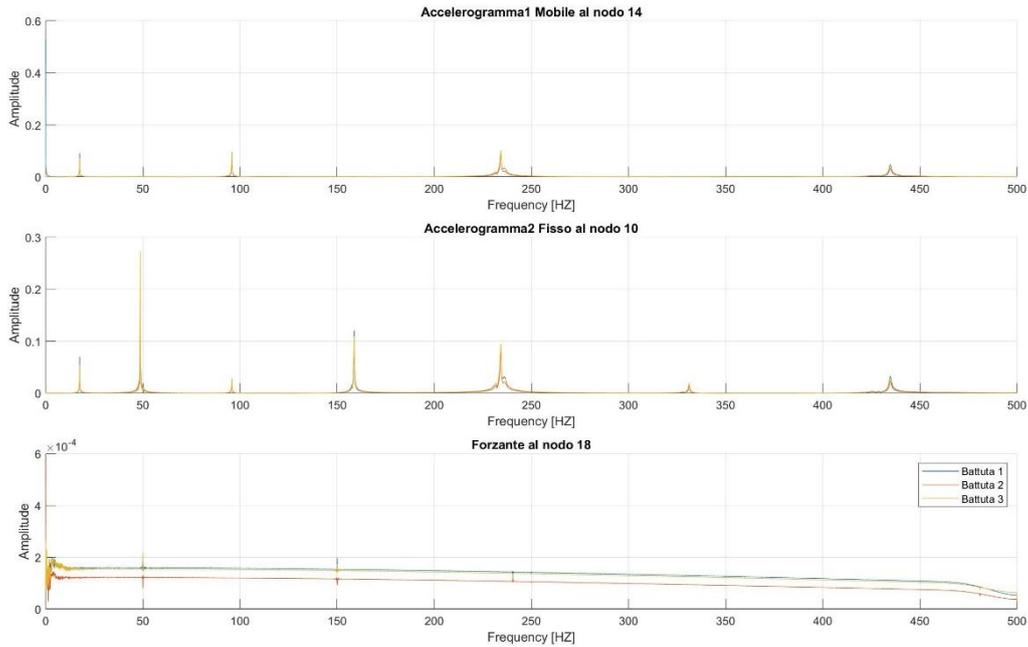


Figura 3.50: Plot degli output su trave sana con tecnica Roving Sensor, nodo 14;

Si propongono di seguito le tabelle relative all'extrapolazione dei valori necessari a identificare le prime quattro forme modali.

Nello specifico, per la prova eseguita con Roving Sensor il 18 Aprile, si ha: nella prima colonna il valore della frequenza estratto dall'ascissa dell'output dell'accelerometro 2; nella seconda e nella terza colonna si riportano rispettivamente i valori delle ampiezze corrispondenti alla frequenza associata dei valori dell'output dell'accelerometro 1 mobile e dell'output dell'accelerometro 1 fisso; nella quarta colonna si ottiene il valore che identifica l'andamento del modo di vibrare associato alla frequenza, tramite il rapporto delle due colonne precedenti.

Battuta 1				
Nodo	f1_X	f1_Y FFT(acc1 mobile)	f1_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 1
3	17.7002	0.00393156	0.106769	0.0368
4	17.7002	0.0106755	0.0857713	0.1245
5	17.7002	0.0188906	0.0770572	0.2452
6	17.5781	0.0187962	0.0475002	0.3957
7	17.5781	0.0307469	0.05504	0.5586
8	17.5781	0.0571773	0.0800379	0.7144
9	17.5781	0.0636966	0.072692	0.8763
10	17.5781	0.0941696	0.092935	1.0133
11	17.5781	0.0589458	0.0517356	1.1394
12	17.4561	0.0687325	0.055535	1.2376
13	17.4561	0.0611045	0.0474008	1.2891
14	17.4561	0.0912173	0.0698222	1.3064
15	17.4561	0.0849041	0.0660015	1.2864
16	17.4561	0.100888	0.0816146	1.2362
17	17.4561	0.0691604	0.0599794	1.1531
18	17.5781	0.0470734	0.0462311	1.0182
19	17.5781	0.0448069	0.0515022	0.8700
20	17.5781	0.031759	0.0447127	0.7103
21	17.5781	0.0324984	0.0586806	0.5538
22	17.5781	0.0331065	0.0838197	0.3950
23	17.5781	0.0274492	0.112449	0.2441
24	17.5781	0.0118213	0.093552	0.1264
25	17.5781	0.00330107	0.078245	0.0422
MEDIA f	17.5622			

Tabella 3.26: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 1 - Primo Modo di Vibrare;

Battuta 1				
Nodo	f2_X	f2_Y FFT(acc1 mobile)	f2_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 2
3	48.8281	0.0246249	0.304003	0.0810
4	48.7061	0.0557954	0.213781	0.2610
5	48.7061	0.106226	0.218396	0.4864
6	48.584	0.12015	0.167013	0.7194
7	48.4619	0.108137	0.118702	0.9110
8	48.4619	0.158668	0.153023	1.0369
9	48.4619	0.150055	0.139428	1.0762
10	48.584	0.150177	0.149248	1.0062
11	48.4619	0.127174	0.148078	0.8588
12	48.584	0.107982	0.175803	0.6142
13	48.7061	0.0689261	0.220436	0.3127
14	48.7061	0.0033986	0.266185	0.0128
15	48.7061	0.0675	0.197658	0.3415
16	48.584	0.136297	0.21631	0.6301
17	48.4619	0.151279	0.175219	0.8634
18	48.3398	0.161941	0.159141	1.0176
19	48.3398	0.186895	0.173249	1.0788
20	48.3398	0.159939	0.153512	1.0419
21	48.4619	0.137873	0.149685	0.9211
22	48.584	0.108486	0.147978	0.7331
23	48.584	0.101081	0.202888	0.4982
24	48.7061	0.0730922	0.272202	0.2685
25	48.7061	0.025535	0.283234	0.0902
MEDIA f	48.5680696			

Tabella 3.27: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 1 - Secondo Modo di Vibrare;

Battuta 1				
Nodo	f3_X	f3_Y FFT(acc1 mobile)	f3_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 3
3	96.5576	0.0233634	0.0426944	0.5472
4	96.4355	0.0455702	0.0268127	1.6996
5	96.1914	0.0617404	0.020662	2.9881
6	95.9473	0.0659102	0.0163126	4.0404
7	95.8252	0.06389	0.014588	4.3796
8	95.9473	0.0767741	0.0199949	3.8397
9	96.1914	0.0615439	0.0238898	2.5762
10	96.5576	0.0349516	0.035809	0.9761
11	96.4355	0.0228986	0.0319348	0.7170
12	96.1914	0.0462697	0.0213779	2.1644
13	95.9473	0.0687104	0.0220918	3.1102
14	95.8252	0.0935668	0.026935	3.4738
15	95.9473	0.0844346	0.026403	3.1979
16	96.1914	0.0710833	0.0317163	2.2412
17	96.4355	0.0189383	0.0255307	0.7418
18	96.4355	0.0241385	0.0252627	0.9555
19	96.1914	0.0553202	0.0227507	2.4316
20	95.8252	0.0487739	0.0146491	3.3295
21	95.7031	0.0453994	0.0121391	3.7399
22	95.8252	0.0607445	0.0169479	3.5842
23	95.0693	0.0574065	0.020173	2.8457
24	96.3135	0.0487146	0.0285919	1.7038
25	96.4355	0.0208554	0.0338434	0.6162
MEDIA_f	96.1054609			

Tabella 3.28: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 1 - Terzo Modo di Vibrare;

Battuta 1				
Nodo	f4_X	f4_Y FFT(acc1 mobile)	f4_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 4
3	158.813	0.0484369	0.137491	0.35229142
4	158.447	0.103838	0.107253	0.9681594
5	157.959	0.0987748	0.0693468	1.42435988
6	157.715	0.0930253	0.0615745	1.51077638
7	158.081	0.0766111	0.0633564	1.20920854
8	158.691	0.0536068	0.09407	0.56986074
9	158.813	0.0268741	0.0955247	0.28133143
10	158.447	0.104991	0.103052	1.01881574
11	157.959	0.106001	0.0737064	1.43815191
12	158.081	0.0962822	0.0720867	1.33564444
13	158.569	0.0693438	0.0887497	0.78134123
14	158.813	0.00095265	0.120309	0.00791834
15	158.447	0.0732837	0.0930627	0.78746587
16	157.959	0.109811	0.0831172	1.32115856
17	157.837	0.0850724	0.0590523	1.44062805
18	158.325	0.0783588	0.0738709	1.06075329
19	158.813	0.0258483	0.0852982	0.30303453
20	158.691	0.0487229	0.0913061	0.53362152
21	158.081	0.0839603	0.0696146	1.20607315
22	157.715	0.0987188	0.0637313	1.54898456
23	157.837	0.114297	0.0778396	1.46836572
24	158.325	0.0939158	0.0960929	0.9773438
25	158.691	0.0371726	0.0986909	0.37665681
MEDIA_f	158.309087			

Tabella 3.29: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 1 - Quarto Modo di Vibrare;

Battuta 2				
Nodo	f1_X	f1_Y FFT(acc1 mobile)	f1_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 1
3	17.7002	0.00350018	0.0955402	0.0366
4	17.7002	0.0140969	0.113111	0.1246
5	17.7002	0.0130359	0.0529962	0.2460
6	17.5781	0.0294083	0.074558	0.3944
7	17.5781	0.0377781	0.0685373	0.5512
8	17.5781	0.0490495	0.0684736	0.7163
9	17.5781	0.0583176	0.0665407	0.8764
10	17.5781	0.0494269	0.0487225	1.0145
11	17.5781	0.05307686	0.0465885	1.1393
12	17.4561	0.0550007	0.0445106	1.2357
13	17.4561	0.0741719	0.0576382	1.2869
14	17.4561	0.0653685	0.0500368	1.3064
15	17.4561	0.0869773	0.0676026	1.2866
16	17.4561	0.103429	0.0836744	1.2361
17	17.4561	0.0892774	0.0774886	1.1521
18	17.5781	0.0583934	0.0572689	1.0196
19	17.5781	0.0723149	0.0825374	0.8761
20	17.5781	0.04975	0.0695074	0.7158
21	17.5781	0.0450107	0.0812889	0.5537
22	17.5781	0.0457585	0.115441	0.3964
23	17.5781	0.0262615	0.105892	0.2480
24	17.5781	0.0143671	0.114227	0.1258
25	17.5781	0.00170136	0.0416432	0.0409
MEDIA_f	17.5622			

Tabella 3.30: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 2 - Primo Modo di Vibrare;

Battuta 2				
Nodo	f2_X	f2_Y FFT(acc1 mobile)	f2_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 2
3	48.8281	0.0162271	0.200317	0.0810
4	48.7061	0.0626365	0.240119	0.2609
5	48.7061	0.0942467	0.193733	0.4865
6	48.584	0.15419	0.214828	0.7177
7	48.4619	0.130163	0.14287	0.9111
8	48.4619	0.149323	0.143982	1.0371
9	48.4619	0.130639	0.121396	1.0761
10	48.584	0.0891441	0.0886008	1.0061
11	48.4619	0.11622	0.13537	0.8585
12	48.584	0.110354	0.17979	0.6138
13	48.7061	0.0858154	0.274259	0.3129
14	48.7061	0.00272205	0.204744	0.0133
15	48.7061	0.0670717	0.196397	0.3415
16	48.584	0.146663	0.232849	0.6299
17	48.4619	0.215647	0.249743	0.8635
18	48.3398	0.204048	0.200613	1.0171
19	48.3398	0.219588	0.203545	1.0788
20	48.3398	0.181133	0.173669	1.0430
21	48.4619	0.156915	0.170242	0.9217
22	48.584	0.13701	0.186889	0.7331
23	48.584	0.103224	0.20753	0.4974
24	48.7061	0.0662672	0.246768	0.2685
25	48.7061	0.0164025	0.181642	0.0903
MEDIA_f	48.5680696			

Tabella 3.31: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 2 - Secondo Modo di Vibrare;

Battuta 2				
Nodo	f3_X	f3_Y FFT(acc1 mobile)	f3_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 3
3	96.5576	0.0151171	0.0275986	0.5477
4	96.4355	0.0525896	0.030984	1.6973
5	96.1914	0.0548291	0.0183045	2.9954
6	95.9473	0.0744337	0.0183792	4.0499
7	95.8252	0.0722939	0.0165182	4.3766
8	95.9473	0.0744003	0.0193747	3.8401
9	96.1914	0.0548474	0.0212876	2.5765
10	96.5576	0.0241449	0.0247045	0.9773
11	96.4355	0.0202693	0.0283108	0.7160
12	96.1914	0.0454828	0.0210889	2.1567
13	95.9473	0.085239	0.027332	3.1187
14	95.8252	0.0711319	0.0204739	3.4743
15	95.9473	0.0726162	0.0227079	3.1978
16	96.1914	0.0659788	0.0294847	2.2377
17	96.4355	0.02399434	0.0324663	0.7391
18	96.4355	0.0296435	0.0312104	0.9498
19	96.1914	0.0634574	0.026281	2.4146
20	95.8252	0.0588765	0.0177268	3.3213
21	95.7031	0.0509191	0.0136376	3.7337
22	95.8252	0.0593854	0.0165209	3.5946
23	95.0693	0.0663565	0.0233822	2.8379
24	96.3135	0.0508152	0.029747	1.7082
25	96.4355	0.0152238	0.0246937	0.6165
MEDIA_f	96.1054609			

Tabella 3.32: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 2 - Terzo Modo di Vibrare;

Battuta 2				
Nodo	f4_X	f4_Y FFT(acc1 mobile)	f4_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 4
3	158.813	0.0284215	0.080732	0.3520
4	158.447	0.0957455	0.0988878	0.9682
5	157.959	0.0814483	0.0572134	1.4236
6	157.715	0.121784	0.0806517	1.5100
7	158.081	0.0939236	0.0777151	1.2086
8	158.691	0.0516926	0.0906667	0.5701
9	158.813	0.023583	0.0838511	0.2812
10	158.447	0.0574029	0.0563295	1.0191
11	157.959	0.0935031	0.0650138	1.4382
12	158.081	0.0976973	0.073159	1.3354
13	158.569	0.0768494	0.0984145	0.7809
14	158.813	0.0007316	0.0890126	0.0082
15	158.447	0.078335	0.0994796	0.7874
16	157.959	0.10784	0.0816574	1.3206
17	157.837	0.13037	0.0905487	1.4398
18	158.325	0.106255	0.100172	1.0607
19	158.813	0.0320332	0.104684	0.3060
20	158.691	0.0600146	0.112513	0.5334
21	158.081	0.0982377	0.0813968	1.2069
22	157.715	0.118059	0.0761556	1.5502
23	157.837	0.123429	0.084102	1.4676
24	158.325	0.0952475	0.0973995	0.9779
25	158.691	0.0325973	0.0865376	0.3767
MEDIA_f	158.309087			

Tabella 3.33: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 2 - Quarto Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f1_X	f1_Y FFT(acc1 mobile)	f1_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 1
3	17.7002	0.0036173	0.0985563	0.0367
4	17.7002	0.0123741	0.0991681	0.1248
5	17.7002	0.0167122	0.0681131	0.2454
6	17.5781	0.0272711	0.0690986	0.3947
7	17.5781	0.0361995	0.0654471	0.5531
8	17.5781	0.0491963	0.0687092	0.7160
9	17.5781	0.0659034	0.0751223	0.8773
10	17.5781	0.0790538	0.0780414	1.0130
11	17.5781	0.0616985	0.0541698	1.1390
12	17.4561	0.0668605	0.0542164	1.2332
13	17.4561	0.0863171	0.0670251	1.2878
14	17.4561	0.071823	0.0547982	1.3107
15	17.4561	0.0879528	0.0683573	1.2867
16	17.4561	0.104204	0.0844131	1.2345
17	17.4561	0.0485818	0.0428404	1.1340
18	17.5781	0.0688	0.0674619	1.0198
19	17.5781	0.0713855	0.0815868	0.8750
20	17.5781	0.0649641	0.0905938	0.7171
21	17.5781	0.0474965	0.0859333	0.5527
22	17.5781	0.0451544	0.113624	0.3974
23	17.5781	0.0217055	0.0875165	0.2480
24	17.5781	0.00716013	0.0570649	0.1255
25	17.5781	0.00236848	0.0582713	0.0406
MEDIA_f	17.5622			

Tabella 3.34: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 3 - Primo Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f2_X	f2_Y FFT(acc1 mobile)	f2_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 2
3	48.8281	0.0167649	0.206937	0.0810
4	48.7061	0.0555905	0.212907	0.2611
5	48.7061	0.0853276	0.175338	0.4866
6	48.584	0.161807	0.225011	0.7191
7	48.4619	0.162278	0.178095	0.9112
8	48.4619	0.137956	0.133065	1.0368
9	48.4619	0.142607	0.135941	1.0490
10	48.4619	0.129037	0.128154	1.0069
11	48.4619	0.139198	0.1621	0.8587
12	48.584	0.113039	0.184123	0.6139
13	48.7061	0.0795095	0.254378	0.3126
14	48.7061	0.0035237	0.273024	0.0129
15	48.7061	0.0693527	0.203178	0.3413
16	48.584	0.148659	0.236014	0.6299
17	48.4619	0.158005	0.183183	0.8626
18	48.3398	0.155729	0.152972	1.0180
19	48.3398	0.1999901	0.185282	1.0794
20	48.3398	0.146711	0.140716	1.0426
21	48.4619	0.18591	0.201756	0.9215
22	48.584	0.142094	0.193575	0.7341
23	48.584	0.111753	0.224512	0.4978
24	48.7061	0.0569695	0.212116	0.2686
25	48.7061	0.0212118	0.235207	0.0902
MEDIA_f	48.5627609			

Tabella 3.35: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 3 - Secondo Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f3_X	f3_Y FFT(acc1 mobile)	f3_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 3
3	96.5576	0.0160445	0.0294061	0.5456
4	96.4355	0.0477933	0.0281761	1.6962
5	96.1914	0.0572864	0.0191333	2.9941
6	95.9473	0.083918	0.0207393	4.0463
7	95.8252	0.0906304	0.0206628	4.3862
8	95.9473	0.0702381	0.0183106	3.8359
9	96.1914	0.0665501	0.0258163	2.5778
10	96.5576	0.0321103	0.0329055	0.9758
11	96.4355	0.0240508	0.0335939	0.7159
12	96.1914	0.050502	0.0233314	2.1646
13	95.9473	0.0880041	0.0282263	3.1178
14	95.8252	0.0971741	0.0278286	3.4919
15	95.9473	0.0935266	0.0292468	3.1978
16	96.1914	0.072151	0.0322691	2.2359
17	96.4355	0.017815	0.0242085	0.7359
18	96.4355	0.0259367	0.0272788	0.9508
19	96.1914	0.062578	0.0259211	2.4142
20	95.8252	0.0532022	0.0159821	3.3289
21	95.7031	0.0687132	0.0183438	3.7459
22	95.8252	0.0697821	0.0193839	3.6000
23	95.0693	0.0783401	0.0276099	2.8374
24	96.3135	0.0473436	0.0276655	1.7113
25	96.4355	0.0150323	0.0243765	0.6167
MEDIA_f	96.1054609			

Tabella 3.36: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 3 - Terzo Modo di Vibrare;

Battuta 3				
Nodo	f4_X	f4_Y FFT(acc1 mobile)	f4_Y FFT(acc2 fisso_10)	MODO DI VIBRARE 4
3	158.813	0.0339451	0.0965154	0.3517
4	158.447	0.0891001	0.0919781	0.9687
5	157.959	0.0879098	0.0617833	1.4229
6	157.715	0.121904	0.0807177	1.5103
7	158.081	0.1129	0.0934824	1.2077
8	158.691	0.0461806	0.0810471	0.5698
9	158.813	0.0284622	0.101126	0.2815
10	158.447	0.089544	0.0878934	1.0188
11	157.959	0.111735	0.0776994	1.4380
12	158.081	0.101819	0.0762572	1.3352
13	158.569	0.0741137	0.0949184	0.7808
14	158.813	0.00089749	0.10936	0.0082
15	158.447	0.0745197	0.0946402	0.7874
16	157.959	0.113775	0.0861594	1.3205
17	157.837	0.0950593	0.0659117	1.4422
18	158.325	0.0870954	0.0820686	1.0613
19	158.813	0.0308987	0.10099	0.3060
20	158.691	0.0455425	0.0853681	0.5335
21	158.081	0.106699	0.0884775	1.2059
22	157.715	0.128986	0.08322	1.5499
23	157.837	0.115539	0.0786659	1.4687
24	158.325	0.086905	0.0887367	0.9794
25	158.691	0.0344844	0.0917207	0.3760
MEDIA_f	158.309087			

Tabella 3.37: Estrapolazione dati Roving Sensor 18 Aprile, Battuta 3 - Quarto Modo di Vibrare;

In sintesi, si riporta tabellata la media per le tre battute sia delle frequenze che dei modi di vibrare. Si procede, grazie all'utilizzo di Excel, alla rappresentazione grafica della media delle tre battute dei primi quattro modi di vibrare relativi alla prova eseguita con la tecnica del Roving Hammer in data 18 aprile 2024 sulla trave doppiamente incastrata, oggetto di studio.

Per le frequenze, si ha:

MEDIA FREQUENZA 1			f ₁
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
17.562	17.562	17.562	17.562

Tabella 3.38: Media frequenza 1, prova del 18 Aprile 2024;

MEDIA FREQUENZA 2			f ₁
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
48.568	48.568	48.563	48.566

Tabella 3.39: Media frequenza 2, prova del 18 Aprile 2024;

MEDIA FREQUENZA 3			f ₁
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
96.105	96.105	96.105	96.105

Tabella 3.40: Media frequenza 3, prova del 18 Aprile 2024;

MEDIA FREQUENZA 4			f ₁
Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
158.309	158.309	158.309	158.309

Tabella 3.41: Media frequenza 4, prova del 18 Aprile 2024;

In definitiva, si ha per le frequenze:

MEDIA FREQUENZE 18Aprile_RS	
f ₁	17.562
f ₂	48.566
f ₃	96.105
f ₄	158.309

Tabella 3.42: Quadro riassuntivo della media frequenze 18 Aprile, Roving Sensor

Per i modi di vibrare si ottiene:

Nodo	MODO DI VIBRARE 1			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	0.0368	0.0366	0.0367	0.0367
4	0.1245	0.1246	0.1248	0.1246
5	0.2452	0.2460	0.2454	0.2455
6	0.3957	0.3944	0.3947	0.3949
7	0.5586	0.5512	0.5531	0.5543
8	0.7144	0.7163	0.7160	0.7156
9	0.8763	0.8764	0.8773	0.8767
10	1.0133	1.0145	1.0130	1.0136
11	1.1394	1.1393	1.1390	1.1392
12	1.2376	1.2357	1.2332	1.2355
13	1.2891	1.2869	1.2878	1.2879
14	1.3064	1.3064	1.3107	1.3078
15	1.2864	1.2866	1.2867	1.2866
16	1.2362	1.2361	1.2345	1.2356
17	1.1531	1.1521	1.1340	1.1464
18	1.0182	1.0196	1.0198	1.0192
19	0.8700	0.8761	0.8750	0.8737
20	0.7103	0.7158	0.7171	0.7144
21	0.5538	0.5537	0.5527	0.5534
22	0.3950	0.3964	0.3974	0.3963
23	0.2441	0.2480	0.2480	0.2467
24	0.1264	0.1258	0.1255	0.1259
25	0.0422	0.0409	0.0406	0.0412

Tabella 3.43: Media Modo di Vibrare 1, prova del 18 Aprile 2024;

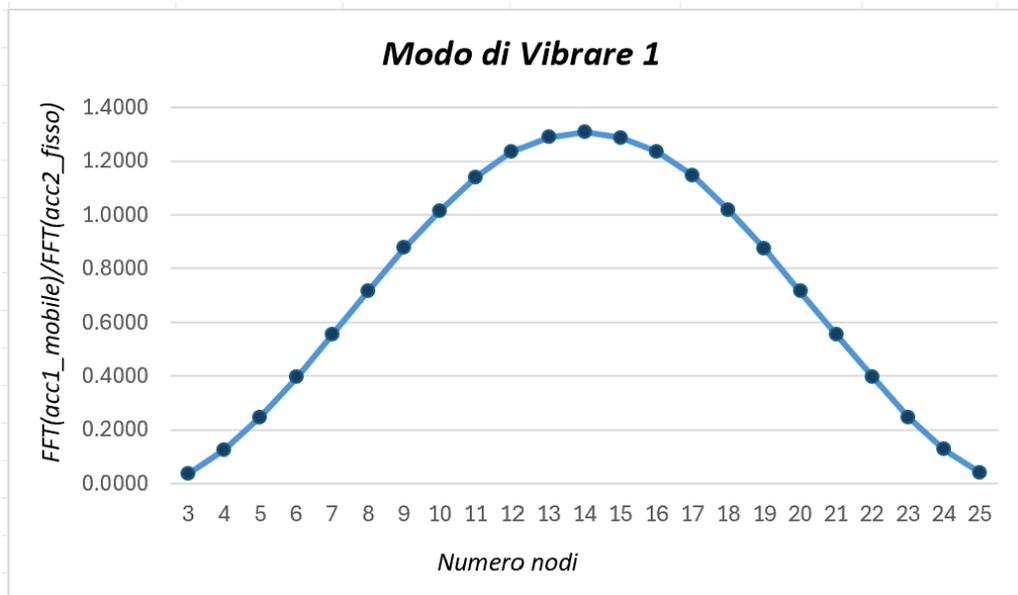


Figura 3.51: Modo di vibrare 1, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

Nodo	MODO DI VIBRARE 2			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	0.0810	0.0810	0.0810	-0.0810
4	0.2610	0.2609	0.2611	-0.2610
5	0.4864	0.4865	0.4866	-0.4865
6	0.7194	0.7177	0.7191	-0.7187
7	0.9110	0.9111	0.9112	-0.9111
8	1.0369	1.0371	1.0368	-1.0369
9	1.0762	1.0761	1.0490	-1.0671
10	1.0062	1.0061	1.0069	-1.0064
11	0.8588	0.8585	0.8587	-0.8587
12	0.6142	0.6138	0.6139	-0.6140
13	0.3127	0.3129	0.3126	-0.3127
14	0.0128	0.0133	0.0129	0.0130
15	0.3415	0.3415	0.3413	0.3414
16	0.6301	0.6299	0.6299	0.6299
17	0.8634	0.8635	0.8626	0.8631
18	1.0176	1.0171	1.0180	1.0176
19	1.0788	1.0788	1.0794	1.0790
20	1.0419	1.0430	1.0426	1.0425
21	0.9211	0.9217	0.9215	0.9214
22	0.7331	0.7331	0.7341	0.7334
23	0.4982	0.4974	0.4978	0.4978
24	0.2685	0.2685	0.2686	0.2685
25	0.0902	0.0903	0.0902	0.0902

Tabella 3.44: Media Modo di Vibrare 2, prova del 18 Aprile 2024;

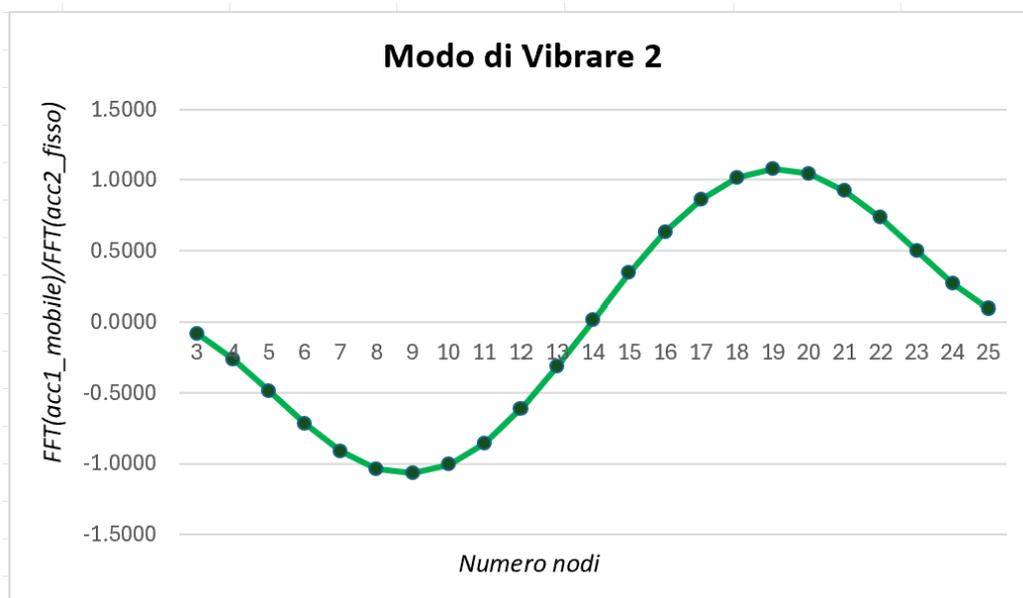


Figura 3.52: Modo di vibrare 2, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

Nodo	MODO DI VIBRARE 3			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	0.5472	0.5477	0.5456	-0.5469
4	1.6996	1.6973	1.6962	-1.6977
5	2.9881	2.9954	2.9941	-2.9925
6	4.0404	4.0499	4.0463	-4.0456
7	4.3796	4.3766	4.3862	-4.3808
8	3.8397	3.8401	3.8359	-3.8386
9	2.5762	2.5765	2.5778	-2.5768
10	0.9761	0.9773	0.9758	-0.9764
11	0.7170	0.7160	0.7159	0.7163
12	2.1644	2.1567	2.1646	2.1619
13	3.1102	3.1187	3.1178	3.1156
14	3.4738	3.4743	3.4919	3.4800
15	3.1979	3.1978	3.1978	3.1979
16	2.2412	2.2377	2.2359	2.2383
17	0.7418	0.7391	0.7359	0.7389
18	0.9555	0.9498	0.9508	-0.9520
19	2.4316	2.4146	2.4142	-2.4201
20	3.3295	3.3213	3.3289	-3.3266
21	3.7399	3.7337	3.7459	-3.7398
22	3.5842	3.5946	3.6000	-3.5929
23	2.8457	2.8379	2.8374	-2.8403
24	1.7038	1.7082	1.7113	-1.7078
25	0.6162	0.6165	0.6167	-0.6165

Tabella 3.45: Media Modo di Vibrare 3, prova del 18 Aprile 2024;

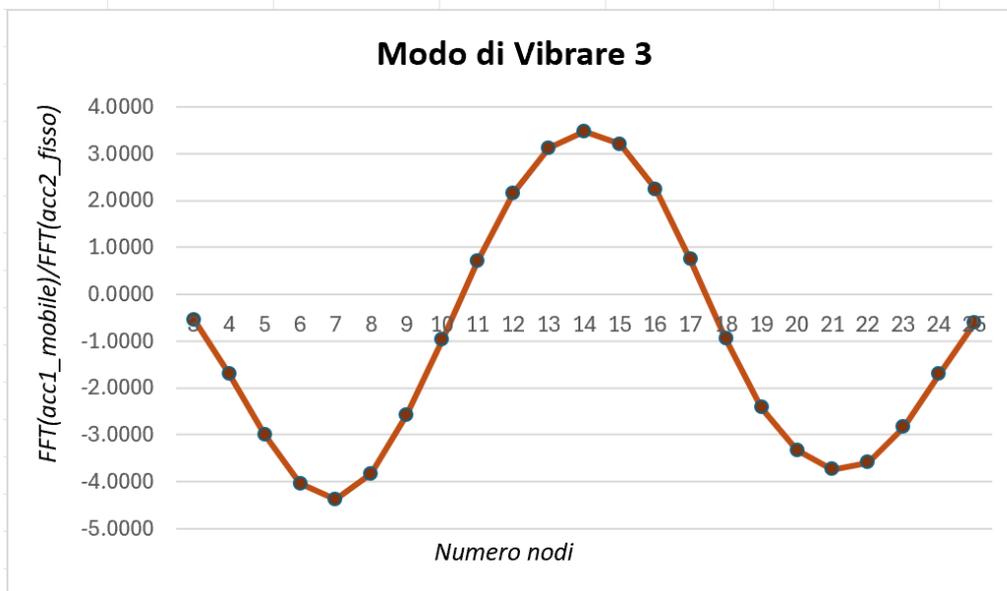


Figura 3.53: Modo di vibrare 3, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

Nodo	MODO DI VIBRARE 4			MEDIA
	Battuta 1	Battuta 2	Battuta 3	
3	0.3523	0.3520	0.3517	-0.3520
4	0.9682	0.9682	0.9687	-0.9684
5	1.4244	1.4236	1.4229	-1.4236
6	1.5108	1.5100	1.5103	-1.5103
7	1.2092	1.2086	1.2077	-1.2085
8	0.5699	0.5701	0.5698	-0.5699
9	0.2813	0.2812	0.2815	0.2813
10	1.0188	1.0191	1.0188	1.0189
11	1.4382	1.4382	1.4380	1.4381
12	1.3356	1.3354	1.3352	1.3354
13	0.7813	0.7809	0.7808	0.7810
14	0.0079	0.0082	0.0082	-0.0081
15	0.7875	0.7874	0.7874	-0.7874
16	1.3212	1.3206	1.3205	-1.3208
17	1.4406	1.4398	1.4422	-1.4409
18	1.0608	1.0607	1.0613	-1.0609
19	0.3030	0.3060	0.3060	-0.3050
20	0.5336	0.5334	0.5335	0.5335
21	1.2061	1.2069	1.2059	1.2063
22	1.5490	1.5502	1.5499	1.5497
23	1.4684	1.4676	1.4687	1.4682
24	0.9773	0.9779	0.9794	0.9782
25	0.3767	0.3767	0.3760	0.3764

Tabella 3.46: Media Modo di Vibrare 4, prova del 18 Aprile 2024;

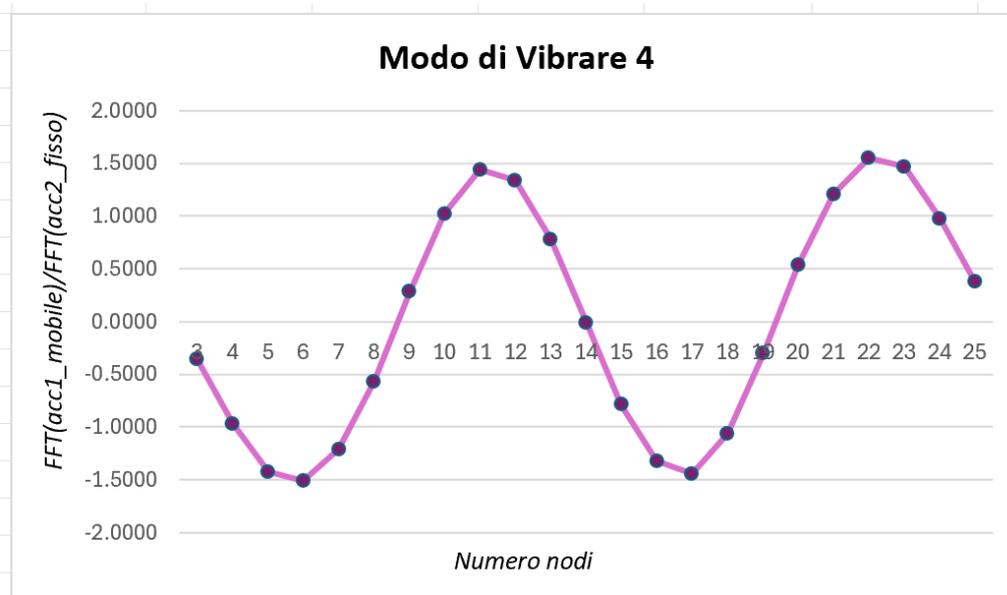


Figura 3.54: Modo di vibrare 4, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

Quanto sopra riportato, si esegue anche per le prove dinamiche effettuate con la tecnica del Roving Sensor in altre due giornate di prova, in particolare il 22 Aprile 2024 ed il 15 Maggio 2024. Le prove in

oggetto si eseguono allo scopo di avere un quadro dettagliato della variazione delle frequenze e per avere maggiore attendibilità dei risultati per lo studio successivo sull'identificazione del danno.

Si riportano sinteticamente i valori delle frequenze e dei modi di vibrare.

Si propongono i grafici ottenuti per i modi di vibrare nelle citate giornate di prova.

TRAVE SANA						
22 Aprile 2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	18.613	3	0.038	-0.083	-0.575	-0.354
f_2	50.031	4	0.126	-0.264	-1.762	-0.962
f_3	97.789	5	0.248	-0.489	-3.091	-1.410
f_4	160.069	6	0.395	-0.720	-4.205	-1.492
		7	0.558	-0.916	-4.539	-1.183
		8	0.720	-1.040	-3.967	-0.551
		9	0.878	-1.077	-2.643	0.288
		10	1.016	-1.012	-0.993	1.018
		11	1.143	-0.856	0.758	1.426
		12	1.230	-0.618	2.223	1.330
		13	1.284	-0.314	3.234	0.778
		14	1.303	0.011	3.608	-0.010
		15	1.287	0.340	3.300	-0.784
		16	1.232	0.628	2.317	-1.309
		17	1.145	0.864	0.775	-1.421
		18	1.029	1.015	-0.945	-1.058
		19	0.890	1.078	-2.464	-0.314
		20	0.726	1.050	-3.410	0.507
		21	0.562	0.923	-3.852	1.186
		22	0.401	0.734	-3.706	1.530
		23	0.251	0.502	-2.939	1.449
		24	0.129	0.272	-1.779	0.971
		25	0.041	0.091	-0.634	0.371

Tabella 3.47: Valori media frequenze e modi di vibrare trave sana 22 Aprile, Roving Sensor;

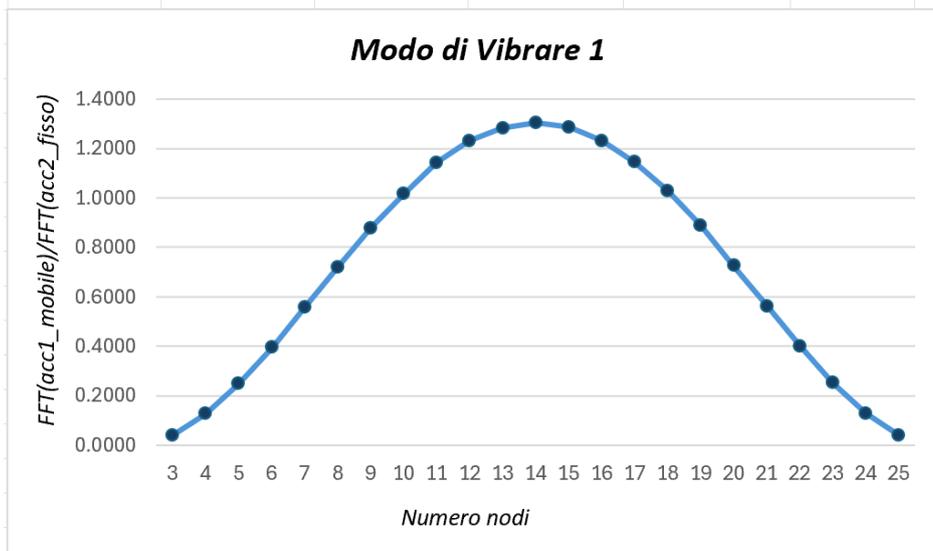


Figura 3.55: Modo di vibrare 1, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

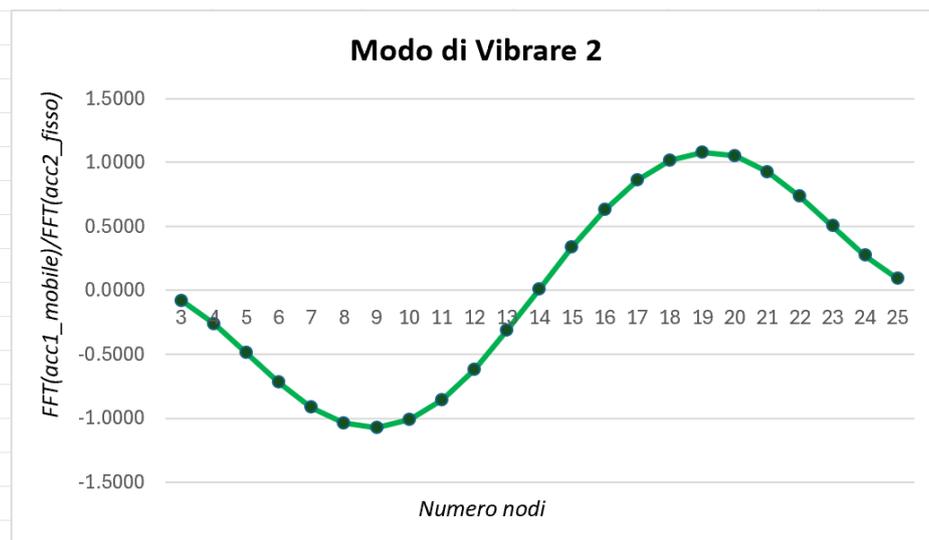


Figura 3.56: Modo di vibrare 2, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

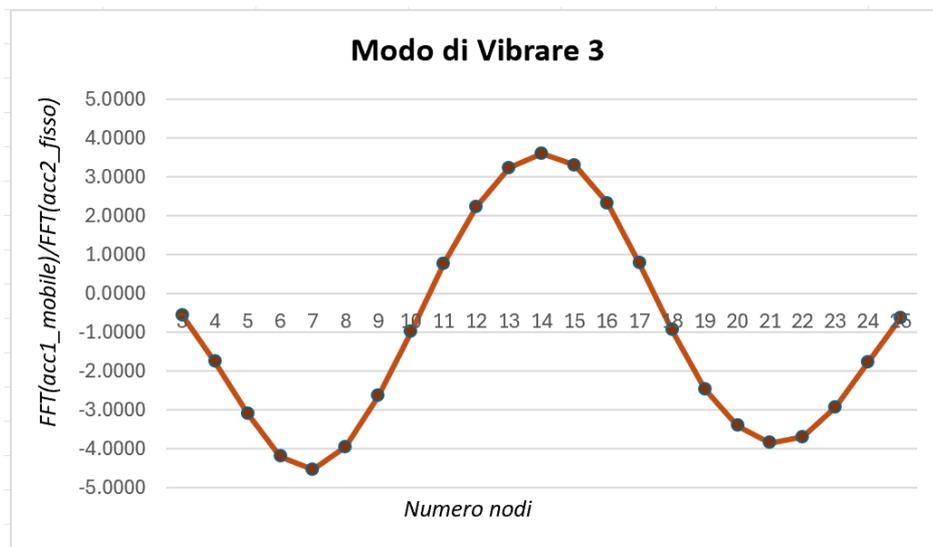


Figura 3.57: Modo di vibrare 3, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

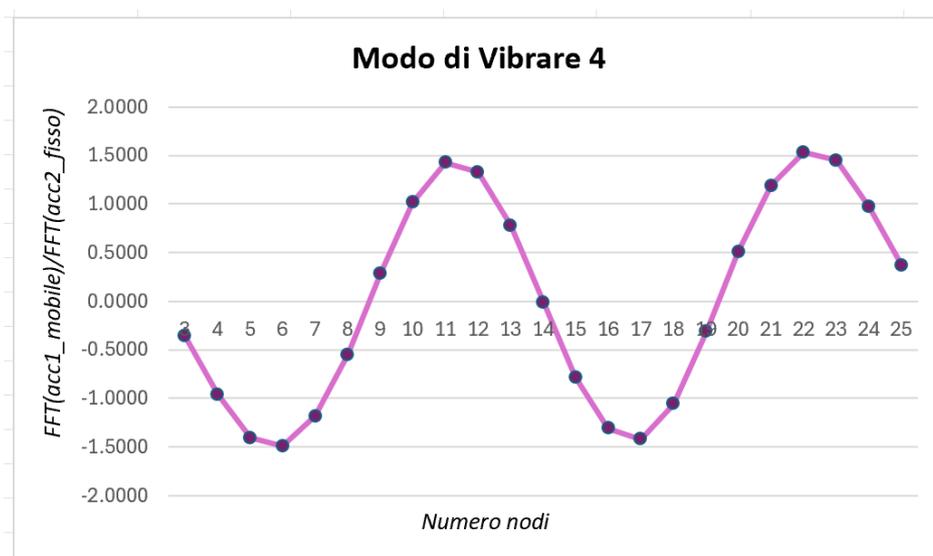


Figura 3.58: Modo di vibrare 4, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor;

TRAVE SANA						
15_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
f_1	16.451	3	0.036	-0.080	-0.560	-0.347
f_2	47.121	4	0.123	-0.263	-1.739	-0.966
f_3	94.566	5	0.238	-0.483	-3.022	-1.411
f_4	156.618	6	0.382	-0.712	-4.075	-1.497
		7	0.544	-0.909	-4.430	-1.190
		8	0.700	-1.034	-3.896	-0.561
		9	0.864	-1.073	-2.635	0.271
		10	1.006	-1.008	-1.026	0.997
		11	1.117	-0.856	0.725	1.423
		12	1.224	-0.616	2.182	1.331
		13	1.268	-0.306	3.156	0.771
		14	1.290	0.017	3.513	-0.009
		15	1.272	0.341	3.223	-0.783
		16	1.215	0.636	2.275	-1.307
		17	1.126	0.870	0.739	-1.425
		18	1.014	1.021	-0.946	-1.067
		19	0.863	1.084	-2.437	-0.306
		20	0.709	1.048	-3.441	0.510
		21	0.545	0.922	-3.865	1.190
		22	0.387	0.733	-3.636	1.547
		23	0.232	0.497	-2.833	1.457
		24	0.122	0.265	-1.713	0.970
		25	0.040	0.090	-0.625	0.383

Tabella 3.48: Valori media frequenze e modi di vibrare trave sana 15 Maggio, Roving Sensor;

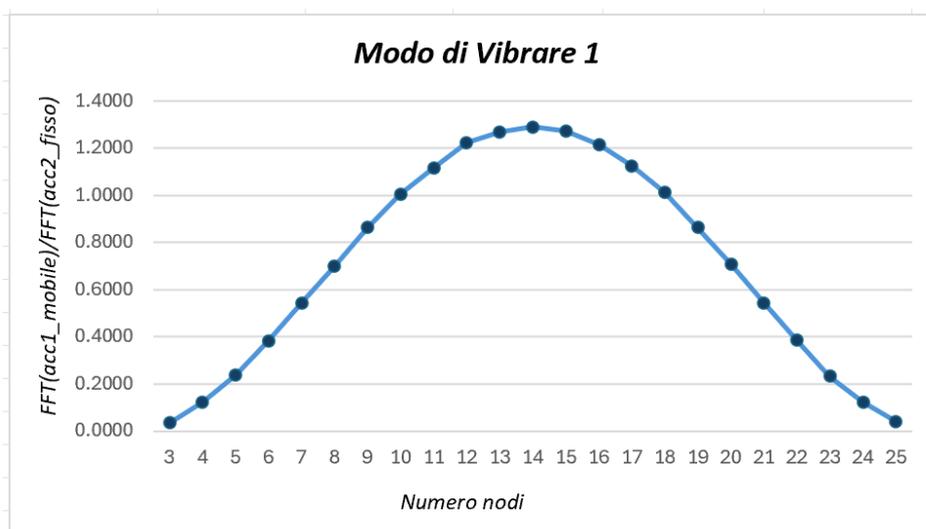


Figura 3.59: Modo di vibrare 1, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor;

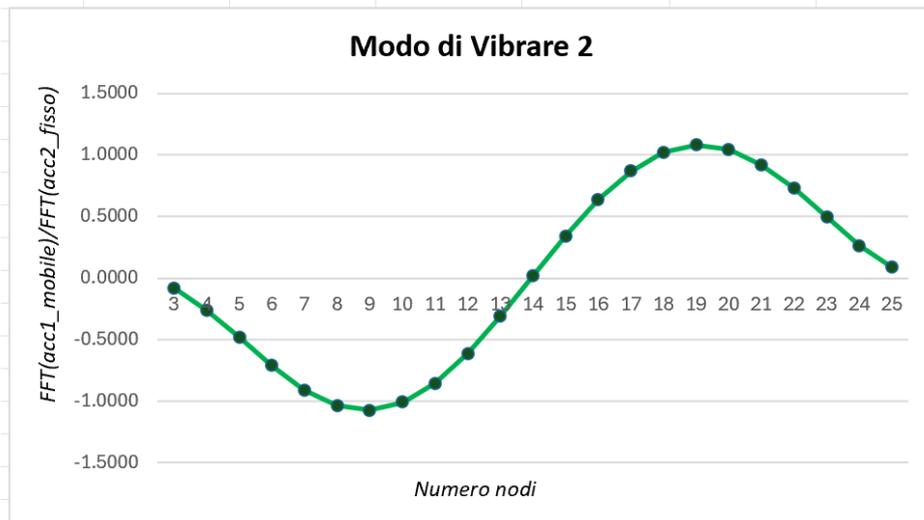


Figura 3.60: Modo di vibrare 2, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor;

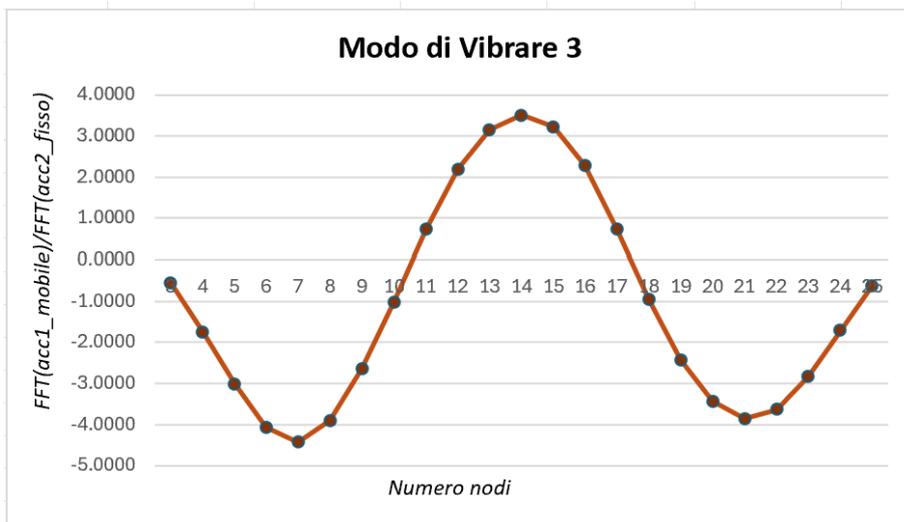


Figura 3.61: Modo di vibrare 3, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor;

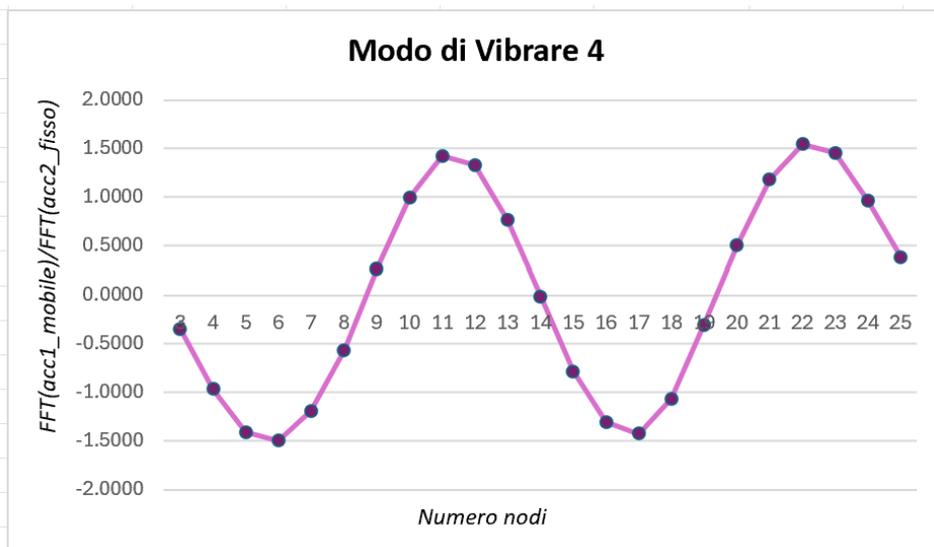


Figura 3.62: Modo di vibrare 4, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor;

Nei grafici rappresentativi dei quattro modi di vibrare si visualizza sull'asse delle ascisse il numero del nodo ispezionato e sull'asse delle ordinate l'ampiezza del modo.

Inoltre, è evidente che l'andamento delle forme modali ottenute con la tecnica del Roving Sensor risultato più accurate e regolari rispetto a quelle ottenute con la tecnica del Roving Hammer.

Dunque, per condurre lo studio successivo sull'identificazione del danno si considerano i parametri dinamici sulla trave integra ottenuti dalle prove con Roving Sensor.

3.3.7 Confronto Frequenze

Si propone una tabella riassuntiva con i valori delle frequenze determinate analiticamente, numericamente con il software Straus7 e sperimentalmente con la tecnica del Roving Hammer.

Le frequenze sperimentali risultano la media dei valori ottenuti dalle 3 misurazioni effettuate nei giorni di prova

CONFRONTO FREQUENZE TRAVE SANA								
Frequenze Analitiche			Frequenze FEM_24 elementi			Frequenze Sperimentali_Roving Sensor		
f_1	18.037	[Hz]	f_1	18.037	[Hz]	f_1	17.542	[Hz]
f_2	49.718		f_2	49.720		f_2	48.573	
f_3	97.479		f_3	97.469		f_3	96.153	
f_4	161.123		f_4	161.111		f_4	158.332	

Tabella 3.49: Confronto frequenze analitiche, numeriche e sperimentali con Roving Sensor

3.4 EFFETTI DELLA TEMPERATURA SULLE PROVE DINAMICHE

Dalle diverse misurazioni effettuate su trave integra si riscontra una forte influenza della temperatura sull'andamento delle frequenze della trave in alluminio oggetto di studio.

Infatti, l'influenza della temperatura sulle prove dinamiche effettuate su una trave in alluminio è un aspetto critico da considerare, soprattutto per quanto riguarda le frequenze di risonanza. Le variazioni di temperatura

possono influenzare le proprietà fisiche e meccaniche dell'alluminio, alterando così il comportamento dinamico della trave. In particolare, il modulo di Young dell'alluminio diminuisce con l'aumento della temperatura, questo significa che la trave diventa più flessibile a temperature più elevate, influenzando le frequenze di risonanza. Anche la variazione della densità dell'alluminio può avere un impatto sulle frequenze naturali della trave, anche se la variazione della densità con la temperatura è relativamente piccola rispetto ad altri materiali. Inoltre, l'alluminio ha un coefficiente di dilatazione termica significativo, il che significa che le sue dimensioni possono cambiare notevolmente con la temperatura. Questo può influenzare la lunghezza, la sezione trasversale e, di conseguenza, le proprietà dinamiche della trave.

La temperatura ha degli effetti considerevoli sui parametri di identificazione dinamica estrapolati dalle prove dinamiche. Infatti, le frequenze naturali (o frequenze proprie) della trave sono influenzate dalla temperatura attraverso la modifica del modulo di elasticità e della geometria della trave dovuta alla dilatazione termica. In generale, un aumento della temperatura porta a una diminuzione delle frequenze naturali a causa della riduzione del modulo di elasticità. Inoltre, la temperatura può influenzare il livello di smorzamento interno della trave in alluminio. A temperature più elevate, il materiale può presentare un aumento dello smorzamento, che potrebbe ridurre l'ampiezza delle vibrazioni risonanti.

Anche le modalità di vibrazione possono essere alterate dalla dilatazione termica. La distribuzione delle masse e la rigidità della trave cambiano con la temperatura, influenzando le forme modali.

È fondamentale, durante le prove dinamiche monitorare e controllare la temperatura della trave poiché variazioni significative di temperatura possono portare a risultati non rappresentativi.

In alcune applicazioni, è possibile utilizzare tecniche di compensazione termica per correggere le variazioni delle frequenze naturali dovute alla temperatura. Questo può includere l'uso di modelli matematici che tengano conto delle variazioni delle proprietà materiali con la temperatura.

Effettuare le prove in ambienti a temperatura controllata può ridurre le variazioni delle proprietà dinamiche della trave, fornendo risultati più affidabili, accurati e ripetibili.

3.4.1 Influenza della temperatura nel caso studio

Le giornate di prova, eseguite nel periodo Marzo - Giugno 2024 si caratterizzano da forti sbalzi di temperatura; per avere misurazioni accurate ed affidabili e per studiare praticamente l'influenza della temperatura sui parametri dinamici si monitora la temperatura durante le prove dinamiche eseguite sulla trave integra in alluminio, doppiamente incastrata agli estremi. Si utilizza un termoigrometro digitale al fine di registrare la temperatura all'inizio prova.

Il termoigrometro è uno strumento utilizzato per misurare e monitorare simultaneamente la temperatura e l'umidità relativa dell'aria. È ampiamente utilizzato in vari settori e per il controllo delle condizioni ambientali in case, uffici e laboratori.

A fine esplicativo, si riportano le rilevazioni di temperatura con la strumentazione sopracitata fatte all'inizio delle prove dinamiche eseguite su trave integra nelle giornate di sperimentazione del 10 Maggio 2024 e del 15 Maggio 2024.

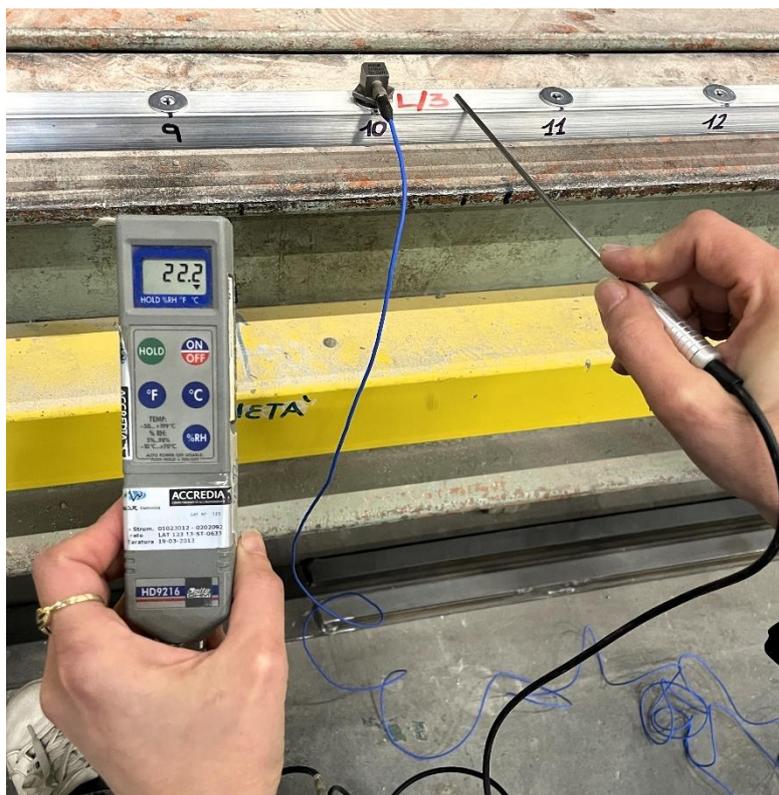


Figura 3.63: Temperatura con termoigrometro, prima della prova del 10 maggio 2024;

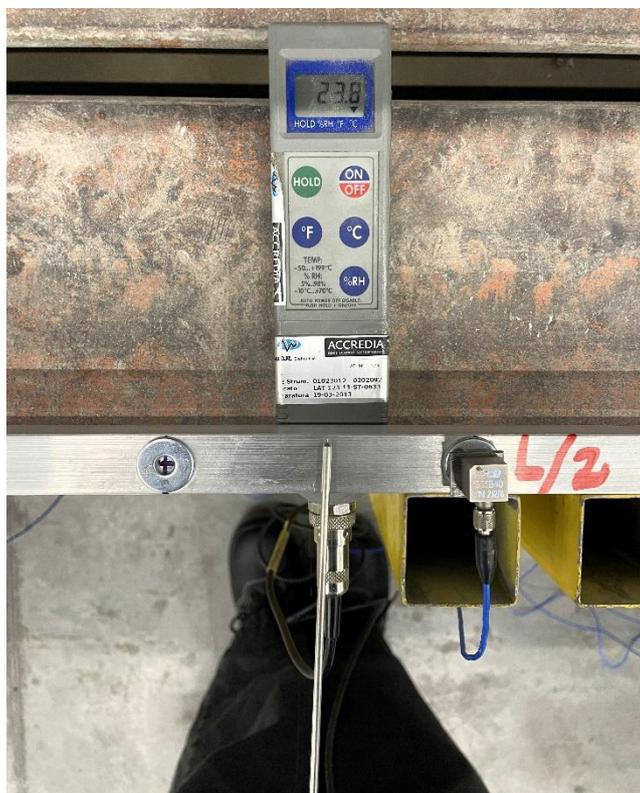


Figura 3.64: Temperatura con termoigrometro, prima della prova del 15 maggio 2024;

Per ottenere un quadro generale rappresentativo sulla variazione delle frequenze con la temperatura, si preferisce utilizzare il valore della temperatura media rilevata dal sito metereologico del Comune di Bologna. Si riporta di seguito una tabella elaborata in Excel contenente le date delle giornate di prova ed i corrispettivi valori di temperatura massima, minima e media.

Data Prova_TraveSana	Temperatura Massima	Temperatura Minima	Temperatura Media
26_Marzo_2024	10.2	7.1	8.8
15_Aprile_2024	27.5	16.3	21.8
18_Aprile_2024	14.7	7	9.7
22_Aprile_2024	9.4	5	7.3
10_Maggio_2024	24.5	11.2	18.1
14_Maggio_2024	24.2	13.9	18.8
15_Maggio_2024	22	15.4	18

Tabella 3.50: Valori Temperatura nelle giornate di prova;

Per studiare graficamente l'andamento della variazione delle quattro frequenze al variare della temperatura si riassumono in tabella i valori delle frequenze ottenute sul nodo 10 per le prove eseguite sulla trave integra con la tecnica del Roving Hammer. Si sceglie il nodo 10 in quanto è posto ad L/3 della trave ed è rappresentativo sui valori delle quattro frequenze analizzate.

Valori Frequenze Sperimentali_nodo 10												
	26 Marzo_2024	15 Aprile_2024	18 Aprile_2024	22 Aprile_2024	10 Maggio_2024	14 Maggio_2024	15 Maggio_2024					
f_1	17.578	15.869	17.578	18.433	16.968	16.724	16.480					
f_2	48.828	46.509	48.828	50.049	48.096	47.607	46.997					
f_3	95.825	93.384	96.069	97.412	95.215	94.727	94.849					
f_4	158.691	156.006	158.936	160.400	158.081	157.593	156.738					

Tabella 3.51: Valori frequenze sul nodo 10 tecnica Roving Hammer;

Per una migliore visualizzazione, si ha:

Valori Frequenze Sperimentali_Trave Sana_nodo 10					
Data Prova_TraveSana	T_media	f_1	f_2	f_3	f_4
26_Marzo_2024	8.8	17.578	48.828	95.825	158.691
15_Aprile_2024	21.8	15.869	46.509	93.384	156.006
18_Aprile_2024	9.7	17.578	48.828	96.069	158.936
22_Aprile_2024	7.3	18.433	50.049	97.412	160.400
10_Maggio_2024	18.1	16.968	48.096	95.215	158.081
14_Maggio_2024	18.8	16.724	47.607	94.727	157.593
15_Maggio_2024	18	16.480	46.997	94.849	156.738

Tabella 3.52: Valori temperatura e frequenze nelle giornate di prova;

La temperatura ha un'influenza significativa specialmente sulle frequenze. Si propongono le tabelle in ordine di temperatura crescente ed i grafici di dispersione al fine di visualizzare graficamente l'influenza della

temperatura sulle quattro frequenze.

Valori Frequenze Sperimentali_nodo 10		
In ordine di Temperatura Crescente		
Data Prova_TraveSana	T_media	f_1
22_Aprile_2024	7.3	18.433
26_Marzo_2024	8.8	17.578
18_Aprile_2024	9.7	17.578
15_Maggio_2024	18	16.480
10_Maggio_2024	18.1	16.968
14_Maggio_2024	18.8	16.724
15_Aprile_2024	21.8	15.869

Tabella 3.53: Valori frequenza 1 in ordine di temperatura crescente;

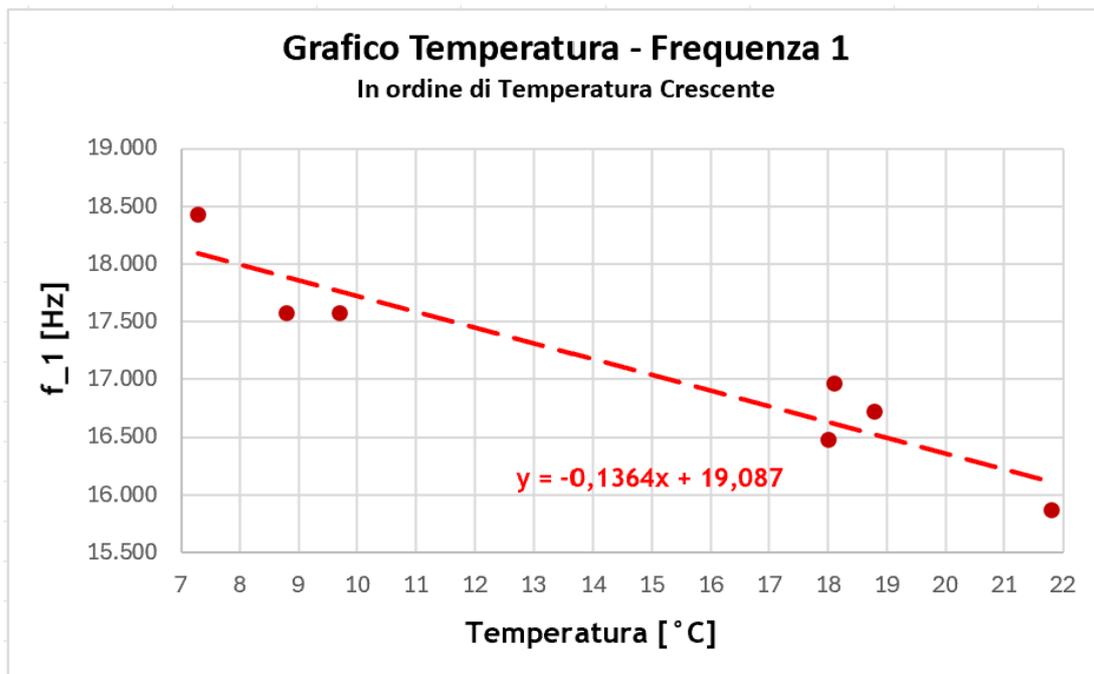


Figura 3.65: Andamento variazione Temperatura-Frequenza 1;

Data Prova_TraveSana	T_media	f_2
22_Aprile_2024	7.3	50.049
26_Marzo_2024	8.8	48.828
18_Aprile_2024	9.7	48.828
15_Maggio_2024	18	46.997
10_Maggio_2024	18.1	48.096
14_Maggio_2024	18.8	47.607
15_Aprile_2024	21.8	46.509

Tabella 3.54: Valori frequenza 2 in ordine di temperatura crescente;

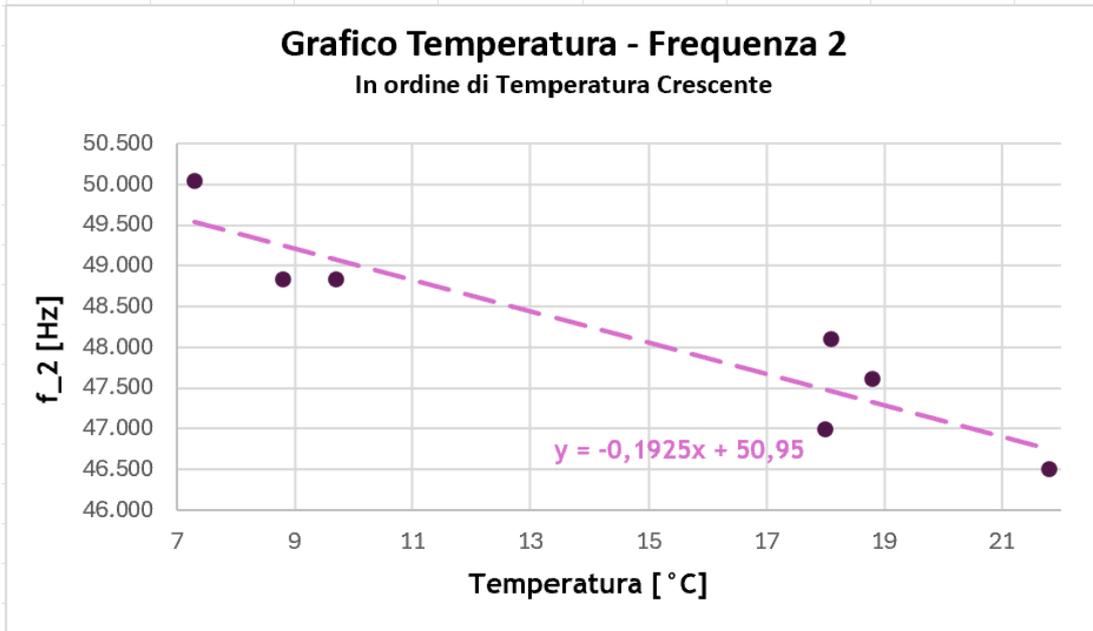


Figura 3.66: Andamento variazione Temperatura-Frequenza 2;

Data Prova_TraveSana	T_media	f_3
22_Aprile_2024	7.3	97.412
26_Marzo_2024	8.8	95.825
18_Aprile_2024	9.7	96.069
15_Maggio_2024	18	94.849
10_Maggio_2024	18.1	95.215
14_Maggio_2024	18.8	94.727
15_Aprile_2024	21.8	93.384

Tabella 3.55: Valori frequenza 3 in ordine di temperatura crescente;

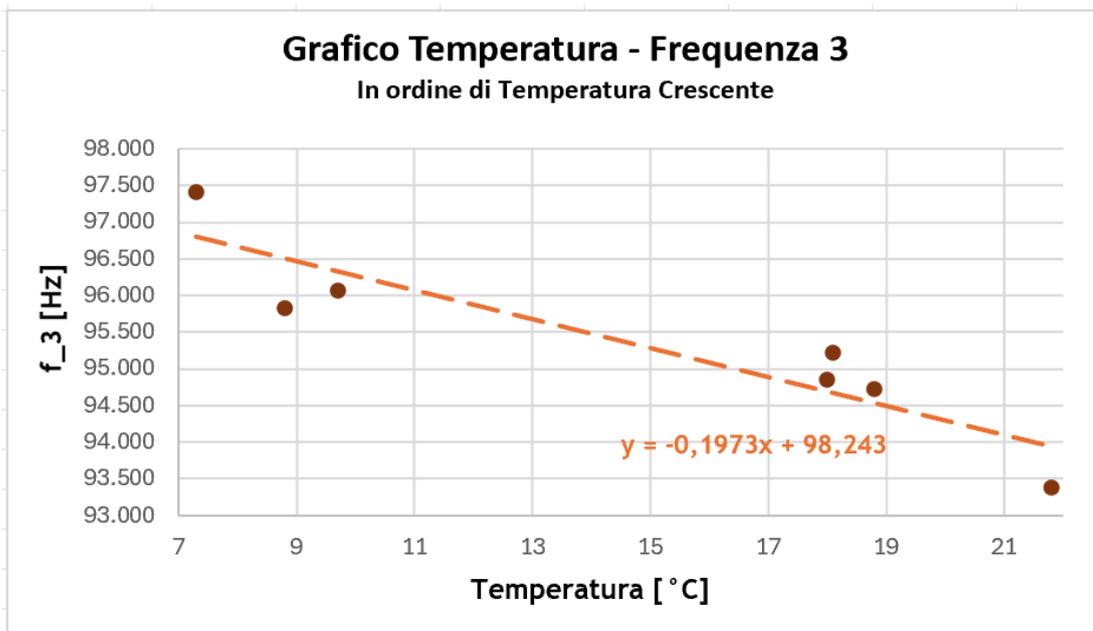


Figura 3.67: Andamento variazione Temperatura-Frequenza 3;

Data Prova_TraveSana	T_media	f_4
22_Aprile_2024	7.3	160.400
26_Marzo_2024	8.8	158.691
18_Aprile_2024	9.7	158.936
15_Maggio_2024	18	156.738
10_Maggio_2024	18.1	158.081
14_Maggio_2024	18.8	157.593
15_Aprile_2024	21.8	156.006

Tabella 3.56: Valori frequenza 4 in ordine di temperatura crescente;

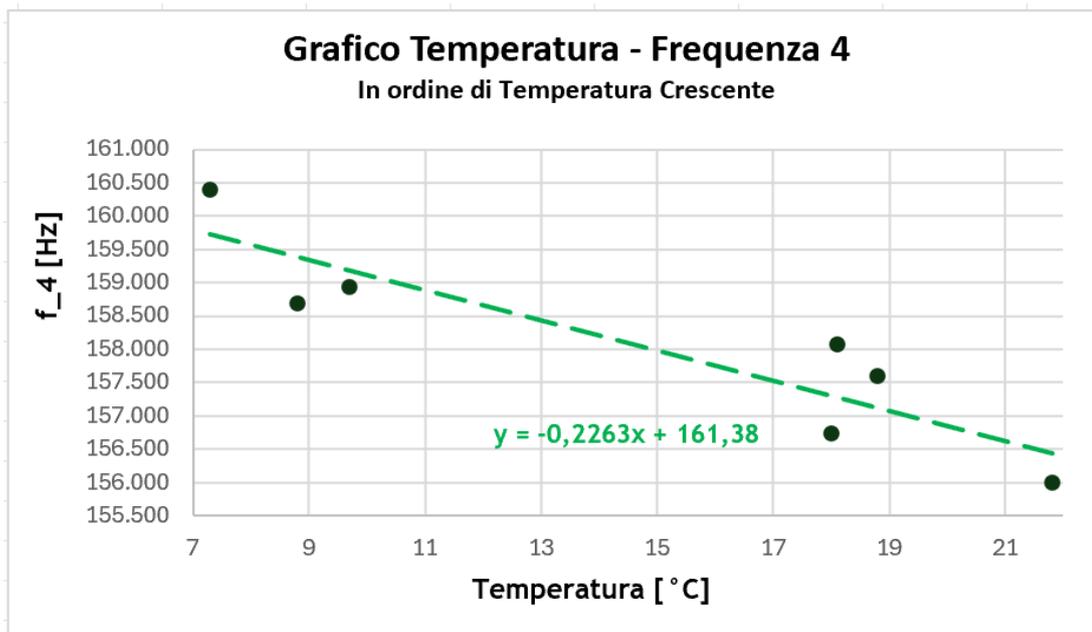


Figura 3.68: Andamento variazione Temperatura-Frequenza 4;

I grafici in oggetto, ottenuti in Excel, riportano in ascissa il valore della temperatura crescente e in ordinata il valore della frequenza in esame. Si riportano separatamente i dati delle quattro frequenze ottenuti nei diversi giorni di prova e si grafica la retta interpolante con la sua equazione.

È evidente dall'andamento dei quattro grafici che le frequenze diminuiscono all'aumentare della temperatura.

Inoltre, la tendenza della retta d'interpolazione dei dati è pressoché identica per le quattro frequenze, in particolare l'equazione della retta presenta un coefficiente angolare crescente all'aumentare della frequenza, questo è sinonimo che le alte frequenze sono più sensibili alla variazione termica.

Per una variazione di temperatura $\Delta T = 14,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ottenuta dalla differenza tra la temperatura massima e la temperatura minima riscontrata nei giorni di prova, si ha una variazione sulla prima e sulla quarta frequenza rispettivamente pari a: $\Delta f_1 = 2,5 \text{ Hz}$ e $\Delta f_4 = 4,4 \text{ Hz}$.

Globalmente però, in termini percentuali si ha una variazione del 16,1 % sulla prima frequenza e del 2,8% sulla quarta frequenza.

CAPITOLO 4

TRATTAZIONE SPERIMENTALE DANNO

4 RIPRODUZIONE DANNO SPERIMENTALE

4.1 PROVE DINAMICHE SU TRAVE DANNEGGIATA

Si riproduce il danno precedentemente modellato in Straus7 sulla trave reale presso il laboratorio LISG dell'Università di Bologna utilizzando un macchinario denominato "fresatrice". Si effettua un danneggiamento sull'elemento 10 della trave, compreso tra il nodo 11 e 12; si sceglie tale elemento in quanto le forme modali attese non presentano punti di nullo.

Si procede ad un danneggiamento localizzato e progressivo sull'elemento 10 caratterizzato da una lunghezza $L = 10 \text{ cm}$ e da una sezione $B = 2 \text{ cm}$ e $H = 2 \text{ cm}$; si effettuano 5 step di danno ognuno caratterizzato da una diminuzione di sezione; in particolare si riduce l'altezza dell'elemento 10 di 2 mm in 2 mm fino ad arrivare ad avere il 50% dell'altezza totale dell'elemento, ossia $B = 2 \text{ cm}$ e $H = 1 \text{ cm}$.

Si riportano brevemente in tabella i parametri dell'elemento 10 ad ogni step di danno.

DIMENSIONI ELEMENTO 10						
	L		B		H	
SANA	10	[cm]	2	[cm]	2	
DANNO 1					1.8	
DANNO 2					1.6	
DANNO 3					1.4	
DANNO 4					1.2	
DANNO 5					1	

Tabella 4.1: Dimensioni elemento 10 all'aumentare del danno sperimentale;

4.1.1 Primo Step di danno

Dopo aver acquisito i parametri dinamici della trave sana in data 15 Maggio, si procede al primo passo di danno sempre nella stessa giornata. Si realizza un danno minimo sull'altezza dell'elemento 10 pari a 2 mm. Si riduce l'altezza dell'elemento 10 ossia localmente si danneggia solo 10% dell'altezza totale dell'elemento in questione.

Si ottiene una sezione $B = 2 \text{ cm}$ e $H = 1,8 \text{ cm}$.

Si prepara la trave al danneggiamento. Per fornire le giuste indicazioni al tecnico di laboratorio, si identifica l'elemento e si campisce la porzione di sezione da eliminare.



Figura 4.1: Identificazione elemento 10 da danneggiare, estradosso trave;



Figura 4.2: Identificazione porzione di 2 mm da rimuovere;

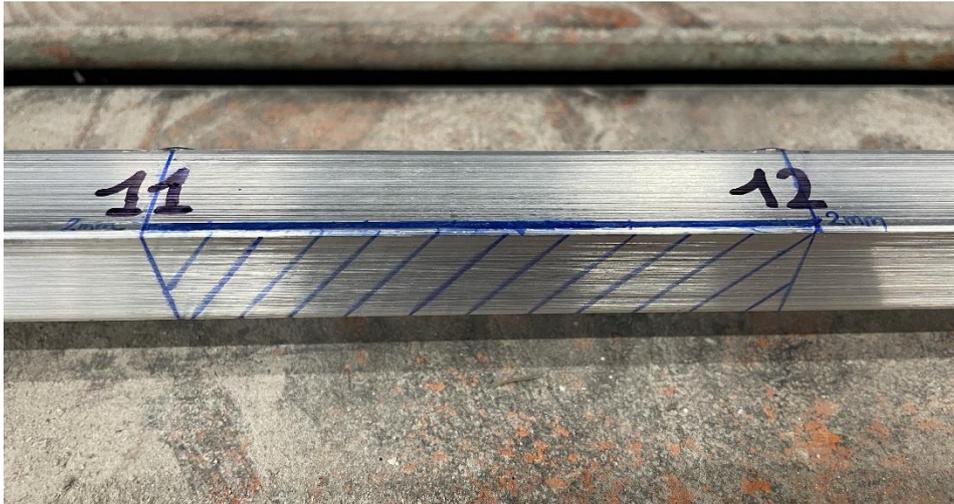


Figura 4.4: Identificazione porzione di 2 mm;

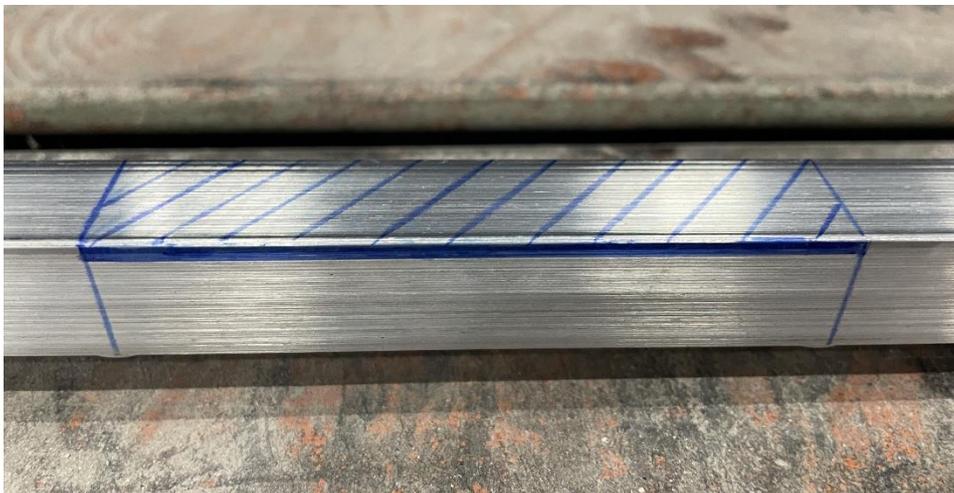


Figura 4.5: Identificazione porzione da rimuovere, intradosso trave;

Si rimuovono i vincoli, svitando i bulloni precedentemente ammorsati; si utilizza una chiave inglese da 24 mm. Successivamente, si esegue il danneggiamento della sezione fissando la trave all'interno della macchina fresatrice. La fresatura è una tecnica di lavorazione che utilizza un attrezzo rotante noto come fresa per rimuovere il materiale con un'elevata precisione nel taglio. Durante il processo di fresatura, la fresa ruota su un asse e si muove lungo l'asse X, Y e Z, rimuovendo il materiale dalla trave lungo il percorso stabilito.

Si riporta la documentazione fotografica di quanto fatto operativamente.



Figura 4.6: Chiave inglese da 24 mm per rimozione bulloni ammorsati;



Figura 4.7: Rimozione vincoli prima del danneggiamento;



Figura 4.8: Macchina fresatrice utilizzata per l'esecuzione del danno;



Figura 4.9: Posizionamento elemento da danneggiare nella fresatrice

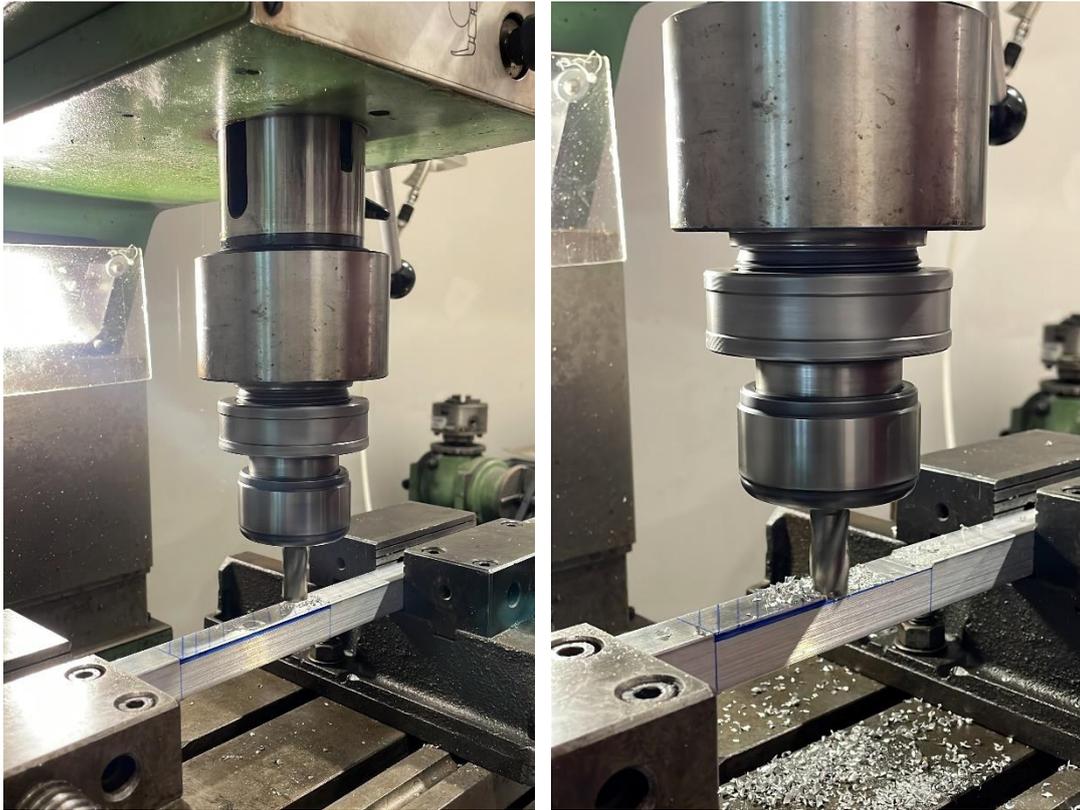


Figura 4.10: Esecuzione del primo danno da 2 mm sull'elemento 10;

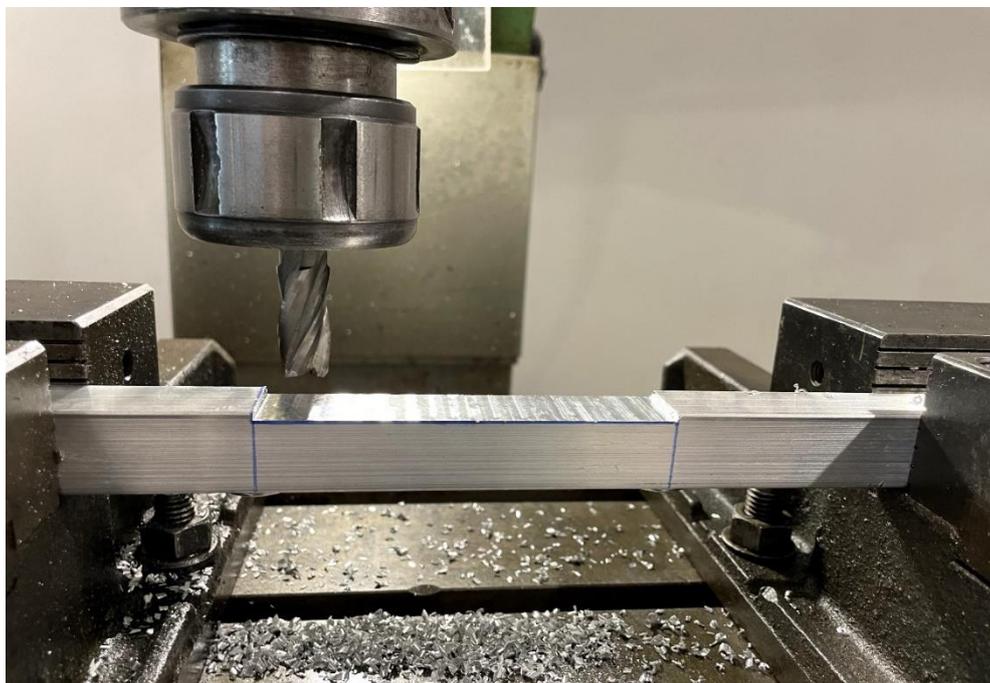


Figura 4.11: Realizzazione del primo danno da 2 mm sull'elemento 10;

Prima di procedere al posizionamento dei vincoli ed al loro ammorsamento, si misurano con calibro digitale i nuovi parametri della

sezione. Si effettuano 3 misurazioni sulla lunghezza dell'elemento, in particolare ai due estremi e nella mezzeria; per completezza si verifica anche che la lunghezza dell'elemento 10 sia $L = 10 \text{ cm}$.



Figura 4.12: Misurazioni altezza elemento 10 con calibro digitale dopo il primo danneggiamento;



Figura 4.13: Misura lunghezza elemento 10 con calibro digitale;

4.1.2 Valutazione parametri dinamici primo Step di danno

A questo punto, si posizionano le piastre e si avvitano i bulloni per riprodurre nuovamente i vincoli di incastro e si esegue con la tecnica del “Roving Sensor” la prova dinamica della trave in alluminio danneggiata doppiamente incastrata agli estremi al fine di caratterizzare le frequenze e i modi di vibrare. Si procede esattamente come fatto per la trave integra, si fissa l'accelerometro 2 sul nodo 10 e la battuta con

martello strumentato sul nodo 18 e si sposta l'accelerometro 1 dal nodo 3 al nodo 25 per ricostruire le forme modali in maniera più precisa.



Figura 4.14: Vincolo nodo 1;



Figura 4.15: Vincolo nodo 2;



Figura 4.16: Elemento 10, danno 1 H1,8 cm;



Figura 4.17: Tecnica Roving Sensor, trave danneggiata;



Figura 4.18: Tecnica Roving Sensor, accelerometro fisso nodo 10 e mobile nodo 12;

Si effettuano, anche in questo caso, tre acquisizioni con la tecnica del Roving Sensor sulla trave danneggiata. Al termine della prova dinamica, si rielaborano i file “.txt” ottenuti. Si utilizza lo stesso algoritmo Matlab utilizzato per le prove su trave sana e si estrapolano i valori delle frequenze e dei modi di vibrare che caratterizzano il primo step di danno.

L'algoritmo restituisce in output i grafici delle funzioni di trasferimento sia per l'accelerometro 1 mobile che per l'accelerometro 2 fisso.

Si determinano sempre le prime quattro frequenze sperimentali della trave, mediante trasformata di Fourier (FFT) dell'output dato dagli accelerometri.

Inoltre, le forme modali per i primi quattro modi di vibrare, si ricavano con la tecnica del Roving Sensor secondo stima diretta, dividendo la trasformata dell'output dell'accelerometro mobile per la trasformata

dell'output dell'accelerometro fisso posto sul nodo 10.

Si ottengono, avviando l'algoritmo, 23 figure contenenti i plot delle trasformate degli output degli accelerometri.

Si riportano di seguito grafici esplicativi ottenuti dall'algoritmo Matlab per la prova eseguita in data 15 maggio 2024 sulla trave caratterizzata dal primo step di danno.

Nei grafici si identificano con tre colori diversi le trasformate degli output degli accelerometri delle tre battute effettuate sul nodo 18, solo per i due casi significativi in cui l'accelerometro mobile è fissato sui nodi 11 e 12, dove è localizzato il danno.

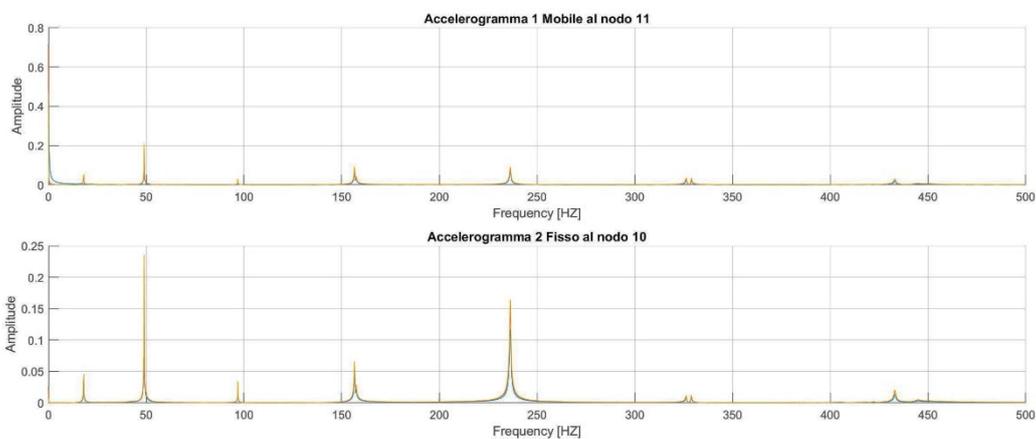


Figura 4.19: Plot degli output su trave con primo step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 11;

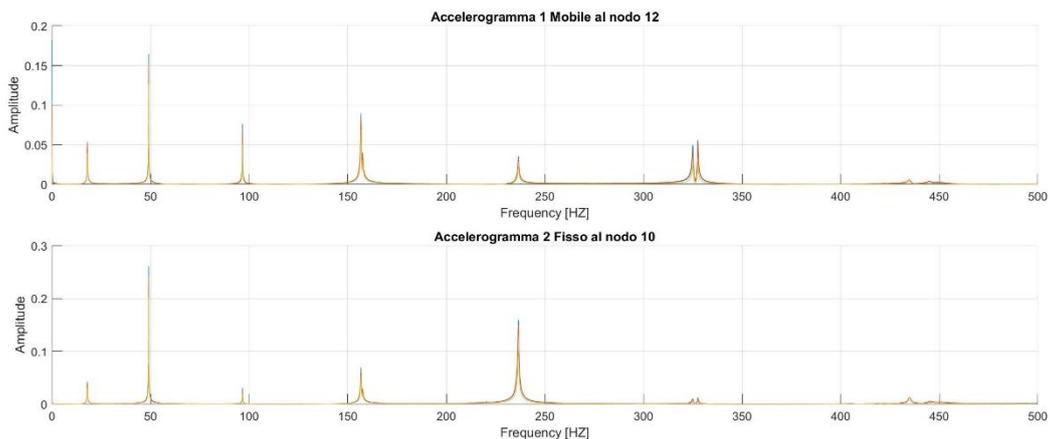


Figura 4.20: Plot degli output su trave con primo step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 12;

L'algoritmo di estrapolazione dei parametri dinamici restituisce inoltre il plot dell'andamento delle forme modali per la trave danneggiata in

oggetto attraverso un grafico waterfall, il quale propone una visualizzazione d'insieme delle trasformate di Fourier ottenute da ogni battuta. Si riporta l'andamento ottenuto delle acquisizioni dell'accelerometro mobile.

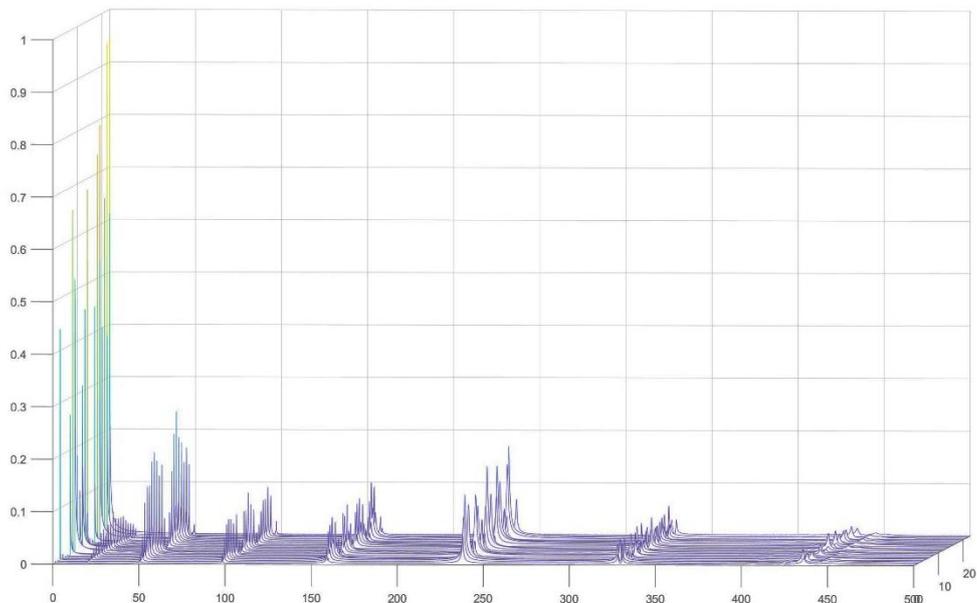


Figura 4.21: Grafico Waterfall forme modali con accelerometro mobile, trave danneggiata;

Si riassumono ora in tabella i valori numerici delle frequenze e dei modi di vibrare per la trave danneggiata estrapolati dall'algoritmo. Si propongono, inoltre, gli andamenti grafici dei modi di vibrare ottenuti in Excel utilizzando un grafico a linee spezzate.

DANNO 1_2mm_H1,8cm		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
15 Maggio 2024		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	18.056	3	0.040	-0.084	-0.632	-0.344
f_2	49.046	4	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
f_3	96.616	5	0.251	-0.485	-3.336	-1.326
f_4	157.067	6	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
		7	0.557	-0.911	-4.883	-1.106
		8	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
		9	0.892	-1.078	-2.800	0.280
		10	1.002	-1.015	-1.075	0.983
		11	1.118	-0.886	0.870	1.404
		12	1.257	-0.630	2.451	1.292
		13	1.295	-0.320	3.421	0.713
		14	1.333	0.015	3.782	-0.049
		15	1.300	0.353	3.440	-0.781
		16	1.241	0.645	2.406	-1.256
		17	1.154	0.883	0.753	-1.337
		18	1.007	1.035	-1.000	-0.964
		19	0.868	1.098	-2.619	-0.257
		20	0.721	1.064	-3.602	0.526
		21	0.590	0.939	-4.051	1.139
		22	0.399	0.739	-3.875	1.460
		23	0.251	0.506	-3.088	1.368
		24	0.148	0.266	-1.792	0.914
		25	0.042	0.091	-0.657	0.349

Tabella 4.2: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 1, 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

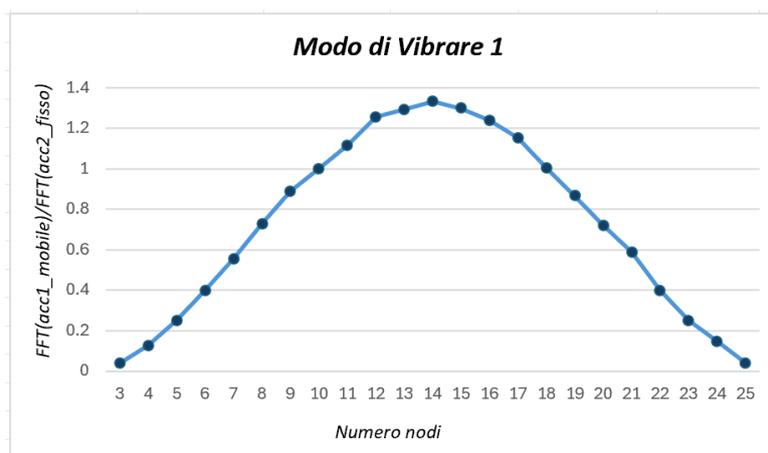


Figura 4.22: Modo di vibrare 1, trave con danno1 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

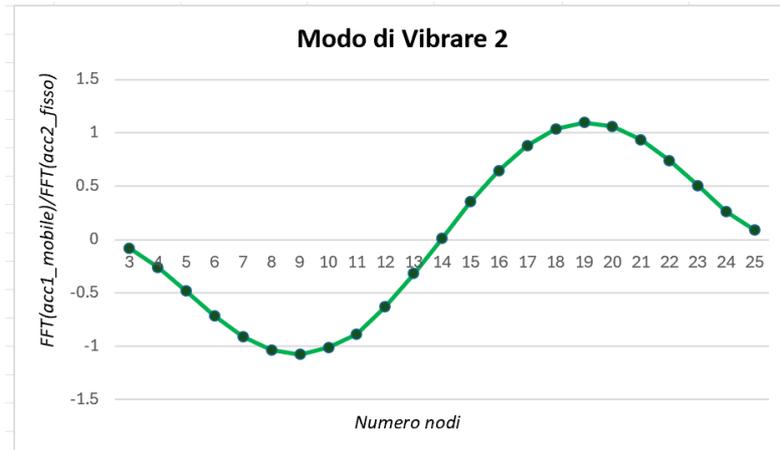


Figura 4.23: Modo di vibrare 2, trave con danno1 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

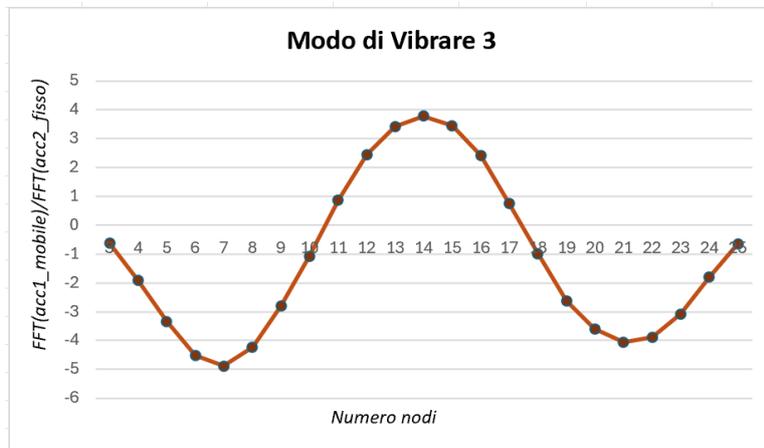


Figura 4.24: Modo di vibrare 3, trave con danno1 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

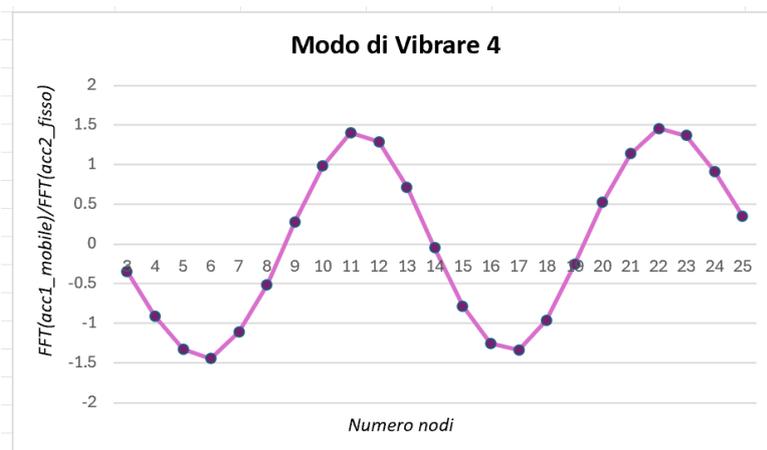


Figura 4.25: Modo di vibrare 4, trave con danno1 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

4.1.3 Secondo Step di danno

Dopo aver acquisito i parametri dinamici della trave sana e del primo step di danno in data 15 Maggio, si procede al successivo passo di danno sempre nella stessa giornata. Si realizza un secondo danno sull'altezza dell'elemento 10 pari a 2 mm .

Si riduce l'altezza dell'elemento 10 ossia localmente di danneggia del 20% dell'altezza totale dell'elemento in questione.

Si ha una sezione $B = 2\text{ cm}$ e $H = 1,6\text{ cm}$.

Si prepara la trave al secondo danneggiamento: si smontano i vincoli d'incastro, si posiziona la trave nella fresatrice e si procede con il danno di ulteriori 2 mm , localizzato nella porzione precedentemente danneggiata.

Si riporta la documentazione fotografica di quanto fatto operativamente.



Figura 4.26: Posizionamento trave nella fresatrice



Figura 4.27: Esecuzione del secondo danno da 2 mm sull'elemento 10;

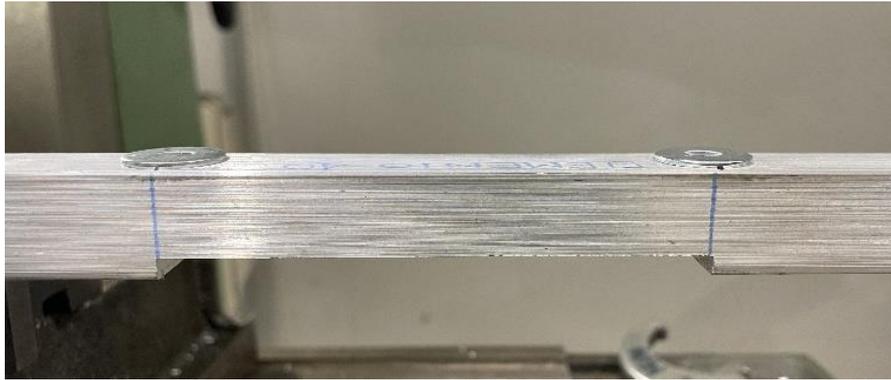


Figura 4.28: Realizzazione del secondo danno da 2 mm sull'elemento 10;

Prima di procedere al posizionamento dei vincoli ed al loro ammortamento, si misurano con calibro digitale i nuovi parametri della sezione. Si attende, dopo il secondo danneggiamento una sezione dell'elemento 10 con le seguenti caratteristiche:

$$L = 10 \text{ cm}, B = 2 \text{ cm}, H = 1,6 \text{ cm}$$

Si effettuano 3 misurazioni sulla lunghezza dell'elemento, in particolare ai due estremi e nella mezzeria.



Figura 4.29: Misure altezza elemento 10 con calibro digitale dopo il secondo danneggiamento;

4.1.4 Valutazione parametri dinamici secondo Step di danno

A questo punto, si posizionano le piastre e si avvitano i bulloni per riprodurre nuovamente i vincoli di incastro e si esegue con la tecnica del “Roving Sensor” la prova dinamica della trave in alluminio danneggiata

doppiamente incastrata agli estremi al fine di caratterizzare le frequenze e i modi di vibrare. Si procede esattamente come fatto per la trave integra e per il primo step di danno: si fissa l'accelerometro 2 sul nodo 10 e la battuta con martello strumentato sul nodo 18 e si sposta l'accelerometro 1 dal nodo 3 al nodo 25 per ricostruire le forme modali in maniera più precisa.



Figura 4.30: Vincolo nodo 1;



Figura 4.31: Vincolo nodo 2;



Figura 4.32: Elemento 10, danno 2 H1,6 cm;

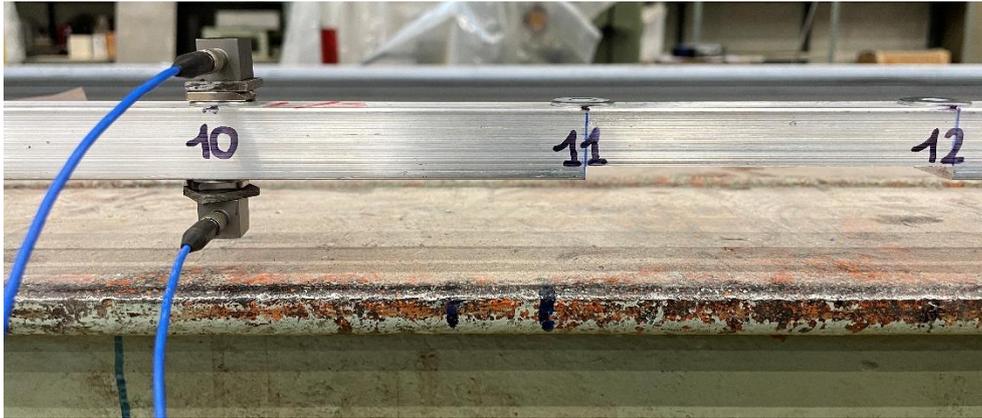


Figura 4.33: Tecnica Roving Sensor, secondo step di danno;

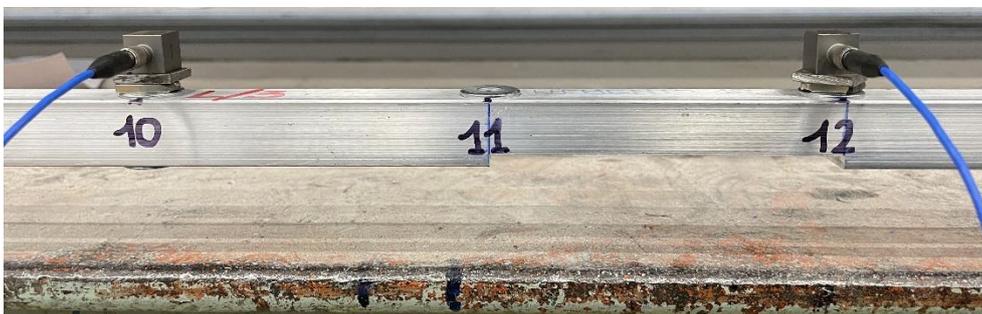


Figura 4.34: Tecnica Roving Sensor, accelerometro fisso nodo 10 e mobile nodo 12;

Si effettuano, anche in questo caso, tre acquisizioni con la tecnica del Roving Sensor sulla trave danneggiata. Al termine della prova dinamica, si rielaborano i file “.txt” ottenuti. Si estrapolano i valori delle frequenze e dei modi di vibrare che caratterizzano il secondo step di danno. Si procede esattamente come per il primo step di danno.

Si riportano i grafici esplicativi ottenuti dall’algoritmo Matlab per la prova eseguita in data 15 maggio 2024 sulla trave caratterizzata dal secondo step di danno.

Nei grafici si identificano con tre colori diversi le trasformate degli output degli accelerometri delle tre battute effettuate sul nodo 18, solo per i due casi significativi in cui l’accelerometro mobile è fissato sui nodi 11 e 12, dove è localizzato il danno.

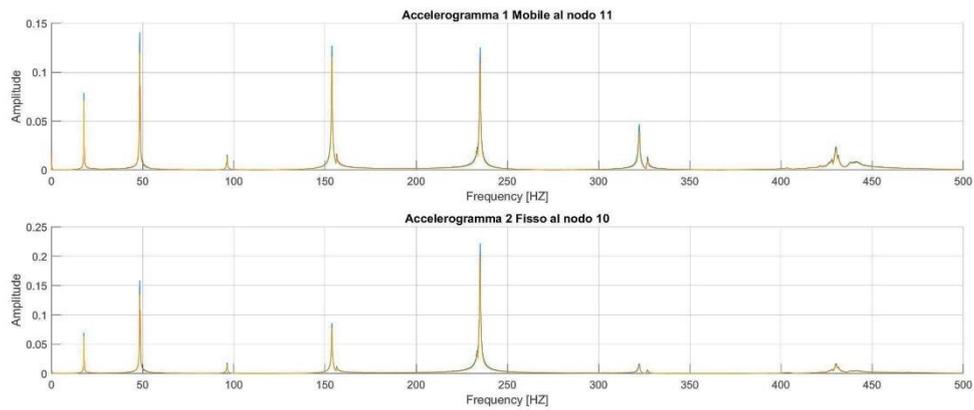


Figura 4.35: Plot degli output su trave con 2 step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 11;

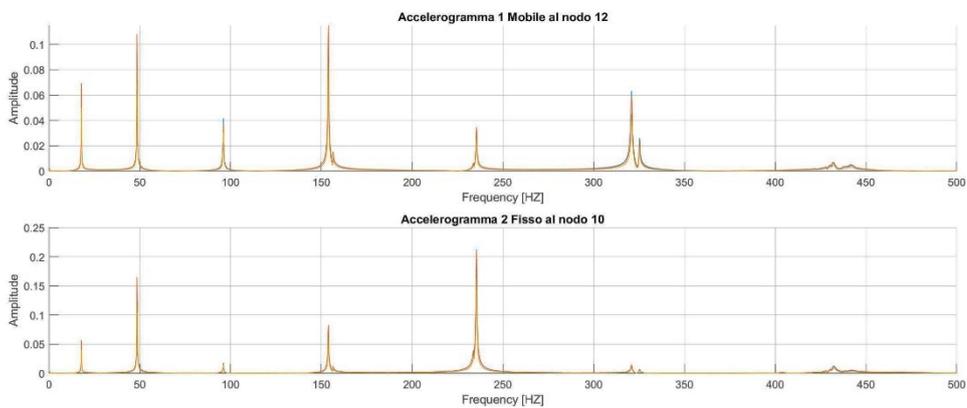


Figura 4.36: Plot degli output su trave con 2 step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 12;

L'algoritmo di estrapolazione dei parametri dinamici restituisce, come nel caso precedente, il grafico waterfall in cui si ha una visualizzazione d'insieme delle trasformate di Fourier per le acquisizioni dell'accelerometro mobile. Si riporta l'andamento ottenuto.

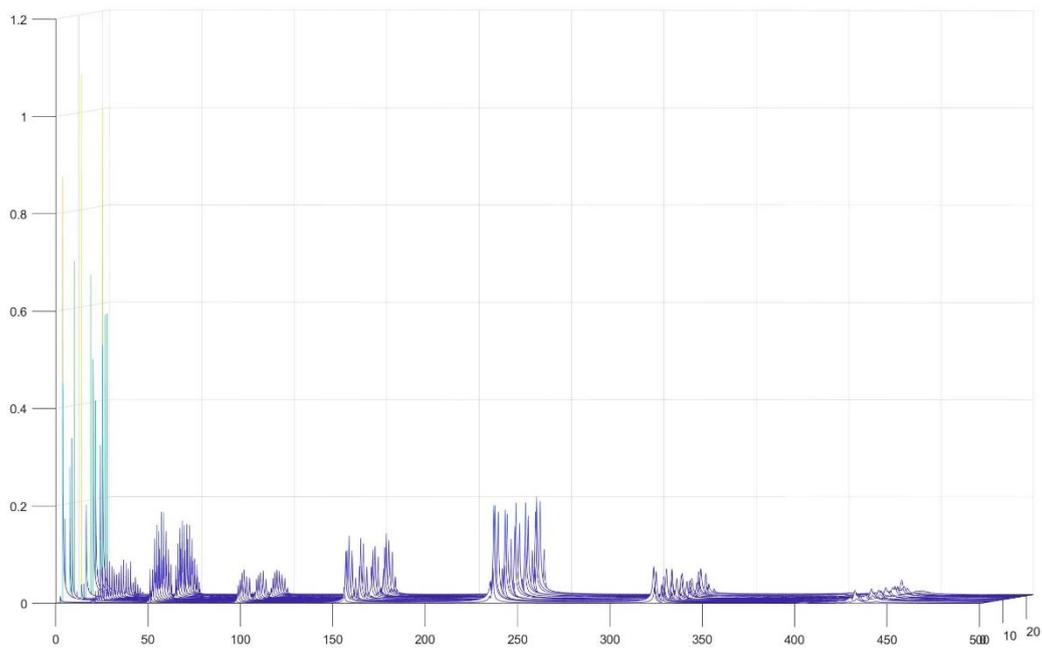


Figura 4.37: Grafico Waterfall forme modali con accelerometro mobile, 2 step di danno;

Si riassumono in tabella i valori numerici delle frequenze e dei modi di vibrare per la trave caratterizzata dal secondo step di danno. Si propongono, inoltre, gli andamenti grafici dei modi di vibrare elaborati in Excel.

DANNO 2_4mm_H1,6cm		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
29_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE						
FREQUENZE		Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
f_1	16.941	3	0.037	-0.079	-0.647	-0.335
f_2	47.279	4	0.126	-0.251	-1.975	-0.906
f_3	94.652	5	0.247	-0.464	-3.446	-1.321
f_4	153.127	6	0.391	-0.678	-4.607	-1.399
		7	0.555	-0.887	-5.008	-1.115
		8	0.721	-0.992	-4.341	-0.525
		9	0.889	-1.031	-2.891	0.257
		10	1.009	-1.005	-1.071	0.988
		11	1.178	-0.859	0.934	1.479
		12	1.268	-0.632	2.532	1.358
		13	1.276	-0.312	3.442	0.704
		14	1.260	0.023	3.748	-0.109
		15	1.290	0.347	3.387	-0.829
		16	1.196	0.631	2.352	-1.286
		17	1.146	0.857	0.769	-1.340
		18	0.965	1.026	-1.017	-0.943
		19	0.829	1.065	-2.589	-0.210
		20	0.683	1.028	-3.540	0.555
		21	0.521	0.903	-3.963	1.183
		22	0.370	0.713	-3.794	1.492
		23	0.232	0.485	-3.007	1.374
		24	0.118	0.263	-1.772	0.912
		25	0.040	0.089	-0.637	0.350

Tabella 4.3: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 2, 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

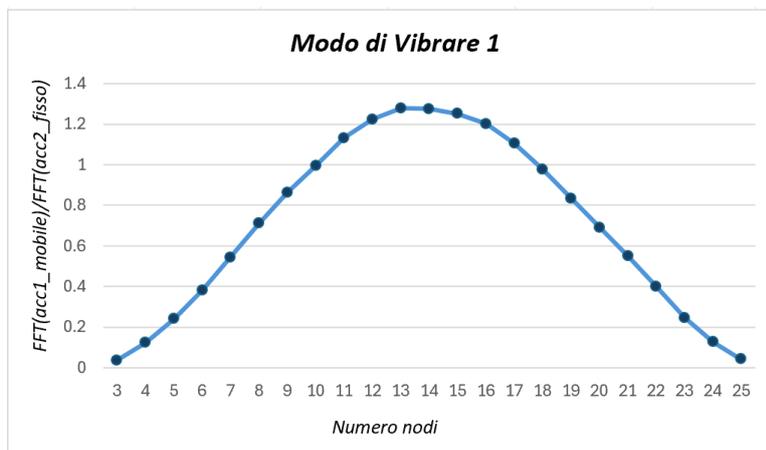


Figura 4.38: Modo di vibrare 1, trave con danno 2 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

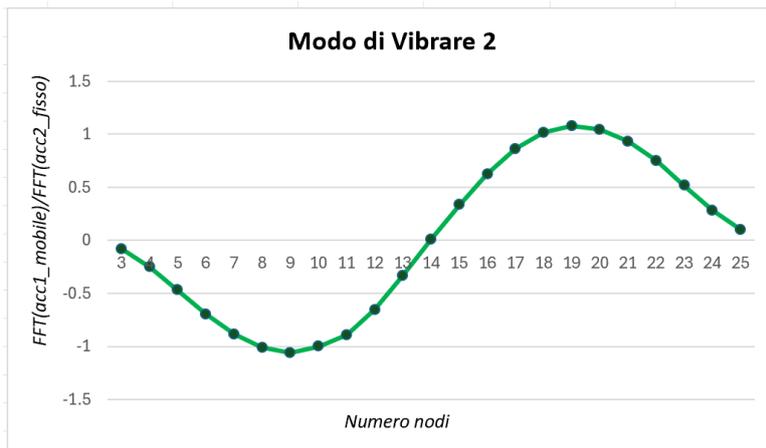


Figura 4.39: Modo di vibrare 2, trave con danno 2 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

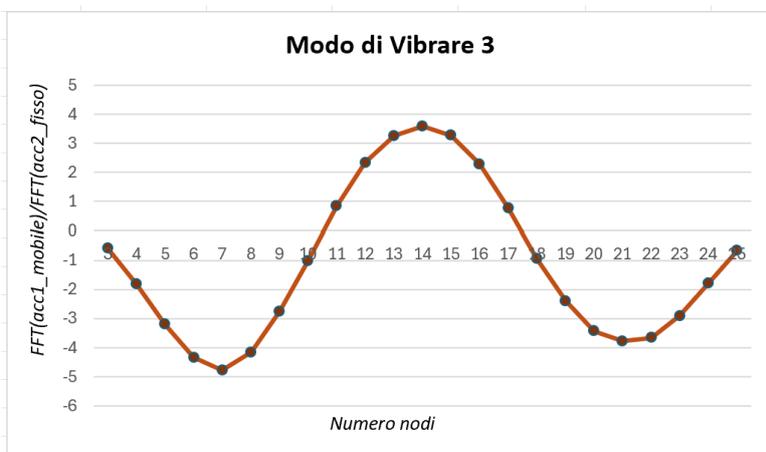


Figura 4.40: Modo di vibrare 3, trave con danno 2 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

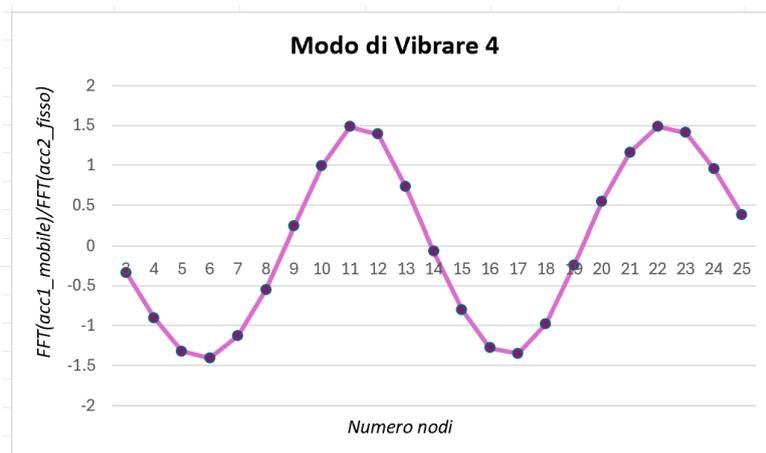


Figura 4.41: Modo di vibrare 4, trave con danno 2 prova 15 Maggio 2024 - Roving Sensor;

Prima di procedere al successivo step di danno, per un'accurata attendibilità e veridicità dei risultati si ripete la prova dinamica con la trave nelle stesse condizioni di vincolo e danno nella giornata di

sperimentazione del 29 Maggio 2024.

Si riportano sinteticamente i risultati dei parametri dinamici ottenuti dall'utilizzo dell'algoritmo Matlab di estrapolazione dei dati e i grafici elaborati in Excel delle forme modali.

DANNO 2_4mm_H1,6cm		29_Maggio_2024				
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	16.941	3	0.037	-0.079	-0.647	-0.335
f_2	47.279	4	0.126	-0.251	-1.975	-0.906
f_3	94.652	5	0.247	-0.464	-3.446	-1.321
f_4	153.127	6	0.391	-0.678	-4.607	-1.399
		7	0.555	-0.887	-5.008	-1.115
		8	0.721	-0.992	-4.341	-0.525
		9	0.889	-1.031	-2.891	0.257
		10	1.009	-1.005	-1.071	0.988
		11	1.178	-0.859	0.934	1.479
		12	1.268	-0.632	2.532	1.358
		13	1.276	-0.312	3.442	0.704
		14	1.260	0.023	3.748	-0.109
		15	1.290	0.347	3.387	-0.829
		16	1.196	0.631	2.352	-1.286
		17	1.146	0.857	0.769	-1.340
		18	0.965	1.026	-1.017	-0.943
		19	0.829	1.065	-2.589	-0.210
		20	0.683	1.028	-3.540	0.555
		21	0.521	0.903	-3.963	1.183
		22	0.370	0.713	-3.794	1.492
		23	0.232	0.485	-3.007	1.374
		24	0.118	0.263	-1.772	0.912
		25	0.040	0.089	-0.637	0.350

Tabella 4.4: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 2, 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

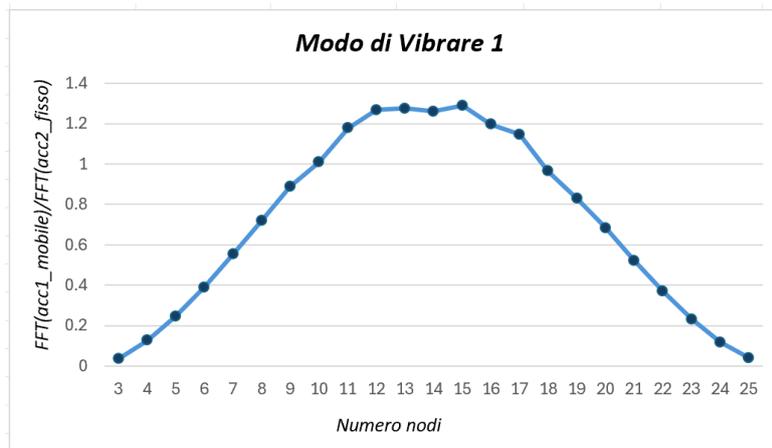


Figura 4.42: Modo di vibrare 1, trave con danno 2 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

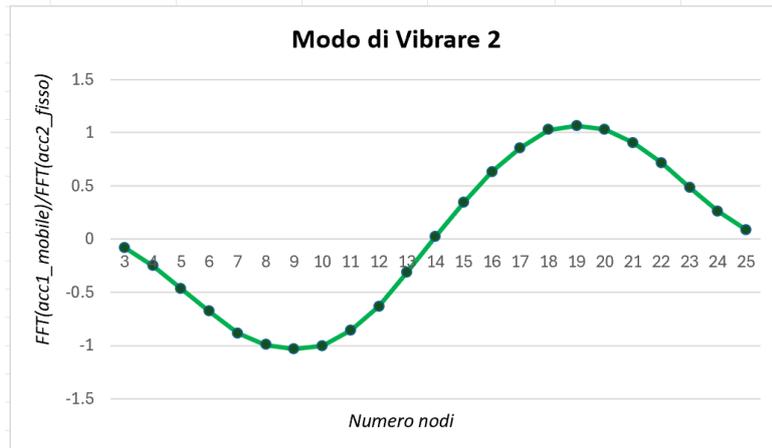


Figura 4.43: Modo di vibrare 2, trave con danno 2 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

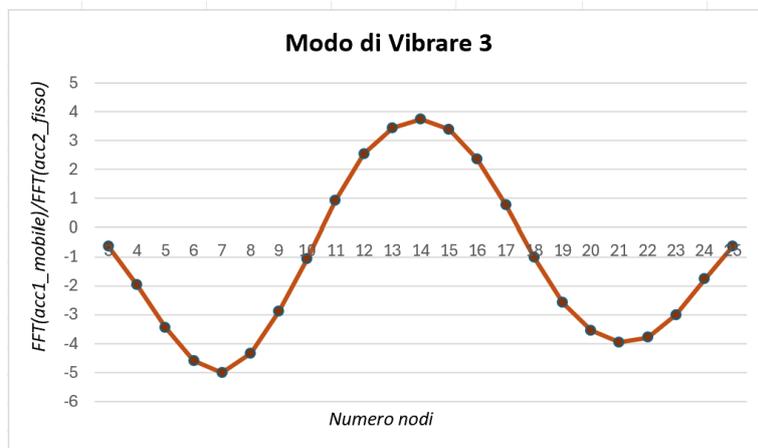


Figura 4.44: Modo di vibrare 3, trave con danno 2 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

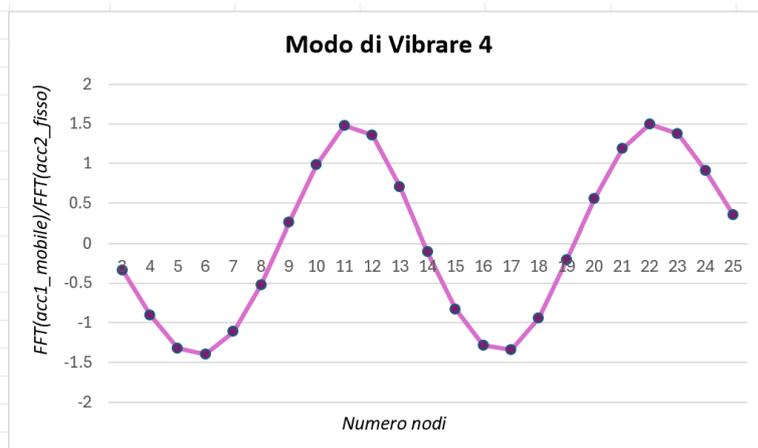


Figura 4.45: Modo di vibrare 4, trave con danno 2 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

4.1.5 Terzo Step di danno

Si procede progressivamente al danneggiamento localizzato sull'elemento 10. Dopo aver acquisito i parametri dinamici della trave al secondo step di danno si realizza un terzo danno sull'altezza dell'elemento 10 pari a 2 mm, in data 29 Maggio 2024.

Si danneggia localmente l'elemento del 30% della sua altezza totale. Si ha una sezione di dimensioni: $B = 2 \text{ cm}$ e $H = 1,4 \text{ cm}$.

Si segue sempre lo stesso iter ovvero si svitano i bulloni e si smontano le piastre che realizzano i vincoli d'incastro, si posiziona la trave nella fresatrice e si procede con la rimozione di ulteriori 2 mm sull'altezza della sezione dell'elemento precedentemente danneggiato.

Tale procedura si esegue sempre dallo stesso tecnico, il quale provvede sia al danneggiamento della trave che allo smontaggio ed al montaggio delle piastre che realizzano i vincoli, in modo tale da ripristinare sempre le stesse condizioni al contorno prima dell'esecuzione della prova dinamica.

Si riporta la documentazione fotografica di quanto fatto operativamente per il terzo step di danno.



Figura 4.46: Smontaggio delle piastre che realizzano i vincoli;



Figura 4.47: Esecuzione del terzo danno da 2 mm sull'elemento 10;

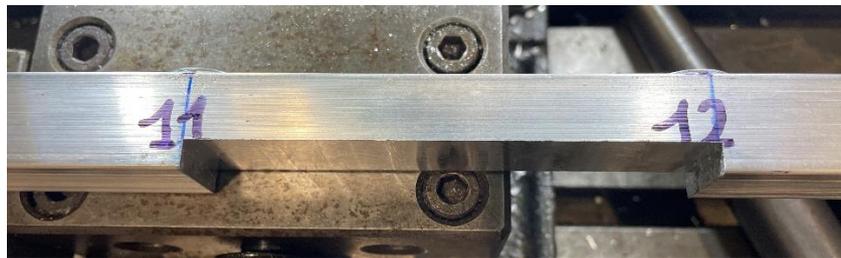


Figura 4.48: Realizzazione del terzo danno da 2 mm sull'elemento 10;

Prima di procedere al posizionamento dei vincoli ed al loro ammorsamento, si misurano con calibro digitale i nuovi parametri della sezione. Si attende, dopo il terzo danneggiamento una sezione dell'elemento 10 con le seguenti caratteristiche:

$$L = 10 \text{ cm}, B = 2 \text{ cm}, H = 1,4 \text{ cm}$$

Si effettuano 3 misurazioni sulla lunghezza dell'elemento, in particolare ai due estremi e nella mezzeria.



Figura 4.49: Misure altezza elemento 10 con calibro digitale dopo il terzo danneggiamento;

4.1.6 Valutazione parametri dinamici terzo Step di danno

A questo punto, si posizionano le piastre e si avvitano i bulloni per riprodurre nuovamente i vincoli di incastro e si esegue con la tecnica del “Roving Sensor” la prova dinamica della trave in alluminio danneggiata doppiamente incastrata agli estremi al fine di caratterizzare le frequenze e i modi di vibrare. Si procede esattamente come per gli step di danno precedenti, si fissa l’accelerometro 2 sul nodo 10 e la battuta con martello strumentato sul nodo 18 e si sposta l’accelerometro 1 dal nodo 3 al nodo 25 per ricostruire le forme modali in maniera precisa.



Figura 4.50: Elemento 10, danno 3 H1,4 cm;



Figura 4.51: Tecnica Roving Sensor, terzo step di danno;



Figura 4.52: Tecnica Roving Sensor, accelerometro fisso nodo 10 e mobile nodo 10;

Si effettuano, anche in questo caso, tre acquisizioni con la tecnica del Roving Sensor sulla trave danneggiata. Al termine della prova dinamica, si rielaborano i file “.txt” ottenuti. Si estrapolano i valori delle frequenze e dei modi di vibrare che caratterizzano il terzo step di danno. Si procede esattamente come per i danneggiamenti precedenti. Si riportano i grafici esplicativi ottenuti dall’algoritmo Matlab per la prova eseguita in data 29 maggio 2024 sulla trave danneggiata.

Nei grafici si identificano con tre colori diversi le trasformate degli output degli accelerometri delle tre battute effettuate sul nodo 18, solo per i due casi significativi in cui l’accelerometro mobile è fissato sui nodi 11 e 12, dove è localizzato il danno.

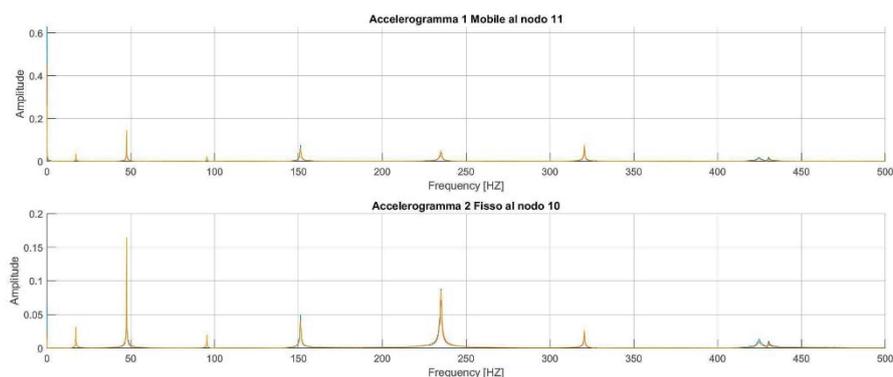


Figura 4.53: Plot degli output su trave con 3 step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 11;

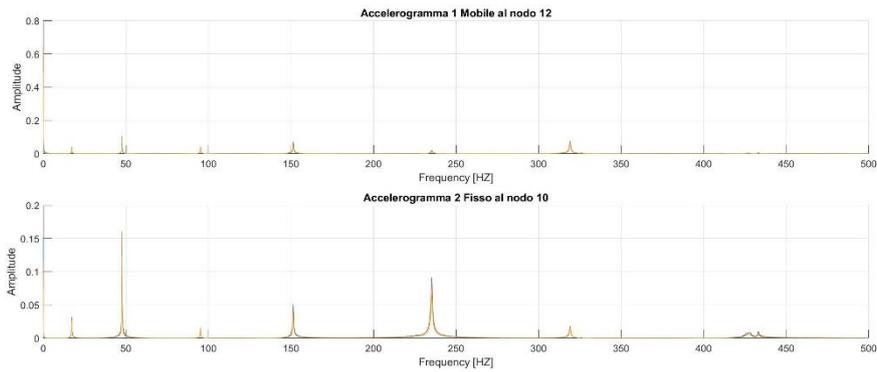


Figura 4.54: Plot degli output su trave con 3 step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 12;

L’algoritmo di estrapolazione dei parametri dinamici restituisce, anche in questo caso, il grafico waterfall in cui si ha una visualizzazione d’insieme delle trasformate di Fourier per le acquisizioni dell’accelerometro mobile. Si riporta l’andamento ottenuto.

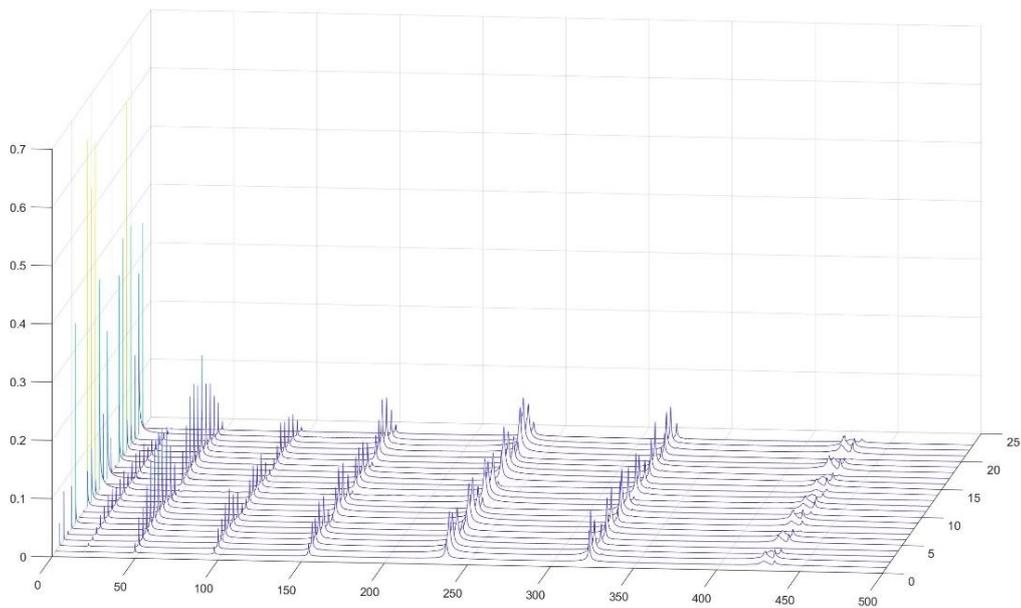


Figura 4.55: Grafico Waterfall forme modali con accelerometro mobile, 2 step di danno;

Si riassumono in tabella i valori numerici delle frequenze e dei modi di vibrare per la trave caratterizzata dal terzo step di danno. Si propongono, inoltre, gli andamenti grafici dei modi di vibrare elaborati in Excel.

DANNO 3_6mm_H1,4cm		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
29_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE						
FREQUENZE		Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
f_1	17.365	3	0.037	-0.077	-0.678	-0.325
f_2	47.666	4	0.120	-0.240	-2.023	-0.869
f_3	95.194	5	0.236	-0.450	-3.587	-1.285
f_4	151.854	6	0.380	-0.665	-4.856	-1.373
		7	0.539	-0.852	-5.252	-1.105
		8	0.707	-0.983	-4.570	-0.522
		9	0.864	-1.034	-2.967	0.257
		10	1.007	-1.008	-1.047	0.995
		11	1.146	-0.887	1.121	1.550
		12	1.212	-0.659	2.685	1.418
		13	1.240	-0.322	3.546	0.679
		14	1.225	0.021	3.840	-0.142
		15	1.206	0.361	3.421	-0.877
		16	1.158	0.652	2.334	-1.307
		17	1.056	0.879	0.728	-1.324
		18	0.944	1.024	-1.040	-0.903
		19	0.802	1.083	-2.554	-0.152
		20	0.660	1.043	-3.551	0.606
		21	0.501	0.918	-4.063	1.219
		22	0.358	0.720	-3.754	1.492
		23	0.222	0.489	-2.963	1.371
		24	0.124	0.265	-1.791	0.900
		25	0.038	0.087	-0.626	0.334

Tabella 4.5: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 3, 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

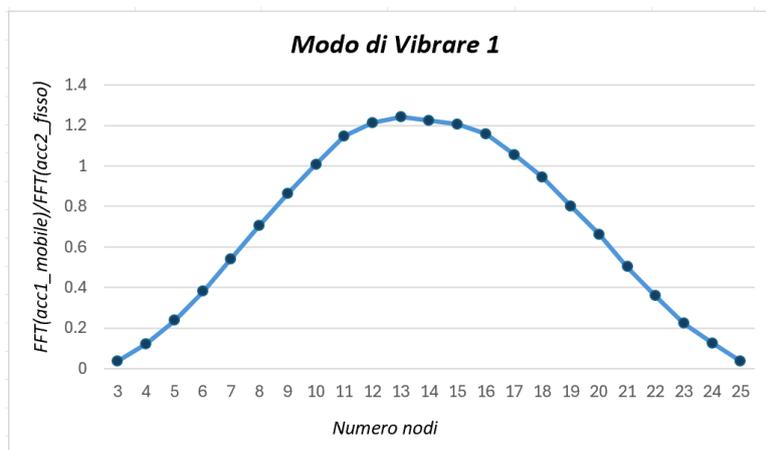


Figura 4.56: Modo di vibrare 1, trave con danno 3 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

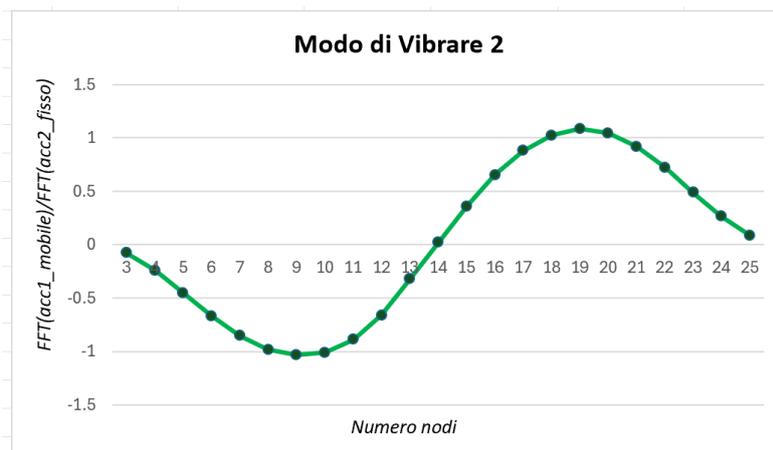


Figura 4.57: Modo di vibrare 2, trave con danno 3 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

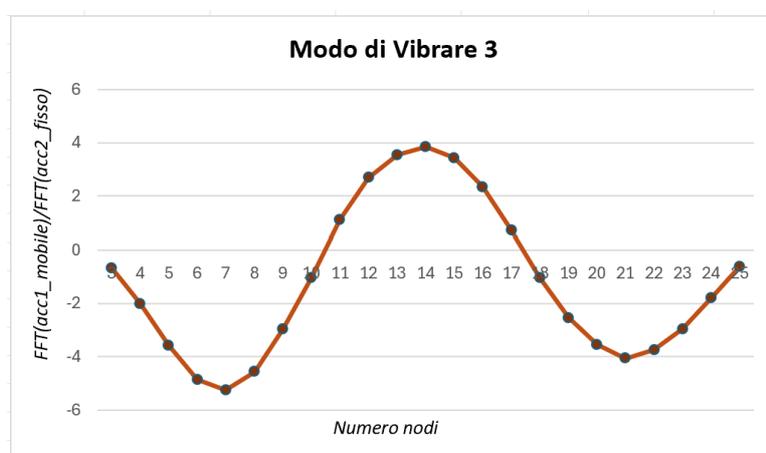


Figura 4.58: Modo di vibrare 3, trave con danno 3 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

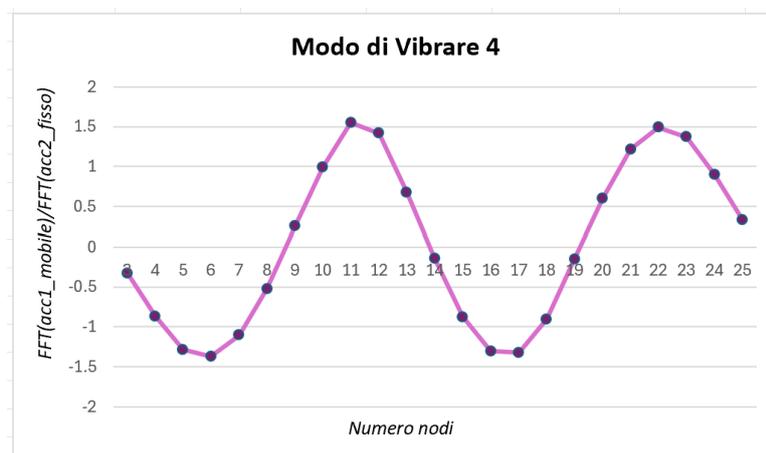


Figura 4.59: Modo di vibrare 4, trave con danno 3 prova 29 Maggio 2024 - Roving Sensor;

Nella giornata di sperimentazione del 30 maggio 2024, prima di procedere al successivo step di danno al fine di avere un'accurata attendibilità dei risultati si ripete la prova dinamica con la trave nelle

stesse condizioni di vincolo e danno.

Si riportano sinteticamente i risultati dei parametri dinamici ottenuti con l'algoritmo Matlab di estrapolazione dei dati.

I grafici delle forme modali, ricostruiti in Excel, risultano pressoché identici ai precedenti, dunque, si esulano dalla rappresentazione.

DANNO 3_6mm_H1,4cm						
30_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.231	3	0.037	-0.077	-0.679	-0.327
f_2	47.494	4	0.121	-0.244	-2.057	-0.880
f_3	95.045	5	0.239	-0.453	-3.589	-1.291
f_4	151.684	6	0.381	-0.667	-4.823	-1.379
		7	0.540	-0.855	-5.282	-1.110
		8	0.696	-0.983	-4.557	-0.538
		9	0.866	-1.036	-2.986	0.244
		10	1.012	-1.010	-1.029	1.004
		11	1.135	-0.893	1.102	1.557
		12	1.203	-0.663	2.688	1.428
		13	1.244	-0.327	3.529	0.685
		14	1.235	0.023	3.793	-0.150
		15	1.210	0.359	3.393	-0.879
		16	1.143	0.644	2.338	-1.310
		17	1.053	0.878	0.692	-1.328
		18	0.939	1.025	-1.034	-0.902
		19	0.802	1.081	-2.626	-0.152
		20	0.655	1.040	-3.635	0.620
		21	0.503	0.915	-4.034	1.225
		22	0.355	0.723	-3.733	1.503
		23	0.221	0.488	-2.939	1.374
		24	0.110	0.261	-1.758	0.893
		25	0.035	0.088	-0.610	0.336

Tabella 4.6: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 3, 30 Maggio 2024 - Roving Sensor;

4.1.7 Quarto Step di danno

Si procede nuovamente al danneggiamento localizzato sull'elemento 10. Dopo aver eseguito due misurazioni per estrapolare i parametri dinamici della trave al terzo step di danno, si realizza un quarto danno sull'altezza dell'elemento 10 pari a 2 mm, nella giornata del 30 Maggio

2024.

Si danneggia localmente l'elemento del 40% della sua altezza totale. Si ha una sezione di dimensioni: $B = 2\text{ cm}$ e $H = 1,2\text{ cm}$.

Si segue sempre lo stesso iter operativo: si svitano i bulloni, si smontano le piastre che realizzano i vincoli d'incastro, si posiziona la trave nella fresatrice e si procede con la rimozione di ulteriori 2 mm sull'altezza della sezione dell'elemento già precedentemente danneggiato.

Tale procedura si esegue sempre dallo stesso tecnico, il quale provvede sia al danneggiamento della trave che allo smontaggio ed al montaggio delle piastre che realizzano i vincoli.

Si riporta la documentazione fotografica di quanto fatto per la riproduzione in laboratorio del quarto passo di danno.



Figura 4.60: Posizionamento trave nella fresatrice;



Figura 4.61: Esecuzione del quarto danno da 2 mm sull'elemento 10;

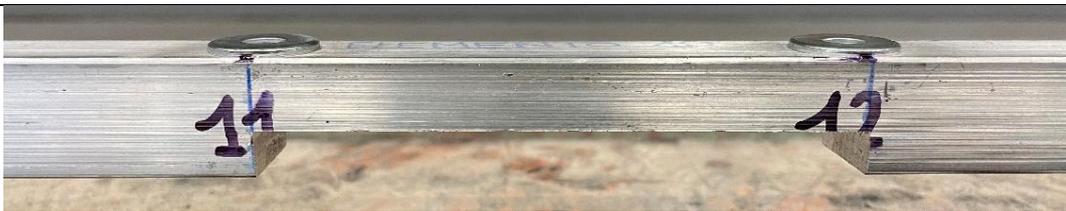


Figura 4.62: Realizzazione del quarto danno da 2 mm sull'elemento 10;

Prima di procedere al posizionamento dei vincoli ed al loro ammorsamento, si misurano con calibro digitale i nuovi parametri della sezione. Si attende, dopo il quarto danneggiamento una sezione dell'elemento 10 con le seguenti caratteristiche:

$$L = 10 \text{ cm}, B = 2 \text{ cm}, H = 1,2 \text{ cm}$$

Si effettuano tre misurazioni sulla lunghezza dell'elemento, in particolare ai due estremi e nella mezzeria.



Figura 4.63: Misure altezza elemento 10 con calibro digitale dopo il quarto danneggiamento;

4.1.8 Valutazione parametri dinamici quarto Step di danno

Realizzato il quarto danneggiamento, si posizionano le piastre e si avvitano i bulloni per riprodurre nuovamente i vincoli di incastro e si esegue con la tecnica del “Roving Sensor” la prova dinamica della trave in alluminio danneggiata doppiamente incastrata agli estremi al fine di caratterizzare le frequenze e i modi di vibrare. Si procede esattamente come per gli step di danno precedenti, si fissa l’accelerometro 2 sul nodo 10 e la battuta con martello strumentato sul nodo 18 e si sposta l’accelerometro 1 dal nodo 3 al nodo 25 per ricostruire le forme modali in maniera precisa.



Figura 4.64: Elemento 10, danno 4 H1,2 cm;



Figura 4.65: Tecnica Roving Sensor, quarto step di danno;



Figura 4.66: Tecnica Roving Sensor, accelerometro fisso nodo 10 e mobile nodo 10;

Si effettuano, anche in questo caso, tre acquisizioni con la tecnica del Roving Sensor sulla trave danneggiata. Al termine della prova dinamica, si rielaborano i file “.txt” ottenuti. Si estrapolano i valori delle frequenze e dei modi di vibrare che caratterizzano il quarto step di danno. Si procede esattamente come per i danneggiamenti precedenti. Per sintetizzare la trattazione in questo caso non si riportano i grafici esplicativi ottenuti dall’algoritmo Matlab per la prova eseguita in data 30 maggio 2024 sulla trave danneggiata.

Si riassumono in tabella i valori numerici delle frequenze e dei modi di vibrare per la trave caratterizzata dal quarto step di danno. Si propongono, inoltre, gli andamenti grafici dei modi di vibrare elaborati in Excel.

DANNO 4_8mm_H1,2cm		30_Maggio_2024				
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.086	3	0.035	-0.073	-0.731	-0.315
f_2	46.912	4	0.119	-0.228	-2.154	-0.821
f_3	94.477	5	0.230	-0.421	-3.771	-1.200
f_4	149.906	6	0.366	-0.630	-5.096	-1.280
		7	0.521	-0.816	-5.546	-1.039
		8	0.683	-0.946	-4.804	-0.515
		9	0.844	-1.011	-3.150	0.233
		10	0.984	-0.995	-1.023	0.992
		11	1.147	-0.916	1.238	1.576
		12	1.208	-0.695	2.883	1.415
		13	1.203	-0.335	3.616	0.586
		14	1.203	0.023	3.828	-0.250
		15	1.159	0.364	3.382	-0.959
		16	1.096	0.656	2.306	-1.342
		17	0.996	0.897	0.688	-1.277
		18	0.910	1.042	-1.054	-0.868
		19	0.753	1.097	-2.596	-0.178
		20	0.612	1.054	-3.568	0.525
		21	0.471	0.929	-3.919	0.999
		22	0.333	0.727	-3.750	1.203
		23	0.213	0.505	-2.986	1.134
		24	0.105	0.267	-1.749	0.772
		25	0.032	0.089	-0.628	0.302

Tabella 4.7: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 4, 30 Maggio 2024 - Roving Sensor;

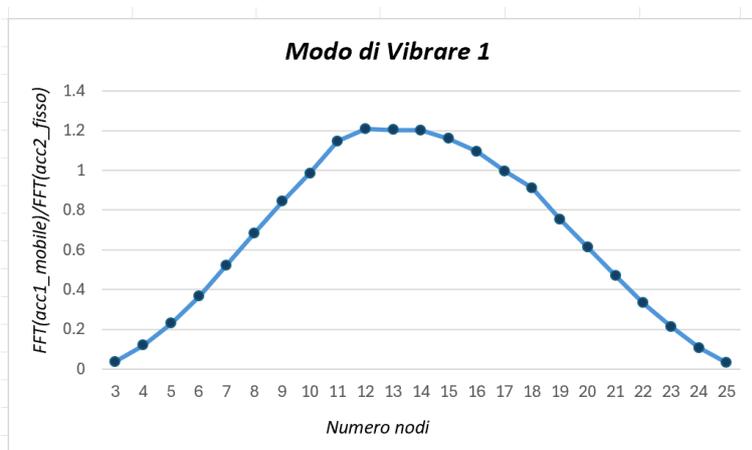


Figura 4.67: Modo di vibrare 1, trave con danno 4 prova 30 Maggio 2024 - Roving Sensor;

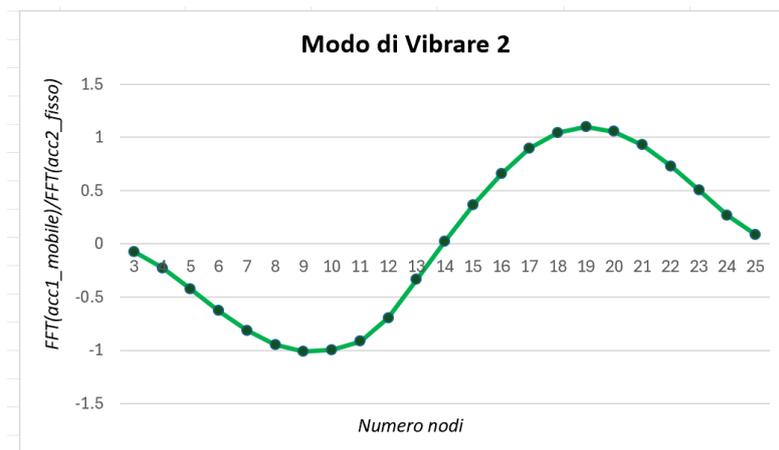


Figura 4.68: Modo di vibrare 2, trave con danno 4 prova 30 Maggio 2024 - Roving Sensor;

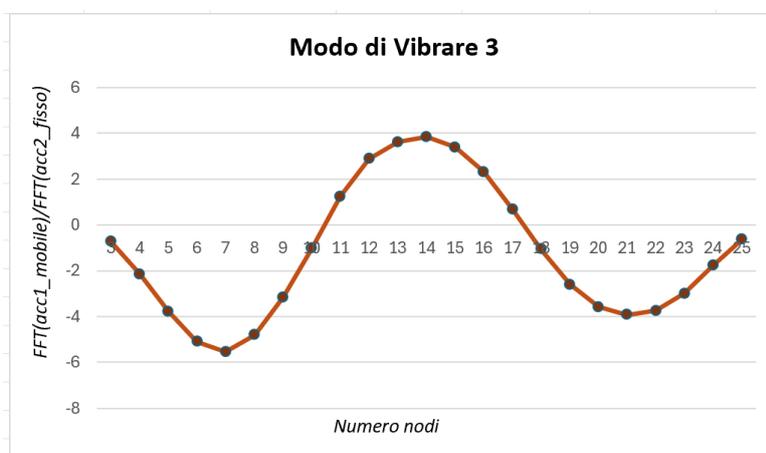


Figura 4.69: Modo di vibrare 3, trave con danno 4 prova 30 Maggio 2024 - Roving Sensor;

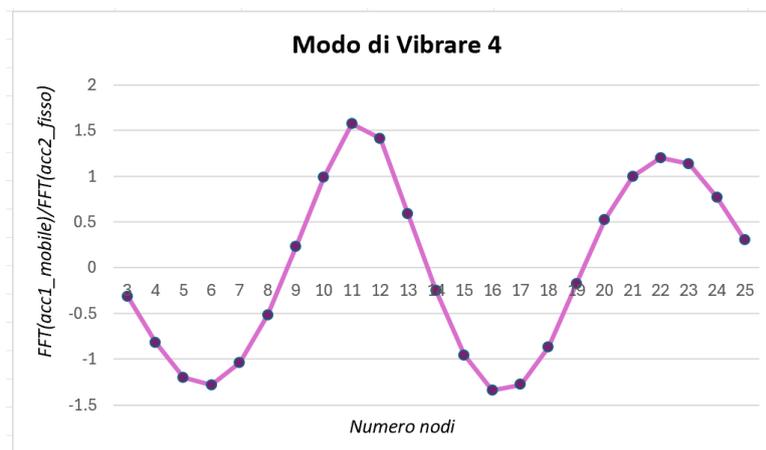


Figura 4.70: Modo di vibrare 4, trave con danno 4 prova 30 Maggio 2024 - Roving Sensor;

Nella successiva giornata di sperimentazione del 31 maggio 2024, prima di procedere all'ultimo step di danno, per avere delle misurazioni molto accurate, si decide di effettuare diverse prove per il quarto step di

danno in oggetto. Si opta per questa strategia operativa al fine di monitorare eventuali variazioni delle frequenze, si suppone infatti che eventuali interferenze di segnale o cambiamento delle condizioni di ammorsamento dei vincoli possano esserne la causa.

Si riportano sinteticamente i risultati dei parametri dinamici ottenuti con l’algoritmo Matlab di estrapolazione dei dati.

Nell’ordine si riportano le tabelle riassuntive: della prova eseguita il 30 Maggio 2024 nelle stesse condizioni del giorno di prova precedente, della prova eseguita semplicemente dopo aver riavviato il sistema di acquisizione dati e della centralina ed infine della prova eseguita nella stessa giornata di sperimentazione (30 Maggio 2024) dopo aver smontato e rimontato i vincoli d’incastro alle estremità.

I grafici delle forme modali, ricostruiti in Excel, risultano per tutte le prove eseguite il 30 Maggio pressoché identici ai precedenti riportati nelle figure 4.67, 4.68, 4.69, 4.70 dunque, si evita la loro rappresentazione.

DANNO 4_8mm_H1,2cm						
31 Maggio 2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.902	3	0.033	-0.072	-0.725	-0.308
f_2	48.089	4	0.120	-0.226	-2.181	-0.822
f_3	95.712	5	0.233	-0.429	-3.831	-1.216
f_4	149.950	6	0.372	-0.637	-5.191	-1.303
		7	0.526	-0.820	-5.634	-1.069
		8	0.685	-0.951	-4.856	-0.540
		9	0.847	-1.013	-3.145	0.228
		10	0.995	-0.997	-1.022	0.988
		11	1.123	-0.917	1.230	1.585
		12	1.195	-0.685	2.941	1.433
		13	1.218	-0.338	3.665	0.645
		14	1.215	0.017	3.872	-0.202
		15	1.172	0.366	3.457	-0.923
		16	1.107	0.654	2.363	-1.315
		17	1.013	0.892	0.679	-1.289
		18	0.901	1.037	-1.134	-0.832
		19	0.768	1.093	-2.643	-0.095
		20	0.624	1.051	-3.636	0.651
		21	0.479	0.918	-4.012	1.143
		22	0.338	0.727	-3.733	1.352
		23	0.211	0.494	-2.949	1.264
		24	0.106	0.267	-1.809	0.860
		25	0.034	0.090	-0.630	0.333

Tabella 4.8: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 4, 31 Maggio 2024 - Roving Sensor;

DANNO 4.8mm_H1,2cm_StesseCond		31_Maggio_2024				
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.785	3	0.035	-0.074	-0.744	-0.318
f_2	48.021	4	0.116	-0.230	-2.175	-0.827
f_3	95.613	5	0.230	-0.426	-3.831	-1.207
f_4	149.924	6	0.367	-0.632	-5.148	-1.302
		7	0.524	-0.817	-5.592	-1.070
		8	0.683	-0.949	-4.914	-0.547
		9	0.845	-1.014	-3.217	0.212
		10	0.992	-0.998	-1.016	0.991
		11	1.134	-0.916	1.262	1.573
		12	1.209	-0.687	2.923	1.426
		13	1.221	-0.335	3.703	0.639
		14	1.211	0.027	3.865	-0.218
		15	1.166	0.363	3.425	-0.925
		16	1.101	0.659	2.340	-1.325
		17	1.004	0.889	0.691	-1.277
		18	0.889	1.035	-1.084	-0.824
		19	0.762	1.083	-2.649	-0.094
		20	0.622	1.048	-3.632	0.650
		21	0.480	0.919	-4.007	1.141
		22	0.339	0.727	-3.703	1.349
		23	0.211	0.495	-2.941	1.273
		24	0.109	0.270	-1.812	0.862
		25	0.033	0.092	-0.665	0.343

Tabella 4.9: Valori frequenze e modi vibrare, trave stesse condizioni danno 4, 31 Maggio 2024;

DANNO 4.8mm_H1,2cm_Rimontata		31_Maggio_2024				
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.557	3	0.035	-0.072	-0.661	-0.314
f_2	47.708	4	0.117	-0.229	-1.987	-0.851
f_3	95.427	5	0.233	-0.428	-3.507	-1.257
f_4	149.902	6	0.374	-0.635	-4.768	-1.345
		7	0.525	-0.815	-5.147	-1.112
		8	0.693	-0.951	-4.484	-0.550
		9	0.853	-1.013	-2.924	0.224
		10	0.999	-1.007	-1.038	0.997
		11	1.147	-0.919	1.173	1.616
		12	1.221	-0.682	2.745	1.455
		13	1.230	-0.326	3.427	0.631
		14	1.218	0.028	3.622	-0.225
		15	1.177	0.374	3.194	-0.963
		16	1.110	0.670	2.144	-1.368
		17	1.020	0.899	0.610	-1.324
		18	0.899	1.041	-1.051	-0.849
		19	0.772	1.094	-2.404	-0.109
		20	0.630	1.052	-3.307	0.637
		21	0.484	0.927	-3.678	1.163
		22	0.341	0.729	-3.516	1.355
		23	0.214	0.496	-2.799	1.275
		24	0.107	0.265	-1.631	0.870
		25	0.034	0.088	-0.577	0.332

Tabella 4.10: Valori frequenze e modi vibrare, trave rimontata danno 4, 31 Maggio 2024;

Si constata facilmente dalle tabelle sovrastanti che i valori delle frequenze e dei modi di vibrare nelle varie condizioni di prova presentano uno scarto estremamente ridotto; dunque, le misurazioni delle prove risultano decisamente attendibili. Quanto detto è sinonimo del fatto che gli strumenti di acquisizione hanno elevata accuratezza e che il riposizionamento delle piastre, che realizzano i vincoli d'incastro, si esegue sempre con la massima precisione.

4.1.9 Quinto Step di danno

Si effettua l'ultimo step di danno sull'elemento 10 della trave in alluminio oggetto di studio doppiamente incastrata agli estremi.

Si realizza il quinto step danno sull'altezza dell'elemento 10 pari a 2 mm , nella giornata di sperimentazione del 31 Maggio 2024. Si danneggia localmente l'elemento del 50% della sua altezza totale. Si ha una sezione di dimensioni: $B = 2\text{ cm}$ e $H = 1,0\text{ cm}$.

Si segue sempre lo stesso iter operativo sia per la riproduzione in laboratorio del danno che per l'esecuzione della prova dinamica che mira alla caratterizzazione dei parametri dinamici, ossia frequenze e modi di vibrare.

Si propone la documentazione fotografica di quanto fatto per la riproduzione in laboratorio dell'ultimo step di danno.



Figura 4.71: Realizzazione del quinto danno da 2 mm sull'elemento 10;

Prima di procedere al posizionamento dei vincoli ed al loro ammorsamento, si misurano con calibro digitale i nuovi parametri della sezione. Si attende, dopo il quarto danneggiamento una sezione dell'elemento 10 con le seguenti caratteristiche:

$$L = 10 \text{ cm}, B = 2 \text{ cm}, H = 1,0 \text{ cm}$$

Si effettuano tre misurazioni sulla lunghezza dell'elemento, in particolare ai due estremi e nella mezzeria.



Figura 4.72: Misure altezza elemento 10 con calibro digitale dopo il quinto danneggiamento;

4.1.10 Valutazione parametri dinamici Quinto Step di danno

Realizzato il quinto ed ultimo danneggiamento, si posizionano le piastre e si avvitano i bulloni per riprodurre nuovamente i vincoli di incastro e si esegue con la tecnica del “Roving Sensor” la prova di identificazione della trave in alluminio danneggiata.

Si procede esattamente come per tutti gli step di danno precedentemente descritti, si fissa l'accelerometro 2 sul nodo 10 e la battuta con martello strumentato sul nodo 18 e si sposta l'accelerometro 1 dal nodo 3 al nodo 25 per ricostruire le forme modali in maniera precisa.



Figura 4.73: Elemento 10, danno 5 H1,0 cm;

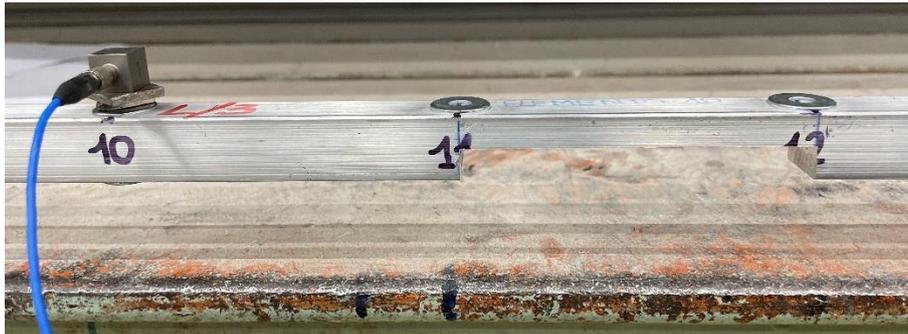


Figura 4.74: Tecnica Roving Sensor, quinto step di danno;

Anche in questo caso, si eseguono tre battute sul nodo 18 per ogni acquisizione con la tecnica del Roving Sensor sulla trave danneggiata.

Al termine della prova dinamica, si rielaborano i file “.txt” ottenuti.

Si identificano i valori delle frequenze e dei modi di vibrare che caratterizzano il quinto step di danno utilizzando l’algoritmo implementato in Matlab.

Si procede operativamente come per i danneggiamenti precedenti, si propongono quindi i grafici esplicativi ottenuti dall’algoritmo Matlab per la prova eseguita in data 31 maggio 2024 sulla trave caratterizzata dal quinto step di danno.

Nei grafici si identificano con tre colori diversi le trasformate degli output degli accelerometri delle tre battute effettuate sul nodo 18, solo per i due casi significativi in cui l’accelerometro mobile è fissato sui nodi 11 e 12, dove è localizzato il danno.

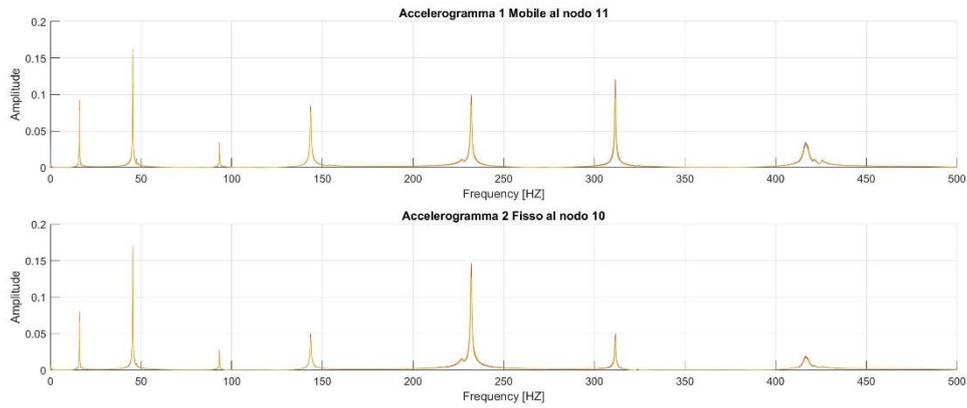


Figura 4.75: Plot degli output su trave con 5 step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 11;

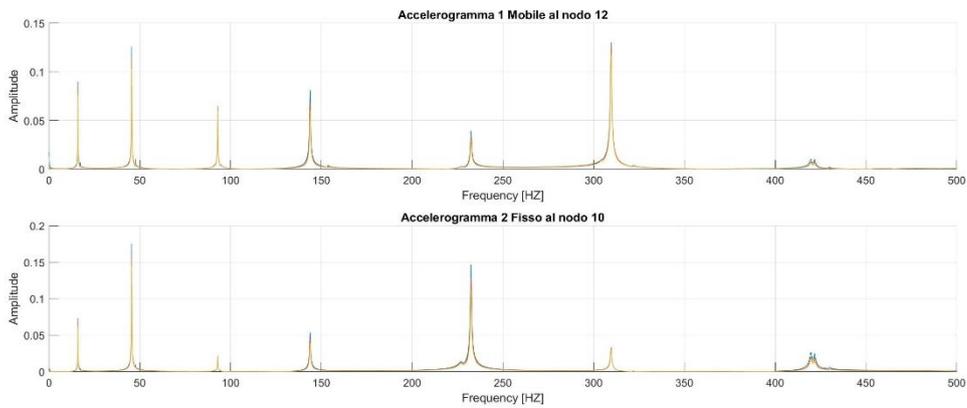


Figura 4.76: Plot degli output su trave con 5 step di danno, tecnica Roving Sensor, nodo 12;

L'algoritmo di estrapolazione dei parametri dinamici restituisce anche il grafico waterfall in cui si ha una visualizzazione d'insieme delle trasformate di Fourier per le acquisizioni dell'accelerometro mobile. Si riporta quanto ottenuto, rappresentativo degli andamenti delle forme modali.

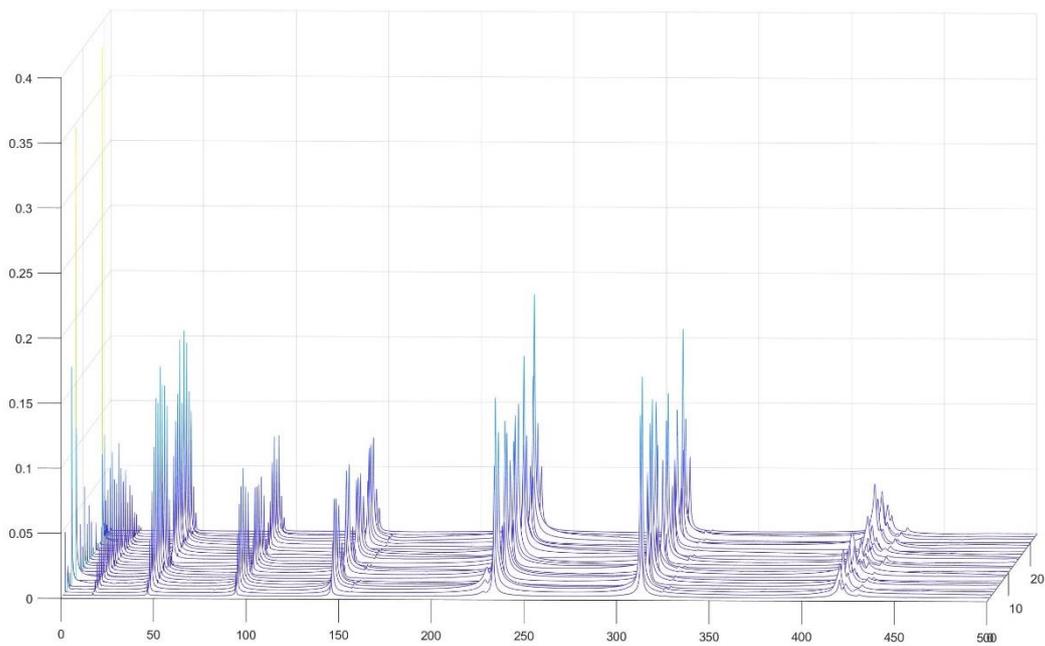


Figura 4.77: Grafico Waterfall forme modali con accelerometro mobile, 5 step di danno;

Si riassumono in tabella i valori numerici delle frequenze e dei modi di vibrare per la trave caratterizzata dal quinto ed ultimo passo di danno. Per questo step di danno, si conduce una sola prova dinamica, dunque si preferisce riportare anche gli andamenti grafici dei modi di vibrare, elaborati in Excel.

DANNO 5_10mm_H1,0cm						
31_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
f_1	16.092	3	0.035	-0.068	-0.695	-0.292
f_2	45.569	4	0.112	-0.211	-2.055	-0.759
f_3	93.056	5	0.223	-0.400	-3.676	-1.091
f_4	152.499	6	0.360	-0.598	-4.997	-1.413
		7	0.513	-0.779	-5.442	-1.119
		8	0.681	-0.918	-4.722	-0.505
		9	0.850	-0.994	-3.118	0.273
		10	1.000	-1.007	-1.063	1.028
		11	1.153	-0.952	1.245	1.792
		12	1.231	-0.717	2.951	1.420
		13	1.222	-0.339	3.489	0.595
		14	1.191	0.041	3.594	-0.499
		15	1.140	0.394	3.136	-1.131
		16	1.065	0.691	2.104	-1.484
		17	0.961	0.928	0.574	-1.528
		18	0.845	1.073	-1.060	-0.889
		19	0.716	1.122	-2.392	-0.312
		20	0.580	1.072	-3.331	0.413
		21	0.445	0.942	-3.642	0.795
		22	0.309	0.739	-3.460	1.253
		23	0.194	0.502	-2.666	0.960
		24	0.095	0.266	-1.595	0.592
		25	0.031	0.090	-0.567	0.231

Tabella 4.11: Valori frequenze e modi vibrare, trave danno 5, 31 Maggio 2024 - Roving Sensor;

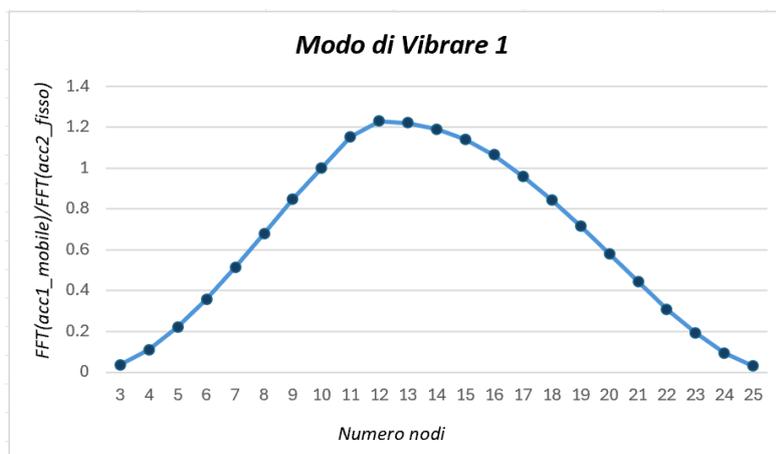


Figura 4.78: Modo di vibrare 1, trave con danno 5 prova 31 Maggio 2024 - Roving Sensor;

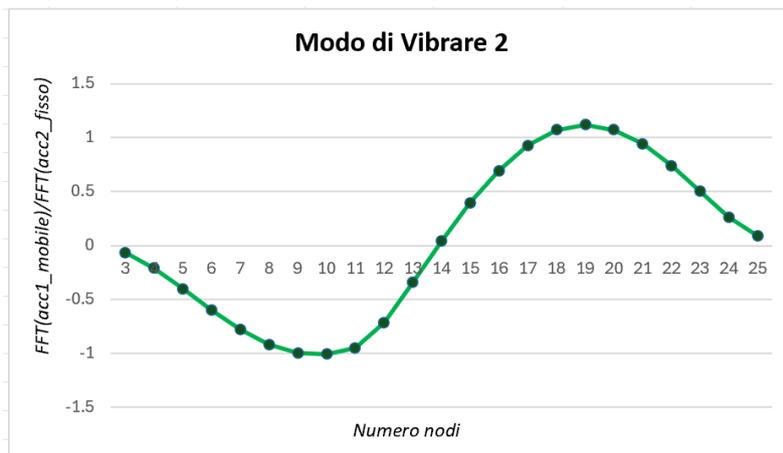


Figura 4.79: Modo di vibrare 2, trave con danno 5 prova 31 Maggio 2024 - Roving Sensor;

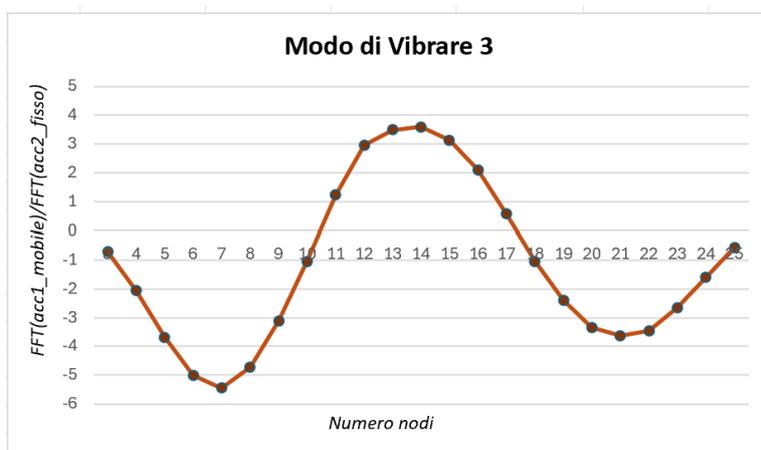


Figura 4.80: Modo di vibrare 3, trave con danno 5 prova 31 Maggio 2024 - Roving Sensor;

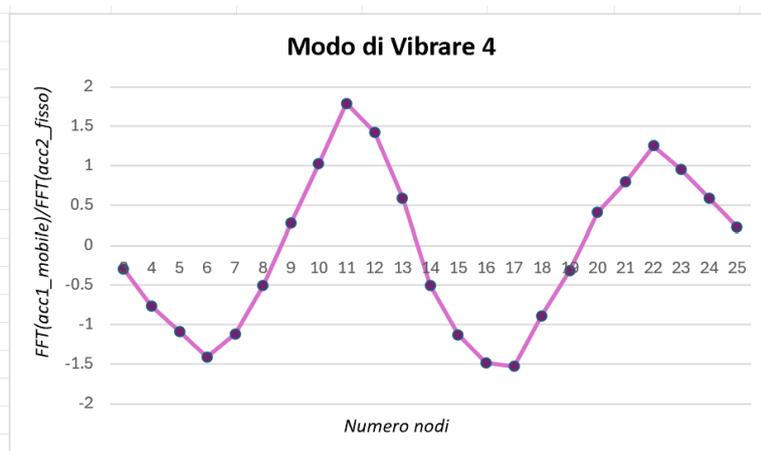


Figura 4.81: Modo di vibrare 4, trave con danno 5 prova 31 Maggio 2024 - Roving Sensor;

4.1.11 Confronto frequenze numeriche e sperimentali

Si propone un quadro riassuntivo dei valori delle frequenze, in ogni giornata di prova, ottenute sperimentalmente con la tecnica del Roving Sensor sia per la trave integra sia per tutti gli step di danno.

TRAVE IN ALLUMINIO DOPPIAMENTE INCASTRATA REALE													
DANNEGGIAMENTO ELEMENTO 10-SEZIONE BEAM 11-12 (B_2cm e H_variabile)													
VALORI FREQUENZE SPERIMENTALI													
Data Prove	18-apr	22-apr	15-mag	15-mag	15-mag	29-mag	29-mag	30-mag	30-mag	31-mag	StesseCond	Rimontata	31-mag
Valori Frequenze	TraveSana			Danno1	Danno2		Danno3		Danno4			Danno5	
f_1	17.562	18.613	16.451	18.056	17.870	16.941	17.365	17.231	17.086	17.902	17.785	17.557	16.092
f_2	48.566	50.031	47.121	49.046	48.474	47.279	47.666	47.494	46.912	48.089	48.021	47.708	45.569
f_3	96.105	97.789	94.566	96.616	96.027	94.652	95.194	95.045	94.477	95.712	95.613	95.427	93.056
f_4	158.309	160.069	156.618	157.067	154.300	153.127	151.854	151.684	149.906	149.950	149.924	149.902	152.499

Tabella 4.12: Valori frequenze sperimentali;

Per effettuare un confronto incrociato tra i valori delle frequenze ottenuti sperimentalmente ed i valori numerici estrapolati dal modello FEM, si procede dapprima ad effettuare la media dei valori delle frequenze sperimentali per gli step di danno dove si hanno più acquisizioni.

Si riporta sia quanto ottenuto dalla media dei valori sperimentali delle frequenze sia i valori numerici.

Si propongono due tabelle distinte realizzate, grazie all'utilizzo di Excel rispettivamente per i valori numerici e per i valori sperimentali.

TraveAlluminio_discretizzata 24 Elementi_Modello FEM						
DANNEGGIAMENTO SEZIONE BEAM 11-12 (B_2cm e H_variabile)						
VALORI FREQUENZE NUMERICHE (MODELLO FEM)						
	TraveSana	Danno1	Danno2	Danno3	Danno4	Danno5
	H_2cm	H_1,8cm	H_1,6cm	H_1,4cm	H_1,2cm	H_1,0cm
f_1	18.04	17.97	17.85	17.65	17.34	16.94
f_2	49.72	49.48	49.10	48.55	47.82	46.95
f_3	97.47	97.28	96.99	96.56	95.97	95.22
f_4	161.11	159.50	157.28	154.41	151.04	147.68

Tabella 4.13: Valori frequenze numeriche;

TRAVE REALE IN ALLUMINIO DOPPIAMENTE INCASTRATA						
RIPRODUZIONE DANNO ELEMENTO 10 - BEAM 11-12 (B_2cm e H_variabibile)						
MEDIA VALORI FREQUENZE SPERIMENTALI						
	TraveSana	Danno1	Danno2	Danno3	Danno4	Danno5
	H_2cm	H_1,8cm	H_1,6cm	H_1,4cm	H_1,2cm	H_1,0cm
f_1	17.54	18.06	17.41	17.30	17.58	16.09
f_2	48.57	49.05	47.88	47.58	47.68	45.57
f_3	96.15	96.62	95.34	95.12	95.31	93.06
f_4	158.33	157.07	153.71	151.77	149.92	152.50

Tabella 4.14: Media valori frequenze sperimentali;

Si procede al confronto determinando dapprima la differenza tra i valori numerici e quelli sperimentali per ogni frequenza per poi successivamente procedere al calcolo della differenza percentuale sulle frequenze attraverso la formula:

$$\%f = \frac{f_s - f_n}{f_n} \cdot 100$$

Dove:

- f_s : è il valore medio della frequenza determinato sperimentalmente;
- f_n : è il valore numerico della frequenza determinato dall'analisi modale eseguita su Straus7;

$\Delta f = (f_{\text{numeriche}} - f_{\text{sperimentali}})$						
	TraveSana	Danno1	Danno2	Danno3	Danno4	Danno5
Δf_1	0.50	-0.08	0.45	0.35	-0.24	0.85
Δf_2	1.15	0.43	1.23	0.97	0.13	1.38
Δf_3	1.32	0.66	1.65	1.44	0.66	2.17
Δf_4	2.78	2.43	3.57	2.64	1.12	-4.82

Tabella 4.15: Differenza tra frequenze numeriche e frequenze sperimentali;

DIFFERENZA PERCENTUALE [%]						
	TraveSana	Danno1	Danno2	Danno3	Danno4	Danno5
$\%f_1$	-2.7	0.5	-2.5	-2.0	1.4	-5.0
$\%f_2$	-2.3	-0.9	-2.5	-2.0	-0.3	-2.9
$\%f_3$	-1.3	-0.7	-1.7	-1.5	-0.7	-2.3
$\%f_4$	-1.7	-1.5	-2.3	-1.7	-0.7	3.3

Tabella 4.16: Differenza percentuale tra frequenze numeriche e frequenze sperimentali;

Dalle tabelle sovrastanti si evince che le frequenze ottenute sperimentalmente sia nel caso della trave integra che danneggiata validano i risultati dell'analisi agli elementi finiti implementata sul software Straus7, poiché si ha una differenza percentuale sulle singole frequenze accettabile.

4.2 IDENTIFICAZIONE DEL DANNO SPERIMENTALE

Con i valori sperimentali, si sceglie di impiegare il medesimo algoritmo di identificazione del danno, utilizzato in precedenza con i dati numerici, basato sul calcolo delle curvature modali.

Si è constatato che le curvature modali sono altamente sensibili al danno e possono essere utilizzate per localizzare lo stesso. Si ha quindi, in presenza di un danno, una riduzione della rigidità flessionale e di conseguenza un aumento della curvatura, il rapporto di proporzionalità si visualizza dalla formula:

$$\chi = v'' = \frac{M}{EI}$$

Dove:

- χ è la curvatura in una generica sezione
- v'' è la derivata seconda dello spostamento nel tempo
- M è il momento flettente della sezione
- E è il modulo elastico di Young
- I è il momento d'inerzia della sezione.

Tracciando la differenza nella curvatura modale (MC) tra la struttura integra e quella danneggiata, appare un picco in corrispondenza dell'elemento danneggiato che indica la presenza di un difetto. Si utilizza un'approssimazione della differenza centrale per derivare le forme modali di curvatura dalle forme modali di spostamento. Si normalizzano i vettori

modali alla massa unitaria e si calcolano le curvature modali con le differenze centrali del secondo ordine, dalla formula

$$(V_i'')_n = \frac{(v_{i+1})_n - 2(v_i)_n + (v_{i-1})_n}{h^2}$$

Dove:

- h è la lunghezza dell'elemento che discretizza la trave
- v_i è la coordinata modale i -esima del vettore modale $(v)_n$
- $(V_i'')_n$ è la coordinata i -esima del vettore $(v'')_n$.

Si nota che per ottenere la curvatura, sono necessarie informazioni al passo precedente e successivo; quindi, ne consegue che la curvatura per i punti più estremi non viene calcolata.

Un modo per confrontare le forme modali è tramite l'indice MAC acronimo di "Modal Assurance Criterion". L'indice MAC può indicare solo consistenza e non validità tra le forme modali, ed è maggiormente sensibile a grandi cambiamenti delle componenti modali.

È definito come:

$$MAC(\Phi_a; \Phi_e) = \frac{|\{\Phi\}_i^T|^2}{|\{\Phi_a\}_i^T \{\Phi_a\}_i^T| |\{\Phi_e\}_i^T \{\Phi_e\}_i^T|} |\{\Phi_a\}_i^T \{\Phi_e\}_i^T|^2$$

Il pedice "i" identifica l'ordine del modo di vibrare e Φ_a, Φ_e sono le matrici modali da correlare. Attraverso la matrice di rigidezza è necessario lo sviluppo di un modello analitico della struttura e si devono misurare tutti i modi di vibrare della struttura, soprattutto i modi ad alte frequenze.

Le caratteristiche modali, ovvero le frequenze circolari e le forme modali, si ottengono risolvendo il problema agli autovalori:

$$(K - \omega^2 M) / U_i = 0 \text{ con } i = 1, \dots, n$$

Dove:

- K è la matrice globale di rigidezza;
- M è la matrice di massa;
- ω_i è la i -esima frequenza circolare;
- U_i è la i -esima forma modale.

Le forme modali normalizzate di massa si ottengono come:

$$\Phi = \frac{U_i}{\sqrt{M_i}}$$

Dove M_i , è la i-esima massa modale pari a:

$$M_i = U_i^T M U_i$$

Le forme modali Φ_i sono raccolte nella matrice modale Φ , mentre le frequenze circolari ω_i sono riportate nella matrice spettrale Ω^2 :

$$[\Phi] = [\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_n] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[\Omega^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

La normalizzazione della massa dei modi di vibrare porta a:

$$\Phi^T M \Phi = I$$

$$\Phi^T K \Phi = \Omega^2$$

Dove:

- I è la matrice identità

Ω^2 e K , sono definite positive dunque $\Phi^T K \Phi = \Omega^2$, si può invertire e diventa:

$$(\Phi^T K \Phi)^{-1} = (\Omega^2)^{-1}$$

Moltiplicando per Φ e Φ^T si ottiene:

$$\Phi^{-1} \Phi K^{-1} (\Phi^T)^{-1} \Phi^T = \Phi (\Omega^2)^{-1} \Phi^T$$

$$K^{-1} = f = \Phi (\Omega^2)^{-1} \Phi^T$$

Dove f , è la matrice di flessibilità.

Si considerano tutte le frequenze e le n forme modali della struttura, allora si scrive:

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \Phi_i \Phi_i^T$$

Le frequenze circolari ω , sono inversamente proporzionali al quadrato rispetto alla flessibilità, ne deriva che f del modo principale sarà maggiore rispetto ai modi successivi.

L'algoritmo di identificazione del danno effettua un passo successivo, ossia considera la deformata della linea elastica mediante un carico unitario uniformemente distribuito (una serie di forze unitarie per nodo) mediante la formula:

$$K \cdot v = \frac{1}{f} \cdot v = Q \Rightarrow v = Q \cdot f$$

Dove v è un vettore con numero di righe pari ai nodi considerati, ovvero nel caso in esame 25.

Successivamente l'operazione di identificazione del danno e della sua posizione si ha tramite il calcolo delle curvature modali χ mediante l'approssimazione alle differenze centrali, con la formula riscritta di seguito per comodità.

$$(V_i'')_n = \frac{(v_{i+1})_n - 2(v_i)_n + (v_{i-1})_n}{h^2}$$

In ultimo, si stima l'indice di danno attraverso:

$$Damage Index = DI = \frac{v''_{damage} \cdot v''_{undamage}}{v''_{undamage}} [\%]$$

4.2.1 Algoritmo di identificazione del danno

Anche per i valori ottenuti sperimentalmente, si utilizza l'algoritmo di identificazione del danno implementato nel software "Matlab", utilizzato con i valori numerici.

Si vuole verificare che l'algoritmo, anche con i valori di forme modali e frequenze sperimentali, riesca a identificare per ogni passo di danno la posizione esatta dell'elemento danneggiato.

Nel caso in esame si è danneggiato l'elemento 10 della trave, ossia l'elemento di nodi 11-12 in Straus7, riprodotto esattamente nella stessa

posizione e attribuendo la medesima numerazione dei nodi anche in laboratorio per effettuare le rilevazioni sperimentali. Tale numerazione, è dovuta al fatto che gli incastri sono posizionati alle estremità di nodi rispettivamente 1 e 2. L'elemento 10 danneggiato, si identifica invece in Matlab con i nodi 10-11 in quanto le estremità fornite in input, hanno numerazione 1 e 25.

Si assegnano in prima battuta in input all'algoritmo i dati geometrici e meccanici della trave. Successivamente, attraverso un file ".mat" si assegnano i valori delle frequenze e degli spostamenti verticali relativi ai modi di vibrare sia per la trave integra che per tutte le misurazioni effettuate per ogni step di danno riprodotto in laboratorio.

In particolare, si hanno tre misurazioni di trave sana rilevate in tre differenti giornate di prova e otto estrapolazioni corrispondenti ai cinque step di danno realizzati in laboratorio.

Dunque, si riportano separatamente i risultati ottenuti dall'algoritmo caricando prima i dati di trave sana del 18 Aprile 2024 con tutte le misurazioni di trave danneggiata poi si esegue lo stesso procedimento inserendo i dati di trave sana del 22 Aprile 2024 e poi i valori di trave sana del 15 Maggio 2024

Ci si aspetta che l'algoritmo identifichi per ogni step la posizione esatta del danno, localizzato nell'elemento 10 corrispondente in Matlab ai nodi 10-11.

4.2.2 Identificazione del danno con valori trave sana 18 aprile 2024

Si procede elaborando delle tabelle in Excel contenenti i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti nella giornata di sperimentazione del 18 aprile 2024 sia di ogni acquisizione fatta per i cinque scenari di danno riprodotti in laboratorio.

Si hanno numerose acquisizioni di trave danneggiata per i vari step di danno; quindi, si propongono le tabelle con tutte le combinazioni di trave sana e trave danneggiata.

S1804_D1505_H18													
Frequenze TraveSana_H_2cm f_und [Hz]		Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm shape_und_DY [m]				Frequenze_Danno1 H_1,8cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare Danno1 H_1,8cm shape_und_DY [m]					
f_1	17.562	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	18.056	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_2	48.566	1	0.000	0.000	0.000	0.000	f_2	49.046	2	0.040	-0.064	-0.532	-0.344
f_3	96.105	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352	f_3	96.616	3	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
f_4	158.309	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	f_4	157.067	4	0.251	-0.485	-3.336	-1.326
		4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424			5	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
		5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510			6	0.557	-0.911	-4.883	-1.106
		6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208			7	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
		7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570			8	0.892	-1.078	-2.800	0.280
		8	0.877	-1.067	-2.577	0.281			9	1.002	-1.015	-1.075	0.983
		9	1.014	-1.006	-0.976	1.019			10	1.118	-0.886	0.870	1.404
		10	1.139	-0.859	0.716	1.438			11	1.257	-0.630	2.451	1.292
		11	1.236	-0.614	2.162	1.335			12	1.295	-0.320	3.421	0.713
		12	1.288	-0.313	3.116	0.781			13	1.333	0.015	3.782	-0.049
		13	1.308	0.013	3.480	-0.008			14	1.300	0.353	3.440	-0.781
		14	1.287	0.341	3.198	-0.787			15	1.241	0.645	2.406	-1.256
		15	1.236	0.630	2.238	-1.321			16	1.154	0.883	0.753	-1.337
		16	1.146	0.863	0.739	-1.441			17	1.007	1.035	-1.000	-0.964
		17	1.019	1.018	-0.952	-1.061			18	0.868	1.098	-2.619	-0.257
		18	0.874	1.079	-2.420	-0.305			19	0.721	1.064	-3.602	0.526
		19	0.714	1.042	-3.327	0.534			20	0.590	0.939	-4.051	1.139
		20	0.553	0.921	-3.740	1.206			21	0.399	0.739	-3.875	1.460
		21	0.396	0.733	-3.593	1.550			22	0.251	0.506	-3.088	1.368
		22	0.247	0.498	-2.840	1.468			23	0.148	0.266	-1.792	0.914
		23	0.126	0.269	-1.708	0.978			24	0.042	0.091	-0.657	0.349
		24	0.041	0.090	-0.616	0.376			25	0.000	0.000	0.000	0.000
		25	0.000	0.000	0.000	0.000							

Tabella 4.17: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno1-15mag

S1804_D1505_H16													
Frequenze TraveSana_H_2cm f_und [Hz]		Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm shape_und_DY [m]				Frequenze_Danno2 H_1,6cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare Danno2 H_1,6cm shape_und_DY [m]					
f_1	17.562	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	17.870	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_2	48.566	1	0.000	0.000	0.000	0.000	f_2	48.474	2	0.037	-0.079	-0.591	-0.335
f_3	96.105	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352	f_3	96.027	3	0.123	-0.252	-1.821	-0.902
f_4	158.309	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	f_4	154.300	4	0.240	-0.470	-3.203	-1.322
		4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424			5	0.383	-0.696	-4.345	-1.409
		5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510			6	0.543	-0.882	-4.774	-1.131
		6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208			7	0.711	-1.011	-4.172	-0.549
		7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570			8	0.864	-1.063	-2.764	0.243
		8	0.877	-1.067	-2.577	0.281			9	0.994	-0.998	-1.013	0.992
		9	1.014	-1.006	-0.976	1.019			10	1.131	-0.891	0.841	1.483
		10	1.139	-0.859	0.716	1.438			11	1.223	-0.655	2.337	1.390
		11	1.236	-0.614	2.162	1.335			12	1.277	-0.331	3.258	0.729
		12	1.288	-0.313	3.116	0.781			13	1.277	0.009	3.584	-0.072
		13	1.308	0.013	3.480	-0.008			14	1.251	0.335	3.269	-0.804
		14	1.287	0.341	3.198	-0.787			15	1.202	0.626	2.293	-1.280
		15	1.236	0.630	2.238	-1.321			16	1.104	0.862	0.766	-1.353
		16	1.146	0.863	0.739	-1.441			17	0.976	1.013	-0.933	-0.977
		17	1.019	1.018	-0.952	-1.061			18	0.833	1.077	-2.396	-0.248
		18	0.874	1.079	-2.420	-0.305			19	0.691	1.042	-3.432	0.546
		19	0.714	1.042	-3.327	0.534			20	0.550	0.934	-3.778	1.161
		20	0.553	0.921	-3.740	1.206			21	0.399	0.748	-3.661	1.486
		21	0.396	0.733	-3.593	1.550			22	0.246	0.515	-2.911	1.407
		22	0.247	0.498	-2.840	1.468			23	0.126	0.284	-1.783	0.957
		23	0.126	0.269	-1.708	0.978			24	0.042	0.099	-0.668	0.382
		24	0.041	0.090	-0.616	0.376			25	0.000	0.000	0.000	0.000
		25	0.000	0.000	0.000	0.000							

Tabella 4.18: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno2-15mag

S1804_D2905_H16													
Frequenze TraveSana_H_2cm f_und [Hz]		Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm shape_und_DY [m]				Frequenze_Danno2 H_1,6cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare Danno2 H_1,6cm shape_und_DY [m]					
f_1	17.562	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	16.941	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_2	48.566	1	0.000	0.000	0.000	0.000	f_2	47.279	2	0.037	-0.079	-0.647	-0.335
f_3	96.105	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352	f_3	94.652	3	0.126	-0.251	-1.975	-0.906
f_4	158.309	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	f_4	153.127	4	0.247	-0.464	-3.446	-1.321
		4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424			5	0.391	-0.678	-4.607	-1.389
		5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510			6	0.555	-0.887	-5.008	-1.115
		6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208			7	0.721	-0.992	-4.341	-0.525
		7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570			8	0.889	-1.031	-2.891	0.257
		8	0.877	-1.067	-2.577	0.281			9	1.009	-1.005	-1.071	0.988
		9	1.014	-1.006	-0.976	1.019			10	1.178	-0.859	0.934	1.479
		10	1.139	-0.859	0.716	1.438			11	1.268	-0.632	2.532	1.358
		11	1.236	-0.614	2.162	1.335			12	1.276	-0.312	3.442	0.704
		12	1.288	-0.313	3.116	0.781			13	1.260	0.023	3.748	-0.109
		13	1.308	0.013	3.480	-0.008			14	1.290	0.347	3.387	-0.829
		14	1.287	0.341	3.198	-0.787			15	1.196	0.631	2.352	-1.286
		15	1.236	0.630	2.238	-1.321			16	1.146	0.857	0.769	-1.340
		16	1.146	0.863	0.739	-1.441			17	0.965	1.026	-1.017	-0.943
		17	1.019	1.018	-0.952	-1.061			18	0.829	1.065	-2.589	-0.210
		18	0.874	1.079	-2.420	-0.305			19	0.683	1.028	-3.540	0.555
		19	0.714	1.042	-3.327	0.534			20	0.521	0.903	-3.963	1.183
		20	0.553	0.921	-3.740	1.206			21	0.370	0.713	-3.794	1.492
		21	0.396	0.733	-3.593	1.550			22	0.232	0.485	-3.007	1.374
		22	0.247	0.498	-2.840	1.468			23	0.118	0.263	-1.772	0.912
		23	0.126	0.269	-1.708	0.978			24	0.040	0.088	-0.637	0.350
		24	0.041	0.090	-0.616	0.376			25	0.000	0.000	0.000	0.000
		25	0.000	0.000	0.000	0.000							

Tabella 4.19: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno2-29mag

S1804_D2905_H14		Modi di Vibrare Trave Sana H 2cm shape_und_DY [m]					Frequenze_Danno3 H 1,4cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare_Danno3 H 1,4cm shape_und_DY [m]				
Frequenze TraveSana H 2cm f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17.562	1	0.000	0.000	0.000	0.000	17.365		1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	48.566	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352	47.666		2	0.037	-0.077	-0.678	-0.325
f_3	96.105	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	95.194		3	0.120	-0.240	-2.023	-0.869
f_4	158.309	4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424	151.854		4	0.236	-0.450	-3.587	-1.285
		5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510			5	0.380	-0.665	-4.856	-1.373
		6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208			6	0.539	-0.852	-5.252	-1.105
		7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570			7	0.707	-0.983	-4.570	-0.522
		8	0.877	-1.067	-2.577	0.281			8	0.864	-1.034	-2.967	0.257
		9	1.014	-1.006	-0.976	1.019			9	1.007	-1.008	-1.047	0.995
		10	1.139	-0.859	0.716	1.438			10	1.146	-0.887	1.121	1.550
		11	1.236	-0.614	2.162	1.335			11	1.212	-0.659	2.685	1.418
		12	1.288	-0.313	3.116	0.781			12	1.240	-0.322	3.546	0.679
		13	1.308	0.013	3.480	-0.008			13	1.225	0.021	3.840	-0.142
		14	1.287	0.341	3.198	-0.787			14	1.206	0.361	3.421	-0.877
		15	1.236	0.630	2.238	-1.321			15	1.158	0.652	2.334	-1.307
		16	1.146	0.863	0.739	-1.441			16	1.056	0.879	0.728	-1.324
		17	1.019	1.018	-0.952	-1.061			17	0.944	1.024	-1.040	-0.903
		18	0.874	1.079	-2.420	-0.305			18	0.802	1.083	-2.554	-0.152
		19	0.714	1.042	-3.327	0.534			19	0.660	1.043	-3.551	0.606
		20	0.553	0.921	-3.740	1.206			20	0.501	0.918	-4.063	1.219
		21	0.396	0.733	-3.593	1.550			21	0.358	0.720	-3.754	1.492
		22	0.247	0.498	-2.840	1.468			22	0.222	0.489	-2.963	1.371
		23	0.126	0.269	-1.708	0.978			23	0.124	0.265	-1.791	0.900
		24	0.041	0.090	-0.616	0.376			24	0.038	0.087	-0.626	0.334
		25	0.000	0.000	0.000	0.000			25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.20: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno3-29mag

S1804_D3005_H14		Modi di Vibrare Trave Sana H 2cm shape_und_DY [m]					Frequenze_Danno3 H 1,4cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare_Danno3 H 1,4cm shape_und_DY [m]				
Frequenze TraveSana H 2cm f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17.562	1	0.000	0.000	0.000	0.000	17.231		1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	48.566	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352	47.494		2	0.037	-0.077	-0.679	-0.327
f_3	96.105	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	95.045		3	0.121	-0.244	-2.057	-0.880
f_4	158.309	4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424	151.684		4	0.239	-0.453	-3.589	-1.291
		5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510			5	0.381	-0.667	-4.823	-1.379
		6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208			6	0.540	-0.855	-5.282	-1.110
		7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570			7	0.696	-0.983	-4.557	-0.538
		8	0.877	-1.067	-2.577	0.281			8	0.866	-1.036	-2.986	0.244
		9	1.014	-1.006	-0.976	1.019			9	1.012	-1.010	-1.029	1.004
		10	1.139	-0.859	0.716	1.438			10	1.135	-0.893	1.102	1.557
		11	1.236	-0.614	2.162	1.335			11	1.203	-0.663	2.688	1.428
		12	1.288	-0.313	3.116	0.781			12	1.244	-0.327	3.529	0.685
		13	1.308	0.013	3.480	-0.008			13	1.235	0.023	3.793	-0.150
		14	1.287	0.341	3.198	-0.787			14	1.210	0.359	3.393	-0.879
		15	1.236	0.630	2.238	-1.321			15	1.143	0.644	2.338	-1.310
		16	1.146	0.863	0.739	-1.441			16	1.053	0.878	0.692	-1.328
		17	1.019	1.018	-0.952	-1.061			17	0.939	1.025	-1.034	-0.902
		18	0.874	1.079	-2.420	-0.305			18	0.802	1.081	-2.626	-0.152
		19	0.714	1.042	-3.327	0.534			19	0.655	1.040	-3.635	0.620
		20	0.553	0.921	-3.740	1.206			20	0.503	0.915	-4.034	1.225
		21	0.396	0.733	-3.593	1.550			21	0.355	0.723	-3.733	1.503
		22	0.247	0.498	-2.840	1.468			22	0.221	0.488	-2.939	1.374
		23	0.126	0.269	-1.708	0.978			23	0.110	0.261	-1.758	0.893
		24	0.041	0.090	-0.616	0.376			24	0.035	0.088	-0.610	0.336
		25	0.000	0.000	0.000	0.000			25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.21: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno3-30mag

S1804_D3005_H12		Modi di Vibrare Trave Sana H 2cm shape_und_DY [m]					Frequenze_Danno4 H 1,2cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare_Danno4 H 1,2cm shape_und_DY [m]				
Frequenze TraveSana H 2cm f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17.562	1	0.000	0.000	0.000	0.000	17.086		1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	48.566	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352	46.912		2	0.035	-0.073	-0.731	-0.315
f_3	96.105	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	94.477		3	0.119	-0.228	-2.154	-0.821
f_4	158.309	4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424	149.906		4	0.230	-0.421	-3.771	-1.200
		5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510			5	0.366	-0.630	-5.096	-1.280
		6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208			6	0.521	-0.816	-5.546	-1.039
		7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570			7	0.683	-0.946	-4.804	-0.515
		8	0.877	-1.067	-2.577	0.281			8	0.844	-1.011	-3.150	0.233
		9	1.014	-1.006	-0.976	1.019			9	0.984	-0.995	-1.023	0.992
		10	1.139	-0.859	0.716	1.438			10	1.147	-0.916	1.238	1.576
		11	1.236	-0.614	2.162	1.335			11	1.208	-0.695	2.883	1.415
		12	1.288	-0.313	3.116	0.781			12	1.203	-0.335	3.616	0.586
		13	1.308	0.013	3.480	-0.008			13	1.203	0.023	3.828	-0.250
		14	1.287	0.341	3.198	-0.787			14	1.159	0.364	3.382	-0.959
		15	1.236	0.630	2.238	-1.321			15	1.096	0.656	2.306	-1.342
		16	1.146	0.863	0.739	-1.441			16	0.996	0.897	0.688	-1.277
		17	1.019	1.018	-0.952	-1.061			17	0.910	1.042	-1.054	-0.868
		18	0.874	1.079	-2.420	-0.305			18	0.753	1.097	-2.596	-0.178
		19	0.714	1.042	-3.327	0.534			19	0.612	1.054	-3.568	0.525
		20	0.553	0.921	-3.740	1.206			20	0.471	0.929	-3.919	0.999
		21	0.396	0.733	-3.593	1.550			21	0.333	0.727	-3.750	1.203
		22	0.247	0.498	-2.840	1.468			22	0.213	0.505	-2.986	1.134
		23	0.126	0.269	-1.708	0.978			23	0.105	0.267	-1.749	0.772
		24	0.041	0.090	-0.616	0.376			24	0.032	0.089	-0.628	0.302
		25	0.000	0.000	0.000	0.000			25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.22: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno4-40mag

S1804_D3105_H12					
Frequenze TraveSana_H_2cm					
f_und [Hz]	Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm				
	shape_und_DY [m]				
	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352
f_3	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968
f_4	4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424
	5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510
	6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208
	7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570
	8	0.877	-1.067	-2.577	0.281
	9	1.014	-1.006	-0.976	1.019
	10	1.139	-0.859	0.716	1.438
	11	1.236	-0.614	2.162	1.335
	12	1.288	-0.313	3.116	0.781
	13	1.308	0.013	3.480	-0.008
	14	1.287	0.341	3.198	-0.787
	15	1.236	0.630	2.238	-1.321
	16	1.146	0.863	0.739	-1.441
	17	1.019	1.018	-0.952	-1.061
	18	0.874	1.079	-2.420	-0.305
	19	0.714	1.042	-3.327	0.534
	20	0.553	0.921	-3.740	1.206
	21	0.396	0.733	-3.593	1.550
	22	0.247	0.498	-2.840	1.468
	23	0.126	0.269	-1.708	0.978
	24	0.041	0.090	-0.616	0.376
	25	0.000	0.000	0.000	0.000

S1804_D3105_H12					
Frequenze Danno4 H_1,2cm					
f_dam [Hz]	Modi di Vibrare Danno4_H_1,2cm				
	shape_und_DY [m]				
	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	2	0.033	-0.072	-0.725	-0.308
f_3	3	0.120	-0.226	-2.181	-0.822
f_4	4	0.233	-0.429	-3.831	-1.216
	5	0.372	-0.637	-5.191	-1.303
	6	0.526	-0.820	-6.634	-1.069
	7	0.685	-0.951	-4.856	-0.540
	8	0.847	-1.013	-3.145	0.228
	9	0.995	-0.997	-1.022	0.988
	10	1.123	-0.917	1.230	1.585
	11	1.195	-0.685	2.941	1.433
	12	1.218	-0.338	3.665	0.645
	13	1.215	0.017	3.872	-0.202
	14	1.172	0.366	3.457	-0.923
	15	1.107	0.654	2.363	-1.315
	16	1.013	0.892	0.679	-1.289
	17	0.901	1.037	-1.134	-0.832
	18	0.768	1.095	-2.643	-0.095
	19	0.624	1.051	-3.636	0.651
	20	0.479	0.918	-4.012	1.143
	21	0.338	0.727	-3.733	1.352
	22	0.211	0.494	-2.949	1.264
	23	0.106	0.267	-1.809	0.860
	24	0.034	0.090	-0.630	0.333
	25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.23: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno4-31mag

S1804_D3105_H12_StesseCond					
Frequenze TraveSana_H_2cm					
f_und [Hz]	Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm				
	shape_und_DY [m]				
	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352
f_3	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968
f_4	4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424
	5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510
	6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208
	7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570
	8	0.877	-1.067	-2.577	0.281
	9	1.014	-1.006	-0.976	1.019
	10	1.139	-0.859	0.716	1.438
	11	1.236	-0.614	2.162	1.335
	12	1.288	-0.313	3.116	0.781
	13	1.308	0.013	3.480	-0.008
	14	1.287	0.341	3.198	-0.787
	15	1.236	0.630	2.238	-1.321
	16	1.146	0.863	0.739	-1.441
	17	1.019	1.018	-0.952	-1.061
	18	0.874	1.079	-2.420	-0.305
	19	0.714	1.042	-3.327	0.534
	20	0.553	0.921	-3.740	1.206
	21	0.396	0.733	-3.593	1.550
	22	0.247	0.498	-2.840	1.468
	23	0.126	0.269	-1.708	0.978
	24	0.041	0.090	-0.616	0.376
	25	0.000	0.000	0.000	0.000

S1804_D3105_H12_StesseCond					
Frequenze Danno4 H_1,2cm					
f_dam [Hz]	Modi di Vibrare Danno4_H_1,2cm				
	shape_und_DY [m]				
	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	2	0.035	-0.074	-0.744	-0.318
f_3	3	0.116	-0.230	-2.175	-0.827
f_4	4	0.230	-0.426	-3.831	-1.207
	5	0.367	-0.632	-5.148	-1.302
	6	0.524	-0.817	-5.592	-1.070
	7	0.683	-0.949	-4.914	-0.547
	8	0.845	-1.014	-3.217	0.212
	9	0.992	-0.998	-1.016	0.991
	10	1.134	-0.916	1.262	1.573
	11	1.209	-0.687	2.923	1.426
	12	1.221	-0.335	3.703	0.639
	13	1.211	0.027	3.865	-0.218
	14	1.166	0.363	3.425	-0.925
	15	1.101	0.659	2.340	-1.325
	16	1.004	0.889	0.691	-1.277
	17	0.889	1.035	-1.084	-0.824
	18	0.762	1.083	-2.649	-0.094
	19	0.622	1.048	-3.632	0.650
	20	0.480	0.919	-4.007	1.141
	21	0.339	0.727	-3.703	1.349
	22	0.211	0.495	-2.941	1.273
	23	0.109	0.270	-1.812	0.862
	24	0.033	0.092	-0.665	0.343
	25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.24: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno4-31mag

S1804_D3105_H12_Rimontata					
Frequenze TraveSana_H_2cm					
f_und [Hz]	Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm				
	shape_und_DY [m]				
	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	2	0.037	-0.081	-0.547	-0.352
f_3	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968
f_4	4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424
	5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510
	6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208
	7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570
	8	0.877	-1.067	-2.577	0.281
	9	1.014	-1.006	-0.976	1.019
	10	1.139	-0.859	0.716	1.438
	11	1.236	-0.614	2.162	1.335
	12	1.288	-0.313	3.116	0.781
	13	1.308	0.013	3.480	-0.008
	14	1.287	0.341	3.198	-0.787
	15	1.236	0.630	2.238	-1.321
	16	1.146	0.863	0.739	-1.441
	17	1.019	1.018	-0.952	-1.061
	18	0.874	1.079	-2.420	-0.305
	19	0.714	1.042	-3.327	0.534
	20	0.553	0.921	-3.740	1.206
	21	0.396	0.733	-3.593	1.550
	22	0.247	0.498	-2.840	1.468
	23	0.126	0.269	-1.708	0.978
	24	0.041	0.090	-0.616	0.376
	25	0.000	0.000	0.000	0.000

S1804_D3105_H12_Rimontata					
Frequenze Danno4 H_1,2cm					
f_dam [Hz]	Modi di Vibrare Danno4_H_1,2cm				
	shape_und_DY [m]				
	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	2	0.035	-0.072	-0.661	-0.314
f_3	3	0.117	-0.229	-1.987	-0.851
f_4	4	0.233	-0.428	-3.507	-1.257
	5	0.374	-0.635	-4.769	-1.345
	6	0.525	-0.815	-5.147	-1.112
	7	0.683	-0.951	-4.484	-0.550
	8	0.853	-1.013	-2.924	0.224
	9	0.999	-1.007	-1.038	0.997
	10	1.147	-0.919	1.173	1.616
	11	1.221	-0.682	2.745	1.455
	12	1.230	-0.326	3.427	0.631
	13	1.218	0.028	3.622	-0.225
	14	1.177	0.374	3.194	-0.963
	15	1.110	0.670	2.144	-1.368
	16	1.020	0.899	0.610	-1.324
	17	0.899	1.041	-1.051	-0.849
	18	0.772	1.094	-2.404	-0.109
	19	0.630	1.052	-3.307	0.637
	20	0.484	0.927	-3.678	1.163
	21	0.341	0.729	-3.516	1.355
	22	0.214	0.496	-2.799	1.275
	23	0.107	0.265	-1.631	0.870
	24	0.034	0.088	-0.577	0.332
	25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.25: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno4-31mag

S1804_D3105_H10		Modi di Vibrare Trave Sana H 2cm					Frequenze Danno5 H 1,0cm		Modi di Vibrare Danno5 H 1,0cm				
Frequenze TraveSana H 2cm		shape_und_DY [m]					f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17.562	1	0.000	0.000	0.000	0.000	f_1	16.092	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	48.566	2	0.037	-0.091	-0.547	-0.352	f_2	45.569	2	0.035	-0.068	-0.695	-0.292
f_3	96.105	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	f_3	93.056	3	0.112	-0.211	-2.055	-0.759
f_4	158.309	4	0.245	-0.487	-2.993	-1.424	f_4	152.499	4	0.223	-0.400	-3.676	-1.091
		5	0.395	-0.719	-4.046	-1.510			5	0.360	-0.598	-4.997	-1.413
		6	0.554	-0.911	-4.381	-1.208			6	0.513	-0.779	-5.442	-1.119
		7	0.716	-1.037	-3.839	-0.570			7	0.681	-0.918	-4.722	-0.505
		8	0.877	-1.067	-2.577	0.281			8	0.850	-0.994	-3.118	0.273
		9	1.014	-1.006	-0.976	1.019			9	1.000	-1.007	-1.063	1.028
		10	1.139	-0.859	0.716	1.438			10	1.153	-0.952	1.245	1.792
		11	1.236	-0.614	2.162	1.335			11	1.231	-0.717	2.951	1.420
		12	1.288	-0.313	3.116	0.781			12	1.222	-0.339	3.489	0.595
		13	1.308	0.013	3.480	-0.008			13	1.191	0.041	3.594	-0.499
		14	1.287	0.341	3.198	-0.787			14	1.140	0.394	3.136	-1.131
		15	1.236	0.630	2.238	-1.321			15	1.065	0.691	2.104	-1.484
		16	1.146	0.863	0.739	-1.441			16	0.961	0.928	0.574	-1.528
		17	1.019	1.018	-0.952	-1.061			17	0.845	1.073	-1.060	-0.889
		18	0.874	1.079	-2.420	-0.305			18	0.716	1.122	-2.392	-0.312
		19	0.714	1.042	-3.327	0.534			19	0.580	1.072	-3.331	0.413
		20	0.553	0.921	-3.740	1.206			20	0.445	0.942	-3.642	0.795
		21	0.396	0.733	-3.593	1.550			21	0.309	0.739	-3.460	1.253
		22	0.247	0.498	-2.840	1.468			22	0.194	0.502	-2.666	0.960
		23	0.126	0.269	-1.708	0.978			23	0.095	0.266	-1.595	0.592
		24	0.041	0.090	-0.616	0.376			24	0.031	0.090	-0.567	0.231
		25	0.000	0.000	0.000	0.000			25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.26: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno5-31mag

Grazie alle tabelle sopra riportate si creano in Matlab dei file “.mat” e si caricano nell’algoritmo rinominati come “final_data.mat” . I file contengono i vettori relativi ai quattro valori delle frequenze di trave sana “f_und”, di trave danneggiata “f_dam” e le quattro forme modali sia per la trave sana che danneggiata, rispettivamente sotto il nome di “shape_und” e “shape_dam”.

L’algoritmo restituisce il plot delle forme modali sperimentali della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la differenza assoluta tra le curvatures valutando così la posizione esatta del danno.

Si riportano i plot delle forme modali e della differenza di curvatura per ogni step di danno riprodotto in laboratorio, tenendo conto solo di un’acquisizione per step.

Si considerano gli scenari significativi con le combinazioni:

- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 1 15 maggio
- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 2 15 maggio
- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 3 29 maggio
- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 4 30 maggio
- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 5 31 maggio

Dove il numero di danno indica la progressiva diminuzione dell'altezza della sezione dell'elemento 10, ossia per il danno 1 $H = 1,8\text{ cm}$ e per il danno 5 $H = 1,0\text{ cm}$, rispettivamente il danno massimo e minimo riprodotto sperimentalmente

Infine, si propongono i plot di identificazione del danno per tutte le acquisizioni effettuate di trave danneggiata.

- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 1 15 maggio

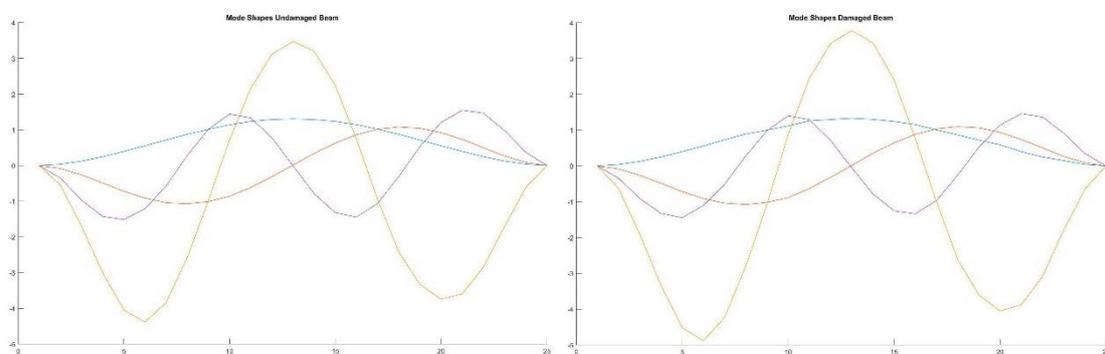


Figura 4.82: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag

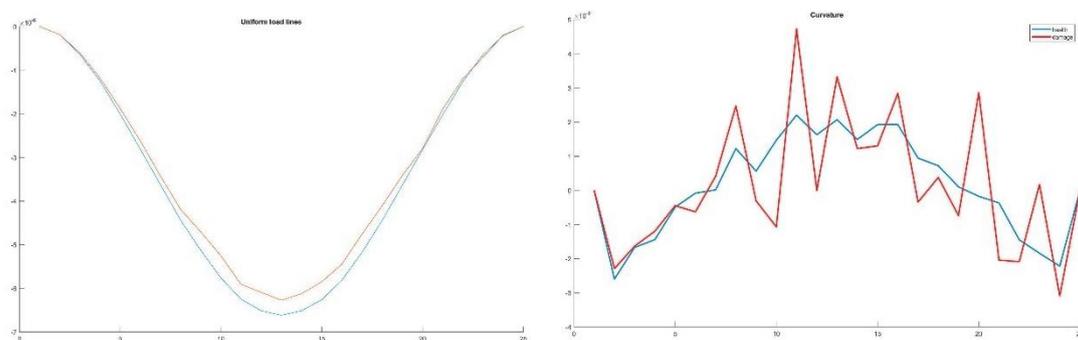


Figura 4.83: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag

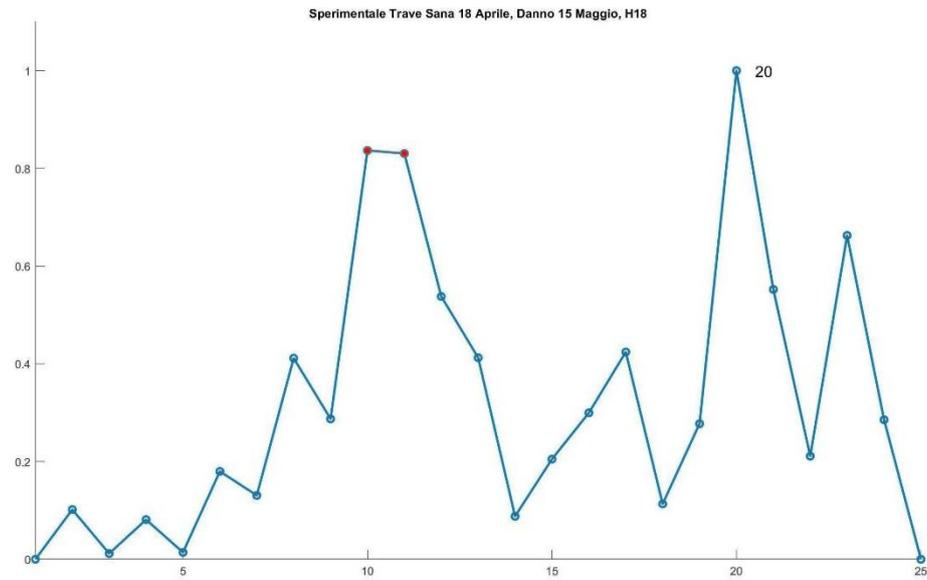


Figura 4.84: Identificazione del danno 1 sperimentale_H1,8 cm

- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 2 15 maggio

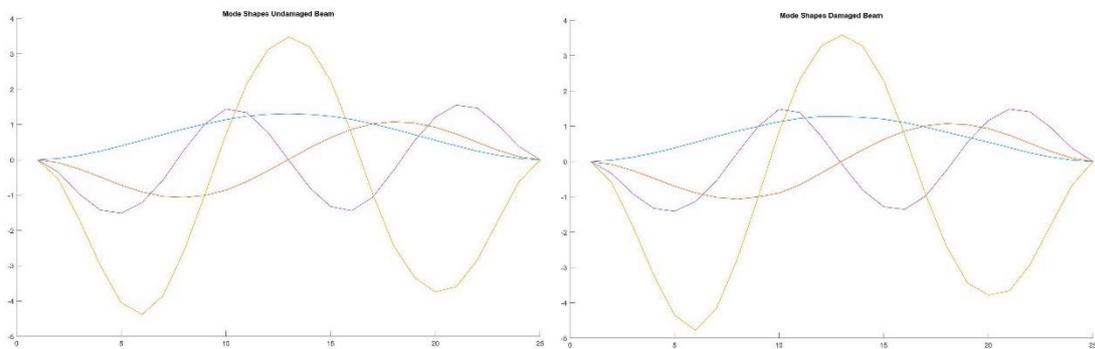


Figura 4.85: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 2_H1,6cm 15 mag

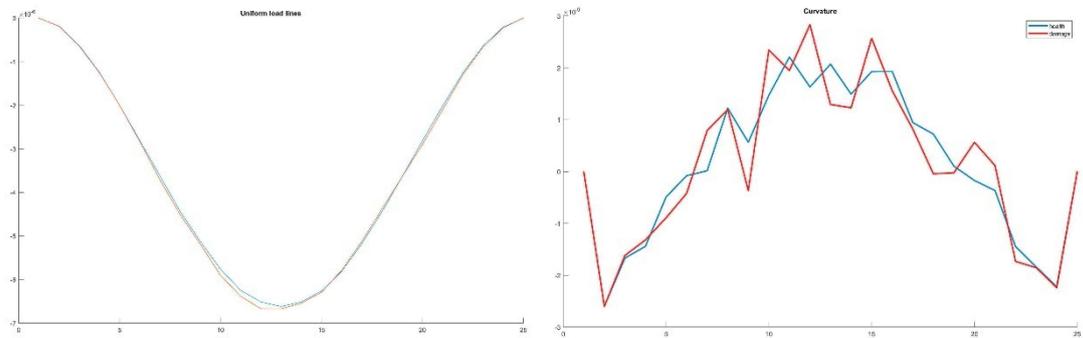


Figura 4.86: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 2_H1,6cm 15 mag

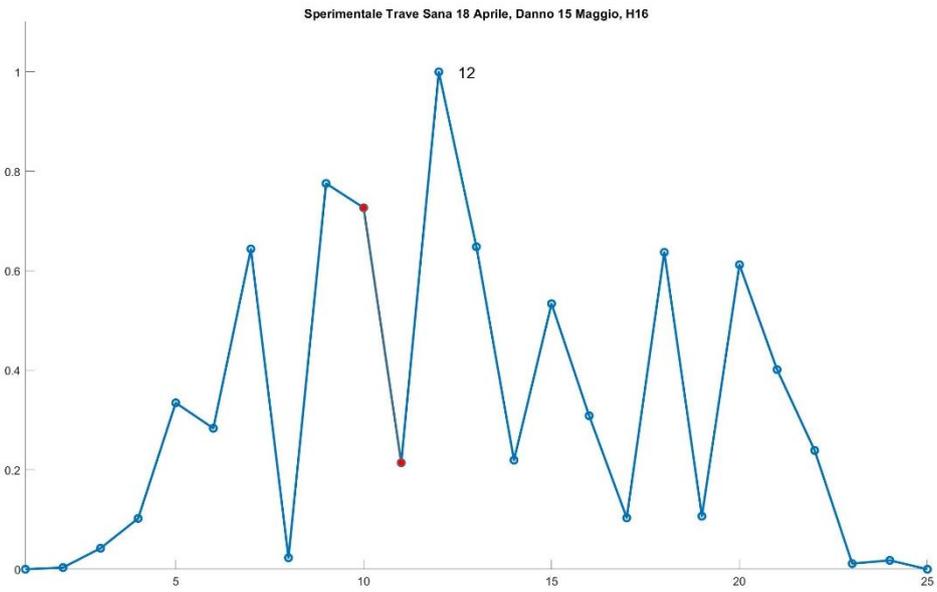


Figura 4.87: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm

- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 3 29 maggio

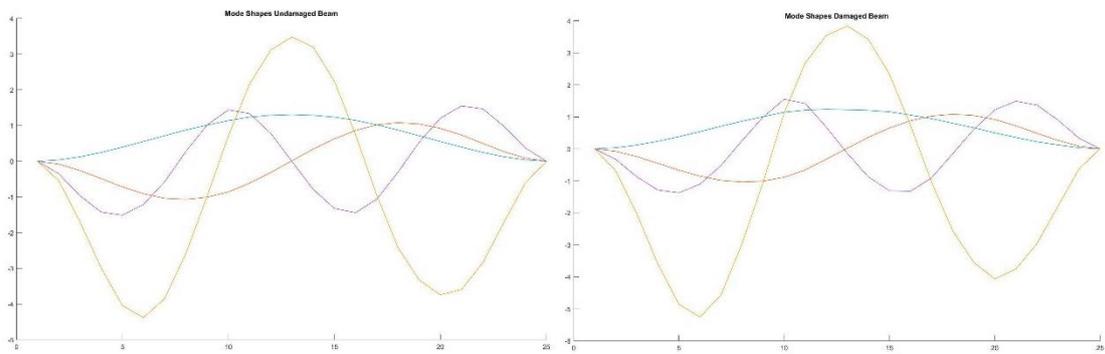


Figura 4.88: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 3_H1,4cm 29 mag

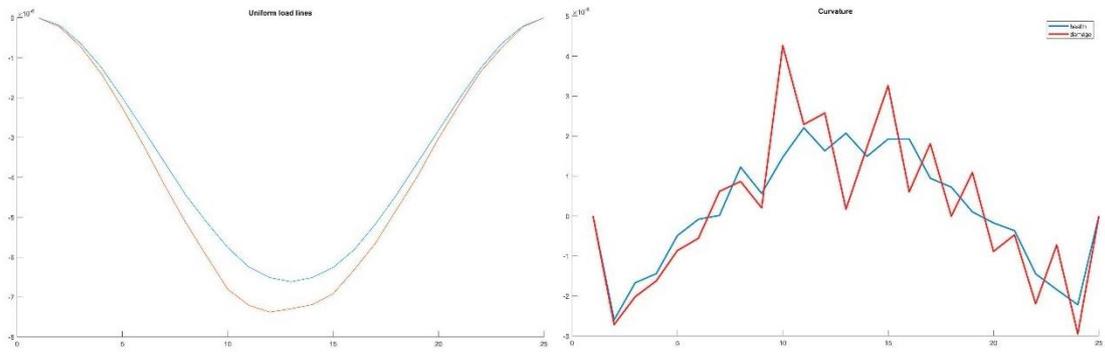


Figura 4.89: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 3_H1,4cm 29 mag

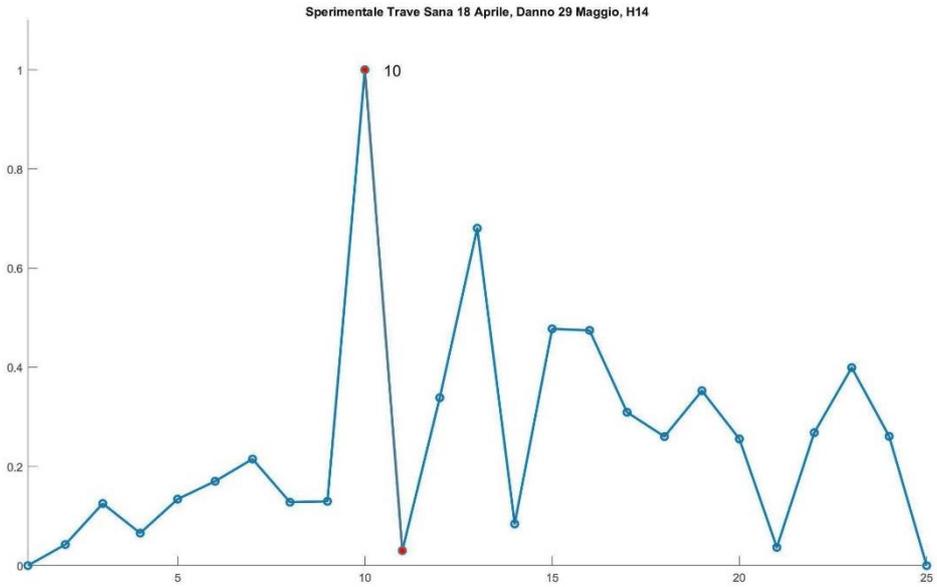


Figura 4.90: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm

- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 4 30 maggio

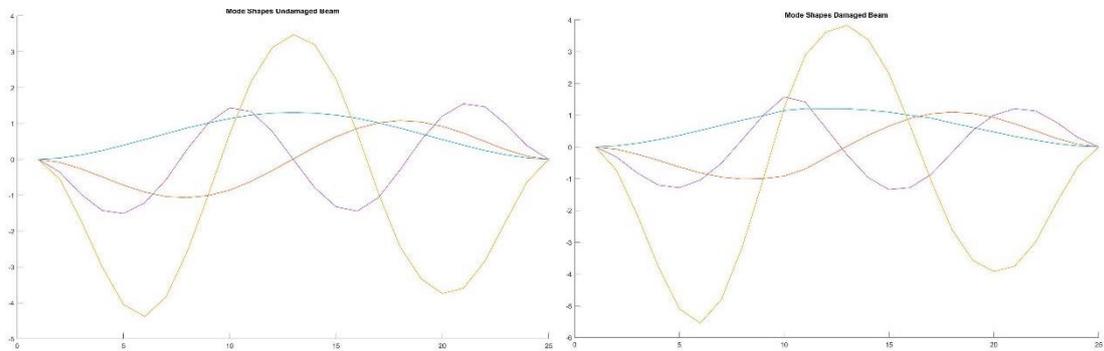


Figura 4.91: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 4_H1,2cm 30 mag

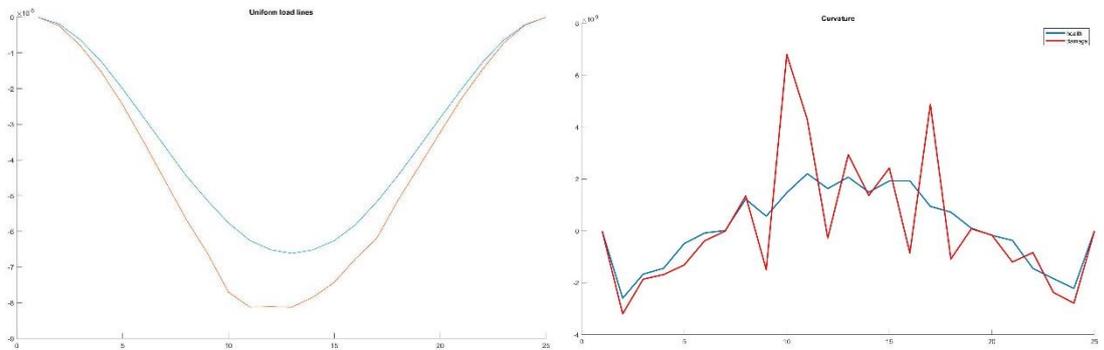


Figura 4.92: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 4_H1,2cm 30 mag

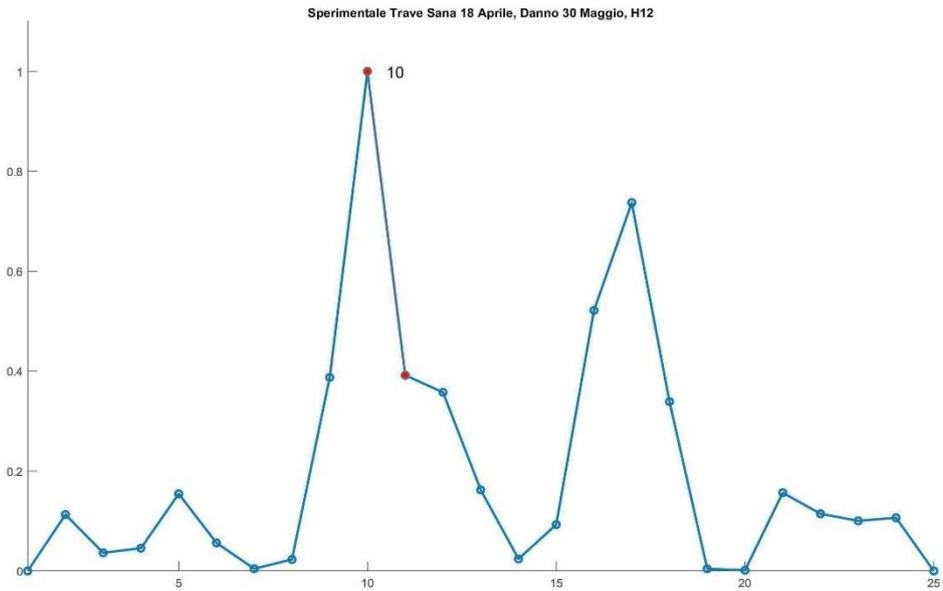


Figura 4.93: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm

- Trave Sana 18 aprile- Trave Danno 5 31 maggio

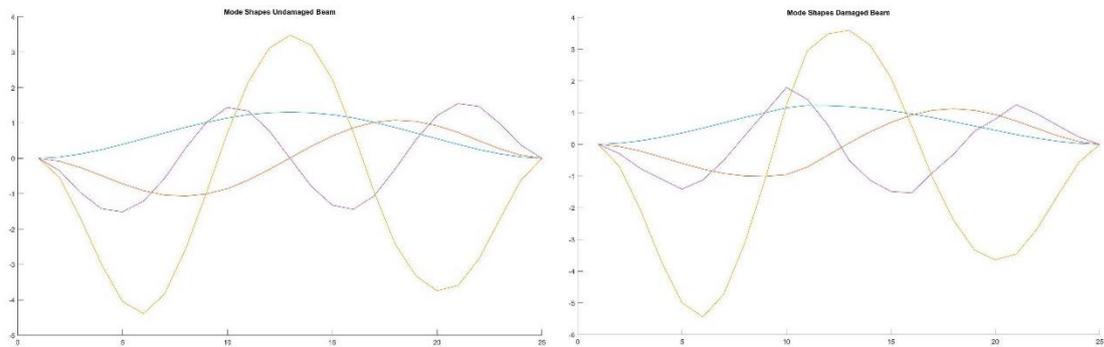


Figura 4.94: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 5_H1,0cm 31 mag

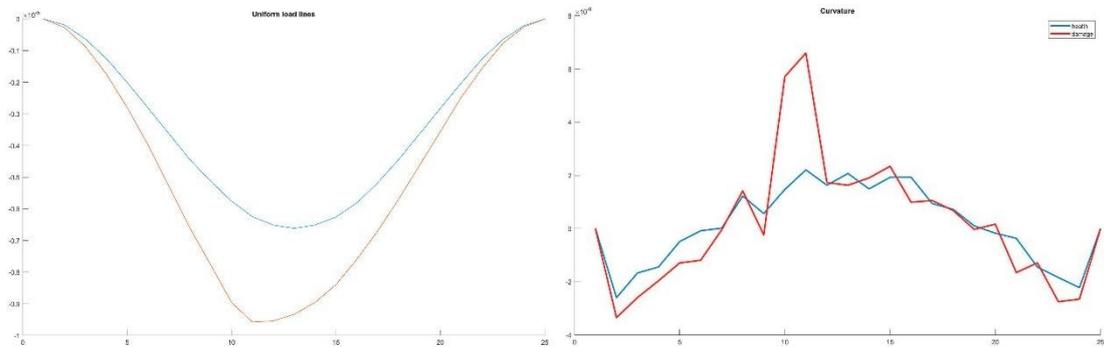


Figura 4.95: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 5_H1,0cm 31 mag

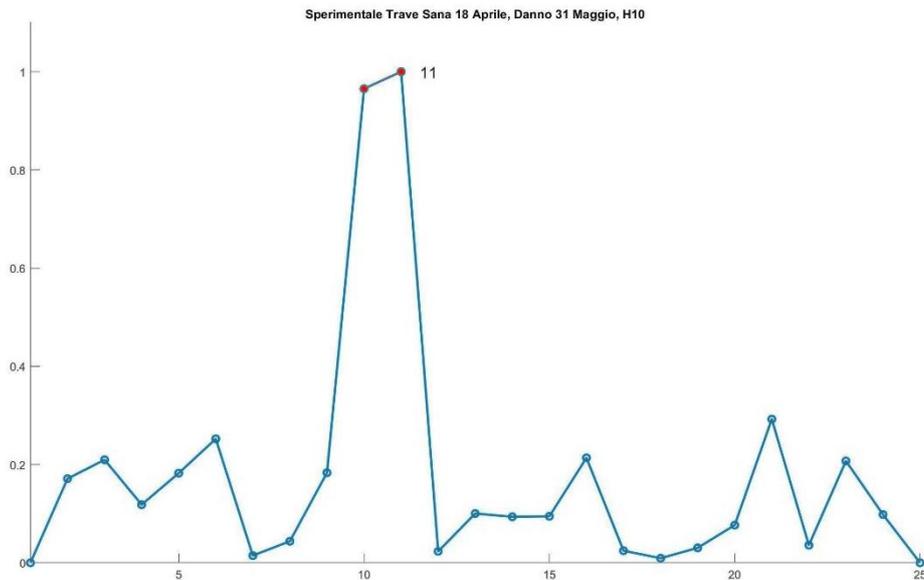


Figura 4.96: Identificazione del danno 5 sperimentale_H1,0 cm

Si riportano sinteticamente le figure con l'indice di danno per tutte le acquisizioni effettuate sperimentalmente ad ogni step di danno riprodotto in laboratorio. In questo caso si tiene sempre conto dei parametri dinamici di trave sana estrapolati dalla prova del 18 aprile 2024.

DANNO SPERIMENTALE 1

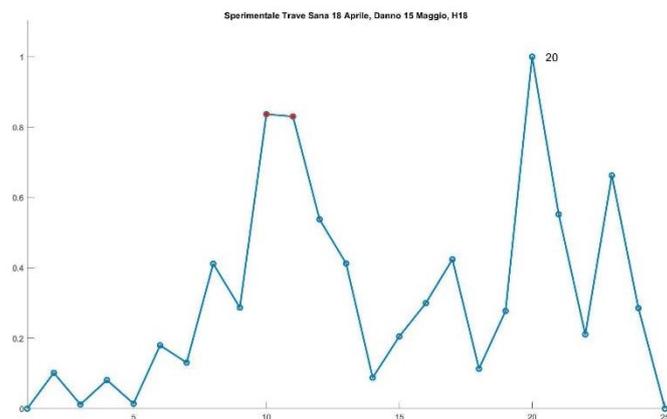


Figura 4.97: Identificazione del danno 1 sperimentale_H1,8 cm;

DANNO SPERIMENTALE 2

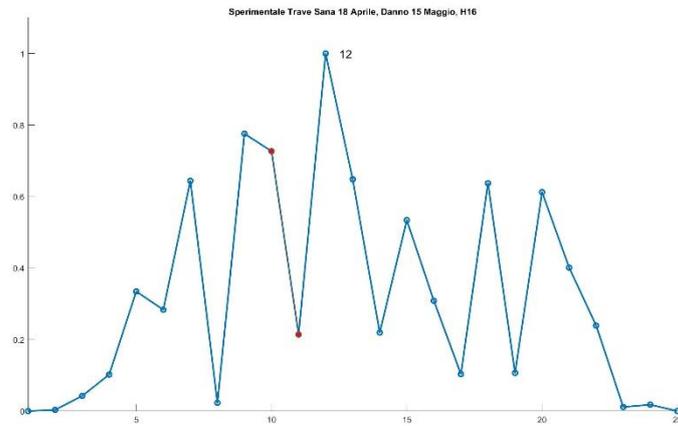


Figura 4.98: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm;

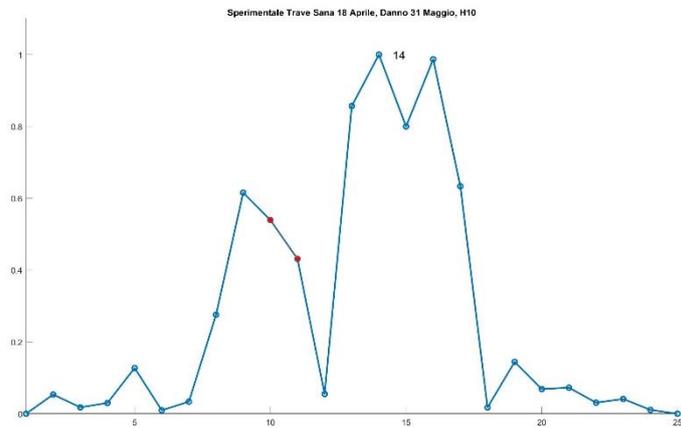


Figura 4.99: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm;

DANNO SPERIMENTALE 3

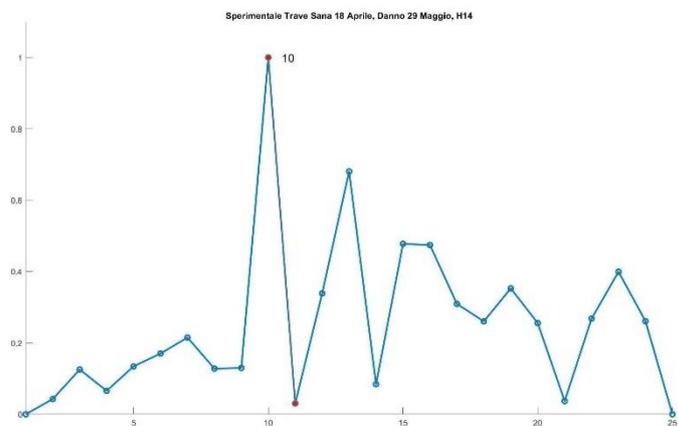


Figura 4.100: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm;

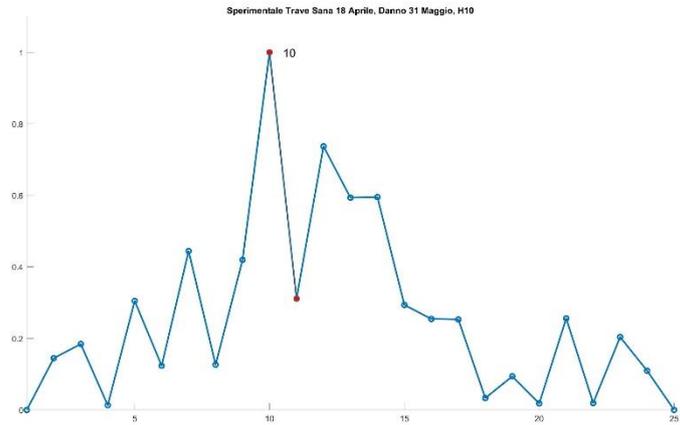


Figura 4.101: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm;

DANNO SPERIMENTALE 4

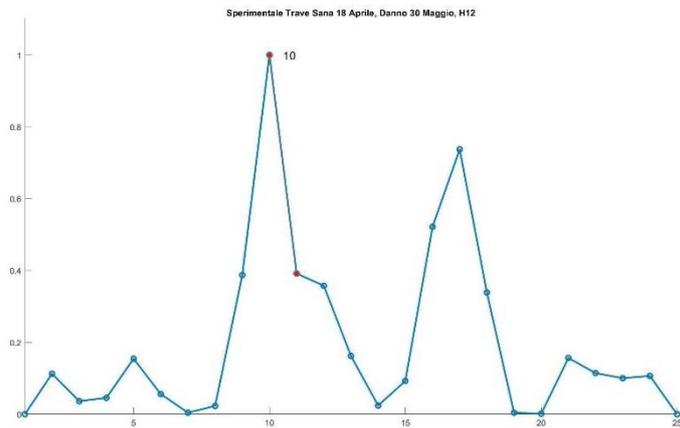


Figura 4.102: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

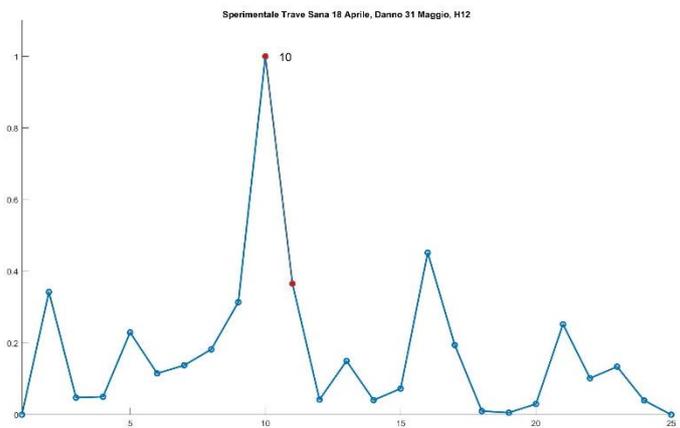


Figura 4.103: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

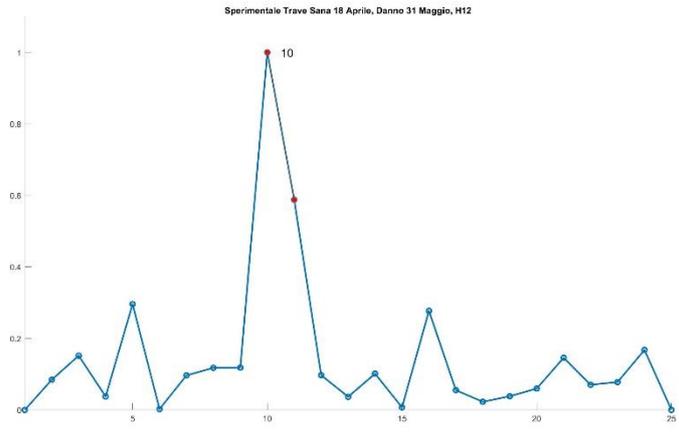


Figura 4.104: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

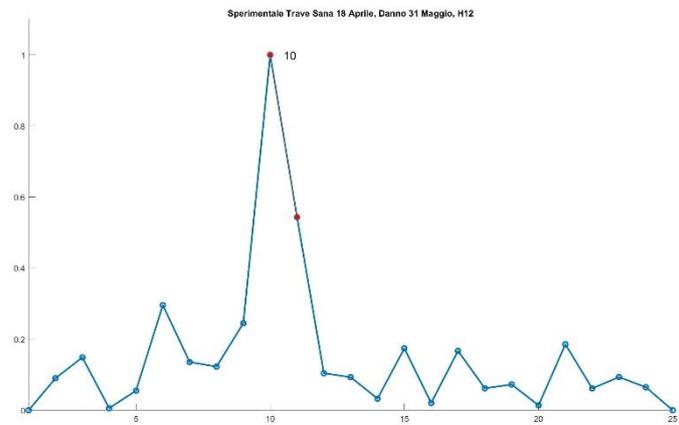


Figura 4.105: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

DANNO SPERIMENTALE 5

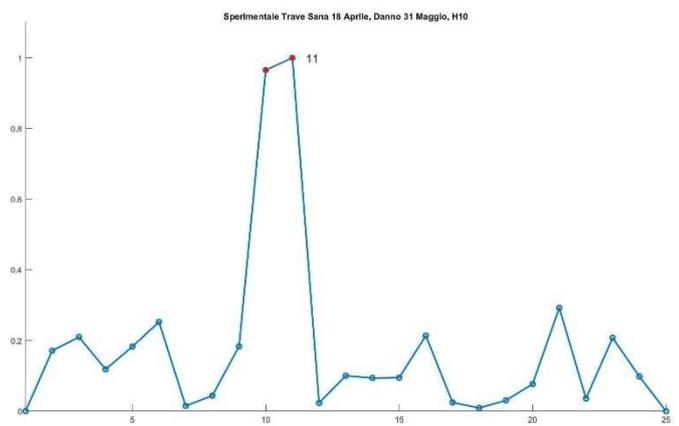


Figura 4.106: Identificazione del danno 5 sperimentale_H1,0 cm;

4.2.3 Identificazione del danno con valori trave sana 22 aprile 2024

Si procede elaborando delle tabelle in Excel contenenti i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti nella giornata di sperimentazione del 22 aprile 2024 sia di ogni acquisizione fatta per i cinque scenari di danno riprodotti in laboratorio.

Si hanno numerose acquisizioni di trave danneggiata per i vari step di danno; quindi, in questo caso, si propongono esclusivamente le combinazioni di trave sana e trave danneggiata con il minimo e massimo livello di danno riprodotto sperimentalmente.

S2204_D1505_H18				
Frequenze TraveSana_H_2cm				
f_und [Hz]				
f_1	18.613			
f_2	50.031			
f_3	97.789			
f_4	160.069			
Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm				
shape_und_DY [m]				
Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.038	-0.083	-0.575	-0.354
3	0.126	-0.264	-1.762	-0.962
4	0.248	-0.489	-3.091	-1.410
5	0.395	-0.720	-4.205	-1.492
6	0.558	-0.916	-4.539	-1.183
7	0.720	-1.040	-3.967	-0.551
8	0.878	-1.077	-2.643	0.288
9	1.016	-1.012	-0.993	1.018
10	1.143	-0.856	0.758	1.426
11	1.230	-0.618	2.223	1.330
12	1.284	-0.314	3.234	0.778
13	1.303	0.011	3.608	-0.010
14	1.287	0.340	3.300	-0.784
15	1.232	0.628	2.317	-1.309
16	1.145	0.864	0.775	-1.421
17	1.029	1.015	-0.945	-1.058
18	0.890	1.078	-2.464	-0.314
19	0.726	1.050	-3.410	0.507
20	0.562	0.923	-3.852	1.186
21	0.401	0.734	-3.706	1.530
22	0.251	0.502	-2.939	1.449
23	0.129	0.272	-1.779	0.971
24	0.041	0.091	-0.634	0.371
25	0.000	0.000	0.000	0.000
Frequenze Danno1 H_1,8cm				
f_dam [Hz]				
f_1	18.056			
f_2	49.046			
f_3	96.616			
f_4	157.067			
Modi di Vibrare Danno1_H_1,8cm				
shape_und_DY [m]				
Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.040	-0.084	-0.632	-0.344
3	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
4	0.251	-0.485	-3.336	-1.326
5	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
6	0.557	-0.911	-4.883	-1.106
7	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
8	0.892	-1.078	-2.800	0.280
9	1.002	-1.015	-1.075	0.983
10	1.118	-0.886	0.870	1.404
11	1.257	-0.630	2.451	1.292
12	1.295	-0.320	3.421	0.713
13	1.333	0.015	3.782	-0.049
14	1.300	0.353	3.440	-0.781
15	1.241	0.645	2.406	-1.256
16	1.154	0.883	0.753	-1.337
17	1.007	1.035	-1.000	-0.964
18	0.868	1.098	-2.619	-0.257
19	0.721	1.064	-3.602	0.526
20	0.590	0.939	-4.051	1.139
21	0.399	0.739	-3.875	1.460
22	0.251	0.506	-3.088	1.368
23	0.148	0.266	-1.792	0.914
24	0.042	0.091	-0.657	0.349
25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.27: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana22 apr e danno1-15mag;

S2204_D3105_H10				
Frequenze TraveSana_H_2cm				
f_und [Hz]				
f_1	18.613			
f_2	50.031			
f_3	97.789			
f_4	160.069			
Modi di Vibrare Trave Sana_H_2cm				
shape_und_DY [m]				
Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.038	-0.083	-0.575	-0.354
3	0.126	-0.264	-1.762	-0.962
4	0.248	-0.489	-3.091	-1.410
5	0.395	-0.720	-4.205	-1.492
6	0.558	-0.916	-4.539	-1.183
7	0.720	-1.040	-3.967	-0.551
8	0.878	-1.077	-2.643	0.288
9	1.016	-1.012	-0.993	1.018
10	1.143	-0.856	0.758	1.426
11	1.230	-0.618	2.223	1.330
12	1.284	-0.314	3.234	0.778
13	1.303	0.011	3.608	-0.010
14	1.287	0.340	3.300	-0.784
15	1.232	0.628	2.317	-1.309
16	1.145	0.864	0.775	-1.421
17	1.029	1.015	-0.945	-1.058
18	0.890	1.078	-2.464	-0.314
19	0.726	1.050	-3.410	0.507
20	0.562	0.923	-3.852	1.186
21	0.401	0.734	-3.706	1.530
22	0.251	0.502	-2.939	1.449
23	0.129	0.272	-1.779	0.971
24	0.041	0.091	-0.634	0.371
25	0.000	0.000	0.000	0.000
Frequenze Danno5 H_1,0cm				
f_dam [Hz]				
f_1	16.092			
f_2	45.569			
f_3	93.056			
f_4	152.499			
Modi di Vibrare Danno5_H_1,0cm				
shape_und_DY [m]				
Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
1	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.035	-0.068	-0.695	-0.292
3	0.112	-0.211	-2.055	-0.759
4	0.223	-0.400	-3.676	-1.091
5	0.360	-0.598	-4.997	-1.413
6	0.513	-0.779	-5.442	-1.119
7	0.681	-0.918	-4.722	-0.505
8	0.850	-0.994	-3.118	0.273
9	1.000	-1.007	-1.063	1.028
10	1.153	-0.952	1.245	1.792
11	1.231	-0.717	2.951	1.420
12	1.222	-0.339	3.489	0.595
13	1.191	0.041	3.594	-0.499
14	1.140	0.394	3.136	-1.131
15	1.065	0.691	2.104	-1.484
16	0.961	0.928	0.574	-1.528
17	0.845	1.073	-1.060	-0.889
18	0.716	1.122	-2.392	-0.312
19	0.580	1.072	-3.331	0.413
20	0.445	0.942	-3.642	0.795
21	0.309	0.739	-3.460	1.253
22	0.194	0.502	-2.666	0.960
23	0.095	0.266	-1.595	0.592
24	0.031	0.090	-0.567	0.231
25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.28: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana22 apr e danno5-31mag;

Si realizzano in Matlab, anche in questo caso, dei file rinominati “final_data.mat” e si caricano all’interno dell’algoritmo di identificazione del danno. I file contengono i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti dalla prova del 22 aprile 2024 sia di ogni acquisizione effettuata per la trave danneggiata.

L’algoritmo restituisce il plot delle forme modali sperimentali della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la differenza assoluta tra le curvature valutando così la posizione esatta del danno.

Per sintesi di trattazione non si riportano i plot delle forme modali e della variazione curvatura ma si preferisce fornire il focus esclusivamente sulle figure rappresentative dell’identificazione del danno per tutte le acquisizioni effettuate sperimentalmente ad ogni step di danno riprodotto in laboratorio. In questo caso si tiene sempre conto dei parametri dinamici di trave sana estrapolati dalla prova del 22 aprile 2024.

DANNO SPERIMENTALE 1

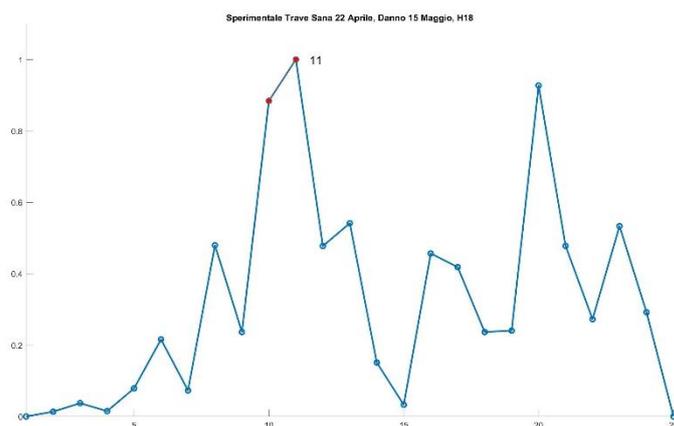


Figura 4.107: Identificazione del danno 1 sperimentale_H1,8 cm;

DANNO SPERIMENTALE 2

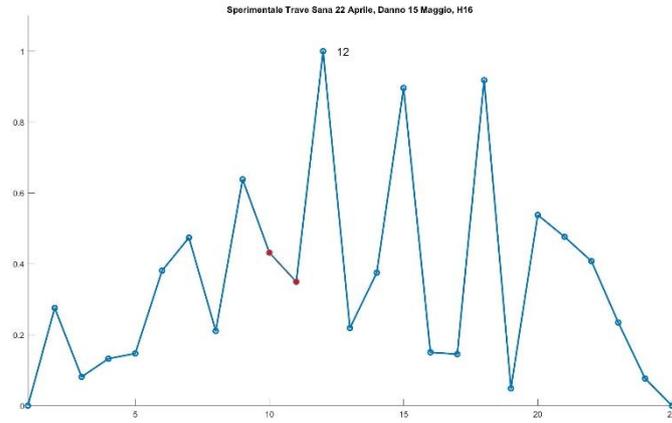


Figura 4.108: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm;

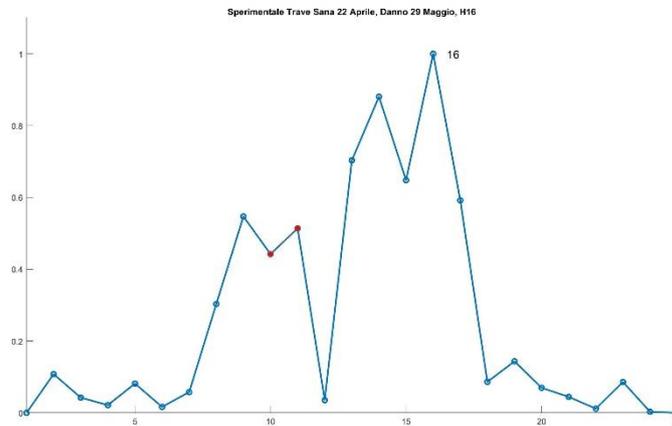


Figura 4.109: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm;

DANNO SPERIMENTALE 3

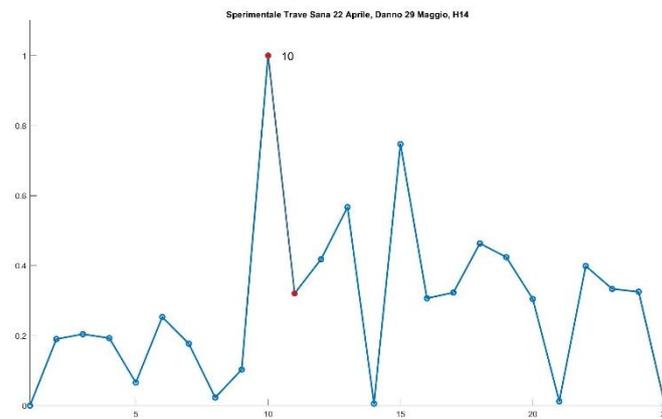


Figura 4.110: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm;

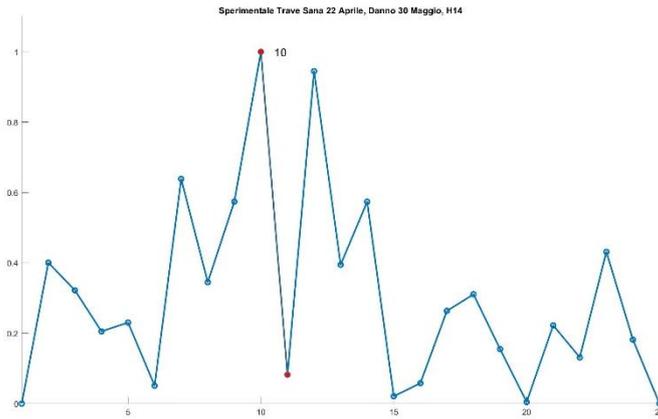


Figura 4.111: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm;

DANNO SPERIMENTALE 4

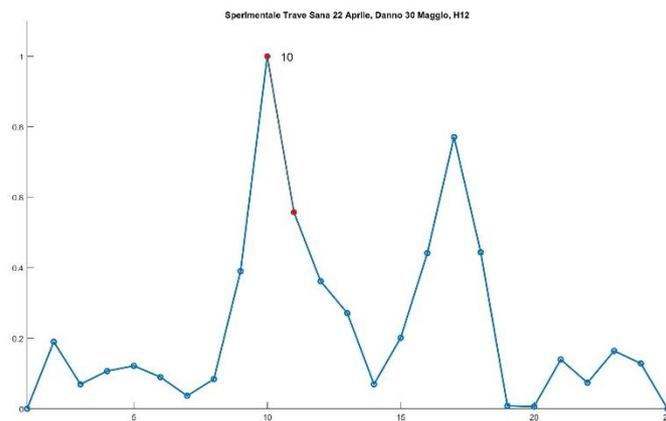


Figura 4.112: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

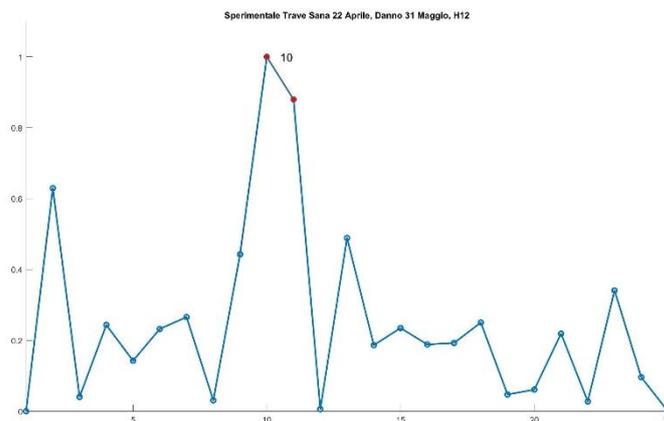


Figura 4.113: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

DANNO SPERIMENTALE 5

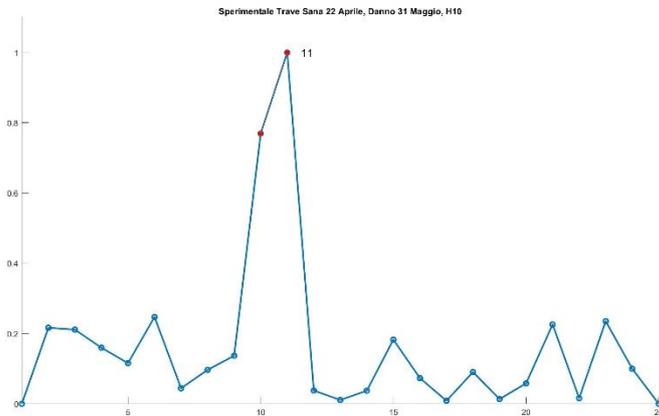


Figura 4.114: Identificazione del danno 5 sperimentale_H1,0 cm;

4.2.4 Identificazione del danno con valori trave sana 15 maggio 2024

Si elaborano, esattamente come nei casi precedenti, delle tabelle in Excel contenenti i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti nella giornata di sperimentazione del 15 maggio 2024 sia di ogni acquisizione fatta per i cinque scenari di danno riprodotti in laboratorio.

Si hanno numerose acquisizioni di trave danneggiata per i vari step di danno; quindi, si preferisce proporre esclusivamente le tabelle con i valori dei parametri dinamici per le combinazioni di trave sana e trave danneggiata con il minimo e massimo livello di danno riprodotto sperimentalmente.

S1505_D1505_H18		Modi di Vibrare Trave Sana H_2cm					Frequenze_Danno1 H_1,8cm		Modi di Vibrare_Danno1 H_1,8cm				
Frequenze TraveSana_H_2cm		shape_und_DY [m]					f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	16.451	1	0.000	0.000	0.000	0.000	f_1	18.056	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	47.121	2	0.036	-0.080	-0.560	-0.347	f_2	49.046	2	0.040	-0.084	-0.632	-0.344
f_3	94.566	3	0.123	-0.263	-1.739	-0.966	f_3	96.616	3	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
f_4	156.618	4	0.238	-0.483	-3.022	-1.411	f_4	157.067	4	0.251	-0.485	-3.336	-1.326
		5	0.382	-0.712	-4.075	-1.497			5	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
		6	0.544	-0.909	-4.430	-1.190			6	0.557	-0.911	-4.883	-1.106
		7	0.700	-1.034	-3.896	-0.561			7	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
		8	0.864	-1.073	-2.635	0.271			8	0.892	-1.078	-2.800	0.280
		9	1.006	-1.008	-1.026	0.997			9	1.002	-1.015	-1.075	0.983
		10	1.117	-0.856	0.725	1.423			10	1.118	-0.886	0.870	1.404
		11	1.224	-0.616	2.182	1.331			11	1.257	-0.630	2.451	1.292
		12	1.268	-0.306	3.156	0.771			12	1.295	-0.320	3.421	0.713
		13	1.290	0.017	3.513	-0.009			13	1.333	0.015	3.782	-0.049
		14	1.272	0.341	3.223	-0.783			14	1.300	0.353	3.440	-0.781
		15	1.215	0.636	2.275	-1.307			15	1.241	0.645	2.406	-1.256
		16	1.126	0.870	0.739	-1.425			16	1.154	0.883	0.753	-1.337
		17	1.014	1.021	-0.946	-1.067			17	1.007	1.035	-1.000	-0.964
		18	0.863	1.084	-2.437	-0.306			18	0.868	1.098	-2.619	-0.257
		19	0.709	1.048	-3.441	0.510			19	0.721	1.064	-3.602	0.526
		20	0.545	0.922	-3.865	1.190			20	0.590	0.939	-4.051	1.139
		21	0.387	0.733	-3.636	1.547			21	0.399	0.739	-3.875	1.460
		22	0.232	0.497	-2.833	1.457			22	0.251	0.506	-3.088	1.368
		23	0.122	0.265	-1.713	0.970			23	0.148	0.266	-1.792	0.914
		24	0.040	0.090	-0.625	0.383			24	0.042	0.091	-0.657	0.349
		25	0.000	0.000	0.000	0.000			25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.29: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana15mag e danno1-15mag;

S1505_D3105_H10		Modi di Vibrare Trave Sana H_2cm					Frequenze_Danno5 H_1,0cm		Modi di Vibrare_Danno5 H_1,0cm				
Frequenze TraveSana_H_2cm		shape_und_DY [m]					f_dam [Hz]		shape_und_DY [m]				
f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	16.451	1	0.000	0.000	0.000	0.000	f_1	16.092	1	0.000	0.000	0.000	0.000
f_2	47.121	2	0.036	-0.080	-0.560	-0.347	f_2	45.569	2	0.035	-0.068	-0.695	-0.292
f_3	94.566	3	0.123	-0.263	-1.739	-0.966	f_3	93.056	3	0.112	-0.211	-2.055	-0.759
f_4	156.618	4	0.238	-0.483	-3.022	-1.411	f_4	152.499	4	0.223	-0.400	-3.676	-1.091
		5	0.382	-0.712	-4.075	-1.497			5	0.360	-0.598	-4.997	-1.413
		6	0.544	-0.909	-4.430	-1.190			6	0.513	-0.779	-5.442	-1.119
		7	0.700	-1.034	-3.896	-0.561			7	0.681	-0.918	-4.722	-0.505
		8	0.864	-1.073	-2.635	0.271			8	0.850	-0.994	-3.118	0.273
		9	1.006	-1.008	-1.026	0.997			9	1.000	-1.007	-1.063	1.028
		10	1.117	-0.856	0.725	1.423			10	1.153	-0.952	1.245	1.792
		11	1.224	-0.616	2.182	1.331			11	1.231	-0.717	2.951	1.420
		12	1.268	-0.306	3.156	0.771			12	1.222	-0.339	3.489	0.595
		13	1.290	0.017	3.513	-0.009			13	1.191	0.041	3.594	-0.499
		14	1.272	0.341	3.223	-0.783			14	1.140	0.394	3.136	-1.131
		15	1.215	0.636	2.275	-1.307			15	1.065	0.691	2.104	-1.484
		16	1.126	0.870	0.739	-1.425			16	0.961	0.928	0.574	-1.528
		17	1.014	1.021	-0.946	-1.067			17	0.845	1.073	-1.060	-0.889
		18	0.863	1.084	-2.437	-0.306			18	0.716	1.122	-2.392	-0.312
		19	0.709	1.048	-3.441	0.510			19	0.580	1.072	-3.331	0.413
		20	0.545	0.922	-3.865	1.190			20	0.445	0.942	-3.642	0.795
		21	0.387	0.733	-3.636	1.547			21	0.309	0.739	-3.460	1.253
		22	0.232	0.497	-2.833	1.457			22	0.194	0.502	-2.866	0.960
		23	0.122	0.265	-1.713	0.970			23	0.095	0.266	-1.595	0.592
		24	0.040	0.090	-0.625	0.383			24	0.031	0.090	-0.567	0.231
		25	0.000	0.000	0.000	0.000			25	0.000	0.000	0.000	0.000

Tabella 4.30: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana15mag e danno5-31mag;

Come descritto nei due casi precedenti, si creano in Matlab dei file rinominati “final_data.mat” e si caricano all’interno dell’algoritmo di identificazione del danno. I file contengono i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti dalla prova del 15 maggio 2024 sia di ogni acquisizione effettuata per la trave danneggiata.

L’algoritmo restituisce il plot delle forme modali sperimentali della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la differenza assoluta tra le curvature valutando così la posizione esatta del danno.

Per sintesi di trattazione si propongono di seguito esclusivamente le figure rappresentative dell'identificazione del danno ottenute dall'avvio dell'algoritmo considerando tutte le acquisizioni effettuate sperimentalmente ad ogni step di danno riprodotto in laboratorio. In questo caso si tiene sempre conto dei parametri dinamici di trave sana estrapolati dalla prova del 15 maggio 2024.

DANNO SPERIMENTALE 1

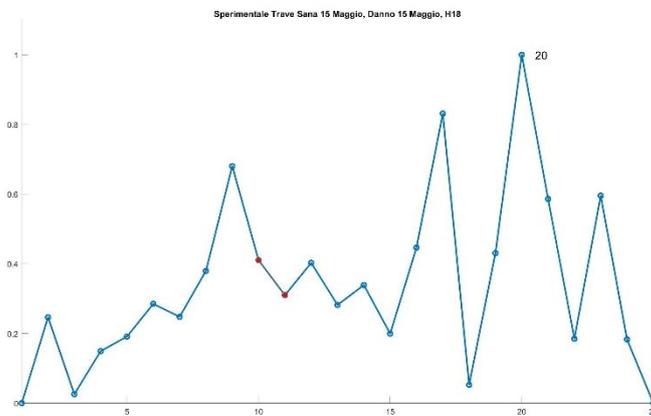


Figura 4.115: Identificazione del danno 1 sperimentale_H1,8 cm;

DANNO SPERIMENTALE 2

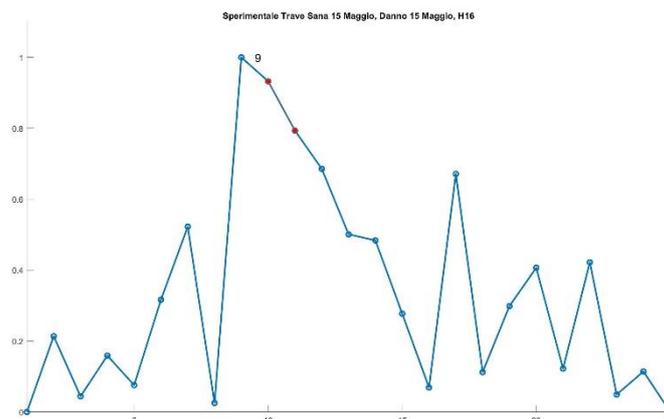


Figura 4.116: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm;

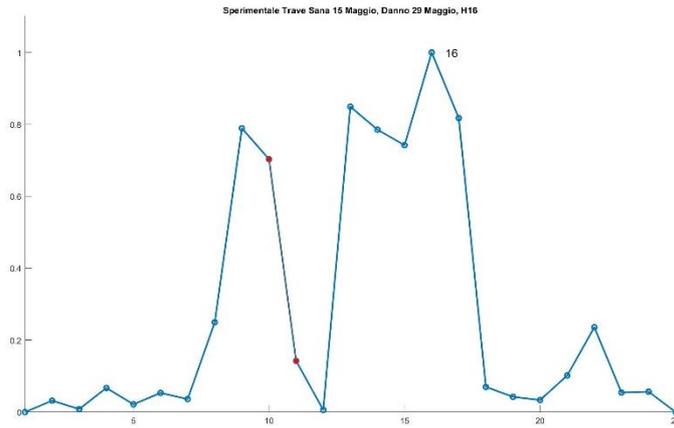


Figura 4.117: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm;

DANNO SPERIMENTALE 3

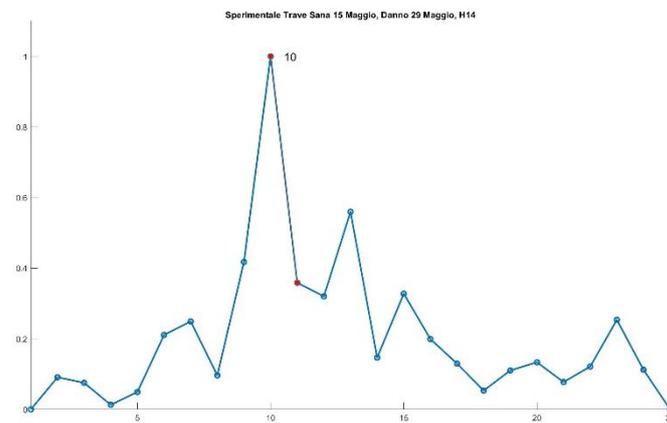


Figura 4.118: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm;

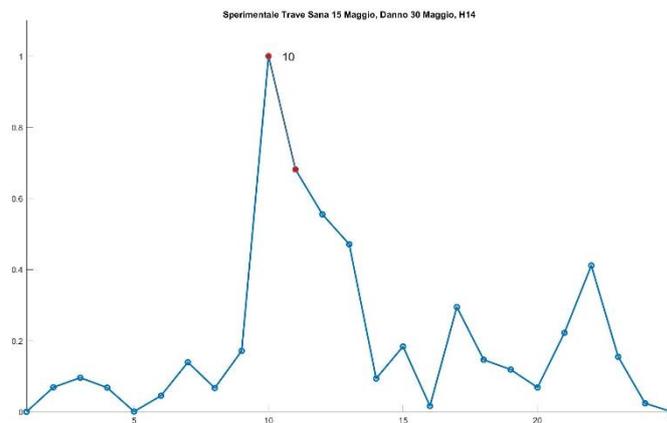


Figura 4.119: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm;

DANNO SPERIMENTALE 4

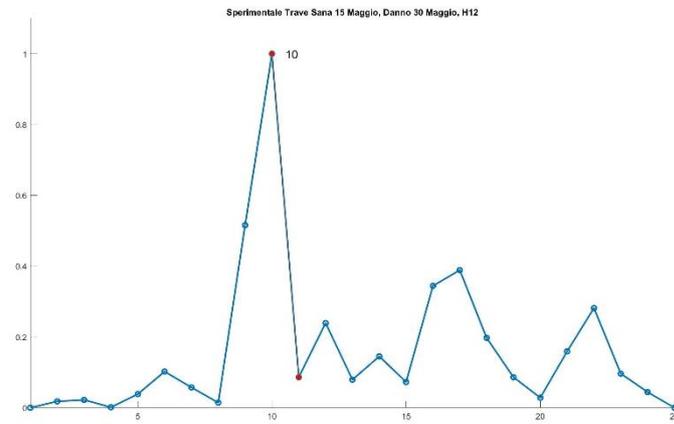


Figura 4.120: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

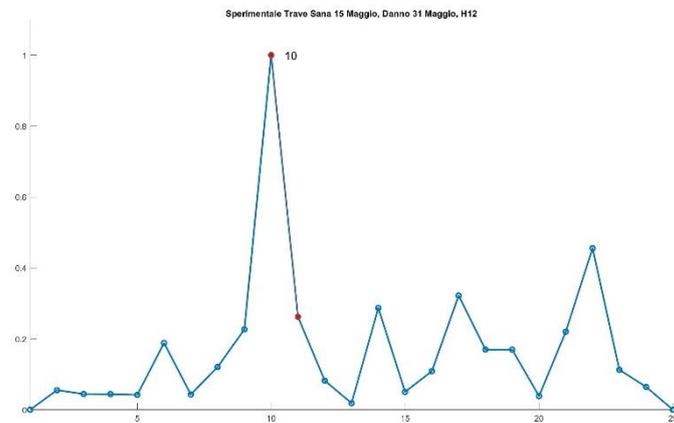


Figura 4.121: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm;

DANNO SPERIMENTALE 5

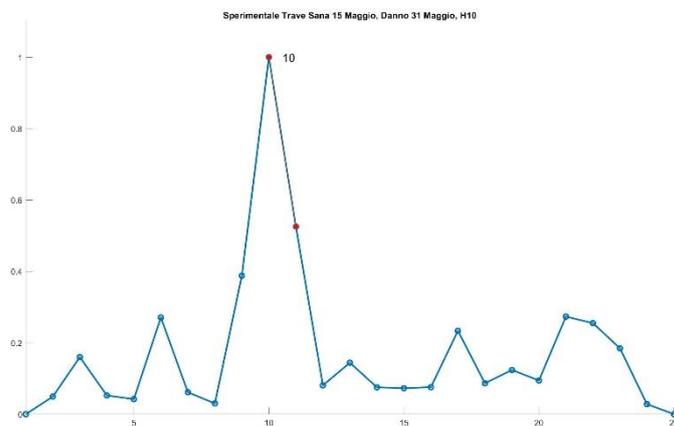


Figura 4.122: Identificazione del danno 5 sperimentale_H1,0 cm;

È possibile facilmente rilevare dalle figure sovrastanti che per tutte le combinazioni di trave sana con ogni acquisizione per i cinque scenari di danno sulla trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi e discretizzata con 24 elementi finiti, l'algoritmo non identifica correttamente la posizione dell'elemento danneggiato per il primo ed il secondo step di danno ossia quando l'altezza della sezione dell'elemento 10 si riduce rispettivamente di 2 mm con altezza residua $H = 1,8 \text{ cm}$ e 4mm, con un altezza residua pari a $H = 1,6 \text{ cm}$.

Dunque, l'algoritmo per una trave discretizzata con 24 elementi e 25 nodi campionati sperimentalmente non identifica la presenza di un difetto minimo localizzato.

Mentre all'aumentare progressivo del danno sull'altezza dell'elemento, l'algoritmo individua correttamente la porzione danneggiata, ossia quella compresa tra il nodo 10 ed il nodo 11 corrispondente esattamente all'elemento 10.

4.3 PARAMETRO GLOBALE DANNO E FREQUENZE SPERIMENTALI

Al fine di graficare l'andamento delle frequenze sperimentali all'aumentare progressivo del danno sull'elemento 10, si propone lo studio di un parametro percentuale globale che identifichi il livello di danno sull'intera trave.

Si fa riferimento al modello FEM di trave in alluminio doppiamente incastrata all'estremo e discretizzata con 24 elementi finiti e si vuole calcolare il valore percentuale della variazione della freccia in mezzeria, ossia il valore di spostamento in direzione y nel nodo 14 posto esattamente ad $L/2$.

Per valutare lo spostamento in mezzeria sia della trave sana che dei 5 step di danno, si considera la struttura soggetta al solo peso proprio e si avvia un'Analisi Statica Lineare sul software Straus7. È immediato computare il calcolo del peso proprio sul software agli elementi finiti Straus7 in quanto è semplicemente necessario fornire, alle masse strutturali, il valore dell'accelerazione di gravità pari a $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ in direzione y attraverso i comandi:

Global -> Load and Freedom Cases -> Primary Load Cases -> Gravitational Acceleration.

Si esegue un'Analisi Statica Lineare e si estrapolano i valori dello spostamento in mezzeria della trave in alluminio doppiamente incastrata e soggetta al solo peso proprio. I risultati ottenuti per il modello di trave sana e per i modelli di trave danneggiata si riportano di seguito.

TraveAlluminio_con PESO PROPRIO_discretizzata con 24 ELEMENTI						
DANNO ELEMENTO 10-BEAM 11-12 (B_2cm e H_variabile)						
	H_2cm	H_1,8cm	H_1,6cm	H_1,4cm	H_1,2cm	H_1,0cm
Freccia_Nodo14	-0.000996	-0.001003	-0.001018	-0.001042	-0.001079	-0.001131

Tabella 4.31: Spostamento in mezzeria della trave sana e danneggiata soggetta al peso proprio;

Per determinare il parametro percentuale globale di identificazione del danno sull'intera trave oggetto di studio si determina la percentuale di riduzione della freccia in mezzeria all'aumentare progressivo del danno, attraverso la formula:

$$\%freccia = \frac{f_d - f_s}{f_s} \cdot 100$$

Dove:

- f_d : è il valore dello spostamento in mezzeria al nodo 14 per la trave danneggiata, ossia allo step di danno che si vuole considerare;
- f_s : è il valore dello spostamento in mezzeria al nodo 14 per la trave sana.

Si applica la formula in Excel e si ottiene per i cinque step di danno il valore percentuale della variazione dello spostamento in mezzeria.

Si riporta una tabella riassuntiva.

PARAMETRO GLOBALE IDENTIFICAZIONE DANNO		
PARAMETRO STATICO: %FRECCIA IN MEZZERIA		
PARAMETRO GLOBALE DANNO		
%SPOSTAMENTO IN MEZZERIA		
TRAVE SANA	0.00	[%]
DANNO 1	0.78	
DANNO 2	2.22	
DANNO 3	4.63	
DANNO 4	8.38	
DANNO 5	13.57	

Tabella 4.32: Valore percentuale spostamento in mezzeria all'aumentare del danno;

Prima di procedere nella realizzazione dei grafici esplicativi sull'andamento delle frequenze sperimentali all'aumentare percentuale del danno, si riassumono di seguito i valori delle frequenze ottenute con la tecnica del Roving Sensor nelle varie giornate di prova.

TRAVE IN ALLUMINIO DOPPIAMENTE INCASTRATA REALE													
DANNO SU ELEMENTO 10- BEAM 11-12 (B_2cm e H_variabile)													
VALORI FREQUENZE SPERIMENTALI [Hz]													
Data Prove	18-apr	22-apr	15-mag	15-mag	15-mag	29-mag	29-mag	30-mag	30-mag	31-mag	StesseCond	Rimontata	31-mag
Valori Frequenze	TraveSana			Danno1	Danno2		Danno3		Danno4				Danno5
f_1	17.56	18.61	16.45	18.06	17.87	16.94	17.37	17.23	17.09	17.90	17.79	17.56	16.09
f_2	48.57	50.03	47.12	49.05	48.47	47.28	47.67	47.49	46.91	48.09	48.02	47.71	45.57
f_3	96.11	97.79	94.57	96.62	96.03	94.65	95.19	95.05	94.48	95.71	95.61	95.43	93.06
f_4	158.31	160.07	156.62	157.07	154.30	153.13	151.85	151.68	149.91	149.95	149.92	149.90	152.50

Tabella 4.33: Valori frequenze sperimentali diversi giorni di prova e a diversi step di danno;

Si hanno numerose acquisizioni, dunque allo scopo di facilitare la lettura dei dati si effettua la media sulle frequenze ottenute dalle diverse misurazioni per ogni step di danno. Si ha:

TRAVE REALE IN ALLUMINIO DOPPIAMENTE INCASTRATA						
RIPRODUZIONE DANNO ELEMENTO 10 - BEAM 11-12 (B_2cm e H_variabile)						
MEDIA VALORI FREQUENZE SPERIMENTALI [Hz]						
	TraveSana	Danno1	Danno2	Danno3	Danno4	Danno5
	H_2cm	H_1,8cm	H_1,6cm	H_1,4cm	H_1,2cm	H_1,0cm
f_1	17.54	18.06	17.41	17.30	17.58	16.09
f_2	48.57	49.05	47.88	47.58	47.68	45.57
f_3	96.15	96.62	95.34	95.12	95.31	93.06
f_4	158.33	157.07	153.71	151.77	149.92	152.50

Tabella 4.34: Valori medi frequenze sperimentali;

È possibile ora costruire i grafici di dispersione che ricostruiscono l'andamento della variazione della frequenza con l'aumentare progressivo del danno. Per uno studio dettagliato e per osservare la tendenza della variazione delle frequenze all'aumentare del danno, si elabora in Excel, per ogni grafico, la retta di interpolazione dei dati si identifica la sua equazione in modo tale da osservare il valore del coefficiente angolare.

Si riporta sull'asse delle ascisse il valore percentuale della variazione dello spostamento in mezzeria ossia il parametro globale che identifica l'aumento del danno e in ordinata il valore in Hz della frequenza che si vuole considerare.

Si realizzano separatamente quattro grafici, uno per ogni frequenza.

Grafico %freccia_f1	%freccia	f_1
TRAVE SANA	0	17.54
DANNO 1	0.8	18.06
DANNO 2	2.2	17.41
DANNO 3	4.6	17.30
DANNO 4	8.4	17.58
DANNO 5	13.6	16.09

Tabella 4.35: Valori %freccia-frequenza1;

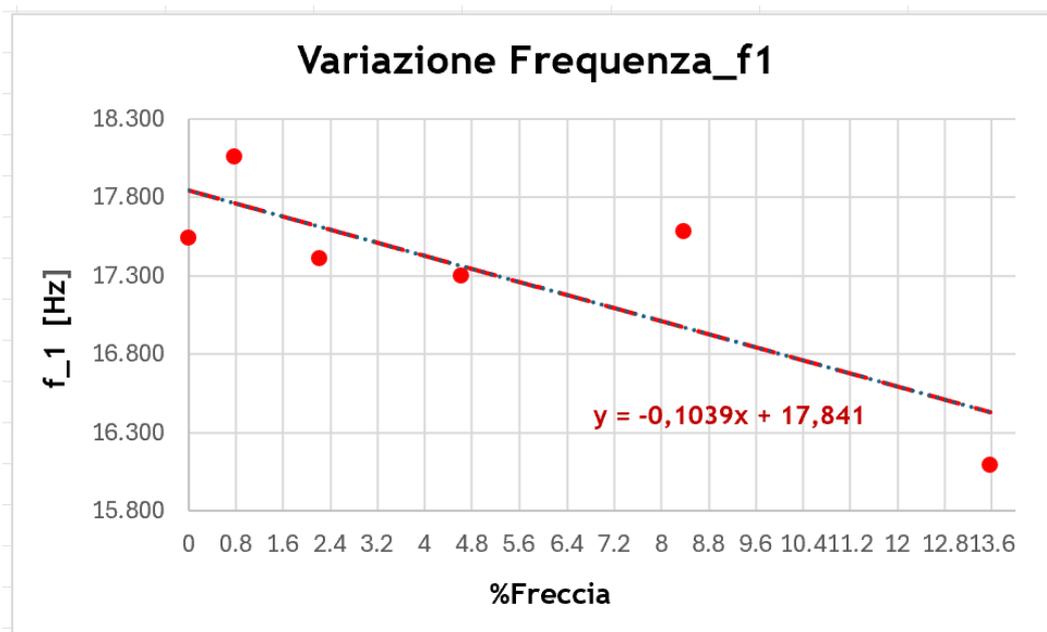


Figura 4.123: Grafico dispersione e retta interpolante: %freccia-frequenza1;

Grafico %freccia_f2	%freccia	f_2
TRAVE SANA	0	48.57
DANNO 1	0.8	49.05
DANNO 2	2.2	47.88
DANNO 3	4.6	47.58
DANNO 4	8.4	47.68
DANNO 5	13.6	45.57

Tabella 4.36: Valori %freccia-frequenza2;

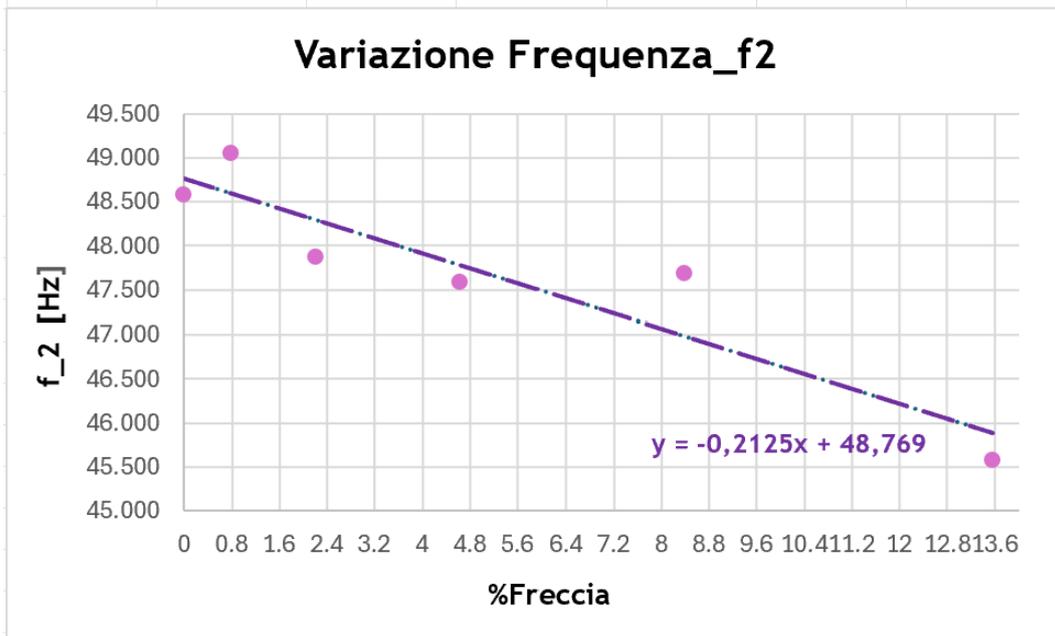


Figura 4.124: Grafico dispersione e retta interpolante: %freccia-frequenza2;

Grafico %freccia_f3	%freccia	f_3
TRAVE SANA	0	96.15
DANNO 1	0.8	96.62
DANNO 2	2.2	95.34
DANNO 3	4.6	95.12
DANNO 4	8.4	95.31
DANNO 5	13.6	93.06

Tabella 4.37: Valori %freccia-frequenza3;

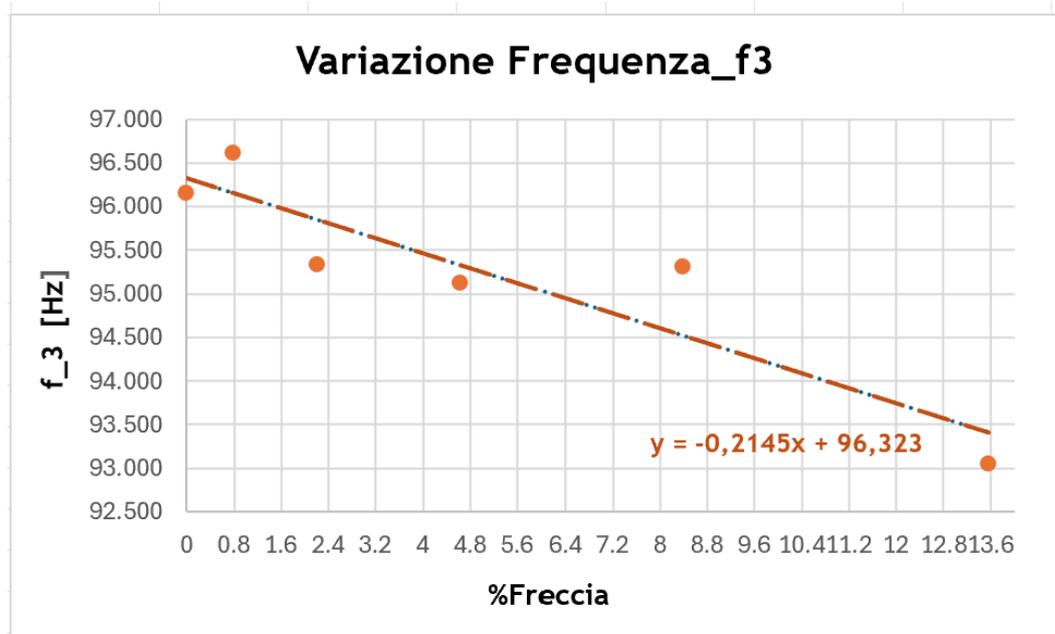


Figura 4.125: Grafico dispersione e retta interpolante: %freccia-frequenza3;

Grafico %freccia_f4	%freccia	f_4
TRAVE SANA	0	158.33
DANNO 1	0.8	157.07
DANNO 2	2.2	153.71
DANNO 3	4.6	151.77
DANNO 4	8.4	149.92
DANNO 5	13.6	152.50

Tabella 4.38: Valori %freccia-frequenza4;

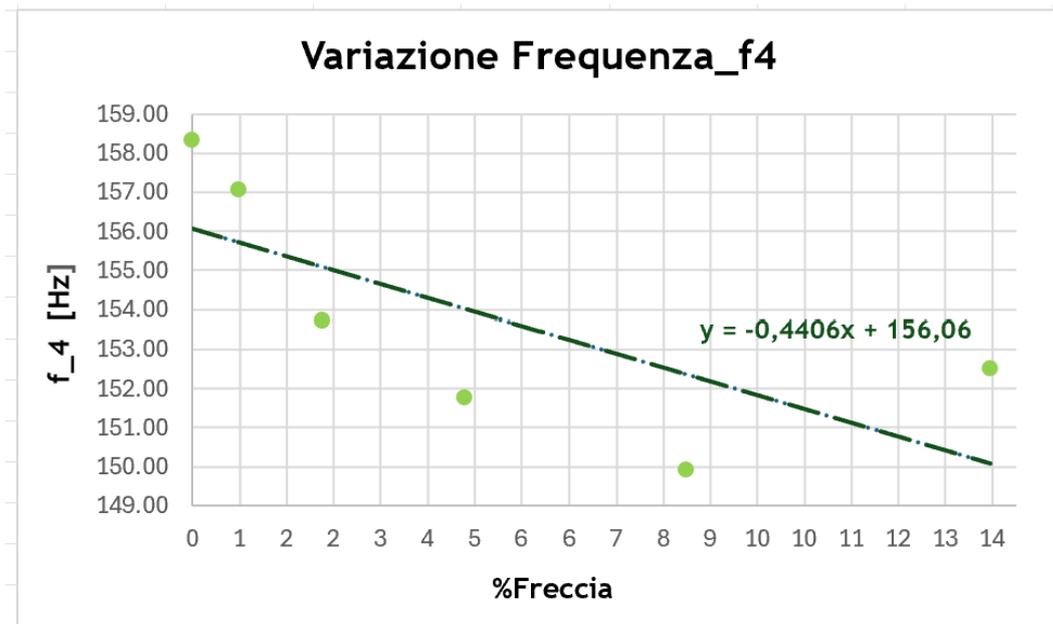


Figura 4.126: Grafico dispersione e retta interpolante: %freccia-frequenza4;

È evidente dall'andamento dei quattro grafici che le frequenze ottenute sperimentalmente, diminuiscono all'aumentare progressivo del danno.

La tendenza della retta interpolante è pressoché identica per le quattro frequenze, in particolare la retta d'interpolazione dei dati presenta un coefficiente angolare crescente all'aumentare della frequenza, questo è sinonimo che le alte frequenze sono più sensibili all'aumentare del danno.

Tale aspetto si evince anche dal fatto che nel passare dall'elemento 10 non danneggiato all'elemento 10 con il massimo danno, la differenza sulla prima e sulla quarta frequenza determinate sperimentalmente è pari rispettivamente a: $\Delta f_1 = 1,4 \text{ Hz}$ e $\Delta f_4 = 5,8 \text{ Hz}$. A livello percentuale però, si ha una variazione del 9% sulla prima frequenza e del 3,8% sulla quarta frequenza.

4.4 TRATTAZIONE SPERIMENTALE TRAVE 12 ELEMENTI FINITI

Si propone la medesima trattazione per la trave discretizzata con 12 elementi finiti. Si utilizzano i valori delle frequenze e dei modi di vibrare determinati sperimentalmente con la tecnica del Roving Sensor sia per la trave sana che per la trave con ogni step di danno riprodotto in laboratorio. Per la trave discretizzata con 12 elementi finiti si danneggia l'elemento 5, corrispondente ai nodi 6-7.

Si sceglie di ripetere esattamente lo studio dei paragrafi precedenti ma di diminuire il raffittimento della mesh al fine di effettuare un confronto con i risultati ottenuti con la trave discretizzata con 24 elementi finiti e soprattutto di verificare il livello di danno riconosciuto dall'algoritmo di identificazione del danno.

4.4.1 Prove dinamiche su trave sana 12 Elementi Finiti

Si riportano di seguito in tabella i valori delle frequenze e dei modi di vibrare per la trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi discretizzata con 12 elementi finiti. Si propongono per le tre misurazioni effettuate l'andamento grafico dei 4 modi di vibrare, elaborato in Excel.

MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.562	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968
f_2	48.566	4	0.395	-0.719	-4.046	-1.510
f_3	96.105	5	0.716	-1.037	-3.839	-0.570
f_4	158.309	6	1.014	-1.006	-0.976	1.019
		7	1.236	-0.614	2.162	1.335
		8	1.308	0.013	3.480	-0.008
		9	1.236	0.630	2.238	-1.321
		10	1.019	1.018	-0.952	-1.061
		11	0.714	1.042	-3.327	0.534
		12	0.396	0.733	-3.593	1.550
		13	0.126	0.269	-1.708	0.978

Tabella 4.39: Valori media frequenze e modi di vibrare trave sana 18 Aprile, RS, 12 Elementi Finiti.

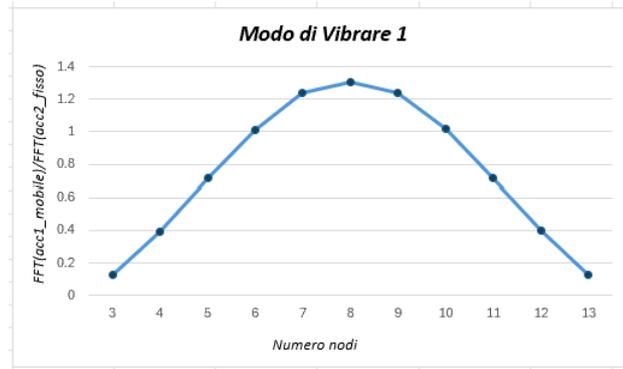


Figura 4.127: Modo di vibrare 1, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

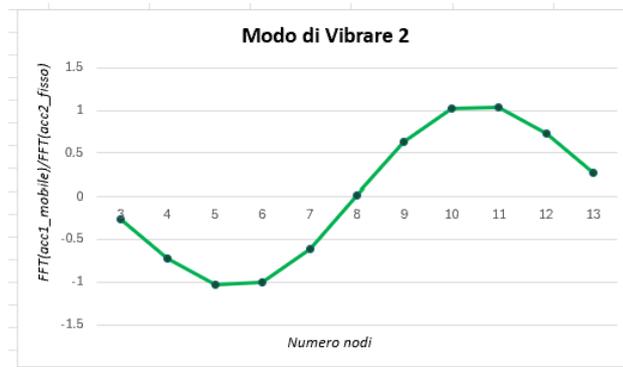


Figura 4.128: Modo di vibrare 2, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

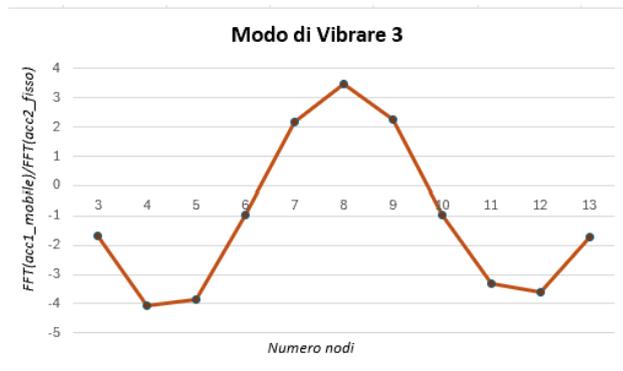


Figura 4.129: Modo di vibrare 3, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

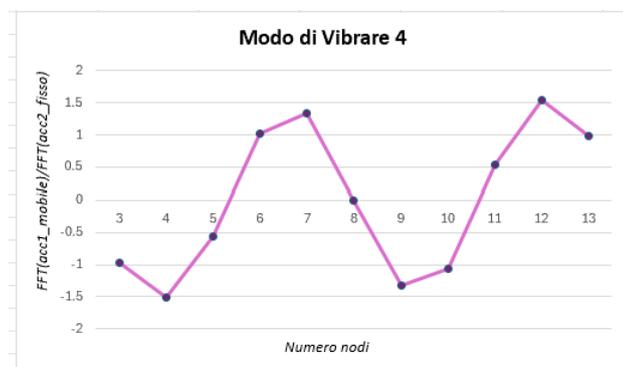


Figura 4.130: Modo di vibrare 4, prova 18 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

TRAVE SANA				
22 Aprile 2024				
MEDIA VALORI FREQUENZE				
FREQUENZE				
f_1	18.613			
f_2	50.031			
f_3	97.789			
f_4	160.069			
MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
3	0.126	-0.264	-1.762	-0.962
4	0.395	-0.720	-4.205	-1.492
5	0.720	-1.040	-3.967	-0.551
6	1.016	-1.012	-0.993	1.018
7	1.230	-0.618	2.223	1.330
8	1.303	0.011	3.608	-0.010
9	1.232	0.628	2.317	-1.309
10	1.029	1.015	-0.945	-1.058
11	0.726	1.050	-3.410	0.507
12	0.401	0.734	-3.706	1.530
13	0.129	0.272	-1.779	0.971

Tabella 4.40: Valori media frequenze e modi di vibrare trave sana 22 Aprile, RS, 12 Elementi Finiti.

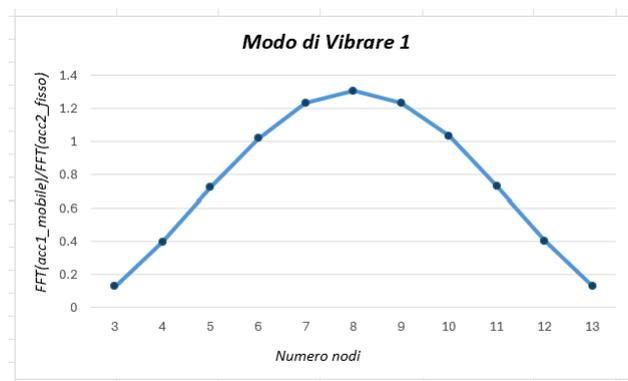


Figura 4.131: Modo di vibrare 1, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

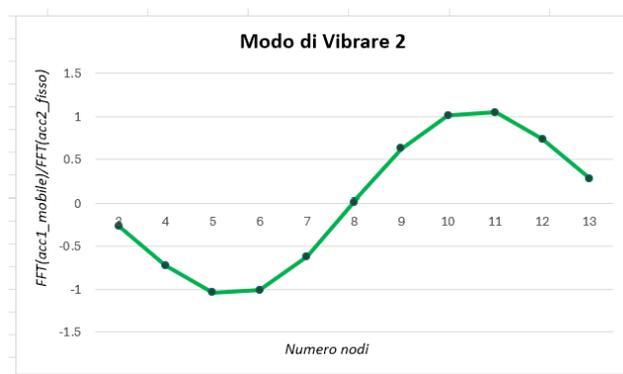


Figura 4.132: Modo di vibrare 2, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

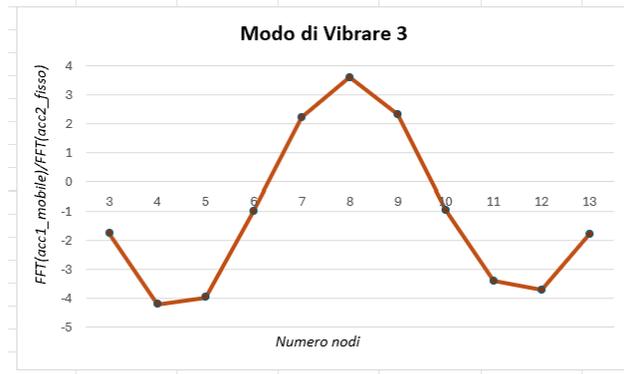


Figura 4.133: Modo di vibrare 3, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

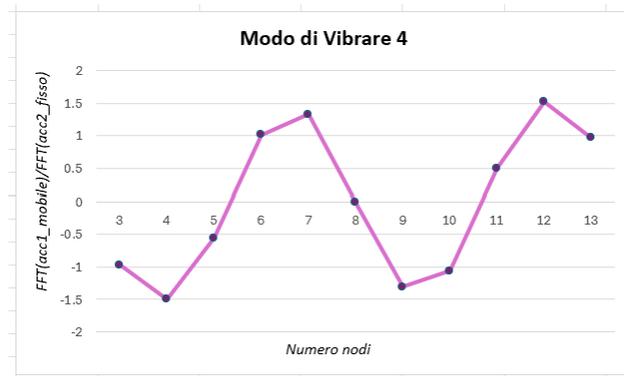


Figura 4.134: Modo di vibrare 4, prova 22 Aprile 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

TRAVE SANA						
15_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MODO_1	MODO_2	MODO_3	MODO4
f_1	16.451	3	0.123	-0.263	-1.739	-0.966
f_2	47.121	4	0.382	-0.712	-4.075	-1.497
f_3	94.566	5	0.700	-1.034	-3.896	-0.561
f_4	156.618	6	1.006	-1.008	-1.026	0.997
		7	1.224	-0.616	2.182	1.331
		8	1.290	0.017	3.513	-0.009
		9	1.215	0.636	2.275	-1.307
		10	1.014	1.021	-0.946	-1.067
		11	0.709	1.048	-3.441	0.510
		12	0.387	0.733	-3.636	1.547
		13	0.122	0.265	-1.713	0.970

Tabella 4.41: Valori media frequenze e modi di vibrare trave sana 15 Maggio, RS, 12 Elementi Finiti;

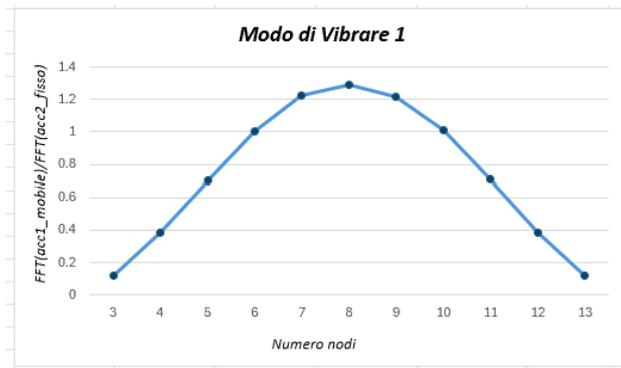


Figura 4.135: Modo di vibrare 1, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

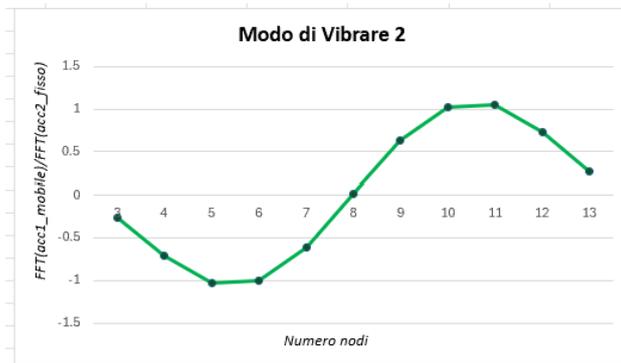


Figura 4.136: Modo di vibrare 2, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

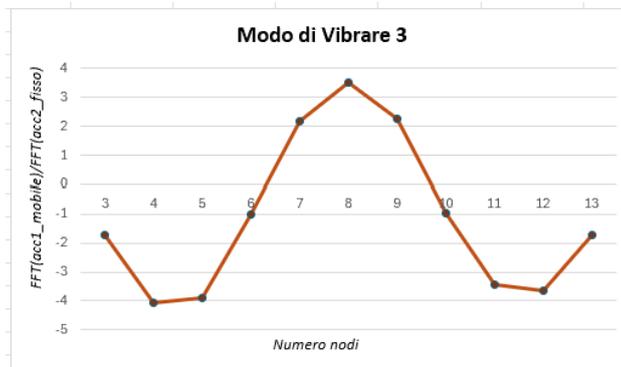


Figura 4.137: Modo di vibrare 3, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;



Figura 4.138: Modo di vibrare 4, prova 15 Maggio 2024 con tecnica Roving Sensor, 12 Elementi Finiti;

4.4.2 Prove dinamiche su trave danneggiata 12 Elementi Finiti

Per la trave discretizzata con 12 elementi finiti si danneggia l'elemento 5, corrispondente ai nodi 6-7. Si ricrea il danno modellando un cambio di sezione sull'elemento interessato.

Si danneggia in maniera localizzata e progressiva. Il danno si esegue quindi sempre sullo stesso elemento, l'elemento 5, il quale presenta una lunghezza fissa di 10 cm ed un'altezza variabile in base allo step di danno considerato.

Si modellano 5 differenti livelli di danno, partendo da un danneggiamento minimo corrispondente al 10 % dell'altezza iniziale dell'elemento 5 fino ad un danno massimo pari al 50% della geometria di partenza, ovvero si passa dalla condizione di trave sana con l'altezza dell'elemento 5 pari a $H = 2 \text{ cm}$ fino al danneggiamento massimo $H = 1 \text{ cm}$;

Si riportano di seguito in tabella i valori delle frequenze e dei modi di vibrare estrapolati per ogni step di danno sulla trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi discretizzata con 12 elementi finiti.

Si propone l'andamento grafico dei 4 modi di vibrare, elaborato in Excel solo per il primo step di danno, ossia con un'altezza residua dell'elemento 5 danneggiato pari a $H = 1,8 \text{ cm}$.

DANNO 1_2mm_H1,8cm						
15_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	18.056	3	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
f_2	49.046	4	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
f_3	96.616	5	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
f_4	157.067	6	1.002	-1.015	-1.075	0.983
		7	1.257	-0.630	2.451	1.292
		8	1.333	0.015	3.782	-0.049
		9	1.241	0.645	2.406	-1.256
		10	1.007	1.035	-1.000	-0.964
		11	0.721	1.064	-3.602	0.526
		12	0.399	0.739	-3.875	1.460
		13	0.148	0.266	-1.792	0.914

Tabella 4.42: Valori media frequenze e modi di vibrare, Primo Step di Danno, 15Mag, 12 EF;

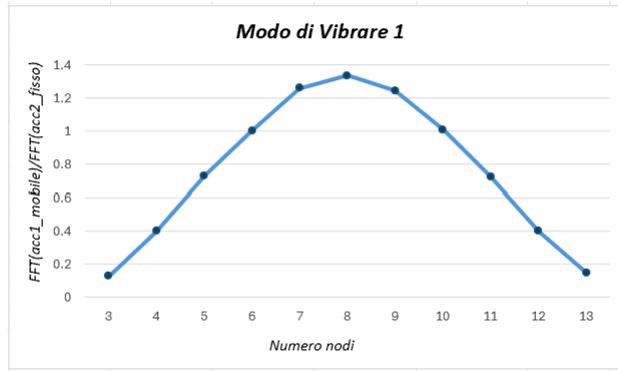


Figura 4.139: Modo di vibrare 1, trave danno 1, 15 Maggio 2024, 12 Elementi Finiti;

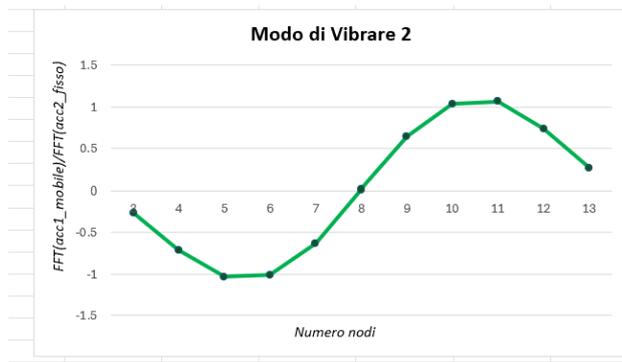


Figura 4.140: Modo di vibrare 2, trave danno 1, 15 Maggio 2024, 12 Elementi Finiti;

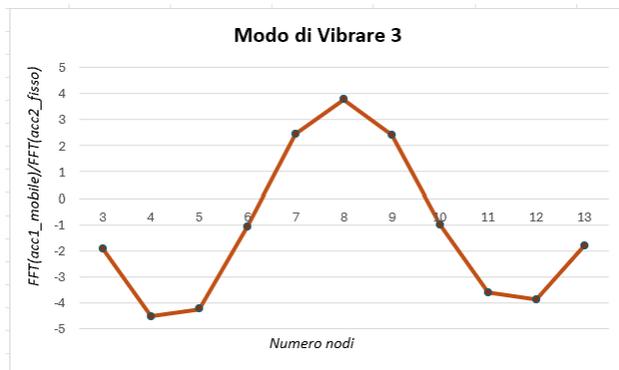


Figura 4.141: Modo di vibrare 3, trave danno 1, 15 Maggio 2024, 12 Elementi Finiti;

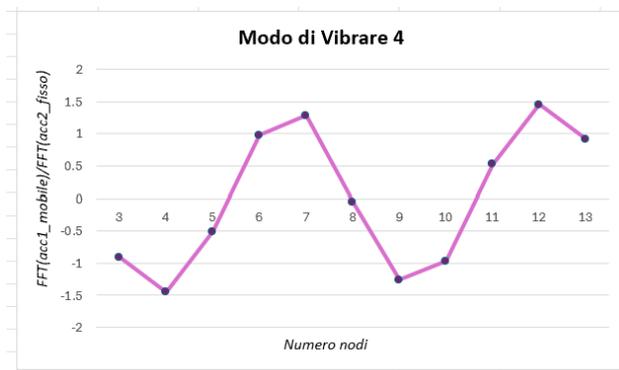


Figura 4.142: Modo di vibrare 4, trave danno1, 15 Maggio 2024, 12 Elementi Finiti;

DANNO 2_4mm_H1,6cm							
15_Maggio_2024							
MEDIA VALORI FREQUENZE			MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE			Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.870		3	0.123	-0.252	-1.821	-0.902
f_2	48.474		4	0.383	-0.696	-4.345	-1.409
f_3	96.027		5	0.711	-1.011	-4.172	-0.549
f_4	154.300		6	0.994	-0.998	-1.013	0.992
			7	1.223	-0.655	2.337	1.390
			8	1.277	0.009	3.584	-0.072
			9	1.202	0.626	2.293	-1.280
			10	0.976	1.013	-0.933	-0.977
			11	0.691	1.042	-3.432	0.546
			12	0.399	0.748	-3.661	1.486
			13	0.126	0.284	-1.783	0.957

Tabella 4.43: Valori media frequenze e modi di vibrare, Secondo Step di Danno, 15Mag, 12 EF;

DANNO 2_4mm_H1,6cm							
29_Maggio_2024							
MEDIA VALORI FREQUENZE			MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE			Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	16.941		3	0.126	-0.251	-1.975	-0.906
f_2	47.279		4	0.391	-0.678	-4.607	-1.399
f_3	94.652		5	0.721	-0.992	-4.341	-0.525
f_4	153.127		6	1.009	-1.005	-1.071	0.988
			7	1.268	-0.632	2.532	1.358
			8	1.260	0.023	3.748	-0.109
			9	1.196	0.631	2.352	-1.286
			10	0.965	1.026	-1.017	-0.943
			11	0.683	1.028	-3.540	0.555
			12	0.370	0.713	-3.794	1.492
			13	0.118	0.263	-1.772	0.912

Tabella 4.44: Valori media frequenze e modi di vibrare, Secondo Step di Danno, 29Mag, 12 EF;

DANNO 3_6mm_H1,4cm							
29_Maggio_2024							
MEDIA VALORI FREQUENZE			MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE			Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.365		3	0.120	-0.240	-2.023	-0.869
f_2	47.666		4	0.380	-0.665	-4.856	-1.373
f_3	95.194		5	0.707	-0.983	-4.570	-0.522
f_4	151.854		6	1.007	-1.008	-1.047	0.995
			7	1.212	-0.659	2.685	1.418
			8	1.225	0.021	3.840	-0.142
			9	1.158	0.652	2.334	-1.307
			10	0.944	1.024	-1.040	-0.903
			11	0.660	1.043	-3.551	0.606
			12	0.358	0.720	-3.754	1.492
			13	0.124	0.265	-1.791	0.900

Tabella 4.45: Valori media frequenze e modi di vibrare, Terzo Step di Danno, 29Mag, 12 EF;

DANNO 3.6mm_H1,4cm						
30_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.231	3	0.121	-0.244	-2.057	-0.880
f_2	47.494	4	0.381	-0.667	-4.823	-1.379
f_3	95.045	5	0.696	-0.983	-4.557	-0.538
f_4	151.684	6	1.012	-1.010	-1.029	1.004
		7	1.203	-0.663	2.688	1.428
		8	1.235	0.023	3.793	-0.150
		9	1.143	0.644	2.338	-1.310
		10	0.939	1.025	-1.034	-0.902
		11	0.655	1.040	-3.635	0.620
		12	0.355	0.723	-3.733	1.503
		13	0.110	0.261	-1.758	0.893

Tabella 4.46: Valori media frequenze e modi di vibrare, Terzo Step di Danno, 30Mag, 12 EF;

DANNO 4.8mm_H1,2cm						
30_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.086	3	0.119	-0.228	-2.154	-0.821
f_2	46.912	4	0.366	-0.630	-5.096	-1.280
f_3	94.477	5	0.683	-0.946	-4.804	-0.515
f_4	149.906	6	0.984	-0.995	-1.023	0.992
		7	1.208	-0.695	2.883	1.415
		8	1.203	0.023	3.828	-0.250
		9	1.096	0.656	2.306	-1.342
		10	0.910	1.042	-1.054	-0.868
		11	0.612	1.054	-3.568	0.525
		12	0.333	0.727	-3.750	1.203
		13	0.105	0.267	-1.749	0.772

Tabella 4.47: Valori media frequenze e modi di vibrare, Quarto Step di Danno, 30Mag, 12 EF;

DANNO 4.8mm_H1,2cm						
31_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	17.902	3	0.120	-0.226	-2.181	-0.822
f_2	48.089	4	0.372	-0.637	-5.191	-1.303
f_3	95.712	5	0.685	-0.951	-4.856	-0.540
f_4	149.950	6	0.995	-0.997	-1.022	0.988
		7	1.195	-0.685	2.941	1.433
		8	1.215	0.017	3.872	-0.202
		9	1.107	0.654	2.363	-1.315
		10	0.901	1.037	-1.134	-0.832
		11	0.624	1.051	-3.636	0.651
		12	0.338	0.727	-3.733	1.352
		13	0.106	0.267	-1.809	0.860

Tabella 4.48: Valori media frequenze e modi di vibrare, Quarto Step di Danno, 31Mag, 12 EF;

DANNO 5_10mm_H1,0cm						
31_Maggio_2024						
MEDIA VALORI FREQUENZE		MEDIA VALORI MODI DI VIBRARE				
FREQUENZE		Nodo	MOD0_1	MOD0_2	MOD0_3	MOD04
f_1	16.092	3	0.112	-0.211	-2.055	-0.759
f_2	45.569	4	0.360	-0.598	-4.997	-1.413
f_3	93.056	5	0.681	-0.918	-4.722	-0.505
f_4	152.499	6	1.000	-1.007	-1.063	1.028
		7	1.231	-0.717	2.951	1.420
		8	1.191	0.041	3.594	-0.499
		9	1.065	0.691	2.104	-1.484
		10	0.845	1.073	-1.060	-0.889
		11	0.580	1.072	-3.331	0.413
		12	0.309	0.739	-3.460	1.253
		13	0.095	0.266	-1.595	0.592

Tabella 4.49: Valori media frequenze e modi di vibrare, Quinto Step di Danno, 29Mag, 12 EF;

4.4.3 Identificazione del danno trave 12 Elementi Finiti

Si vuole verificare che l'algoritmo, anche con i valori di forme modali e frequenze sperimentali per una trave discretizzata con 12 elementi finiti, riesca a identificare per ogni passo di danno la posizione esatta dell'elemento danneggiato.

Nel caso in esame si è danneggiato l'elemento 5 della trave, ossia l'elemento di nodi 6-7 in Straus7. Tale numerazione nel software è dovuta al fatto che gli incastri sono posizionati alle estremità di nodi rispettivamente 1 e 2. L'elemento 5 danneggiato, si identifica invece in Matlab con i nodi 5-6 in quanto le estremità fornite in input, hanno numerazione 1 e 13.

Per eseguire lo studio, si hanno tre misurazioni di trave sana rilevate in tre differenti giornate di prova e otto estrapolazioni corrispondenti ai cinque step di danno realizzati in laboratorio.

Dunque, si riportano separatamente i risultati ottenuti dall'algoritmo caricando prima i dati di trave sana del 18 Aprile 2024 con tutte le misurazioni di trave danneggiata poi si esegue lo stesso procedimento inserendo i dati di trave sana del 22 Aprile 2024 e poi i valori di trave sana del 15 Maggio 2024

Ci si aspetta che l’algoritmo identifichi per ogni step la posizione esatta del danno, localizzato nell’elemento 5 corrispondente in Matlab ai nodi 5-6.

4.4.4 Identificazione del danno con valori trave sana 18 aprile 2024

Si procede elaborando delle tabelle in Excel contenenti i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti nella giornata di sperimentazione del 18 aprile 2024 sia di ogni acquisizione fatta per i cinque scenari di danno riprodotti in laboratorio.

Si propongono esclusivamente le tabelle per le combinazioni di trave sana e trave danneggiata al primo e secondo step di danno.

S1804_D1505_H18		Modi di Vibrare_Trave Sana_H_2cm					Frequenze_Danno1		Modi di Vibrare_Danno1_H_1,8cm				
TraveSana_H_2cm		shape_und_DY [m]					H_1,8cm		shape_und_DY [m]				
f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_dam [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17.562	1	0	0	0	0	f_1	18.056	1	0	0	0	0
f_2	48.566	2	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	f_2	49.046	2	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
f_3	96.105	3	0.395	-0.719	-4.046	-1.510	f_3	96.616	3	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
f_4	158.309	4	0.716	-1.037	-3.839	-0.570	f_4	157.067	4	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
		5	1.014	-1.006	-0.976	1.019			5	1.002	-1.015	-1.075	0.983
		6	1.236	-0.614	2.162	1.335			6	1.257	-0.630	2.451	1.292
		7	1.308	0.013	3.480	-0.008			7	1.333	0.015	3.782	-0.049
		8	1.236	0.630	2.238	-1.321			8	1.241	0.645	2.406	-1.256
		9	1.019	1.018	-0.952	-1.061			9	1.007	1.035	-1.000	-0.964
		10	0.714	1.042	-3.327	0.534			10	0.721	1.064	-3.602	0.526
		11	0.396	0.733	-3.593	1.550			11	0.399	0.739	-3.875	1.460
		12	0.126	0.269	-1.708	0.978			12	0.148	0.266	-1.792	0.914
		13	0	0	0	0			13	0	0	0	0

Tabella 4.50: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno1-15mag

S1804_D1505_H16		Modi di Vibrare_Trave Sana_H_2cm					Frequenze_Danno2		Modi di Vibrare_Danno2_H_1,6cm				
TraveSana_H_2cm		shape_und_DY [m]					H_1,6cm		shape_und_DY [m]				
f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_dam [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	17.562	1	0	0	0	0	f_1	17.670	1	0	0	0	0
f_2	48.566	3	0.125	-0.261	-1.698	-0.968	f_2	48.474	3	0.123	-0.252	-1.821	-0.902
f_3	96.105	4	0.395	-0.719	-4.046	-1.510	f_3	96.027	4	0.383	-0.696	-4.345	-1.409
f_4	158.309	5	0.716	-1.037	-3.839	-0.570	f_4	154.300	5	0.711	-1.011	-4.172	-0.549
		6	1.014	-1.006	-0.976	1.019			6	0.994	-0.998	-1.013	0.992
		7	1.236	-0.614	2.162	1.335			7	1.223	-0.655	2.337	1.390
		8	1.308	0.013	3.480	-0.008			8	1.277	0.009	3.584	-0.072
		9	1.236	0.630	2.238	-1.321			9	1.202	0.626	2.293	-1.280
		10	1.019	1.018	-0.952	-1.061			10	0.976	1.013	-0.933	-0.977
		11	0.714	1.042	-3.327	0.534			11	0.691	1.042	-3.432	0.546
		12	0.396	0.733	-3.593	1.550			12	0.399	0.748	-3.661	1.486
		13	0.126	0.269	-1.708	0.978			13	0.126	0.284	-1.783	0.957
		2	0	0	0	0			2	0	0	0	0

Tabella 4.51: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana18 apr e danno2-15mag

Grazie alle tabelle sopra riportate si creano in Matlab dei file “.mat” e si caricano nell’algoritmo rinominati come “final_data.mat” . I file contengono i vettori relativi ai quattro valori delle frequenze di trave sana “f_und”, di trave danneggiata “f_dam” e le quattro forme modali sia per la trave sana

che danneggiata, rispettivamente sotto il nome di “shape_und” e “shape_dam”.

L’algoritmo restituisce il plot delle forme modali sperimentali della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la differenza assoluta tra le curvature valutando così la posizione esatta del danno.

Si riportano i plot delle forme modali e della differenza di curvatura esclusivamente per il primo step di danno e si propongono i plot di identificazione del danno per tutte le acquisizioni effettuate di trave danneggiata.

Per la trave discretizzata con 12 elementi finiti si ha:

DANNO SPERIMENTALE 1

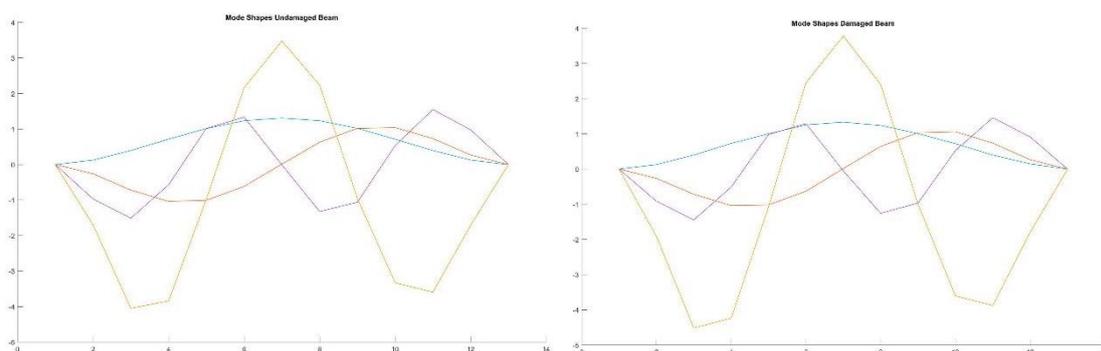


Figura 4.143: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag;

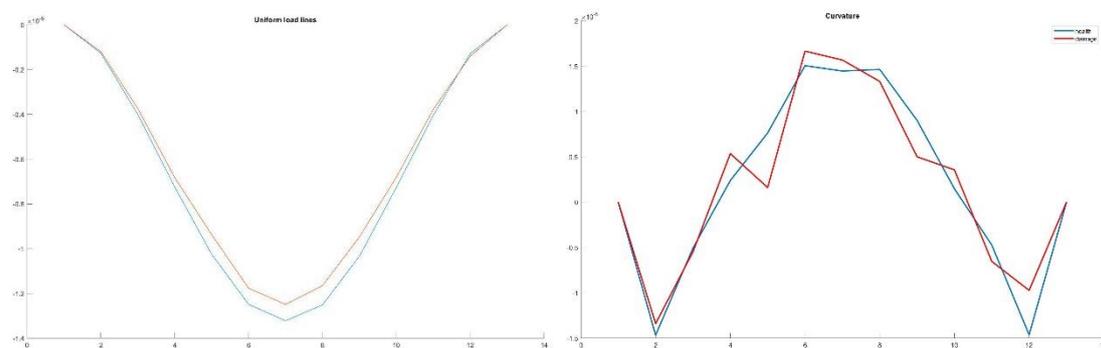


Figura 4.144: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag;

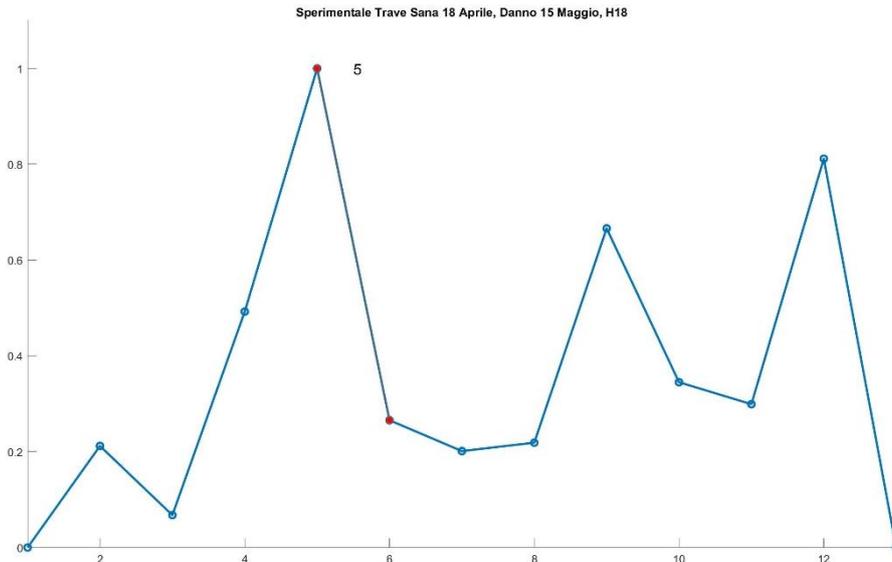


Figura 4.145: Identificazione del danno 1 sperimentale_H1,8 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 2

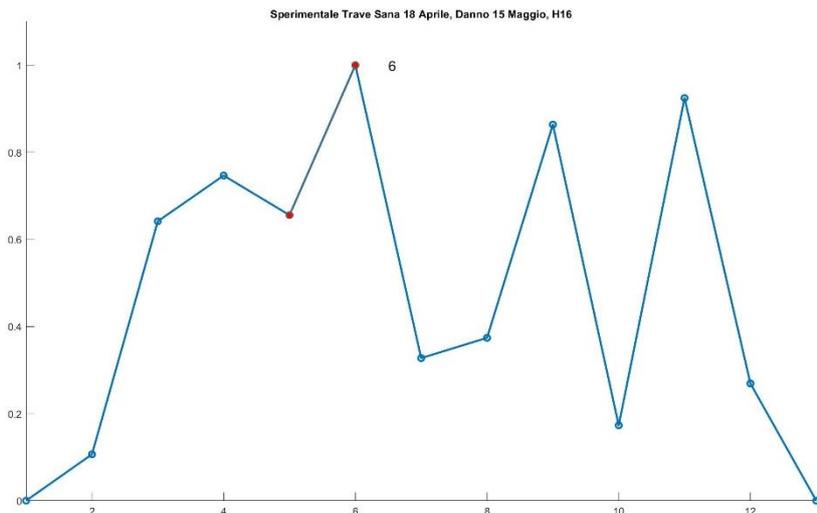


Figura 4.146: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm, 12Elementi Finiti;

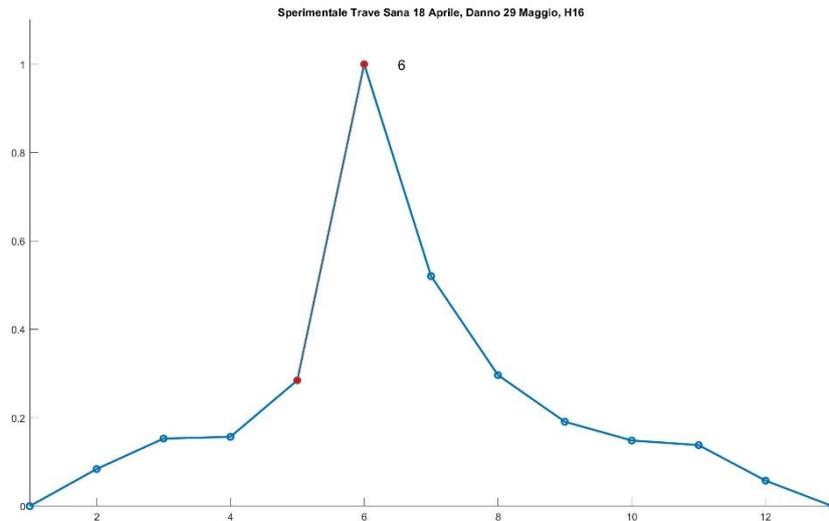


Figura 4.147: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 3

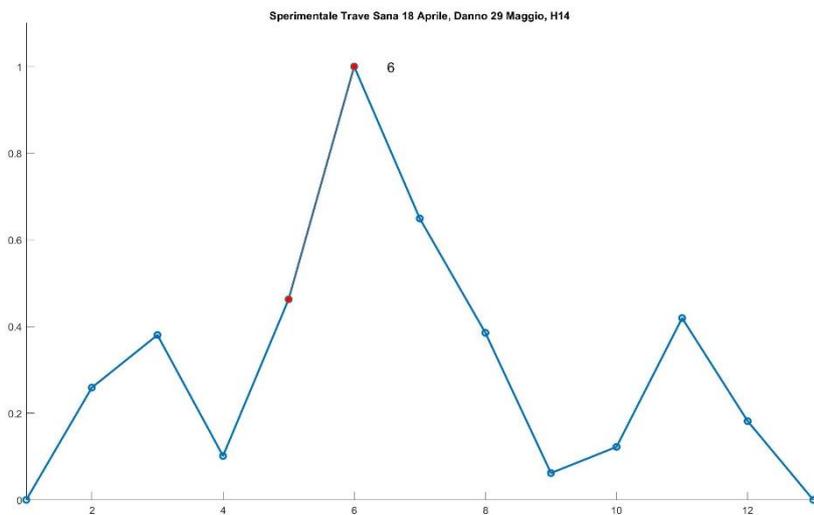


Figura 4.148: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm, 12Elementi Finiti;

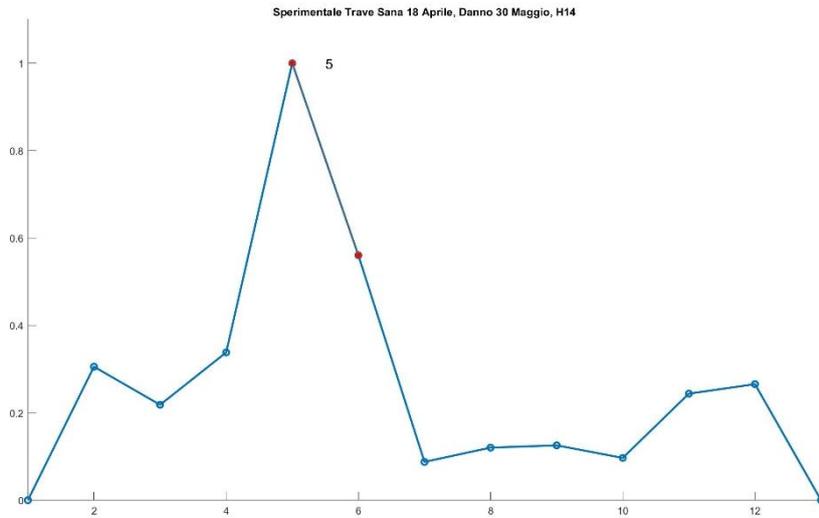


Figura 4.149: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 4

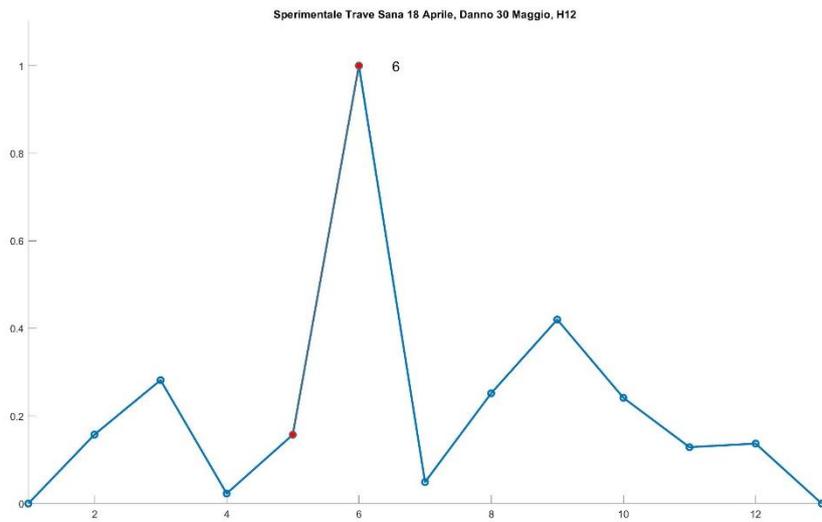


Figura 4.150: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm, 12Elementi Finiti;

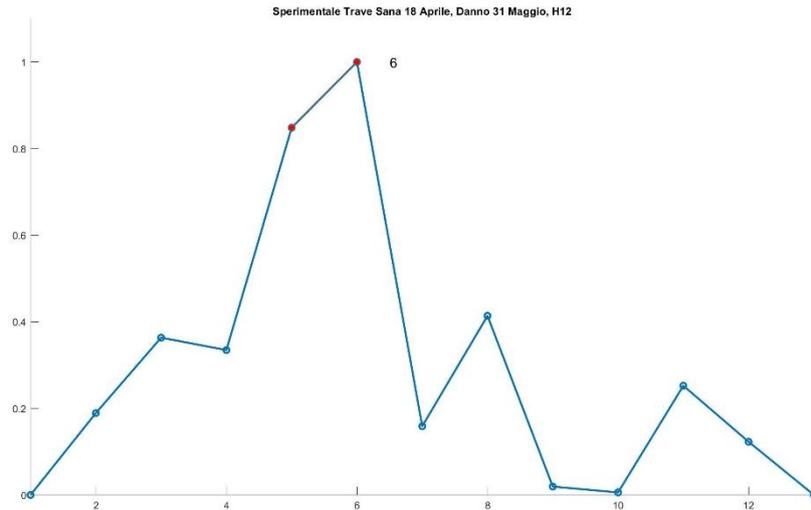


Figura 4.151: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 5

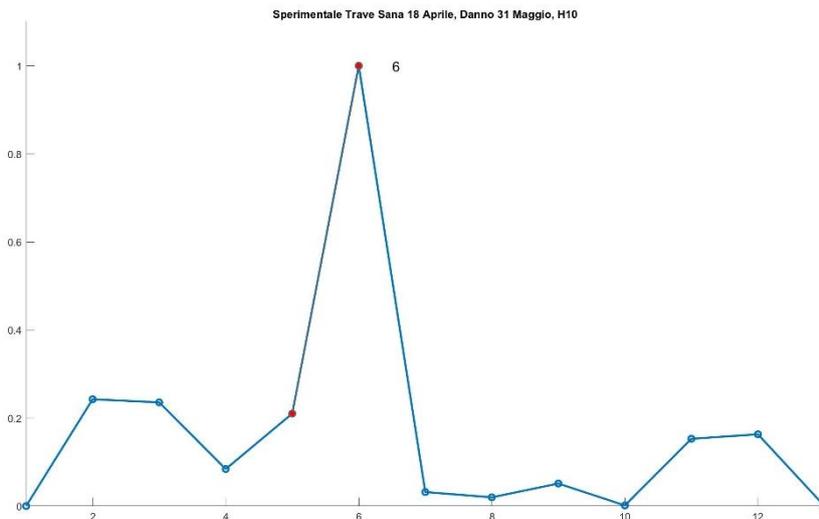


Figura 4.152: Identificazione del danno 5 sperimentale_H1,0 cm, 12Elementi Finiti;

4.4.5 Identificazione del danno con valori trave sana 22 aprile 2024

Si procede elaborando delle tabelle in Excel contenenti i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti nella giornata

di sperimentazione del 22 aprile 2024 sia di ogni acquisizione fatta per i cinque scenari di danno riprodotti in laboratorio.

Per la trave discretizzata con 12 elementi finiti, si propongono esclusivamente le combinazioni di trave sana e trave danneggiata per il primo e secondo step di danno. Si riportano i plot delle forme modali e della differenza di curvatura solo per il primo step di danno, estremamente significativo ed anche i plot di identificazione del danno per tutte le acquisizioni effettuate di trave danneggiata.

S2204_D1505_H18		Modi di Vibrare_Trave Sana_H_2cm					Frequenze_Danno1		Modi di Vibrare_Danno1_H_1,8cm				
Frequenze TraveSana_H_2cm		shape_und_DY [m]					H_1,8cm		shape_und_DY [m]				
f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_dam [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	18.613	1	0	0	0	0	f_1	18.056	1	0	0	0	0
f_2	50.031	2	0.126	-0.264	-1.762	-0.962	f_2	49.046	2	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
f_3	97.789	3	0.395	-0.720	-4.205	-1.492	f_3	96.616	3	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
f_4	160.069	4	0.720	-1.040	-3.967	-0.551	f_4	157.067	4	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
		5	1.016	-1.012	-0.993	1.018			5	1.002	-1.015	-1.075	0.983
		6	1.230	-0.618	2.223	1.330			6	1.257	-0.630	2.451	1.292
		7	1.303	0.011	3.608	-0.010			7	1.333	0.015	3.782	-0.049
		8	1.232	0.628	2.317	-1.309			8	1.241	0.645	2.406	-1.256
		9	1.029	1.015	-0.945	-1.058			9	1.007	1.035	-1.000	-0.964
		10	0.726	1.050	-3.410	0.507			10	0.721	1.064	-3.602	0.526
		11	0.401	0.734	-3.706	1.530			11	0.399	0.739	-3.875	1.460
		12	0.129	0.272	-1.779	0.971			12	0.148	0.266	-1.792	0.914
		13	0	0	0	0			13	0	0	0	0

Tabella 4.52: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana22 apr e danno1-15mag

S2204_D1505_H16		Modi di Vibrare_Trave Sana_H_2cm					Frequenze_Danno2		Modi di Vibrare_Danno2_H_1,6cm				
Frequenze TraveSana_H_2cm		shape_und_DY [m]					H_1,6cm		shape_und_DY [m]				
f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_dam [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	18.613	1	0	0	0	0	f_1	17.870	1	0	0	0	0
f_2	50.031	3	0.126	-0.264	-1.762	-0.962	f_2	48.474	3	0.123	-0.252	-1.821	-0.902
f_3	97.789	4	0.395	-0.720	-4.205	-1.492	f_3	96.027	4	0.383	-0.696	-4.345	-1.409
f_4	160.069	5	0.720	-1.040	-3.967	-0.551	f_4	154.300	5	0.711	-1.011	-4.172	-0.549
		6	1.016	-1.012	-0.993	1.018			6	0.994	-0.998	-1.013	0.992
		7	1.230	-0.618	2.223	1.330			7	1.223	-0.655	2.337	1.390
		8	1.303	0.011	3.608	-0.010			8	1.277	0.009	3.584	-0.072
		9	1.232	0.628	2.317	-1.309			9	1.202	0.626	2.293	-1.280
		10	1.029	1.015	-0.945	-1.058			10	0.976	1.013	-0.933	-0.977
		11	0.726	1.050	-3.410	0.507			11	0.691	1.042	-3.432	0.546
		12	0.401	0.734	-3.706	1.530			12	0.399	0.748	-3.661	1.486
		13	0.129	0.272	-1.779	0.971			13	0.126	0.284	-1.783	0.957
		2	0	0	0	0			2	0	0	0	0

Tabella 4.53: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana22 apr e danno2-15mag;

Si realizzano in Matlab, anche in questo caso, dei file rinominati “final_data.mat” e si caricano all’interno dell’algoritmo di identificazione del danno. I file contengono i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti dalla prova del 22 aprile 2024 sia di ogni acquisizione effettuata per la trave danneggiata.

L’algoritmo restituisce il plot delle forme modali sperimentali della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la

differenza assoluta tra le curvatures valutando così la posizione esatta del danno.

Per sintesi di trattazione si riportano i plot delle forme modali e della variazione curvatura solo per il primo step di danno e si propongono i plot di identificazione del danno per tutte le acquisizioni effettuate di trave danneggiata.

DANNO SPERIMENTALE 1

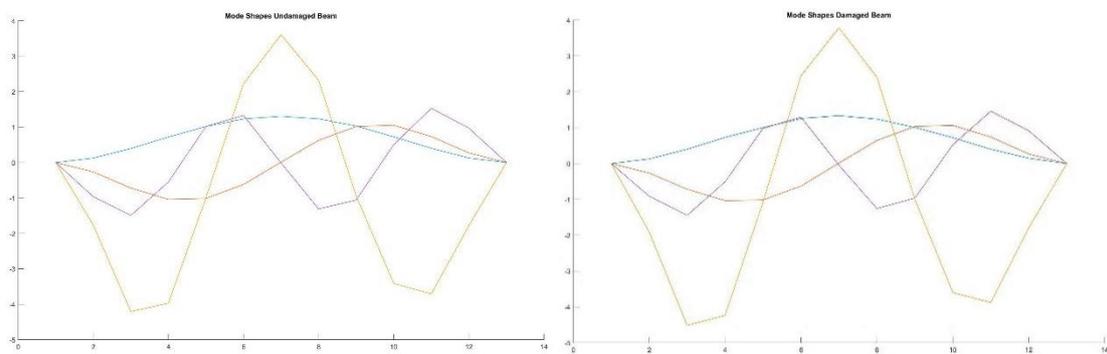


Figura 4.153: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag;

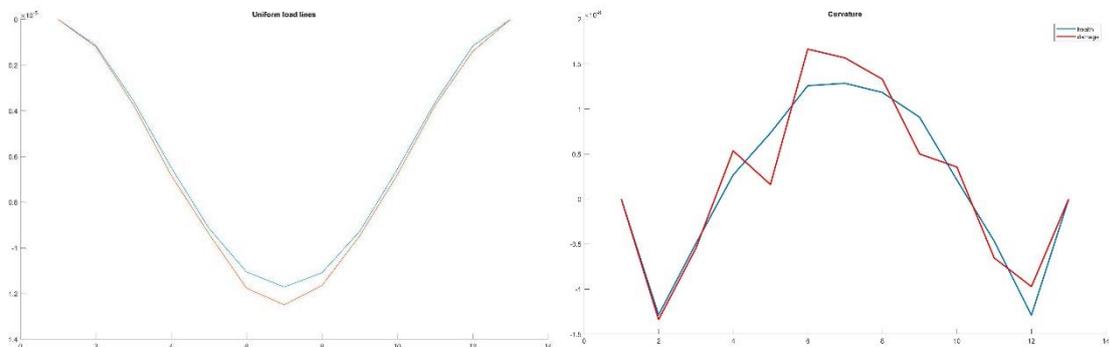


Figura 4.154: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag;

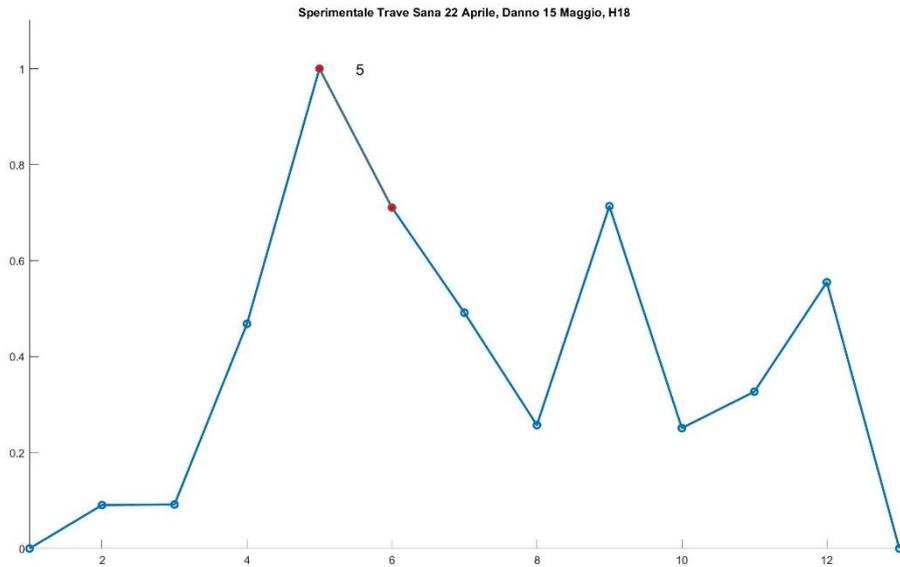


Figura 4.155: Identificazione del danno 1 sperimentale_H1,8 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 2

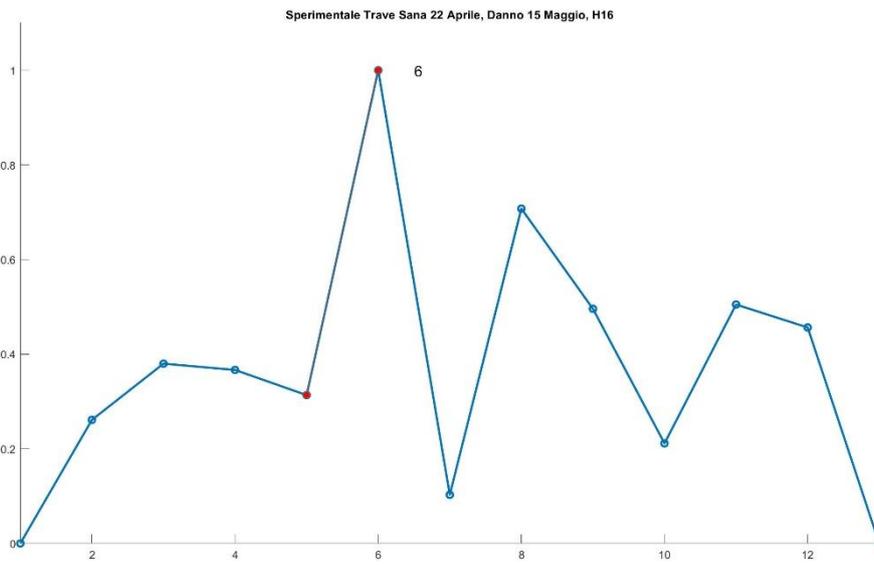


Figura 4.156: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm, 12Elementi Finiti;

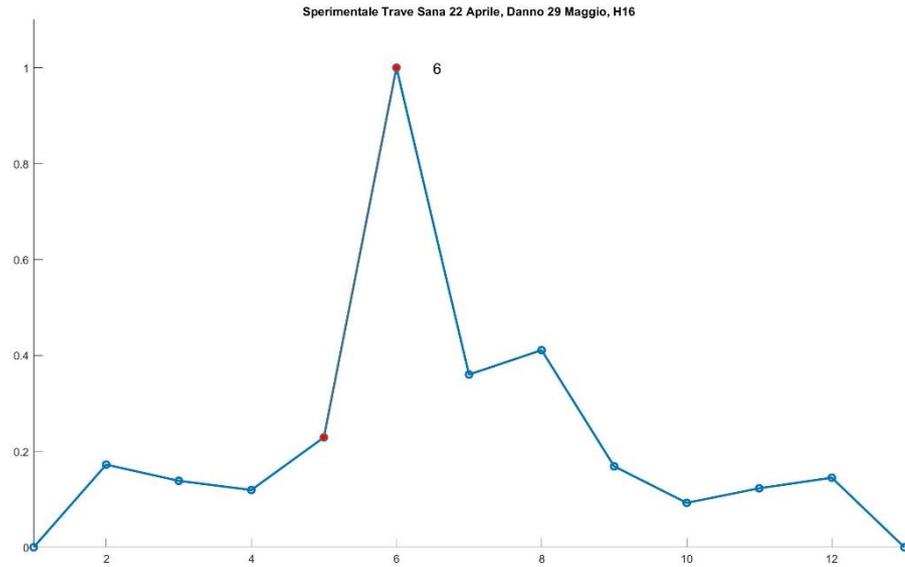


Figura 4.157: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 3

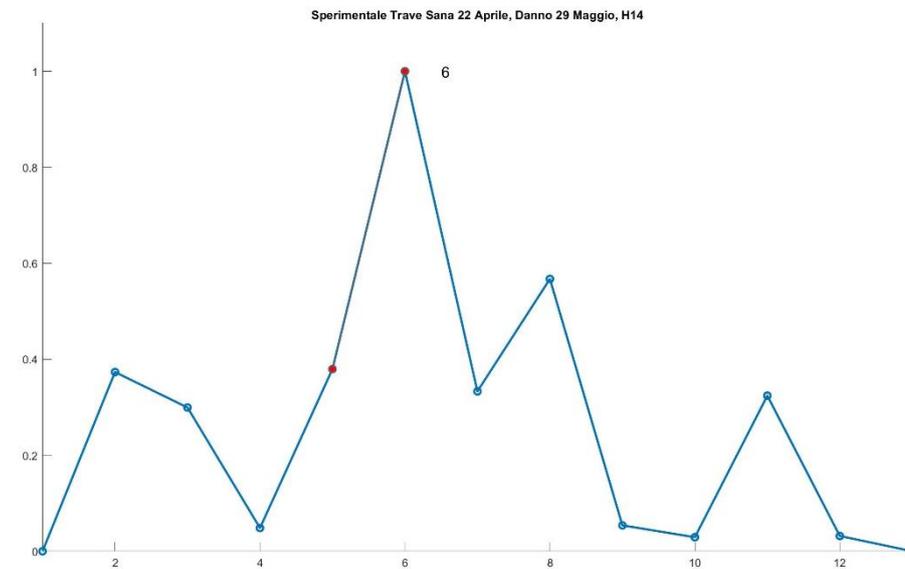


Figura 4.158: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm, 12Elementi Finiti;

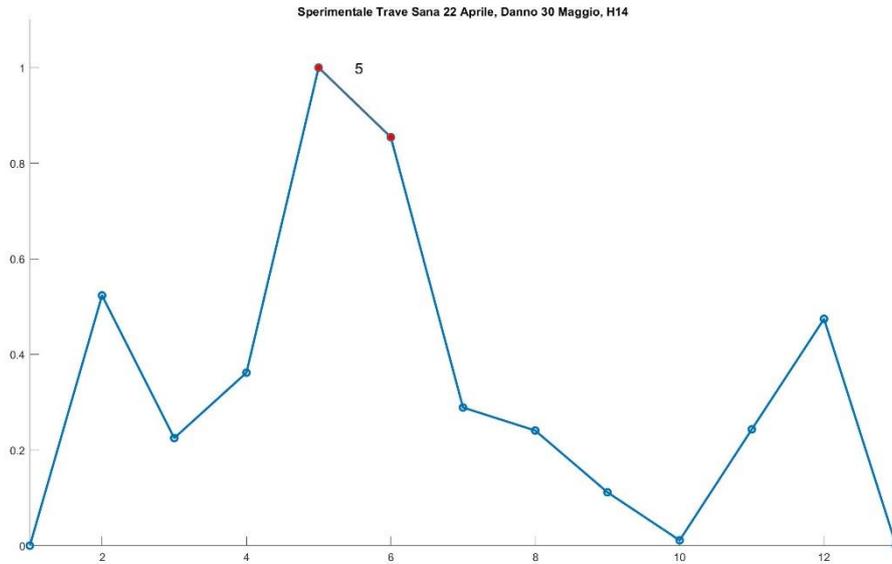


Figura 4.159: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 4

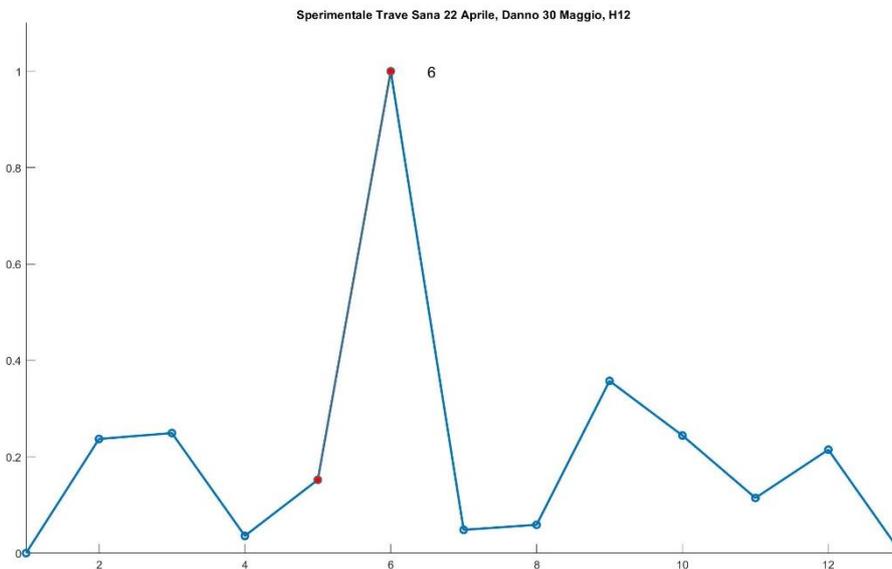


Figura 4.160: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm, 12Elementi Finiti;

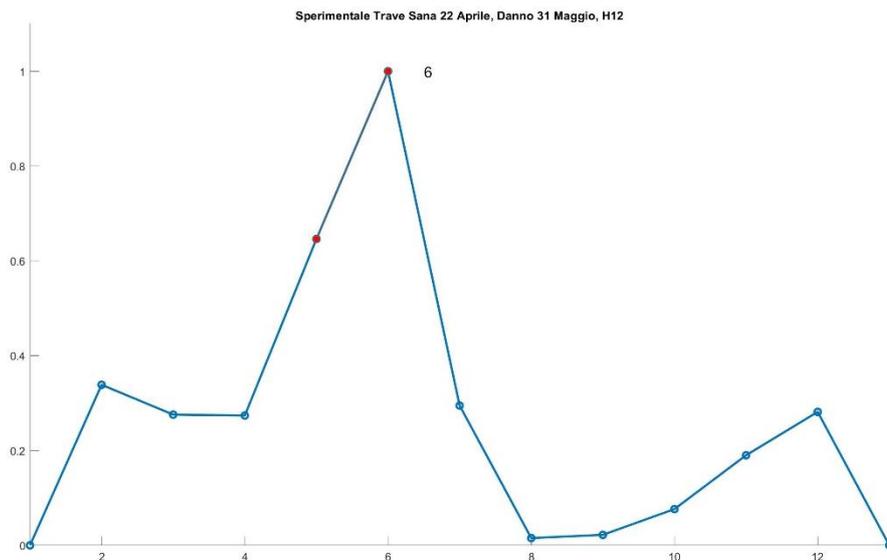


Figura 4.161: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 5

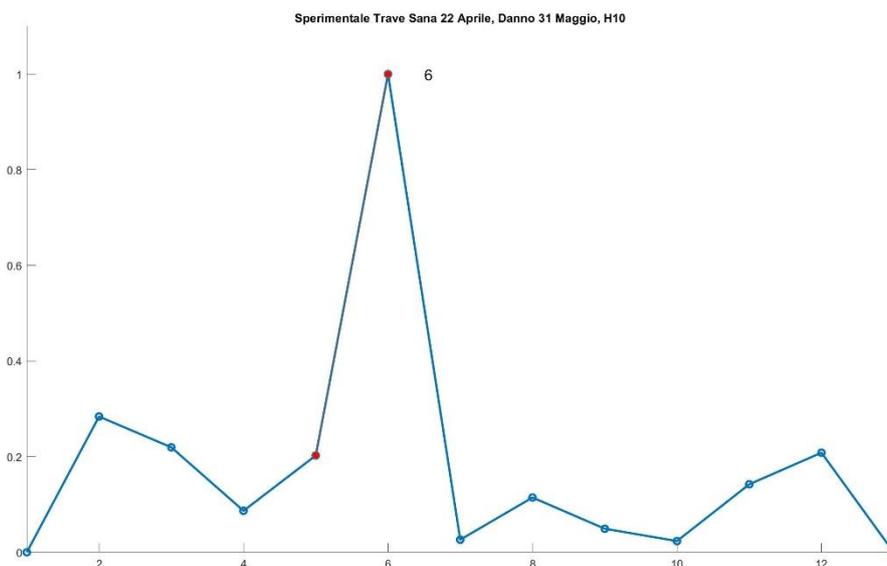


Figura 4.162: Identificazione del danno 5 sperimentale_H1,0 cm, 12Elementi Finiti;

4.4.6 Identificazione del danno con valori trave sana 15 maggio 2024

Per la trave discretizzata con 12 elementi finiti si elaborano, esattamente come nei casi precedenti, delle tabelle in Excel contenenti i valori delle

frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti nella giornata di sperimentazione del 15 maggio 2024 sia di ogni acquisizione fatta per i cinque scenari di danno riprodotti in laboratorio.

Si hanno numerose acquisizioni di trave danneggiata per i vari step di danno; quindi, si preferisce proporre esclusivamente le tabelle con i valori dei parametri dinamici per le combinazioni di trave sana e trave danneggiata con il primo e secondo livello di danno riprodotto sperimentalmente.

S1505_D1505_H18		Modi di Vibrare_Trave Sana_H_2cm shape_und_DY[m]					Frequenze_Danno1 H_1,8cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare_Danno1_H_1,8cm shape_und_DY[m]				
Frequenze TraveSana_H_2cm f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	16.451	1	0	0	0	0	f_1	18.056	2	0	0	0	0
f_2	47.121	2	0.123	-0.263	-1.739	-0.966	f_2	49.046	3	0.128	-0.264	-1.909	-0.910
f_3	94.566	3	0.382	-0.712	-4.075	-1.497	f_3	96.616	4	0.399	-0.716	-4.513	-1.445
f_4	156.618	4	0.700	-1.034	-3.896	-0.561	f_4	157.067	5	0.729	-1.036	-4.236	-0.510
		5	1.006	-1.008	-1.026	0.997			6	1.002	-1.015	-1.075	0.983
		6	1.224	-0.616	2.182	1.331			7	1.257	-0.630	2.451	1.292
		7	1.290	0.017	3.513	-0.009			8	1.333	0.015	3.782	-0.049
		8	1.215	0.636	2.275	-1.307			9	1.241	0.645	2.406	-1.256
		9	1.014	1.021	-0.946	-1.067			10	1.007	1.035	-1.000	-0.964
		10	0.709	1.048	-3.441	0.510			11	0.721	1.064	-3.602	0.526
		11	0.387	0.733	-3.636	1.547			12	0.399	0.739	-3.875	1.460
		12	0.122	0.265	-1.713	0.970			13	0.148	0.266	-1.792	0.914
		13	0	0	0	0			13	0	0	0	0

Tabella 4.54: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana15mag e danno1-15mag;

S1505_D1505_H16		Modi di Vibrare_Trave Sana_H_2cm shape_und_DY[m]					Frequenze_Danno2 H_1,6cm f_dam [Hz]		Modi di Vibrare_Danno2_H_1,6cm shape_und_DY[m]				
Frequenze TraveSana_H_2cm f_und [Hz]		Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	f_1	f_2	Nodo	Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
f_1	16.451	1	0	0	0	0	f_1	17.870	1	0	0	0	0
f_2	47.121	3	0.123	-0.263	-1.739	-0.966	f_2	48.474	3	0.123	-0.252	-1.821	-0.902
f_3	94.566	4	0.382	-0.712	-4.075	-1.497	f_3	96.027	4	0.383	-0.696	-4.345	-1.409
f_4	156.618	5	0.700	-1.034	-3.896	-0.561	f_4	154.300	5	0.711	-1.011	-4.172	-0.549
		6	1.006	-1.008	-1.026	0.997			6	0.994	-0.998	-1.013	0.992
		7	1.224	-0.616	2.182	1.331			7	1.223	-0.655	2.337	1.390
		8	1.290	0.017	3.513	-0.009			8	1.277	0.009	3.584	-0.072
		9	1.215	0.636	2.275	-1.307			9	1.202	0.626	2.293	-1.280
		10	1.014	1.021	-0.946	-1.067			10	0.976	1.013	-0.933	-0.977
		11	0.709	1.048	-3.441	0.510			11	0.691	1.042	-3.432	0.546
		12	0.387	0.733	-3.636	1.547			12	0.399	0.748	-3.661	1.486
		13	0.122	0.265	-1.713	0.970			13	0.126	0.284	-1.783	0.957
		2	0	0	0	0			2	0	0	0	0

Tabella 4.55: Frequenze e modi di vibrare sperimentali, trave sana15mag e danno2-15mag;

Come descritto nei due casi precedenti, si creano in Matlab dei file rinominati “final_data.mat” e si caricano all’interno dell’algoritmo di identificazione del danno. I file contengono i valori delle frequenze e dei modi di vibrare sia della trave sana ottenuti dalla prova del 15 maggio 2024 sia di ogni acquisizione effettuata per la trave danneggiata.

L’algoritmo restituisce il plot delle forme modali sperimentali della trave sana e della trave danneggiata e calcola sia la curvatura modale che la

differenza assoluta tra le curvatures valutando così la posizione esatta del danno.

Per sintesi di trattazione, si riportano i plot delle forme modali e della differenza di curvatura solo per il primo step di danno, estremamente significativo. Si propone poi, per tutte le acquisizioni effettuate di trave danneggiata, i plot di identificazione del danno.

DANNO SPERIMENTALE 1

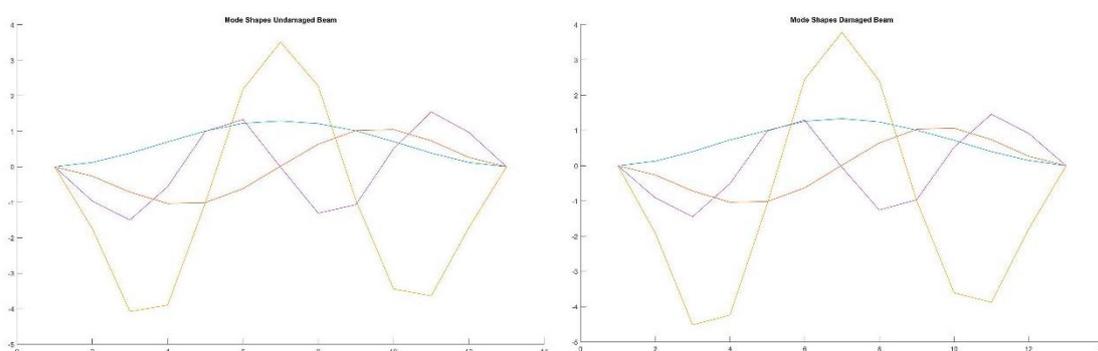


Figura 4.163: Modi di vibrare trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag;

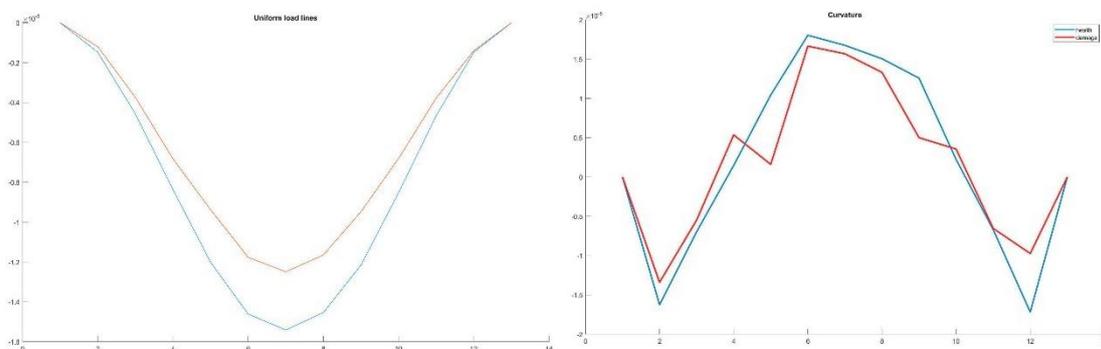


Figura 4.164: UniformLoadLine e Curvature trave sana 18 apr e trave danno 1_H1,8cm 15 mag;

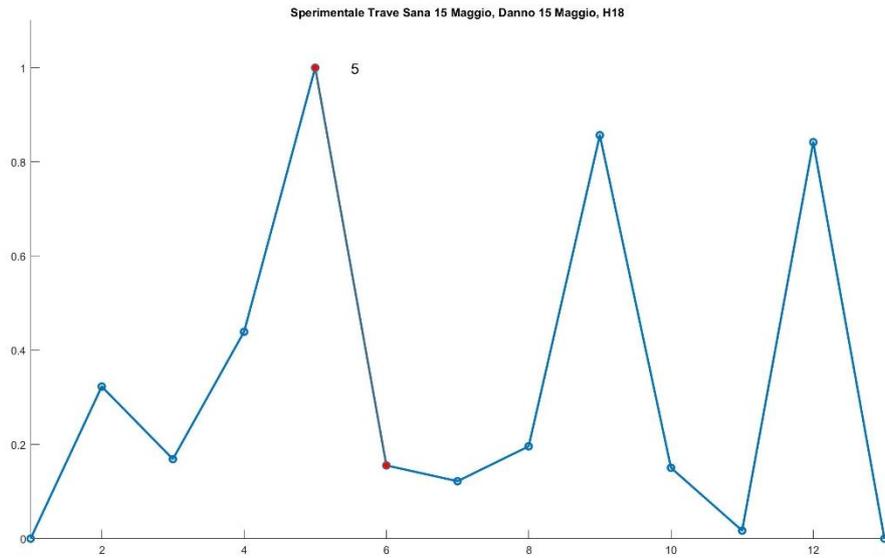


Figura 4.165: Identificazione del danno 1 sperimentale_H1,8 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 2

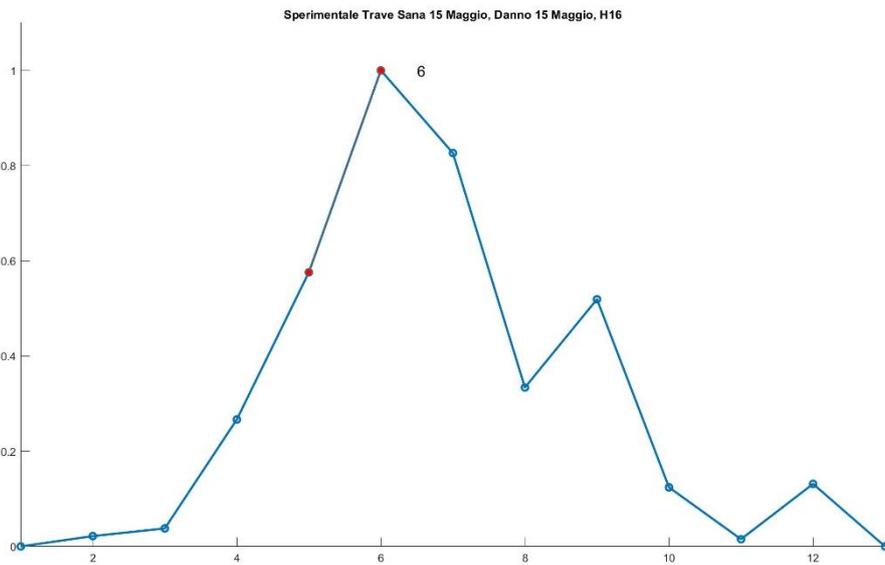


Figura 4.166: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm, 12Elementi Finiti;

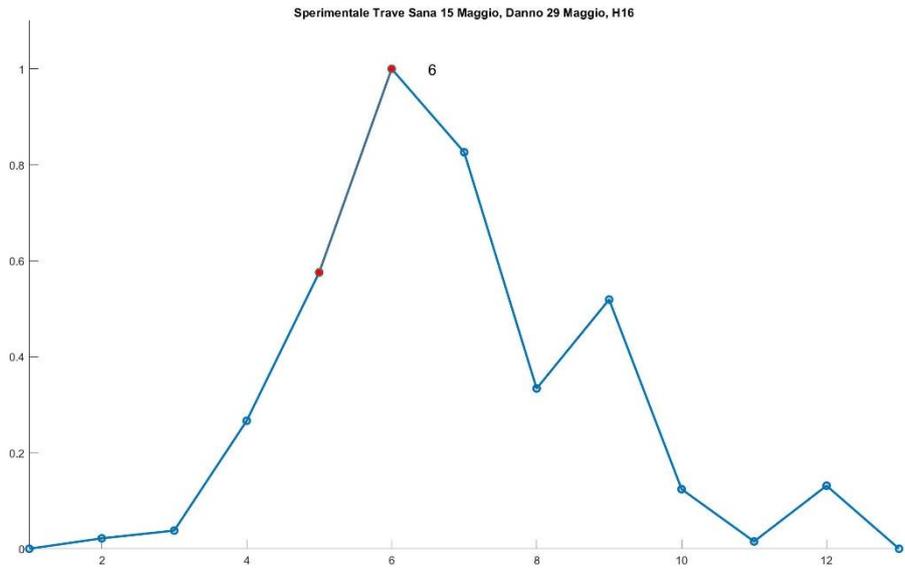


Figura 4.167: Identificazione del danno 2 sperimentale_H1,6 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 3

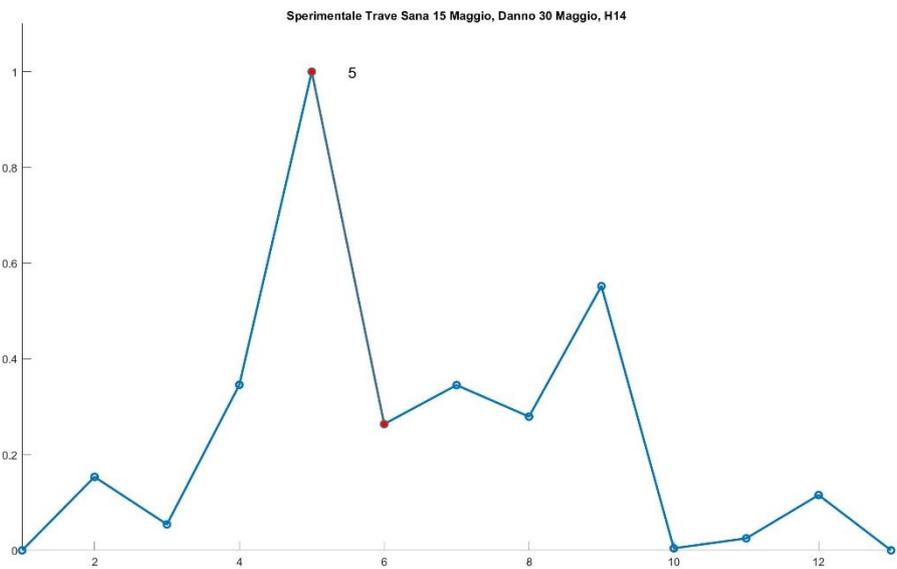


Figura 4.168: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm, 12Elementi Finiti;

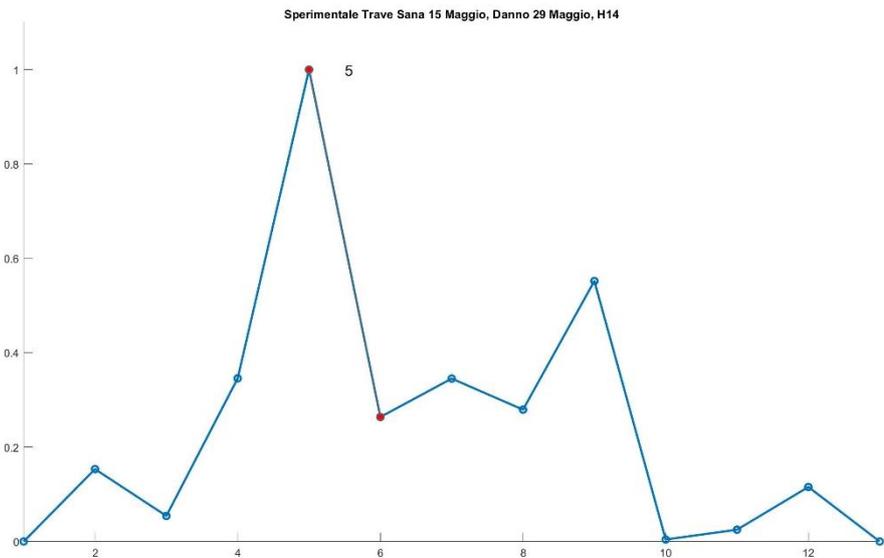


Figura 4.169: Identificazione del danno 3 sperimentale_H1,4 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 4

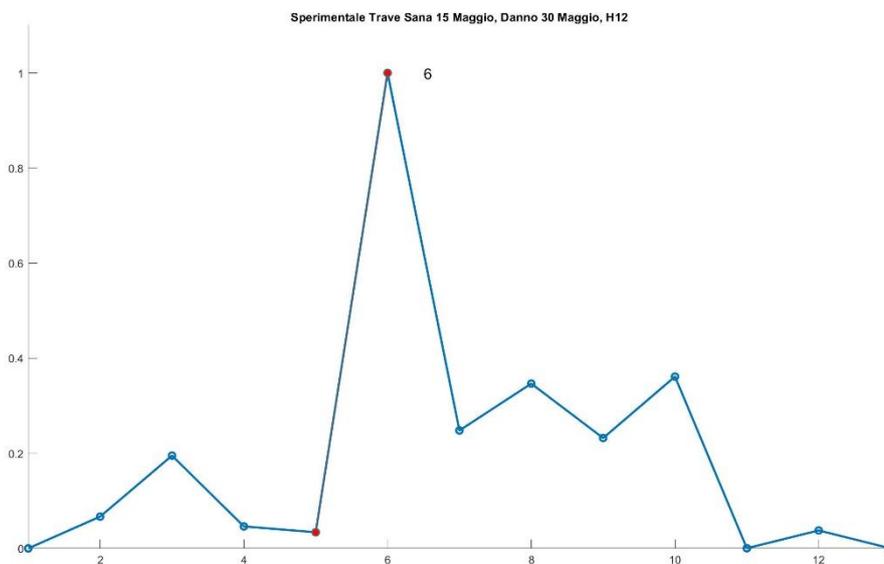


Figura 4.170: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm, 12Elementi Finiti;

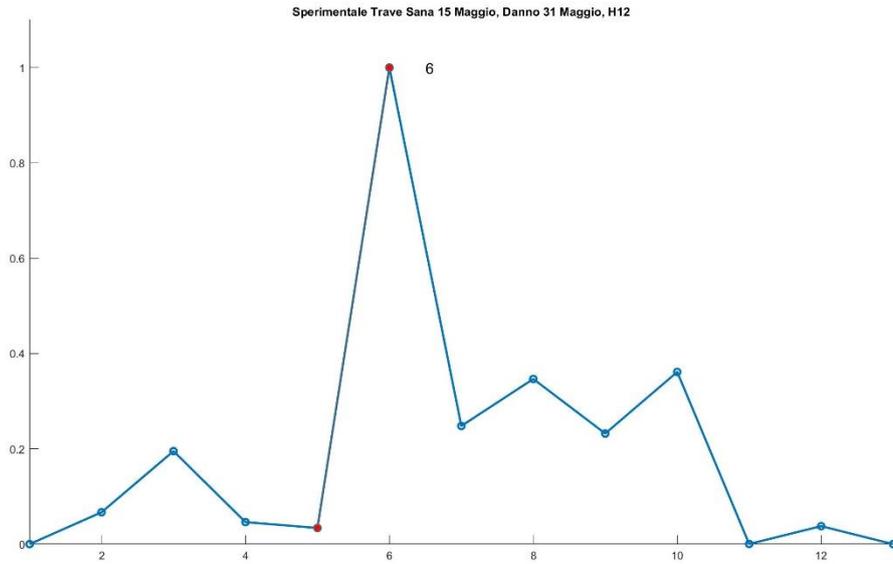


Figura 4.171: Identificazione del danno 4 sperimentale_H1,2 cm, 12Elementi Finiti;

DANNO SPERIMENTALE 5

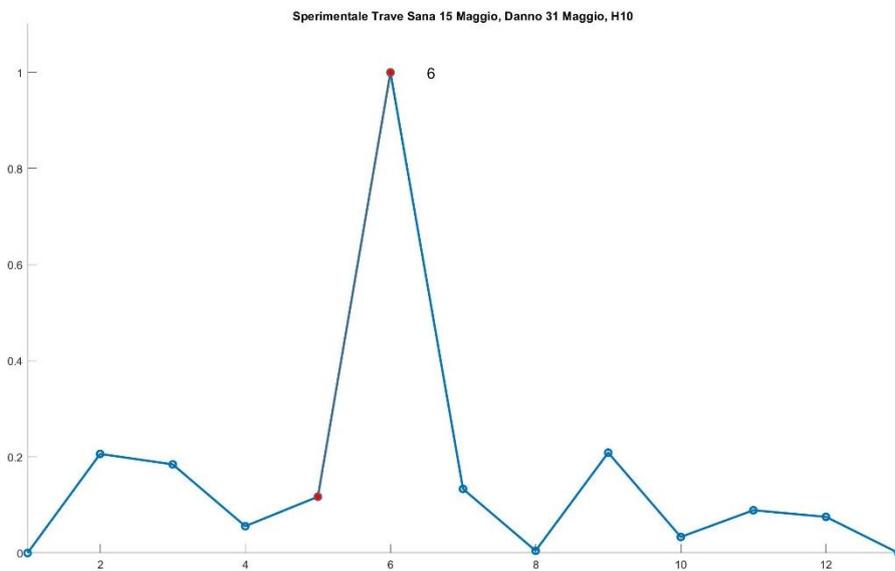


Figura 4.172: Identificazione del danno 5 sperimentale_H1,0 cm, 12Elementi Finiti;

È possibile facilmente rilevare dalle figure sovrastanti che per tutte le combinazioni di trave sana con ogni acquisizione per i cinque scenari di danno sulla trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi e

discretizzata con 12 elementi finiti, l'algoritmo riconosce perfettamente la posizione del danno.

Per il più piccolo danno sull'altezza dell'elemento, ossia di soli 2 mm , l'algoritmo, per una trave discretizzata con 12 elementi finiti, individua correttamente la porzione danneggiata, ossia quella compresa tra il nodo 5 ed il nodo 6 corrispondente esattamente all'elemento 5.

Dunque, l'algoritmo per una trave discretizzata con 12 elementi e 13 nodi, identifica esattamente la posizione del difetto anche per un danneggiamento minimo localizzato sull'altezza della sezione dell'elemento. Al contrario, con una mesh di 24 elementi finiti, l'algoritmo non riconosce correttamente la posizione dell'elemento danneggiato per il primo ed il secondo step di danno, ossia quando l'altezza della sezione dell'elemento si riduce di 2 mm e 4 mm con altezza residua rispettivamente pari a $H = 1,8\text{ cm}$ e $H = 1,6\text{ cm}$.

Quindi, l'utilizzo di un minor numero di elementi finiti comporta l'identificazione immediata di qualsiasi livello di danno, anche minimo. Pur eseguendo la caratterizzazione dinamica su meno punti, si mantiene un'alta precisione e coerenza dei valori numerici delle frequenze e dei modi di vibrare della trave a discapito però di una caratterizzazione meno "smooth" dell'andamento grafico delle forme modali.

In definitiva, è preferibile effettuare un monitoraggio dinamico su una mesh più rada poiché con l'algoritmo di identificazione del danno che si ha a disposizione si ottiene una maggiore accuratezza dei risultati.

È opportuno sottolineare che nelle strutture esistenti, la condizione di avere pochi punti ispezionati durante un monitoraggio dinamico al fine di valutare la presenza di difetti, è la più rappresentativa della realtà, in quanto si ha difficoltà nel reperire un numero elevato di strumenti di misura. Tale scelta è dettata anche dalla necessità di ammortizzare i costi legati al monitoraggio.

Capitolo 5

PROVE STATICHE CON ESTENSIMETRI

5. CALCOLO DELLA DEFORMAZIONE

5.1 STRUMENTI DI MISURA DELLA DEFORMAZIONE

Si è scelto in fase di studio sperimentale di posizionare degli estensimetri al fine di valutare le deformazioni per una trave doppiamente incastrata agli estremi.

Gli estensimetri, noti anche come Strain Gauges, sono dispositivi utilizzati per misurare la deformazione di un oggetto. La deformazione può essere definita come il cambiamento delle dimensioni o della forma del materiale quando viene sottoposto ad una forza o ad un carico.

Gli estensimetri sono ampiamente utilizzati in ingegneria e scienza dei materiali per monitorare le sollecitazioni e le deformazioni nelle strutture e nelle sue componenti.

Il principio di funzionamento di un estensimetro si basa sulla variazione di resistenza elettrica di un materiale conduttore quando viene deformato.

Gli estensimetri sono costituiti da un filo o una pellicola di materiale conduttore, come una lega di nichel-cromo, che viene fissato su un supporto isolante. Quando l'oggetto su cui è montato l'estensimetro viene deformato, il materiale conduttore si allunga o si comprime, causando una variazione nella sua resistenza elettrica. Questa variazione di resistenza può essere misurata con un circuito elettrico, solitamente un ponte di Wheatstone, per determinare la quantità di deformazione.

Esistono diverse tipologie di estensimetri, tra cui:

- Estensimetri a resistenza elettrica: sono i più comuni e sono costituiti da un filo o una pellicola sottile di materiale conduttore.
- Estensimetri a semiconduttore: utilizzano materiali semiconduttori e sono più sensibili rispetto a quelli a resistenza elettrica, ma anche più costosi.
- Estensimetri ottici: utilizzano la luce per misurare la deformazione e sono impiegati in applicazioni in cui è richiesta un'alta precisione.
- Estensimetri capacitivi: Misurano le variazioni di capacità elettrica causate dalla deformazione.

Gli estensimetri, trovano ampio utilizzo nell'ingegneria civile, in quanto di fondamentale importanza per il monitoraggio strutturale su ponti, edifici e dighe al fine di garantire la sicurezza e la stabilità.

Gli estensimetri sono strumenti che presentano:

- Alta precisione e sensibilità.
- Capacità di misurare piccole deformazioni.
- Versatilità nelle applicazioni.

Tuttavia, risultano:

- Sensibili alle variazioni di temperatura, che possono influenzare le misurazioni.
- Richiedono un'attenta calibrazione e installazione.
- Possono essere costosi, soprattutto i modelli avanzati come quelli a semiconduttore e ottici.

Gli estensimetri sono strumenti essenziali per l'analisi delle sollecitazioni e delle deformazioni in una vasta gamma di applicazioni. Il montaggio di estensimetri sulle strutture contribuisce significativamente alla sicurezza e alla performance dei materiali e di conseguenza delle strutture stesse.

5.1.1 Montaggio estensimetri su una trave incastro-incastro

In ingegneria civile e strutturale, il montaggio di estensimetri ha diverse utilità pratiche. Si posizionano tre estensimetri sulla trave a doppio incastro, oggetto di studio per estrapolare i valori delle sollecitazioni e delle deformazioni.

Avere contezza della misura delle sollecitazioni e delle deformazioni può avere grande utilità pratica, in quanto si possono effettuare dei confronti quantitativi tra i risultati analitici, numerici e sperimentali estrapolati e pervenire e tenere sotto controllo eventuali anomalie riscontrate in fase di ricerca.

Gli estensimetri permettono infatti di misurare direttamente le sollecitazioni nelle fibre della trave. Questo è fondamentale per verificare che la trave stia operando entro i limiti di sicurezza previsti dal progetto.

Inoltre, le misure delle deformazioni possono essere utilizzate per determinare il comportamento flessionale della trave sotto carico. Questo aiuta a comprendere come la trave si deforma sotto l'azione dei carichi applicati. Nel caso in esame la trave è soggetta al solo peso proprio strutturale.

Si perviene studiando le misure estensimetriche a delle valutazioni sulle prestazioni strutturali.

I dati ottenuti dagli estensimetri possono essere confrontati con i risultati previsti dai modelli teorici e dalle simulazioni numeriche. Questo confronto è utile per validare i modelli e le ipotesi di progetto.

Le misurazioni continue consentono di identificare eventuali comportamenti anomali o imprevisti, come deformazioni eccessive o distribuzioni di sollecitazioni non uniformi, che potrebbero indicare problemi strutturali o di costruzione.

Per ottenere risultati accurati e significativi, è essenziale che gli estensimetri siano installati correttamente; si posizionano solitamente in punti strategici lungo la trave, come l'intradosso o l'estradosso per misurare

le tensioni e compressioni massime oppure anche in corrispondenza dei punti di massimo momento flettente. È fondamentale calibrare correttamente gli estensimetri ed il sistema di acquisizione dei dati. Questi strumenti essendo estremamente sensibili, devono essere protetti da danni fisici e da condizioni ambientali avverse come umidità e temperature estremi.

Dunque, l'installazione di estensimetri su una trave incastro-incastro è un metodo efficace per monitorare il comportamento strutturale e garantire la sicurezza della struttura.

5.2 CALCOLO DELLA DEFORMAZIONE NEL CASO STUDIO

Si sceglie sperimentalmente di installare 3 estensimetri, in 3 posizioni significative: le due estremità prossime ai vincoli d'incastro e la mezzeria, al fine di tenere sotto controllo la deformazione in fase di ammorsamento dei vincoli in laboratorio in quanto una variazione anomala (aumento) delle frequenze in fase di danneggiamento della trave sarebbe potuto essere indice di presenza di trazione.

Si applicano gli estensimetri all'intradosso della trave in esame in corrispondenza dei nodi 3 e 25, prossimi all'incastro e sotto al nodo 14 corrispondente alla mezzeria della trave.

Si riporta uno schema esplicativo, fornito ai tecnici di laboratorio per avere un posizionamento accurato della strumentazione.

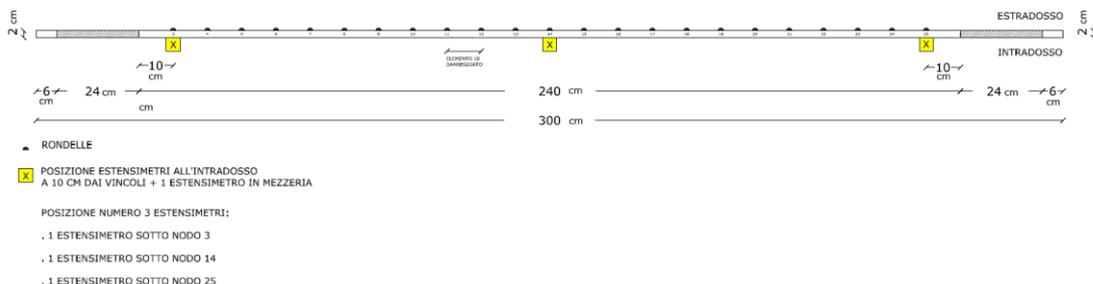


Figura 5.1: Schema per il posizionamento degli estensimetri.

Prima di procedere alla rilevazione dei valori sperimentali di deformazione, si calcolano tali quantità prima analiticamente tramite la teoria flessionale delle travi e poi numericamente tramite il software Straus7.

Si propone nei paragrafi successivi la trattazione analitica, numerica e sperimentale per il calcolo della deformazione.

5.2.1 Trattazione Analitica

La determinazione analitica della deformazione per una trave doppiamente incastrata agli estremi in alluminio richiede l'applicazione delle teorie della meccanica delle strutture, in particolare la teoria della flessione delle travi di Eulero-Bernoulli. Per calcolare la deformazione analitica della trave oggetto di studio, doppiamente incastrata agli estremi in alluminio, è necessario considerare diversi fattori, come la geometria della trave, le proprietà del materiale ed il tipo di carico applicato.

Per la legge di Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Da cui la deformazione ε è data dalla formula inversa:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Per determinare il valore della tensione σ è necessario fare riferimento alla formula:

$$\sigma = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2}$$

Dove:

- M è il momento flettente della trave;
- I : è il momento d'inerzia della sezione della trave;
- h : è l'altezza della sezione della trave;

Il momento d'inerzia per la trave in oggetto a sezione quadrata si determina con la formula:

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

Per la trave in esame, al fine di determinare il momento flettente sia agli estremi che nella mezzeria si fa riferimento alle formule analitiche dello schema notevole di trave doppiamente incastrata agli estremi con carico uniformemente distribuito. In questo caso, si considera come carico distribuito il solo peso proprio strutturale della trave.

Si riporta l'andamento del momento flettente e le formulazioni per determinarne il valore numerico.

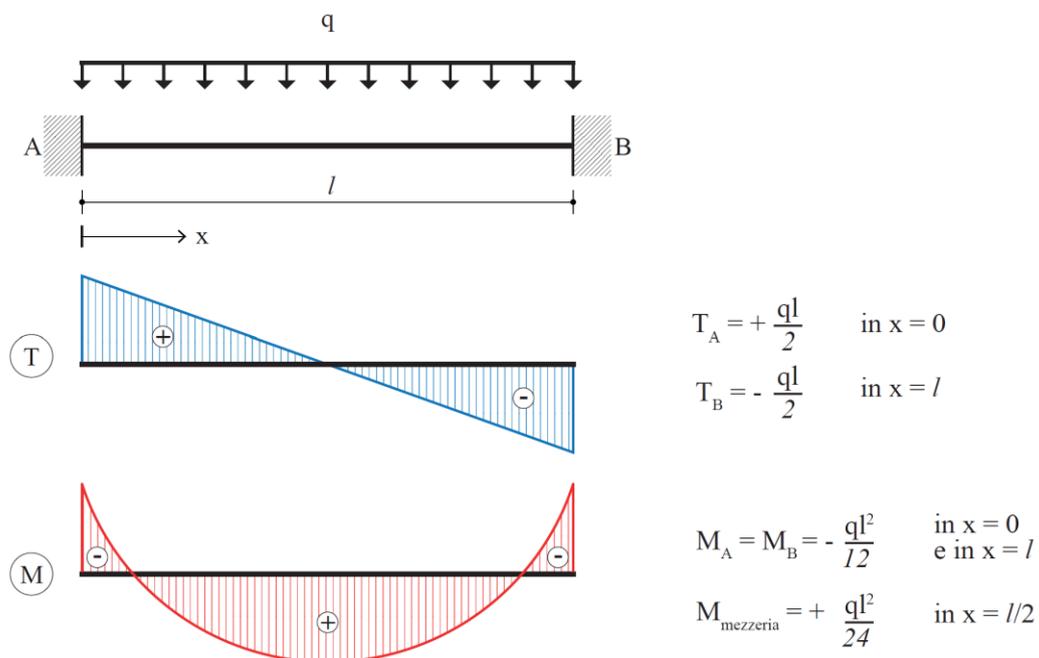


Figura 5.2: Schema notevole di trave doppiamente incastrata agli estremi;

In prima battuta, si determina il peso proprio attraverso la formula:

$$q = \rho \cdot A \cdot g$$

Dove:

- ρ , densità della trave data dal rapporto massa su volume: $\rho = \frac{M}{V}$
- A , area sezione della trave
- g , accelerazione di gravità pari a $g = 9,81 \text{ m/s}^2$

Si procede con le formule sopracitate alla determinazione di tutti i contributi necessari al calcolo del valore analitico della deformazione.

Si riassumono i parametri geometrici e meccanici della trave oggetto di studio e si effettuano i calcoli in Excel.

Si riporta di seguito quanto ottenuto in una tabella riassuntiva.

Calcolo Deformazione		
ρ	2740.864	[kg/m ³]
L	2.4	[m]
B	0.02	[m]
H	0.02	[m]
A	0.0004	[m ²]
E	70000000000	[N/m ²]
I	1.33333E-08	[m ⁴]
g	9.81	[m/s ²]
PesoProprio:q	10.755	[N/m]
M_incastroDx	-5.1625	[N*m]
M_mezzeria	2.5812	[N*m]
M_incastroSx	-5.1625	[N*m]
$\sigma_{incastroDx}$	-3871853.82	[N/m ²]
$\sigma_{mezzeria}$	1935926.91	[N/m ²]
$\sigma_{incastroSx}$	-3871853.82	[N/m ²]
$\epsilon_{incastroDx}$	-0.0000553	[m/m]
$\epsilon_{mezzeria}$	0.0000277	[m/m]
$\epsilon_{incastroSx}$	-0.0000553	[m/m]
$\epsilon_{incastroDx}$	-55.312	[$\mu\epsilon$]
$\epsilon_{mezzeria}$	27.656	[$\mu\epsilon$]
$\epsilon_{incastroSx}$	-55.312	[$\mu\epsilon$]

Tabella 5.1: Calcoli per la determinazione analitica della deformazione, trave incastro-incastro;

In definitiva:

DEFORMAZIONE ANALITICA		
$\epsilon_{incastro}$	-55.3	[$\mu\epsilon$]
$\epsilon_{mezzeria}$	27.7	[$\mu\epsilon$]
$\epsilon_{incastro}$	-55.3	[$\mu\epsilon$]

Tabella 5.2: Valori analitici deformazione;

5.2.2 Trattazione Numerica

Si procede con la determinazione numerica del valore della deformazione attraverso il Software Straus7. Si procede in tal senso allo scopo di effettuare un confronto sia con quanto già ottenuto numericamente sia con le successive misurazioni sperimentali.

Per una trave, la deformazione longitudinale ε , in un punto a distanza y dall'asse neutro (asse longitudinale centrale) è data dalla formula:

$$\varepsilon = -\chi \cdot y$$

Dove:

- χ , è il valore della curvatura;
- y , è la distanza dall'asse neutro.

Si modella la trave oggetto di studio in Straus7 discretizzandola, anche in questo caso, con 24 elementi finiti. Si attribuisce il peso proprio, come descritto nel paragrafo 4.3, e si esegue un'Analisi Statica Lineare al fine di estrapolare il valore di curvatura. Si ottiene in definitiva il valore della deformazione moltiplicando il valore di curvatura ricavato da Straus7 per la distanza dall'asse neutro, posto a metà dell'altezza della sezione in esame.

$$\varepsilon = -\chi \cdot h/2$$

Si estrapolano i valori di curvatura sia per la trave sana che per tutti gli step di danno modellati. Nello specifico, si prendono i valori relativi ai nodi 3 e 25, prossimi all'incastro, e il valore al nodo 14 posto nella mezzeria.

Si riportano di seguito i valori di curvatura per i nodi d'interesse, estratti da Straus7 dal modello di trave sana.

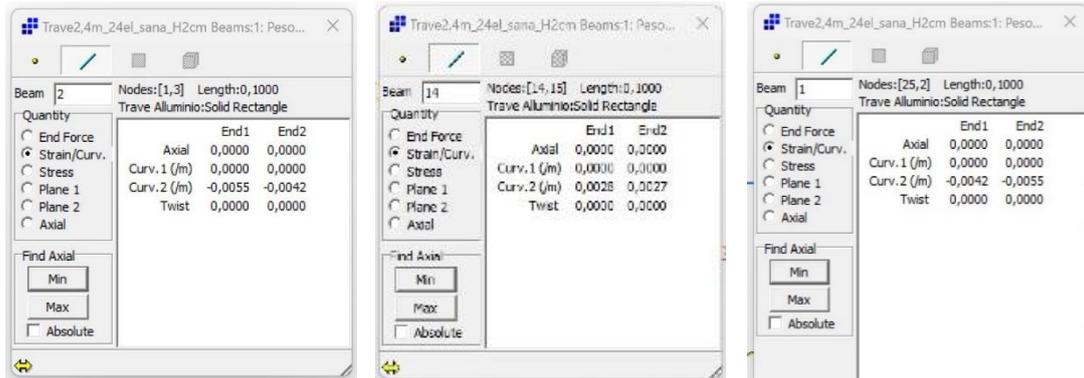


Figura 5.4: Valori di curvatura da Straus7;

Dalle figure sovrastanti è possibile individuare anche il valore in corrispondenza esattamente dei vincoli d'incastro ovvero nel nodo 1 e nel nodo 2.

Per effettuare un confronto con la trattazione analitica si calcola il valore della deformazione agli estremi e nella mezzeria, ossia nei nodi 1,14 e 2.

TRAVE SANA							
Curvatura χ			Deformazione ϵ				
Nodo 1	-0.0055	[1/m]	Nodo 1	0.000055	[m/m]	55	[μm]
Nodo 14	0.0028	[1/m]	Nodo 14	-0.000028	[m/m]	-28	[μm]
Nodo 2	-0.0055	[1/m]	Nodo 2	0.000055	[m/m]	55	[μm]

Tabella 5.3: Valori di curvatura e deformazione in corrispondenza degli incastri e della mezzeria;

Si riporta il confronto tra i valori analitici ed i valori numerici in corrispondenza degli incastri e della mezzeria.

DEFORMAZIONE ANALITICA			DEFORMAZIONE NUMERICA		
$\epsilon_{\text{incastro}}$	-55.3	[$\mu\epsilon$]	Nodo 1	55	[μm]
$\epsilon_{\text{mezzeria}}$	27.7	[$\mu\epsilon$]	Nodo 14	-28	[μm]
$\epsilon_{\text{incastro}}$	-55.3	[$\mu\epsilon$]	Nodo 2	55	[μm]

Tabella 5.4: Confronto valori deformazione analitica e numerica;

Nella trattazione in oggetto si considera d'interesse rilevare il valore della deformazione non esattamente in corrispondenza degli incastri ma in loro prossimità quindi nei nodi 3 e 25.

Per una visione globale si riportano i valori di curvatura ed il successivo calcolo di deformazione per i nodi 3,14 e 25 sia per la trave sana che per ogni step di danno modellato.

TRAVE SANA							
Curvatura χ			Deformazione ϵ				
Nodo 3	-0.0042	[1/m]	Nodo 3	0.000042	[m/m]	42	[μm]
Nodo 14	0.0028	[1/m]	Nodo 14	-0.000028	[m/m]	-28	[μm]
Nodo 25	-0.0042	[1/m]	Nodo 25	0.000042	[m/m]	42	[μm]

Tabella 5.5: Valori di curvatura e deformazione, trave sana;

TRAVE CON DANNO 1_H1,8cm							
Curvatura χ			Deformazione ϵ				
Nodo 3	-0.0042	[1/m]	Nodo 3	0.000042	[m/m]	42	[μm]
Nodo 14	0.0027	[1/m]	Nodo 14	-0.000027	[m/m]	-27	[μm]
Nodo 25	-0.0042	[1/m]	Nodo 25	0.000042	[m/m]	42	[μm]

Tabella 5.6: Valori di curvatura e deformazione, trave danno 1;

TRAVE CON DANNO 2_H1,6cm							
Curvatura χ			Deformazione ϵ				
Nodo 3	-0.0043	[1/m]	Nodo 3	0.000043	[m/m]	43	[μm]
Nodo 14	0.0026	[1/m]	Nodo 14	-0.000026	[m/m]	-26	[μm]
Nodo 25	-0.0042	[1/m]	Nodo 25	0.000042	[m/m]	42	[μm]

Tabella 5.7: Valori di curvatura e deformazione, trave danno 2;

TRAVE CON DANNO 3_H1,4cm							
Curvatura χ			Deformazione ϵ				
Nodo 3	-0.0044	[1/m]	Nodo 3	0.000044	[m/m]	44	[μm]
Nodo 14	0.0025	[1/m]	Nodo 14	-0.000025	[m/m]	-25	[μm]
Nodo 25	-0.0042	[1/m]	Nodo 25	0.000042	[m/m]	42	[μm]

Tabella 5.8: Valori di curvatura e deformazione, trave danno 3;

TRAVE CON DANNO 4_H1,2cm							
Curvatura χ			Deformazione ϵ				
Nodo 3	-0.0045	[1/m]	Nodo 3	0.000045	[m/m]	45	[μm]
Nodo 14	0.0024	[1/m]	Nodo 14	-0.000024	[m/m]	-24	[μm]
Nodo 25	-0.0042	[1/m]	Nodo 25	0.000042	[m/m]	42	[μm]

Tabella 5.9: Valori di curvatura e deformazione, trave danno 4;

TRAVE CON DANNO 5_H1,0cm								
Curvatura χ			Deformazione ϵ					
Nodo 3	-0.0047	[1/m]	Nodo 3	0.000047	[m/m]	47	[μ m]	
Nodo 14	0.0023	[1/m]	Nodo 14	-0.000023	[m/m]	-23	[μ m]	
Nodo 25	-0.0043	[1/m]	Nodo 25	0.000043	[m/m]	43	[μ m]	

Tabella 5.10: Valori di curvatura e deformazione, trave danno 5;

5.2.3 Trattazione Sperimentale

Si installano, presso il laboratorio LISG dell'Università di Bologna, 3 estensimetri nelle 3 posizioni significative d'interesse: in prossimità degli incastri e nella mezzeria.

Gli estensimetri, necessari al calcolo della deformazione, si applicano all'intradosso della trave in esame in corrispondenza dei nodi 3, 14 e 25.

Con l'aumento anomalo delle frequenze, identificate attraverso le prove dinamiche sulla trave oggetto di studio, si suppone presenza di trazione in fase di ammorsamento delle piastre che realizzano i vincoli d'incastro.

Si riporta la documentazione fotografica di quanto fatto operativamente per il montaggio della strumentazione.

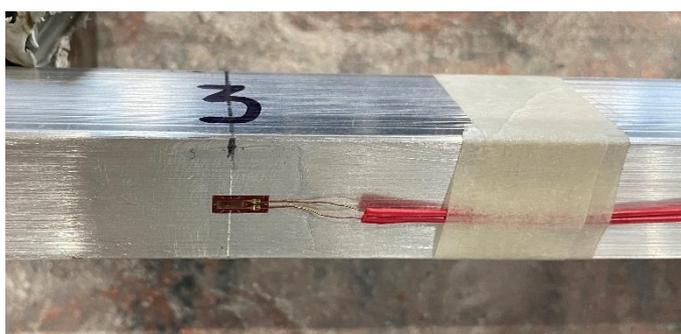


Figura 5.5: Montaggio estensimetro intradosso trave in prossimità incastro sx, nodo 3;



Figura 5.6: Strumentazione nodo 3, accelerometro-prova dinamica e estensimetro-prova statica;

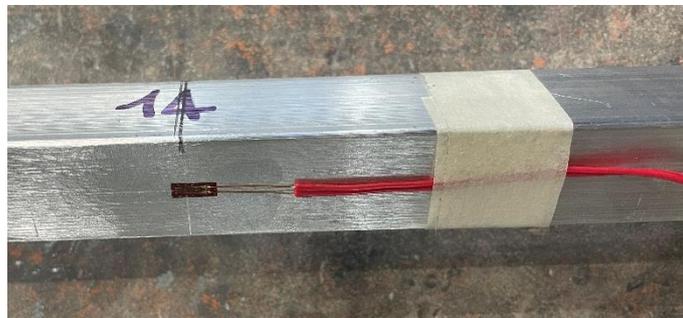


Figura 5.7: Montaggio estensimetro intradosso trave nella mezzeria, nodo 14;

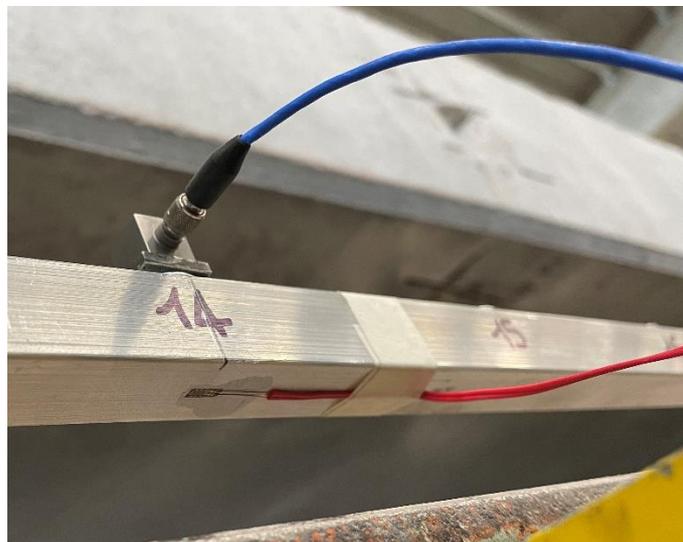


Figura 5.8: Strumentazione nodo 14, accelerometro-prova dinamica e estensimetro-prova statica;



Figura 5.9: Montaggio estensimetro intradosso trave in prossimità incastro dx, nodo 25;

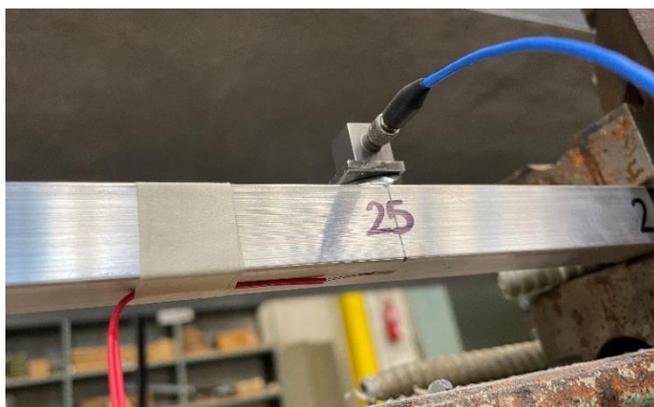


Figura 5.10: Strumentazione nodo 25, accelerometro-prova dinamica ed estensimetro-prova statica;

Si riassumono di seguito, con una serie di figure illustrative, gli step principali del collegamento dei cavi e dell'avvio delle prove statiche per acquisire i valori di deformazione.



Figura 5.11: Collegamento estensimetri alla centralina IP 137.204.83.219;



Figura 5.12: Collegamento ai canali 2-3-4 gli estensimetri nodo 3-14-25;

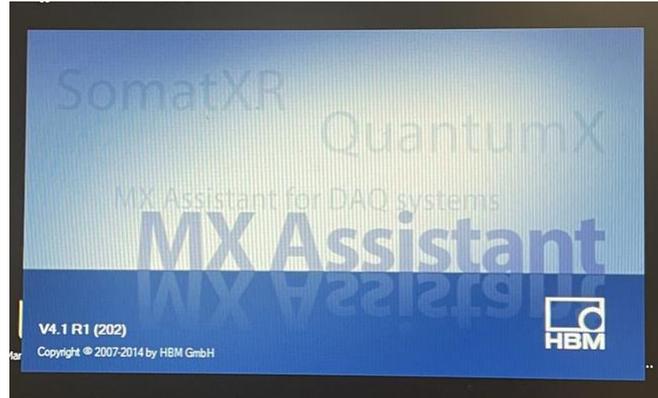


Figura 5.13: Apertura software MX Assistant di rilevazione;

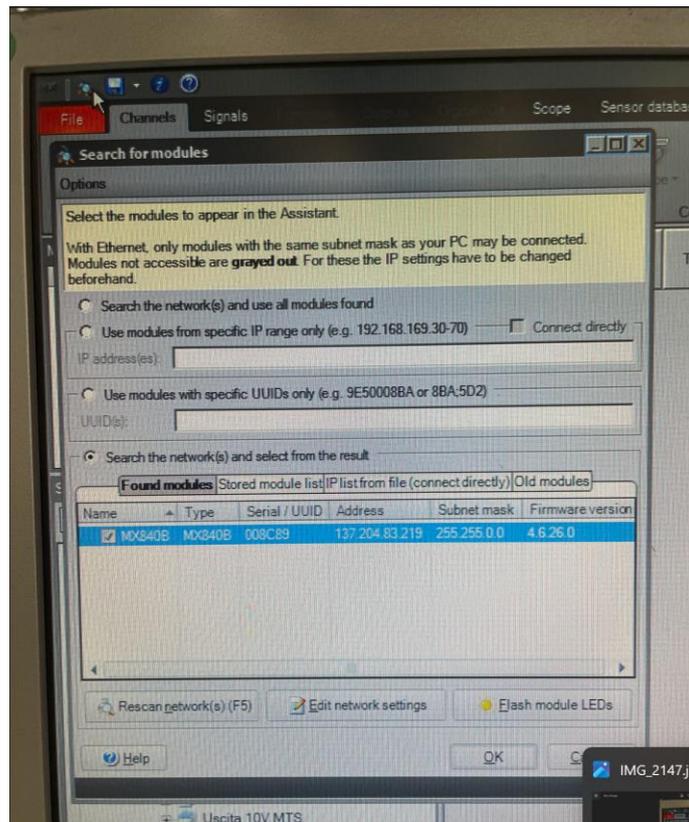


Figura 5.14: Finestra di riconoscimento della centralina nel software MX Assistant dalla lente;

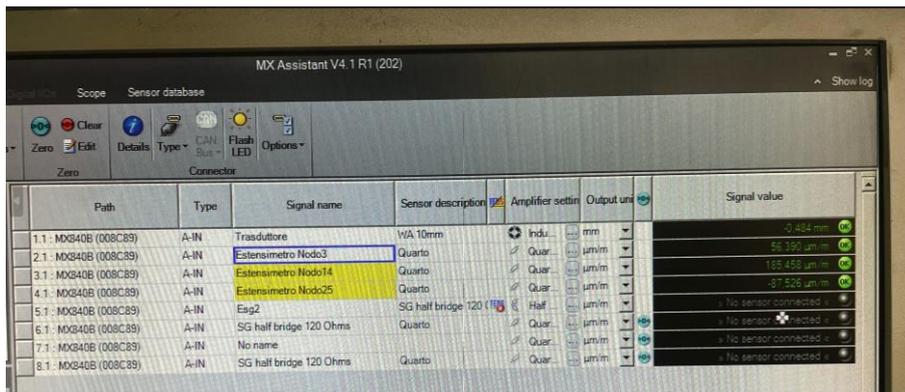


Figura 5.15: Finestra acquisizione valori deformazione da estensimetri nel software MX Assistant;

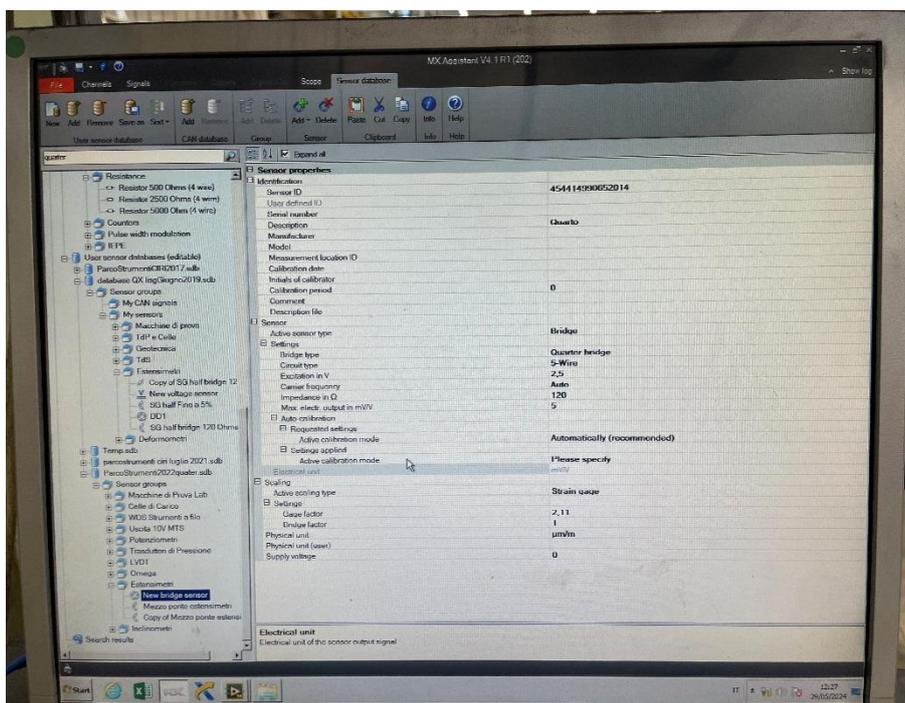


Figura 5.16: Finestra attribuzione tipologia estensimetri: Quarto di Ponte con Gadge Factor 2,11;

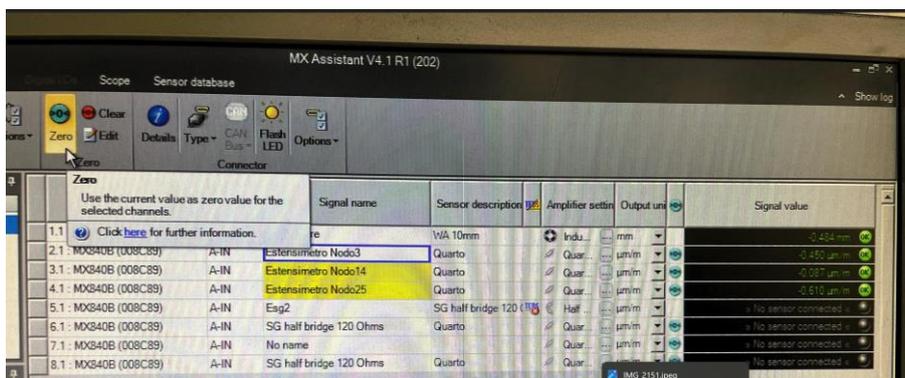


Figura 5.17: Finestra acquisizione valori deformazione con azzeramento nel software MX Assistant;



Figura 5.18: Finestra apertura software LabVIEW2014 per registrazione valori deformazione;

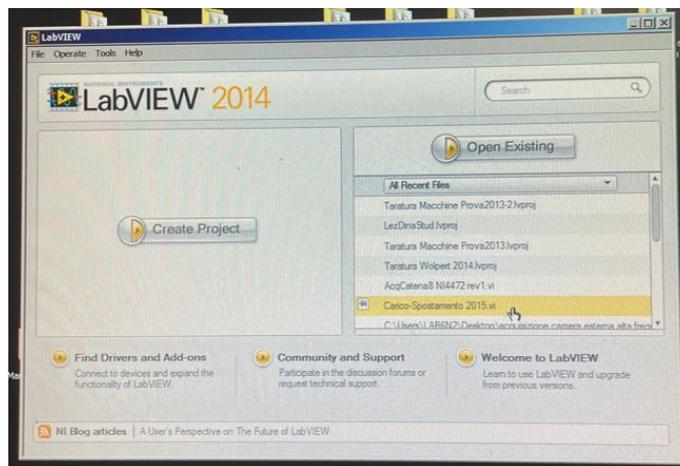


Figura 5.19: Finestra di selezione Carico Spostamento 2015.vi software LabVIEW2014

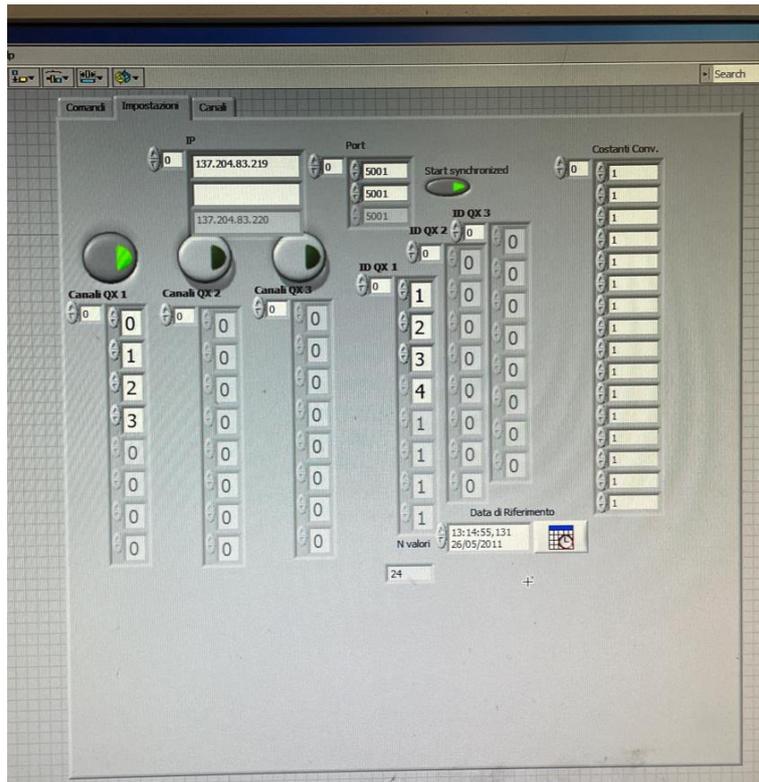


Figura 5.20: Finestra attribuzione centralina e comandi nel software LabVIEW2014

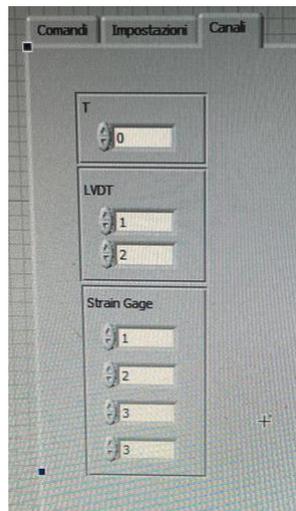


Figura 5.21: Finestra attribuzione canali di acquisizione nel software LabVIEW2014

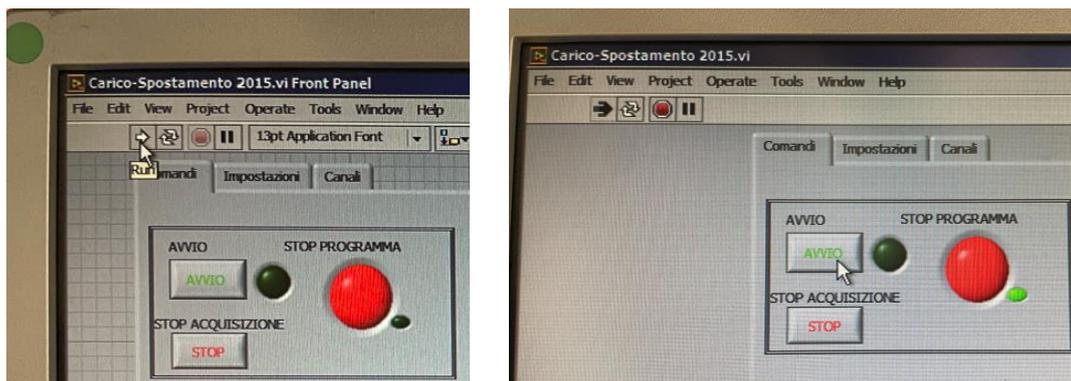


Figura 5.22: Finestre avvio della registrazione dei dati nel software LabVIEW2014;

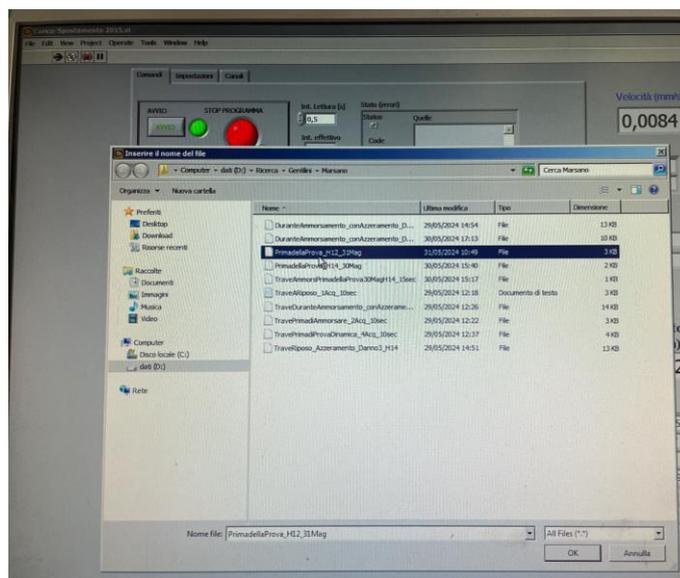


Figura 5.23: Finestra salvataggio dati acquisiti in file.txt nel software LabVIEW2014;

Dalle acquisizioni effettuate durante l'ammorsamento dei vincoli nelle condizioni di trave danneggiata, si ottengono dei file ".txt" in cui si stampano: nella prima colonna i valori di deformazione dell'estensimetro posto in corrispondenza del nodo 3 e collegato al primo canale della centralina, nella seconda colonna i valori dell'estensimetro posto nel nodo 14 e collegato al secondo canale della centraline ed infine nella terza colonna i valori di deformazione dell'estensimetro posto nel nodo 25 e collegato al terzo canale della centralina.

L'estrapolazione dei dati, si esegue attraverso uno script Matlab il quale prende in input i file ".txt" in questione e restituisce in output il plot dell'andamento delle deformazioni con i corrispettivi valori in ordinata, nelle condizioni in cui si trova la trave durante le acquisizioni effettuate.

Si riportano i grafici di estrapolazione ottenuti in Matlab in cui si ha in ascissa il tempo in secondi, ossia la durata dell'acquisizione e in ordinata il valore della deformazione in microepsilon.

Dalle acquisizioni eseguite in data 29 maggio 2024 con trave al secondo e terzo step di danno, ossia con altezza residua dell'elemento 10 danneggiato rispettivamente pari a $H = 1,6 \text{ cm}$ e $H = 1,4 \text{ cm}$, si ottiene:

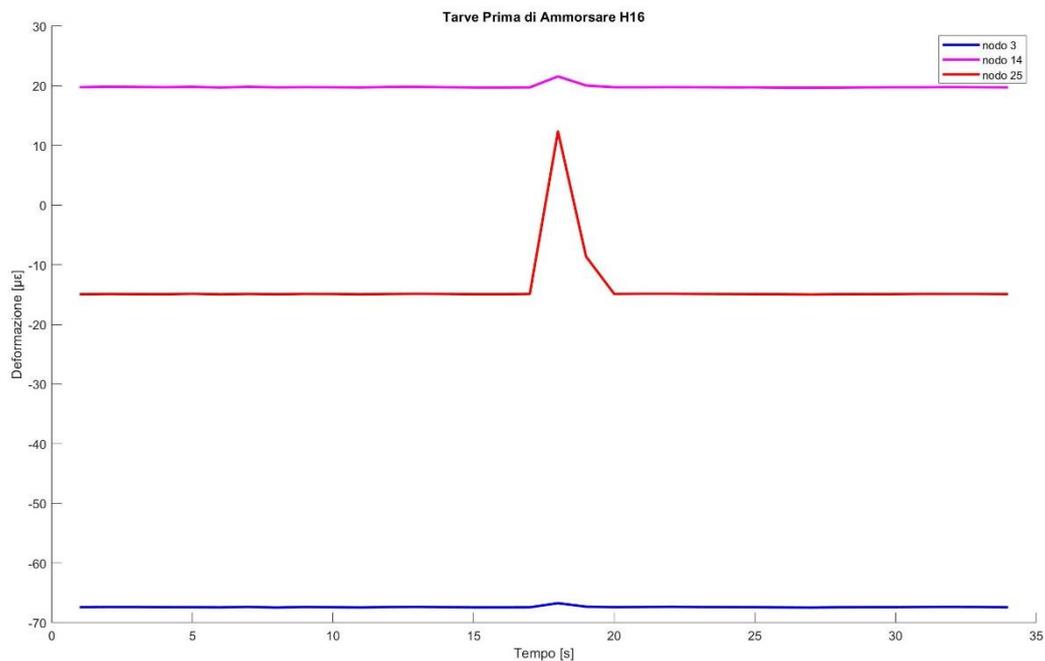


Figura 5.24: Valori deformazione, trave con danno 2 senza vincoli d'incastro;

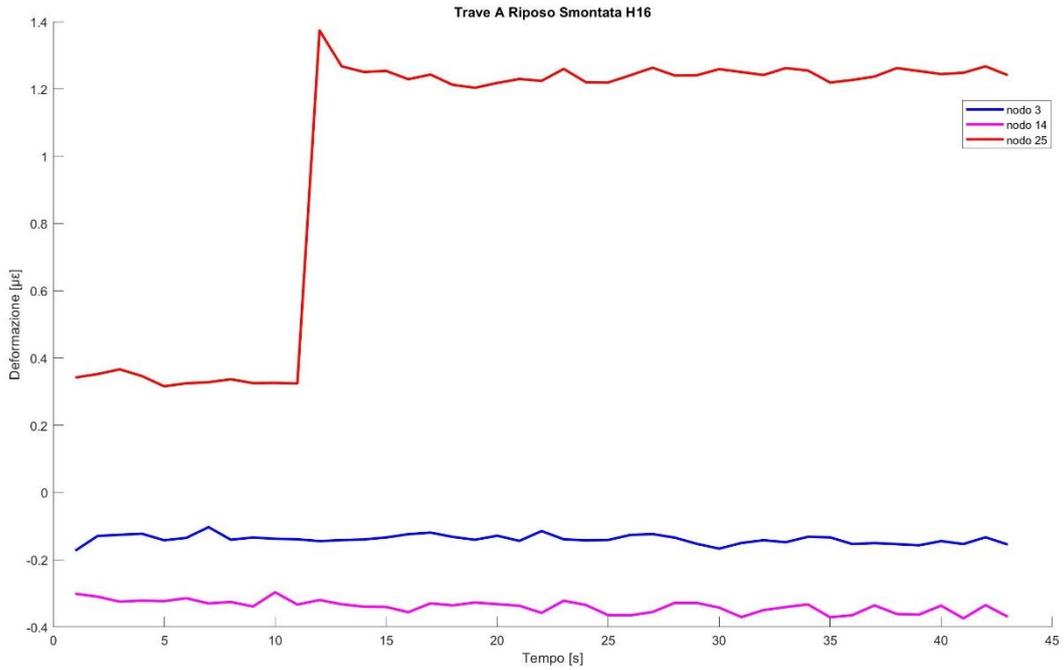


Figura 5.25: Deformazione trave con estremi liberi con danno 2;

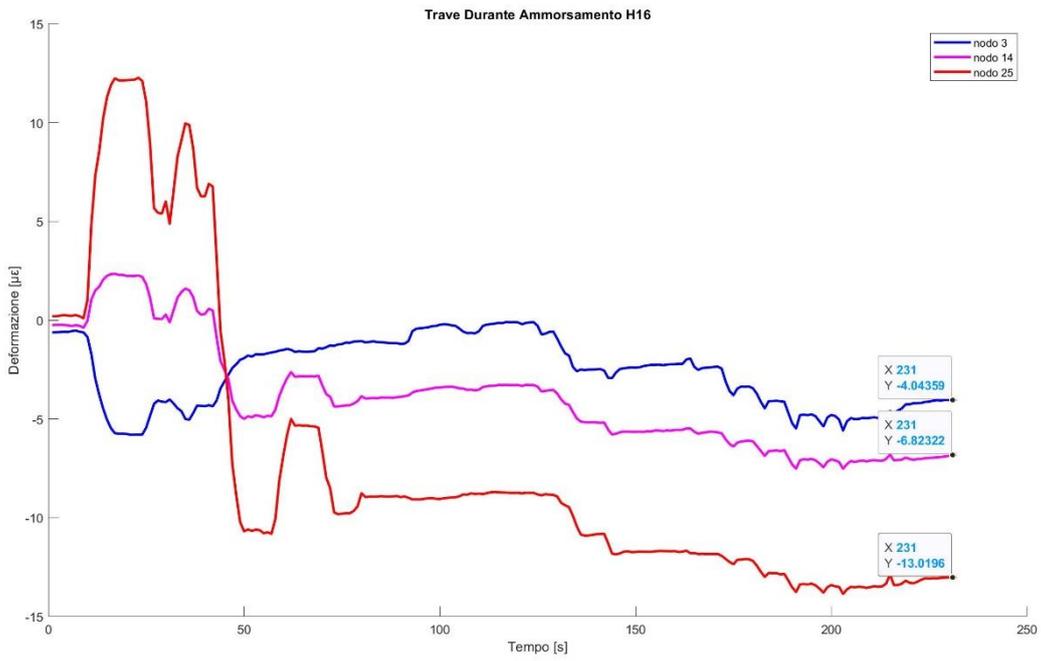


Figura 5.26: Valori deformazione durante ammorsamento vincoli sulla trave con danno2;

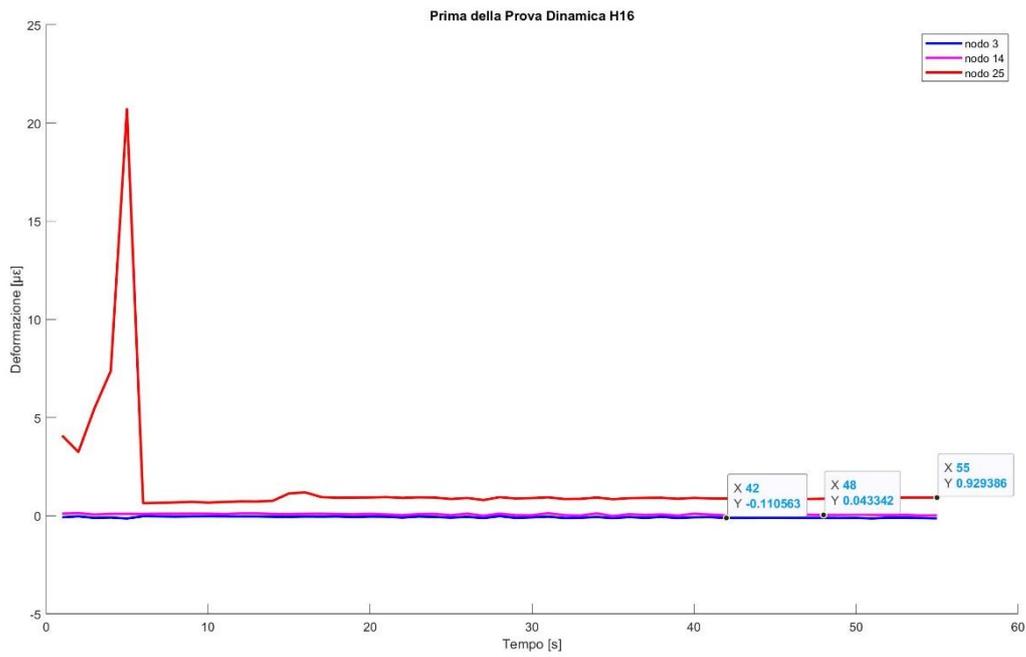


Figura 5.27: Valori deformazione trave incastro-incastro con danno 2;

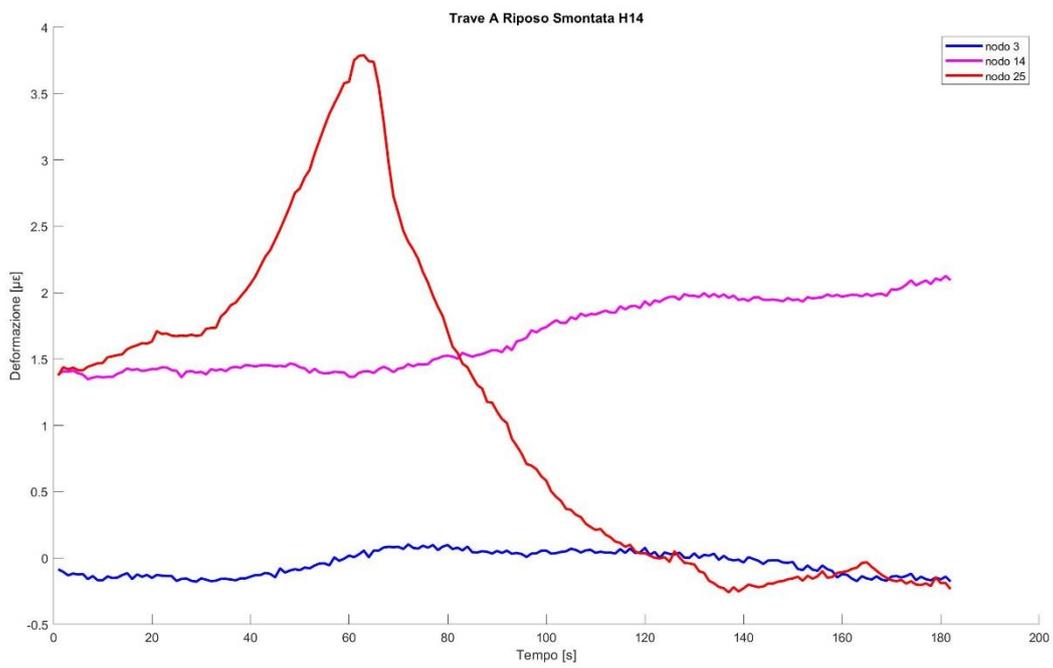


Figura 5.28: Deformazione trave con estremi liberi con danno 3;

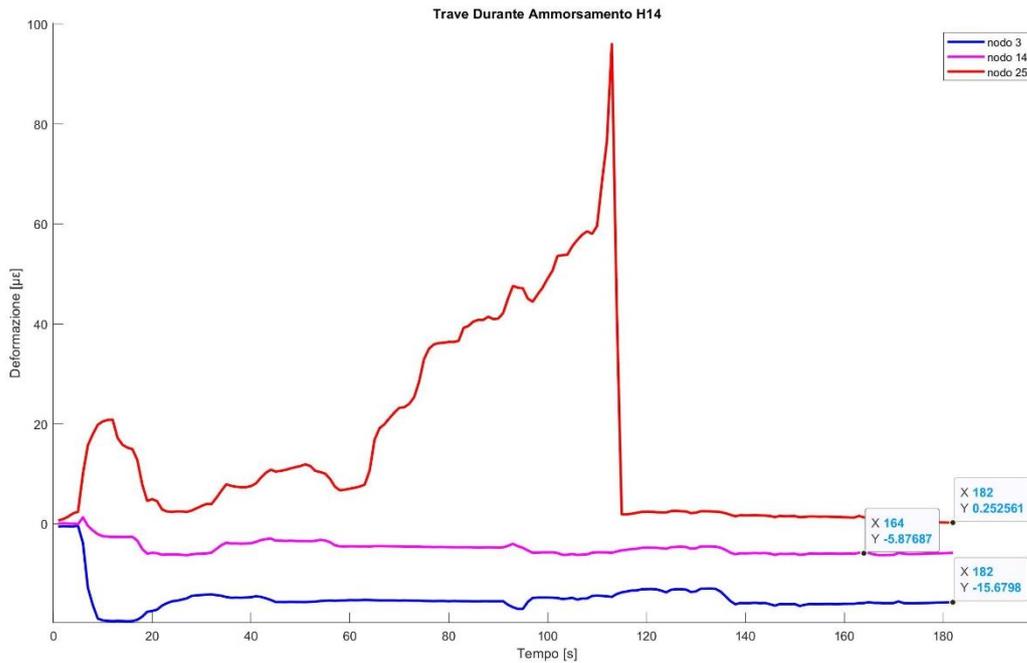


Figura 5.29: Valori deformazione durante ammorsamento vincoli sulla trave con danno3;

Si riportano i grafici di estrapolazione delle acquisizioni eseguite nelle date 30 maggio 2024 e 31 maggio 2024 con trave al quarto e quinto step di danno, ossia con altezza residua dell'elemento 10 danneggiato rispettivamente pari a $H = 1,2 \text{ cm}$ e $H = 1,0 \text{ cm}$.

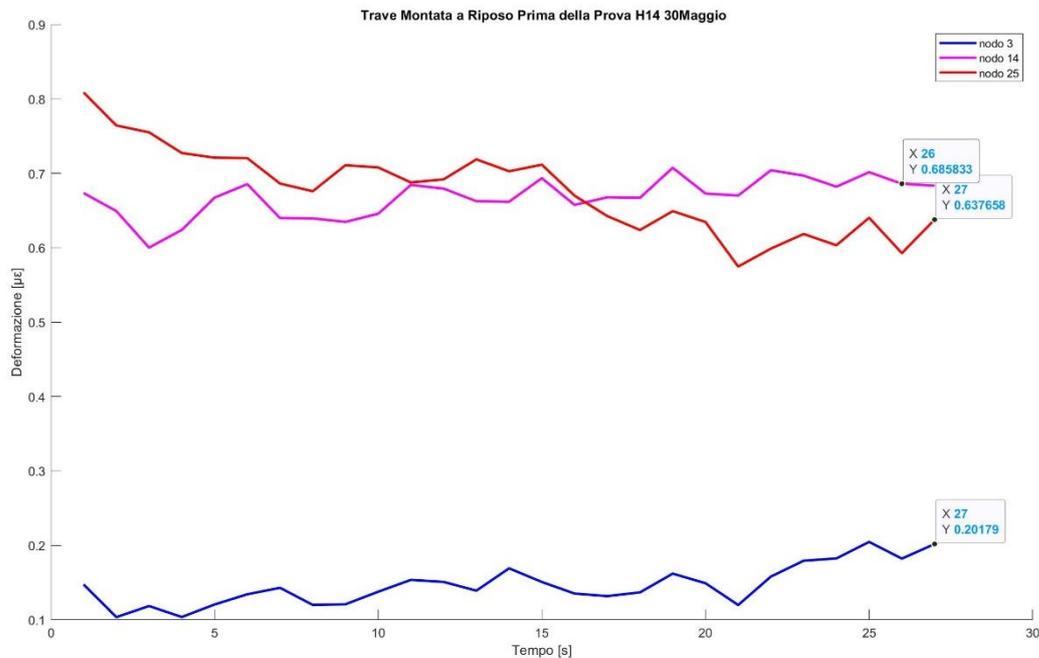


Figura 5.30: Valori deformazione trave incastro-incastro con danno3;

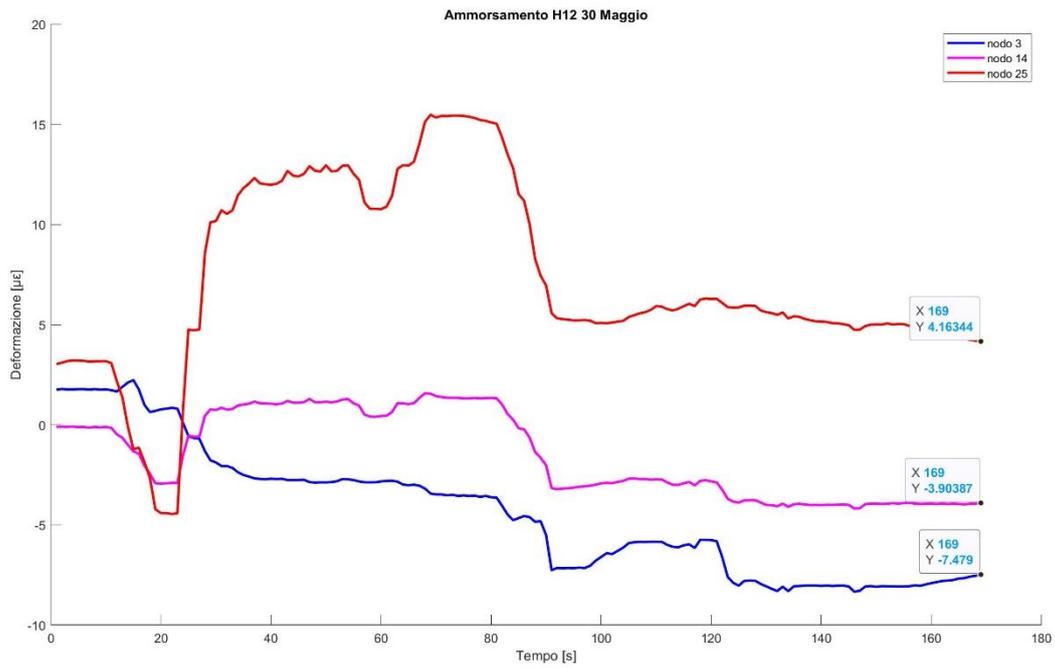


Figura 5.31: Valori deformazione durante ammorsamento vincoli sulla trave con danno4;

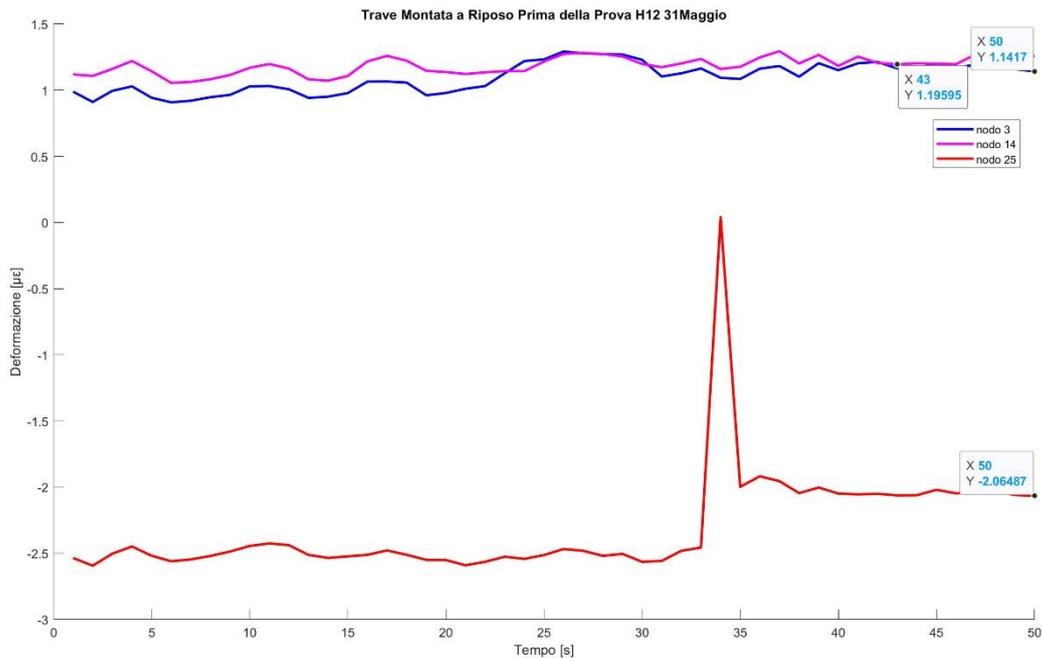


Figura 5.32: Valori deformazione trave incastro-incastro con danno4;

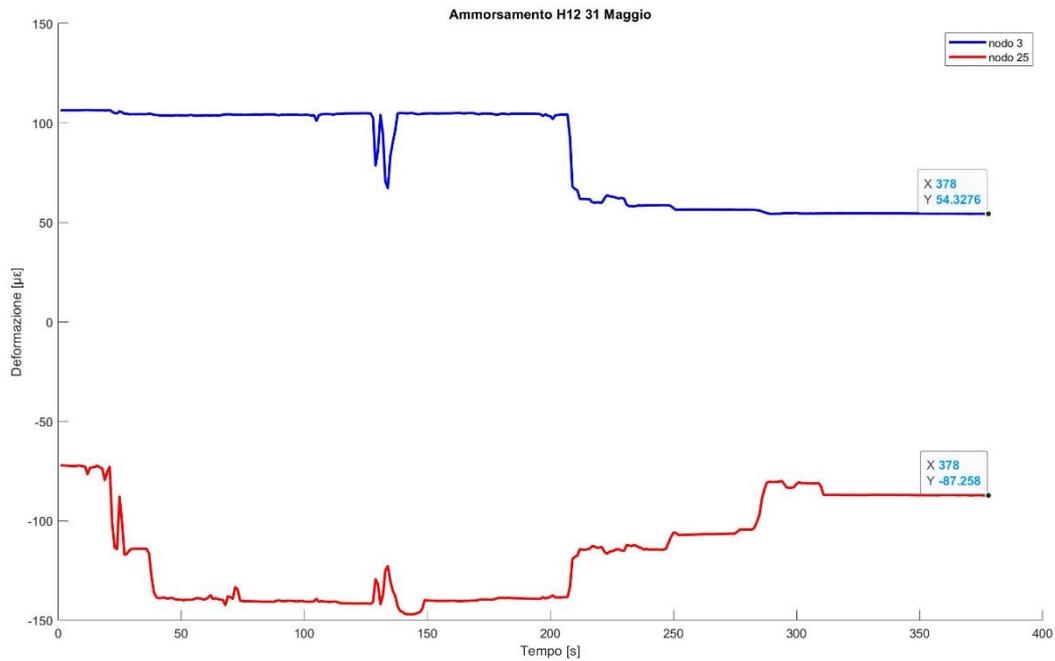


Figura 5.33: Valori deformazione durante ammorsamento vincoli sulla trave con danno4;

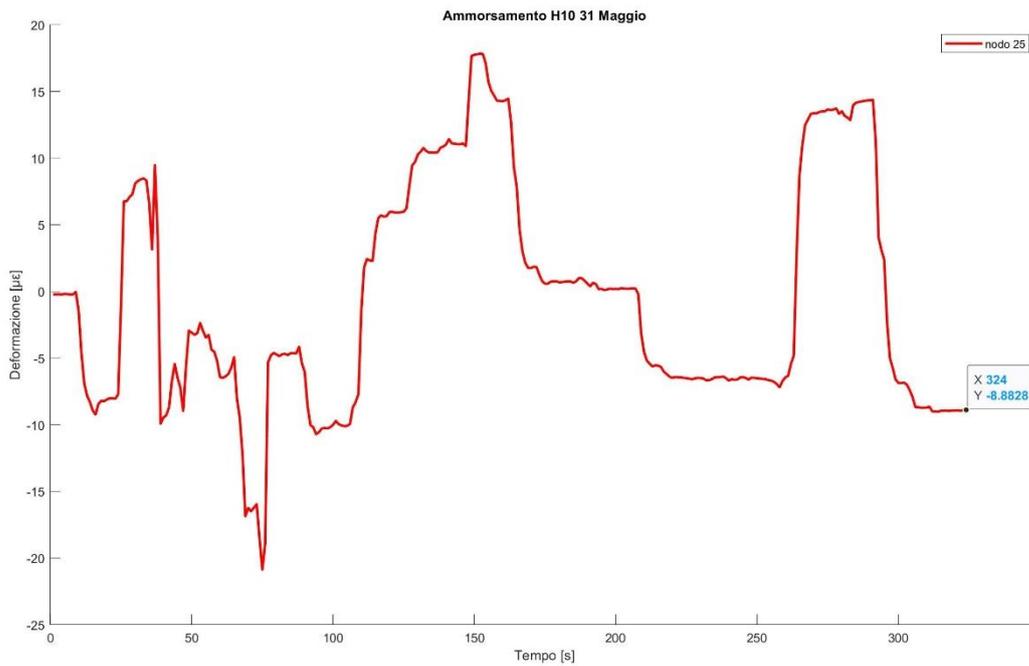


Figura 5.34: Valori deformazione durante ammorsamento vincoli sulla trave con danno5;

Si effettuano le acquisizioni dei valori della deformazione, oltre che con il software LabVIEW2014, anche manualmente.

Durante le giornate di sperimentazione, in alcuni casi si registrano i valori di deformazione prima dell'applicazione dei vincoli, ossia nelle condizioni di

trave con estremi liberi e poi dopo l'ammorsamento dei vincoli quindi per una trave doppiamente incastrata con diverse condizioni di danno dell'elemento 10.

In altri casi invece, si estrapolano manualmente i valori di deformazione nelle condizioni di trave incastrata agli estremi ma prima e dopo l'esecuzione della prova dinamica. Tale procedimento può essere fatto solo manualmente in quanto non si possono fare acquisizioni statiche e dinamiche simultaneamente con i software a disposizione.

Si riporta tabellato quanto detto.

Acquisizioni del 29 Maggio 2024					
Danno 3_H1,4cm					
Deformazione Sperimentale ϵ					
Trave Estremi Liberi			Trave Incastro-Incastro		
Nodo 3	61	[μm]	Nodo 3	47	[μm]
Nodo 14	176	[μm]	Nodo 14	170	[μm]
Nodo 25	-115	[μm]	Nodo 25	-112	[μm]

Figura 5.11: Estrapolazione manuale dei valori di deformazione, trave con danno 3;

Acquisizioni del 30 Maggio 2024						
Trave Incastro-Incastro						
Danno 3_H1,4cm						
Deformazione Sperimentale ϵ						
	Inizio Prova		Durante Prova		Fine Prova	
Nodo 3	51	[μm]	52	[μm]	53	[μm]
Nodo 14	171	[μm]	175	[μm]	178	[μm]
Nodo 25	-98	[μm]	-93	[μm]	-92	[μm]

Figura 5.12: Estrapolazione manuale dei valori di deformazione, trave con danno 3;

Acquisizioni del 30 Maggio 2024				
Trave Incastro-Incastro				
Danno 4_H1,2cm				
Deformazione Sperimentale ϵ				
	Inizio Prova		Fine Prova	
Nodo 3	64	[μm]	58	[μm]
Nodo 14	207	[μm]	200	[μm]
Nodo 25	-115	[μm]	-78	[μm]

Figura 5.13: Estrapolazione manuale dei valori di deformazione, trave con danno 4;

Acquisizioni del 31 Maggio 2024					
Danno 4_H1,2cm					
DeformazioneSperimentale ϵ					
Trave Estremi Liberi			Trave Incastro-Incastro		
Nodo 3	104	[μm]	Nodo 3	53	[μm]
Nodo 25	-60	[μm]	Nodo 25	-90	[μm]

Figura 5.14: Estrapolazione manuale dei valori di deformazione, trave con danno 4;

Acquisizioni del 31 Maggio 2024					
Danno 5_H1,0cm					
DeformazioneSperimentale ϵ					
Trave Estremi Liberi			Trave Incastro-Incastro		
Nodo 25	-77	[μm]	Nodo 25	-117	[μm]

Figura 5.15: Estrapolazione manuale dei valori di deformazione, trave con danno 5;

Dalle acquisizioni sperimentali dei valori di deformazione attraverso prove statiche eseguite con estensimetri si evince facilmente che l'ipotesi di trazione durante l'ammorsamento delle piastre che riproducono i vincoli d'incastro non è verificata. Dunque, l'aumento anomalo delle frequenze valutate attraverso prove dinamiche non è giustificato dalla nascita di trazione durante l'applicazione dei vincoli.

Inoltre, sia dalle registrazioni con il software LabVIEW2024 sia dalle acquisizioni manuali si constata che la simmetria attesa nei nodi prossimi all'incastro (nodo3 e nodo25), sperimentalmente non è rispettata.

CONCLUSIONI

Nel presente elaborato sono state eseguite prove dinamiche su una trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi al fine di identificare i parametri dinamici che la caratterizzano, ossia le frequenze naturali ed i modi di vibrare.

Sono state svolte tre diverse tipologie di analisi:

- Analisi analitica mediante la risoluzione del problema al continuo;
- Analisi numerica “Natural Frequency” sul modello FEM mediante l’utilizzo del software Straus7;
- Analisi sperimentale attraverso due tecniche differenti: Roving Hammer e Roving Sensor.

Per ogni tipologia di analisi sono stati ottenuti i valori delle prime quattro frequenze. Successivamente, sia per l’analisi numerica che per quella sperimentale, sono stati estrapolati i valori numerici e gli andamenti grafici dei quattro modi di vibrare. Sperimentalmente, le forme modali ottenute dalla tecnica del Roving Sensor risultano più accurate rispetto a quelle ottenute dalla tecnica del Roving Hammer. I risultati sperimentali delle frequenze, seppur soggetti ad incertezze, sono assolutamente confrontabili con quelli ottenuti analiticamente e numericamente.

Nel corso dello studio sperimentale è stata prestata particolare attenzione alle incertezze che possono influire sull’aumento/diminuzione dei valori numerici delle frequenze. Le incertezze sono dovute a:

- Rumore sperimentale;
- Condizioni di vincolo non riprodotte in modo esatto;
- Variazioni di temperatura.

Nel dettaglio, è stata monitorata la variazione di deformazione

longitudinale della trave durante l'ammorsamento delle piastre che realizzano gli incastri alle estremità. La deformazione è stata misurata analiticamente attraverso l'applicazione della teoria flessionale delle travi, numericamente attraverso l'estrapolazione della curvatura dal software di calcolo Straus7 ed infine sperimentalmente attraverso l'utilizzo di estensimetri a variazione di resistenza.

Dalle analisi condotte è stato rilevato, tramite opportuni confronti, che l'ammorsamento dei vincoli alle estremità non provoca l'insorgere di forze di trazione rilevanti che possono alterare significativamente i valori numerici delle frequenze.

Dunque, l'aumento anomalo delle frequenze valutate attraverso prove dinamiche non è giustificato dalla nascita di trazione durante l'applicazione dei vincoli.

Una maggiore influenza sui risultati delle frequenze è stata invece riscontrata dal monitoraggio dell'andamento delle frequenze in funzione della variazione termica ambientale. Sono state misurate le frequenze in differenti giornate di prova caratterizzate da differenti condizioni termiche ambientali. Sono stati realizzati grafici di dispersione esplicativi di tale influenza.

È emerso dall'andamento dei grafici che le frequenze diminuiscono all'aumentare della temperatura, come atteso. È stata costruita una retta di interpolazione dei dati che è risultata pressoché identica per le quattro frequenze ed in particolare l'equazione che la caratterizza presenta un coefficiente angolare crescente all'aumentare della frequenza. Questo ha portato alla luce che le alte frequenze sono più sensibili alla variazione termica. Infatti, per una variazione di temperatura $\Delta T = 14,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ ottenuta dalla differenza tra la temperatura massima e la temperatura minima riscontrata nei giorni di prova, si ha una variazione sulla prima e sulla quarta frequenza rispettivamente pari a: $\Delta f_1 = 2,5\text{ Hz}$ e $\Delta f_4 = 4,4\text{ Hz}$. Globalmente però, in termini percentuali si ha una variazione del 16,1 % sulla prima frequenza e del 2,8% sulla quarta frequenza.

È stata eseguita la caratterizzazione dinamica oltre che per la trave integra anche per la trave danneggiata. È stato in prima battuta modellato il danno sul software Straus7 e successivamente è stato riprodotto sperimentalmente in laboratorio utilizzando una macchina fresatrice. È stato effettuato un danneggiamento progressivo e localizzato su un elemento lungo 10 cm della trave. Anche in questo caso, è stata studiata la variazione del valore numerico delle frequenze sperimentali in funzione dell'aumento dello step di danno. Il livello di danno è stato tradotto in variazione percentuale di freccia, ossia di spostamento verticale dell'asse della trave soggetta al solo peso proprio. In funzione di tale parametro è stato graficato l'andamento della variazione delle quattro frequenze.

Dall'andamento dei grafici è stato constatato che le frequenze ottenute sperimentalmente diminuiscono all'aumentare progressivo del danno.

La tendenza della retta interpolante è pressoché identica per le quattro frequenze, in particolare presenta un coefficiente angolare crescente all'aumentare della frequenza. Da ciò è stato dedotto che le alte frequenze risentono maggiormente dell'aumento del danno. Infatti, la differenza sulla prima e sulla quarta frequenza, determinate sperimentalmente con il massimo e minimo livello di danno, è pari rispettivamente a: $\Delta f_1 = 1,4 \text{ Hz}$ e $\Delta f_4 = 5,8 \text{ Hz}$. A livello percentuale però si ha una variazione del 9 % sulla prima frequenza e del 3,8% sulla quarta frequenza.

Infine, i parametri dinamici, determinati sia numericamente che sperimentalmente per la trave oggetto di studio discretizzata dapprima con 24 elementi finiti e poi con 12 elementi finiti, sono stati utilizzati con l'obiettivo di testare l'algoritmo di identificazione del danno, implementato in Matlab.

Sono stati assegnati all'algoritmo i dati geometrici e meccanici della trave e attraverso un file ".mat", sono stati attribuiti i valori delle frequenze e degli spostamenti verticali relativi ai modi di vibrare sia per la trave integra che per tutte le misurazioni effettuate per tutti e cinque gli step di danno riprodotti in laboratorio.

L'operazione di identificazione del danno e della sua posizione viene effettuata dall'algoritmo tramite il calcolo delle curvature modali χ mediante l'approssimazione alle differenze centrali.

Il danno, modellato in Straus7 e riprodotto in laboratorio, interessa l'altezza di un elemento della trave in alluminio oggetto di studio e parte da un valore minimo di 2 mm fino ad un valore massimo di 1 cm , corrispondenti rispettivamente al 10% ed al 50% dell'altezza della sezione dell'elemento.

È emerso che, fornendo in input all'algoritmo i parametri di caratterizzazione dinamica numerici estrapolati dal software Straus7, esso è in grado di identificare perfettamente la porzione di trave danneggiata per ogni step di danno, sia per una discretizzazione più fitta a 24 elementi finiti che per una discretizzazione più rada a 12 elementi finiti. Questo si verifica perché il modello numerico non tiene in considerazione alcun tipo di incertezza (rumore).

Invece, fornendo in input all'algoritmo i valori delle frequenze e dei modi di vibrare determinati sperimentalmente per la trave in alluminio doppiamente incastrata agli estremi, esso performa in maniera differente nei confronti dei due tipi di discretizzazione, a 12 e 24 elementi finiti.

In particolare, per una trave discretizzata con 12 elementi finiti l'algoritmo identifica esattamente la posizione del difetto ad ogni step di danno riprodotto sperimentalmente. Per il più piccolo danno sull'altezza dell'elemento, ossia di soli 2 mm , l'algoritmo, per una trave discretizzata con 12 elementi finiti, individua correttamente la porzione danneggiata. Al contrario, con una mesh di 24 elementi finiti, l'algoritmo non riconosce correttamente la posizione dell'elemento danneggiato per il primo ed il secondo step di danno, ossia quando l'altezza della sezione dell'elemento si riduce di 2 mm e 4 mm con altezza residua rispettivamente pari a $H = 1,8\text{ cm}$ e $H = 1,6\text{ cm}$.

Quindi, l'utilizzo di un minor numero di elementi finiti comporta

l'identificazione di qualsiasi livello di danno, anche minimo. Pur eseguendo la caratterizzazione dinamica su meno punti, si mantiene un'alta precisione e coerenza dei valori numerici delle frequenze e dei modi di vibrare della trave a discapito però di una caratterizzazione meno "smooth" dell'andamento grafico delle forme modali.

In definitiva, è preferibile effettuare un monitoraggio dinamico su una mesh più rada poiché con l'algoritmo di identificazione del danno che si ha a disposizione si ottiene una maggiore accuratezza dei risultati.

È opportuno sottolineare che nelle strutture esistenti, la condizione di avere pochi punti ispezionati durante un monitoraggio dinamico al fine di valutare la presenza di difetti, è la più rappresentativa della realtà in quanto si ha difficoltà nel reperire un numero elevato di strumenti di misura. Tale scelta è dettata anche dalla necessità di ammortizzare i costi legati al monitoraggio.

BIBLIOGRAFIA

BALDACCI R., CERADINI G., GIANGRECO E., *Dinamica e stabilità*, CISIA - Centro Italiano Sviluppo Impieghi Acciaio, Milano, 1971.

CAPURSO M., *Introduzione al calcolo automatico delle strutture*, ESAC, Edizioni scientifiche cremonese, Roma, 1983.

CASTIGLION A., *Introduzione alla dinamica delle strutture*, Masson Italia Editori, Milano, 1978.

CESARI F., *Metodi di calcolo nella dinamica delle strutture*, Pitagora Editrice, Bologna, 1997.

CLOUGH R.W., PENZIEN J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill International Editions, 1986.

CRAIG R.R., *Structural Dynamics*, John Wiley & Sons, New York, 1981.

DIANA G., CHELI F., *Dinamica e vibrazione dei sistemi*, Voll. 1, 2, UTET Libreria, Torino, 1993.

DIMARAGONAS A.D., HADDAD S., *Vibration for Engineers*, Prentice Hall International, Inc. 1992.

FABRIZIO M., *La Meccanica Razionale e i suoi metodi matematici*, Zanichelli, Bologna, 1989.

GAVARINI C., *Dinamica delle strutture*, ESA - Roma, 1984.

GERADIN M., RIXEN D., *Mechanical Vibrations*, Masson, Paris, 1994.

GRAFF K.F., *Wave Motion Elastic Solids*, Dover publications, Inc., New York, 1975.

HURTY W.C., RUBINSTEIN M.F., *Dynamics of Structures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

KELLY S.G., *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1993.

MEIROVICH L., *Elements of Vibrations Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.

PAZ M., *Dinamica strutturale*, Libreria Flaccovio Editrice, Palermo, 1985.

RAMASCO R., *Dinamica delle strutture*, CUEN, Quaderni di Ingegneria Strutturale, Napoli, 1993.

RAO S.S., *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley Publishing Company Reading, 1990.

SHABANA A.A., *Theory of Vibration, Volume I: An Introduction*. Springer-Verlag, New York, 1991.

SPIEGEL M.R., *Meccanica Razionale*, Collana Schaum - Etas Libri, 1974.

STOPPELLI F., *Appunti di Meccanica Razionale*, Liguori, Napoli, 1967.

STRUMIA A., *Meccanica Razionale*, C.U.S.L., Bologna, 1990.

THOMSON W.T., *Theory of Vibration with Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

TIMOSHENKO S., YOUNG D.H., WEAVER W., *Vibration Problems in Engineering*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

TONTI E., *Finite Formulation of the Electromagnetic Field, Geometric Methods for Computational Electromagnetics; Monograph Series: Progress In Electromagnetics Research*, PIER 32, 2001, pp. 1-44.

TONTI E., *Formulazione Finita delle Equazioni di Campo: il Metodo delle Celle*, Atti del XIII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale. Brescia, 13-15 novembre 2000, pp. 2-41.

TONTI E., *la struttura formale delle teorie fisiche*, CLUP, Cooperativa libreria universitaria del politecnico di milano, Luglio 1976

VIOLA E., *Fondamenti di analisi matriciale delle strutture*, Pitagora Editrice, Bologna, 1996.

VIOLA E., *Fondamenti di dinamica e vibrazione delle strutture, Volume II: Sistemi continui*, Pitagorà Editrice Bologna, 2023

VIOLA E., MONDUCCI G., *Identificazione dinamica dei parametri modali in presenza di smorzamento non proporzionale*, Il Convegno nazionale del gruppo AIMETA di Meccanica Stocastica. Lampedusa, 1-3 giugno 1998.