Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

GENESI STRUMENTALE NELLO STUDIO DELL'ALGEBRA LINEARE: UN'ANALISI SPERIMENTALE TRA SOGGETTI CON DISABILITA' VISIVE

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Maffia

Presentata da:
Valentina Bernabè

Anno Accademico 2023-2024

Introduzione

L'accesso all'istruzione superiore rappresenta una sfida significativa per le persone con disabilità visive, in particolare nel contesto delle discipline scientifiche e matematiche. Tra queste, l'algebra lineare è una materia di fondamentale importanza, ma anche una delle più complesse, specialmente per chi non può avvalersi del supporto visivo. Il presente studio si propone di esplorare come gli strumenti didattici e tecnologici possano essere adattati per facilitare lo studio dell'algebra lineare da parte di soggetti con disabilità visive, indagando in particolare i processi di instrumentation e instrumentalisation.
Gli obiettivi principali di questo lavoro sono comprendere in che modo gli studenti con disabilità visive interagiscono con gli strumenti a loro disposizione e come tali strumenti possano essere ottimizzati per migliorare l'apprendimento. L'interesse per questo argomento nasce dalla consapevolezza che, nonostante l'importanza della tematica, la letteratura esistente è ancora scarsa. Pertanto, questa ricerca mira a colmare parzialmente questo vuoto, offrendo spunti significativi per la didattica della matematica.
La metodologia adottata per questo studio si basa su interviste task-based condotte con tre soggetti con disabilità visive. Le interviste sono state trascritte e analizzate, fornendo dati preziosi per la discussione dei risultati. Questo approccio qualitativo ha permesso di ottenere una comprensione profonda delle esperienze individuali e delle difficoltà incontrate nello studio dell'algebra lineare.
La struttura della tesi è articolata come segue: nel primo capitolo viene presentata una panoramica generale delle disabilità visive, con un focus sulle difficoltà che gli individui con tali disabilità affrontano nel contesto universitario, nel secondo si discute la didattica dell'algebra lineare, mettendo in luce le problematiche specifiche della disciplina, il terzo capitolo offre il quadro teorico necessario per comprendere i concetti di artefatti, strumenti, genesi strumentale, instrumentation e instrumentalisation, nel quarto si descrive la metodologia della ricerca, dettagliando il processo di raccolta e analisi dei dati, il quinto capitolo presenta i dati raccolti dalle interviste, fornendo una base empirica per la discussione, nel sesto si discutono i risultati delle interviste alla luce del quadro teorico, offrendo interpretazioni e implicazioni pratiche, il settimo capitolo conclude il lavoro di tesi, evidenziando i limiti della ricerca, le implicazioni didattiche e i possibili sviluppi futuri.
In appendice sono incluse le trascrizioni complete delle interviste, offrendo ulteriore tra-

sparenza e dettagli sul processo di ricerca.
Con questa struttura, la tesi intende fornire un contributo alla comprensione e al miglioramento delle pratiche didattiche per gli studenti con disabilità visive, con l'auspicio che le conclusioni possano guidare futuri sviluppi nella progettazione di strumenti didattici più inclusivi ed efficaci.

Indice

Introduzione **ii**

1 Disabilità visiva **1**
1.1 Didattica per persone con disabilità visiva 2
1.2 Disabilità visive e rendimento accademico 3
1.3 Ruolo dei sensi nell'apprendimento 5
1.4 Braille 7
1.5 LaTeX 10

2 Didattica dell'algebra lineare **11**
2.1 Difficoltà legate all'algebra lineare 12
2.2 Un punto di vista storico 13
2.3 Alcune possibili soluzioni 14

3 Quadro teorico **16**
3.1 Artefatti e strumenti 16
3.2 Artefatti e cognizione 18
3.3 Attività mediate dagli strumenti 19
3.4 Instrumentation e Instrumentalisation 21
3.5 Genesi strumentale 22
3.6 Sistemi di strumenti 23

4 Metodologia di ricerca **25**
4.1 Descrizione dell'intervista 28
4.2 Presentazione dei soggetti 31

5 Dati **32**
5.1 Intervista a Bianca 32
5.1.1 Esercizio 1 33
5.1.2 Esercizio 2 35
5.1.3 Esercizio 3 37

5.1.4 Esercizio 4 . . . 39
5.1.5 Esercizio 5 . . . 40
5.1.6 Domande 1 & 2 . . . 42
5.2 Intervista ad Ale Micarti . . . 43
5.2.1 Esercizio 1 . . . 44
5.2.2 Esercizio 2 . . . 45
5.2.3 Esercizio 3 . . . 46
5.2.4 Esercizio 4 . . . 48
5.2.5 Esercizio 5 . . . 50
5.2.6 Domanda 1 & 2 . . . 51
5.3 Intervista ad Omero . . . 52
5.3.1 Esercizio 1 . . . 53
5.3.2 Esercizio 2 . . . 54
5.3.3 Esercizio 3 . . . 56
5.3.4 Esercizio 4 . . . 57
5.3.5 Esercizio 5 . . . 59
5.3.6 Domanda 1 & 2 . . . 60

6 Discussione dei risultati **61**
6.1 Instrumentation . . . 61
6.2 Instrumentalisation . . . 62
6.3 Internalizzazione ed Esternalizzazione . . . 64
6.4 Difficoltà legate all'algebra lineare . . . 65
6.5 Altre considerazioni . . . 67

7 Conclusioni **69**

A Trascrizione dell'intervista a Bianca **71**
A.1 Esercizio 1 . . . 73
A.2 Esercizio 2 . . . 78
A.3 Esercizio 3 . . . 82
A.4 Esercizio 4 . . . 85
A.5 Esercizio 5 . . . 90
A.6 Domanda 1 . . . 105
A.7 Domanda 2 . . . 106

B Trascrizione dell'intervista ad Ale Micarti **111**
B.1 Esercizio 1 . . . 113
B.2 Esercizio 2 . . . 122
B.3 Esercizio 3 . . . 125
B.4 Esercizio 4 . . . 131

B.5 Esercizio 5 134
B.6 Domanda 1 142
B.7 Domanda 2 146

C Trascrizione dell'intervista a Omero 147
C.1 Esercizio 1 149
C.2 Esercizio 2 162
C.3 Esercizio 3 174
C.4 Esercizio 4 181
C.5 Esercizio 5 190
C.6 Domanda 1 & 2 210

D Dispensa Algebra Lineare 213

Bibliografia 216

Capitolo 1

Disabilità visiva

Nell'ambito delle disabilità, che sono il risultato dell'interazione tra gli individui con deficit e le barriere comportamentali e ambientali che impediscono loro una piena ed effettiva inclusione nella società su base di uguaglianza con gli altri [ICF, 2001], si definisce, tra le disabilità sensoriali, la disabilità visiva riferendosi alla cecità assoluta, e all'ipovisione. La prima condizione si riferisce a soggetti che non hanno percezione visiva della stimolazione luminosa proveniente dall'ambiente esterno, o che, pur avendo percezione visiva, non sono in grado di organizzare gli input sensoriali in percezioni più complesse per affrontare i compiti della vita quotidiana. La seconda si riferisce al declino dell'adattamento visivo, che è caratterizzato dalla scomparsa di almeno una prestazione importante della vita quotidiana, come la lettura, la scrittura, il movimento indipendente nell'ambiente, ecc. [Dell'Osbel, 1992, Bonfigliuoli and Pinelli, 2010].

La perdita della vista può essere causata da malattie degli occhi, incidenti o patologie oculari presenti dalla nascita. Secondo quanto riportato dall'Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS) le principali cause dei deficit visivi in generale sono gli errori di rifrazione non corretti, cataratta non operata, degenerazione maculare legata all'età, glaucoma e retinopatia diabetica. La condizione di tali individui può essere pertanto totale o parziale, congenita, cioè presente al momento della nascita, oppure acquisita. Inoltre, in alcuni casi si può registrare un peggioramento nel corso degli anni, in altri casi la situazione si mantiene stabile e in altri ancora si può verificare un miglioramento. L'insorgenza della disabilità visiva acquisita comporta un quadro più complesso dal punto di vista delle dinamiche psicologiche: ci si trova a dover far fronte ad un problema o ad una situazione nuova a cui non si è preparati. La risposta all'evento traumatico può evolvere in maniera positiva o anche verso stati depressivi, in base alle strategie adattative messe in atto dal soggetto.

Le conseguenze sulla salute associate alla perdita della vista possono estendersi ben oltre il sistema visivo. La disabilità visiva, infatti, condiziona l'apprendimento e lo sviluppo neuro-psicomotorio nell'età evolutiva, e incide sulla qualità della vita, l'indipendenza, la mobilità e l'autonomia nell'adulto. L'impatto psicosociale della cecità e dell'ipovisione è pertanto, per i motivi precedentemente elencati, molto rilevante.

1.1 Didattica per persone con disabilità visiva

Gli studenti con disabilità visiva affrontano numerose sfide e problemi durante la loro carriera scolastica, che possono influire negativamente sul loro rendimento. Inoltre, tali individui costituiscono un gruppo eterogeneo con difficoltà e problemi di varia natura che richiedono un'attenzione particolare nell'implementazione del curriculum e dei sistemi di insegnamento, al fine di garantire loro un buon rendimento scolastico. Il profitto accademico di tali studenti, infatti, è spesso ostacolato da difficoltà non solo nella comprensione dei concetti accademici, ma anche nello svolgimento dei compiti e nel sostenere gli esami. In particolare, quando gli studenti con disabilità visiva si iscrivono all'università, possono incontrare una serie di barriere che possono essere classificate in barriere attitudinali, istituzionali, ambientali e fisiche [Hutchinson et al., 1998]. Le barriere attitudinali si riferiscono agli atteggiamenti dei principali individui con cui lo studente interagisce. Primi tra tutti ci sono i genitori, le cui aspirazioni per il figlio influenzano notevolmente la sua percezione dell'istruzione superiore [Levinson, 2019]. Questi possono avere una visione pessimista del futuro del figlio, determinando fino a che punto egli possa accedere ai servizi di supporto e all'acquisizione delle competenze e delle conoscenze necessarie per essere indipendente. Altri individui chiave sono quelli che costituiscono il personale istituzionale ausiliario i cui atteggiamenti possono avere un impatto significativo sulle esperienze dello studente e può vedere come segno di fallimento la difficoltà dello studente a far fronte alle richieste dell'istruzione superiore [Machell et al., 1996]. Le barriere istituzionali riguardano le disposizioni prese per gli studenti con disabilità visiva. Sono state individuate sfide specifiche in relazione alle risorse fornite agli studenti, ad esempio, è importante che venga fornito loro materiale stampato in un formato accessibile anche se farlo può richiedere molto tempo e lavoro. Le barriere ambientali riguardano l'accesso a edifici, aule e alloggi. Spostarsi all'interno di un campus universitario, localizzare edifici e accedere alle aule può essere difficile [Richardson et al., 2002].
Le barriere che affrontano le persone con disabilità visiva sono ancora molteplici, così come le potenziali soluzioni, nonostante ci siano evidenze che il modello sociale della disabilità abbia portato a una terminologia più progressista per descriverla. Infine, le barriere fisiche sono quelle proprie dell'individuo.

Area - Classe di Laurea	Motoria	Visiva	Uditiva	Neurologica	Psicologica	Metaboliche, internistiche e cardiologiche	Altre comorbidità	Altro	Omissis	ND
Sanitaria	6,0	5,2	6,4	5,6	5,4	11,6	8,9	1,8	10,9	15,0
Scientifica	19,0	17,2	33,5	25,3	21,4	25,7	34,2	15,0	23,7	20,7
Sociale	42,9	41,1	32,9	33,7	27,9	36,6	32,9	47,8	40,2	34,8
Umanistica	29,6	33,9	24,6	34,2	43,3	23,6	24,1	35,4	23,5	26,2
Sociale e Umanistica	0,3	0,5	0,6	0,5	0,1	0,4	0,0	0,0	0,5	0,0
ND	2,2	2,2	2,1	0,7	1,8	2,1	0,0	0,0	1,2	3,4
Totale	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**	**100**

Figura 1.1: Distribuzione degli studenti con disabilità accreditati per tipo di limitazione e area disciplinare (valori percentuali)

1.2 Disabilità visive e rendimento accademico

L'Agenzia nazionale di valutazione del sistema universitario e della ricerca (ANVUR) ha stilato un documento sulla base della stima dell'Istituto Nazionale di Statistica (ISTAT) del numero di studenti con disabilità presenti nelle università italiane (statali e non statali) dall'anno accademico 2009-10 fino all'anno accademico 2016-17. Tale numero è stimato sulla base dei dati raccolti dal Ministero dell'Università e relativi agli esoneri, parziali e totali, dal pagamento delle tasse universitarie [1].

Da tale documento emerge che gli studenti con limitazioni visive si concentrano nei corsi di area sociale (41,1%) e di area umanistica (33,9%), mentre sono meno frequenti nei corsi di area scientifica (17,2%) e sanitaria (5,2%).

Gli studenti con disabilità visiva ottengono risultati scolastici significativamente inferiori rispetto ai loro coetanei vedenti. Questo divario di rendimento risulta più marcato in matematica [Mason and McCall, 2013]. Tradizionalmente le materie scientifiche e matematiche sono state inaccessibili agli studenti con disabilità visive. Campi come chimica, fisica, ingegneria, biologia e matematica presentano spesso concetti e informazioni basate su elementi visivi [Sahin and Yorek, 2009]. Tuttavia, non vi è alcuna prova che la disabilità visiva causi una ridotta capacità di calcolo o di ragionamento quantitativo, suggerendo che non è la scarsa attitudine matematica la causa del problema.

Come evidenziato dai costanti divari di rendimento che non possono essere spiegati da differenze nella predisposizione alla matematica [Healy et al., 2016], fornire agli studenti con disabilità sensoriali un accesso equo a un'istruzione matematica di qualità è un problema educativo persistente. Gli insegnanti dovrebbero evitare di usare espressioni come

[1] https://www.anvur.it/wp-content/uploads/2022/06/ANVUR-Rapporto-disabilita$_{W}EB.pdf$

"guarda qui" mentre indicano qualcosa alla lavagna. Dovrebbero piuttosto descrivere ad alta voce ciò che vi è scritto sopra. Il divario osservato è probabilmente il risultato del minor numero di opportunità per l'insegnamento e la comunicazione di concetti matematici, imputabile pertanto alle barriere di tipo istituzionale. Stefanich e Norman in un'indagine su base nazionale hanno riscontrato che la maggior parte degli insegnanti di discipline scientifiche, anche a livello univeristario, ha avuto poca o nessuna esperienza diretta nell'insegnamento a studenti con disabilità e spesso hanno visioni stereotipate su ciò che gli studenti con disabilità possono o non possono fare [Norman et al., 1998].
Gli studenti non vedenti devono affidarsi a strumenti e materiali alternativi per l'apprendimento della matematica, tra cui il braille, i diagrammi tattili, le descrizioni e la sintesi vocale. Tuttavia, questi ultimi presentano inferiori opportunità di apprendimento rispetto ai materiali didattici tradizionali basati sulla vista. In particolare, le problematiche di base che una persona non vedente incontra nell'affrontare la disciplina di interesse possono essere classificate in tre categorie [Archambault et al., 2007]:

1. Accesso all'informazione matematica: i contenuti matematici si presentano principalmente in forma stampata e se disponibili in digitale sono caratterizzati da una rappresentazione bidimensionale visivamente accattivante, mentre una struttura lineare sarebbe più adatta alle esigenze di una persona non vedente.

2. Esplorazione del contenuto matematico: Le formule matematiche tendono a raggiungere un alto livello di complessità, anche se sono piuttosto brevi, e pertanto potrebbero rendere complicata l'esplorazione ad una persona non vedente, facendole perdere la visione d'insieme del contenuto.

3. Manipolazione dei contenuti: i calcoli tendono a diventare lunghi, complessi e intricati e organizzare il proprio calcolo in modo chiaro e coerente, tenere traccia di calcoli, gestire la complessità delle espressioni si rivela molto più difficile se non si può vedere. Questo è vero soprattutto perché saltare rapidamente a un punto rilevante all'interno di una formula o contrassegnare una parte di un'espressione in quanto già trattata, ad esempio, sono metodi non facilmente applicabili per una persona non vedente.

Il fatto che gli studenti con disabilità visiva abbiano statisticamente meno probabilità di completare i loro studi a causa di insuccesso accademico, mancanza di supporto o ritiro per insufficiente orientamento (in entrata, in itinere e in uscita) suggerisce che sia possibile attuare dei cambiamenti ragionevoli alle pratiche di lavoro nell'istruzione accademica [Richardson et al., 2002].

1.3 Ruolo dei sensi nell'apprendimento

Si definisce la vista un senso a distanza, perché non richiede il contatto diretto con con gli eventi e la realtà in cui siamo immersi ed è possibile vedere persone, oggetti, movimenti anche se sono lontani. Pertanto, il campo percettivo della vista è molto ampio e ricco. Il tatto invece è un senso a contatto: per conoscere un oggetto, questo deve trovarsi a portata di braccia, in modo da poter essere raggiunto, toccato ed esplorato. Un soggetto non vedente si affida principalmente al tatto per conoscere la realtà, quindi ha a disposizione un campo percettivo molto più ridotto e meno stimoli, dovendo far riferimento al mondo tattile [Bonfigliuoli and Pinelli, 2010]. Allo stesso modo, l'udito non compensa completamente la vista: i suoni non possono essere toccati ed esplorati e spesso sono ambigui. Inoltre, gli individui con disabilità visiva sono evidentemente svantaggiati perché impossibilitati ad esercitare le abilità sociali attraverso processi mediati visivamente, come il riferimento sociale e l'imitazione a cui si aggiungono le scarse opportunità di interazione con gli altri che caratterizzano in generale le diverse disabilità [Hodges and Keller, 1999].

De Freitas e Sinclair sostengono che sono due le questioni chiave: innanzitutto la perdita di un senso può cambiare il modo in cui vengono coinvolti gli altri sensi, creando potenzialmente opportunità che spesso rimangono inespresse e la matematica stessa cambia a seconda delle diverse organizzazioni sensoriali [De Freitas and Sinclair, 2014]. Esiste una tradizione piuttosto lunga che associa il successo in matematica a vari sensi o a specifici organi sensoriali associati in particolare all'intuizione, legate strettamente a particolari visioni della matematica e alla relazione tra pensiero, corpo e apprendimento. Le autrici pensano il corpo libero dai confini degli attuali regimi di percezione e lo riconoscono in tutta la sua potenzialità. Riportano l'esempio, tratto da *Mathematics in the hands of deaf learners and blind learners: Visual–gestural– somatic means of doing and expressing mathematics* [Healy et al., 2016] secondo cui mentre i bambini utilizzino normalmente l'udito per imparare i numeri (specialmente per cantare i numeri fino a 10 o per captare le quantificazioni quotidiane), i bambini non udenti possano usare la vista come strumento per imparare gli stessi concetti. Gli organi di senso sono quindi solo parte di un assemblaggio che non si sottomette interamente al controllo umano.

Per molto tempo è stato implicitamente chiaro che, quando una persona non vedente immette matematica al computer, utilizza la tastiera del computer. Ma questa non è l'unica possibilità: i gesti, come quelli comuni sui moderni dispositivi mobili, i movimenti in una stanza, i movimenti della testa e altri, potrebbero essere modalità di input altrettanto praticabili. Gli autori che fanno proprio questo principio osservano che, mentre gusto e olfatto sono stati raramente, associati allo studio della matematica, il tatto è diventato sempre più pertinente, soprattutto con l'avvento delle tecnologie touchscreen, per quanto quest'ultimo sembrerebbe in qualche modo limitato, dato che la maggior parte degli oggetti matematici non sono solitamente considerati accessibili al tatto. La maggiore attenzione ai gesti sta cambiando questa situazione [Healy and Fernandes, 2014], spostando l'attenzione dalla vista al tatto, sfruttando nuove tecnologie. I gesti tattili sono considerati di particolare interesse, perché consentirebbero agli studenti non vedenti di fare matematica con i loro dispositivi mobili [Abrahamson et al., 2019].

I codici Braille forniscono generalmente la migliore esperienza di lettura per una persona non vedente, purché sia in grado di leggerli. Inoltre ben pochi contenuti matematici sono disponibili in un tale codice e per il problema dell'incompatibilità tra i codici Braille un lettore che conosce un codice non sarà automaticamente in grado di leggerne un altro. Un altro problema, relativo sempre alle barriere istituzionali è che la maggior parte dei contenuti matematici è ancora presente solo su carta, sebbene sempre più contenuti diventino disponibili in formato digitale. Tale problema riguarda quasi sempre la leggibilità umana, scaturita principalmente dal fatto che la rappresentazione visiva, che è perlopiù la fonte su cui gli strumenti di conversione devono basarsi, non trasmette completamente la struttura di un'espressione matematica, rendendo spesso necessarie delle strategie per risolverle. Anche se disponiamo di un documento matematico accessibile in un codice ben leggibile e che conosciamo, leggere e comprendere il contenuto probabilmente rimarrà difficile. Questo perché ci vuole molto tempo e impegno per attraversare la struttura complessiva di un'espressione, soprattutto in assenza della vista. Inoltre, oltre ai problemi di lettura e navigazione, all'interno di un calcolo, anche relativamente semplice, è necessario saltare a punti diversi in calcoli secondari, tornare al calcolo principale e ricordare elementi, come risultati intermedi, dai calcoli secondari. L'arte di organizzare un calcolo in modo tale da poterne mantenere facilmente una visione d'insieme è un compito complesso che impone una sfida considerevole per tutti, specialmente per uno studente con disabilità visiva che non può averne una visione globale ma solo puntuale.

Inoltre, quando un individuo non vedente è in grado di navigare un'espressione matematica, vuole far partecipare all'esperienza i suoi compagni vedenti o l'insegnante vedente. Questo scenario collaborativo è di particolare importanza in un ambiente di classe. Per di più è importante, a tale scopo, che lo studente con disabilità visiva possa seguire l'insegnante che mostra un punto di una formula ai suoi studenti. Quindi, oltre a strumenti e materiali inferiori, anche le esperienze di apprendimento a cui hanno accesso gli studenti con disabilità visiva possono risultare carenti.

Per avanzare con la progettazione didattica per studenti con sensorialità eterogenee, in particolare con disabilità visiva, è necessario prima fare un passo indietro e mettere in discussione le ipotesi consolidate su cosa significhi imparare e quali ruoli giochino la percezione sensoriale e l'interazione sociale nel processo di apprendimento.
La rappresentazione standard per i contenuti matematici in generale è bidimensionale e grafica: contiene una vasta gamma di simboli speciali come lettere latine o greche, numeri e operatori e sfrutta tecniche bidimensionali come la disposizione dei caratteri a diverse altezze sopra o sotto la linea di base per trasmettere la struttura di una formula. Ne sono degli esempi gli indici, le radici e le frazioni. Informazioni importanti, da quelle

sottili a quelle significative, pertanto possono essere perse nel riadattamento di materiali visivi.
Ad esempio, le rappresentazioni in braille e in stampa di espressioni matematiche hanno significative differenze di notazione e struttura: la grafica visiva è spesso semplificata quando viene convertita in formati tattili, e le rappresentazioni visuo-spaziali sono sostituite da descrizioni verbali cognitivamente impegnative. Infatti, al contrario, le due modalità standard utilizzate dalle persone non vedenti, cioè la sintesi vocale e il linguaggio Braille, non possono sfruttare tecniche di disposizione bidimensionale. La prima è strettamente sequenziale, mentre la seconda consente l'accesso a una riga di non più di 80 caratteri alla volta e quindi sono entrambe da considerarsi modalità di output lineari. Per trasmettere la struttura di una formula all'interno di una tale rappresentazione lineare, è necessario trovare metodi alternativi.

1.4 Braille

Il sistema Braille si basa su punti in rilievo e la sua caratteristica fondamentale è la semplicità con cui sono disposti, per quanto richieda a chi legge di compiere operazioni mentali e interpretare ciò che viene rapprensentato sulla carta. I punti in rilievo hanno precise caratteristiche: sono collocati in un rettangolo immaginario disposto con la base minore parallela al lettore e in base al numero e alla collocazione nello spazio tra le sei posizioni possibili, assumono un significato diverso. Il sistema Braille comprende 64 segni con i quali si possono rappresentare le lettere dell'alfabeto e i caratteri numerici, grazie all'utilizzo di prefissi che rendono interpretabili i segni per il soggetto non vedente.
Questo sistema fu inventato da Louis Braille nel 1825, un musicista divenuto cieco all'età di tre anni a causa di un incidente.
I codici Braille sono il modo più antico di rappresentare la matematica. I primi tentativi per espandere il Braille tradizionale a tale scopo risalgono alla fine del XIX secolo.
Questi codici portano con sé due principali problematiche:

1. Poiché quasi ogni paese ha inventato il proprio codice, esistono più di 50 codici Braille matematici che, sebbene si basino tutti sul Braille tradizionale, sono piuttosto diversi l'uno dall'altro.

2. Dato che il Braille è molto dispendioso in termini di spazio e le limitazioni di spazio a pagina spesso rendono impossibile sfruttare la notazione spaziale, tali codici tendono a contenere regole complesse per trasmettere la struttura matematica in modo compatto piuttosto che spaziale, eliminando il potenziale per la strutturazione spaziale delle espressioni e rendendo difficile l'apprendimento di questi codici.

Inoltre il sistema potrebbe non consentire una comunicazione efficace tra alunno non vedente e compagni e insegnanti e spesso non è possibile disporre degli stessi testi adottati per i vedenti o è difficile procurarseli in tempi rapidi.

Alcuni degli ausili legati al Braille sono ad esempio la *dattilobraille* che è una macchina da scrivere in cui per scrivere le lettere i tasti-punti devono essere premuti contemporaneamente con un unico atto motorio. Apprendere ad utilizzare tale strumento implica lo sviluppo di una manualità fine e coinvolge i concetti topologici di lateralizzazione e l'orientamento spaziale e temporale [Bonfigliuoli and Pinelli, 2010]. Un altro ausilio molto

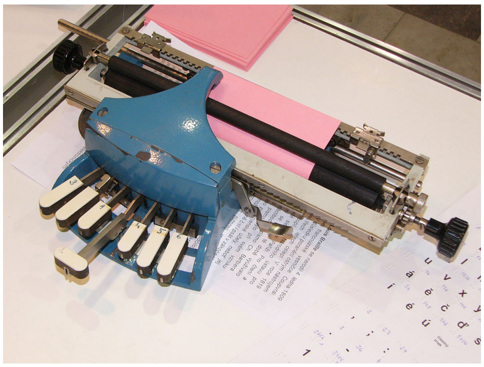


Figura 1.2: Dattilobraille

diffuso è la *barra Braille* (o *display Braille*) che è costituita da una riga che comprende un numero variabile di caselle a sei o otto punti, sulla quale compaiono le parole della selezione a schermo. Tale strumento è collegato ad un computer che gestisce gli output tramite un programma di lettura vocale di ciò che viene selezionato a video, mentre gli input vengono trasmessi attraverso l'uso della tastiera. Questo ausilio è estremamente vantaggioso perché lo studente non vedente è in grado di controllare immediatamente la correttezza di ciò che ha scritto o di cercare il comando adeguato sul video, inoltre garantisce l'interazione con insegnanti e compagni.
Esistono strumenti legati al sistema Braille specificatamente pensati per la matematica.

Figura 1.3: Display Braille

Uno di questi è il *cubaritmo* che è composto da un casellario di plastica nelle cui sedi sono collocati piccoli cubi su cui sono riportati i segni Braille, che per rotazione possono occupare posizioni diverse nello spazio a formre i caratteri aritmetici desiderati. Un altro

Figura 1.4: Cubaritmo

ausilio che può essere sfruttato per la didattica della matematica è il *piano in gomma*, ovvero una tavola di legno rivestita da una gomma particolare in cui appaiono a rilievo le figure tracciate.

Figura 1.5: Piano in gomma

Negli anni novanta furono fatti tentativi per rendere la matematica accessibile tramite voce e suono. Le espressioni e le equazioni possono anche essere verbalizzate, sia da un lettore umano che con l'uso della tecnologia text-to-speech, ma le limitazioni della memoria di lavoro e della capacità cognitiva rendono questo approccio estremamente poco pratico [Stöger and Miesenberger, 2015].
Strumenti tattili possono essere utilizzati per le equazioni, per illustrare problemi di geometria, tabulare dati e altro, ma linee tattili, texture, simboli e annotazioni in braille non possono essere troppo densamente compattati senza comprometterne seriamente la leggibilità [Herzberg and Rosenblum, 2014].

1.5 LaTeX

Un approccio diverso utilizza il programma di composizione TeX, utilizzato in termini del suo pacchetto di macro LaTeX, che esiste da oltre 30 anni ed è ampiamente utilizzato per pubblicazioni matematiche, soprattutto per via dell'eccellente qualità visiva dell'output che produce. D'altra parte, il codice sorgente LaTeX è puro testo ASCII e pertanto può essere utilizzato come notazione matematica lineare per le persone non vedenti. Per questo motivo, almeno in teoria, un documento matematico, una volta elaborato in LaTeX, sarebbe accessibile a un utente non vedente. E questo, dato che oggi una grande quantità di letteratura matematica viene pubblicata in LaTeX, aprirebbe gran parte di quella letteratura al target di riferimento.
Ci sono però anche in questo caso alcune problematiche. Prima fra tutte, il codice sorgente LaTeX può diventare molto difficile da leggere. Questo è dovuto a due motivi:

1. LaTeX risolve il problema di trasmettere la struttura in una modalità lineare racchiudendo semplicemente gli elementi appartenenti insieme in parentesi graffe, che è un approccio semplice ma che richiede molto spazio.

2. LaTeX include molte informazioni di formattazione che hanno poco significato per il lettore non vedente, ma che disturbano il flusso di lettura, spesso così tanto che un documento può diventare praticamente illeggibile.

Un possibile passo verso la soluzione del problema di leggibilità è stato fatto con la creazione del pacchetto LaTeX *Axessibility*: un progetto del Laboratorio "S. Polin" per la ricerca e la sperimentazione di nuove tecnologie assistive per le discipline STEM, facente parte del Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino [2], nato con l'obiettivo di rendere i contenuti scientifici e didattici LaTeX accessibili a tutti. Tale pacchetto infatti mira a rendere i documenti PDF contenenti formule matematiche accessibili alle persone con disabilità visive. Dopo aver scaricato il pacchetto Axessibility e averlo aggiunto all'intestazione del proprio progetto LaTeX, Axessibility genera automaticamente commenti nei documenti PDF in corrispondenza alle formule matematiche. I commenti generati contengono il codice LaTeX delle formule e sono accessibili agli screen reader e alle barre braille, consentendo alle persone con disabilità visiva di leggere e comprendere le formule matematiche. Axessibility non richiede all'autore alcuno sforzo aggiuntivo per rendere il proprio documento accessibile ed è compatibile con i principali screen reader e barre braille disponibili. In tal senso Axessibility rappresenta uno strumento prezioso per rendere i contenuti scientifici e didattici LaTeX accessibili a tutti, garantendo il diritto all'informazione e alla conoscenza anche alle persone con disabilità visiva.

[2] http://www.integr-abile.unito.it/axessibility/

Capitolo 2

Didattica dell'algebra lineare

L'algebra lineare si pone, insieme al calculus, come una delle discipline matematiche principali insegnate nelle facoltà ad indirizzo scientifico. Tuttavia, l'insegnamento di queste discipline è sempre stato considerato ostico. Negli ultimi decenni, la didattica dell'algebra lineare è diventata un campo di ricerca attivo in diversi paesi [PEDERSEN, 2007, Jaworski et al., 2011].

Sia l'insegnamento che l'apprendimento dell'algebra lineare a livello universitario sono universalmente considerati un'esperienza frustrante [Hillel and Sierpinska, 1994]. L'algebra lineare è generalmente il primo corso che gli studenti incontrano come teoria matematica completa, cioè costruita sistematicamente dalle fondamenta, con tutto il suo rigore nel rendere esplicite tutte le ipotesi, giustificando le affermazioni con riferimento a definizioni e fatti già dimostrati. Pertanto, a un certo livello, le difficoltà degli studenti con l'algebra lineare derivano semplicemente dalla loro inesperienza con le dimostrazioni e le teorie basate su dimostrazioni. L'altro aspetto importante di una teoria matematica è la sua generalità. Conoscere l'algebra lineare a questo livello richiede che lo studente inizi a pensare agli oggetti e alle operazioni dell'algebra non in termini di relazioni tra matrici, vettori e operatori particolari, ma in termini di intere strutture di tali elementi, quali spazi vettoriali su campi, algebre, classi di operatori lineari che possono essere trasformati e rappresentati in modi diversi, considerati isomorfi o no, e così via.

La ricerca in didattica della matematica si è concentrata inizialmente sul calcolo, ma negli ultimi 20 anni sono stati condotti sempre più studi sulla didattica dell'algebra lineare [Dorier, 2003]. Si possono distinguere due principali indirizzi nell'insegnamento dell'algebra lineare: uno si concentra sullo studio degli spazi vettoriali formali, mentre l'altro propone un approccio più analitico basato sullo studio di $\mathbb{R}^n$ e sul calcolo matriciale. Tuttavia, l'insegnamento dell'algebra lineare è universalmente riconosciuto come difficile. Gli studenti solitamente si sentono come trasportati su un altro pianeta, sopraffatti dal numero di nuove definizioni e dalla mancanza di legami con le conoscenze pregresse. D'altra parte, gli insegnanti si sentono spesso frustrati e disarmati di fronte all'incapacità dei loro studenti di affrontare concetti che considerano così semplici. Di solito, incriminano la mancanza di pratica nella logica di base e nella teoria degli insiemi o l'impossibilità per gli studenti di utilizzare l'intuizione geometrica [Dorier, 2000]. Queste lamentele hanno una certa validità, ma i pochi tentativi di porre rimedio a questa situazione non sembrano aver migliorato la situazione in modo sostanziale.

2.1 Difficoltà legate all'algebra lineare

Le difficoltà degli studenti legate alle dimostrazioni (tra le quali il non comprendere la necessità delle stesse né le diverse tecniche di dimostrazione, non essere in grado di trattare i quantificatori, confondere condizioni necessarie e sufficienti) non sono relative solo all'algebra lineare, ma emergono nella maggior parte dei corsi universitari ad indirizzo scientifico. Tra le difficoltà specifiche dell'algebra lineare si possono invece includere [Hillel and Sierpinska, 1994]:

(a) Confusione tra vettori e scalari: trattando i vettori come scalari e viceversa, gli studenti possono essere portati a fare errori come moltiplicare un vettore per un altro vettore o sommare un vettore a uno scalare.

(b) Difficoltà con la moltiplicazione vettoriale: la moltiplicazione vettoriale può essere un concetto difficile da comprendere, soprattutto quando si tratta di vettori con dimensioni diverse. Questo può portare a errori come calcolare il prodotto scalare di due vettori quando si dovrebbe calcolare il loro prodotto vettoriale, ad esempio.

(c) Difficoltà con le matrici: le matrici possono essere intimidatorie per gli studenti, soprattutto se di grandi dimensioni, il che comporta errori quali il calcolare il determinante di una matrice in modo errato o non applicare correttamente l'algoritmo di eliminazione gaussiana.

(d) Difficoltà con gli spazi vettoriali: gli spazi vettoriali sono un concetto astratto che può essere difficile da comprendere inizialmente.

(e) Difficoltà a comprendere come gli operatori lineari siano rappresentati da matrici in basi diverse.

Hillel e Sierpinska sostengono che la radice dell'ultima difficoltà risiede in un ostacolo epistemologico più generale: il passaggio dalla visione del linguaggio come parte del mondo alla visione del linguaggio come rappresentazione del mondo. In altre parole, gli studenti tendono a considerare le matrici come rappresentazioni dirette degli operatori lineari, piuttosto che come strumenti per rappresentare questi operatori in una base specifica. Questo, ovviamente, porta a confusione e ad errori quando si cambia base.

2.2 Un punto di vista storico

Secondo Dorier un'analisi epistemologica della storia dell'algebra lineare può essere un modo per rivelare alcune possibili fonti delle difficoltà degli studenti e anche un'ispirazione per la progettazione di attività didattiche future [Dorier, 2003]. L'autore individua come momento cardine l'ultima fase della genesi della teoria degli spazi vettoriali che si colloca tra la fine del XIX secolo e gli anni trenta del secolo scorso [Dorier, 1995]. Tale periodo storico corrisponde all'assiomatizzazione dell'algebra lineare, ovvero la ricostruzione teorica dei metodi di risoluzione dei problemi lineari, utilizzando i concetti e gli strumenti di una nuova teoria centrale e assiomatica. Fino a quel momento, tali metodi non erano stati esplicitamente teorizzati o unificati. Questa assiomatizzazione non ha permesso di per sé ai matematici di risolvere nuovi problemi, ma ha piuttosto fornito loro un approccio e un linguaggio più universali da utilizzare in vari contesti [Moore, 1995]. Dorier sostiene che l'approccio assiomatico non era una necessità assoluta, se non per problemi in dimensione infinita non numerabile, ma è diventato un modo di pensare e organizzare l'algebra lineare in maniera universale. Pertanto, il successo dell'assiomatizzazione non è venuto dalla possibilità di giungere a una soluzione di problemi matematici irrisolti, ma dal suo potere di generalizzare e unificare e, di conseguenza, di semplificare la ricerca di metodi per risolvere problemi in matematica [Dorier, 2000]. Ne segue che una delle difficoltà più evidenti che si incontrano nell'apprendimento di concetti unificanti e generalizzati è associata agli elementi di conoscenza o competenze preesistenti e correlate di livello inferiore che devono essere integrati in un processo di astrazione al fine di generalizzarli e unificarli.

Dal punto di vista didattico, la difficoltà risiede nel fatto che qualsiasi problema di algebra lineare alla portata di uno studente universitario del primo anno può essere risolto senza utilizzare la teoria assiomatica e, per questo motivo, il guadagno in termini di unificazione, generalizzazione e semplificazione apportato dall'uso della teoria formale è visibile solo ad un matematico esperto.

Ora, poiché non si può rinunciare all'insegnamento delle strutture algebriche assiomatiche, gli studenti devono essere introdotti ad un certo tipo di riflessione che incorpori l'uso dei loro precedenti elementi di conoscenza e competenza e i nuovi concetti formali. Le difficoltà degli studenti con l'aspetto formale della teoria non sono solo un problema generale con il formalismo, ma principalmente una difficoltà di comprensione dell'uso specifico del formalismo all'interno della teoria e dell'interpretazione dei concetti formali in relazione a contesti più intuitivi come la geometria o i sistemi di equazioni lineari, in cui sono storicamente emersi [Moore, 1995]. Infatti, una delle principali difficoltà nell'apprendimento dell'algebra lineare riguarda la molteplicità di linguaggi, o meglio registri di rappresentazione semiotica, attraverso i quali possono essere rappresentati gli oggetti dell'algebra lineare. Gli studenti devono distinguere questi vari modi di rappresentare gli oggetti dell'algebra lineare e al contempo tradurre da un tipo all'altro, senza però confondere gli oggetti con le loro diverse rappresentazioni. Si possono distinguere tre linguaggi di base utilizzati in algebra lineare: il *linguaggio astratto* della teoria generale, il *linguaggio algebrico* della teoria di $\mathbb{R}^n$ e il *linguaggio geometrico* degli spazi n-dimensionali. L'opacità delle rappresentazioni sembra essere ignorata dai docenti, che cambiano costantemente registro senza allertare gli studenti in alcun modo esplicito. Il caso che crea più confusione agli studenti è il passaggio dalla rappresentazione astratta a quella algebrica quando lo spazio vettoriale sottostante è $\mathbb{R}^n$. In questo caso, un n-upla (o una matrice) viene rappresentata come un'altra n-upla (o matrice) rispetto ad un'altra base. Questa confusione porta a errori persistenti nelle soluzioni degli studenti relativi alla lettura dei valori di una trasformazione lineare data da una matrice in una base [Dorier, 2003].

2.3 Alcune possibili soluzioni

Hillel e Sierpinska propongono alcune soluzioni per affrontare questo problema, tra cui:

1. Enfatizzare la natura relazionale delle matrici che non sono solo "raccoglitori" di numeri, ma rappresentano relazioni tra vettori.

2. Mostrare agli studenti come la rappresentazione di un operatore lineare cambia quando si cambia la base utilizzando diagrammi e animazioni.

3. Promuovere la riflessione metacognitiva incoraggiando gli studenti a riflettere su come pensano alle matrici e agli operatori lineari e a identificare eventuali idee errate o preconcetti che potrebbero ostacolarne la comprensione.

Affrontando il problema della rappresentazione in modo efficace, gli autori ritengono che sia possibile migliorare significativamente l'apprendimento degli studenti di algebra lineare.
Parallelamente a quanto affermato da Hillel e Sierpinska, Harel [Harel, 2000] propone tre principi per l'insegnamento dell'algebra lineare, quali

1. Principio di Concretezza: Per apprendere un concetto matematico astratto, gli studenti devono prima costruirne una base concreta nella loro mente, manipolando i suoi elementi come oggetti mentali. In questo senso, è importante utilizzare costantemente rappresentazioni geometriche per concetti astratti di algebra lineare, fornendo una base solida per la comprensione degli studenti.

2. Principio di Necessità: L'apprendimento è efficace quando gli studenti sono motivati da una necessità intellettuale di risolvere un problema, non da pressioni esterne. Bisogna presentare agli studenti problemi da risolvere autonomamente, guidandoli verso la scoperta delle soluzioni evitando di fornire soluzioni preconfezionate.

3. Principio di Generalizzabilità: I modelli utilizzati per concretizzare concetti astratti devono essere sufficientemente generici da poter essere applicati a contesti più ampi; pertanto è opportuno scegliere modelli che incarnano le caratteristiche essenziali dei concetti generali, permettendo agli studenti di cogliere le connessioni e generalizzare le loro conoscenze.

La ricerca in didattica della matematica ad oggi disponibile, pur essendo importante, non presenta una soluzione definitiva alle sfide dell'apprendimento dell'algebra lineare. Per un miglioramento reale e duraturo è necessario un impegno collettivo e un approccio flessibile e personalizzato, soprattutto quando si ha a che fare fare con studenti con disabilità visiva.
In presenza di studenti con disabilità visiva, è necessario ripensare a tutto quanto riportato fino ad ora, proponendo una didattica che sia efficace per tali individui. Infatti ciò che può essere intuitivo per uno studente vedente, potrebbe non esserlo immediatamente per uno con disabilità visiva che in aggiunta alle difficoltà di cui sopra, deve fare i conti con la sua disabilità. Alcuni oggetti dell'algebra lineare, come ad esempio le matrici, sono pensati per uno studente vedente e, senza il supporto adeguato dei docenti, potrebbero essere dei veri e propri ostacoli per uno studente non vedente. A tale scopo, a seguito di ricerche su data searchers quali *EBSCO* [1] e *Scopus* [2] con vincoli di ricerca (quali "linear algebra", "visual impairment", "blind") non sono emersi risultati pertinenti.

[1]https://www.ebsco.com/it-it/prodotti/ebscohost-piattaforma-di-ricerca
[2]https://www.elsevier.com/products/scopus

Capitolo 3

Quadro teorico

L'epistemologia, ovvero l'indagine critica intorno alla struttura logica e alla metodologia delle scienze, ed in particolare l'epistemologia genetica, ha dimostrato che solo una trasformazione controllata della realtà consente all'intelletto di elaborare le sue proprietà invarianti e variabili. Nel mondo reale, le persone eseguono trasformazioni in una varietà di contesti e con diversi obiettivi. Di conseguenza, la generazione risultante di conoscenza avviene in situazioni diverse attraverso processi differenti. Guidati da ipotesi o semplice curiosità, vengono progettate ed eseguite trasformazioni al fine di dedurre delle leggi dalle risposte della realtà a queste stimolazioni. Questo costituisce quello che potrebbe essere definito un processo *epistemico* di costruzione della conoscenza, finalizzato all'elaborazione di descrittori, categorie, relazioni, oggetti concettuali, modelli, teorie, ecc., e caratterizzato da una tendenza alla generalizzazione e decontestualizzazione. D'altro canto, la conoscenza può anche essere elaborata in situazioni in cui l'azione del soggetto sul mondo non è guidata da un'intenzione epistemica, ma finalizzata ad un progetto pratico-funzionale. Questo secondo processo può essere caratterizzato come *pragmatico* ed è orientato alla rilevazione e costituzione dei problemi posti nel corso dell'interazione con l'ambiente, nonché all'elaborazione e attuazione di soluzioni (procedure, metodologie, artefatti materiali e semiotici, ecc.) [Rabardel and Samurçay, 2001].

3.1 Artefatti e strumenti

Un **artefatto** è un oggetto creato dall'uomo che può essere utilizzato per vari scopi. Tuttavia, fino a quando non viene integrato in un sistema di attività umane, rimane un semplice oggetto inanimato.

Un artefatto diventa uno **strumento** quando viene incorporato nelle attività di un individuo, acquisendo così una funzione mediatrice. Questo processo trasforma l'artefatto in un componente attivo e dinamico del sistema di attività dell'utente e coinvolge l'adattamento dell'artefatto all'utente e viceversa. Questo processo è fondamentale per

comprendere come gli individui utilizzano e trasformano gli artefatti in strumenti efficaci che mediano le loro attività cognitive e pratiche [Rabardel and Samurçay, 2001].
Uno strumento, quindi, costituisce una sorta di universo intermedio tra il soggetto e l'artefatto e non deve essere confuso con quest'ultimo. Un artefatto diventa strumento, infatti, solo nel momento in cui viene subordinato agli scopi dell'individuo che lo integra nelle sue attività.
Nella maggior parte dei casi, la relazione tra il soggetto e l'oggetto non è diretta, ma comporta la mediazione di uno strumento. Il modello di **situazione di attività mediata da strumenti** (modello IAS), proposto da Verillon e Rabardel [Verillon and Rabardel, 1995], mette in evidenza la molteplicità delle relazioni tra questi tre poli differenti:

1. il soggetto S (utente, operatore, lavoratore, agente, studente, ecc.);
2. lo strumento I (attrezzo, macchina, sistema, utensile, prodotto, ecc.);
3. l'oggetto O verso cui è diretta l'azione dello strumento (materia, realtà, oggetto del lavoro, ecc.).

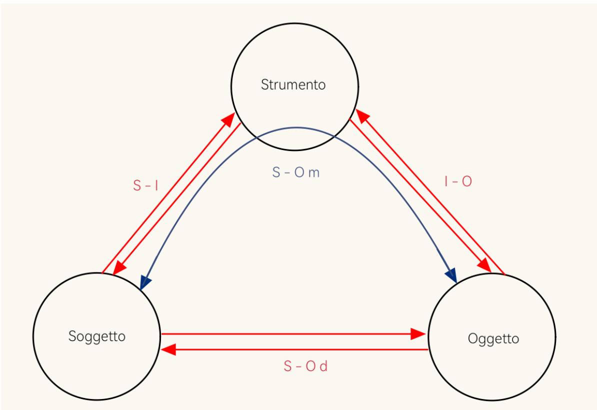


Figura 3.1: Modello IAS

Questa interazione è dinamica e reciproca: ciascun componente influenza e modifica gli altri.
Oltre alle interazioni dirette soggetto-oggetto (S-O d), devono essere considerate altre forme di interazione: interazioni tra il soggetto e lo strumento (S-I), interazioni tra lo strumento e l'oggetto (I-O) e interazioni soggetto-oggetto mediate dallo strumento (S-O m) [Lonchamp, 2012]. È principalmente con riferimento all'oggetto che lo strumento svolge un ruolo di mediazione.
Questo modello non copre tutte le situazioni in cui l'attività è mediata da strumenti. Ne costituiscono dei limiti il contesto dell'azione e il fatto che il soggetto potrebbe utilizzare diversi strumenti durante la stessa.

Rabardel distingue tra due tipi di mediazione soggetto-oggetto: la **mediazione epistemica**, orientata verso la comprensione dell'oggetto, delle sue proprietà e delle sue evoluzioni risultanti dalle azioni del soggetto, e la **mediazione pragmatica** che è orientata verso la trasformazione dell'oggetto e il raggiungimento dei risultati.
In Rabardel e Samurçay, l'approccio è ampliato per tener conto del fatto che il soggetto non si relaziona solo con l'oggetto e con gli altri, ma si relaziona anche con se stesso. Introducono pertanto la **mediazione riflessiva** o **euristica**, che deve essere presa in considerazione quando la relazione del soggetto con se stesso è mediata dallo strumento. Sarebbe rappresentata da un collegamento soggetto-strumento-soggetto.
Vygotsky ha proposto il nodo in un fazzoletto come esempio di strumento organizzato attorno alla mediazione riflessiva, poiché è destinato a ricordare alle persone di ricordare qualcosa.
Ogni strumento è potenzialmente un mediatore per tutte queste relazioni. Si parla in questo senso di **multimediazione**.
In un contesto educativo, strumenti come computer e software didattici mediano l'interazione tra studenti e contenuti didattici. Gli insegnanti devono adattare questi strumenti per soddisfare esigenze educative specifiche, mentre gli studenti devono sviluppare competenze per utilizzarli efficacemente. In un contesto professionale, strumenti come macchinari e software di gestione dei progetti mediano l'esecuzione dei compiti lavorativi. I professionisti devono personalizzare questi strumenti in base alle esigenze del loro lavoro e sviluppare competenze per utilizzarli in modo ottimale.
La comprensione della relazione tra strumenti e situazioni di attività strumentate è fondamentale per comprendere come gli artefatti influenzano le attività umane. Gli strumenti non sono solo facilitatori passivi, ma agenti attivi che mediano e trasformano le attività. La progettazione efficace degli strumenti deve tenere conto delle esigenze finali degli utenti. Ciò include la considerazione delle loro competenze, delle loro pratiche operative e del contesto in cui utilizzeranno lo strumento.

3.2 Artefatti e cognizione

Gli artefatti giocano un ruolo cruciale nel facilitare e modellare i processi cognitivi umani. Essi non sono solo strumenti esterni utilizzati per eseguire compiti, ma influenzano profondamente il modo in cui pensiamo e apprendiamo.
Verillon e Rabardel distinguono tre diversi tipi di artefatti sulla base delle loro funzioni [Verillon and Rabardel, 1995]:

1. Artefatti epistemici: utilizzati per esplorare e comprendere il mondo. Esempi includono microscopi, telescopi e software di simulazione scientifica. Gli artefatti epistemici permettono agli individui di acquisire nuove conoscenze e di approfondire la loro comprensione dei fenomeni.

2. Artefatti pragmatici: utilizzati per modificare il mondo e raggiungere obiettivi concreti. Strumenti come martelli, cacciaviti e macchinari industriali rientrano in questa categoria. Gli artefatti pragmatici facilitano l'esecuzione di compiti pratici e la realizzazione di progetti specifici.

3. Artefatti cognitivi: supportano e migliorano le capacità cognitive. Esempi di artefatti cognitivi includono computer, calcolatrici e strumenti di gestione delle informazioni. Essi aiutano gli individui a organizzare, elaborare e memorizzare informazioni, oltre a facilitare il problem solving e il ragionamento.

Gli autori propongono che l'interazione tra pensiero e artefatti sia bidirezionale: da un lato, gli artefatti influenzano il pensiero facilitando nuovi modi di risolvere problemi e di rappresentare le informazioni; dall'altro, il pensiero umano trasforma l'uso degli artefatti attraverso l'innovazione e la creazione di nuovi strumenti.
Gli artefatti non solo facilitano un compito, ma trasformano anche il modo in cui viene percepito e risolto. Ad esempio, una calcolatrice non solo facilita il calcolo, ma cambia anche il modo in cui pensiamo ai numeri e alle operazioni matematiche. Questo porta a nuovi schemi di pensiero e strategie cognitive. Viceversa, gli individui sviluppano nuove competenze e strategie cognitive per utilizzare gli artefatti in modo efficace. Questo processo implica l'apprendimento continuo e l'adattamento. Ad esempio, gli studenti imparano a utilizzare software educativi in modo più efficiente, sviluppando abilità specifiche per interagire con tali strumenti.
L'uso degli artefatti, inoltre, genera feedback che informa l'azione e la conoscenza. Ad esempio, un programmatore che utilizza un ambiente di sviluppo integrato riceve riscontro immediato sugli errori di codice, che guida l'apprendimento e il miglioramento continuo delle competenze di programmazione. Conoscenza e azione co-evolvono attraverso l'interazione con gli artefatti. Man mano che gli individui acquisiscono nuove conoscenze, queste influenzano le loro azioni future, che a loro volta generano nuove conoscenze. Gli artefatti sono al centro di questo processo di co-evoluzione, facilitando l'adattamento e l'innovazione continua.

3.3 Attività mediate dagli strumenti

Un'attività consiste nell'agire su un oggetto al fine di raggiungere un obiettivo. Le **attività mediate** sono quelle in cui l'interazione tra un individuo e il suo ambiente è facilitata da strumenti o artefatti. Come osservato precedentemente, questi strumenti non solo amplificano le capacità umane, ma trasformano anche le modalità di azione e di pensiero. Nel contesto delle attività strumentate, l'uso del computer come strumento è un esempio di come gli artefatti possano mediare e modificare le attività cognitive e

pratiche degli individui. La relazione tra conoscenza e azione è fondamentale nelle attività strumentate, in cui gli artefatti giocano un ruolo cruciale nel facilitare e modellare sia la conoscenza che l'azione.
Il concetto di schema d'uso, che si basa sulla nozione di schema di Jean Piaget, è di primaria importanza per investigare come le persone apprendono con gli strumenti [Lonchamp, 2012]. Piaget spiega la costruzione della conoscenza e l'apprendimento tramite tre elementi: gli schemi (l'organizzazione delle informazioni su come funzionano le cose), l'assimilazione (selezionare e incorporare nuove esperienze e informazioni agli schemi esistenti) e l'accomodamento (modificazione dei comportamenti e degli schemi cogniti preesistenti in relazione al contesto circostante).[Piaget, 1977] L'apprendimento è la predisposizione di un individuo ad adattarsi al suo ambiente, il che significa stabilire un equilibrio tra gli schemi e l'ambiente. Le interazioni continue tra schemi esistenti, assimilazione, accomodamento ed equilibrio creano nuovo apprendimento. Nella visione di Rabardel, gli schemi d'uso includono sia la conoscenza concettuale legata al dominio sia la conoscenza dell'uso degli strumenti.
Il processo attraverso il quale la conoscenza si sviluppa e si trasforma attraverso l'uso degli artefatti coinvolge diversi aspetti. Innanzitutto, gli artefatti consentono agli individui di *integrare diverse forme di conoscenza.* Ad esempio, un ingegnere che utilizza un software di progettazione integra conoscenze matematiche, fisiche e ingegneristiche per creare modelli complessi. L'artefatto agisce come un mediatore che facilita l'integrazione di queste conoscenze disparate. Inoltre, gli artefatti *estendono le capacità cognitive degli individui*, permettendo loro di acquisire nuove conoscenze e competenze. Ad esempio, un microscopio elettronico permette ai ricercatori di osservare strutture a livello microscopico che altrimenti sarebbero invisibili, estendendo così la loro conoscenza del mondo naturale. Infine, gli artefatti *forniscono nuove modalità di rappresentazione della conoscenza.* Le mappe concettuali, i diagrammi e i modelli digitali sono esempi di come gli artefatti possono rappresentare conoscenze complesse in modi che sono più facilmente comprensibili e utilizzabili per risolvere problemi.
Gli strumenti non sono, pertanto, meri oggetti passivi, ma partecipano attivamente al processo di risoluzione dei problemi, supportando e ampliando le capacità cognitive degli individui. Questo processo di mediazione può essere compreso attraverso diversi aspetti:

1. **Mediazione Cognitiva**: Gli strumenti supportano il pensiero e il ragionamento. Ad esempio, i software di progettazione assistita facilitano la visualizzazione e la manipolazione di oggetti complessi, permettendo agli utenti di esplorare diverse soluzioni progettuali.

2. **Mediazione Pratica**: Gli strumenti trasformano le azioni pratiche degli individui. Ad esempio, l'uso di un programma di elaborazione testi cambia il modo in cui le persone scrivono e modificano documenti, offrendo funzionalità come il copia-incolla e la correzione automatica.

3. **Mediazione Sociale**: Gli strumenti facilitano la collaborazione e la comunicazione tra individui. Ad esempio, le piattaforme di condivisione online permettono agli utenti di lavorare insieme su progetti comuni, condividendo risorse e idee in tempo reale.

3.4 Instrumentation e Instrumentalisation

Il passaggio da artefatto a strumento coinvolge diversi processi chiave:

1. Instrumentation: Il processo mediante il quale un individuo incorpora un artefatto nel proprio sistema di attività, adattandolo alle proprie esigenze. Include la personalizzazione delle funzionalità e delle interfacce per renderle più utili e accessibili. Riguarda l'emergere e l'evoluzione del lato umano dello strumento, cioè i suoi schemi d'uso. Il soggetto si sviluppa. Ad esempio, un insegnante può configurare un software educativo in base alle esigenze degli studenti, personalizzando l'uso dello strumento per ottimizzare l'apprendimento.

2. Instrumentalisation: Il processo opposto, in cui l'individuo si adatta all'artefatto, modificando il proprio comportamento e le proprie strategie cognitive per utilizzare al meglio lo strumento. Riguarda l'emergere e l'evoluzione del lato artefatto dello strumento. Questo include l'apprendimento di nuove competenze, l'adozione di nuovi comportamenti e l'integrazione dell'artefatto nelle routine quotidiane. L'instrumentalisation è duratura se non addirittura permanente. Ad esempio, gli studenti imparano a utilizzare il software in modo più efficiente, modificando le loro strategie di studio e apprendimento.

3. Internalizzazione: Attraverso l'uso continuo dell'artefatto, l'utente internalizza le operazioni e le rappresentazioni mediate dallo strumento, sviluppando nuove competenze cognitive e abilità operative che possono essere applicate anche in assenza dello strumento.

4. Esternalizzazione: Gli artefatti permettono di esternalizzare e materializzare processi cognitivi complessi, rendendoli visibili, manipolabili e condivisibili. Questo facilita la riflessione e la ristrutturazione delle conoscenze, poiché le rappresentazioni esternalizzate possono essere riorganizzate e migliorate.

Si possono considerare tre livelli di instrumentalisation.

1. Uno strumento è momentaneamente strumentalizzato per un'azione particolare e le specifiche circostanze in cui tale azione si verifica. È il caso, per esempio, quando una chiave inglese viene utilizzata come martello.

2. La nuova funzione è più permanentemente legata a una classe di situazioni. È il caso, per esempio, quando un forum di discussione viene utilizzato come strumento per riunioni sincrone.

3. L'artefatto può essere permanentemente modificato in termini di struttura per svolgere una nuova funzione. Ne è un caso l'esempio presente nell'articolo di Rabardel e Bourmaud [Rabardel and Bourmaud, 2003] quando il documento "activity table" è stato modificato per supportare meglio la riassegnazione degli operatori con la creazione di un'area specifica per annotare gli interventi annullati non ancora riassegnati.

Per i primi due livelli, l'artefatto stesso non viene modificato, ma assume semplicemente nuove proprietà per un soggetto.
Questa visione dello sviluppo degli strumenti ha tre conseguenze importanti. Innanzitutto, lo studio di uno strumento è *"lo studio non di un oggetto, ma di un processo, la genesi del suo significato per un particolare utente per un particolare scopo"* [White, 2008]. Inoltre, cambia il modo in cui viene compreso il processo di progettazione, poiché gli utenti diventano attori del movimento complessivo della progettazione. La sua progettazione, inoltre, continua nell'uso: le funzioni e le proprietà estrinseche e costituite estendono le funzioni e le proprietà intrinseche e costituenti. Infine, la visione dello sviluppo degli strumenti porta all'idea di costruire artefatti "strumentalizzabili".
Comprendere i processi di mediazione ha importanti implicazioni per la progettazione degli strumenti:

1. Progettazione User-Centered: Gli strumenti devono essere progettati tenendo conto delle esigenze e delle pratiche degli utenti, offrendo funzionalità che supportino i loro compiti specifici.

2. Flessibilità e Adattabilità: Gli strumenti devono essere flessibili e adattabili, permettendo agli utenti di personalizzarli in base alle loro esigenze mutevoli.

3. Supporto all'Apprendimento: Gli strumenti devono includere supporti per l'apprendimento e l'uso efficiente, come tutorial, guide e comunità di supporto.

3.5 Genesi strumentale

Il concetto di **genesi strumentale** si riferisce ai processi di appropriazione ed elaborazione di uno strumento. Questo processo non è banale, richiede tempo ed è influenzato dal l'artefatto, con le sue potenzialità e vincoli, e dal soggetto, con le sue conoscenze e abitudini di lavoro precedenti. Instrumentation e instrumentalisation contribuiscono congiuntamente alla genesi strumentale.

La prima fase della genesi strumentale è l'appropriazione dell'artefatto da parte dell'utente. In questa fase, l'utente inizia a esplorare le funzionalità dell'artefatto e ad integrarlo nelle proprie attività quotidiane. Questo processo spesso comporta tentativi ed errori mentre l'utente familiarizza con l'artefatto. Una volta che l'utente ha iniziato a comprendere le potenzialità dell'artefatto, inizia il processo di adattamento. Questo include la personalizzazione delle impostazioni, l'installazione di software specifici e la modifica dell'interfaccia per renderla più user-friendly. Questo adattamento rende l'artefatto più utile e rilevante per le specifiche esigenze dell'utente. Parallelamente all'adattamento dell'artefatto, l'utente sviluppa nuove competenze necessarie per utilizzare efficacemente lo strumento. Questo può includere l'apprendimento di nuove tecniche, lo sviluppo di strategie di problem solving e l'adozione di nuovi comportamenti operativi. Con l'uso continuato, le operazioni mediate dallo strumento diventano più fluide e automatiche. L'utente può utilizzare lo strumento in modo efficiente senza doverci pensare consciamente, il che migliora la produttività e la qualità delle attività svolte. L'ultima fase della genesi strumentale è caratterizzata dall'innovazione e dalla scoperta di nuove modalità di utilizzo dello strumento. Gli utenti avanzati possono esplorare nuove funzionalità, combinare lo strumento con altri artefatti e sviluppare nuovi approcci per risolvere problemi complessi.
Rabardel e Bourmaud identificano diverse dinamiche chiave che influenzano lo sviluppo degli strumenti [Rabardel and Bourmaud, 2003]. Il processo di genesi strumentale è dinamico e continuo, caratterizzato da un'interazione costante tra l'utente e l'artefatto. Questa interazione reciproca guida sia la trasformazione dell'artefatto che l'evoluzione delle competenze dell'utente. La capacità dell'utente di personalizzare e adattare l'artefatto è cruciale per il successo della genesi strumentale. Gli strumenti devono essere progettati per essere flessibili e adattabili, consentendo agli utenti di modificarli in base alle proprie esigenze specifiche. È importante fornire agli utenti risorse di supporto, come tutorial, manuali e comunità di pratica, che facilitino l'apprendimento e l'adozione dello strumento. Questo supporto aiuta gli utenti a superare le difficoltà iniziali e a sviluppare competenze avanzate.

3.6 Sistemi di strumenti

Il concetto di **sistema di strumenti** si riferisce all'insieme integrato di strumenti che un individuo utilizza nelle proprie attività. Questo sistema è costituito da vari artefatti che, attraverso i processi di genesi strumentale, vengono trasformati in strumenti funzionali e coordinati. L'integrazione di questi strumenti in un sistema coeso permette all'individuo di affrontare compiti complessi in modo più efficiente e flessibile.
I sistemi di strumenti sono caratterizzati dalla coordinazione e dall'integrazione di vari artefatti. Questa coordinazione permette agli utenti di utilizzare diversi strumenti in

modo sinergico, ottimizzando le loro attività. Ad esempio, un architetto può utilizzare un software di progettazione assistita da computer (CAD) in combinazione con strumenti di modellazione fisica e software di gestione dei progetti.
I sistemi di strumenti devono essere adattabili e flessibili, permettendo agli utenti di modificare e personalizzare i singoli strumenti e il sistema nel suo complesso. Questa flessibilità consente agli utenti di rispondere a nuove esigenze e di adattarsi a cambiamenti nelle loro attività.
La compatibilità tra i vari strumenti è essenziale per il funzionamento efficace di un sistema di strumenti. Gli strumenti devono poter interagire e scambiare informazioni in modo fluido. Ad esempio, i dati creati in un software di disegno devono essere facilmente importabili in un software di gestione delle costruzioni.
La costruzione di un sistema di strumenti inizia con la selezione degli artefatti appropriati che soddisfano le esigenze specifiche dell'utente. Questa selezione può essere guidata da criteri di funzionalità, compatibilità e facilità d'uso. Una volta selezionati, gli strumenti vengono integrati in un sistema coeso. Questo processo di integrazione può includere l'installazione di software compatibile, la configurazione delle impostazioni e l'addestramento dell'utente all'uso coordinato degli strumenti. Dopo l'integrazione iniziale, gli utenti ottimizzano il sistema di strumenti attraverso l'uso continuo e la sperimentazione. Questa ottimizzazione comporta l'aggiustamento delle impostazioni, l'aggiunta di nuovi strumenti e la modifica delle pratiche operative per migliorare l'efficienza e l'efficacia.
I sistemi di strumenti non sono statici: evolvono nel tempo man mano che gli utenti acquisiscono nuove competenze, identificano nuove esigenze e scoprono nuove possibilità di utilizzo. Questo processo di evoluzione porta all'innovazione, con gli utenti che sviluppano nuove metodologie e approcci per affrontare i loro compiti.

Sulla base di quanto osservato fino ad ora si deduce che gli artefatti dovrebbero essere progettati tenendo conto delle loro dimensioni cognitive, per supportare meglio l'apprendimento e il problem solving. Gli educatori e i formatori devono essere consapevoli del ruolo degli artefatti nella cognizione e devono integrare strumenti che facilitino l'apprendimento e l'innovazione. La comprensione dei processi di instrumentation e instrumentalisation può guidare lo sviluppo di programmi di formazione che supportino l'adattamento efficace degli individui ai nuovi strumenti.
Quanto riportato finora, sulla base dei dati raccolti ci porta a formulare la seguente domanda di ricerca: in che modo gli studenti con disabilità visiva scelgono, sfruttano e adattano strumenti (o sistemi di strumenti) a loro disposizione nell'apprendimento dell'algebra lineare?

Capitolo 4

Metodologia di ricerca

L'intervista è un mezzo versatile per raccogliere dati che sfrutta diversi canali sensoriali come il verbale, il non verbale, il parlato e l'ascoltato. Sebbene l'ordine delle domande possa essere regolato, si lascia comunque spazio alla spontaneità. L'intervistatore ha la possibilità di insistere per ottenere risposte esaurienti ed approfondite su argomenti complessi. Per tali motivi l'intervista è uno strumento potente per i ricercatori; tuttavia, chi conduce interviste deve essere consapevole che queste richiedono molto tempo, possono essere influenzate dai bias dell'intervistatore, potrebbero risultare scomode per i partecipanti, l'affaticamento degli intervistati potrebbe compromettere i risultati e garantire l'anonimato potrebbe risultare difficile [Cohen et al., 2002].
Le **interviste task-based** in didattica della matematica sono una metodologia qualitativa di ricerca e valutazione che mira a comprendere il pensiero e i processi cognitivi degli studenti mentre risolvono problemi matematici. Questo approccio si basa sull'osservazione e sull'analisi delle azioni e delle strategie utilizzate dagli studenti durante l'esecuzione di compiti specifici piuttosto che sulla valutazione dei risultati finali. Coinvolgono almeno un soggetto (il risolutore di problemi) e un intervistatore che interagiscono al fine della risoluzione di uno o più compiti matematici. Questa componente giustifica il termine "task-based" in quanto le interazioni dei soggetti non sono meramente con gli intervistatori, ma anche con gli ambienti di compito [Goldin, 1997]. Questi compiti servono per osservare come il soggetto affronta e risolve problemi matematici, con l'obiettivo di fare inferenze sul pensiero matematico, l'apprendimento e la risoluzione dei problemi. Il protocollo dell'intervista può essere strutturato con domande e risposte dell'intervistatore pianificate in anticipo, o può essere semi-strutturato, permettendo all'intervistatore di giudicare la risposta appropriata al ragionamento matematico degli studenti [Cohen et al., 2002].
L'attenzione non è rivolta in generale su risultati facilmente definiti come modelli di risposte corrette e incorrette da parte dei soggetti. L'intervistatore piuttosto cerca di osservare, registrare e interpretare comportamenti complessi e modelli di comportamento, inclusi parole pronunciate dai soggetti, interiezioni, movimenti, scritture, disegni, azioni

su e con materiali esterni, gesti, espressioni facciali e così via. Le decisioni su cosa osservare fanno parte del disegno della ricerca [Assad, 2015].
Le interviste sono spesso registrate (audio e/o video) per permettere un'analisi dettagliata successiva, includendo non solo le risposte verbali ma anche i gesti, le espressioni facciali e le azioni fisiche degli studenti.
L'intervistatore interagisce con lo studente ponendo domande e chiedendo chiarimenti. Questo dialogo aiuta ad esplorare il ragionamento dello studente e ad identificare eventuali misconcezioni o difficoltà. Gli studenti sono invitati a risolvere compiti matematici specifici di varia difficoltà e tipologia.
Eventuali imprevisti sono gestiti mediante sequenze di domande euristiche e suggerimenti strutturati. Gli scopi possono includere indagini esplorative, sviluppo di tecniche di osservazione, verifica di ipotesi e studio dell'applicabilità di modelli di insegnamento.
Le interviste devono essere progettate per rispondere a domande di ricerca chiare e specifiche e devono pertanto tenere conto degli scopi di ricerca, che possono includere indagini esplorative, perfezionamento delle tecniche di osservazione, sviluppo di costrutti e congetture, investigazione di ipotesi avanzate, e l'applicabilità di modelli di insegnamento e apprendimento [Goldin, 2012].
È cruciale controllare variabili come contenuto e struttura matematica, complessità linguistica e sequenza dei compiti. Metodi e risultati devono essere descritti in modo tale da permettere ad altri ricercatori di replicare lo studio e confermare o contraddire i risultati. Le osservazioni devono essere distinte dalle inferenze, e i metodi di analisi dei dati devono essere chiaramente descritti. È importante considerare l'influenza del contesto sociale e culturale sugli studenti e le loro risposte e, inoltre, la ricerca deve essere condotta all'interno di un quadro teorico ben descritto.

Secondo Goldin, che ha individuato dieci ampi principi metodologici per la progettazione e la costruzione di interviste task-based, la progettazione dell'intervista deve considerare attentamente le variabili controllabili come il contenuto dei compiti, le domande dell'intervista, l'ambiente, i materiali e il tempo dedicato alla risoluzione dei problemi. I compiti devono essere adeguati al livello dei soggetti intervistati e devono includere strutture matematiche e semantiche significative, permettere diverse rappresentazioni e devono essere formulati in modo da fornire significato matematico, motivazione e coinvolgimento per i soggetti [Goldin, 2012]. La loro struttura deve rivelare aspetti critici al fine del conseguimento dei seguenti obiettivi:

1. Rivelare le strutture matematiche nel pensiero dei soggetti;

2. Valutare in che misura i soggetti comprendono o apprezzano concetti matematici durante l'intervista;

3. Esaminare le interazioni tra soggetto e intervistatore che riflettono la comunicazione del pensiero matematico e la cooperazione.

Senza un controllo rigoroso delle variabili, le inferenze tratte dalle osservazioni possono essere dubbie. È essenziale progettare le interviste in modo da rendere possibile la replicabilità e la generalizzazione dei risultati. Le interviste devono essere descritte in dettaglio per permetterne la replicabilità. La qualità della ricerca si misura anche dalla capacità di descrivere esplicitamente sia le variabili controllate che quelle non controllate. Per avanzare nella generalizzabilità delle scoperte, è essenziale descrivere i metodi e i risultati in modo che la comunità scientifica possa replicare gli studi e verificare i risultati. Creare script dettagliati per le interviste che prescrivono compiti, domande e contingenze principali è un modo per garantire la replicabilità e migliorare la qualità delle osservazioni [Goldin, 1997].

I vantaggi dell'utilizzo di questo tipo di interviste sono diversi: permettono di ottenere una comprensione profonda del modo in cui gli studenti pensano e apprendono la matematica, offrendo un potente strumento per comprendere in profondità il processo di apprendimento matematico e sviluppare pratiche didattiche più efficaci; aiutano a rilevare errori comuni e misconcezioni che possono non emergere attraverso test scritti standardizzati; possono essere adattate a diverse età e livelli di competenza nonché a vari contenuti matematici e forniscono un feedback immediato agli studenti che possono riflettere sui loro errori e migliorare il loro apprendimento in tempo reale [Goldin, 2012, Assad, 2015]. Ann Assad riporta l'esempio secondo cui, attraverso interviste cliniche, gli insegnanti hanno riconosciuto le ripercussioni dell'enfasi sulle parole chiave nelle loro istruzioni. Per semplificare il lavoro degli studenti con semplici addizioni, spesso introducevano parole chiave come "in tutto". Tuttavia, le interviste con gli studenti hanno rivelato che estendevano erroneamente questa idea ai problemi di moltiplicazione, come "Se ci sono quattro biscotti su ogni piatto e cinque piatti di biscotti, quanti biscotti ci sono in tutto?"
Alcuni limiti delle interviste task-based, evidenziati dagli autori citati precedentemente, sono i seguenti:

1. Richiedono tempo per la preparazione, la conduzione e l'analisi delle interviste, rendendole meno praticabili in contesti con un grande numero di studenti;

2. Gli intervistatori devono essere ben formati per porre domande in modo non direttivo e per interpretare correttamente le risposte degli studenti;

3. Le risposte possono variare significativamente a seconda del contesto e del livello di comfort dello studente con l'intervistatore.

L'intervista sottoposta ai soggetti sfrutta un approccio etnografico, dovuto alla carenza di letteratura sugli argomenti presi in analisi. Tale approccio è di tipo descrittivo al fine di raccogliere la maggior quantità di dati possibile.
L'intervista si focalizza sulle esperienze personali degli intervistati, invitandoli a descrivere e spiegare i loro ragionamenti, a motivare le loro scelte e strategie risolutive e ad

esplicitare gli strumenti materiali e digitali utilizzati per svolgere i compiti e il modo in cui li usano.
Per ottenere una descrizione dettagliata l'intervista è stata registrata includendo audio e video e la registrazione dello schermo condiviso dal computer dell'intervistato. Il video è stato completamente trascritto aggiungendo la descrizione del comportamento e della comunicazione non verbale [1].

4.1 Descrizione dell'intervista

L'intervista prevede la risoluzione di cinque esercizi di algebra lineare e la risposta a due domande teoriche che esplicitino gli strumenti o i sistemi di strumenti utilizzati dagli intervistati. Gli esercizi riguardano esclusivamente le matrici, in modo da concentrarsi su un unico argomento specifico che non richieda troppa teoria di base, inoltre, per la loro struttura, possono risultare un argomento più ostico per individui con disabilità visiva. Non sono stati imposti vincoli di strumenti o limiti di tempo. Il file dell'intervista è stato fornito agli intervistati in formato txt, scritto in linguaggio LaTeX nel caso in cui lo conoscessero, e in PDF, compilato dal file in LaTeX implementato con il pacchetto Axessibility. È stata fornita anche una dispensa nelle modalità del file degli esercizi [2].

Esercizio 1 Siano date le seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare $A \cdot B$.

Esercizio 2 Ridurre la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

e indicare il rango della matrice ridotta.

Questi primi due esercizi sono stati pensati per indagare in che modo i soggetti con disabilità visiva affrontano il calcolo di algoritmi complessi che richiedono una forte concentrazione e capacità di memorizzazione. In questo studio l'obiettivo è quello di

[1] Tutte le trascrizioni sono consultabili in appendice.
[2] Consultabile in appendice

indagare quali strategie utilizzino gli individui con disabilità visiva nell'affrontare tali tipologie di problemi.

Esercizio 3 Calcolare il determinante e, quando esiste, l'inversa delle seguenti matrici:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il terzo esercizio richiede come i primi due una particolare attenzione nello svolgimento di quello che è l'algoritmo che consente il calcolo del determinante di una matrice. Per non richiedere un tempo eccessivo agli intervistati nello svolgere gli esercizi, la prima matrice è stata creata in modo che non fosse invertibile e che richiedesse come unico compito quello di svolgere l'algoritmo del determinante. Come seconda matrice è stata scelta invece la matrice identità. Tale scelta non è casuale, infatti l'identità è una matrice di cui è facilmente calcolabile il determinante [3] ed è l'inversa di se stessa. Nonostante ciò, mentre per un soggetto vedente è immediato riconoscere tale matrice e quindi concludere in poco tempo l'esercizio, un individuo con disabilità visiva, costretto in questo caso ad utilizzare strumenti che impongono una lettura sequenziale, potrebbero trovarsi in difficoltà e sicuramente necessitano di un tempo maggiore affinché avvenga il riconoscimento.

Esercizio 4 Risolvere il seguente sistema di Cramer:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Questo esercizio richiede la risoluzione di un problema classico di algebra lineare. Non è stato imposto agli intervistati di risolverlo necessariamente sfruttando l'algoritmo di Cramer a cui avrebbero potuto accedere tramite le dispense. Non avendo imposto questo genere di vincoli, si è preferito mantenere le dimensioni della matrice e dei vettori contenute per non appesantire eccessivamente l'intervista.

Esercizio 5 Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare rappresentata dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

[3] Essendo l'identità una matrice diagonale, il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi sulla diagonale principale

relativa alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Trovare la matrice di T rispetto alla base canonica

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

.

Quest'ultimo esercizio è uno di quelli proposti da Hillel e Sierpinska in cui si enfatizza la comprensione concettuale rispetto alle procedure meccaniche [Hillel and Sierpinska, 1994]. Questo tipo di approccio può aiutare gli studenti a sviluppare una comprensione più profonda dei concetti matematici, riducendo la frequenza degli errori. L'uso di problemi complessi e aperti incoraggia gli studenti a sviluppare strategie di problem solving più flessibili e a costruire una comprensione concettuale più robusta. Gli autori hanno sottoposto questo esercizio a ventinove studenti di un corso di algebra lineare. Di questi, solo il 52 % ha risposto correttamente al test.
Gran parte degli studenti che non è riuscita a risolvere correttamente l'esercizio sembrerebbe non pensare in termini delle rappresentazioni, confondendo le colonne della matrice richiesta con le immagini (cioè i vettori che appartengono all'immagine dell'applicazione lineare) dei vettori della base di partenza.
Alcuni degli intervistati non si erano mai trovati a risolvere questo tipo di esercizi o non ne avevano memoria, ma non essendo un esercizio strettamente procedurale e avendo fornito loro una dispensa completa sull'argomento, si è voluto comunque inserirlo.

Domanda 1 Quale strumento hai utilizzato per svolgere gli esercizi proposti? Perchè?

Domanda 2 Come faresti se non avessi a disposizione lo stesso strumento?

Queste due domande sono state formulate per esplicitare gli strumenti utilizzati dagli intervistati. Essendo l'intervista semi-strutturata, ne sono seguite altre che l'intervistatore ha ritenuto pertinenti ai fini dello studio.

4.2 Presentazione dei soggetti

L'intervista è stata sottoposta a tre individui adulti di formazione differente, per quanto scientifica, a cui ci si riferisce con gli pseudonimi Bianca, Ale Micarti e Omero, scelti dagli intervistati. Hanno tutti seguito almeno un corso di algebra lineare. I partecipanti si sono offerti volontariamente per prendere parte alle interviste e sapevano che sarebbero stati registrati per scopi di ricerca.

Bianca si è laureata circa sette anni fa in Matematica. La sua disabilità visiva è congenita. Prima di frequentare l'università non conosceva il linguaggio LaTeX, che ha imparato al primo anno della laurea triennale su invito dei docenti della facoltà. Conosce il Braille e utilizza la barra Braille a otto punti.
Ale Micarti si è laureato circa ventidue anni fa in Informatica. La sua disabilità visiva è congenita. Al momento si occupa di ricerca sull'accessibilità al web e alla documentazione scientifica e di progettazione e sviluppo di tecnologie informatiche di supporto a persone con disabilità, in collaborazione con istituzioni nazionali e internazionali. Ha imparato il linguaggio LaTeX durante la laurea triennale. Conosce il Braille e utilizza la barra Braille a otto punti.
Omero si è laureato circa ventidue anni fa in Ingegneria Chimica. È ipovedente e presentava residuo visivo durante gli anni dell'università. Per i fini dell'intervista ha svolto gli esercizi coprendo lo schermo del computer e sfruttando esclusivamente la sintesi vocale e gli input da tastiera. Non conosce il Braille e il linguaggio LaTeX.

Capitolo 5

Dati

5.1 Intervista a Bianca

L'intervista a Bianca si è svolta in videochiamata su Skype. Qualche ora prima dell'intervista le sono stati inviati per e-mail due files PDF elaborati con il pacchetto Axessibility per LaTeX, uno contenente gli esercizi e le domande dell'intervista e uno contenete la dispensa [1], e due documenti txt che presentavano il file sorgente scritto in TeX dei PDF di cui sopra. Bianca ha scelto di utilizzare per comodità la seconda coppia di files, in modo da selezionare le parti di testo che poi avrebbe modificato dopo averle copiate e incollate.
Durante l'intervista, Bianca ha utilizzato un terzo file txt per risolvere gli esercizi. Esplicita oralmente che avrebbe voluto utilizzare WinEdt, ovvero un editor di testo avanzato progettato principalmente per la creazione di documenti TeX/LaTeX che offre un'interfaccia user-friendly per la creazione, la compilazione e la gestione dei documenti LaTeX, supporta l'evidenziazione della sintassi per numerosi linguaggi di programmazione e markup, rendendo più facile leggere e scrivere codice e permette la personalizzazione dell'interfaccia e delle scorciatoie da tastiera per adattare l'ambiente di lavoro alle proprie preferenze. Purtroppo, tale editor di testo entrava in conflitto con Skype e pertanto si è trovata ad utilizzare NotePad, cioè il blocco note del computer (vedi riga 1 nella tabella A.7).
Per leggere il testo dell'intervista, Bianca ha utilizzato un display Braille integrato con il software JAWS (Job Access With Speech), che è uno dei più diffusi screen reader disponibili per sistemi operativi Windows. Bianca si sposta agevolmente nei documenti e la sua lettura è rapida e fluida. Come esterna alla riga 9 della tabella A.7, grazie alla barra Braille, può decidere quale porzione di testo leggere senza doverlo necessariamente ascoltare tutto come avviene con la sintesi vocale.
Esegue i calcoli esclusivamente a mente, tranne nei rari casi in cui la presenza di cambi di

[1] Consultabile in appendice.

segno potrebbe portarla a commettere errori (vedi riga 34 nella tabella A.1). Nonostante ciò, nella riga 12 della tabella A.7 spiega come si scrivesse tutto durante l'università per evitare di sbagliare.

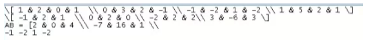
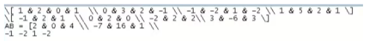
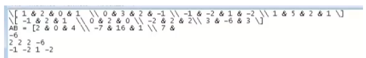
5.1.1 Esercizio 1

[2] Bianca legge il testo dell'esercizio utilizzando il display Braille collegato al computer (vedi riga 1), integrando pertanto gli strumenti tecnologici nel suo processo di apprendimento.
Bianca sceglie di non riscrivere manualmente le matrici presenti nell'esercizio, quanto piuttosto di copiarle e incollarle in un file in cui ha modo di modificarle successivamente. Ne copia il contenuto, escludendo tutto ciò che è la definizione dell'ambiente matematico, semplificando così il processo di manipolazione della matrice. Sceglie infatti di utilizzare una simbologia diversa, più comoda e pratica.

3	Allora. La metto tutta su una riga. Uno, due, tre e quattro. E quattro.	Dopo aver incollato la prima matrice la mette tutta su una riga aggiungendo i simboli per introdurre l'ambiente matematico.

Dispone la prima matrice su un'unica riga, in modo da poterla leggere completamente sul display Braille per facilitare i calcoli e minimizzare gli spostamenti tra le righe del file con il cursore. Quest'ultimo aspetto mostra la capacità di Bianca di adattare l'uso degli strumenti alle sue necessità specifiche.
Bianca ripete il processo per la seconda matrice, dimostrando una comprensione coerente delle operazioni necessarie (vedi riga 9).
Bianca esegue la moltiplicazione delle matrici. Durante questo processo, legge le colonne e righe delle matrici, usando la barra Braille e spostando il cursore, dimostrando come ha sviluppato strategie personalizzate per lavorare con le matrici. Esegue la maggior parte dei calcoli a mente, eventualmente riportandosi le righe/colonne più difficili da memorizzare per commettere meno errori possibili (vedi righe 34, 35 e 37, 38).

[2]In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella A.1 nell'appendice A.

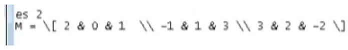
<table>
<tr><td>34</td><td>No! Non è ultima riga, è la terza. Meno uno, meno due, uno, meno due. Questa è piena di segni allora meno uno, zero, meno due, tre.</td><td>Legge la terza riga della matrice A e la scrive al posto della seconda nella quarta riga del file.

\[1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \]
\[-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2\\ 3 & -6 & 3 \]
AB = [2 & 0 & 4 \\ -7 & 16 & 1 \\
-1 -2 1 -2</td></tr>
<tr><td>35</td><td>Allora meno uno, zero, meno due, tre questa me la scrivo.</td><td>Aggiunge una riga al file in cui scrive la prima colonna della seconda matrice in modo da averla tutta su una riga e non sbagliare il calcolo.

\[1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \]
\[-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2\\ 3 & -6 & 3 \]
AB = [2 & 0 & 4 \\ -7 & 16 & 1 \\
-1 -2 1 -2</td></tr>
<tr><td>36</td><td>Allora meno uno, Meno due e meno sei e questa fa 7. Poi.</td><td>Passa volta per volta dalla quarta alla quinta riga del codice per fare tutti i prodotti. Scrive poi il valore ottenuto nella matrice prodotto.</td></tr>
<tr><td>37</td><td>Scriviamoci anche la seconda, che è allora due, due, due e meno sei, e questo praticamente è.</td><td>Scrive la seconda colonna della matrice B al posto della prima.</td></tr>
<tr><td>38</td><td>Allora meno due e meno quattro che fanno meno sei. Poi mmmh meno due che fa meno otto e poi. Più dodici, quindi fa quattro.</td><td>Aggiunge una nuova riga al file in cui modifica il risultato della combinazione lineare man mano che procede con il calcolo, spostandosi tra le righe del file in cui ha riportato la riga e la colonna che vuole moltiplicare. Riporta poi il risultato ottenuto nella matrice prodotto.

\[1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \]
\[-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2\\ 3 & -6 & 3 \]
AB = [2 & 0 & 4 \\ -7 & 16 & 1 \\ 7 &
-6
2 2 2 -6
-1 -2 1 -2</td></tr>
</table>

Usa strategie come il controllo incrociato degli elementi per assicurarsi che il calcolo sia corretto (vedi riga 17). Bianca dimostra una comprensione approfondita delle operazioni matriciali. Nonostante questo, alla riga 3 della tabella A.3 esplicita come abbia sempre trovato difficili le moltiplicazioni ("le moltiplicazioni sono sempre state difficili").

5.1.2 Esercizio 2

[3] Bianca legge il testo dell'esercizio due sfruttando gli strumenti assistivi di cui sopra (vedi riga 3). Anche in questo caso copia la matrice dell'esercizio nel file che ha creato per svolgere gli esercizi, preparando la matrice per la manipolazione successiva (vedi riga 4). Bianca esamina le righe della matrice per dedurne le dimensioni, un passaggio preliminare fondamentale per applicare correttamente le operazioni di eliminazione.
Organizza la matrice in modo che sia più facile da manipolare, adattando l'uso degli strumenti per soddisfare le sue necessità specifiche (vedi riga 6).

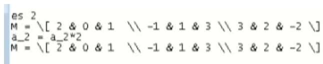
6	Bianca: La metto tutta così. Allora. Questa la chiamiamo M.	Mette la matrice tutta su una riga introducendo l'ambiente matematico. Inoltre le assegna il nome "M".



```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
```

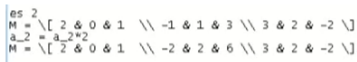
Bianca esegue operazioni elementari sulla matrice, come la moltiplicazione di righe per uno scalare (vedi riga 8) e la somma tra righe (vedi riga 10).

8	Facciamo che moltiplico la seconda riga per due.	Aggiunge una riga al file dove tiene traccia delle operazioni che vuole eseguire.



```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
```

9	Quindi meno due, due. Controllo un secondo, una cosa sì, meno due, due e sei.	Modifica la "seconda" matrice M moltiplicando la seconda riga per due e torna alla "prima" matrice M per verificare di aver svolto la moltiplicazione correttamente.



```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
```

[3] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella A.2 nell'appendice A.

10	E poi faccio che sommo la prima. La seconda diventa a_2 più a_1.	Ricopia nuovamente la matrice M (questa volta modificata dall'operazione precedente) e aggiunge una riga al file dove tiene traccia delle operazioni che vuole eseguire.

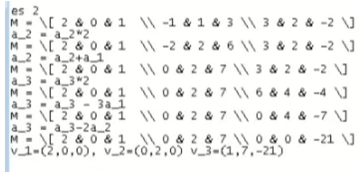
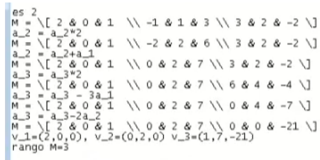
```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
```

Queste operazioni sono essenziali per l'eliminazione di Gauss e dimostrano un adattamento delle strategie di calcolo per risolvere il problema.
Bianca sceglie di scrivere i calcoli che sta eseguendo sulle righe della matrice per tenerne traccia. Ricopia volta per volta la matrice ottenuta dall'operazione precedente per modificarla sulla base delle informazioni correnti (vedi riga 18).

18	Praticamente questo fa zero. E questo fa quattordici, quindi meno ventuno.	Modifica l'ultima versione della matrice M per terminare l'eliminazione di Gauss.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
a_3 = a_3-2a_2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \]
```

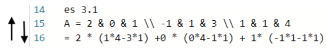
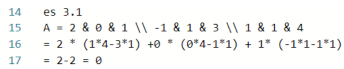
Bianca verifica i risultati delle operazioni di eliminazione, assicurandosi che ogni passaggio sia stato eseguito correttamente (vedi riga 20). Infine per il calcolo del rango della matrice ne considera le colonne che, essendo tutte diverse dal vettore nullo, risultano linearmente indipendenti (vedi righe 21 e 22).

<table>
<tr><td>21</td><td>Allora prendo i vettori che sono due, zero, zero. Poi abbiamo v_2 che è zero, due, zero. E poi abbiamo v_3 che è uno, sette, meno ventuno.</td><td>Torna all'ultima versione della matrice scritta e scrive le colonne di M come singoli vettori per verificarne l'indipendenza.

es 2
M = \[2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
a_3 = a_3-2a_2
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \]
v_1=(2,0,0), v_2=(0,2,0) v_3=(1,7,-21)</td></tr>
<tr><td>22</td><td>Che però sono linearmente indipendenti e quindi la matrice rango tre.</td><td>Scrive il rango della matrice M ottenuta.

es 2
M = \[2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
a_3 = a_3-2a_2
M = \[2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \]
v_1=(2,0,0), v_2=(0,2,0) v_3=(1,7,-21)
rango M=3</td></tr>
</table>

5.1.3 Esercizio 3

[4] Bianca legge l'esercizio dal file e copia la prima matrice (vedi riga 3). Anche in questo decide di posizionare la matrice in una singola riga nel suo documento di lavoro, mostrando un adattamento dello strumento alle sue esigenze personali di chiarezza e ordine (vedi riga 4). In questo caso non riporta i simboli dell'ambiente matematico e decide di non scriverli come invece aveva fatto negli esercizi precedenti.
Bianca inizia a scrivere la formula per il calcolo del determinante. Ripete verbalmente i passaggi del calcolo che sta svolgendo, mostrando come internalizzi il procedimento matematico e lo articoli attraverso lo strumento.
Procedendo con il calcolo, grazie all'intervento dell'intervistatore, si rende conto di aver commesso un errore. Questo mostra un ciclo di feedback in cui l'uso dello strumento e l'interazione con l'intervistatore portano ad un raffinamento del processo cognitivo.
Bianca rivede i passaggi e identifica l'errore (vedi riga 10). Attraverso la rilettura e la verifica, Bianca mostra un uso critico dello strumento, che le permette di correggere e validare il calcolo svolto (vedi righe 12 e 13).

[4] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella A.3 nell'appendice A.

12	Bianca: Perché ho beccato uno? Più zero e poi il terzo invece è uno che moltiplica uno per quattro meno tre, il terzo è uno che moltiplica allora… Meno uno, uno, uno è la matrice che sta a sinistra, devo prendere i quattro che sono a sinistra quindi sono tutti uno praticamente. Sì, con un meno uno, cioè meno uno per uno, meno uno per uno fa meno due questo. Ho preso ancora quell'altra.	Termina la scrittura dell'algoritmo questa volta corretto che controlla ritornando più volte alla matrice A. 
13	Quindi questo praticamente è meno due che moltiplica uno quindi è meno… questo qua è, allora abbiamo detto due meno due praticamente che fa zero, quindi questa non è invertibile, non la calcoliamo l'inversa.	Svolge il calcolo su una nuova riga. 

Bianca legge la seconda matrice che copia e incolla nel file txt che ha adibito al calcolo. Anche in questo caso riporta la matrice su un'unica riga in modo da poterla leggere completamente sul display Braille. Questo le permette di calcolarne rapidamente il determinante, dimostrando come abbia internalizzato le proprietà matematiche delle matrici diagonali (vedi riga 23).

23	Vabbè, (di) quella diagonale il determinante era il prodotto delle… Dovrebbe essere 1 il determinante di questa.	Scrive il determinate della matrice D. 

Bianca utilizza le dispense fornite per verificare le informazioni sul calcolo dell'inversa di una matrice. Attraverso una ricerca con vincolo per trovare rapidamente l'informazione necessaria (vedi riga 26) trova conferma del fatto che la matrice identità è uguale alla sua inversa, mostrando un'abilità matura nell'uso dello strumento per supportare il suo apprendimento. Infine riporta sul file quanto concluso (vedi riga 29).
In questo esercizio, gli strumenti a disposizione di Bianca non solo facilitano il calcolo, ma supportano anche il suo processo cognitivo di verifica, correzione e comprensione delle proprietà matematiche. L'interazione con l'intervistatore fornisce un feedback esterno che arricchisce ulteriormente questo processo, evidenziando l'importanza del contesto sociale nell'instrumentalisation.

5.1.4 Esercizio 4

[5] Bianca legge il quarto esercizio dal file degli esercizi sfruttando gli strumenti di cui sopra. A differenza di quanto fatto precedentemente però sceglie di non copiare e incollare la matrice ma di scriverla manualmente avendo dimensioni ridotte (vedi riga 10). Ovviamente la scrive tutta su una riga per le motivazioni già discusse.
Riporta manualmente anche il vettore termine noto che non scrive con il linguaggio TeX, preferendo piuttosto una scrittura più intuitiva.

<table>
<tr><td>10</td><td>Bianca: E abbiamo (x,y). E poi nove... quattro, nove e basta.</td><td>Riscrive nel file l'esercizio, mettendo la matrice E su una riga.

es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)</td></tr>
</table>

Nonostante aver compreso la richiesta dell'esercizio, Bianca sceglie di utilizzare la strategia risolutiva suggerita dalla consegna. Pertanto, decide di consultare le dispense per apprendere il metodo di Cramer, eseguendo una ricerca con vincolo "Cramer" (vedi riga 16). Questa valutazione, da lei attuata, dimostra flessibilità e adattabilità nell'uso degli strumenti. Bianca legge il teorema di Cramer nelle dispense e comprende come applicarlo.
La soluzione si trova usando i determinanti delle matrici associate. Le soluzioni sono date dal rapporto tra il determinante della matrice ottenuta sostituendo una alla volta alle colonne della matrice il vettore termine noto e il determinante della matrice originale. Bianca identifica la matrice A del sistema e calcola il suo determinante. Sostituisce poi una alla volta le colonne di A con il vettore dei termini noti per ottenere le matrici A_1 e A_2, e calcola i loro determinanti. Infine, usa i determinanti calcolati per trovare le soluzioni del sistema.
Bianca applica le operazioni di sostituzione e calcolo dei determinanti, dimostrando una padronanza del metodo e la capacità di eseguire i calcoli correttamente.

[5] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella A.4 nell'appendice A.

<table>
<tr><td>25</td><td>A_2 è: quattro e nove li mettiamo qua.</td><td>Sostituisce alla seconda coloonna della matrice E (che ora è A) il vettore b, ottenendo la matrice A_2.
<pre>
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
</pre></td></tr>
<tr><td>26</td><td>Quattro e nove, quindi due per nove, diciotto, meno quattro quattordici, quindi determinante di A_2 è quattordici sì, due per nove, diciotto, più quattro ventidue.</td><td>Scrive il determinante di A_2.
<pre>
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
</pre></td></tr>
</table>

Bianca ricalcola i determinanti per verificare la correttezza dei suoi passaggi (vedi riga 27), dimostrando un comportamento riflessivo.
Risolve il sistema utilizzando anche un altro metodo a lei noto, per avere una controprova (vedi riga 30).
Bianca confronta i risultati ottenuti con i due metodi, dimostrando una comprensione profonda del problema e la capacità di verificare le soluzioni attraverso metodi diversi.
In questo esercizio, Bianca mostra una chiara interazione tra instrumentation e instrumentalisation. Utilizza strumenti digitali per leggere, rappresentare e calcolare, ma soprattutto integra questi strumenti nel proprio processo di apprendimento e risoluzione dei problemi. Le consultazioni delle dispense e la verifica incrociata dei risultati con metodi alternativi evidenziano come Bianca personalizzi e internalizzi l'uso degli strumenti per garantire l'accuratezza e la comprensione delle soluzioni.

5.1.5 Esercizio 5

[6] Bianca è l'unica tra gli intervistati ad essere laureata in Matematica. Questo sicuramente è risultato vantaggioso nella risoluzione di quest'ultimo esercizio che riguarda la determinazione della matrice di un'applicazione lineare rispetto ad una base data.
Anche questa volta Bianca decide di copiare la matrice associata all'applicazione lineare T (vedi riga 4). La dispone su un'unica riga senza riportare i simboli che introducono l'ambiente matematico.
Dopo aver indagato la struttura con cui sono riportati i vettori della prima base dell'esercizio, li riporta nel file in cui sta svolgendo gli esercizi senza utilizzare il linguaggio

[6] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella A.5 nell'appendice A.

TeX, quanto piuttosto la scrittura più pratica utilizzata anche nell'esercizio precedente.

11	Bianca: OK, allora devo andare ancora più su e scriviamolo v_2 qua già che ci siamo. Uno, tre, zero è v_1 e v_3 è uguale a zero, zero, uno.	Incolla la matrice assegnandole il nome "T" nel file dove sta svolgendo gli esercizi, dove scrive anche i vettori della base.

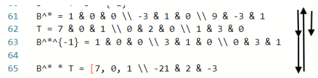
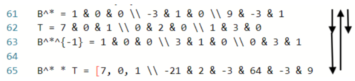
```
40  es 5
41  T = 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0
42
43  v_1 = (1, 3, 0)
44  v_2 = (0, 1, 3)
45  v_3 = (0, 0, 1)
```

Bianca ha già risolto esercizi simili nella sua carriera universitaria ma non avendone un ricordo chiaro sceglie di leggere la dispensa. Cerca informazioni specifiche sulla risoluzione dell'esercizio, che trova subito sotto quelle relative all'esercizio precedente. Inoltre, attraverso una ricerca con vincolo (vedi riga 5) legge un esempio del calcolo della matrice di cambio di base. Per cercare di interiorizzare il più possibile le informazioni fornitele, si sposta più volte tra i file dimostrando una buona capacità di attingere alle risorse a lei messe a disposizione.
Bianca deve scrivere i vettori della base canonica in termini della base data e utilizzare questi per determinare la matrice di trasformazione. L'intervento dell'intervistatore è cruciale in questo passaggio perché Bianca inizialmente non sembrerebbe aver compreso a pieno cosa stia succedendo nell'esempio.
Dopo il suggerimento l'intervistatore, Bianca pare aver internalizzato le operazioni di cambio di base e applica questa comprensione per risolvere l'esercizio (vedi riga 37). Risolve per ogni combinazione scritta un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite che scrive muovendosi tra le righe del file (vedi righe 39, 48 e 51). Infinte riporta i risultati ottenuti sotto forma di vettori che andranno a costituire le colonne della matrice di cambio di base. La riporta scrivendola manualmente tutta su una riga.
Per concludere l'esercizio deve calcolare l'inversa della matrice trovata. Verifica innanzitutto la fattibilità di tale operazione esplorando la riga in cui ha riportato la matrice (vedi riga 62).

62	Bianca: Allora determinante, uno per uno. Più tre per zero che è uno. Uno per uno. Poi c'è la parte due che non guardiamo neanche perché c'è lo zero e la terza nemmeno perché c'è lo zero. Il determinante è uno.	Legge la riga in cui ha scritto la matrice B* (facendo scorrere le dita sul display Braille) per calcolarne il determinante (vuole accertarsi dell'esistenza dell'inversa).

```
60  B^* * T* B^*^{-1}
61  B^* = 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1
62
```

Dove aver verificato di poter invertire la matrice cerca informazioni relative alle modalità con le quali invertirla. Non conoscendo o comunque non ricordando il metodo proposto nella dispensa, l'intervistatore suggerisce un'altra tecnica che Bianca decide di adottare. Dopo aver ricavato la matrice cercata, Bianca esegue il prodotto tra le matrici, che riporta su due righe vicine. Per calcolare le matrici prodotto si sposta tra le righe del file per indagare le righe e le colonne delle due matrici. Avendole riportate tutte su una riga, le basta utilizzare il cursore per spostarsi tra le matrici e non tra le righe delle stesse (vedi righe 98 e 102).

<table>
<tr><td>98</td><td>B asterisco per T. Allora sette. Poi due. No, no, no. sette, zero... sette, zero, uno, poi abbiamo il meno tre, uno, zero. Meno tre, uno, zero che fa... sette per meno tre che fa meno ventuno. Meno ventuno è la prima. Poi meno tre, uno, zero per... quindi questo è zero... due. E poi l'ultimo che è meno tre. E poi l'ultima riga.</td><td>Si sposta tra le righe 61 e 62 con il cursore per calcolare la matrice prodotto che scrive sotto.
</td></tr>
<tr><td>99</td><td>Intervistatore: M-hm.</td><td></td></tr>
<tr><td>100</td><td>Bianca: Che è praticamente il nove, meno tre, uno. Sette per nove sessantatre, più uno sessantaquattro.</td><td>Si sposta tra le righe 61 e 62 con il cursore per completare la matrice prodotto.</td></tr>
<tr><td>101</td><td>Intervistatore: M-hm.</td><td></td></tr>
<tr><td>102</td><td>Bianca: Poi abbiamo sempre nove, meno tre, uno, quindi questo zero meno sei più tre, fa meno tre. E l'ultimo che fa nove meno tre... Nove e basta.</td><td></td></tr>
</table>

Procede allo stesso modo per calcolare l'ultima matrice prodotto e terminare l'esercizio (vedi riga 105).

Nonostante non ricordasse in maniera precisa come risolvere questa tipologia di esercizio, Bianca è riuscita ad integrare le conoscenze teoriche pregresse e quelle delle dispense con le operazioni pratiche per risolvere l'esercizio, utilizzando le risorse a disposizione in maniera efficace.

5.1.6 Domande 1 & 2

Nella prima domanda Bianca descrive come approccia la risoluzione degli esercizi matematici, in particolare quelli che coinvolgono operazioni complesse come il calcolo di determinanti e inverse di matrici. Bianca menziona l'utilizzo di strumenti tecnologici come software per la lettura e la scrittura delle matrici e strumenti assistivi come la

barra Braille. Adatta gli strumenti a sua disposizione per eseguire operazioni specifiche, come la copiatura di matrici in un file di testo per una gestione più agevole e la scrittura di queste su un'unica riga.
Bianca ha internalizzato le procedure per il calcolo con le matrici, applicando queste conoscenze teoriche in modo pratico e dimostrando una buona padronanza delle tecniche matematiche.
Nella seconda domanda Bianca discute come comprende e applica la teoria matematica, in particolare come legge e interpreta i materiali teorici e come utilizza queste informazioni per risolvere gli esercizi. L'uso di software specifici per scrivere e modificare le matrici dimostra come Bianca si avvale delle tecnologie di supporto per gestire informazioni teoriche e applicarle nei calcoli.
Fornisce esempi di strumenti che potrebbero essere dei sostituti di quelli da lei utilizzati, ma sottolinea come non siano delle valide alternative. Spiega come durante l'università preferisse riportare i ragionamenti piuttosto che scrivere tutto, risolvendo i calcoli in un secondo momento per cercare di captare più informazioni possibili. Ricorda come sia stato fondamentale il supporto fornitole dai docenti durante le lezioni, ad esempio nel verbalizzare tutto ciò che veniva scritto alla lavagna o nel dettare le matrici per righe anziché per colonne.

5.2 Intervista ad Ale Micarti

L'intervista con Ale Micarti si è svolta in videochiamata su Microsoft Teams. Essendo stata riprogrammata l'intervista, Ale Micarti ha ricevuto qualche giorno prima per e-mail gli stessi documenti inviati a Bianca. Ha comunque deciso di non leggere i files in maniera preventiva. Anche Ale Micarti ha scelto di utilizzare i due files txt per manipolare più agevolmente le matrici degli esercizi.
Durante l'intervista Ale Micarti ha utilizzato un editor di testo per risolvere gli esercizi. Spiega che, se avesse dovuto seguire un corso completo sulle matrici, probabilmente l'avrebbe personalizzato con una serie di comandi più comodi, in modo da utilizzare il meno possibile le frecce della tastiera per spostarsi nei files (vedi riga 2 della tabella B.6). Inoltre, suggerisce che avrebbe potuto utilizzare le modalità di visualizzazione bidimensionale di EDICO [7] o di Lambda [8], che però prevedono un linguaggio diverso dal LaTeX e pertanto ritenuti inopportuni (vedi riga 3 della tabella B.6).
Per leggere il testo dell'intervista ed eseguire gli esercizi Ale Micarti ha utilizzato un display Braille combinato con la tastiera del computer. Ale Micarti si sposta agevolmente

[7] EDICO è uno strumento che consente ai non vedenti, o alle persone con gravi disabilità visive, di gestire e modificare i contenuti scientifici di aree diverse come la matematica, la fisica o chimica in modo accessibile, rendendo possibile l'interazione diretta con le persone vedenti.

[8] LAMBDA è un software che permette la scrittura, lettura e manipolazione di formule matematiche a persone non vedenti, utilizzando la riga braille e/o la sintesi vocale.

tra i documenti e la sua lettura è veloce.
Esegue i calcoli prevalentemente a mente, ma spiega che in altre condizioni, avrebbe utilizzato notazioni diverse più compatte per leggere tutto su un'unica riga (vedi riga 6 della tabella B.6).

5.2.1 Esercizio 1

[9] Ale Micarti utilizza il display Braille per leggere le matrici dell'esercizio. Per comodità di notazione sceglie di mandare a capo le lettere utilizzate per indicare le matrici (vedi righe 3 e 5).

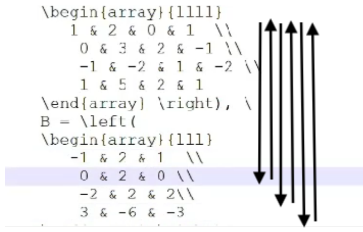
3	Abbiamo due matrici, però in questa seconda matrice io preferisco allinearmela sotto, così la ritrovo più facilmente.	Manda a capo l'inizio della seconda matrice.
		`\end{array} \right), \`
		`B = \left(`
		`\begin{array}{lll}`
		`-1 & 2 & 1 \\`
		`0 & 2 & 0 \\`
		`-2 & 2 & 2\\`
		`3 & -6 & -3`
		`\end{array} \right).`

4	E lo stesso per…	

5	Questa matrice. Io commento intanto così almeno devo essere più chiaro in quello che faccio.	Manda a capo anche l'inizio della prima matrice.
		`A = \left(`
		`\begin{array}{llll}`
		`1 & 2 & 0 & 1 \\`
		`0 & 3 & 2 & -1 \\`
		`-1 & -2 & 1 & -2 \\`
		`1 & 5 & 2 & 1`
		`\end{array} \right), \`

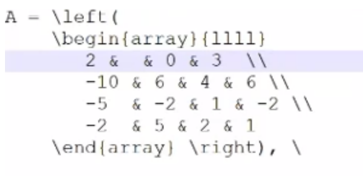
Dopo averne indagato le dimensioni, copia le matrici e le incolla, una alla volta, nell'editor di testo adibito alla risoluzione degli esercizi. Il modo in cui organizza e allinea le matrici nel documento per facilitarne la lettura e il calcolo mostra una personalizzazione dell'uso degli strumenti per adattarsi alle sue necessità.
Incolla nuovamente la matrice A dell'esercizio per utilizzarla come modello per la matrice prodotto, modificandola di passaggio in passaggio (vedi riga 37). Inizialmente sbaglia l'algoritmo, ma rendendosi conto delle dimensioni delle matrici e grazie all'intervento dell'intervistatore, rivede i suoi errori e ricomincia da capo. Per eseguire il prodotto tra le matrici si muove con le frecce su e giù della tastiera per leggere le righe della prima matrice e le colonne della seconda (vedi righe 19, 34 e 61).

[9] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella B.1 nell'appendice B.

34	Più zero, più zero e più tre.	Si sposta nuovamente lungo le matrici per eseguire il calcolo desiderato. 

```
\begin{array}{llll}
   1 & 2 & 0 & 1  \\
    0 & 3 & 2 & -1 \\
    -1 & -2 & 1 & -2 \\
    1 & 5 & 2 & 1
\end{array} \right), \
B = \left(
\begin{array}{lll}
   -1 & 2 & 1  \\
    0 & 2 & 0 \\
    -2 & 2 & 2\\
    3 & -6 & -3
```

Man mano che esegue i calcoli cancella dalla matrice prodotto l'elemento che andrà a calcolare per non perdere il punto in cui inserire il risultato delle varie combinazioni lineari (vedi riga 52).

52	Cancello la seconda...	Cancella l'elemento di posto (1,2) dalla matrice prodotto e torna al file degli esercizi. 

```
A = \left(
    \begin{array}{llll}
       2 &  & 0 & 3  \\
       -10 & 6 & 4 & 6 \\
       -5  & -2 & 1 & -2 \\
       -2  & 5 & 2 & 1
    \end{array} \right), \
```

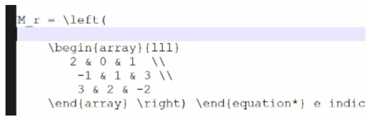
Riverifica più volte i calcoli eseguiti dato che sta procedendo svolgendoli a mente (vedi riga 55). Infine avendo scelto come modello della matrice prodotto la matrice A, ne cancella la colonna in eccesso. Questo dimostra come Ale Micarti abbia ben chiare le nozioni chiave dell'argomento in analisi e le utilizzi per validare le considerazioni fatte.

5.2.2 Esercizio 2

[10] Ale Micarti utilizza i comandi da tastiera per selezionare, copiare e incollare parti della matrice da ridurre a matrice triangolare superiore. Inizia l'esercizio leggendo la matrice da ridurre che copia e incolla nell'editor di testo (vedi righe 6 e 7).
Ricorda che ridurre una matrice con l'algoritmo di Gauss significa ottenere una matrice triangolare superiore da quella originale, quindi identifica i passaggi necessari per trasformare la matrice. Utilizza le sue conoscenze matematiche pregresse di algebra lineare per applicare combinazioni lineari tra le righe della matrice.
Durante il processo, per evitare confusione, Ale Micarti rinomina la matrice ogni volta

[10] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella B.2 nell'appendice B.

che viene effettuata una modifica significativa, ad esempio da M a M_r per non confondere la matrice iniziale con quella ridotta e successivamente aggiunge delle parentesi per una maggiore chiarezza (vedi righe 8 e 9).

8	No, sì, son qui, cioè nella, nella, diciamo così nel foglio in cui mi stavo annotando. Magari la chiamerei, non lo so, M con R qualcosa di questo genere per distinguerla da quella di prima.	Assegna alla matrice il nome M_r. 
9	Con le parentesi forse mi trovo meglio, così potrei proprio mettere… ridotto o qualcos'altro.	Cambia il nome della matrice da M_r allo stesso con le parentesi graffe intorno alla r minuscola.

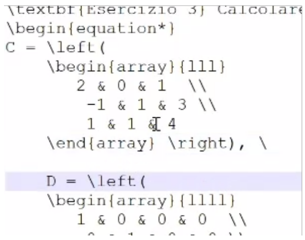
Applica i principi di Gauss per ottenere una matrice triangolare superiore, verificando costantemente i risultati intermedi. Copia volta per volta l'ultima versione della matrice ridotta che modifica spostandosi su e giù con le frecce tra le sue righe (vedi righe 12 e 24).
Infine, per non commettere errori sceglie di confrontare le ultime versioni della matrice con quella presente nel testo dell'esercizio spostandosi tra il file degli esercizi e l'editor di testo.

5.2.3 Esercizio 3

[11] Questo esercizio richiede di calcolare il determinante e verificare l'esistenza dell'inversa (la matrice inversa esiste quando il determinante è diverso da zero) di alcune matrici eventualmente da determinare. Ale Micarti dimostra una buona conoscenza matematica e abilità tecniche nell'uso della barra Braille e del computer. È in grado di comprendere la teoria dietro il calcolo del determinante e dell'inversa delle matrici.
Segue un processo sistematico per leggere le matrici, manipolare i dati e calcolare i risultati. Utilizza la tastiera del computer per copiare e incollare le matrici, dopo averne riportato il nome su una riga diversa da quella in cui è definito l'ambiente matematico dell'equazione, semplificando così il processo di manipolazione dei dati (vedi righe 5 e 6).

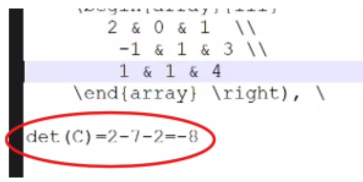
[11] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella B.3 nell'appendice B.

5	Ok, allora la matrice è questa qua. Allora io la mando a capo perché poi scorrendo col dito trovo subito il nome della matrice con cui... su cui sto lavorando.	Manda a capo l'intestazione della prima matrice e la copia.
6	Ecco, questo volevo chiarirlo perché magari non è poi così evidente dal movimento sulla barra Braille.	Fa lo stesso con la seconda matrice.

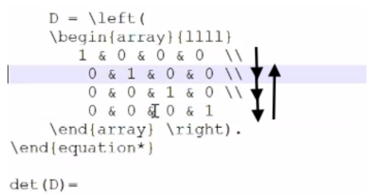


Ale Micarti inizia l'esercizio leggendo la consegna con il cursore e la barra Braille. Copia la matrice C nel file di lavoro, facilitandone così l'accesso durante i calcoli successivi e ottimizzando l'uso degli strumenti disponibili. Riconosce la dimensione della matrice, ma non ricordando immediatamente l'algoritmo per il calcolo del determinante, inizialmente lo calcola in maniera errata. L'intervento dell'intervistatore permette ad Ale Micarti di riconoscere l'errore commesso e correggerlo. In questo passaggio è stato fondamenatle il fatto che Ale Micarti abbia riportato man mano i calcoli svolti a mente in una riga dell'editor di testo (vedi righe 13, 15 e 25).

25	Ale Micarti: Ok, allora avevo dimenticato che c'era anche da moltiplicare due, perfetto.	Aggiusta il calcolo svolto sulla base di quanto osservato.



Copia e incolla anche la seconda matrice nell'editor di testo. Si sposta più volte tra le righe del file per comprendere a fondo la struttura della matrice (vedi righe da 31 a 36).

31	Questa è una matrice più grandina. Però ci sono tanti zeri meravigliosi.	Scorre tra le righe della matrice.
32	Allora in realtà questo si riconduce direi al determinante di tutta questa sottomatrice qui...	Scorre tra le righe della sottomatrice per calcolarne il determinante. 
33	È una matrice diagonale, sì.	Scorre tra le righe della matrice D per sincerarsi della considerazione fatta.
34	Zero, zero, zero, uno. Zero, zero, uno, zero. Zero, uno, zero, zero. E uno, zero, zero, zero.	Sposta il cursore dall'ultima riga della matrice alla prima soffermandosi anche su quelle intermedie.
35	Di questa il determinante...	Scorre nuovamente tra le righe della matrice.
36	Allora è una matrice con tutti uno sulla diagonale principale. Mi sembra di ricordare che il determinante fosse uno, però non sono sicuro.	

Questo movimento nel file gli consente di dedurre facilmente il determinante della matrice D. Infine, a seguito di una discussione con l'intervistatore, comprende che l'inversa della matrice identità è essa stessa e pertanto la copia e incolla nello stesso editor di testo e le assegna il nome D^{-1}.

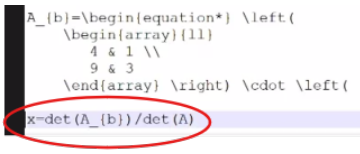
5.2.4 Esercizio 4

[12] L'esercizio quattro riguarda la risoluzione di un sistema di equazioni lineari utilizzando il metodo di Cramer. Questo richiede il calcolo dei determinanti delle matrici associate al sistema di equazioni.

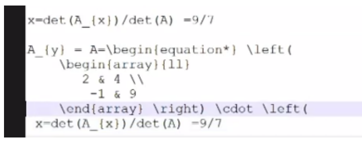
[12]In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella B.4 nell'appendice B.

In questo caso Ale Micarti sceglie di copiare e incollare tutto il testo dell'esercizio, per modificare quanto necessario in un secondo momento (vedi righe 3 e 4). Inizia a svolgere l'esercizio identificando la matrice principale del sistema di equazioni a cui assegna il nome A e determina le matrici "modificate" ottenute sostituendo le colonne con i termini noti del sistema che rinominerà più volte.
Scrive esplicitamente la formula per ricavare la prima incognita richiesta dall'esercizio che poi copia e incolla per modificarla in un secondo momento e ricavare la seconda (vedi righe 13 e 17).

13	Quindi X sarà uguale al determinante di A con b diviso il determinante di A.	Scrive la formula per trovare la prima incognita subito sotto la matrice modificata.



14	Quindi sarà uguale a determinante di A con b che è quattro, dodici meno nove, quindi tre. Diviso determinante di A...	Esplicita la formula scritta spostandosi tra le righe della matrice modificata per calcolarne il determinante.
15	È qui A?	Si sposta con il cursore nel file dove sta svolgendo gli esercizi per ritrovare la matrice dell'esercizio 4.
16	Ah è questa! Quindi il determinante è tre... Sei meno... Più uno. Quindi sette.	Scorre tra le righe della matrice A.
17	Quindi questo è nove settimi.	Scrive il valore trovato di x.

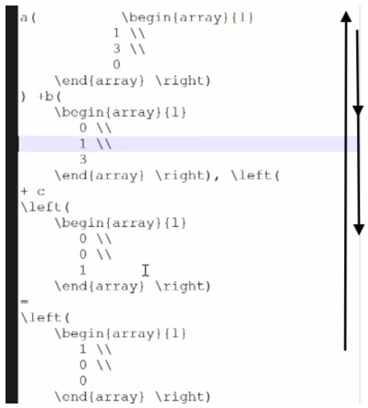


Svolge il calcolo dei determinanti a mente, esplicitandone esclusivamente i risultati e li riporta accanto alla formula scritta. Ale Micarti dimostra un uso attivo degli strumenti e una comprensione profonda del processo matematico. La combinazione dei processi di instrumentation e instrumentalisation gli ha permesso di superare le sfide legate alla gestione delle informazioni e ai calcoli complessi, dimostrando un alto livello di competenza e adattabilità.

5.2.5 Esercizio 5

[13] Questo esercizio riguarda la determinazione della matrice di una trasformazione lineare T da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica.
Ale Micarti inizia leggendo la descrizione dell'esercizio e identificando la trasformazione lineare T rappresentata dalla matrice M rispetto alla base $\mathcal{B}$. Utilizza la lettura e l'interpretazione dei simboli matematici e delle notazioni per comprendere il problema (vedi righe 2 e 3). Riconosce che deve trovare la matrice di T rispetto alla base canonica, cioè $\{e_1, e_2, e_3\}$.
Manda a capo l'intestazione della prima base come fatto precedentemente per le matrici. La copia e la incolla dell'editor di testo così da sfruttarla nella scrittura della combinazione lineare per il calcolo della matrice di cambio di base.
Ale Micarti non ricordava gli argomenti necessari alla risoluzione di questa tipologia di esercizio, pertanto l'intervistatore ha spiegato oralmente quanto necessario su sua richiesta (vedi riga 6).
Dopo aver interiorizzato le informazioni necessarie, Ale Micarti è stato in grado di scrivere la combinazione lineare desiderata dalla quale ha ricavato gli elementi della matrice di cambio di base (vedi riga 24), riportandoli esplicitamente (vedi riga 27).

24	Ora, ok quindi questo vorrebbe dire…	Si sposta su e giù tra le righe della combinazione appena scritta per ricavare le incognite a, b e c.



Assegna un nome alla matrice di cambio di base che sia coerente quale M_{BC}. Tale matrice è stata ottenuta modificando la matrice dell'esercizio precedente con i coefficienti calcolati, dopo averla copiata e incollata sull'editor di testo (vedi righe 31 e 32).
Copia e incolla la matrice calcolata qualche riga sotto. In questo caso sceglie di non fare lo stesso con la matrice da moltiplicare a quella di cambio di base, ovvero la matrice M, ma di utilizzare quella presente nel testo degli esercizi. In questo modo minimizza gli

[13] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella B.5 nell'appendice B.

spostamenti con le frecce della tastiera dovendosi semplicemente spostare tra i due files. Destina a matrice prodotto la matrice di cambiamento di base dopo averla precedentemente copiata e incollata nuovamente nell'editor di testo. Come nell'esercizio uno, modifica volta per volta tale matrice dopo aver cancellato l'elemento che andrà a calcolare a mente (vedi riga 58).

5.2.6 Domanda 1 & 2

Ale Micarti spiega come utilizzi un editor di testo per svolgere gli esercizi. Inoltre sottolinea che, se avesse dovuto seguire un corso completo, avrebbe personalizzato l'editor con comandi più efficienti per spostarsi tra le matrici. Questo suggerisce un possibile sviluppo degli strumenti per adattarsi meglio alle sue esigenze specifiche. Nella riga 10 della tabella B.6 suggerisce alcune personalizzazioni per muoversi più agevolmente nelle matrici.
La scelta di utilizzare files separati per le matrici, nell'ultimo esercizio, mostra come Ale Micarti abbia modificato il suo ambiente di lavoro creando una configurazione che rendesse più agevole il passaggio tra le matrici durante i calcoli, un esempio chiaro di instrumentalisation. Tuttavia, la gestione di più file aperti e l'assenza di una visualizzazione diretta mostrano le sfide tecniche nel lavorare con strumenti non specializzati per compiti specifici di calcolo matriciale.
Il linguaggio LaTeX sembrerebbe risultare un vincolo necessario all'utilizzo di alternative che secondo Ale Micarti potrebbero essere valide, quali Excel, EDICO e Lambda. Infatti spiega che avrebbe poi dovuto riportare tutto nel linguaggio richiesto, il che avrebbe comportato un'ulteriore perdita di tempo.
Mostra come avrebbe potuto scrivere diversamente i vettori, in orizzontale anziché in verticale, in modo da poter accedervi completamente dalla barra Braille senza utilizzare le frecce da tastiera (vedi riga 4 della tabella B.6). In un primo esempio utilizza il linguaggio TeX, mentre negli ultimi due utilizza una notazione più compatta e semplice da manipolare. Spiega che con dei comandi da tastiera sarebbe riuscito facilmente a trasformare quella notazione più efficace in LaTeX (vedi riga 8).

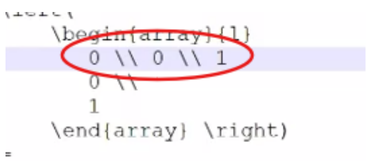


Figura 5.1: Esempio proposto 1

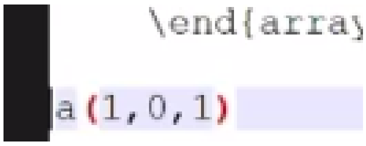


Figura 5.2: Esempio proposto 2

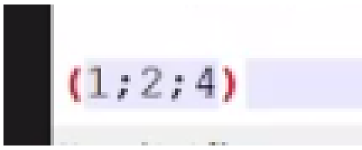


Figura 5.3: Esempio proposto 3

Ale Micarti esterna come, anche attraverso un lettore, sia possibile eseguire questa tipologia di esercizi, con la raccomandazione che ci sia un accordo tra chi legge e chi ascolta per evitare ambiguità. Anche Ale Micarti, come Bianca, spiega come fosse necessario, durante le lezioni, che i professori ripetessero verbalmente ciò che veniva scritto alla lavagna.

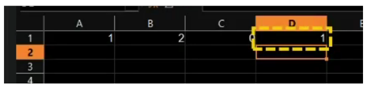
5.3 Intervista ad Omero

L'intervista ad Omero si è svolta in videochiamata su Microsoft Teams. Omero ha modificato completamente le sue tecniche risolutive ai fini dell'intervista che ha svolto coprendo lo schermo del suo computer con un asciugamano per non utilizzare il suo residuo visivo. Per questo motivo gli sono stati forniti in anticipo degli esercizi simili a quelli proposti nell'intervista, affinché potesse esercitarsi e studiare delle strategie coerenti e nuove.
Poiché Omero non conosce il linguaggio TeX, gli sono stati forniti per e-mail due files txt, uno con il testo dell'intervista e uno con la dispensa. Il linguaggio con cui sono stati formulati è più simile a quello naturale, ma mantiene la struttura del file TeX originale.
Avendo necessità di un tempo maggiore rispetto agli altri intervistati, dovendo utilizzare delle strategie studiate ad hoc per questa intervista, Omero ha risolto gli esercizi in giornate diverse. In una prima parte ha svolto l'esercizio uno e ha risposto alle due domande finali, una seconda parte è stata dedicata esclusivamente all'esercizio due e tutto il resto è stato poi risolto in un terzo momento, avendo ormai interiorizzato le strategie scelte.
Omero, per avere accesso alle informazioni a schermo, utilizza NVDA (Non Visual Desktop Access), ovvero un software gratuito e opensource. Tale screen reader è però filtrato dal sistema e pertanto, per poterlo ascoltare, è stata effettuata una chiamata telefonica con Omero, contemporanea all'intervista, che è stata registrata, trascritta e incorporata alla trascrizione in appendice.
Per svolgere i calcoli veri e propri ha utilizzato un software di calcolo quale Libre Office

che dice di non essere solito usare, in quanto precedentemente utilizzava PlanMaker[14] che però non è compatibile con NVDA (vedi riga 1 tabella C6). Spiega che quest'ultimo infatti non riesce a leggere le celle del foglio di calcolo e pertanto risulta inutilizzabile per gli scopi desiderati. In alternativa, avrebbe potuto utilizzare come software di calcolo Excel o MathCad, "ma per ragioni di costo e di licenze" (vedi riga 1 della tabella C.6), ha preferito escluderli.
Crea un file di calcolo per ognuno degli esercizi proposti per evitare sovrascritture.
Omero utilizza un computer fisso con una tastiera del 2010 con un convertitore da connessione PS2 a USB che è più rigida di una tastiera di un portatile. Da tale tastiera gestisce sia gli input per lo schermo sia i comandi per lo screen reader.

5.3.1 Esercizio 1

[15] Omero inizia a lavorare sulle due matrici dell'esercizio A e B. Utilizza il comando Alt + Tab per spostarsi facilmente tra il file di calcolo e il file degli esercizi per leggere i dati. A partire dalla matrice A, inserisce manualmente i valori uno per uno in ogni cella del foglio di calcolo: nelle celle A1, B1, C1 e D1 inserisce gli elementi della prima riga, nelle celle A2, B2, C2, e D2 inserisce gli elementi della seconda riga e così via fino alla quarta riga del foglio di calcolo (vedi righe 2-17).

2	Quindi la prima riga è della matrice A è uno, due, zero, uno. Torno nel file Excel mi metto in A1, Uno. C1 zero, uno	Scrive gli elementi della prima riga in ogni casella della prima riga del foglio di calcolo. 

Nel farlo torna più volte al file degli esercizi per sincerarsi della correttezza dell'operazione svolta (vedi righe 10, 12 e 14). Procede analogamente per la matrice B che inserisce a partire dalla cella A11, in modo che sia in una posizione il più possibile lontana dalla matrice A (vedi righe 23-47). Dopo aver inserito i dati, Omero verifica che siano stati copiati correttamente ascoltando nuovamente le righe con il software NVDA e controllando le celle una ad una.
Dopo aver inserito le matrici A e B, Omero si prepara a calcolare il prodotto delle due

[14]PlanMaker è l'applicazione per fogli di calcolo del pacchetto SoftMaker Office – Veloce, potente, compatibile e conforme al Regolamento generate sulla protezione dei dati (RGPD).
[15]In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella C.1 nell'appendice C.

matrici. Questo processo prevede la scrittura di combinazioni lineari di elementi delle matrici nelle celle del foglio di calcolo. Per farlo scrive inizialmente nella cella A21 la somma degli elementi della prima riga di A, nella cella A22 la somma degli elementi della seconda riga di A, nella A23 la somma degli elementi della terza e in A24 la somma degli elementi della quarta riga. Dopo aver selezionato la prima colonna di questa prima versione della matrice prodotto, la copia e incolla nelle due colonne successive. A questo punto completa la combinazione per righe, aggiungendo il simbolo di addizione davanti alle formule affinché vengano calcolate (vedi righe 79-151).
Nell'eseguire questi calcoli e validarli, Omero è costretto a spostarsi dalla cella in esame a quelle adiacenti affinché lo screen reader ne legga il contenuto. Utilizza combinazioni di tasti come Alt + Tab per navigare tra le applicazioni e Ctrl + S per salvare il lavoro. L'esercizio 1 mostra come Omero utilizzi una combinazione di software reso accessibile, comandi da tastiera e una strategia ben pianificata per inserire e verificare i dati delle matrici. Questo metodo non solo facilita il lavoro di una persona non vedente, ma rappresenta anche un ottimo esempio di come queste strategie possano essere applicate nella quotidianità per risolvere problemi complessi.

5.3.2 Esercizio 2

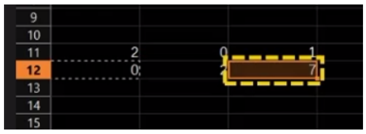
[16] NVDA annuncia l'inizio dell'esercizio. Omero conferma la lettura e apre un nuovo file di calcolo in cui svolgere l'esercizio. Per assicurarsi di trovarsi nella cella giusta, si muove nelle celle adiacenti affinché lo screen reader legga la cella cercata.
Utilizza come nell'esercizio precedente la combinazione di tasti Alt+Tab per spostarsi agevolmente tra i files.
Omero inizia a scrivere la matrice riga per riga dalla cella A1 alla C3, dopo averle ascoltate dal file degli esercizi (vedi righe 6-17). Per assicurarsi di aver inserito correttamente i dati ascolta più volte il testo dell'esercizio spostandovisi con il cursore.

19	NVDA: Tre virgola due meno due.	Sale e scende con il cursore per riascoltare la terza riga. 
20	Omero: Tre virgola due, meno due.	

Si sposta nella cella A11 del foglio di calcolo da cui inizia a scrivere i riferimenti di riga e colonna della prima riga della matrice M. Per le righe successive compie delle operazioni

[16] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella C.2 nell'appendice C.

elementari per ottenere gli zeri nelle posizioni desiderate. Per farlo sfrutta il tasto F4 che gli consente di bloccare parte della formula in modo da doverla semplicemente poi incollare nelle celle della stessa riga (vedi righe 27 e 30). Questo mostra una comprensione avanzata delle capacità del software e di come queste possano essere sfruttate per semplificare e automatizzare parti del calcolo.

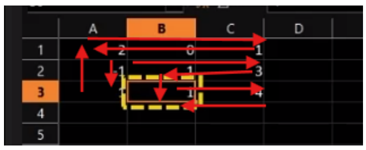
27	NVDA: a1 trattino a1, barra due asterisco a2.	Scrive la formula descritta oralmente. 
28	NVDA: Zero con formula A12.	
29	Omero: Viene fuori proprio zero, cioè il numero non me lo sono inventato a vista guardando la matrice, perché non la vedo, ma semplicemente il rapporto tra quello della prima riga e quello della prima colonna e quello della seconda riga nella stessa colonna, cioè nella prima ed è zero. Con il pulsante F4 ho aggiunto un dollaro per bloccare, appunto, la selezione di questo rapporto tra A1 e A2. Così sono nella cella A12, copio e incollo. Si riaggiornerà in B12 e in C12 e il primo algoritmo di Gauss l'ho completato.	
30	NVDA: Zero con formula A12, due con formula B12, sette con formula C12.	Incolla la formula nelle celle a destra della A12. 

Fa lo stesso per la terza riga e a seguito di questo passaggio intermedio, si sposta nella cella A21 (vedi riga 41) per terminare l'algoritmo. A tale scopo, ricopia gli indici di riga e colonna delle prime due righe della matrice ottenuta dalla cella A11 alla C13 e compila la riga 23 come precedentemente fatto per le righe 12 e 13 del file di calcolo.

Conclude determinando il rango della matrice ridotta, sulla base della teoria che ha ben interiorizzato (vedi riga 53).
Omero sviluppa e adatta delle strategie per risolvere questo esercizio quali la decisione di scrivere la matrice per righe e l'uso delle funzionalità di copia-incolla per evitare errori. Questo adattamento è un esempio di instrumentalisation, in cui Omero integra l'uso degli strumenti nelle sue pratiche di lavoro per migliorare l'efficienza e l'accuratezza delle operazioni.
La riflessione finale di Omero sull'importanza di comprendere il problema e di avere una visione chiara del percorso di risoluzione è un esempio di come riesca a combinare la sua comprensione teorica della matematica con l'uso concreto degli strumenti a sua disposizione.

5.3.3 Esercizio 3

[17] Omero inizia aprendo il file contenente gli esercizi e ascolta l'esercizio tre utilizzando il cursore (vedi riga 2). Dopo aver letto la consegna dell'esercizio con il supporto di NVDA, crea un nuovo file di calcolo per svolgerlo, spostandosi nelle celle adiacenti alla A1 per poterla ascoltare e quindi ritrovarsi (vedi righe 5 e 6).
Omero legge nuovamente la consegna per assicurarsi di aver compreso bene il compito e ridefinisce i comandi Alt+Tab per spostarsi agevolmente tra i due files.
Inserisce riga per riga la prima matrice di cui calcolare il determinante dalla cella A1 alla C3 spostandosi tra i due file nello scrivere le varie righe (vedi righe 13-21).
Indaga la struttura della matrice spostandosi tra le celle che la compongono alla ricerca di zeri che potrebbero facilitare il calcolo del determinante (vedi riga 23).

23	NVDA: Uno A3, meno uno A2, due A1; zero B1, uno C1, zero B1, due A1; meno uno A2, uno B2, tre C2; uno B2, uno B3, uno A3; uno B3, quattro C3, uno B3.	Cerca dei possibili zeri tra le righe e le colonne di C. 

Dopo aver scelto la colonna rispetto alla quale sviluppare l'algoritmo, si sposta nella cella A11 (vedi riga 25) dove andrà a scrivere la formula per il calcolo del determinante. Spiega che avrebbe potuto utilizzare anche delle funzioni automatiche del file di calcolo e che preferisce svolgerlo manualmente utilizzando la regola di Laplace (vedi riga 24).
Dato che dal calcolo risulta che il determinante è nullo, Omero conclude che la prima matrice non sia invertibile (vedi righe 30-33).
Procede pertanto con la seconda matrice. Omero osserva come essendo questa matrice di

[17]In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella C.3 nell'appendice C.

dimensioni maggiori, abbia bisogno di ascoltare più volte le stesse righe (vedi righe 34 e 35). Con l'utilizzo dei comandi Alt+Tab torna al file di calcolo e si sposta con il cursore fino alla cella A21 (vedi righe 36 e 37). Inserisce la prima riga elemento per elemento, torna con Alt+Tab al file degli esercizi, ascolta la seconda riga e la riporta elemento per elemento nella successiva riga del file di calcolo. Procede allo stesso modo con le ultime due righe (vedi righe 38-49).
A seguito di una lunga riflessione teorica, conclude che la seconda matrice proposta nell'esercizio è la matrice identità che ha determinante uno e la cui inversa è essa stessa (vedi riga 50).
Omero dimostra di aver interiorizza l'algoritmo per il calcolo del determinante e di modificare gli strumenti a sua disposizione sulla base degli strumenti cognitivi utili alla soluzione dell'esercizio.

5.3.4 Esercizio 4

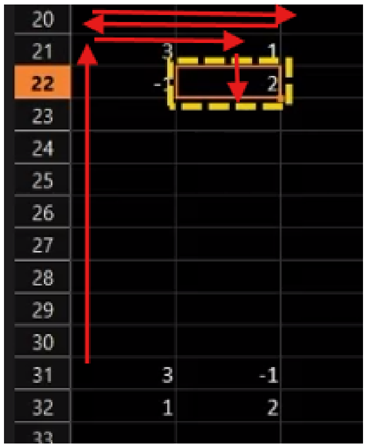
[18] Omero esegue le stesse azioni iniziali che hanno caratterizzato gli esercizi precedenti: ascolta le prime righe dell'esercizio, apre un nuovo file di calcolo e spostandosi nelle celle adiacenti alla cella A1 di quest'ultimo si posiziona nel punto desiderato.
L'esercizio 4 consiste nel risolvere un sistema di equazioni lineari. Omero, a differenza degli altri intervistati, sceglie di non utilizzare la regola di Cramer, quanto piuttosto di invertire la matrice dei coefficienti, dopo averne verificato la fattibilità, e moltiplicarla per il vettore dei termini noti per ottenere il vettore delle incognite.
Omero ascolta e trascrive la matrice A e il vettore b rispettivamente dalla cella A1 alla B2 e nella colonna D del foglio di calcolo (vedi righe 8-20). Questo processo richiede attenzione e riverifica per evitare errori di trascrizione.

20	NVDA: Quattro D1, nove D2.	Scrive il vettore colonna b nella colonna D. 

Si sposta fino alla cella A11 con il cursore (vedi riga 22) dove andrà a calcolare il determinante della matrice che in questo caso è semplice (vedi riga 24). Dopo aver verificato che il risultato ottenuto sia diverso da zero, spiega come anziché determinare la matrice inversa con un algoritmo a lui noto e più semplice, preferisce sfruttare il metodo dei complementi algebrici presente nella dispensa (vedi riga 25).
Si sposta con il cursore fino alla cella A21 dove posizionerà la matrice dei complementi algebrici. Omero conosce profondamente l'algoritmo che intende utilizzare lo dimostra

[18]In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella C.4 nell'appendice C.

verificando gli elementi inseriti nelle celle attraverso lo spostamento in quelle adiacenti. Si posiziona poi nella cella A31 dove andrà a posizionare la trasposta della matrice appena calcolata procedendo per colonne. Si sposta tra i due gruppi di celle per verificare di aver trasposto correttamente la matrice (vedi riga 48).

48	NVDA: Tre con formula A31, A30, A29, A28, A27, A26, A25, A24, A23, meno uno con formula A22, tre con formula A21, uno con formula B21, tre con formula A21, uno con formula B21, due con formula B22.	Si sposta con il cursore per verificare la correttezza della trasposizione. 

Omero riverifica la cella in cui è stato calcolato il determinante, dovendo dividere gli elementi della matrice appena determinata per quest'ultimo. Per fare ciò si sposta con il cursore fino alla cella A41(vedi riga 52). Dopo aver riportato la matrice inversa dalla cella A41 alla B42, ne riverifica il calcolo elemento per elemento ascoltando attentamente quanto ripetuto dallo sccreen reader (vedi riga 58).

58	NVDA: Cella A41, più A31 barra A11, zero virgola quattro due otto... Cella B41, più B31 barra A11, meno zero virgola uno quattro... Zero virgola due otto cinque... con formula B42. Zero virgola uno quattro... con formula A42. Più A32 barra A11, zero virgola uno quattro... B42, più B32 barra A11, zero virgola due otto cinque...	Verifica di aver scritto correttamente i calcoli. 

Per terminare l'esercizio si posiziona nella cella A51 dove calcola la prima incognita del sistema moltiplicando la prima riga della matrice inversa per il vettore dei termini noto. Procede allo stesso modo con la seconda incognita verificando di volta in volta la correttezza della combinazione lineare riportata (vedi riga 64).

L'esercizio 4 richiede un'accurata gestione delle operazioni di inserimento dei dati e l'uso delle funzionalità di calcolo del software. La metodologia di Omero è sistematica e attenta: si assicura che ogni passaggio sia verificato per evitare errori. Questo esercizio mette in evidenza l'importanza della precisione nel calcolo e nell'uso degli strumenti digitali per risolvere problemi matematici.

5.3.5 Esercizio 5

[19] Omero prima di iniziare la lettura dell'esercizio sottolinea come questo sia l'unico esercizio di cui si sia dovuto proprio studiare anche la teoria oltre alle strategie risolutive.
Procede analogamente a quanto fatto negli esercizi precedenti per iniziare ad approcciarsi al problema.
Riporta dalla cella A1 alla cella C3 i vettori della prima base dell'esercizio scritti per colonne e fa lo stesso per i vettori della base canonica da F1 ad H3.
Omero sceglie di non scrivere le combinazioni lineari per ottenere la matrice di cambio di base, quanto piuttosto di invertire la matrice ottenuta dalla scrittura dei vettori della base B sfruttando il metodo dei complementi algebrici (vedi riga 18). Questo dimostra una grande interiorizzazione del problema matematico da parte di Omero e mostra come sia stato in grado di adattare le risorse a lui messe a disposizione per risolvere l'esercizio.
Si sposta con il cursore fino alla cella A11 dove calcola il determinante della matrice da A1 a C3. Sceglie di sviluppare rispetto alla terza colonna che presenta due zeri e pertanto permette di semplificare notevolmente l'algoritmo (vedi riga 21).
Posiziona ora il cursore nella cella A21 dove calcolerà la matrice dei complementi algebrici. Omero mostra di conoscere in profondità questo algoritmo non dovendo verificare volta per volta ciò che andrà a scrivere ma solo la posizione corrente.
Dopo aver ricontrollato il determinante, si sposta nella cella A31 per trasporre la matrice dei complementi algebrici scrivendo per colonna le righe di quest'ultima.
Omero a questo punto pensa di aver terminato l'esercizio, ma un confronto con l'intervistatore lo porta a comprendere che manca ancora un ultimo passaggio, ovvero la determinazione vera e propria della matrice associata all'applicazione lineare rispetto alla base canonica.
Posiziona il cursore in una nuova cella, lontana da quanto scritto in precedenza, dalla quale inizierà a scrivere la matrice M dell'esercizio riga per riga spostandosi con Alt+Tab dal file di calcolo al file degli esercizi (vedi riga 63). Dopo aver scritto tutta la matrice elemento per elemento sposta il cursore fino alla cella A51 dove inizia a calcolare il prodotto di matrici (vedi riga 65). Inizialmente prova a scrivere manualmente l'algoritmo per determinare gli elementi della matrice prodotto. Ora, poiché lo screen reader inizia a saltare delle parti e a non accorpare più i numeri, Omero commette diversi errori (vedi

[19] In questo paragrafo, tutti i numeri di riga fanno riferimento alla tabella C.5 nell'appendice C.

riga 91). Per sopperire a tale problema decide di utilizzare la strategia studiata per l'esercizio 1 (vedi righe 67-90). Procede allo stesso modo per il calcolo dell'ultima matrice prodotto che esegue a partire dalla cella A61. Omero ormai è veloce nel compilare le combinazioni lineari e conclude con successo l'esercizio.

5.3.6 Domanda 1 & 2

Le domande finali dell'intervista vertono principalmente sull'uso degli strumenti e delle tecnologie utilizzate da Omero per superare le sfide legate alla sua disabilità visiva. Omero utilizza NVDA, un software di lettura dello schermo che viene filtrato dal sistema, il che a volte risulta un impedimento anche nel luogo di lavoro.
Omero sottolinea come sia fondamentale usare un computer con un lettore di schermo per evitare errori e difficoltà nell'uso della calcolatrice o nel contare manualmente gli elementi della matrice. Senza il software, sarebbe necessario utilizzare un sistema tattile complesso. Omero evidenzia l'importanza di utilizzare strumenti di comune reperibilità e a basso costo, non solo per motivi economici, ma anche perché i vari strumenti devono essere provati più volte da un soggetto con disabilità visiva per verificarne l'efficacia e la semplicità d'uso.
Omero spiega come sulla stessa tastiera abbia "due tastiere": una con i comandi dello screen reader e l'altra per gli input a schermo. Preferisce tastiere meccaniche meno recenti perché sono più facili da toccare, hanno tasti più grossi e separati e il tastierino numerico è ben distinto dal resto. Inoltre, aggiunge che in questo tipo di tastiera è più facile orientarsi ed essendo la corsa dei pulsanti più rigida (sono meno sensibili alla pressione) si evita di scrivere qualcosa per errore.
Omero suggerisce alcune rappresentazioni per le matrici. Spiega ad esempio che per orientarsi meglio nel file sarebbe stato utile porre davanti alle righe delle matrici una scritta che rievocasse il numero della riga, purché scritta con i numeri ordinali e non cardinali (vedi riga 6 della tabella C.6). Inoltre, è stato fondamentale spezzare le frasi degli esercizi, in modo che lo screen reader facesse delle pause e non leggesse tutto troppo velocemente portando ad inutile confusione. Un'ulteriore miglioria suggerita da Omero riguarda l'utilizzo delle parentesi che, a suo avviso, dovrebbero essere ridotte al minimo. Anche l'utilizzo del punto e virgola al posto della virgola sembrerebbe facilitare la lettura dei file di testo.
Come gli altri intervistati, Omero spiega come a lezione si trovasse più a dover copiare quello che veniva scritto alla lavagna, avendo un residuo visivo, piuttosto che ragionare su quanto discusso in classe, cosa che rimandava ad un secondo momento.
Queste risposte forniscono un quadro chiaro dell'approccio pratico di Omero nell'affrontare le sue attività quotidiane e lavorative utilizzando un sistema di strumenti tecnologici accessibili e adattamenti specifici per la disabilità visiva.

Capitolo 6

Discussione dei risultati

Si procede ora con un'analisi trasversale delle interviste per far emergere le modalità attraverso le quali i soggetti intervistati hanno adattato gli strumenti o i sistemi di strumenti a loro disposizione.

6.1 Instrumentation

Si ricorda che il processo di instrumentation è quello attraverso il quale un soggetto incorpora un artefatto nel proprio sistema di attività adattandolo alle proprie esigenze.
Bianca utilizza un display Braille integrato con il software JAWS per leggere i testi degli esercizi. Questo strumento le consente di accedere rapidamente e facilmente alle informazioni, permettendole di navigare nei documenti e di leggere le porzioni di testo che le interessano senza dover ascoltare l'intero contenuto tramite sintesi vocale. Questo è un chiaro esempio di come uno strumento tecnologico venga integrato nel processo di apprendimento, migliorando l'accessibilità e l'efficienza.
Durante l'intervista, Bianca preferisce utilizzare NotePad invece di WinEdt a causa di problemi di compatibilità con Skype. Questo adattamento dimostra come gli strumenti vengano selezionati e utilizzati in base alle circostanze e alla comodità dell'utente. La scelta di un editor di testo più semplice riflette un approccio pragmatico all'utilizzo degli strumenti disponibili.
Lo stesso processo di adattamento avviene con Omero che utilizza invece lo screen reader NVDA e Libre Office per svolgere i calcoli, essendo questo compatibile con il software di sintesi vocale a differenza del programma che utilizza solitamente, dimostrando la sua capacità di adattarsi e imparare nuovi strumenti che meglio rispondono alle sue esigenze.
Durante l'intervista, Omero ha coperto lo schermo del suo computer con un asciugamano per non utilizzare il suo residuo visivo. Questo è un esempio di come ha modificato l'ambiente fisico per evitare l'uso di capacità visive residue, costringendosi a utilizzare

solo strumenti assistivi.
Ale Micarti utilizza il computer e la barra Braille per leggere e manipolare il testo delle matrici. Questo mostra come lo strumento tecnologico diventi parte integrante del suo processo di risoluzione dei problemi. L'uso del software per la lettura dello schermo e per l'editing del testo matematico è cruciale. Questi strumenti facilitano l'accesso alle informazioni e la gestione delle matrici, dimostrando una forte dipendenza dallo strumento stesso per eseguire operazioni complesse. Ale Micarti ha inoltre spiegato che, se avesse dovuto seguire un corso completo di algebra lineare, avrebbe personalizzato l'editor con comandi più efficienti per spostarsi tra le matrici, dimostrando un chiaro esempio di instrumentation.
Bianca copia e incolla le matrici in file txt, disponendole su un'unica riga per facilitarne la lettura e la manipolazione con il display Braille. Questo metodo mostra come Bianca modifichi l'uso degli strumenti per renderli più adatti alle sue esigenze specifiche, migliorando la gestione delle informazioni e riducendo il rischio di errori durante i calcoli.
Una strategia simile è utilizzata da Ale Micarti nella risoluzione dell'ultimo esercizio dove calcola il prodotto matriciale lasciando le due matrici in files diversi e, utilizzando il copia e incolla, sfrutta le matrici degli esercizi precedenti come template in cui riportare i risultati.
Per spostarsi tra il file di calcolo e il file degli esercizi, Omero utilizza la combinazione di tasti Alt+Tab, dimostrando un'ottima padronanza dei comandi da tastiera per gestire le informazioni su schermo. Questa strategia riduce il rischio di errori e aumenta l'efficienza nella risoluzione degli esercizi. La predilezione per una tastiera meccanica del 2010, con tasti più rigidi e separati, mostra come Omero abbia ottimizzato l'uso degli strumenti hardware per evitare errori anche durante la digitazione. La tastiera diventa quindi uno strumento essenziale nel suo processo di instrumentation.

6.2 Instrumentalisation

L'instrumentalisation avviene quando l'individuo si adatta all'artefatto, modificando il proprio comportamento e le proprie strategie cognitive per utilizzare al meglio lo strumento.
Bianca adatta le matrici presenti negli esercizi copiandole e modificandole in un file di testo, escludendo le definizioni dell'ambiente matematico e utilizzando una simbologia diversa da quella proposta. Questo le permette di semplificare il processo di manipolazione delle matrici, dimostrando una modifica della sua strategia risolutiva per facilitare il calcolo. Adatta le sue strategie di studio utilizzando strumenti tecnologici e assistivi, integrandoli nel proprio processo di apprendimento. La verifica incrociata dei risultati con metodi alternativi dimostra la sua capacità di modificare le proprie strategie per garantire la correttezza delle soluzioni. Anche se ha già risolto esercizi simili durante la

sua carriera universitaria, sceglie di leggere le dispense e di fare ricerche mirate per interiorizzare le informazioni, dimostrando un comportamento riflessivo e adattativo tipico del processo di instrumentalisation.
Ale Micarti personalizza i materiali di studio copiando le matrici in un editor di testo dove può modificarle più agevolmente. Inoltre, è portato naturalmente ad assegnare nomi specifici agli elementi che compongono gli esercizi, coerentemente al ruolo di questi ultimi. Questo adattamento consente una manipolazione più efficiente dei dati, riducendo gli errori e migliorando la comprensione. Utilizza il linguaggio LaTeX, pur riconoscendone i limiti, e menziona la possibilità di utilizzare alternative come Excel, EDICO e Lambda, evidenziando la necessità di adattarsi a strumenti non sempre ottimali per i compiti specifici di calcolo matriciale. Sceglie di semplificare le operazioni matematiche eseguendo i calcoli a mente quando possibile e utilizzando il display Braille per avere una visione chiara delle matrici, così da ottimizzare il processo di risoluzione dei problemi.
I risultati ottenuti da Ale Micarti indicano che la sua capacità di risolvere gli esercizi di algebra lineare è strettamente legata alla sua abilità di integrare strumenti tecnologici nel processo di apprendimento, che utilizza in modo efficiente e adatta in maniera creativa. La scelta di adattare gli strumenti alle sue necessità specifiche dimostra una combinazione efficace di instrumentation e instrumentalisation. Durante i calcoli, anche Bianca come Ale Micarti esegue la maggior parte delle operazioni a mente, annotando solo i passaggi più complessi per evitare errori. Questo metodo riflette una strategia personalizzata di gestione delle informazioni che sfrutta al meglio le sue capacità cognitive e gli strumenti a disposizione.
Omero, a differenza degli altri intervistati, ha utilizzato Libre Office per eseguire i calcoli. Ha sviluppato nuove tecniche per risolvere i problemi proposti, come nel caso dell'esercizio cinque in cui ha scelto di non scrivere le combinazioni lineari per ottenere la matrice di cambio di base. Questo adattamento mostra come l'uso degli strumenti abbia influenzato il suo approccio teorico e pratico alla risoluzione dei problemi. Durante il calcolo del determinante e della matrice dei complementi algebrici, Omero sfrutta la sua conoscenza approfondita degli algoritmi e utilizza la funzione di copia e incolla per minimizzare gli errori. Questo approccio evidenzia come l'integrazione degli strumenti tecnologici abbia migliorato la precisione e l'efficienza del suo lavoro matematico.
Omero ha modificato completamente le sue tecniche risolutive per l'intervista, esercitandosi in anticipo con gli esercizi proposti. Questo processo ha richiesto tempo e impegno per sviluppare e interiorizzare nuove strategie ad hoc, evidenziando un significativo adattamento cognitivo. Durante la risoluzione degli esercizi, ha creato file di calcolo separati per ciascun esercizio per evitare sovrascritture e ha gestito attentamente l'inserimento dei dati e le operazioni di calcolo, posizionando le matrici e i dati nel foglio Excel in posizioni strategiche. Ha utilizzato la tastiera del suo computer per gestire sia gli input per lo schermo sia i comandi per lo screen reader, dimostrando un uso avanzato e integrato degli strumenti tecnologici disponibili.
Tutti e tre i soggetti intervistati hanno avuto delle interazioni con l'intervistatore. Bian-

ca utilizza un ciclo di feedback durante l'intervista, interagendo con l'intervistatore per identificare e correggere gli errori nei suoi calcoli. Durante l'intervista, l'interazione con l'intervistatore ha fornito un riscontro critico, aiutando Ale Micarti a correggere errori e affinare il processo di risoluzione che viene continuamente migliorato attraverso l'interazione e la riflessione. Il confronto con l'intervistatore ha permesso a Omero di riconoscere passaggi mancanti nella risoluzione degli esercizi e di correggere gli errori. Questi processi evidenziano come l'interazione sociale e il contesto dell'intervista possano influenzare positivamente l'apprendimento, contribuendo al raffinamento delle strategie di calcolo e all'accuratezza dei risultati.

6.3 Internalizzazione ed Esternalizzazione

Il quadro teorico che sta alla base di questo studio considera tra i processi chiave che consentono il passaggio da artefatto a strumento anche i processi di internalizzazione ed esternalizzazione, che giocano un ruolo cruciale nel modo in cui gli individui con disabilità visiva adattano e utilizzano gli strumenti tecnologici.
L'internalizzazione è il processo mediante il quale gli individui integrano le funzionalità degli strumenti esterni nei propri schemi mentali e strategie cognitive. Ale Micarti ha internalizzato l'uso degli editor di testo personalizzati per gestire le matrici. Questo è evidente nel modo in cui ha modificato l'editor per spostarsi tra le matrici in maniera più efficiente, dimostrando una comprensione profonda del processo matematico e integrando l'uso dello strumento nelle sue routine cognitive. Bianca ha integrato nella sua mente il processo di verifica incrociata dei risultati. Utilizzando strumenti digitali per leggere, rappresentare e calcolare le matrici, ha internalizzato queste operazioni come parte del suo approccio standard alla risoluzione dei problemi di algebra lineare, rendendo tali processi cognitivi parte del suo repertorio mentale. L'uso continuato di NVDA e Libre Office ha permesso a Omero di interiorizzare i comandi e le operazioni necessarie per svolgere calcoli complessi. Questo significa che Omero ha sviluppato competenze cognitive legate all'uso di questi strumenti, che potrebbero essere applicate anche in contesti diversi o con strumenti simili. Le tecniche di risoluzione sviluppate, come il calcolo dei determinanti utilizzando i complementi algebrici, mostrano che Omero ha interiorizzato metodi matematici che può applicare anche senza l'uso immediato dello strumento, sebbene l'esecuzione precisa richieda il supporto tecnologico. La capacità di riconoscere e correggere gli errori attraverso il feedback dimostra che Omero ha internalizzato un approccio riflessivo e autocritico verso il proprio lavoro, una competenza che va oltre l'uso del singolo strumento tecnologico.
L'esternalizzazione è il processo attraverso il quale gli individui esplicitano e materializzano le proprie conoscenze e strategie cognitive in strumenti esterni, rendendoli accessibili e utili per l'apprendimento e la risoluzione dei problemi. Bianca ha esternalizzato le sue conoscenze di algebra lineare utilizzando strumenti digitali e verifiche incrocia-

te per garantire l'accuratezza dei suoi calcoli. L'uso di dispense e ricerche mirate per interiorizzare informazioni aggiuntive dimostra come Bianca abbia trasformato le sue strategie cognitive in procedure concrete e replicabili. Ale Micarti ha esternalizzato le sue strategie cognitive sviluppando e modificando l'editor di testo per gestire le matrici. Questo processo ha trasformato il suo pensiero matematico in comandi e funzioni specifiche dell'editor, rendendo visibile il suo approccio risolutivo. Utilizzando lo schermo del computer, Omero può esternalizzare le operazioni matematiche, rendendo visibili e manipolabili i calcoli. Questo gli consente di riflettere sui passaggi, identificare errori e ristrutturare il procedimento se necessario. L'uso delle funzioni di copia e incolla per manipolare le matrici su Libre Office materializza il processo di calcolo, permettendo a Omero di accedere ai dati e manipolarli in modo strutturato e sistematico. Questo facilita la comprensione e la revisione delle operazioni svolte. Il confronto con l'intervistatore e la revisione dei passaggi mancanti rappresentano momenti di esternalizzazione, in cui le operazioni cognitive di Omero diventano visibili e condivisibili, permettendo una riflessione congiunta e l'apprendimento collaborativo.
L'analisi delle interviste mostra come i processi di internalizzazione ed esternalizzazione siano fondamentali per l'adattamento e l'uso efficace degli strumenti nello studio dell'algebra lineare. La loro capacità di integrare gli strumenti nelle proprie strategie cognitive e di trasformare queste strategie in procedure concrete e utilizzabili riflette una sinergia tra i processi di instrumentation, instrumentalisation, internalizzazione ed esternalizzazione, permettendo loro di superare le sfide legate alla disabilità visiva e di dimostrare una competenza avanzata nella materia.

6.4 Difficoltà legate all'algebra lineare

Le interviste a Bianca, Ale Micarti e Omero forniscono approfondimenti su alcune delle difficoltà specifiche degli studenti nell'algebra lineare.
Bianca ha dimostrato di avere una buona padronanza delle tecniche matematiche legate alle matrici. Utilizza strumenti come la barra Braille per manipolarle e fa un uso estensivo di software per scrivere e modificare le matrici. Ha internalizzato le procedure per il calcolo con le matrici e le applica in modo pratico. Durante le lezioni universitarie, trovava fondamentale il supporto dei docenti che verbalizzavano ciò che veniva scritto alla lavagna o dettavano le matrici per righe anziché per colonne. Tuttavia, Bianca ha dovuto fare uno sforzo significativo per comprendere e applicare concetti come la trasformazione delle basi e la determinazione delle matrici di trasformazione. Ha dimostrato di essere in grado di risolvere gli esercizi, ma talvolta necessita di riferirsi a dispense e di ricevere suggerimenti per comprendere a fondo certi passaggi.
Ale Micarti ha utilizzato un editor di testo e un display Braille per risolvere gli esercizi. Anche lui ha trovato necessario che i professori ripetessero verbalmente ciò che veniva

scritto alla lavagna. Durante l'intervista, Ale Micarti ha dimostrato di avere chiari i concetti chiave e le tecniche necessarie per manipolare le matrici, come l'algoritmo di eliminazione gaussiana e il calcolo dei determinanti. Tuttavia, ha anche mostrato difficoltà iniziali nel processo di calcolo del prodotto tra matrici, che ha corretto grazie all'intervento dell'intervistatore. Ale Micarti ha preferito utilizzare notazioni più compatte e personalizzare gli strumenti a sua disposizione per facilitare il calcolo e la lettura delle matrici. Questo dimostra una buona capacità di adattarsi e superare le difficoltà legate alla manipolazione di queste ultime.
Omero ha modificato le sue tecniche risolutive durante l'intervista, utilizzando software come NVDA per accedere alle informazioni a schermo. Ha svolto gli esercizi in più sessioni per interiorizzare le nuove strategie. Sebbene abbia utilizzato strumenti di calcolo non abituali per lui, ha dimostrato la capacità di adattarsi a nuove metodologie per risolvere i problemi. Omero ha dovuto affrontare difficoltà legate alla comprensione e applicazione delle tecniche di calcolo con le matrici, in particolare a causa delle sue necessità specifiche. Tuttavia, con l'aiuto di strategie ad hoc e del software di calcolo, è riuscito a superare queste difficoltà e a completare gli esercizi richiesti.
Le difficoltà specifiche riscontrate da questi individui riguardano principalmente: la necessità di supporto verbale e di riferirsi a materiali didattici per comprendere a pieno certi concetti teorici, l'adattamento degli strumenti per facilitare il calcolo e la correzione di errori iniziali grazie all'intervento esterno, la necessità di modificare le proprie tecniche risolutive e utilizzare strategie e software specifici per superare le difficoltà legate alla manipolazione delle matrici e alla comprensione delle tecniche di calcolo.
Queste difficoltà rispecchiano le problematiche comuni nell'algebra lineare individuate da Hillel e Sierpinska come le difficoltà con la moltiplicazione vettoriale e con le matrici e le sfide legate alla comprensione degli spazi vettoriali e degli operatori lineari [Hillel and Sierpinska, 1994]. Inoltre, per quanto riguarda specificatamente la disabilità visiva:

a) La manipolazione e visualizzazione delle matrici sono significativamente più complesse per gli studenti con disabilità visiva. Mentre uno studente vedente può vedere l'intera matrice in una volta, uno studente non vedente deve navigare tra i dati in modo lineare, rendendo più difficile cogliere le relazioni spaziali e strutturali tra gli elementi della matrice.

b) Gli strumenti tecnologici possono facilitare il calcolo, ma la verifica dei passaggi e dei risultati richiede una maggiore attenzione e può essere più facilmente soggetta a errori. La necessità di utilizzare strumenti come la barra Braille, editor di testo specifici e software di accesso a schermo introduce ulteriori passaggi e potenziali punti di errore.

c) La disabilità visiva rende più difficile l'accesso a rappresentazioni visuali dei concetti teorici, come gli spazi vettoriali e le trasformazioni lineari. La dipendenza da descrizioni verbali e materiali scritti rende l'apprendimento di questi concetti più laborioso e meno intuitivo.

d) Gli studenti con disabilità visiva spesso necessitano di un maggiore supporto verbale e assistenza esterna per comprendere e applicare i concetti dell'algebra lineare. Questo può influenzare la loro autonomia nello studio e la capacità di seguire il ritmo delle lezioni tradizionali.

La disabilità visiva introduce una serie di sfide aggiuntive nell'apprendimento dell'algebra lineare, amplificando le difficoltà specifiche già presenti in questa disciplina. Gli intervistati dimostrano come l'uso di tecnologie assistive, la personalizzazione degli strumenti e il supporto esterno siano cruciali per superare queste difficoltà. Tuttavia, queste soluzioni richiedono un impegno aggiuntivo e un adattamento continuo, mettendo in luce la necessità di metodi didattici più inclusivi e di risorse specifiche per supportare efficacemente gli studenti con disabilità visiva nell'apprendimento dell'algebra lineare.

6.5 Altre considerazioni

Tutti i soggetti intervistati dimostrano abilità metacognitive avanzate nel riflettere sui propri processi di apprendimento e nel trovare soluzioni creative per superare le difficoltà. Questo è un segnale di come l'interazione continua con strumenti tecnologici complessi possa favorire lo sviluppo di competenze metacognitive, che sono cruciali per l'apprendimento autonomo e per la risoluzione dei problemi.
Gli strumenti tecnologici non solo permettono loro di lavorare in modo autonomo, ma facilitano anche la condivisione delle informazioni e la collaborazione con altri. Ad esempio, la possibilità di materializzare e condividere processi cognitivi complessi può rendere più facile la comunicazione con docenti e compagni di classe, promuovendo un ambiente di apprendimento collaborativo.
L'uso efficace degli strumenti tecnologici può avere un impatto positivo sulla motivazione e sull'autostima degli studenti. Sentirsi in grado di superare le barriere e di raggiungere gli obiettivi accademici grazie all'uso di tecnologie adattive può aumentare la fiducia in sé stessi e incentivare un approccio proattivo all'apprendimento.
Emerge l'importanza di fornire una formazione adeguata non solo sull'uso degli strumenti tecnologici, ma anche su come adattarli e personalizzarli per soddisfare le esigenze specifiche degli utenti. Supporto tecnico continuo e risorse educative mirate possono essere cruciali per sfruttare al meglio le potenzialità di questi strumenti.
Le interviste rivelano che l'uso di strumenti tecnologici per il calcolo delle matrici e altre attività accademiche va oltre la semplice facilitazione delle operazioni. Questi strumenti svolgono un ruolo fondamentale nell'internalizzazione delle competenze, nell'esternalizzazione dei processi cognitivi e nel promuovere un ambiente di apprendimento inclusivo

e collaborativo. Le esperienze di Bianca, Ale Micarti e Omero sottolineano l'importanza di un design tecnologico flessibile e personalizzabile, nonché la necessità di un supporto continuo per massimizzare i benefici educativi.

Capitolo 7

Conclusioni

In questo studio si sono esplorate le modalità attraverso le quali gli individui con disabilità visiva adattano gli strumenti (o i sistemi di strumenti) a loro disposizione, incorporandoli al proprio patrimonio di attività eventualmente modificando anche i propri comportamenti, nel caso specifico dell'algebra lineare. La ricerca presentata ha visto il coinvolgimento di tre soggetti con sfumature diverse di disabilità visiva e con un elevata competenza matematica. Le interviste condotte sono state analizzate alla luce dei quadri teorici della genesi strumentale e dei processi di instrumentation e instrumentalisation, che si sono rivelati delle chiavi di lettura adeguate per interpretare le strategie adottate dai soggetti.
Sulla base dei racconti dei soggetti intervistati relativamente alla loro esperienza universitaria sono emerse diverse riflessioni. Innanzitutto, un ambiente favorevole e accogliente permette agli studenti di esplorare con maggiore curiosità e creatività gli strumenti disponibili. È importante che i docenti adottino dei comportamenti inclusivi. Questo non significa chiedere un impegno eccessivo agli insegnati, quanto piuttosto una presa di coscienza e capacità di mettersi in gioco, ad esempio, ripetendo oralmente tutto ciò che è scritto alla lavagna oppure, per quanto riguarda nello specifico le matrici, fornendo i dati per righe anziché per colonne. Fornire in anticipo il materiale didattico potrebbe essere un'ulteriore modalità di supporto. D'altra parte, i docenti possono mettere gli studenti nella condizione di imparare il linguaggio matematico utilizzato nell'ambito scientifico (il caso di Bianca e Ale Micarti ne sono validi esempi) eventualmente, pensando al LaTeX, integrandolo con dei pacchetti che rendano anche i files compilati accessibili a tutti.
Il numero di individui sottoposti a intervista costituisce uno dei limiti di questo studio. Infatti, questo aspetto rende impossibile costituire un campione di valore statisticamente rilevante precludendo qualsiasi possibilità di generalizzazione. Le peculiarità dei soggetti esaminati, particolarmente riguardo la loro formazione per quanto in ogni caso scientifica, sono di una tale specificità da non poter essere ritenute rappresentative della popolazione complessiva di riferimento. Un altro limite riguarda i risultati ottenuti. Le interviste si sono tenute esclusivamente da remoto, rendendo impossibile analizzare tutto l'aspetto

della comunicazione non verbale. Inoltre, la posizione della webcam ha portato a visualizzare solo una porzione ridotta dell'ambiente in cui si trovava l'intervistato. I risultati ottenuti potrebbero essere stati ulteriormente influenzati dalle dinamiche dell'intervista e dagli interventi dell'intervistatore. Costituiscono dei limiti dello studio anche il tempo ridotto e le risorse limitate a disposizione. Alla luce di quanto appena osservato, le ipotesi formulate devono essere trattate con la massima cautela e richiedono ulteriori approfondimenti per essere confermate o confutate.
Questi limiti possono però essere il punto di partenza per la pianificazione di future indagini sperimentali. Si potrebbe, ad esempio, progettare una ricerca che coinvolga un maggior numero di soggetti, che magari abbiano superato da meno tempo un esame di algebra lineare oppure che ancora devono sostenerlo per la prima volta. Altri sviluppi potrebbero considerare individui ipovedenti e non solo non vedenti (Omero nonostante abbia un residuo visivo ha svolto gli esercizi coprendo lo schermo) per far emergere altri strumenti che tali individui integrano nel proprio processo di apprendimento. Un campione più omogeneo comunque permette di confrontare più facilmente le strategie adottate. Un'altra alternativa valida sarebbe quella di considerare nell'ambito dello stesso quadro teorico altre discipline diverse dall'algebra lineare, ma comunque comuni ai vari corsi di studio ad indirizzo scientifico.
Queste riflessioni inducono a concepire ulteriori indagini volte a sondare i meccanismi cognitivi operanti nei soggetti con disabilità visiva che si cimentano nella risoluzione di problemi, nonché i metodi didattici in ambito matematico che possono essere adottati al fine di una maggiore inclusività e accessibilità.

Appendice A

Trascrizione dell'intervista a Bianca

L'intervista si è svolta tramite una videochiamata su Skype, durante la quale Bianca ha condiviso il proprio schermo. La registrazione della videochiamata è stata trascritta, con la descrizione delle azioni che venivano svolte. Bianca utilizza un display Braille collegato al computer che tramite il software JAWS, le consente di accedere ai files dell'intervista. Svolge gli esercizi in un file di testo dove può incollare i dati, manipolarli e sfruttarli a suo vantaggio. Spiega spesso verbalmente ciò che sta eseguendo a schermo.
La registrazione dura circa un'ora e trenta minuti ed è stata trascritta quasi interamente, escludendo ciò che avrebbe potuto violare il suo anonimato. Nelle tabelle che seguono non è riportato il timing preciso. Le diverse fasi dell'intervista si sono succedute, approssimativamente, come segue:

- Esercizio 1: Bianca legge l'esercizio utilizzando strumenti assistivi e copia la matrice nel file di lavoro (dal minuto 1:10 al minuto 2:13). Deduce le dimensioni della matrice per prepararsi alle operazioni (dal minuto 2:13 al minuto 2:32). Esegue il prodotto matriciale (dal minuto 2:32 al minuto 19:05).

- Esercizio 2: Bianca legge il testo dell'esercizio utilizzando strumenti assistivi e copia la matrice nel file di lavoro (dal minuto 19:10 al minuto 20:20). Esamina le righe della matrice per dedurne le dimensioni e la organizza per una più facile manipolazione (dal minuto 20:20 al minuto 20:50). Esegue moltiplicazioni per scalari e somme di righe, mantenendo traccia delle operazioni nel file (dal minuto 20:50 al minuto 22:05).

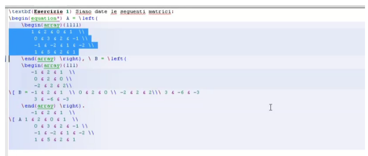
- Esercizio 3: Bianca legge il testo dell'esercizio e copia la prima matrice di cui calcolare il determinante nel file di testo (dal minuto 22:09 al minuto 23:00). Calcolo del determinante (dal minuto 23:00 al minuto 25:30). Bianca copia la seconda matrice e la legge (dal minuto 25:30 al minuto 27:00). Discute delle sue proprietà e ne trae delle conclusioni (dal minuto 27:00 al minuto 28:51).

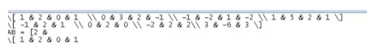
- Esercizio 4: Bianca legge l'esercizio e riporta manualmente i dati (dal minuto 28:56 al minuto 30:01). Legge la dispensa (dal minuto 30:01 al minuto 31:57). Scrive le matrici "modificate" e ne calcola il determinante (dal minuto 31:57 al minuto 33:01). Calcola il determinante della matrice A e trova le soluzioni(dal minuto 33:01 al 35:10 minuto). Esegue una controprova (dal minuto 35:10 al minuto 36:14).

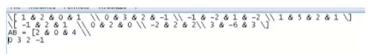
- Esercizio 5: Bianca legge il testo dell'esercizio e copia la matrice M (dal minuto 36:16 al minuto 37:20). Scrive i vettori della base (dal minuto 37:20 al minuto 38:35). Legge la dispensa (dal minuto 38:35 al minuto 42:37). Calcola le combinazioni lineari e risolve i sistemi che ne derivano (dal minuto 42:37 al minuto 1:00:23). Calcola l'ultimo prodotto matriciale (dal minuto 1:00:03 al minuto 1:13:25).

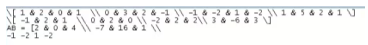
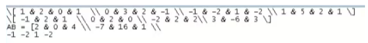
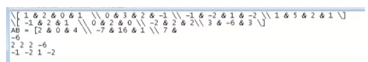
- Domande 1 & 2: Risponde alla prima domanda (dal minuto 1:13:26 al minuto 1:15:10). Risponde alla seconda domanda e la integra ad altre informazioni (dal minuto 1:15:10 al minuto 1:35:45).

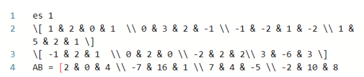
A.1 Esercizio 1

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Bianca: Siano date le seguenti matrici, quindi. Forse me li fa fare anche qui le cose no? Però copiamo in note perché siamo più sicuri.	Scorre tra le righe del file per leggere il testo dell'esercizio e, in particolare, la prima matrice.
2	Allora copio la prima matrice. In notepad che non c'è perché si chiama blocco note.	Copia la prima matrice dell'esercizio in un nuovo file di testo, trascurando le definizioni degli ambienti LaTeX. 
3	Allora. La metto tutta su una riga. Uno, due, tre e quattro. E quattro.	Dopo aver incollato la prima matrice la mette tutta su una riga aggiungendo i simboli per introdurre l'ambiente matematico.
4	Intervistatore: M-hm.	
5	Bianca: Ok, poi. Prendiamo la seconda matrice.	Torna al file degli esercizi e scorre con il cursore fino alla fine della seconda matrice.
6	Intervistatore: M-hm.	
7	Bianca: Che è questa sì.	Copia la seconda matrice tranne l'ultima riga.
8	Intervistatore: Ottimo.	
9	Bianca: Allora. Una poi due Poi tre. E qua e basta. Perché era una matrice... No? Ci vuole un'altra riga.	Dopo aver incollato la seconda matrice (meno l'ultima riga) la mette tutta su una riga aggiungendo i simboli per introdurre l'ambiente matematico.
10	Intervistatore: OK, sì, esatto.	

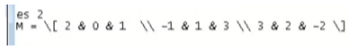
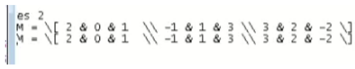
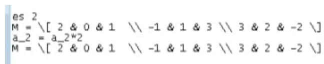
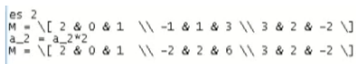
11	Bianca: Ed è questo tre... Tre, meno sei, tre.	Torna al file degli esercizi e legge la riga che mancava della seconda matrice.
12	Intervistatore: Sì, sì, sì.	
13	Bianca: Tre, scusami un attimo che mi è arrivato un messaggio.	Scrive elemento per elemento la riga che mancava della seconda matrice.
14	Intervistatore: Certo.	
15	Bianca: Controllo solo un secondo.	
16	Allora va bene, iniziamo a fare questa moltiplicazione. Allora la prima riga per cui devo moltiplicare è uno, due, zero, uno, quindi. La copio qua sotto, diciamo così, allora questa fa.	Seleziona la prima riga e la copia sotto la seconda matrice saltando una riga.
17	Allora. Praticamente sono importanti solo la prima e l'ultima in questo caso. Meno uno più tre dovrebbe fare due il primo.	Legge la prima colonna della seconda matrice facendo scorrere le dita sulla barra Braille e dopo aver spostato il cursore fino alla riga in cui aveva copiato la prima riga della prima matrice, torna su di una riga con il cursore e scrive il primo elemento della matrice prodotto.
18	AB Facciamo così. Poi seconda entry, quindi prima riga per la seconda colonna.	Scrive "AB" nella terza riga del file di testo, davanti al primo elemento della matrice prodotto. Posziziona il cursore nella seconda riga del codice (dove c'è la seconda matrice).  \[1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \] \[-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2\\ 3 & -6 & 3 \] AB = [2 & \[1 & 2 & 0 & 1
19	Abbiamo due, due e meno sei, perché in realtà "lei" non la vogliamo. Due, due e meno sei e sarebbe due più quattro meno sei, quindi fa zero.	Torna alla riga dove ha scritto "AB" e compila con l'elemento che occupa la posizione (1,2).
20	Intervistatore: M-hm.	

21	Bianca: Poi prendiamo l'ultima uno, zero, due e tre e praticamente solo l'uno e il tre ci servono e questo fa quattro. Aspetta che ricontrollo, vediamo.	Legge l'ultima colonna della seconda matrice. Si posiziona nella riga dove sta scrivendo la matrice prodotto e scrive il risultato della combinazione lineare.
22	Uno, zero, due e tre, quindi. Sì, uno, zero, due e tre, quindi.	Torna sulla riga dove c'è la seconda matrice e rilegge.
23	Sì, sì, uno più tre fa quattro.	Rilegge per controllare il calcolo anche la prima riga della prima matrice.
24	Sì, OK.	
25	Erano sbagliati quelli di prima?	
26	Intervistatore: No, no.	
27	Bianca: Poi allora la seconda riga per cui devo fare prodotto è zero, tre, due, meno uno. Scriviamocela qui zero, tre, due, meno uno per meno uno, zero, meno due e tre allora meno uno, zero, du.. meno due e tre.	Scrive al posto della prima riga della prima matrice (che aveva scritto nella quarta riga del file) la seconda riga della matrice A e tornando alla seconda matrice legge (due volte) la prima colonna. 
28	Quindi meno due per meno due fa meno quattro; meno uno per tre, ah questo fa meno sette.	Torna alla prima riga della prima matrice e dopo aver svolto il calcolo a mente scrive l'elemento di posto (2,1) della matrice prodotto.
29	Ok, poi due, due, due. E meno sei. Due, due, due e meno sei, quindi. Praticamente questo fa quattro no, aspetta, aspetta, aspetta, perché c'è anche il sei. Allora? Tre per due sei, due per due quattro, il meno sei fa sedici.	Legge la seconda colonna della seconda matrice e poi torna a leggere la prima riga della prima colonna per svolgere il calcolo che riporta nella posizione (2,2) della matrice "AB".
30	Adesso riguardiamo comunque, mi sembra che faccia sedici questa cosa, perché due, due, due esatto e meno sei.	Rilegge la seconda colonna della seconda matrice spostandosi con il cursore nella seconda riga del file.
31	Poi abbiamo l'ultima che è uno, zero, due e tre.	Legge la terza colonna della seconda matrice.

<table>
<tr><td>32</td><td>Intervistatore: M-hm.</td><td></td></tr>
<tr><td>33</td><td>Quindi due per due quattro, meno tre per.. No! tre per due, questo fa uno. Poi. L'ultima riga è..</td><td>Torna alla quarta riga del file dove c'è la prima riga della prima matrice e dopo aver riletto la terza colonna della matrice B, fa il calcolo a mente e riporta il risultato nella matrice prodotto.</td></tr>
<tr><td>34</td><td>No! Non è ultima riga, è la terza. Meno uno, meno due, uno, meno due. Questa è piena di segni allora meno uno, zero, meno due, tre.</td><td>Legge la terza riga della matrice A e la scrive al posto della seconda nella quarta riga del file.

</td></tr>
<tr><td>35</td><td>Allora meno uno, zero, meno due, tre questa me la scrivo.</td><td>Aggiunge una riga al file in cui scrive la prima colonna della seconda matrice in modo da averla tutta su una riga e non sbagliare il calcolo.

</td></tr>
<tr><td>36</td><td>Allora meno uno, Meno due e meno sei e questa fa 7. Poi.</td><td>Passa volta per volta dalla quarta alla quinta riga del codice per fare tutti i prodotti. Scrive poi il valore ottenuto nella matrice prodotto.</td></tr>
<tr><td>37</td><td>Scriviamoci anche la seconda, che è allora due, due, due e meno sei, e questo praticamente è.</td><td>Scrive la seconda colonna della matrice B al posto della prima.</td></tr>
<tr><td>38</td><td>Allora meno due e meno quattro che fanno meno sei. Poi mmmh meno due che fa meno otto e poi. Più dodici, quindi fa quattro.</td><td>Aggiunge una nuova riga al file in cui modifica il risultato della combinazione lineare man mano che procede con il calcolo, spostandosi tra le righe del file in cui ha riportato la riga e la colonna che vuole moltiplicare. Riporta poi il risultato ottenuto nella matrice prodotto.

</td></tr>
</table>

39	E poi l'ultima riga (intende colonna) che è uno, zero, due, tre.	Legge l'ultima colonna della matrice B e la riporta nella quarta riga del file.
40	Intervistatore: M-hm.	
41	Bianca: Allora. Meno uno. Più due che fa uno. Meno sei che fa meno cinque.	Si sposta più volte dalla riga alla colonna che vuole moltiplicare per effettuare la combinazione lineare.
42	Poi ultima riga, che è questa: uno, cinque, due, uno.	Legge l'ultima riga della matrice A e la scrive nella quarta riga del file.
43	Intervistatore: M-hm.	
44	Bianca: Per.. questo fa meno uno, meno quattro e più tre fa du.. meno due.	Legge la prima colonna di B e dopo aver svolto la combinazione lineare a mente la riporta nella matrice prodotto.
45	Poi abbiamo. Allora. U.. due più quattro, no più cinque, quindi più dieci era uno, cinque, due, uno quindi sì due più dieci, dodici, più quattro quattordici, meno sei fa otto.	Passa dalla riga del file in cui c'è la matrice B alla quarta in cui ha riportato l'ultima riga della matrice A.
46	E poi uno, cinque, due, uno per quest'ultima che è uno più quattro che fa cinque più tre che fa otto.	Legge l'ultima colonna della matrice B ed esegue il calcolo a mente.
47	Però aspetta uno, cinque, due, uno fammi rivedere una cosa due, dieci, dodici, quattro, sedici. Sedici meno sei fa dieci, non otto. Sì, ora dovrebbe essere giusta. Allora questo è il primo esercizio.	Torna a leggere la seconda colonna della matrice B perchè non è sicura del calcolo svolto a mente che infatti corregge.  1 es 1 2 \[1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \] 3 \[-1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2\\ 3 & -6 & 3 \] 4 AB = [2 & 0 & 4 \\ -7 & 16 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \\ -2 & 10 & 8
48	Intervistatore: Passiamo pure al prossimo.	

A.2 Esercizio 2

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Bianca: Faccio il secondo.	Torna al file con il testo degli esercizi.
2	Intervistatore:Sì.	
3	OK. La riduzione. Aspetta che sì, esercizio due, ridurre la matrice. Allora.	Scorre nel file degli esercizi fino all'esercizio due e lo legge.
4	Questa matrice qua. Okay. L'eliminazione di Gauss facciamo. È una matrice tre per tre.	Copia la matrice nel file che ha creato per svolgere gli esercizi e scorrendo tra le righe della matrice ne deduce la dimensione.
5	Intervistore: Sì.	
6	Bianca: La metto tutta così. Allora. Questa la chiamiamo M.	Mette la matrice tutta su una riga introducendo l'ambiente matematico. Inoltre le assegna il nome "M". 
7	Allora.	Ricopia nuovamente la matrice M. 
8	Facciamo che moltiplico la seconda riga per due.	Aggiunge una riga al file dove tiene traccia delle operazioni che vuole eseguire. 
9	Quindi meno due, due. Controllo un secondo, una cosa sì, meno due, due e sei.	Modifica la "seconda" matrice M moltiplicando la seconda riga per due e torna alla "prima" matrice M per verificare di aver svolto la moltiplicazione correttamente. 

10 E poi faccio che sommo la prima. La seconda diventa a_2 più a_1.

Ricopia nuovamente la matrice M (questa volta modificata dall'operazione precendte) e aggiunge una riga al file dove tiene traccia delle operazioni che vuole eseguire.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
```

11 Quindi questo fa zero. Questo fa due. E questo fa sette.

Modifica la "terza" matrice M.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
```

12 Poi. La prima. No, moltiplico la terza per due.

Aggiunge una riga al file dove tiene traccia delle operazioni che vuole eseguire.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
```

13 Intervistatore: M-hm.

14 Bianca: Quindi praticamente sei, quattro, meno quattro.

Ricopia nuovamente la matrice M e la modifica con la moltiplicazione di cui sopra.

15 E poi faccio che a_3 uguale a_3 meno, meno o più vediamo un attimo no, meno a_1 per tre.

Aggiunge una riga al file dove tiene traccia delle operazioni che vuole eseguire e per essere sicura di tale operazione torna sull'ultima versione della matrice M che ha ricopiato dopo l'operazione. Modifica poi l'operazione.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
```

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
```

16 OK, allora questa fa zero. Poi quello rimane così e questo fa. Aspetta meno quattro, meno tre. Allora questo per.. Sì, perché qua devo sottrarre perché di sì, quindi questo è per tre, fa tre. Meno quattro meno tre fa meno sette.

Modifica l'ultima versione della matrice M sulla base dell'operazione scritta.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
```

17 Poi faccio la seconda riga, cioè facciamo la a_3, diventa $a_3 - 2 * a_2$, quindi.

Ricopia l'ultima versione calcolata della matrice M e scrive l'operazione che vuole fare sull'ultima riga.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
a_3 = a_3-2a_2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
```

18 Praticamente questo fa zero. E questo fa quattordici, quindi meno ventuno.

Modifica l'ultima versione della matrice M per terminare l'eliminazione di Gauss.

```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
a_3 = a_3-2a_2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \]
```

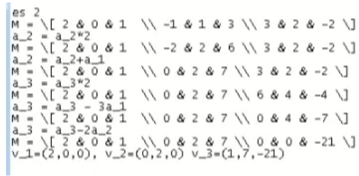
19 Intervistatore: Ora l'esercizio chiede quale sia il rango della matrice.

20 Bianca: Okay, devo prendere i vettori. Sì, per questo abbiamo detto che moltiplicava per due si.. dovrebbe essere giusto.

Ritorna sui calcoli fatti per controllare che siano corretti.

21 Allora prendo i vettori che sono due, zero, zero. Poi abbiamo v_2 che è zero, due, zero. E poi abbiamo v_3 che è uno, sette, meno ventuno.

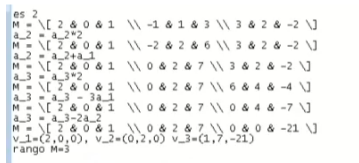
Torna all'ultima versione della matrice scritta e scrive le colonne di M come singoli vettori per verificarne l'indipendenza.



```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
a_3 = a_3-2a_2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \]
v_1=(2,0,0), v_2=(0,2,0) v_3=(1,7,-21)
```

22 Che però sono linearmente indipendenti e quindi la matrice rango tre.

Scrive il rango della matrice M ottenuta.



```
es 2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ -2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_2 = a_2+a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -2 \]
a_3 = a_3*2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & -4 \]
a_3 = a_3 - 3a_1
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -7 \]
a_3 = a_3-2a_2
M = \[ 2 & 0 & 1  \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -21 \]
v_1=(2,0,0), v_2=(0,2,0) v_3=(1,7,-21)
rango M=3
```

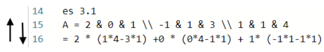
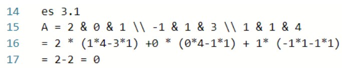
A.3 Esercizio 3

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Bianca: Passo al terzo esercizio.	
2	Intervistatore: Benissimo.	
3	Bianca: Questo era più veloce, le moltiplicazioni sono sempre state difficili. Allora calcolare il determinante quando esiste l'inversa. Va bene. Allora vediamo se stavolta riesce a copiarla giusta, questa è tre per tre.	Legge nel file degli esercizi il terzo esercizio e copia la prima matrice.

4	Ok, stavolta l'ha copiata.	Copia la prima matrice nel file dove sta svolgendo gli esercizi e la mette tutta su una riga.
		`es 3.1`
		`A = 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4`

5	Va bene. Allora, il determinante quindi è due per, praticamente dovrebbe essere uno per quattro meno... Uno per quattro meno tre per uno. Quindi lo scriviamo tutto così, cioè non so il risultato però lo scriviamo.	Inizia a scrivere la prima parte della formula del determinante.
		`es 3.1`
		`A = 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4`
		`= 2 * (1*4-3*1)`

6	Poi abbiamo questo che è uno per... Qua c'era la storia del segno meno. Meno uno per... e c'era zero per 4 meno uno per uno. Più 1 per... Dovrebbe essere uno per quattro meno tre per uno.	Prosegue con il calcolo scrivendolo sotto la matrice che ha indicato con la lettera A.
7	Mhh, uno per quattro meno tre per uno.. Sì! Praticamente. Quindi uguale a questo numerino, qui era uno, quindi è due. Poi meno uno, meno.. più uno.	Torna alla riga in cui ha scritto la matrice A per capire di quale sottomatrice deve calcolare il determinante.
8	Poi uno per quattro, meno tre più uno. Questo fa uno più uno, dovrebbe essere quattro.	Scrive l'ultima parte dell'algoritmo del determinante.
9	Intervistatore: Forse c'è qulacosa che non va...	

10	Bianca: Ricontrollo un attimo i conti. Due che era uno e tre, uno, quattro quindi il determinante della sottomatrice uno, tre, uno, quattro che era giusto, sì, quattro per tre meno uno, poi. Poi, Ah aspetta, ho sbagliato. Certo è zero il secondo "coso".	Ricontrollando e rileggendo la matrice A, si accorge di aver sbagliato una parte dell'algoritmo.
11	Intervistatore: Esatto!	
12	Bianca: Perché ho beccato uno? Più zero e poi il terzo invece è uno che moltiplica uno per quattro meno tre, il terzo è uno che moltiplica allora... Meno uno, uno, uno è la matrice che sta a sinistra, devo prendere i quattro che sono a sinistra quindi sono tutti uno praticamente. Sì, con un meno uno, cioè meno uno per uno, meno uno per uno fa meno due questo. Ho preso ancora quell'altra.	Termina la scrittura dell'algoritmo questa volta corretto che controlla ritornando più volte alla matrice A. 
13	Quindi questo praticamente è meno due che moltiplica uno quindi è meno... questo qua è, allora abbiamo detto due meno due praticamente che fa zero, quindi questa non è invertibile, non la calcoliamo l'inversa.	Svolge il calcolo su una nuova riga. 
14	Intervistatore: Esatto.	
15	Bianca: Ok, poi il 3.2. Okay. Allora. La D devo prendere?	Torna al file degli esercizi e scorre con il cursone fino alla matrice D.
16	Intervistatore: Si.	
17	Bianca: Si, come mai si chiama D? Cioè, nel senso è la seconda.	
18	Intervistore: Perché la prima era C.	
19	Bianca: Ah okay, perché A e B erano quelle degli esercizi di prima.	
20	Intervistatore: Sì, per distinguerle.	

21	Bianca: Uno, zero, zero, zero... Questa qua mi sa che è una matrice diagonale.	Copia e incolla dal file degli esercizi a quello in cui li sta svolgendo la matrice D e la legge riga per riga mentre la posiziona tutta su una riga.
		`es 3.2`
		`D = 1 & 0 & 0 & 0  \\`
		`0 & 1 & 0 & 0 \\`
		`0 & 0 & 1 & 0 \\`
		`0 & 0 & 0 & 1`

22	Sì, cioè per ora si, vediamo. E così. E questa così.	

23	Vabbè, (di) quella diagonale il determinante era il prodotto delle... Dovrebbe essere 1 il determinante di questa.	Scrive il determinate della matrice D.
		`es 3.2`
		`D = 1 & 0 & 0 & 0  \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1`
		`det = 1`

24	Intervistore: Sì.	
25	Bianca: Okay, questa è invertibile. Sull'inversa fammi solo controllare una cosa nelle tue dispense, perché... Vediamo se c'è scritto qualcosa.	Apre il file che ho fornito come dispensa.
26	Si allora.. se A è una matrice invertibile e, che bello! Trovato!	Usa una ricerca con vincolo la parola "invertibile" e trova quanto sta cercando.
27	La sua inversa è A^{-1}... b_{ij}, dove b_{ij} è uguale ad A_{ji} vabbè ma questa è diagonale, quindi A_{ji} e A_{ij} dovrebbe essere uguale. Questa qui, secondo me, è uguale alla sua inversa, no?	
28	Intervistatore: Sì!	

29	Bianca: Perché sono tutti uno, quindi sì, va bene. Inv è uguale a D.	Scrive quanto osservato.
		`es 3.2`
		`D = 1 & 0 & 0 & 0  \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1`
		`det = 1`
		`inv = D`

A.4 Esercizio 4

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Bianca: Esercizio quattro. Quanti sono?	
2	Intervistatore: Sono 5.	
3	Bianca: Allora quattro: risolvere il seguente sistema di Cramer. Questo era quello che non avevo studiato. Sono due queste, sì? Due righe?	Legge nel file degli esercizi il quarto.
4	Intervistatore: Sono due righe, si.	
5	Bianca: Questo sotto qua (x,y)... Ah vabbè okay, è un sistema. Poi c'è il vettore colonna lì.	
6	Ok, allora è una due per due questa?	
7	Intervistatore: Sì.	
8	Bianca: E come l'hai chiamata, E?	
9	Non le ho dato un nome, però se vuoi E può andar bene.	

10	Bianca: E abbiamo (x,y). E poi nove... quattro, nove e basta.	Riscrive nel file l'esercizio, mettendo la matrice E su una riga.
		`es 4`
		`E = 2 & 1 \\ -1 & 3`
		`(x,y) = (4,9)`

11	Intervistatore: Sì.	
12	Bianca: Allora vado a vedere nelle tue dispense cos'è Cramer o posso risolvere il sistema come lo risolverei io?	
13	Intervistatore: Come preferisci, Cramer c'è nelle dispense.	
14	Bianca: Ok allora vediamo com'è Cramer e vedo se usare Cramer oppure se fare come mi va. Cioè è un sistema facile questo.	

15	Risolvere il seguente, ah no, questi sono gli esercizi.	Legge il file degli esercizi.
16	Cramer... Ok. Ho scritto male?	Fa una ricerca con vincolo "Cramer" nel file della dispensa.
17	Intervistatore: No, è giusto!	
18	Bianca: Ah qua OK. Dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite. OK, di qua il nostro (n) è due. Allora $A \cdot \mathbf{x}$ è uguale a $\mathbf{b}$ con $det(A)$ diverso da zero, esso ammette (esattamente) una soluzione.	Legge nella dispensa il primo risultato per Cramer.
19	Ok sia A per $\mathbf{x}$ un sistema, quindi questo è il teorema. Allora la soluzione del sistema è il vettore di elementi x, che è determinante diA_i... determinante di A_i per determinante di A. No, diviso il determinante di A. Dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo l'i-esima colonna di A con il vettore b.	Legge nella dispensa il teorema utile alla risoluzione dell'esercizio.
20	Ah ok. Allora vediamo se riesco dai, facciamo così. Quindi questa è A.	Ricopia la matrice E.

21	E b dovrebbe essere... Praticamente io sostituisco l'i-esima colonna quindi qua ci metto quattro e nove e questa è A_1 praticamente.	Sostituisce alla prima colonna della matrice E (che ora è A) il vettore b, ottenendo la matrice A_1.
		`es 4`
		`E = 2 & 1 \\ -1 & 3`
		`(x,y) = (4,9)`
		
		`A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3`

22	Intervistatore: Sì.	

23	Bianca: E devo calcolare il determinante di A_1 che è dodici meno nove che fa tre.	Scrive il determinante della matrice A_1.
		`es 4`
		`E = 2 & 1 \\ -1 & 3`
		`(x,y) = (4,9)`
		
		`A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3`
		`det A_1 = 12-9 = 3`

24 Poi il determinante... Poi vabbè, calcoliamo A_2 allora e poi magari calcoliamo anche il determinante di A.

25 A_2 è: quattro e nove li mettiamo qua.

Sostituisce alla seconda coloonna della matrice E (che ora è A) il vettore b, ottenendo la matrice A_2.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
```

26 Quattro e nove, quindi due per nove, diciotto, meno quattro quattordici, quindi determinante di A_2 è quattordici sì, due per nove, diciotto, più quattro ventidue.

Scrive il determinante di A_2.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
```

27 Intervistatore: Sì.

28 Bianca: Fammi vedere se quella sopra in realtà l'ho fatta giusta o sbagliata. Tre per 3 meno... Quella su l'ho fatta giusta.

Ricontrolla il calcolo del determinante di A_1.

29 OK. Quindi... Il determinante di A invece, che forse avrei dovuto guardarlo prima perché magari era zero, però, secondo me, no perché sennò non mi avresti messo l'esercizio. Sei... Fa sette.

Torna alla riga del file dove aveva riportato la matrice E (che ora è A) e ne calcola il determinante per poi scriverlo sotto quello di A_2.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
det A = 7
```

30 Allora le due soluzioni sono tre settimi. Tre settimi e s_2 è ventidue settimi però facciamo una cosa.

Riporta nel file le soluzioni trovate applicando quanto appreso dalle dispense.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
det A = 7
S_1 = 3/7, s_2 = 22/7
```

31 Facciamo che adesso facciamo una controprova per vedere se ho fatto giusto, quindi. Praticamente io dovevo risolvere il sistema che era dato da due x più y uguale a quattro.

32 Intervistatore: M-hm.

33 Bianca: Sì, perché era quattro, nove si! E poi la seconda era meno x più tre y uguale a nove.

Riscrive l'esercizio riconducendolo ad un sistema.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
det A = 7
S_1 = 3/7, s_2 = 22/7

2x+y=4 \\ -x+3y =9
```

34 Lo faccio per riduzione e moltiplico la seconda per due...

Ricopia il sistema e modifica la seconda riga, moltiplicandola per due.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
det A = 7
S_1 = 3/7, s_2 = 22/7

2x+y=4 \\ -x+3y =9
2x+y=4 \\ -2x+6y =18
```

35 Questo significa che 7 y è uguale a 22, quindi... Wow, questo proprio non lo sapevo! E quindi 22/7.

Dopo aver sommato le due righe del sistema scrive quanto ottenuto per poi ricavare il valore di y.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
det A = 7
S_1 = 3/7, s_2 = 22/7

2x+y=4 \\ -x+3y =9
2x+y=4 \\ -2x+6y =18
7y=22, 22/7,
```

36 Allora qua succede che x è uguale a tre per ventidue settimi meno nove. È uguale a sessantasei settimi meno sessantatre settimi che è tre settimi. Perfetto! Allora ci siamo.

Scrive il calcolo necessario a trovare il valore di x.

```
es 4
E = 2 & 1 \\ -1 & 3
(x,y) = (4,9)

A_1 = 4 & 1 \\ 9 & 3
det A_1 = 12-9 = 3
A_2 = 2 & 4 \\ -1 & 9
det A_2 = 22
det A = 7
S_1 = 3/7, s_2 = 22/7

2x+y=4 \\ -x+3y =9
2x+y=4 \\ -2x+6y =18
7y=22, 22/7,
x= 3*22/7-9 = 3/7
```

A.5 Esercizio 5

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Intervistatore: Poi alla fine ci sono due domande.	
2	Bianca: Però le cose più difficili per ora sono state il prodotto iniziale, ma solo per una questione di cioè che bisogna memorizzare perché io vedo una cella alla volta e poi il connettersi alla chiamata. Quella è stata la cosa più difficile di oggi.	
3	Allora esercizio cinque. Sia T da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare rappresentata dalla matrice e c'è questa matrice qua che dovrebbe essere tre per tre.	Legge l'esercizio dal file degli esercizi.
4	Ok che mi copio subito.	Copia la matrice associata all'applicazione lineare T.
5	Ok, relativa alla base e c'è questa base qui, OK che è? Uno, tre, zero... li hai messi come vettori? Ok, li hai messi come vettori colonna zero, uno, tre e poi zero, uno... zero, zero, uno.	Scorre nel file degli esercizi per capire il modo in cui sono espressi i vettori della base.
6	Intervistatore: Sì.	
7	Ok, trovare la matrice di T rispetto alla base canonica.. Ah quella dei vettori e_1, e_2, e_3 che sono quelli uno, zero, zero, okay.	
8	Intervistatore: Sì, esatto.	
9	Bianca: OK, va bene. Mi copio questa matrice qui e poi ci copiamo anche la base. La base sono v_1 che erano zero, uno, tre mi confermi?	Copia nuovamente la matrice e rilegge i vettori della base.
10	Intervistatore: Quello sarebbe v_2 dato che la base in quanto tale deve essere ordinata.	

11 Bianca: OK, allora devo andare ancora più su e scriviamolo v_2 qua già che ci siamo. Uno, tre, zero è v_1 e v_3 è uguale a zero, zero, uno.

Incolla la matrice assegnandole il nome "T" nel file dove sta svolgendo gli esercizi, dove scrive anche i vettori della base.

```
es 5
T = 7 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0

v_1 = (1, 3, 0)
v_2 = (0, 1, 3)
v_3 = (0, 0, 1)
```

12 Intervistatore: Sì.

13 Bianca: Va bene. Vediamo cosa diceva la tua dispensa sulle basi, tanto già che ci siamo.

14 Questo è ancora Cramer aspetta. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione N e sia F una trasformazione lineare, siano inoltre B e C due basi ordinate. Allora la matrice associata a F rispetto alla base C è data dal prodotto della matrice M di cambiamento di base da B a C, che ha sulle colonne le coordinate dei vettori di C rispetto a quelli della base B, vedi esempio due. Vabbè ho capito, cioè nel senso credo di saperlo fare, però leggiamolo comunque l'esempio.

Riapre il file della dispensa (che si riapre su Cramer) e scorre fino alla parte di teoria relativa all'eaercizio che legge dalla barra Braille.

15 Riduzione di una matrice, no. Vado sotto quello dopo? È l'ex dopo?

Fa una ricerca nel file della dispensa con vincolo la parola "ex".

16	Esatto. Ok. Questo è quello che finisce. Allora la matrice del cambiamento di base, sia V che va da $\mathbb{R}^2$, siano date le basi OK di qua. Uno, due. E la matrice? No, è uno, zero. Questa è quella canonica, okay. Per scrivere la matrice del cambiamento di base che permette di passare da B a C, dobbiamo determinare i coefficienti delle combinazioni lineari che permettono di scrivere i vettori di B rispetto alla base C. Okay, quindi noi facevamo uno, due. E uno, zero. Ah, OK, OK, ho capito, va bene. Tre, quattro per uno, zero e zero, uno, però c'è in questo caso qua, nel senso, essendo la base canonica, i vettori sono loro stessi, no?	Legge l'esempio utile alla risoluzione dell'esercizio, cercando di dedurre la tecnica risolutiva.
17	Intervistatore: Esatto.	

18	Bianca: E quindi non è che devo fare niente. La matrice di passaggio si ottiene disponendo per colonne i coefficienti delle precedenti combinazioni lineari; quindi, praticamente sulle colonne ho i due vettori della base; quindi, uno, due e tre, quattro va bene. Viceversa, per scrivere la matrice del cambiamento di base che permette di passare dalla base C a B, dobbiamo determinare i coefficienti delle combinazioni lineari che permettono di scrivere i vettori di C rispetto alla base B. Ok, questo è il passaggio inverso. Vabbè che dovrebbe essere in teoria più complicato. Uno, zero per uno, due si vabbè comunque… e tre, quattro per zero, uno in realtà è la cosa contraria. La matrice di passaggio si ottiene disponendo sulle colonne coefficienti delle precedenti combinazioni lineari. E va bene. Ok. Osservo che M e N sono una l'inversa dell'altra. Va bene allora. Fammi vedere solo una cosa sopra.	Continua a leggere l'esempio.
19	Intervistatore: M-hm.	
20	Bianca: Perché noi avevamo detto che dovevamo scrivere… Ah okay, facciamo così. Era poco prima dell'ex, del primo ex, quello che stavo cercando in realtà. Ah devo moltiplicarle, okay.	Torna alla parte di teoria che aveva iniziato a leggere all'inizio con la barra Braille.

21	Allora ritornando all'esercizio. Noi volevamo scrivere la matrice T rispetto alla base canonica. Quindi io devo scrivere innanzitutto la matrice che ha come colonne questi vettori qua. E poi moltiplicarla per la prima, giusto?	
22	Perché aspetta, fammi solo vedere le lettere con cui hai chiamato le basi qua. Allora… (rilegge a bassa voce il testo dell'esercizio). Trovare la matrice di T rispetto alla base canonica… è C, mentre l'altra l'avevi chiamata B.	Torna nel file degli esercizi per rileggere il testo e cercare delle corrispondenze con l'esempio o la teoria.
23	Intervistore: Esattamente.	
24	Bianca: Ok, solo per vedere le analogie col tuo teorema qui. Anche qui tu volevi la matrice associata ad F rispetto alla base C (che) è data dal prodotto della matrice... Okay, di quella lì più quella da B a C che ha sulle colonne le coordinate dei vettori di C okay, quindi io devo fare il contrario, cioè devo fare il passaggio, quello… Praticamente prendo i vettori, quelli della mia base e devo cercare di scrivere quelli della base canonica in quella base li giusto?	Passa dal file degli esercizi alla dispensa per cercare altre analogie.
25	Intervistaore: Esatto.	
26	Bianca: Ok. Allora riguardiamo un attimo, per esempio, qui c'è in teoria (questa) dovrebbe essere la seconda parte di questo esempio qui.	Confronta ora il testo dell'esercizio con l'esempio letto in precedenza.
27	Intervistatore: Sì.	

28	Bianca: Quindi. Ora. Qua avevamo detto che uno, due, tre, quattro era la base. Io devo fare praticamente. Tu qua hai messo. Okay, ho capito. La matrice di passaggio.	Rilegge l'esempio sulla dispensa.
29	Intervistatore: Questa è ancora la prima parte dell'esempio.	
30	Bianca: Eh, infatti è ancora il primo, il primo pezzo. Volevo scendere io a vedere quell'altro, perché OK, cioè io praticamente devo scrivere, ho capito allora uno, zero e poi moltiplicarlo per quella matrice lì, quindi per uno, due e tre, quattro. E poi il secondo zero, uno, idem, OK allora.	Rilegge la parte dell'esempio relativa al come scrivere la combinazione lineare.
31	Intervistatore: Sì, la devi scrivere come combinazione lineare degli altri due.	
32	Bianca: Si, come combinazione lineare dei tre, in questo caso sono tre.	
33	Intervistatore: Si.	
34	Bianca: Quindi. Io ho il primo vettore che è uno, zero, zero e lo devo scrivere come combinazione lineare di questi tre, quindi posso fare… Il terzo sicuramente. Allora cioè diciamo. Devo moltiplicare quindi io ho, cioè uno, zero, zero. Uno, zero, zero dovrebbe essere uno poi uno, zero, zero per tre, uno, zero che dovrebbe essere tre. Sì, e poi ho l'ultimo che è zero, tre, uno per uno, zero, zero che fa zero.	Prova a scrivere il prodotto scalare tra i vettori.

35	Aspetta, no, sto facendo una cosa che… Allora tu di là avevi fatto uno, zero, zero per una matrice che sulla colonna aveva questi vettori qui.	Cancella tutto e torna al file della dispensa.
36	Intervistatore: No, nell'esempio ho scritto i vettori della base, in quel caso la base canonica come combinazione lineare dei vettori dell'altra base. Ad esempio, uno, zero è uguale ad un numero per il primo vettore più un altro numero per il secondo vettore.	
37	Bianca: Ok, e qua sono tre. Cioè, vediamo. Proviamo a scrivere così questo per X. Più Y per questo qua. Z per questo qua.	Scrive ora il primo vettore della base canonica come combinazione dei vettori della base B. `47  (1,0,0) =  x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)`
38	Intervistatore: Esatto.	

39	Bianca: Praticamente ho uno che è uguale a X. Niente, cioè uno è uno, secondo me, è la componente, poi per quell'altro praticamente dovrei avere tre X più y e poi l'ultimo è Tre Y più Z.	Deduce e scrive il sistema per trovare le tre coordinate al fine di risolvere la combinazione lineare. Per farlo si sposta dalla riga in cui sta scrivendo a quella in cui ha scritto la combinazione lineare.
		`47  (1,0,0) =  x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)`
		`48  (x=1, 3x+y, 3y+z)`

40	Intervistatore: Sì, sì.	
41	Bianca: Per il secondo abbiamo invece zero, uno, zero che (è) uguale sempre a questa roba qui.	Scrive la combinazione lineare per il secondo vettore copiando la parte a destra dell'uguale dalla riga 47 del file. `51  (0, 1,0) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)`

42	Abbiamo. X uguale a uno. Questo era uguale a zero, questo è uguale a zero.	Completa la combinazione lineare per il primo vettore.
		`47  (1,0,0) =  x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)`
		`48  (x=1, 3x+y=0, 3y+z=0)`

43	Intervistatore: Si.	

44 Quindi abbiamo che le coordinate sono uno. Poi sono meno tre. E poi sono 9. Okay, ce l'abbiamo fatta, quindi questo è b_1 praticamente. Che non è b_1, è il vettore che esprime le componenti di b_1 nella base canonica, (quindi) chiamiamolo b_1 asterisco.

Scrive il vettore delle coordinate per il primo vettore della base canonica.

```
47   (1,0,0) =  x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
48   (x=1, 3x+y=0, 3y+z=0)
49   b_1^* = (1, -3, 9)
50
51   (0, 1,0) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
```

45 Intervistatore: Sì. Ok.

46 Bianca: Poi questo qua, allora abbiamo che X più… qua x uguale a zero. Poi abbiamo tre x più y... Mmh… uguale a uno.

Calcola le incognite per il secondo vettore della base canonica ricostruendo il sistema come fatto precedentemente.

```
51   (0, 1,0) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
52   x=0, 3x+y=1
```

47 E poi quindi siccome la X è zero, vabbè lo facciamo il passaggio dopo e poi abbiamo tre y più z è uguale a zero.

Termina il sistema aggiungendo l'ultima riga.

```
51   (0, 1,0) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
52   x=0, 3x+y=1, 3y+z=0
```

48 Quindi il b_2 asterisco è uguale a zero. Poi abbiamo detto uno. E qua meno tre, credo.

Scrive il vettore delle coordinate per il secondo vettore della base canonica.

```
51   (0, 1,0) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
52   x=0, 3x+y=1, 3y+z=0
53   b_2^* = (0, 1, -3)
```

49 Sì è vero questo è uno, questo è tre per uno che va di là, meno tre.

Si sposta tra le ultime due righe scritte per verificare i calcoli eseguiti a mente.

50 Poi l'ultimo che è zero, zero, uno.

Copia la combinazione lineare a destra dell'uguale della riga 51 del file e la pone uguale al terzo vettore della base canonica.

```
55   (0, 0, 1) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
```

51 Questo qua vuol dire che la X è uguale a zero sempre. Poi abbiamo allora tre x più y uguale a zero e tre y più z uguale a uno.

Spostandosi tra le righe 55 e 56 scrive il sistema per le incognite del terzo vettore.

```
55   (0, 0, 1) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
56   x=0, 3x+y=0, 3y+z = 1
```

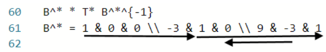
52	E facciamo che quindi b_3 asterisco è uguale a zero, zero, uno.	Scrive il vettore delle coordinate del terzo vettore della base canonica.
53	Adesso allora prendiamoci la matrice che devo andare... Che rappresenta l'applicazione T qua e la devo andare a moltiplicare per la nostra matrice che chiamiamo B* che è quella che ha queste qua sulle colonne.	
54	Intervistatore: Esattamente, a sinistra e poi a destra per la sua inversa.	
55	Bianca: E a sinistra qua. . . allora facciamo B* per T per B* elevato alla meno uno.	Scrive la formula risolutiva dell'esercizio. 56
E qua facciamo. Innanzitutto, prova a scrivere la B asterisco.		
57	Intervistatore: M-hm.	
58	Bianca: Abbiamo detto che l'ultima colonna è zero, zero, uno. La seconda è zero,uno, meno tre praticamente facciamo che. Zero, poi uno. E poi meno tre qua. Poi la prima è uno, meno tre e nove. Uno qua. Poi. meno tre, qua. E nove qua.	Crea la prima matrice di passaggio, ricopiando sulle colonne i vettori indicati precedentemente con b_i^* e la scrive tutta su una riga.
59	Intervistatore: Si.	
60	Bianca: Poi dobbiamo calcolare l'inversa di questa qua. Innanzitutto, il determinante. Quindi questo qua mette insieme praticamente tutti gli esercizi che	

```
(0, 0, 1) = x * (1, 3, 0) + y * (0, 1, 3) + z * (0, 0, 1)
x=0, 3x+y=0, 3y+z = 1
b_3^* = (0, 0, 1)
```

```
B^* * T* B^*^{-1}
B^* = 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1
```

62 Bianca: Allora determinante, uno per uno. Più tre per zero che è uno. Uno per uno. Poi c'è la parte due che non guardiamo neanche perché c'è lo zero e la terza nemmeno perché c'è lo zero. Il determinante è uno.

Legge la riga in cui ha scritto la matrice B* (facendo scorrere le dita sul display Braille) per calcolarne il determinante (vuole accertarsi dell'esistenza dell'inversa).



63 Okay, l'inversa era quella che avevamo detto che aveva le componenti al contrario, cioè A_{ij} doveva essere uguale A_{ji}.

64 Intervistatore: M-hm.

65 Bianca: B asterisco alla meno uno è uguale a... Tutto diviso uno che in questo caso non ci interessa. È praticamente la trasposta in questo caso qua, no? Coincide con la trasposta, questa roba qui.

66 Intervistatore: Non esattamente.

67 Bianca: Perché, perché? Vado a rivedere la formula?

68 Intervistatore: Sì, perché ci sono anche i segni.

69 Bianca: Ecco, OK, OK, OK, allora andiamo a vedere la formula. Dove? Fammi copiare anche questo pezzettino veramente non so perché succede sta cosa. Facciamo così, incolla... Alla meno uno è B_{ij} dove B_{ij} è uguale a A_{ji} diviso il determinante. Non vedo segni in realtà, però...

Legge nella dispensa la parte relativa al calcolo dell'inversa di una matrice.

70 Intervistatore: Dopo è spiegato.

71 Bianca: Ah, OK, ora leggo tutto.

72 Intervistatore: Si.

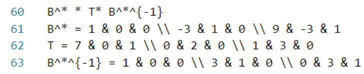
73	Bianca: Quindi un metodo per calcolare l'inversa consiste in costruire la matrice dei complementi algebrici, il cui elemento di posto ij è c_{ij} che è uguale a meno uno elevato alla i+j.	
74	Aspetta fammi copiare anche questo pezzetto.	Copia la formula per calcolare l'inversa dal file dispensa.
75	Meno uno sì alla i più j per il determinante di A_{ij}, trasporla e dividerla per il determinante di A. Però allora il determinante di A è uno. Quindi e poi è determinante di A_{ij} cosa sarebbe? Sarebbe quella matrice che ha tutti i valori a zero tranne quello che sta... Cioè nel senso la matrice diagonale che ha nella posizione ij il nostro numero no aspetta.	
76	Intervistatore: Gli A_{ij} sarebbero in questo caso le sottomatrici che si ottengono eliminando la riga e la colonna a cui appartiene l'elemento di posto ij.	
77	Bianca: Quindi trasporre, dividerla per il determinante, se B è la matrice inversa di A, questa è l'identità va bene. Ok, allora.	Continua a leggere la dispensa.
78	Quindi io prendo la prima. Ora facciamo. Il determinante della prima componente è. Abbiamo uno che devo moltiplicare per allora. Qua immagino che i segni siano, cioè, tipo i e j qua sono uno e uno e quindi è due quindi saranno alternati. No? Saranno un più e un meno. Quindi io posso scrivere direttamente uno.	Spostandosi lungo la riga dove ha riportato la matrice B* cerca di calcolarne la trasposta (cambiando eventualmente i segni) che scrive nella riga successiva e compila man mano assegnadole il nome "B".

79	Poi tre. Poi nove. Meno nove. Poi faccio zero. Però no, questo era nove perché il segno era più. Zero, questo qua è due, due, quindi era uno perché non cambia. Poi faccio meno tre. Questo cambia quindi tre.	
80	Poi questo qua non cambia qui, vabbè comunque zero, quello dopo cambia e diventa comunque zero e l'ultimo non cambia perché l'ultimo è tre più tre, sei e rimane uno. Allora faccio una prova, giusto per vedere se ho fatto giusto.	
81	Moltiplico per la matrice B e vedo se B per B asterisco viene uguale all'identità.	
82	Quindi uno, zero, zero moltiplicato per uno, zero, zero va bene. Poi. Tipo allora vabbè, la prima riga, secondo me, va bene in generale.	Esegue a mente la moltiplicazione tra le due matrici spostandosi tra le due righe dove le ha riportate.
83	Uno, zero, zero direi che però però aspetta no, perché se io uno, zero, zero lo vado a moltiplicare, cioè io allora qua io ho uno. Si, uno, zero, zero che devo moltiplicare per la seconda colonna, quindi per tre, uno, zero. E questo? Questo tre, uno, zero per uno, zero, zero fa tre non fa l'identità (intende uno). Quindi devo anche dividere? Ho dimenticato una divisione?	
84	Intervistatore: Non proprio.	
85	Bianca: Ok. Allora. Come posso fare a questo punto? Facciamo...	

86	Intervistatore: C'è un altro modo se vuoi. Quello di scrivere "al contrario" i vettori della base B in coordinate rispetto a quelli della base canonica.	
87	Bianca: Ok quindi l'esempio che dicevi prima (si riferisce all'esempio letto in precedenza), ma al contrario.	
88	Intervistatore: Esatto.	
89	Bianca: Ok, quindi quella diventa l'inversa direttamente, OK, allora questa roba qui non la cancello ancora per ora però riproviamo.	
90	Quindi i vettori della fase B erano questi qua.	Scorre con il cursore nel file fino alle righe 44-46 dove aveva scritto i vettori della base B.
91	Vogliamo scrivere in componenti rispetto alla base canonica, quindi su questo se mi ricordo avevamo detto v_1, v_2, v_3, cioè quindi questo deve essere uguale a X per e_1 più y per e_2 più Z per e_3.	
92	E questo vuol dire. X è uguale a uno. Poi abbiamo che Y è uguale a tre. E z... Quindi scusami allora è semplicemente la matrice che ha come colonne questi vettori qua.	
93	Intervistatore: Esatto.	
94	Bianca: Allora quindi avevamo uno, tre, zero era anche. Ma era proprio sbagliato allora? Uno, tre e zero. Poi il secondo vettore. Aspetta, fammeli, copiare. Uno, tre, zero e zero, uno, tre.	Copia i vettori v_1, v_2 e v_3.
94	Intervistatore: M-hm.	

95 Bianca: Uno e lì il tre e poi zero, zero, uno. Va bene questa qua? Rifacciamo la prova, però questa dovrebbe essere per forza...

Scrive ora l'inversa, ovvero la matrice che ha sulle colonne i vettori della base B e copia e incolla la matrice che aveva chiamato "T".



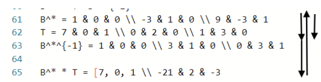
96 Intervistatore: Si.

97 Bianca: Dovrebbe funzionare ora. OK, allora, adesso facciamo allora questo bel prodotto di matrici due prodotti matrici, allora. Poi questa la cancello.

Cancella la matrice B calcolata in precedenza.

98 B asterisco per T. Allora sette. Poi due. No, no, no. sette, zero... sette, zero, uno, poi abbiamo il meno tre, uno, zero. Meno tre, uno, zero che fa... sette per meno tre che fa meno ventuno. Meno ventuno è la prima. Poi meno tre, uno, zero per... quindi questo è zero... due. E poi l'ultimo che è meno tre. E poi l'ultima riga.

Si sposta tra le righe 61 e 62 con il cursore per calcolare la matrice prodotto che scrive sotto.



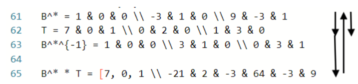
99 Intervistatore: M-hm.

100 Bianca: Che è praticamente il nove, meno tre, uno. Sette per nove sessantatre, più uno sessantaquattro.

Si sposta tra le righe 61 e 62 con il cursore per completare la matrice prodotto.

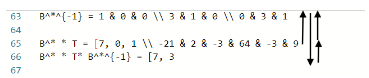
101 Intervistatore: M-hm.

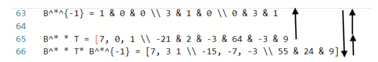
102 Bianca: Poi abbiamo sempre nove, meno tre, uno, quindi questo zero meno sei più tre, fa meno tre. E l'ultimo che fa nove meno tre... Nove e basta.



103 Questa pure adesso dobbiamo fare questa e moltiplicarla per B* alla meno uno. Ok. Quindi abbiamo sette, zero, uno per uno, tre, zero. Fa sette... E basta. Poi abbiamo sette, zero, uno. U... Tre!

Si sposta tra le righe 66 e 63 per calcolare l'ultima matrice prodotto.



104	Intervistatore: Si.	
105	Bianca: sette, zero, uno, uno. Poi ultima riga... seconda, meno ventuno, due e meno tre. Meno ventuno più sei che fa meno quindici. Poi meno ventuno, due meno tre. Due meno sette. ventuno, due, meno tre. Meno tre. L'ultima che era sessantaquattro, meno tre, nove. Sessantaquattro meno nove che fa cinquantacinque. E poi abbiamo meno tre più ventisette che fa ventiquattro. E sessantaquattro, meno tre, nove che è nove.	Termina il calcolo della matrice prodotto analogamente a prima. 
106	OK, no spiegami un secondo una cosa, cioè allora logicamente mi torna che da un punto di vista logico mi torna il come abbiamo calcolato l'inversa nel secondo modo, cioè perché io ho la mia applicazione lineare; quindi, la moltiplico prima per la base di partenza, poi per quella di arrivo, e cioè mi torna che, cioè, mi torna il fatto che abbiamo calcolato l'inversa in quel modo lì. Ma non capivo cos'è che hai indicato con A_{ij} in quel...	
107	Intervistatore: Cioè A_{ij} sarebbe, cioè ad esempio l'elemento di posto 1 1 della matrice dei complementi algebrici ha segno positivo ed è il determinante della matrice ottenuta da A togliendo la prima riga e la prima colonna, cioè la parte in basso a destra.	
108	Bianca: Ah, OK, OK, e questo? Cioè, c'era una dimostrazione, nel senso.	
109	Intervistatore: Sì, sì, sì, sì, sì.	

110	Bianca: Ok, però sì, quell'altra è la più intuitiva, perché tu dici vabbè, basta che inverto la base, OK?
111	Intervistatore: Esatto, potrebbe essere un metodo che non si vede in tutte le facoltà.
112	Bianca: Ok. Io, secondo me, la facevo non con la cosa dei complementi algebrici, la facevo come l'abbiamo fatta nel secondo modo, cioè trasponendo, poi vabbè, cioè in generale questo si poteva fare, adesso però se tu in generale hai una matrice devi calcolare l'inversa mi sa che sì, avevamo quella formula lì, non sapevo che fossero i complementi algebrici, però sì, quelle meno uno alla j+i me lo ricordo, poi non mi ricordavo l'altra cosa.

A.6 Domanda 1

Riga	Cosa viene detto
1	Bianca Okay. Poi.
2	Intervistatore: Ci sono le tue domande, in fondo, che non sono "matematiche".
3	Bianca: OK, però mi è piaciuto, cioè dei ricordi che non avevo più. Allora dov'è che è aspetta... esercizi... Qua. Eccoci. Ah, questo okay, quale strumento hai utilizzato per svolgere gli esercizi proposti? Perché? Ho utilizzato il computer con lo screen Reader Jaws e la barra Braille perché ho sempre utilizzato quello, cioè non mi verrebbe in mente nessun altro strumento per farlo.
4	Intervistatore: Ok.

A.7 Domanda 2

Riga	Cosa viene detto
1	Bianca: E come faresti se non avessi a disposizione lo stesso strumento? Eh probabilmente prenderei... Allora cioè se non avessi il computer, forse allora... No, credo che utilizzerei la dattilobraille con i fogli, che era la nostra macchina da scrivere, perché almeno lì posso segnarmi i numeri, anzi, lì effettivamente, cioè forse… (qua è saltato il collegamento)… per quello che le matrici le mettevo tutte su una riga in modo da poterle vedere almeno tutte contemporaneamente. Diciamo che già oggi ho dovuto usare uno strumento diverso perché appunto WinEdt col fatto che condividevo lo schermo non mi faceva vedere i numeri. E quindi ho dovuto copiare in Notepad, però in realtà, cioè se avessi potuto usare questo editor qua sarei stata molto più veloce perché qua avevo tutti gli shortcut che per esempio c'è anche per fare in modo che poi quello che scrivevo venisse compilato, cioè per esempio se io facevo ctrl alt m mi veniva fuori... Anzi ctrl shift M, mi veniva fuori una matrice direttamente oppure andavo qua su liste direttamente, cioè potevo fare alt, poi facevo i, poi facevo T e direttamente mi faceva inserire la matrice qua e sarei stata molto più veloce. Però c'è comunque, l'importante è avere un posto dove scriversele le matrici, perché altrimenti non sarei riuscita. Ecco.
2	Intervistatore: All'università come facevi?
3	Così col computer.
4	I professori sono sempre stati disponibili?
5	Allora sì, io mi ricordo, allora diciamo così: materie tipo analisi le seguivo, cioè, non dico meglio però in analisi, cioè tu hai delle formule e quindi, cioè non è così difficile scriverle. Nel senso, qua le matrici tante volte se ti perdi un numero ti perdi tutto il resto dell'esercizio.
6	Intervistatore: Sì.
7	Bianca: Quindi sì, io mi ricordo che tutti i tutoraggi di algebra erano abbastanza... Cioè bisognava stare proprio attenti perché altrimenti poi tutti i passaggi dopo li perdevi, però per dire una volta che avevo capito i metodi, cioè io stavo attenta a segnarmi la matrice iniziale, poi i passaggi intermedi me li facevo un po' da sola se il risultato finale mi tornava bene, cioè intanto alla fine gli esercizi di algebra sono tutti abbastanza uguali, cioè una volta che l'eliminazione di Gauss la si sa fare sulla prima, dovresti saperle fare su tutti.
8	Intervistatore: Sì, sì, sì. Sì. Quindi, cioè…

9 Bianca: Oppure, ecco, magari lei diceva la prof diceva per dire, sottraggo la prima riga, la seconda io mi segnavo solo A_2 meno A_3 e poi a casa mi andavo a scrivere i numeri. Però si, cioè sono sempre stati disponibili. Poi il nostro prof di Algebra, cioè di Algebra lineare, dettava tutto quello che scriveva, proprio tutto cioè era molto preciso.

10 Intervistatore: M-hm.

11 Bianca: Quella che ci faceva il tutoraggio molto meno e poi dettava le matrici per colonne. E questa cosa per me è scomoda perché io invece, cioè per scriverle le devo scrivere riga per riga, no? E allora anche lì magari lei l'aveva per colonne io la scrivevo trasposta e mi segnavo che era trasposta, cioè dovevo... ci mettevo un po' a sistemare quello che avevo scritto però si sono stati sempre gentili.

12 Intervistatore: E per quanto riguarda l'esame?

13 Bianca: L'esame è andato bene, io avevo un po' di tempo aggiuntivo, quello sicuramente mi è stato utile perché hai visto anche prima che nella moltiplicazione, cioè non è che non la sapevo fare la formula, però dovevo continuare a andare su e giù per vedere i numeri e quindi in quello un po' di tempo lo perdi.

14 Intervistatore: Certo, immagino.

15 Bianca: Poi vabbè, non erano tutte esercizi così, nel senso che il nostro esame di algebra si vabbè avevi magari il prodotto da fare, l'eliminazione di Gauss però poi avevi da fare anche magari l'esercizio in cui dovevi ragionare di più e fare tipo, che ne so, la distanza punto retta o magari meno conti ma più ragionamenti. Quindi, cioè, fosse stato un esame solo di moltiplicazioni probabilmente non l'avrei ancora finito.

16 Intervistatore: Sì, sì, sì, quello sì. Più che altro, pensi che abbia inciso il fatto che tu abbia frequentato la facoltà di matematica?

17 Bianca: Sì, noi da noi algebra valeva otto crediti, neanche dodici, quindi non tantissimo. Cioè alcune cose. Vabbè adesso ti dico io sono laureata da sei anni. algebra lineare, l'ho fatto al primo anno, quindi erano tipo dieci anni che oggi che non facevo questo cambio di vettori nelle basi, cioè era un po' di tempo che non lo facevo, però certi concetti mi sono rimasti in mente perché aveva fatto proprio tanti esercizi altri vabbè.

18 Intervistatore: M-hm.

19 Bianca: Come le cose che non fai da un po' le devi andare a rivedere, ovviamente, però cioè comunque... Una volta che fai i concetti, poi le cose ti tornano.

20 Intervistatore: Sì, Assolutamente.

21 Bianca: Non le avevo fatte al liceo, so che in alcuni licei si fanno, io non le avevo fatte.

Riga	Cosa viene detto
1	Bianca: Sì, però cioè ti dico se io penso al percorso che ho fatto, cioè algebra lineare è stato un esame sì, in cui vabbè ho fatto un po' fatica, però che mi è piaciuto tanto e che comunque cioè è molto automatico, cioè una volta che hai imparato uno o due cose come si fanno. Cioè rispetto a tanti altri esami in cui per esempio non so fisica o non lo so, calcolo numerico in cui ho fatto più fatica, cioè algebra, è un esame che comunque si faceva facilmente diciamo. Cioè nonostante i problemi cioè i problemi si magari cioè dalla lavagna non la capisci l'eliminazione di gauss però una volta che te la fai spiegare. Basta. Cioè ti trovi il tuo metodo, il mio metodo appunto. Quello che mi ha salvato è stato il condensare il più possibile le matrici, cioè quindi il beginequation e endequation che tu hai scritto io li toglievo, mettevo tutto su una riga e poi basta. Non dovevo neanche fare troppi avanti e indietro per fare le cose.
2	Intervistatore: Sicuramente l'ambiente in cui ti trovi può fare la differenza.
3	Bianca: Allora ci sono stati quelli super gentili, cioè per esempio il prof di analisi addirittura una volta a settimana voleva che io andassi da lui al ricevimento e controllava gli appunti che avevo preso. Quindi vabbè, c'erano quei casi lì. Quello di algebra secondo me era proprio preciso di suo, cioè non è che non era gentile proprio. Comunque in ogni caso qualsiasi studente avesse davanti, le matrici le dettava e quindi cioè si. Su quello sono stata fortunata. C'è per esempio l'altra prof di algebra dell'altro corso che invece non aveva neanche metà della sua precisione. Poi c'è altro, ad esempio l'eliminazione di Gauss me l'ha spiegata una mia compagna, quindi cioè uno deve cercare poi un po' dei metodi alternativi, cose alternative, non lo so.
4	Intervistatore: Certo.
5	Bianca: E poi c'è da dire che sai se appunto fai matematica che comunque già ti interessa, fai la fatica anche di fare le matrici, se invece sei, che ne so a fisica o chimica, che comunque non è che ti interessa più di tanto, ti tocca fare questo esame, capisco che effettivamente... Non sia proprio il massimo.
6	Intervistatore: Lo si vede più come uno scoglio che non come...

7 Bianca: Esatto sì, però c'è per dire, se io devo pensare agli scogli del dell'Università, non è algebra lineare il peggiore. L'esame in cui ho trovato più difficoltà è stato fisica, perché al liceo non l'avevo fatta e quindi al primo anno mi ricordo che seguivo le tre materie, cioè seguivo analisi fisica e algebra lineare e tipo fisica, non capivo proprio per niente, niente, perché al liceo non l'avevo mai fatta. E quindi cioè lì già parlavano di integrali, di cose e io non capivo... Analisi, capivo tutto a lezione e poi magari però gli esercizi erano più complicati e invece algebra a lezione capivo metà e metà, però quando gli esercizi li imparavi eri tranquilla e quindi, cioè, ho avuto questi esami qui, poi algebra e analisi sono andati bene, fisica invece no e l'ho rifatto a settembre. Però in generale sì, a me come corso di studi è piaciuto in realtà, cioè la cosa di cui magari c'è un po', però ti accorgi dopo, cioè nel senso io quando lui non è che mi ponevo troppo il problema. Però se poi tu come lavoro non vai, cioè a fare il dottorato diciamo, magari ti servono cose un po' più pratiche, cioè che ne so, statistica o anche solo per dire OK, facciamo un metodo di interpolazione applichiamolo in Excel oppure scriviamo un codice che lo sappia fare cioè queste cose qua mi sono mancate in ambiente lavorativo dici? Caspita, è l'università e su quello proprio non ho fatto niente. Però si, a me è piaciuto tanto fare matematica.

8 Intervistatore: Certo. Okay, comunque, nella tua esperienza in generale, all'università, hai sempre usato il computer?

9 Bianca: Sì, sì, sì. Io allora non so se hai parlato con altre persone anche... Io ho sempre usato Jaws e la barra Braille. Non ho mai usato la sintesi vocale, ho sempre usato la barra Braille perché in matematica secondo me se usi la sintesi vocale, cioè non ce la puoi fare. Perché cioè, sulla Barra tu puoi decidere quale porzione di testo leggere in quale momento invece la sintesi vocale, i numeri te li legge tutti in fila, cioè tu dovresti memorizzare quello che lei dice mentre lei parla, cioè non mi è proprio mai neanche venuto in mente di usare la sintesi vocale. Il computer lo uso da quando sono in terza elementare, quindi cioè si è stato, diciamo normale utilizzarlo anche dopo. La cosa che io non conoscevo e che invece ho scoperto, cioè quando io ho scelto di andare all'università a fare matematica io non conoscevo ancora il LaTeX perché usavo Lambda, che era un altro programma che è fatto apposta per i non vedenti. Poi quando sono andata all'università, i professori mi hanno detto, guarda, noi scriviamo tutte le nostre dispense in LaTeX e se tu lo imparassi riusciresti a fare gli esami così.

10 Allora io l'ho imparato, cioè poi allora un conto è impararlo, un conto è poi utilizzarlo veramente perché io sapevo anche i comandi così però poi la prima lezione, quando il prof detta e tu devi stare dietro, cioè magari all'inizio fai un po' fatica però dopo un po', cioè dopo che fai tre o quattro lezioni alla fine impari vabbè ma quello credo tutti, cioè ad abbreviare, a scrivere solo l'essenziale. Non lo so scriverti degli asterischi oppure a sistemare la lezione subito appena arrivi a casa così ti ricordi ancora, cioè, tutte queste tattiche qua.

11 Intervistatore: Si diciamo che hai creato delle tue strategie, come il mettere in riga tutte le matrici.

12 Bianca: Esatto sì, o anche, cioè per dire la moltiplicazione oggi boh provavo a farla mente secondo me ai tempi me le scrivevo le cose, cioè comunque mi scrivevo da parte la riga che dovevo usare, avevo delle delle tattiche così per essere più veloce secondo me. E comunque sì la Barra Braille è sempre stata, cioè la barra Braille è appunto da sempre, anche perché cioè pensare è vero che ti ho detto se non avessi il computer userei la dattilobraille? Però, secondo me, allora quello aiuta, perché le matrici, appunto, le puoi scrivere in colonna e avere una visione più complessiva, però dall'altra parte cioè ti ci vorrebbero tipo mille fogli se fai tutti questi esercizi.

13 Intervistatore: Certo, quindi avresti un problema di spazio.

14 Bianca: Cioè sarebbe molto... cioè occupa molto spazio il Braille, dovresti essere comunque veloce a scrivere a cambiare il foglio e a fare cioè non è impossibile, però boh il computer lo preferisco.

Appendice B

Trascrizione dell'intervista ad Ale Micarti

L'intervista si è svolta tramite una videochiamata su Microsoft Teams, durante la quale Ale Micarti ha condiviso il proprio schermo e ha ripreso le sue mani con una webcam. La registrazione della videochiamata è stata trascritta, con la descrizione delle azioni che venivano svolte. Ale Micarti utilizza una barra Braille collegata al computer che gli consente di accedere ai files dell'intervista. Svolge gli esercizi in un file di testo dove può incollare i dati, manipolarli e sfruttarli a suo vantaggio. piega spesso verbalmente ciò che sta eseguendo a schermo.
La registrazione dura circa due ore e trenta minuti ed è stata trascritta quasi interamente (l'intervista si è interrotta per ventidue minuti tra l'esercizio tre e il quattro). Nelle tabelle che seguono non è riportato il timing preciso. Le diverse fasi dell'intervista si sono succedute, approssimativamente, come segue:

- Esercizio 1: Ale Micarti legge l'esercizio utilizzando strumenti assistivi e copia le matrici nel file di lavoro (dal minuto 7:57 al minuto 9:01). Deduce le dimensioni della matrice per prepararsi alle operazioni (dal minuto 9:01 al minuto 11:00). Esegue il prodotto matriciale dopo averne discusso con l'intervistatore (dal minuto 11:00 al minuto 40:07).

- Esercizio 2: Ale Micarti legge il testo dell'esercizio utilizzando strumenti assistivi e copia la matrice nel file di lavoro (dal minuto 40:09 al minuto 41:20). Assegna un nome alla matrice da ridurre (dal minuto 41:20 al minuto 42:15). Modifica la matrice per eseguire la riduzione spostandosi tra i due files (dal minuto 42:15 al minuto 46:01).

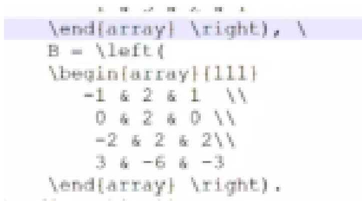
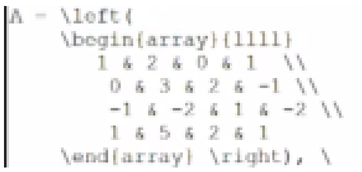
- Esercizio 3: Ale Micarti legge il testo dell'esercizio e copia la prima matrice di cui calcolare il determinante nel file di testo (dal minuto 46:01 al minuto 47:05). Calcolo del determinante (dal minuto 47:05 al minuto 49:01). Ale Micarti copia la seconda matrice e la legge (dal minuto 49:01 al minuto 51:02). Discute delle sue proprietà con l'intervistatore e conclude l'esercizio (dal minuto 51:02 al minuto 56:56).

- Esercizio 4: Ale Micarti legge l'esercizio e copia i dati nell'editor di testo (dal minuto 1:18:56 al minuto 1:20:03). Scrive le matrici "modificate" e ne calcola il determinante per terminare l'esercizio (dal minuto 1:20:03 al minuto 1:38:38).

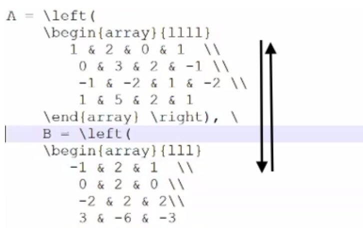
- Esercizio 5: Ale Micarti legge il testo dell'esercizio e copia la matrice M (dal minuto 1:38:38 al minuto 1:40:01). Discute con l'intervistatore sul procedimento per risolvere l'esercizio (dal minuto 1:40:01 al minuto 1:51:03). Calcola le combinazioni lineari e risolve i sistemi che ne derivano (dal minuto 1:51:03 al minuto 1:59:23). Calcola l'ultimo prodotto matriciale (dal minuto 1:59:23 al minuto 2:09:33).

- Domande 1 & 2: Risponde alla prima domanda e la integra ad altre informazioni (dal minuto 2:09:33 al minuto 2:22:22). Risponde alla seconda domanda (dal minuto 2:22:22 al minuto 2:27:13).

B.1 Esercizio 1

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Ale Micarti: Ok esercizio uno abbiamo una matrice, va bene.	Scorre con il cursore fino alla fine della prima matrice.
2	Quindi la matrice è quattro per quattro. OK, no, anzi no.	Scorre fino alla riga in cui inizia la seconda matrice dell'esercizio.
3	Abbiamo due matrici, però in questa seconda matrice io preferisco allinearmela sotto, così la ritrovo più facilmente.	Manda a capo l'inizio della seconda matrice.  \end{array} \right), \ B = \left(\begin{array}{lll} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2\\ 3 & -6 & -3 \end{array} \right).
4	E lo stesso per. . .	
5	Questa matrice. Io commento intanto così almeno devo essere più chiaro in quello che faccio.	Manda a capo anche l'inizio della prima matrice.  A = \left(\begin{array}{llll} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 \end{array} \right), \
6	Ok, me la allineo così la trovo più facilmente.	Scorre nel file fino alla fine del testo del primo esercizio.
7	Cosa mi chiede? Calcolare A per B, calcolare A per B. Perfetto, A per B.	Legge l'ultima riga del testo dell'esercizio e scorre fino all'inizio dell'esercizio dopo per non perdere parti della domanda.
8	OK, iniziamo a farci tutti questi calcolini.	Scorre nel testo fino all'inizio dell'esercizio.
9	Mi apro un documento a parte così sono un po' più comodo, penso almeno.	Apre un nuovo file di testo.
10	Beh, direi che mi apro anche un template uso questo come template, però vabbè. . .	Copia la prima matrice dal file degli esercizi e la incolla nel nuovo file aperto, per utilizzarla come template.
11	Avrei usato anche (parola che non ho capito) ma va bene anche così però vediamo perché. . .	Torna al file degli esercizi.

12	Aspetta questa matrice è quattro per quattro? Uno, due tre, quattro.	Conta nel file degli esercizi quanti elementi abbia la prima riga della prima matrice facendo scorrere le dita sul display Braille.
13	Uno, due, tre, quattro.	Scorre fino all'ultima riga della matrice A per accertarsi del numero di righe.
14	Anche questa è quattro per quattro. . .	Legge la prima riga della seconda matrice facendo scorrere le dita sul display Braille.
15	No, è quattro per tre.	Scorre fino all'ultima riga della matrice B.
16		Torna a leggere la prima riga della seconda matrice per avere conferma di quanto affermato.
17		Scorre con il cursore nuovamente tutta la prima matrice.
18	Quindi faccio il prodotto righe per colonne quindi...	Scorre nel file fino alla prima riga della matrice B.
19	Uno allora vediamo. Uno per meno uno. . .	Si sposta dalla prima riga di B alla prima riga di A per fare il prodotto.



```
A = \left(
    \begin{array}{llll}
       1 & 2 & 0 & 1  \\
        0 & 3 & 2 & -1 \\
        -1 & -2 & 1 & -2 \\
        1 & 5 & 2 & 1
    \end{array} \right), \
    B = \left(
    \begin{array}{lll}
       -1 & 2 & 1  \\
        0 & 2 & 0 \\
        -2 & 2 & 2\\
        3 & -6 & -3
```

20	Poi c'è uno zero. Sì, esatto.	Legge il secondo elemento della prima colonna di B per proseguire nel calcolo.
21	Qui c'è uno zero.	Si sposta ancora tra le righe delle due matrici.
22	E l'ultimo è un uno e tre.	Legge ora gli ultimi elementi necessari ad ultimare il calcolo del primo elemento della matrice prodotto, spostandosi su e giù nel file degli esercizi.
23	Quindi sì, abbiamo uno, zero, zero, tre.	Scorre nuovamente nel file tra le due matrici per confermare il calcolo fatto in precedenza.

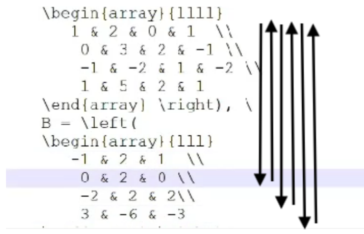
24	Uno, zero, zero, tre.	Apre il file dove ha copiato e incollato la matrice A e sostituisce alla prima riga gli elementi calcolati.
25	Non è che mi ricordi troppo bene il prodotto righe per colonne, sono passati venticinque anni...	Torna al file degli esercizi e scorre lungo la matrice A per accertarsi del calcolo svolto.
26	Uno, due, tre, quattro per la prima colonna.	Scorre nel file per leggere la prima colonna della matrice B.
27	Ho un dubbio...	Torna al file degli esercizi e scorre tra le righe del file per rileggere le due matrici, tra le quali è richiesto di calcolare il prodotto.
28	No, non mi torna una cosa. Dunque, la prima matrice è quattro righe per quattro colonne e la seconda è quattro righe per tre colonne, sì, per tre colonne.	Si sposta nuovamente nel file per verificare le dimensioni delle due matrici.
29	Intervistatore: Se hai qualche dubbio sull'algoritmo puoi chiedermi senza problemi perché esula dalle finalità dell'intervista.	
30	Ale Micarti: Sì sull'algoritmo nel senso sul prodotto, cioè la matrice che ottengo dovrebbe essere, cioè io faccio allora se faccio la prima riga per la prima colonna.	Si sposta dalla prima riga di A alla prima colonna di B per rendere evidente quello che sta per chiedere.
31	La seconda riga per la seconda colonna, la terza riga per la terza colonna. Però non mi torna una dimensione della matrice finale, quindi forse l'algoritmo era diverso.	Scorre nel file degli esercizi spostandosi tra le due matrici.
32	Intervistatore: Allora praticamente devi moltiplicare, esattamente come hai detto, la prima riga della prima per la prima colonna della seconda, la prima colonna della seconda e da lì ottieni una combinazione lineare che ti dà il primo elemento della matrice prodotto, ovvero l'elemento di posto (1,1).	

33 Ale Micarti: Ok, quindi la prima riga per la prima colonna ti dà l'elemento di posto (1,1), cioè quindi la prima riga uno, due, zero, uno per meno uno, meno uno.

Si sposta dalla prima riga di A alla prima riga di B.

34 Più zero, più zero e più tre.

Si sposta nuovamente lungo le matrici per eseguire il calcolo desiderato.

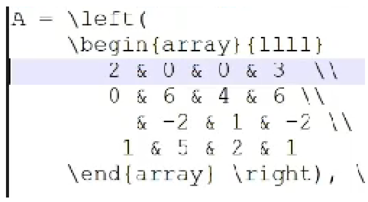


35 Quindi meno uno più tre fa due.

36 Intervistatore: Esatto!

37 Ale Micarti: Sì, è vero, questo diventa due.

Torna al file dove ha copiato e incollato la matrice A e sostituisce all'elemento di posto (1,1) due.



38 Seconda riga, per la prima colonna della matrice a questo punto mi dà l'(elemento di posto) (1,2)?

Torna nel file degli esercizi e legge la seconda riga della matrice A.

39 Intervistatore: No, la seconda riga per la prima colonna ti dà l'elemento di posto (2,1).

40 Ale Micarti: (2,1) sì, sì, (2,1). La riga (2,1).

Legge la seconda riga della matrice A facendo scorrere le dita sul display Braille.

41 OK, due. Questo è zero, perfetto zero. I primi due sono zeri. Esatto, i primi due sono zeri. Dopo meno due e tre, per meno uno, per due, per meno due.

Si sposta tra le righe del file per leggere gli elementi della seconda riga di A e della prima colonna di B.

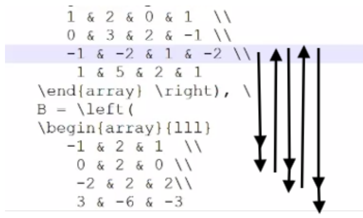
42	Ok, quindi due allora... Due per meno due fa meno quattro meno uno per meno tre fa meno sei.	
43		Si sposta nuovamente tra le righe del file degli esercizi per verificare il calcolo eseguito.
44	Meno quattro meno sei, quindi fa meno dieci.	Sostituisce alla matrice dove sta man mano completando la matrice prodotto l'elemento di posto (2,1).
45	(2,1), quindi seconda riga sì, esatto, seconda riga meno dieci.	
46	Adesso terza riga meno uno, meno due, uno, meno due.	Torna al file degli esercizi e legge la terza riga della matrice A.
47	Meno uno, uno, meno uno e più uno. Più uno, meno due, zero, zero. Più uno... Uno meno due quindi più uno meno due fa meno uno. Poi tre per meno due fa meno sei.	Si muove lungo le righe del file degli esercizi tra la terza riga della matrice A e la prima colonna di B per calcolare l'elemento di posto (3,1).
48	Quindi uno meno sei, meno cinque.	Torna al file dove compare la matrice prodotto e la compila con il nuovo elemento trovato.
49	Poi l'ultimo elemento era ultima riga, quindi l'ultima riga è questa uno, cinque due uno.	Legge l'ultima riga della matrice A dal file degli esercizi.
50	Meno uno, meno quattro, quindi fa meno cinque. Poi uno con tre, quindi meno cinque... Sì meno uno, meno quattro e poi più tre, quindi meno due.	Si muove nel file spostandosi volta per volta dall'ultima riga di A alla prima colonna di B.
51	Abbiamo meno due.	Sostituisce nella matrice prodotto, dopo aver cambiato file, il valore trovato.

52	Cancello la seconda…	Cancella l'elemento si posto (1,2) dalla matrice prodotto e torna al file degli esercizi.

```
A = \left(
   \begin{array}{llll}
      2 &  & 0 & 3  \\
      -10 & 6 & 4 & 6 \\
      -5  & -2 & 1 & -2 \\
      -2  & 5 & 2 & 1
   \end{array} \right), \
```

53	Allora prima riga per seconda colonna. Uno, due, zero, uno. Quindi due più quattro sei… Questo è zero, quindi sei più zero.	Si sposta nel file degli esercizi dalla prima riga di A alla matrice B e viceversa per leggerne la seconda colonna ed eseguire il calcolo.
54	Allora quindi seconda riga è zero, tre, due, meno uno. Zero più sei più quattro dieci, meno uno per meno sei… Più sedici dovrebbe essere.	Si sposta nel file degli esercizi dalla seconda riga di A alla matrice B e viceversa per leggerne la seconda colonna ed eseguire il calcolo.
55	Facciamo un controllo: uno e zero è chiaro che sia zero, tre, due, uno, quindi facciamo un controllo… Tre per due sei, quattro, meno uno per meno sei viene sei, quindi sedici.	Si sposta nel file degli esercizi per verificare la correttezza del calcolo eseguito.
56	Ok.	Torna al file dove sta calcolando la matrice prodotto, sostituisce il valore trovato e cancella l'elemento di posto (3,2).
57	Abbiamo, abbiamo detto… Dunque, no, un attimo. Dunque, ho sbagliato una cosa, allora la seconda riga, per la prima... Questa l'ho fatta per la seconda colonna. Quindi sì, dovrei fare la seconda riga prima per la prima colonna che è l'elemento (1,2)?	Scorre tra le righe del file degli esercizi.
58	Intervistatore: Adesso stai facendo la seconda colonna della matrice prodotto e dovresti ora calcolare l'elemento di posto (3,2), quindi la terza riga per la seconda colonna devi fare.	

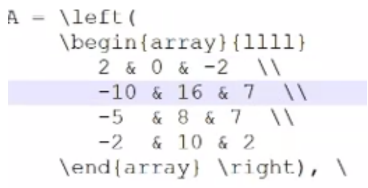
59	Ale Micarti: La terza riga… un attimo…	Legge la terza riga della matrice A.
60	Devo essere sicuro di essere in (3,2) però… Sì, (3,2) ok!	Scorre nel file della matrice prodotto fino alla terza riga che legge facendo scorrere le dita sul display Braille.
61	(3,2) sì. La terza riga sì, sì ok, sì, (3,2) ok, giusto la terza riga per la seconda colonna, quindi abbiamo meno uno, meno due, uno, meno due. Meno uno, meno due per… Diventa meno due per… Sì, meno due meno quattro fa meno sei, più due, allora meno quattro. Più due per meno sei, quindi viene meno quattro più sei.	Si sposta nel file degli esercizi tra la terza riga di A e la seconda colonna di B.



62	Rifaccio un controllo meno uno, meno due; quindi, terza riga… Meno uno per due fa meno due, due per meno due fa meno quattro, quindi sei. Meno due per uno… Poi meno due per meno sei fa più dodici. Quindi otto.	Si sposta nel file degli esercizi tra la terza riga di A e la seconda colonna di B per verificare il calcolo eseguito.
63	Sì, otto.	Torna al file della matrice prodotto e sostituisce il valore trovato nel posto (3,2).
64	Poi abbiamo l'ultima riga che è la quattro: uno, cinque, due, uno. Quindi diventa uno, quindi due. Due più dieci che fa dodici. Dodici più quattro fa sedici. Sedici meno sei è dieci.	Si sposta nel file degli esercizi con il cursore dalla quarta riga della matrice A alla matrice B per leggerne la seconda colonna e viceversa.
65	Dieci. Poi abbiamo il terzo e quindi mi metto in (1,3).	Sostituisce il valore trovato nella matrice prodotto ed elimina l'elemento di posto (1,3) per poi andare a calcolarselo.
66	La prima riga era uno, due, zero, uno. Uno… Uno, due, zero, uno. Quindi uno per uno uno, più zero, più zero e meno tre. Quindi uno meno tre direi meno due.	Scorre nel file degli esercizi tra la prima riga della matrice A e la terza colonna di B.

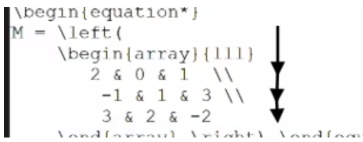
67	Devo soltanto controllare qui che sia effettivamente giusto. Ok, sì.	Scorre nuovamente nel file con il cursore, leggendo gli elementi desiderati, per verificare il calcolo svolto.
68	Meno due, poi.	Scrive nel file della matrice prodotto il valore trovato e cancella l'elemento di posto (2,3).
69	Seconda riga per terza colonna, quindi seconda riga... Zero, tre, due, meno uno. Zero, zero, due per due quattro, meno uno per meno tre è tre. Sette.	Scorre nel file degli esercizi tra la seconda riga della matrice A (che legge) e la terza colonna di B.
70	Sette.	Scrive il valore trovato nella matrice prodotto e cancella l'elemento di posto (3,3).
71	A questo punto direi di salire con l'ultima colonna.	
72		Scorre con il cursore il file degli esercizi e rilegge la prima matrice.
73	Quindi meno uno, più due, meno due, uno, sì. Quindi meno uno più due fa uno, l'ultima è meno due più uno... Dovrebbe essere uno.	Si sposta tra le righe della prima matrice, soffermandosi sulla terza.
74	Controllo per sicurezza... La terza colonna... No infatti, uno, zero, due, meno tre.	Legge la terza colonna della matrice B.
75	la colonna... sì. Quindi sono in (3,3).	Scorre nel file della matrice prodotto per capire in quale punto dell'algoritmo si trovi.
76	Quindi la terza riga con la terza colonna ah sì che è questa qua. La terza colonna è uno, zero, due, meno tre. Quindi sarebbe meno uno più zero e meno tre. Meno uno più zero... Meno tre per meno due fa meno sei, quindi sette.	Scorre nel file degli esercizi per svolgere il calcolo desiderato, spostandosi dalla terza riga alla matrice B e viceversa.
77		Sostituisce il valore trovato nella posizione (3,3) e cancella l'elemento di posto (4,3).

78	Poi abbiamo la quarta riga uno, cinque, due, uno, con la terza colonna. Uno, due, quattro, dunque… Quattro, cinque, due e uno. Quindi meno tre. Quindi due. Dovrebbe essere giusto… Uno più quattro fa cinque, meno sei più cinque e poi uno per meno tre, meno sei più cinque uno per meno tre fa meno tre.	Scorre tra le righe del file dell'esercizio per calcolare il valore cercato più volte per sincerarsi della correttezza.
79	Cinque meno tre due, quindi due.	Scrive il valore trovato nel file della matrice prodotto.
80	Quindi a questo punto io cancellerei l'ultima colonna in questa matrice, sì, okay.	Cancella l'ultima colonna della matrice prodotto (essendo di troppo).
81	Sì, esatto, sì. Sono tre? Sì, sono tre? Sì.	Verifica, scorrendo con il cursore lungo la matrice prodotto, la correttezza della dimensione.



```
A = \left(
    \begin{array}{llll}
      2 & 0 & -2  \\
      -10 & 16 & 7  \\
      -5  & 8 & 7  \\
      -2  & 10 & 2
    \end{array} \right), \
```

B.2 Esercizio 2

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Ale Micarti: Allora andiamo a vedere il secondo esercizio. Ridurre la matrice seguente che immagino sia sotto.	Manda a capo la riga di “intestazione” della matrice M.
2	Allora ridurre questa matrice due, zero, uno; meno uno, uno, tre; tre, due, meno due.	Legge, scorrendo con il cursore, la matrice da ridurre.
3	Ridurre se non ricordo male vuol dire che devo ottenere una matrice triangolare.	Seleziona le tre righe della matrice M.
4	Facendo combinazioni lineari diciamo delle varie... Delle righe, quindi prima devo avere, nella seconda devo avere zero, seguito da non necessariamente zeri, nella terza zero, zero seguito da un numero diverso a zero. Mi sembra di ricordare questo.	Scorre lungo le righe della matrice soffermandosi prima sulla seconda e poi sulla terza riga. 
5	Intervistatore: Esatto.	
6	Ale Micarti: Ok, mi prendo la matrice e...	Copia tutta la matrice M.
7	A questo punto vabbè poi non so... se vabbè adesso non sto, cioè... Io normalmente se dovessi farlo diciamo per me, poi magari gli darei un nome, nel senso lo chiamerei anziché M non lo so, M con t per esempio o M ridotta, insomma qualcosa del genere per distinguerla sì.	Incolla la matrice nel file dove sta svolgendo gli esercizi.

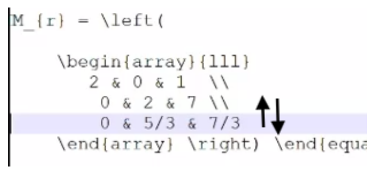
<table>
<tr><td>8</td><td>No, sì, son qui, cioè nella, nella, diciamo così nel foglio in cui mi stavo annotando. Magari la chiamerei, non lo so, M con R qualcosa di questo genere per distinguerla da quella di prima.</td><td>Assegna alla matrice il nome M_r.
<pre>
M_r = \left(

    \begin{array}{lll}
      2 & 0 & 1 \\
       -1 & 1 & 3 \\
       3 & 2 & -2
    \end{array} \right) \end{equation*} e indic
</pre></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Con le parentesi forse mi trovo meglio, così potrei proprio mettere… ridotto o qualcos'altro.</td><td>Cambia il nome della matrice da M_r allo stesso con le parentesi graffe intorno alla r minuscola.</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Vediamo meno uno, uno, tre, quindi questo meno uno deve diventare uno zero. Non so moltiplico per due e sottraggo dalla prima e sommo algebrica per la prima per esempio.</td><td>Legge la seconda riga della matrice da ridurre.</td></tr>
<tr><td>11</td><td>Quindi qui diventerebbe zero, qui diventerebbe due e sei…</td><td>Sostituisce alla seconda riga, quella modificata e calcolata per la riduzione.
<pre>
M_{r} = \left(

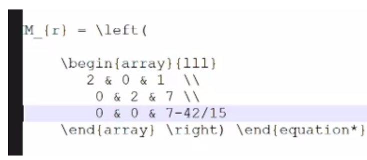
    \begin{array}{lll}
       2 & 0 & 1 \\
        0 & 2 & 6 \\
        3 & 2 & -2
    \end{array} \right) \end{equa
</pre></td></tr>
<tr><td>12</td><td>Sottraggo dalla prima zero più due rimane due e uno più sei rimane sette.</td><td>Completa la riduzione della seconda riga di M, spostandosi tra le prime due righe.
<pre>
M_{r} = \left(

    \begin{array}{lll}
       2 & 0 & 1 \\
        0 & 2 & 7 \\
        3 & 2 & -2
    \end{array} \right) \end{equati
</pre></td></tr>
<tr><td>13</td><td>Tre, due, meno due. A questo punto tre, due, meno due… Vediamo un po'.</td><td>Legge la terza e la prima riga della matrice M, spostandosi tra le due con il cursore.</td></tr>
<tr><td>14</td><td>Tre, due, meno due…</td><td>Torna al file degli esercizi e legge la matrice del testo.</td></tr>
<tr><td>15</td><td>Devo ottenere uno zero nella seconda. Quindi per ottenere uno zero nella seconda…</td><td>Scorre tra le righe della matrice del testo.</td></tr>
</table>

16	Allora intanto cerco di ottenere uno zero nel primo... In (3,1).	Torna al file dove sta svolgendo gli esercizi.
17	Potrei... Non so se sia la strada più comoda.	Torna al file degli esercizi e scorre tra le righe della matrice M.
18	Però ad esempio, se io moltiplico... Se moltiplico la terza riga per un terzo e la sommo con la seconda potrei ottenerlo (lo zero).	Continua a scorrere tra le righe di M.
19	Quindi un terzo per tre diventa uno meno uno zero, un terzo per due diventa due terzi che più uno fa cinque terzi.	
20	Zero, cinque terzi.	Torna al file dove sta svolgendo gli esercizi e sostituisce i valori calcolati.
21	E poi ho meno due terzi. Quindi nove terzi meno due terzi fa sette terzi.	Torna al file degli esercizi e calcola l'ultimo valore cercato.
22		Inserisce nel file dove sta svolgendo gli esercizi il valore mancante.
23	Adesso devo ottenere uno zero al posto di questo cinque terzi.	Scorre lungo la matrice ridotta.
24	Sì.	Si sposta tra le ultime due righe.

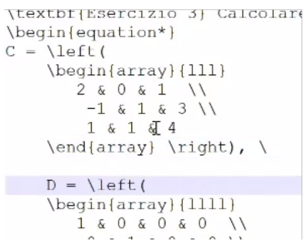


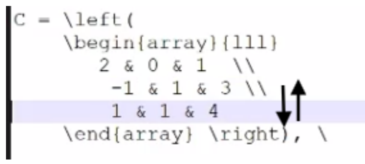
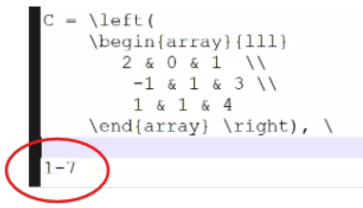
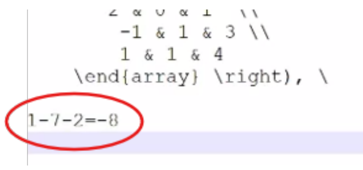
25	Allora se io moltiplico per meno sei quinti (la terza riga) e sommo quello si ottiene... Questo diventa zero. Meno sei quinti per sette terzi viene meno quarantadue quindicesimi a cui devo sommare sette...	Sostituisce man mano i valori trovati lasciando indicata l'ultima operazione da fare.

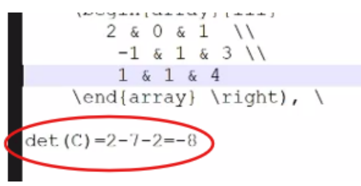


26	Rimane sessantatré quindicesimi. Ok. Questo è concluso.	Sostituisce l'ultimo valore calcolato.

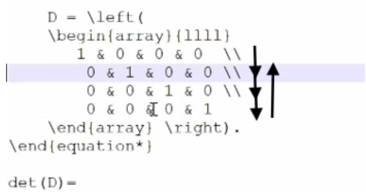
B.3 Esercizio 3

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Ale Micarti: Esercizio tre.	Apre il file degli esercizi e legge la consegna del terzo esercizio.
2		Scorre con il cursore fino alla fine dell'esercizio per leggerne il testo.
3	Allora non ho capito cosa devo fare in questo.	Torna alla prima riga dell'esercizio.
4	Allora ah, calcolare il determinante e quando esiste l'inversa delle seguenti matrici.	Legge, facendo scorrere le dita sul display Braille, la prima riga dell'esercizio.
5	Ok, allora la matrice è questa qua. Allora io la mando a capo perché poi scorrendo col dito trovo subito il nome della matrice con cui su cui sto lavorando.	Manda a capo intestazione della prima matrice e la copia.
6	Ecco, questo volevo chiarirlo perché magari non è poi così evidente dal movimento sulla barra Braille.	Fa lo stesso con la seconda matrice.
		
7	Okay, allora mi sposto di qui, ho questa matrice.	Incolla la prima matrice, ovvero la matrice C, nel file dove sta svolgendo gli esercizi.
8	Anche qui darei un nome eccetera eccetera. Adesso magari non sto a dargli il nome, a fare tutto, cioè tutto quello che farei completamente nel senso che può servire nel senso, perché anche qui darei un nome, cioè, copierei tutta la matrice e poi intendo copierei fondamentalmente tutta la matrice di partenza che è la C.	Cancella tutta la parte di intestazione della matrice C, nome compreso, lasciando solo le righe della stessa.

9	La copierei nell'altro.	Torna al file degli esercizi e seleziona nuovamente tutta la matrice C.
10	In quello in cui sto lavorando. E poi qui, vabbè, ma quindi devo solo fare il calcolo del determinante, quindi no, non c'è problema.	Incolla nuovamente la matrice nel file dove sta svolgendo gli esercizi e scorrendo tra le righe di questa verifica di averla copiata tutta.
11	Ok, determinante. Allora è una matrice tre per tre, quindi quello lì è pari, quindi sì, ok. Quindi quattro per uno meno tre per uno fa... Quattro per uno meno tre per uno, direi che fa uno.	Si sposta tra le righe della matrice per calcolare il determinante della prima sottomatrice.
		
12	Vabbè, l'altro zero, questo è zero. Quindi diventa due per quattro, due per quattro.	Si sposta tra le righe della matrice.
13	Sì, sì, sì, due per quattro fa otto meno uno sette, però in questo caso, dunque meno 7.	Qualche riga sotto la matrice scrive una traccia del calcolo che sta eseguendo
		
14	Sette, questo è pari quindi... Meno uno per uno fa meno uno, meno uno fa meno due.	Si sposta tra le righe della matrice per calcolare il determinante di un'altra sottomatrice e aggiunge quanto trovato alla riga dove sta tenendo traccia dei calcoli svolti.
15	Quindi il determinante fa meno otto.	Scrive il risultato della somma.
		

16	Ho solo un dubbio sulla... No però ok, questo è meno due davvero.	Ricontrolla il calcolo svolto, scorrendo tra le righe della matrice.
17	Determinante di C uguale a tutto questo.	Scrive all'inizio della riga dove ha svvolto il calcolo "det(C)".
18	Ricontrollo...	
19	Intervistatore: Hai sviluppato rispetto alla prima riga?	
20	Ale Micarti: Allora io sono partito dalla prima riga. Ho considerato la sottomatrice non mi ricordo, aveva anche un nome forse. La sottomatrice costituita da uno, tre e uno, quattro.	Segue con il cursore quello che sta spiegando a voce, scorrendo con il cursore tra le righe per far comprendere a cosa si sta riferendo.
21	Quindi ho escluso la prima riga e la prima colonna. Quindi se non ricordo male era meno uno elevato alla i più j, quindi in questo caso (elevato) alla due.	
22	Intervistatore: Sì, esatto, quindi il segno è positivo.	
23	Ale Micarti: Esatto, sì per il determinante di questa sottomatrice, che è uno.	Scorre tra le ultime due righe della matrice per calcolare il determinante della prima sottomatrice.
24	Intervistatore: Che in questo caso moltiplica due.	
25	Ale Micarti: Ok, allora avevo dimenticato che c'era anche da moltiplicare due, perfetto.	Aggiusta il calcolo svolto sulla base di quanto osservato. 
26	Allora l'altro è zero, quindi molto meglio dovevo saperlo prima, così non l'avrei fatto.	Continua nella correzione del calcolo svolto.

27	L'ultimo era giusto perché è moltiplicato per uno, quindi resta meno due. E quindi siamo qui, a questo punto è zero il determinante.	Svolge il calcolo, modificando quanto scritto in precedenza.
28	Quindi se è zero questa matrice non è invertibile.	
29	Passiamo alla prossima matrice che sarà invertibile perché sennò che gusto c'è?	Copia dal file degli esercizi la seconda matrice.
30	Ok andiamo su questo... Determinante di D.	Incolla nel file dove sta svolgendo gli esercizi la seconda matrice e dopo qualche riga scrive "det(D) = ?".
31	Questa è una matrice più grandina. Però ci sono tanti zeri meravigliosi.	Scorre tra le righe della matrice.
32	Allora in realtà questo si riconduce direi al determinante di tutta questa sottomatrice qui...	Scorre tra le righe della sottomatrice per calcolarne il determinante.



33	È una matrice diagonale, sì.	Scorre tra le righe della matrice D per sincerarsi della considerazione fatta.
34	Zero, zero, zero, uno. Zero, zero, uno, zero. Zero, uno, zero, zero. E uno, zero, zero, zero.	Sposta il cursore dall'ultima riga della matrice alla prima soffermandosi anche su quelle intermedie.
35	Di questa il determinante...	Scorre nuovamente tra le righe della matrice.
36	Allora è una matrice con tutti uno sulla diagonale principale. Mi sembra di ricordare che il determinante fosse uno, però non sono sicuro.	
37	Intervistatore: Sì è uno.	

38	Ale Micarti: Stavo verificando quello, cioè stavo facendo la controprova di quello.	Continua a scorrere con il cursore lungo tutte le righe di D e scrive il valore trovato accanto a "det(D) = ?".
39	Quindi se (il determinante) è uno, (la matrice) è invertibile. Mi sembra di ricordare che A per la sua inversa, deve dare... Deve dare questa matrice. Quindi la matrice d'identità per la sua inversa deve dare la matrice d'identità.	
40	Vabbè allora se dovessi calcolarla dovrei fare la matrice, dovrei calcolare i determinanti... No, dovrei calcolare il complemento algebrico e poi la matrice trasposta e poi dovrei dividere per il determinate della matrice di partenza che trova uno però è uno.	
41	A questo punto la matrice inversa dovrebbe essere con l'uno sull'altra diagonale, se non ricordo male. Sto cercando di capire se sia vero, beh allora basta verificarlo così.	Dopo aver fatto scorrere nuovamente il cursore lungo tutte le righe della matrice D, la copia.
42	D alla meno uno. Questa è quattro per quattro, quindi.	Incolla sotto la matrice D e dopo aver scritto D^{-1} la modifica.

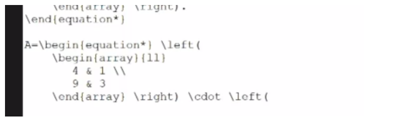
43	Non sono così sicuro, ma in caso la calcolo.	
44	Direi che non è così, no, non è così.	Scorre nel file fino alla matrice D per vedere se la matrice ipotizzata sia davvero l'inversa di D.
45	Ah ma è la stessa l'inversa. Avevo il dubbio che fosse o questo o l'altro caso. Però l'altro caso non era su questa cosa.	Cancella la matrice che aveva indicato con D^{-1}.

46	Ok, allora devo un secondo fare una telefonata che mi hanno appena chiamato per una questione un po' urgente. Posso tornare un secondo fra poco, appena ho risolto. Allora arrivo subito.	

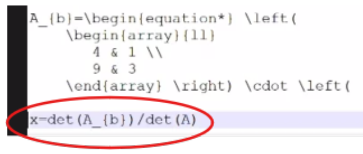
B.4 Esercizio 4

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Ale Micarti: Eccomi, siamo già all'esercizio quattro, giusto? Era questo.	Torna al file degli esercizi e legge l'esercizio 4.
2	Ok, risolvere il seguente sistema di Cramer. Bello!	
3	Vediamo se mi ricordo il sistema di Cramer, qualcosa mi dovrei ricordare. Allora intanto me lo copio tutto (e lo incollo) dall'altra parte così devo fare delle modifiche allora.	Copia tutto il testo dell'esercizio.
4	Ok allora.	Incolla il testo nel file dove sta svolgendo gli esercizi.
5	Devo innanzitutto capire se il determinante della matrice A è diverso da zero per capire se ha soluzioni. Mi sembra di ricordare questo. Questa è una matrice due per due. Tre per due più uno direi che è sicuramente positiva, quindi la soluzione c'è.	Scorre tra le due righe della matrice su e giù per capirne la dimensione e calcolarne il determinante.
6	Poi inizio. Allora per trovare la soluzione della X allora mi sembra che dovessi sostituire (il vettore) quattro, nove in questo caso alla prima colonna della matrice.	Scorre nel file per leggere tutti i dati dell'esercizio.
7	E poi fare.... Allora cosa devo fare? Devo fare il determinante di quella matrice diviso il determinante di A mi sembra, della matrice di partenza è così?	
8	Intervistatore: Confermo.	
9	Ale Micarti: Ok, allora copiamoci questa matrice.	Copia la matrice.

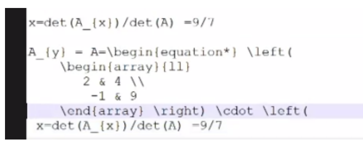
10	Questa matrice me la porto sotto così adesso la inizio a modificare quindi devo sostituire quattro, nove con il primo diciamo qua. Gli do anche un nome così almeno mi è un po' più facile poi. Quindi questa la chiamo... Non la chiamo A perché sarà casomai l'altra.	Incolla la matrice sotto e sostituisce al posto della prima colonna il vettore (4,9).



11	Mi piaceva di più darle un nome all'altra, perché così almeno questa la chiamiamo... Non lo so, non so come chiamarla.	Sale fino alla matrice dell'esercizio e le assegna il nome A. Scende poi con il cursore fino alla matrice modificata.
12	A con b, il vettore che ho sostituito. Più che altro perché così se ho dei nomi, do dei nomi agli oggetti su cui lavoro sono più facili da identificare.	Assegna un nome alla matrice modificata.
13	Quindi X sarà uguale al determinante di A con b diviso il determinante di A.	Scrive la formula per trovare la prima incognita subito sotto la matrice modificata.



14	Quindi sarà uguale a determinante di A con b che è quattro, dodici meno nove, quindi tre. Diviso determinante di A...	Esplicita la formula scritta spostandosi tra le righe della matrice modificata per calcolarne il determinante.
15	È qui A?	Si sposta con il cursore nel file dove sta svolgendo gli esercizi per ritrovare la matrice dell'esercizio 4.
16	Ah è questa! Quindi il determinante è tre... Sei meno... Più uno. Quindi sette.	Scorre tra le righe della matrice A.
17	Quindi questo è nove settimi.	Scrive il valore trovato di x.



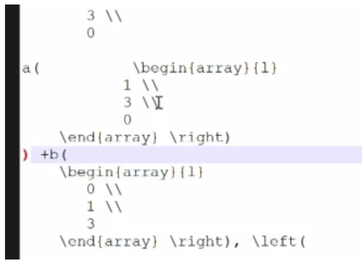
18	E poi la y è... A questo punto il determinate di A con B ce l'abbiamo già... Ah no, non ce l'abbiamo. No per niente.	Scorre nel file fino alla matrice modificata.
19	Facciamo che questo qua non lo chiamo più A con B ma lo chiamo A con X.	Modifica il nome della matrice modificata per dare un senso alla modifica effettuata.
20	Devo sostituire quattro, nove alla seconda colonna. Che è... In questo caso la seconda colonna è... Me la porto sotto anche questa per comodità. Quindi diventa A con y, diventerà questa matrice in cui sostituisco quattro, nove a questa colonna.	Copia la matrice A e la incolla sotto assegnandole il nome A_y e sostituisce alla seconda colonna il vettore (4,9).
21	Quindi y uguale a questo punto...	Copia il calcolo di x e lo incolla sotto la seconda matrice modificata.
22	Quindi y uguale a determinante di A con y fratto il determinante di A.	Modifica la formula per trovare la x.
23	Quindi il determinante di A con y è diciotto più quattro.	Scorre su e giù con il cursore tra le righe di A_y per calcolarne il determinante.
24		Scrive il determinante accanto alla formula per determinare y.
25	Fratto il determinante di A che invece è sempre lo stesso, cioè sette.	Scorre nel file fino al calcolo di x dove è riportato il valore cercato.
26	Ventidue settimi, ok questo è fatto.	Scrive il risultato della seconda incognita.

B.5 Esercizio 5

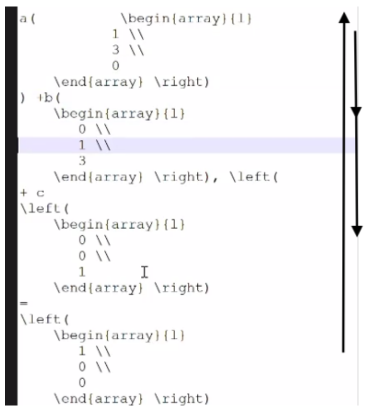
Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Ale Micarti: Allora sia T grande da R alla terza in R alla terza. Una trasformazione da R alla terza a R alla terza, sì. L'applicazione lineare rappresentata dalla matrice seguente, quindi questa matrice. M uguale sette, zero, uno; zero, due, zero; uno, tre, zero e va bene. Sì, ok sono solo tre (intende le righe).	Scorre tra le righe dell'esercizio per leggerne il testo.
2	Relativa alla base... Uno, tre, zero, sì, uno, tre, zero. No.	Scorre tra le righe che compongono la base per cercare di comprenderne la scrittura.
3	Uno, tre, zero... Però non mi torna una cosa. Questo era "begin array", questa è una colonna. Zero, uno, tre e zero, zero, uno ok sì.	Dopo aver indagato ulteriormente la struttura della base ne deduce che sono vettori colonna.
4	Trovare la matrice di T rispetto alla base canonica. Uno, zero, zero; zero, uno, zero; zero, zero, uno. Ok, va bene. Non ricordo minimamente come si faceva.	Finisce di leggere l'esercizio, scorrendo con il cursore e facendo scorrere le dita sulla barra Braille.
5	Intervistatore: Se vuoi è scritto nella dispensa, altrimenti ti posso spiegare io.	
6	Ale Micarti: Puoi dirmelo...	
7	Intervistatore: Per trovare la matrice associata a quell'applicazione lineare rispetto alla nuova base, che è la base canonica in questo caso, bisogna moltiplicare tre matrici, ovvero, partendo da sinistra, la matrice di cambiamento di base da B a C, che ha sulle colonne le coordinate dei vettori di C rispetto ai vettori di B.	Scorre con il cursore nel file degli esercizi.
8	Ale Micarti: I vettori di C...	Continua a spostarsi nel file fino al testo dell'esercizio in analisi.

9	Intervistatore: Scritti in coordinate rispetto alla base B, quindi ad esempio scrivi uno, zero, zero come combinazione lineare dei vettori della base B, e così via con gli altri. Poi la seconda matrice è la matrice M del testo dell'esercizio, mentre la terza matrice è l'inversa della prima matrice, cioè la matrice di cambiamento di base da C a B.	
10	Ale Micarti: Quindi provo un attimo a scrivere... Quindi questa nuova matrice è costituita da... Ah ma questa si chiama B.	Manda a capo l'intestazione della prima base.
11	Quindi scrivo a volte il primo vettore, più b volte il secondo, più c volte il terzo.	
12	Intervistatore: Esatto e in questo modo a, b e c costituiscono la prima colonna della matrice di cambiamento di base.	
13	Ale Micarti: Okay, quindi sarebbe a volte uno, tre, zero...	Copia il primo vettore della base B e lo incolla nel file dove sta svolgendo gli esercizi.
14	Allora adesso gli do un nome...	
15	Intervistatore: In realtà il risultato della combinazione lineare che vuoi scrivere deve essere il primo vettore della base canonica, cioè uno, zero, zero.	
16	Ale Micarti: Ok vediamo se ho capito correttamente... Lo vorrei scrivere in forma un po' più comoda...	Copia e incolla il secondo vettore della base B.
17	Adesso ti spiego anche il motivo. Non so se ho capito, dovrebbe essere...	Scrive la combinazione lineare.

18	Più b volte zero, uno, tre...	Continua a scrivere la combinazione lineare.

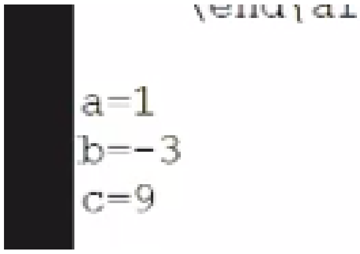


19	Più c volte l'ultimo vettore, cioè il vettore... Il vettore questo qua, zero, zero, uno.	Torna al file degli esercizi per leggere l'ultimo vettore della base B e lo copia.
20	Più c volte questo vettore.	Incolla l'ultimo vettore della base B per completare la combinazione lineare.
21	Tutto questo dicevi che devo porlo uguale a uno, zero, zero. E poi lo stesso per gli altri vettori della base canonica.	
22	Intervistatore: Esattamente.	
23	Ale Micarti: Quindi sostanzialmente avremo...	Pone il tutto uguale al vettore uno, zero, zero.
24	Ora, ok quindi questo vorrebbe dire...	Si sposta su e giù tra le righe della combinazione appena scritta per ricavare le incognite a, b e c.



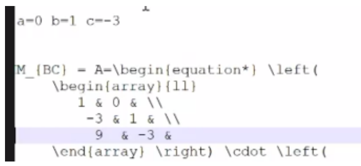
25	Quindi a più zero più... Quindi a è uguale a uno.	Riporta il risultato ottenuto dopo la combinazione lineare.

26	b uguale...	Scorre fino all'inizio della combinazione per ricavare il secondo valore cercato.
27	Allora tre a più b... Più b uguale a zero, quindi se a è uguale a uno, b è uguale a meno tre. Per c... Questo (il risultato) deve essere zero. Abbiamo c uguale a zero, no... Abbiamo più tre b più c deve essere uguale a zero. Quindi c uguale a nove.	Si sposta nel file per risolvere il sistema dato dalla combinazione lineare scritta, dal basso verso l'alto, per poi tornare giù e riportare il valore trovato.



28	Quindi questa è la prima colonna della matrice di cambio di base. La matrice di cambio di base...	Sale con il cursore nel file per cercare una delle matrici degli esercizi precedenti da modificare per creare la matrice ricercata.
29	Ha un nome canonico oppure no?	Copia la matrice dell'esercizio precedente.
30	Intervistatore: Non direi, al massimo puoi rendere evidente da quale base a quale altra base si sta facendo il passaggio.	
31	Ale Micarti: Ok...	Scrive M con al pedice BC.
32	Quindi la prima colonna è uno, meno tre e nove.	Incolla la matrice dell'esercizio precedente, ne modifica la prima colonna e aggiunge una riga utilizzando il linguaggio LaTeX.
33	Ora dobbiamo fare le altre due quindi... Allora a più... Quindi a è uguale a zero.	Scorre nel file fino all'inizio della combinazione e scende soffermandosi sulla prima riga dei vettori della combinazione.
34	b... Allora sarebbe tre a più b, quindi zero più b... Anche b è uguale a zero...	Scorre nuovamente su e giù nel file.
35	Perché sarebbe tre a... No, b è uguale a uno perché abbiamo il secondo coso (intende il secondo vettore della base canonica).	Scorre tra le righe della combinazione lineare.

36	Quindi a uguale a zero, b uguale a uno. c uguale a. . .	Scrive esplicitamente i valori trovati sotto la matrice che sta modificando.
37	Mettiamoli qua. a uguale a zero, b uguale a uno, c uguale. . .	Riscrive quanto trovato prima della matrice per ritrovarlo più facilmente.
38	Quindi tre b più c è uguale a zero. Quindi b era uguale a uno, adesso vado a ricontrollare. . .	Torna su nel file alle righe della combinazione lineare.
39	Tre più c uguale a zero, quindi c è meno tre.	Aggiunge l'ultimo valore trovato a quanto scritto in precedenza.
40	Zero, uno, meno tre.	Modifica la matrice con i nuovi valori trovati.

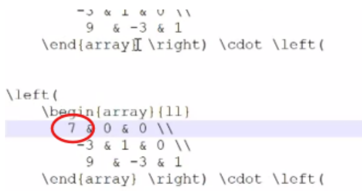


```
a=0 b=1 c=-3

M_{BC} = A=\begin{equation*} \left(
    \begin{array}{ll}
       1 & 0 & \\
        -3 & 1 & \\
          9  & -3 &
    \end{array} \right) \cdot \left(
```

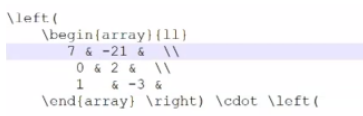
41	Andiamo con l'ultimo che è. . . Vabbè questo (il vettore risultante dalla combinazione) è zero, zero, uno. Quindi avremo che tre b più c è uguale a uno, me lo scrivo.	Fa su e giù con il cursore nel file tra le righe della combinazione lineare e scrive la prima delle tre relazioni che costituiscono il sistema che intende risolvere per non dimenticarsele.
42	Poi. . . Dunque, direi a per uno più b per zero più c per zero uguale a zero. Quindi a uguale a zero. b uguale. . . Tre a. . . b è sempre zero. E poi tre b più c uguale a uno. Quondi c è uno.	Si sposta con il cursore su e giù tra le righe del file.
43	Quindi a uguale a zero, b uguale a zero e c uguale a uno. E quindi zero, zero, uno.	Esplicita i valori trovati subito sotto i calcoli fatti in precedenza.
44	Zero, zero, uno.	Modifica l'ultima colonna della matrice di cambiamento di base aggiungendo i valori calcolati.
45	E adesso devo fare il prodotto tra questa matrice e la prima matrice.	Seleziona la matrice ottenuta per poi copiarla e incollarla qualche riga sotto.
46	Deve essere prima questa per M giusto?	

47	Intervistatore: Sì, esatto.	
48	Ale Micarti: Quindi questa... M la devo riprendere.	
49	M era all'inizio mi pare. M è questa ok.	Apre il file degli esercizi per cercare la matrice M.
50	Quindi questa per M, devo fare un prodotto...	Torna al file dove sta risolvendo gli esercizi per verificare se è possibile svolgere l'operazione desiderata.
51	Questa è tre per tre, quindi devo fare il prodotto di questa per...	Seleziona nuovamente la matrice dei coefficienti, la copia e la incolla subito sotto.
52	Faccio la prima riga di questa per la prima riga dell'altra, per la prima colonna dell'altra.	Scorre tra le righe del file per trovare la prima matrice.
53	La prima riga di questa qua (la matrice di cambio di base) è uno, zero, zero. Per la prima colonna dell'altra, cioè sette, zero, uno	Legge la prima riga della prima matrice da moltiplicare e torna al file degli esercizi per leggere la prima colonna di M.
54	Quindi sette.	Dopo aver svolto il calcolo a mente, apre il file dove sta svolgendo gli esercizi e modifica la matrice copiata.



55	Poi la prima riga per la seconda colonna e ottengo l'elemento (1,2) (in realtà sta calcolando l'elemento di posto (2,1)). La prima riga è sempre uno, zero, zero per la seconda colonna, quindi è zero.	Si sposta tra i due file per eseguire il calcolo e modifica la prima colonna della matrice che ha destinato ad essere la matrice prodotto.
56	La prima riga per la terza colonna che è quindi uno.	Continua a spostarsi tra i due file per poi modificare la matrice prodotto.
57	La seconda riga per la prima colonna, quindi la seconda riga qui ce l'abbiamo, che è meno tre, uno, zero. Meno tre, uno, zero.	Sale con il cursore nel file dove sta svolgendo gli esercizi per leggere la seconda riga.

58	Meno tre, uno, zero per la seconda colonna.	Cancella dalla matrice prodotto l’elemento di posto (1,2) e apre il file degli esercizi.
59	No, la prima colonna, quindi per sette, zero, uno. Quindi sette per meno tre e viene meno ventuno.	Legge la prima colonna della matrice M ed esegue a mente il calcolo desiderato per poi riportarlo nella matrice prodotto.
60	Poi sempre la seconda riga per la prima colonna, no per la seconda colonna. La seconda riga è sempre meno tre, uno, zero per la seconda colonna.	
61	Due…	Scorre tra le righe della matrice M del file degli esercizi per leggerne la seconda colonna.
62		Scrive il valore trovato nella posizione (2,2) della matrice prodotto.
63	Ora devo fare meno tre, uno, zero per… Meno tre.	Legge la terza colonna di M dal file degli esercizi e calcola il risultato.
64	Ok…	Si accorge che c’era già un meno tre nella posizione disiderata della matrice prodotto scorrendo tra le sue righe e quindi procede cancellandone l’ultima colonna.



```
\left(
    \begin{array}{ll}
       7 & -21 &  \\
        0 & 2 &  \\
        1   & -3 &
    \end{array} \right) \cdot \left(
```

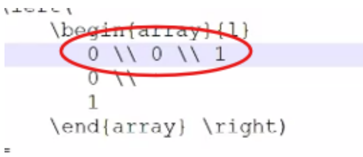
65	Facciamo le ultime tre. La terza riga che è questa qua. Nove, meno tre, uno.	Legge dal file dove sta svolgendo gli esercizi l’ultima riga della matrice facendo scorrere il dito sulla barra Braille.
66	Mentre…	Si posiziona con il cursore nella posizione (1,3) della matrice prodotto.
67	Sette per nove sessantatré.	Scorre tra le righe della matrice M del file degli esercizi per leggere la prima colonna e calcolare la combinazione desiderata.

68		Riporta il risultato nella matrice prodotto.
69	Nove... Meno tre per due fa meno sei, questo (tre) per... Fa meno tre.	Scorre tra le righe della matrice M del file degli esercizi per leggere la seconda colonna e calcolare la combinazione desiderata.
70	Meno tre e poi... L'ultimo è...	Riporta il risultato nella posizione (2,3) della matrice prodotto e posiziona il cursore una riga sotto.
71	Nove per uno nove. È nove.	Legge nel file degli esercizi l'ultima colonna di M.
72		Riporta il risultato ottenuto nella matrice prodotto.
73	Sì, ok. Direi che Ok, niente, quindi a questo punto questa è la matrice.	

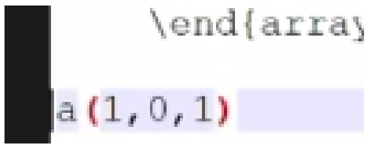
B.6 Domanda 1

Riga	Cosa viene detto
1	Intervistatore: E adesso ci sono le due domande finali.
2	Ale Micarti: Ok, quale strumento hai utilizzato per svolgere gli esercizi proposti. E perché. Allora vabbè, ho utilizzato un editor di testo. Diciamo che se avessi dovuto utilizzarlo in condizioni, cioè nel senso se avessi dovuto fare un corso proprio, seguire un corso completo sulle matrici, probabilmente l'avrei personalizzato con una serie di comandi più comodi, soprattutto per spostarmi tra una matrice e l'altra, cosa che adesso ho fatto mettendoli in file diversi. Per esempio, nell'ultimo passaggio quando devo fare il prodotto righe per colonne li ho messi in due file diversi in modo da passare dall'uno all'altro e avere sottomano, diciamo con già il focus, il cursore nella posizione giusta le due matrici, quelle diciamo nell'ultimo passaggio, erano quelle righe... Erano la M e l'ultima matrice insomma. Mentre le matrici diciamo, non mi ricordo che nome avevamo dato M_{BC} forse. Quindi però questa cosa diciamo ho potuto farla, diciamo in modo un po' rudimentale, perché non avevo personalizzato le macro che normalmente avrei usato. Quindi avrei usato dei comandi tastiera per spostarmi da una matrice all'altra in modo diretto, senza dover ritornare su con la freccia, tornare giù con la freccia oppure andare al file successivo/file precedente. Però diciamo in ogni caso il principio è un editor di testo sufficientemente potente, questo.
3	Avrei potuto utilizzare, e poteva essere comodo un programma come Excel per scrivere le matrici, quindi proprio per riscriverle e spostarmi, soprattutto spostarmi da una all'altra rapidamente. Oppure le modalità diciamo di visualizzazione dimensionale di Edico o di Lambda. Ma c'era un problema di notazione, cioè avrei dovuto comunque riportare poi tutto nella notazione LaTeX, quindi ho preferito lavorare direttamente sulla notazione. Questo ha indubbiamente degli svantaggi.

4 Un altro aspetto è nella notazione, una cosa che non ho fatto ma perché ho fatto una parte di calcoli a mente, ma l'avrei fatta se stessi imparando una cosa, cioè a svolgere questo tipo di calcoli, il vettore, quello uno, zero, la base canonica o anche la base, la base non li avrei scritti uno sotto l'altro, ma li avrei scritti uno di fianco all'altro. Anche questi comunque sono diciamo scritti in verticale, usando comunque l'a capo per dirmi che sono in verticale. Avrei potuto scriverli in modo più compatto e leggerli tutti lungo una singola riga. E quel calcolo con a, b e c l'avrei fatto molto più rapidamente. Non l'ho fatto perché avrebbe voluto dire comunque ristrutturare e riscrivere diciamo tutto il LaTeX. Però se in partenza io le avessi scritte in questa maniera io avrei fatto il copia incolla già così e sarebbe molto più agevole. Quindi, giusto per fare un esempio, questo vettore della base, questo per esempio, non so zero, zero, uno, anziché scriverlo così avrei scritto zero, zero e poi uno, così avrei avuto sulla barra Braille sempre tutti e tre i valori che nel caso di zero, uno è facile.



5 Però se avessi avuto la base, quella non canonica, quindi con tre, quattro eccetera, li avremmo avuti tutti diciamo a portata di mano in questo modo e quindi magari avrei potuto scrivere una cosa del tipo a diciamo così, che ne so a per che ne so uno, zero, uno. Ecco una cosa così.



6 Ok, in modo da avere sottomano, sulla stessa riga della barra Braille, tutti i valori che dovevo moltiplicare. Questa notazione, più compatta, appunto, non è il LaTeX però mi avrebbe aiutato facilmente a risolvere queste somme, diciamo così, queste somme algebriche perché sarebbe stato più facile, molto più facile.

7 Quindi questa è una cosa che avrei potuto fare e che avrei fatto sicuramente se avessi dovuto lavorarci per diciamo molto, riportandolo in LaTeX solo alla fine. Cioè quindi una volta l'avrei riportato in LaTeX o scrivendomi una notazione diciamo per poterla trasformare in LaTeX rapidamente. Quindi insomma, se io uso il punto e virgola, per esempio, per non so uno, due quattro.

8 Riportare automaticamente questa stringa in LaTeX scrivendola come uno doppia barra due doppia barra quattro e al posto delle parentesi backslash left e right sarebbe un attimo, cioè proprio una sostituzione sostanzialmente, quindi l'avrei letto così e scritto così e poi l'avrei trasformato in LaTeX alla fine, in modo da avere poi il LaTeX da consegnare al docente, diciamo.

9 Intervistatore: E per quanto riguarda la tua esperienza universitaria?

10 Ale Micarti: Ho fatto proprio esattamente quello che sto facendo adesso, tranne col fatto che però avevo un editor che mi ero personalizzato e che potevo molto più facilmente fare questi passaggi come quello che ti ho ti ho mostrato adesso. Quindi trasformare il LaTeX piuttosto che trasformare in una notazione, diciamo, più compatta, come quella che ti ho mostrato insomma. E poi riportarla, diciamo... E poi alcuni comuni di spostamento nell'editor per poter andare da una parte all'altra, nel caso specifico da una matrice all'altra all'interno di una somma di matrici oppure non so un prodotto di matrici, per esempio. Mantenendo appunto… Spostandomi con… Mantenendo il focus nelle varie matrici. Quindi io come dire avevo personalizzato usando dei comandi per esempio quando io leggevo non so, sto facendo la somma tra la prima riga e la prima colonna. Leggo la prima riga, se voglio tornare alla prima riga non devo ritornare con la freccia, cercare la matrice, poi cercare la prima riga. Mi bastava premere Ctrl + 1 e mi tornava per andare alla matrice uno e poi diciamo l'uno, il due e il tre doveva essere andare alla riga uno, alla riga due o alla riga tre, shift + 1, shift + 2, shift + 3, per andare alla colonna uno, colonna due, colonna tre. Quindi muovermi con dei comandi da tastiera tra le varie parti della matrice.

11 E questo rendeva tutto estremamente più veloce ovviamente e lo stesso per copiarle per copiare una matrice da una parte all'altra anziché fare selezione come ho fatto adesso, avevo proprio un comando di copia che sostanzialmente io mi mettevo all'interno della matrice e mi copiava da backslash left a backslash right a seconda del tipo, a seconda di come era scritta la matrice.

12 Intervistatore: E per quanto riguarda le lezioni? Come ti trovavi a prendere appunti?

13 Ale Micarti: Prendere appunti è sempre stato complicato, perché non tanto per scrivere, perché comunque con questi comandi con l'Editor abbastanza personalizzato, tutto sommato si scriveva anche abbastanza in fretta. Il problema è che il docente spesso non dice quello che sta facendo, quindi... Indica la riga oppure indica la colonna, oppure scrive una parte di matrice ed dà per inteso che il resto sia come dire come sopra, diciamo così. E non lo dice. Quindi io ho sempre preso appunti, ma spesso andavo a lezione più per tenere traccia di quello che stava succedendo che non per avere degli appunti, diciamo già pronti.

14 Di solito poi prendevo il file LaTeX o del docente o ero riuscito a recuperare... Va beh, stiamo parlando di tanto tempo fa... Un libro di algebra in LaTeX e avevo il libro in Latex e guardavo le cose da quello, anche se non corrispondevano esattamente con quello che aveva fatto il docente. Però insomma, sempre algebra lineare è.

15 Un po' cambia anche la dimostrazione perché... Cioè a volte devi fare un po' far tornare un po' le cose, però insomma si faceva. Ecco, è stato complicato un tempo perché te la devi cercare, fare eccetera. Però alla fine ho potuto studiare l'algebra lineare, ecco.

16 Io ho fatto sostanzialmente ho fatto un esame di algebra e geometria, a informatica c'era solo quello, quindi poi non ho più avuto occasione di riprenderla. Però come dire, quello era, cioè era ciò che era richiesto ad informatica, quindi ho potuto fare bene. Ci ho messo più tempo, questo sì.

17 Il professore forniva in LaTeX quelle che erano le cose per l'esame. Quindi non so gli esercizi per l'esame, oppure c'era qualche esercizio, cioè qualche esame svolto che già c'è, che già aveva in LaTeX quello me lo aveva fornito, però non era il materiale didattico che stava seguendo quello.

B.7 Domanda 2

Riga	Cosa viene detto
1	Ale Micarti: La seconda domanda quindi se non avessi a disposizione lo stesso strumento. In che senso? Cioè se non avessi a disposizione un editor di testo?
2	Intervistatore: Sì, anche.
4	Ale Micarti: Mah, dipende da che strumento avrei a posizione in realtà perché, se dovessi farlo solamente oralmente, per esempio, non dico che non si possa fare, ma ci si metterebbe molto di più. Perché per esempio a volte non so se c'è un esame in cui c'è il lettore, la persona che ti legge l'esame ci si mette tantissimo perché più che altro gli devi chiedere di leggermi la riga uno, la riga due, la colonna uno, la colonna due eccetera e lo stesso se gli dovessi chiedere per esempio per fare... Come dire dovrei accordarmi anche sul modo in cui legge le cose, perché deve essere non ambiguo. Quindi per esempio se abbiamo la matrice M con BC magari mi legge MBC e magari io penso che sia scritto MBC e penso che sia non lo so, un prodotto tra la matrice M, la matrice B e la matrice C per esempio. È necessario in quei casi poi accordarsi.
5	O se per esempio magari mi dice la "base canonica" e quindi so già che è uno, zero, zero; zero, uno, zero e zero, zero, uno o se me la legge tutta potrebbe essere una perdita di tempo diciamo. Quindi sì, dipende molto quello che farei, dipende molto da che strumenti avrei a disposizione.
6	Excel è molto valida. Il problema dell'Excel è che non mi permette di scrivere, cioè se devo scrivere solo dei numeri va benissimo. Se volessi scrivere per esempio adesso non so una matrice di funzioni di analisi due, allora inizia a essere un po' più complesso perché poi nella cella non puoi molto, come dire dovrei scrivere il LaTeX che nella cella delle Excel diventa un pochino più scomodo.
7	Però per lavorare su questo tipo di esercizi sì, è comodo, può esserlo.

Appendice C

Trascrizione dell'intervista a Omero

L'intervista si è svolta tramite una videochiamata su Microsoft Teams, durante la quale Omero ha condiviso il proprio schermo e si è ripreso con una webcam. Inoltre, è stata effettuata una telefonata simultanea da cellulare in modo da poter registrare anche lo screen reader che altrimenti sarebbe stato filtrato dal sistema. La registrazione della videochiamata è stata trascritta e integrata con la registrazione della chiamata telefonica, con la descrizione delle azioni che venivano svolte. L'intervista è stata spezzata in giorni diversi per dare ad Omero il tempo di ideare delle strategie nuove. In una prima giornata ha risolto l'esercizio 1 ed ha risposto alle due domande finale, in un secondo momento ha risolto l'esercizio 2 e in un giorno ulteriore ha svolto tutto il resto.
Omero utilizza la tastiera del computer e lo screen reader NVDA che gli consente di accedere ai files dell'intervista. Svolge gli esercizi su un foglio di calcolo di Libre Office dove può incollare le matrici elemento per elemento, manipolarle e sfruttarle a suo vantaggio. Omero, a differenza degli altri intervistati, tende a parlare meno mentre esegue le varie operazioni, dovendo ascoltare ciò che ripete lo screen reader. Per sopperire a questo, prima di eseguire manualmente il calcolo spiega ciò che andrà a fare.
La prime due registrazioni durano circa trenta minuti ciascuna, mentre la terza circa due ore. Sono state tutte trascritte quasi interamente, escludendo tutto ciò che avrebbe violato l'anonimato di Omero. Nelle tabelle che seguono non è riportato il timing preciso. Le diverse fasi dell'intervista si sono succedute, approssimativamente, come segue:

- Esercizio 1: Omero legge l'esercizio utilizzando strumenti assistivi e inserisce le matrici nel file di calcolo elemento per elemento (dal minuto 2:26 al minuto 9:36). Spiega oralmente in che modo andrà ad applicare l'algoritmo (dal minuto 9:36 al minuto 11:58). Esegue il prodotto (dal minuto 11:58 al minuto 30:57).

- Domande 1 & 2: Risponde alle due domande (dal minuto 30:57 al minuto 34:32).

- Esercizio 2: Omero legge il testo dell'esercizio utilizzando strumenti assistivi e inserisce manualmente la matrice nel file di lavoro (dal minuto 6:29 al minuto

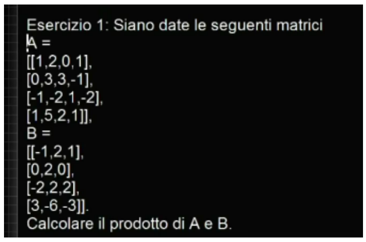
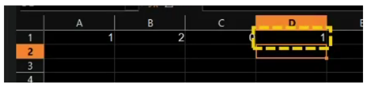
10:02). Spiega in che modo eseguirà l'algoritmo di riduzione (dal minuto 10:02 al minuto11:37). Risolve l'esercizio eseguendo un passaggio intermedio (dal minuto 11:37 al minuto 35:40).

- Esercizio 3: Omero legge il testo dell'esercizio e inserisce la prima matrice di cui calcolare il determinante nel file di testo (dal minuto 5:37 al minuto 9:21). Calcolo del determinante (dal minuto 9:21 al minuto 12:56). Omero inserisce la seconda matrice elemento per elemento verificando di non sbagliare dopo averla ascoltata più volte (dal minuto 12:56 al minuto18:27). Trae le sue conclusioni sulla seconda matrice (dal minuto 18:27 al minuto 23:30).

- Esercizio 4: Omero legge l'esercizio e inserisce la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti nel file di calcolo (dal minuto 23:30 al minuto 27:15). Calcola il determinante e spiega l'algoritmo che andrà ad applicare (dal minuto 27:15 al minuto 29:37). Calcola la matrice inversa di quella dei coefficienti con il metodo dei complementi algebrici (dal minuto 29:37 al minuto 37:15). Moltiplica la matrice ottenuta per il vettore dei termini noti (dal minuto 37:15 al minuto 42:28).

- Esercizio 5: Omero legge il testo dell'esercizio e spiega in che modo andrà a risolverlo (dal minuto 42:28 al minuto 51:37). Scrive le due basi per colonne nel foglio di calcolo e per la prima calcola il determinante (dal minuto 51:37 al minuto 1:01:26). Inverte la matrice ottenuta dai vettori della prima base utilizzando il metodo dei complementi algebrici (dal minuto 1:01:26 al minuto 1:17:23). Calcola l'ultimo prodotto matriciale (dal minuto 1:17:23 al minuto 1:51:46).

C.1 Esercizio 1

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Omero: Adesso ho fatto in modo tale che con la semplice pressione del pulsante Alt + Tab si possa passare facilmente dal file Excel dove si fanno i conti che in realtà è Libre office e il file txt, dove vedi che ho incolonnato le righe in modo tale che si possano leggere un po' più facilmente e adesso vado a leggerle.	
2	Quindi la prima riga è della matrice A è uno, due, zero, uno. Torno nel file Excel mi metto in A1, Uno. C1 zero, uno	Scrive gli elementi della prima riga in ogni casella della prima riga del foglio Excel. 
3	Quindi la seconda riga zero, tre, tre, meno uno. Provo a scrivere la seconda riga.	
4	NVDA: Zero, uno chiusa quadra. A uguale aperta quadra aperta quadra uno virgola due virgola zero virgola uno chiusa quadra, aperta quadra zero virgola tre virgola tre meno uno chiusa quadra.	Si sposta con il cursore lungo la prima riga del file degli esercizi.
5	Omero: Quindi la seconda riga zero, tre, tre, meno uno.	Scrive la seconda riga nel file Excel, elemento per elemento, uno per ogni cella della riga due.
6	Omero: La terza riga è...	
7	NVDA: Aperta quadra meno uno, meno due virgola uno, meno due chiusa quadra.	Ascolta la terza riga elemento per elemento nel file degli esercizi.

8	Omero: Meno uno, meno due, uno, meno due.	Riporta la terza riga elemento per elemento della terza riga del foglio Excel.
9	Omero: Vediamo A4.	
10	Aperta quadra uno virgola cinque virgola due virgola uno chiusa quadra chiusa quadra.	Ascolta la quarta riga elemento per elemento nel file degli esercizi.
11	Omero: Riduco un attimo il volume dell'altoparlante del computer.	
12	NVDA: Aperta quadra uno virgola cinque virgola due virgola uno chiusa quadra chiusa quadra.	Riascolta la quarta riga elemento per elemento nel file degli esercizi.
13	Omero: Uno, cinque, due, uno.	
14	NVDA: Aperta quadra uno virgola cinque virgola due virgola uno chiusa quadra chiusa quadra.	Riascolta la quarta riga elemento per elemento nel file degli esercizi.
15	Omero: Allora vediamo un po' vado di là.	
16	NVDA: Meno uno A3. A4.	Si sposta dalla terza alla quarta riga del file Excel per inserire gli elementi della quarta riga.
17	Omero: Uno, cinque, due, uno.	Inserisce elemento per elemento i numeri della quarta riga della matrice nella quarta riga del file Excel.
18	NVDA: Uno D4. Aperta quadra uno virgola cinque virgola due virgola uno chiusa quadra chiusa quadra.	Torna al file degli esercizi e riascolta l'ultima riga inserita.
19	NVDA: Meno uno D4. E4. Uno D, due C4, uno A4, cinque B4, due C, uno D4.	Riapre il file Excel e scorre con il cursore lungo l'ultima colonna della matrice appena inserita.
20	Omero: Ok, ho verificato di aver copiato correttamente, ho fatto il salvataggio con CTRL + S sulla tastiera.	
21	Intervistatore: Ok.	

22	Omero: Ok, adesso questa matrice A l'ho messa dalla cella A1 alla cella D4, quindi è una quattro per quattro. Adesso vado nel punto A11, in modo tale che la seconda matrice sia facilmente identificabile, come dire in un secondo, in una seconda sezione, un secondo blocco.	
23	NVDA: A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11.	Scorre con il cursore lungo la prima colonna del file Excel.
24	Omero: A11. Andiamo a vedere la seconda matrice.	
25	NVDA: B uguale aperta quadra aperta quadra meno uno virgola due virgola uno chiusa quadra. B uguale aperta quadra aperta quadra meno uno virgola due virgola uno chiusa quadra.	Apre il file degli esercizi e ascolta la prima riga della seconda matrice.
26	Omero: Meno uno, due, uno.	
27	NVDA: A11.	Apre il foglio di lavoro di Excel.
28	Omero: Meno uno, due, uno.	Inserisce gli elementi della prima riga della matrice B uno ad uno nell'undicesima riga del foglio Excel.
29	NVDA: C11.	
30	Omero: C11 c'è uno. Due in B11 e meno uno in A11.	
31	NVDA: A12.	Posiziona il cursore nella prima cella della riga successiva.
32	Omero: Allora salvo e vediamo la seconda riga.	
33	NVDA: Aperta quadra zero virgola due virgola zero chiusa quadra.	Apre il file degli esercizi per ascoltare la seconda riga.
34	Omero: Zero, due, zero la seconda riga.	
35	NVDA: Meno uno A11, A12.	Sposta il cursore per posizionarsi nella giusta riga.
36	Omero: A12, mettiamo qui la seconda riga: zero, due, zero.	Inserisce elemento per elemento la seconda riga della matrice B nella dodicesima riga del foglio Excel.

37	NVDA: A13.	Si sposta con il cursone nella tredicesima riga del foglio Excel.
38	Omero: Ok, salvo, vado alla terza riga.	Apre il file degli esercizi.
39	NVDA: Aperta quadra aperta quadra meno uno virgola due virgola uno chiusa aperta quadra zero virgola due virgola zero chiusa quadra aperta quadra meno due virgola due virgola due chiusa quadra aperta aperta quadra meno due virgola virgola due virgola due chiusa quadra.	Si sposta tra le righe della matrice B per ascoltarle e si sposta su e giù per ascoltare due volte la terza riga.
40	Omero: Meno due, due, due.	
41	NVDA: A12. A13. Trattino due, due, due.	Inserisce elemento per elemento la terza riga della matrice B.
42	NVDA: Due B13, due C13, meno due A13.	Verifica di aver inserito tutti gli elementi correttamente scorrendo tra le righe del foglio Excel.
43	Omero: Ok, siamo nella terza riga del secondo blocco, adesso mettiamo l'ultima riga.	
44	NVDA: A14.	Si posiziona nella quattordicesima riga del file dove inserirà l'ultima riga della matrice B.
45	NVDA: Aperta quadra aperta quadra aperta quadra tre meno sei meno tre chiusa quadra chiusa quadra aperta quadra meno aperta quadra tre meno sei meno tre chiusa quadra chiusa quadra.	Torna alla terza riga della matrice B nel file degli esercizi, ascolta la quarta riga e dopo essere salito con il cursore di una riga la riascolta.
46	Omero: Tre meno sei meno tre.	
47	NVDA: A14. Tre trattino sei trattino tre.	Inserisce un elemento per ogni cella dell'ultima riga di B nella quattordicesima riga del foglio Excel.

48	Omero: Ok allora io le ho copiate tutte le righe nel file di calcolo, allora avrai notato che io ogni tanto sono costretto a passare alla riga superiore per essere sicuro che sto… Che sono sulla riga giusta. Cioè devo purtroppo per far leggere devo spostarmi al punto sopra e poi tornare al punto… Devo fare un indietro avanti. In modo tale da leggere la riga ed essere sicuro che insomma riesco a… Che sono nel punto giusto.	
49	Intervistatore: Ok.	
50	Omero: Ok, quindi vado a leggere questo esercizio.	
51	NVDA: Calcolare il prodotto di A e B.	Ascolta l'ultima riga del primo esercizio che ne contiene la consegna.
52	Omero: Calcolare il prodotto di A e B. Torno di qua.	
53	NVDA: A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21.	Scorre con il cursore fino alla ventunesima riga del foglio Excel.
54	Omero: Con la stessa logica di prima mi metto nella cella A21 in modo tale da avere un terzo blocco dove vado a fare la combinazione lineare (intende il prodotto righe per colonne) tra le varie matrici. Allora adesso per semplificare il problema e sfruttare bene quello che sono il copia incolla di Excel. Il copia incolla di Excel comincia a scrivere nella cella A21 un pezzo e soltanto un pezzo della combinazione lineare senza calcolarla. Per esempio, scrivo a1+b1+c1+d1.	
55	NVDA: a1 più b1 più c1 più d1. A21.	Scrive nella cella A21 la somma degli elementi della prima riga della matrice A.

56	Omero: OK, quindi vedi che il leggi schermo l'ha letta e fa a1 più b1 più c1 più d1. 57	Nella riga sotto.
58	NVDA: A22.	Si sposta nella cella sottostante con il cursore.
59	Omero: Comincio a completare anche questa. Scrivo a2+b2+c2+d2.	
60	NVDA: a2 più b2 più c2 più d2. A22.	Scrive nella cella A22 la somma degli elementi della seconda riga della matrice A.
61	Omero: Terza riga a3+b3+c3+d3.	
62	NVDA: a3 più b3 più c3 più d3. A23.	Scrive nella cella A23 la somma degli elementi della terza riga della matrice A.
63	Omero: A23.	
64	NVDA: A24. a4 più b4 più c4 più d4.	Scorre con il cursore alla cella sottostante che completa analogamente a quanto fatto in precedenza.
65	Omero: Ancora non le calcolo, ho scritto un pezzo della combinazione lineare perché viene comodo cominciare a scriverla così e poi andare a riempirla, a popolarla con il resto delle cose.	
66	Intervistatore: Sì, certo.	
67	NVDA: a1 più b1 più c1 più d1. A21.	Sposta il cursore nella prima cella della matrice prodotto.
68	Omero: Adesso torno nella prima e posso cominciare a fare, ad eseguire il calcolo. Allora per fare ancora, per sfruttare al meglio le combinazioni, scusa il copia incolla di Excel vado a selezionare tutta la colonna.	
69	NVDA: Seleziona A21, A22, A23, A24.	Seleziona la prima colonna della matrice prodotto.
70	Omero: Seleziono da A21 ad A24, poi copio.	

71	NVDA: B21.	Sposta il cursore nella cella B21.
72	Omero: Mi sposto nella colonna B21 incollo.	Incolla la prima colonna nella colonna B.
73	NVDA: C21.	Sposta il cursore nella cella C21.
74	Omero: Mi sposto nella colonna C21 e incollo. Allora a questo punto tu avrai, visto che si saranno sovrapposti. Perché verranno tagliati, sovrapposti, perché non viene completamente sviluppato in lunghezza quella che è stata la scritta della formula ma va bene comunque, questo era.	Incolla la prima colonna nella colonna C.
75	Intervistatore: In realtà, vedo tutto.	
76	Omero: In realtà vedi tutto. Ok allora adesso proseguo con il calcolo, mi metto in A21 ed entro nel calcolo.	
77	NVDA: a1 più b1 più c1 più d1. A21.	Sposta il cursore nella prima cella della matrice prodotto.
78	Omero: Cosa devo fare adesso? Dove c'è a1 devo cominciare a moltiplicare per a11. Poi il b1 sarà moltiplicato per il a12, il c1 per a13 e d1 per a14. Quindi perché prima riga, prima colonna viene fuori così così la combinazione lineare, vediamo.	
79	NVDA: a1 più b1 più c1 più d1. Cella A21.	Sposta il cursore nella cella A21.
80	Omero: Torno indietro col cursore, perché si è messo sulla prima colonna a1 moltiplicato per a11 più b1 moltiplicato per a12 più c1 moltiplicato per a13 più d1 moltiplicato per a14.	
81	NVDA: a1 più asterisco b1 più b più.	Scrive la combinazione come descritto oralmente.

82	Omero: Qui lui non legge il più. Lasciamo perdere.	
83	NVDA: Uno più b uno più.	Continua a scrivere la combinazione.
84	Omero: Qui moltiplico per A12 più.	
85	NVDA: Due più c uno più asterisco a13. Tre più d1 vuoto.	
86	Omero: Dove dice vuoto è arrivato in fondo.	
87	NVDA: Asterisco a uno quattro.	
88	Omero: La combinazione è finita, vado all'inizio dove c'è A metto più do invio e dovrebbe aver calcolato il numero.	Aggiunge il più all'inizio della formula della cella A21.
89	Allo stesso modo posso procedere con gli altri.	
90	NVDA: a2 più b2 più c2 più d2. A22.	Si posiziona con il cursore nella cella A22.
91	Omero: Nella A22 così si fa, si fa ancora la stessa cosa, si moltiplica a22 per a11 poi a12 per quella successiva e così a13 e a14.	
92	NVDA: Cella a2 più asterisco a11 (legge uno uno) più b2 più asterisco a12 (legge uno due) più c2 asterisco a13 (legge uno tre) più d2 vuoto asterisco a14 (legge uno quattro).	Scrive la combinazione lineare per la cella A22.
93	Omero: Vado all'inizio, aggiungo il più.	Aggiunge il più all'inizio della cella A22.
94	NVDA: Meno nove con formula A22.	
95	Omero: E ha calcolato meno nove. Poi stesso discorso, vado avanti per la terza.	
96	NVDA: a3 più b3 più c3 più d3. A23.	Si posiziona nella cella A23.
97	Omero: C'è ancora moltiplicare sempre per a11, a12, a13 e a14.	

98	NVDA: a3 più asterisco a11 (legge uno uno) b3 più asterisco a12 (legge uno due) c3 più asterisco a13 (legge uno tre) d3 vuoto asterisco a14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare.
99	Omero: Legge quello che è a destra del cursore. Vado all'inizio, aggiungo il più sparisce il testo e diventa un numero.	Aggiunge il più all'inizio della cella A23.
100	NVDA: Meno sette con formula A23.	
101	NVDA: a4 più b4 più c4 più d4.	Posiziona il cursore nella cella A24.
102	Omero: L'ultimo di questa colonna, allora, stesso discorso.	
103	NVDA: Cella A24. a4 più asterisco a11 (legge uno uno) b4 più asterisco a12 (legge uno due) c4 più asterisco a13 (legge uno tre) d4 vuoto asterisco a14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella A24.
104	Omero: Vado all'inizio, aggiungo il più.	Aggiunge il più all'inizio della cella A24.
105	NVDA: Meno due con formula A24.	
106	Omero: Ok, e la prima parte l'abbiamo fatta, salvo CTRL + S.	
107	NVDA: A20.	Si sposta con il cursore nella cella A20.
108	Omero: A20 dice che non c'è il numero legge soltanto la cella. Poi vado nella cella B21 e ricomincio. Siamo alla seconda colonna quindi devo andare a moltiplicare la combinazione lineare già presente a1, b1, c1, d1 con la seconda colonna della matrice B, quindi sarà la b11, b12, b13 e b14.	

109	NVDA: Cella B21. a1 più asterisco b11 (legge uno uno) b1 più asterisco b12 (legge uno due) c1 più asterisco b13 (legge uno tre) d1 vuoto asterisco b14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella B21.
110	Omero: Allora torno all'inizio al posto del testo vi metto il più e calcola.	Aggiunge il più all'inizio della formula e preme invio.
111	NVDA: Zero con formula B21.	
112	Omero: Salvo adesso. Stesso discorso ancora qui, b11, b12, b13 e b14.	
113	NVDA: Cella B22. a2 più asterisco b11 (legge uno uno) b2 più asterisco b12 (legge uno due) c2 più asterisco b13 (legge uno tre) d2 vuoto asterisco b14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella B22.
114	Omero: Torno all'inizio, aggiungo il più.	Aggiunge il più all'inizio della cella B22.
115	NVDA: Diciotto con formula B22.	
116	Omero: Diciotto è un numero un po' grosso, potrei aver sbagliato.	
117	Intervistatore: No, è giusto. Tranquillo.	
118	Omero: Viene un numero inatteso per quello che veniva.	
119	NVDA: a3 più b3 più c3 più d3. B23.	Si posiziona con il cursore nella cella successiva.
120	Omero: Stesso discorso anche qua.	
121	NVDA: Cella B23. a3 più asterisco b11 (legge uno uno) b3 più asterisco b12 (legge uno due) c3 più asterisco b13 (legge uno tre) d3 vuoto asterisco b14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella B23.
122	Omero: Vado all'inizio aggiungere più e la formula è fatta.	Aggiunge il più all'inizio della cella in esame.

123	NVDA: Otto con formula B23.	
124	Omero: Salvo CTRL + S.	
125	NVDA: a4 più b4 più c4 più d4.	Posiziona il cursore nella cella B24.
126	Omero: Quest'altra qui, stesso discorso.	
127	NVDA: Cella B24. a4 più asterisco b11 (legge uno uno) b4 più asterisco b12 (legge uno due) c4 più asterisco b13 (legge uno tre) d4 vuoto asterisco b14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella B24.
128	Omero: Metto il più davanti.	Aggiunge il più all'inizio della cella.
129	NVDA: Dieci con formula B24.	
130	Omero: Salvo.	
131	NVDA: a1 più b1 più c1 più d1. Cella C21.	Sposta il cursore nella cella C21.
132	Omero: Adesso mi sono messo nella cella C21 e c'è l'ultima colonna della combinazione lineare; quindi, a1 più b1 più c1 più d1 che è la la prima riga e verrà moltiplicata per la terza colonna della matrice B, che sarà quindi la colonna C, quindi C11, C12, C13 e C14.	
133	NVDA: Cella C21. a1 più asterisco c11 (legge uno uno) b1 più asterisco c12 (legge uno due) c1 più asterisco c13 (legge uno tre) d1 vuoto asterisco c14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella C21.
134	Omero: Torno a capo.	Aggiunge il più all'inizio della cella C21.
135	NVDA: Meno due con formula C21.	
136	Omero: Salvo Ctrl + S. Poi…	
137	NVDA: a2 più b2 più c2 più d2. C22.	Si posiziona con il cursore nella cella successiva.
138	Omero: Stesso discorso anche qua. Vado a capo.	

139	NVDA: Cella C22. a2 più asterisco c11 (legge uno uno) b2 più asterisco c12 (legge uno due) c2 più asterisco c13 (legge uno tre) d2 vuoto asterisco c14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella C22.
140	Omero: Vado a capo. Metto più.	Aggiunge il più all'inizio della cella.
141	NVDA: Nove con formula C22.	
142	Omero: Ctrl + S salvo. Siamo alla riga terza quindi la C23.	
143	NVDA: Cella C23. a3 più asterisco c11 (legge uno uno) b3 più asterisco c12 (legge uno due) c3 più asterisco c13 (legge uno tre) d3 vuoto asterisco c14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella C23.
144	Omero: Qui davanti metto il più.	Aggiunge il più alla cella C23.
145	NVDA: Sette con formula C23.	
146	Omero: Ctrl + S salvo.	
147	NVDA: a4 più b4 più c4 più d4. C24.	Si posiziona con il cursore nella cella successiva.
148	Omero: L'ultimo.	
149	NVDA: Cella C24. a4 più asterisco c11 (legge uno uno) b4 più asterisco c12 (legge uno due) c4 più asterisco c13 (legge uno tre) d4 vuoto asterisco c14 (legge uno quattro).	Completa la combinazione lineare della cella C24.
150	Omero: Vado a capo, metto il più.	Aggiunge il più all'inizio della cella C24.
151	NVDA: Due con formula C24.	

152 Omero: Ok, il prodotto di matrici è finito così. Probabilmente si può automatizzare con l'utilizzo di cerca, cerca verticale, riferimento riga, riferimento orizzontale, riferimento colonna, io non l'ho fatto. Avrei dovuto studiarlo come implementare questa cosa qua. Insomma, per sfruttare meglio l'automatismo di Excel o di Libre office che sia. Sono riuscito a calcolare correttamente?

153 Intervistatore: Sì, promosso!

154 Omero: Meno male, meno male. E poi ci poteva essere anche un'altra funzione utile che è la matrice prodotto. C'è anche in Libre office mat punto prod o product e poi metti la matrice, però vabbè, per lo sviluppo dell'esercizio ho preferito fare così.

C.2 Esercizio 2

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	NVDA: Esercizio due due punti, ridurre la matrice M.	Scorre con il cursore fino alla prima riga dell'esercizio che ascolta.
2	Omero: Esercizi. Ridurre la matrice M adesso vado ad aprire il file degli esercizi.	
3	Aggiornata salgo di un livello. File di calcolo e punto uno ODS ma è uguale. Me l'ha aperto come ODS ma non è un Excel ma è uguale eh non cambia niente. Allora lo apro con invio.	Compie diverse azioni da tastiera per aprire il foglio di calcolo.
4	NVDA: A2, A1, B1, A1.	Si sposta con il cursore per posizionarsi nella cella desiderata.
5	Omero: A1. Vado a scrivere la matrice per righe come abbiamo fatto l'altra volta, quindi.	
6	NVDA: Esercizio due due punti. Ridurre la matrice M uguale due virgola zero virgola uno. 7	Omero: Prima riga due, zero, uno. OK, dovevo andare a cercare il file in modo tale che facendo… Posso passare facilmente con Alt + Tab. Quindi in A1 c'è due, in B1 c'è zero, in C1 c'è zero (in realtà intende uno).
8	NVDA: A2.	
9	Omero: In A2 vediamo che cosa c'è.	
10	NVDA: Esercizi. Meno uno virgola due virgola tre.	Ascolta la seconda riga della matrice M.
11	Omero: Vedi meno uno virgola uno virgola tre quindi facilissimo perché così non devo non devo impazzire perché basta memorizzare il pezzettino che vai ad ascoltare e non devi più cercare il pezzo da memorizzare in mezzo è tutta una stringa molto lunga.	

12	NVDA: Due A1, A2.	Si posiziona con il cursore nella prima cella della seconda riga del foglio Excel.
13	Meno uno A2. Uno B2, tre C2.	Scrive elemento per elemento, uno per ogni cella, la seconda riga della matrice M.
14	Omero: Quindi meno uno in A2, uno in B2 e in C2 tre uno in B due in C due tre. Poi vediamo in A3 cosa mettere.	
15	NVDA: Tre virgola due meno due. Tre virgola due uno due.	Ascolta la terza riga della matrice M nel file degli esercizi.
16	Omero: Tre, due, meno due.	
17	NVDA: Tre A3, due B3, trattino due C3.	Scrive elemento per elemento, uno per ogni cella, la terza riga della matrice M.
18	Omero: In A3 tre in B3 due e in C3 meno due. Salvo. Vediamo se ho fatto giusto perché. . .	Torna al file degli esercizi.
19	NVDA: Tre virgola due meno due.	Sale e scende con il cursore per riascoltare la terza riga. 
20	Omero: Tre virgola due, meno due.	
21	NVDA: Indicare il rango della matrice ridotta.	Ascolta l'ultima riga dell'esercizio.

22 Omero: Indicare il rango della matrice ridotta, questa è la domanda. Allora, rango della matrice ridotta. Diciamo che all'università, come già ti dicevo, mi facevano calcolare il determinante della matrice piena, cioè della matrice completa, poi se non lo trovavi così che era zero dovevi andare a cercare un minore finché non trovavi il minore che fosse diverso da zero. C'è anche un altro metodo che è quello dei pivot. Praticamente bisogna costruire una matrice triangolare superiore, detta anche matrice a scala e il numero dei pivot di questa matrice triangolare superiore, detta anche a scala, coincide con il determinante. Quindi che cos'è il pivot? Il pivot è il numero, la posizione in matrice, il primo numero della riga diverso da zero... Diverso da zero all'interno della riga, quindi si avanza per righe, si guarda qual è il primo numero diverso da zero, quello si chiama pivot. Allora come si fa a ottenere una matrice triangolare superiore? Per avere i pivot e quindi la matrice a scala si utilizzano i principi di Gauss. Sono tre principi e si cerca di combinarli tra di loro. Principio numero uno, quello che si possono scambiare due righe una con l'altra, quindi per esempio la prima con la seconda, la prima con la terza, la seconda col con la terza e così via.

Secondo principio di Gauss è quello per cui è possibile moltiplicare una riga per un numero, che può essere appunto uno scalare, un numero intero non intero che sia. Terzo principio è quello che si possono sommare algebricamente, quindi anche sommare o sottrarre due righe tra di loro. Ovviamente io cosa faccio? Ho cercato di ragionare su questi, su questi principi e vengono combinati insieme per ottenere quello che è il costruire, pian piano quella che è la matrice triangolare superiore. Allora un vedente a questo punto cosa farebbe? La prima cosa che fa un vedente è quella di dire, vediamo com'è costruita la matrice, se ci sono delle, se ci sono lungo la stessa colonna, se ci sono già delle condizioni diciamo più favorevoli per andare a combinare tra di loro le righe o spostare tra di loro le righe o sommare algebricamente, moltiplicare una delle righe in modo tale da ottenere già il primo azzeramento, su che cosa? Sulla posizione nella prima colonna, e questo è quello che fa il vedente. Il vedente vede tutto il campo, quindi vede tutta la matrice, vede più o meno che numeri ci sono e agisce di conseguenza, un po' cercando dei trucchetti per semplificarsi la vita. Il non vedente come sono io questa cosa fa un po' fatica a farla, perché dovrebbe memorizzare tutta la matrice, che in questo caso è prima riga due, zero, uno, seconda riga meno uno, uno, tre, terza riga tre, due, meno due.

	Ha difficoltà a ragionare vedendo tutta la colonna nella sua completezza, no? Allora ha sviluppato un altro metodo che comunque rispetta le tre regole di Gauss, ma cerca di applicarle in maniera un po' più sistematica e in maniera, come dire, tutta uguale, ovvero ho preso un problema, l'ho diviso in tanti piccoli problemi più piccoli, tutti uguali, a cui vado a fare sempre la stessa cosa perché la mia attenzione non la vado a mettere tanto nell'algoritmo di Gauss ma devo metterla nel digitare quello che vado a digitare, quindi mettere l'attenzione non tanto nella regola di matematica che ho compreso in profondità, ma quanto nella digitazione perché mi manca un senso quindi non posso guardare quello che faccio. Allora vediamo come vediamo come procedere. Scusa il cappello introduttivo, ma siccome qua non ci sono grandi conti da fare ma c'è da ragionare più che altro ed essere ordinati questo mi sembrava, come dire, necessario farlo.	
23	NVDA: A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11.	Sposta il cursore fino alla cella A11.

24	Omero: Allora vado come al solito in una posizione facile da trovare, che sia abbastanza lontana dall'altra, come la posizione A11. La matrice di partenza M era nella posizione dalla cella A1 alla cella C3 adesso vado a lavorare nella cella dalla A11 alla C13. Allora abbiamo già visto che la matrice va resa triangolare superiore, gli zeri non ce ne sono di zeri già in posizione favorevole, cioè senza che non hanno bisogno dell'algoritmo di Gauss e quindi vado a ragionare in questo modo. La prima riga la decido di tenerla allo stesso… Uguale; quindi, nella cella A11 vado a scrivere più a1, nella cella B11 scrivo più b1, nella cella C11 più c1.	
25	NVDA: Cella A11, cella B11, cella C11.	Scrive per ogni cella dell'undicesima riga l'indice di riga e colonna della prima riga della matrice M.
26	Omero: E la prima riga l'ho copiata. Nella seconda riga già posso dire devo applicare l'algoritmo di Gauss per cercare di avere l'elemento della seconda riga prima colonna pari a zero e allora come faccio? L'algoritmo diciamo lo semplifico in questo modo non mi metto… Il vedente, si metterebbe lì e dire: "Ah, qui ci vuole questo numero", perché si vede invece io che sono sfigato sotto questo punto di vista utilizzo uno stratagemma e dico… Allora nella cella A12 che è quella seconda riga, prima colonna, colonna A scrivo più a1 meno a1, F4 così viene bloccata diviso a2 F4 che viene bloccata ancora moltiplicato a2.	

27 NVDA: a1 trattino a1, barra due asterisco a2.

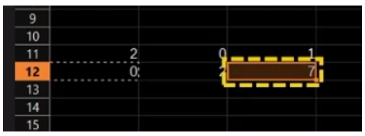
Scrive la formula descritta oralmente.

28 NVDA: Zero con formula A12.

29 Omero: Viene fuori proprio zero, cioè il numero non me lo sono inventato a vista guardando la matrice, perché non la vedo, ma semplicemente il rapporto tra quello della prima riga e quello della prima colonna e quello della seconda riga nella stessa colonna, cioè nella prima ed è zero. Con il pulsante F4 ho aggiunto in dollaro per bloccare appunto la selezione di questo rapporto tra A1 e A2. Così sono nella cella A12 copio e incollo si riaggiornerà in B12 e in C12 e il primo algoritmo di Gauss l'ho completato.

30 NVDA: Zero con formula A12, due con formula B12, sette con formula C12.

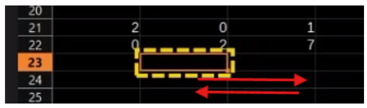
Incolla la formula nelle celle a destra della A12.



31 Omero: E ho messo il primo, il primo pivot, scusa, ho messo il primo zero nella seconda riga, poi l'altra furbata da fare è quello di proseguire sulla colonna. Questo è un trucchetto perché sennò poi ci si incasina dopo allora. Quindi allo stesso modo nella posizione A13 cosa vado a fare?

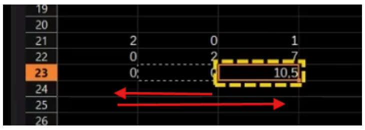
32	NVDA: A13.	Sposta il cursore nella cella A13.
33	Omero: Vado a fare ancora lo stesso algoritmo, lo stesso metodo che ho usato prima.	
34	NVDA: B13, A13. Più a1 trattino dollaro a1 dollaro a3 asterisco a3.	Scrive la formula per annullare l'elemento (3,1).
35	Omero: Quindi A13 sarà più a1, meno a1, dollaro, diviso a tre dollaro, moltiplicato a3, invio e ottengo un altro zero.	
36	NVDA: Zero con formula A13.	
37	Omero: Ho azzerato questa, ho azzerato quest'altra, quest'altra posizione. Quindi prima riga, terza colonna. Copio e incollo gli altri, così si aggiornano la prima, la A1 e la A3, mentre resta fisso quello che è il rapporto tra uno e tre messo con il dollaro, quindi con l'F4.	
38	NVDA: Uno virgola tre tre tre tre tre con formula B13, due virgola tre tre tre tre tre con formula C13.	Incolla la formula nelle celle a destra della A13.
39	Omero: Allora vengono due numeri periodici. Uno virgola tre e l'altro viene due virgola tre se non mi sbaglio sono due numeri periodici che chiaramente indicano due frazioni che possono essere banalmente calcolate come tanti zeri quante sono le cifre dell'anti periodo o tanti nove quante sono le cifre quella insomma quella cosa lì che si ricava da in prima media che sono uno è quattro terzi e l'altro è... Non mi ricordo più.	

	Cos'è ventitré quindi diventa ventitré meno due ventuno, ventuno diviso nove ridotto sono tre per tre, sette per tre sette terzi. Allora l'Excel o comunque il foglio di calcolo lo lascia così. Non è un problema, tanto si può procedere anche con i decimali dentro. Allora questo lo salvo.	
40	Allora adesso abbiamo ottenuto che la seconda riga è pivotata correttamente la terza riga però no, bisogna aggiungere ancora un... Fare un altro algoritmo di Gauss per andare a creare il pivot anche nella terza riga e quindi la matrice scalare perché sotto la l'elemento centrale della seconda riga. Quindi il due due, la seconda colonna, seconda riga bisogna creare uno zero. Allo stesso modo procedo costruendo un'altra matrice in un'altra posizione, sempre per non fare confusione andrò in posizione A21.	
41	NVDA: A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21.	Scorre con il cursore fino alla cella A21.
42	Omero: In A21 per completezza vado a riscrivere la matrice di prima.	
43	NVDA: Cella A21 più a1, cella B21 più b1, cella C21 più c1. Cella A22 più a12, cella B22 più b12, cella C22 più c12.	Scrive cella per cella le prime due righe ottenute dalla prima fase della riduzione riportando solamente gli indici di riga e colonna con davanti il più.
44	Zero, due, sette.	Scorre con il cursore tra le celle della ventiduesima riga del foglio di calcolo.

45	Omero: OK, me le legge, me li ero memorizzati prima, comunque sono questi. Adesso bisogna andare ad applicare l'algoritmo di Gauss per azzerare l'elemento che sta sotto il pivot della riga precedente. Allora si applica ancora lo stesso, lo stesso principio. Soltanto che bisogna fare una piccola premessa. La riga tre era già stata in qualche modo azzerata. Quindi si partirà dalla riga tre calcolata nella matrice diciamo precedente, non in quella di base di partenza, ma in quella precedente. Allora come faccio? Faccio sempre nello stesso modo. Allora sono nella cella giusta?	
46	NVDA: C23, B23.	Si sposta a destra e a sinistra per capire la cella in cui si trova. 
47	Omero: Sì, B23.	
48	NVDA: Più b dodici trattino dollaro b dodici barra dollaro b tredici asterisco b tredici.	Scrive la formula per azzerare l'elemento di posto (3,2).
49	Omero: Viene azzerato anche questo elemento della matrice.	
50	NVDA: B24, zero con formula B23.	Scorre giù e su per sincerarsi della correttezza dell'algoritmo.
51	Omero: Adesso non bisogna fare l'errore di andare a prendere la matrice più di prima, ma bisogna continuare utilizzando le proprietà di Excel del copia incolla, diciamo quindi del riaggiornamento della posizione semplicemente prendendo B23, spostarlo ad A23 e a C23.	

52 NVDA: Zero con formula B23, zero con formula A23. C23. Dieci virgola cinque con formula C23.

Incolla a sinistra e poi a destra la formula della cella B23.



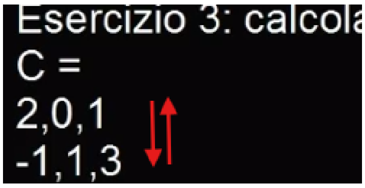
53 Omero: Ecco che i calcoli sono finiti perché sono riuscito a costruire una matrice triangolare superiore. Qual è il determinante? Il determinante (intende il rango) è tre perché sono riuscito ad ottenere tre pivot, cioè non c'è nessuna riga nulla. L'unica cosa nell'elemento C23 c'è un numero frazionario che è dieci e mezzo, sarebbe ventuno diviso due e così è. Io questo esercizio due lo risolverei in questo modo. Ci ho dovuto ragionare un po' perché non era immediato di comprendere di prima fare la colonna e poi procedere alla riga successiva. Quindi prima si completa la colonna e poi l'altra cosa è di utilizzare il dollaro per bloccare quel rapporto che nella combinazione delle due righe permette di azzerare ì l'elemento che deve essere azzerato sotto il pivo di prima. Quindi questo è quanto. Ho salvato il file e basta. Ti è piaciuto come ho ragionato? Devi trovare, devi aver capito in profondità il problema per ridurlo a problemi più piccoli, tutti uguali, e devi fare in modo che l'implementazione sia la più semplice possibile.

Perché io non posso andare a guardare dove mi sono perso, se mi perdo sono perso. Devo ripartire da capo e cancellare tutto. Devo avere in testa tutto il percorso. Questo è come questo è come cerco di ragionare io e come cerco di fare io.

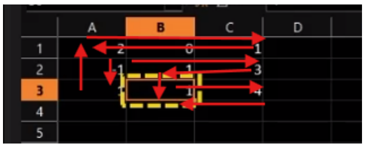
C.3 Esercizio 3

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Omero: Ok allora oggi provo a fare l'esercizio tre e l'esercizio quattro. Se fila tutto liscio vediamo come va e dovrei anche fare l'esercizio cinque vediamo un po' come vediamo, un po' come vanno le cose. Allora siamo già su matematica perché me l'ha letto prima. Adesso apro la cartella. L'ho allargato così lo vedi tutto.	
2	Sono sceso con la freccina fino all'esercizio numero tre.	Apre il file degli esercizi. Il cursore è già nella riga in cui inizia l'esercizio in analisi.
3	NVDA: Esercizio tre due punti. Calcolare il determinante e quando esiste l'inversa delle seguenti matrici.	
4	Omero: Quindi visto che gli altri due li abbiamo già fatti e dici calcolare il determinante e quindi siamo al punto giusto, torno indietro sulla cartella aggiornata. Salgo di un livello, son salito di un livello, adesso creo un altro file, allora Alt + invio. Ok, esercizio tre punto XLSX, lo apro con Libre office calc.	
5	NVDA: A2, A1.	Apre il foglio di calcolo in cui svolgerà l'esercizio e si sposta a destra e poi a sinistra per trovare la posizione desiderata.
6	Omero: OK, siamo dentro in A1. OK, vado a rileggere la nuova di nuovo l'esercizio.	
7	NVDA: Esercizio tre due punti. Calcolare il determinante e quando esiste l'inversa delle seguenti matrici.	Riapre il file degli esercizi.

8	Omero: Aspetta, Ok, questo giro (fa riferimento all'assegnazione del comando Alt + Tab per spostarsi da un file all'altro) serve a me per essere sicuro che con il movimento con Alt + Tab io riesca a passare con un colpo solo dal file TXT del testo degli esercizi al file XLSX che uso con Alt + Tab e posso spostarmi più agevolmente. OK, adesso inizio a fare l'esercizio, leggiamo il resto.	
9	NVDA: C uguale due virgola zero virgola uno.	Scende con il cursore e ascolta la seconda riga dell'esercizio.
10	Omero: Matrice C due virgola zero virgola uno quindi.	
11	NVDA: A2, A1. Due A1, Zero B1, uno C1.	Si sposta nuovamente a destra e poi a sinistra per sincerarsi della posizione e inizia a digitare elemento per elemento, uno per ogni cella, la prima riga della matrice.
12	Omero: OK sto cominciando a scrivere la matrice.	
13	NVDA: Meno uno virgola, due virgola zero virgola uno.	Riapre il file degli esercizi, scende di una riga e risale per riascoltare la prima riga di C.



14	Omero: Sono tornato indietro per essere sicuro di essere a quel punto lì.	
15	NVDA: Meno uno virgola uno virgola tre.	Ascolta la seconda riga di C nel file degli esercizi.
16	Omero: Meno uno, uno, tre.	
17	NVDA: Tre C2, uno B2, meno uno A2.	Inserisce elemento per elemento, uno per ogni cella, la seconda riga della matrice.

18	Omero: Ok, salvo Ctrl + S.	
19	NVDA: Meno uno virgola uno virgola tre; uno virgola uno virgola quattro.	Torna su e giù per leggere dal file degli esercizi la terza riga della matrice M.
20	Omero: Uno virgola uno virgola quattro.	
21	NVDA: Uno A3, uno B3, quattro C3.	Inserisce elemento per elemento, uno per ogni cella, la terza riga della matrice.
22	Omero: OK, prima cosa calcolare, calcolare il determinante, calcolare il determinante di questa di questa matrice. Qui allora vediamo un po' quali sono. Dobbiamo investire la matrice per applicare la regola di Laplace per il calcolo del determinante.	
23	NVDA: Uno A3, meno uno A2, due A1; zero B1, uno C1, zero B1, due A1; meno uno A2, uno B2, tre C2; uno B2, uno B3, uno A3; uno B3, quattro C3, uno B3.	Cerca dei possibili zeri tra le righe e le colonne di C. 

24	Omero: Allora per calcolare il determinante potrei usare la funzione automatica che c'è dentro l'Excel o la Libre office, ma non la utilizzo, preferisco farlo a mano e utilizzando la regola di Laplace, la posizione la posizione più semplice. Per calcolare determinante mettersi sulla cella B3 in modo tale da selezionare la colonna B e utilizzare quindi questa colonna che ha dentro uno zero, quindi già un pezzo non lo calcoli perché c'è uno zero, gli altri due hanno degli uni quindi dei numeri uno, quindi si utilizzerà soltanto eventualmente il cambio di segno per il componente algebrico. Quindi adesso per calcolare il determinante vado in un punto più comodo per non incasinarmi tipo la cella potrebbe essere la A11.	
25	NVDA: Uno A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11.	Scorre con il cursore fino alla cella A11.
26	Omero: OK sono in A11. Comincio dalla cella B3, allora cella B3 sono in posizione riga numero tre, colonna numero due, quindi è un dispari. Meno uno elevato è una potenza dispari, conserva il segno negativo; quindi, resta meno e quindi diciamo uguale meno. Vediamo se prende direttamente l'uguale.	
27	NVDA: Cella A11 trattino B3 asterisco, aperta parentesi a1 asterisco c2 trattino a2 asterisco c1 chiusa parentesi.	Scrive la prima parte della formula di Laplace per il determinante.

28	Omero: Hai notato che qui io vado a contare praticamente dov'è la posizione della parentesi? Perché i primi due, il terzo è lo zero partendo dal backspace che è più lungo, il quarto è la chiusa parentesi e questo è uno. Poi questo è uno calcolato, l'altro pezzo insomma della formula che manca per calcolare determinante. Si va alla cella B2, che essendo uno due per due, cioè in colonna due riga due, è un'esponente quattro, quindi un'esponente pari e meno uno elevato, un'esponente pari positivo e quindi diventa più.	
29	NVDA: Più b2 asterisco aperta parentesi a1 asterisco c3 trattino a3 asterisco c1 chiusa parentesi.	termina la formula per il calcolo del determinante.
30	Zero con formula A11.	
31	Omero: Viene zero, quindi la matrice non è invertibile. Mi sono fatto giusto il conto?	
32	Intervistatore: Sì, è giusto.	
33	Omero: È giusto il conto, non la prima, l'ho fatto adesso quindi e questa matrice non è non è invertibile proseguo con l'altra matrice che tanto sono due matrici qua in questo esercizio. Allora, salvo.	
34	NVDA: D uguale. Uno virgola zero virgola zero virgola zero. D uguale. Uno virgola zero virgola zero virgola zero. D uguale. Uno virgola zero virgola zero virgola zero.	Fa su e giù più volte tra la terza e la quarta riga dell'esercizio per ascoltare correttamente la prima riga di D.
35	Omero: Allora l'ho ripetuto più volte perché è un po' più complesso. Sono quattro numeri virgola zero virgola zero virgola zero quindi uno seguito da tre volte zero.	

36	NVDA: A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21.	
37	Omero: Come al solito un punto comodo, facile da ritrovare.	
38	NVDA: Uno A21, zero B21, zero C21, zero D21. A22.	Scrive elemento per elemento uno per ogni cella la prima riga di D e si posiziona già nella cella in cui andrà ad inserire il primo elemento della seconda riga.
39	Omero: Questo per rileggere dov'ero.	
40	NVDA: Zero virgola uno virgola zero virgola zero.	Ascolta la seconda riga della matrice D.
41	Omero: Zero, uno, zero, zero.	
42	NVDA: Zero A22, uno B22, zero C22, zero D22. A23.	Scrive elemento per elemento uno per ogni cella la seconda riga di D e si posiziona già nella cella in cui andrà ad inserire il primo elemento della terza riga.
43	Omero: Ok li ho riportati tutti.	
44	NVDA: Zero virgola zero virgola uno virgola zero.	Ascolta la terza riga della matrice D dal file degli esercizi.
45	Omero: Zero, zero, uno, zero.	
46	NVDA: Zero A23, zero B23, uno C23, zero D23. A24.	Scrive elemento per elemento uno per ogni cella la terza riga di D e si posiziona già nella cella in cui andrà ad inserire il primo elemento della quarta riga.
47	Omero: Ok, anche questa riga è fatta.	
48	NVDA: Zero virgola zero virgola zero virgola uno.	Ascolta l'ultima riga della matrice D.
49	Zero A24, zero B24, zero C24, uno D24.	Scrive elemento per elemento uno per ogni cella l'ultima riga di D.

50	Omero: OK, quindi la matrice l'ho scritta, allora ho fatto un po' di avanti e indietro per capire esattamente dov'ero riascoltando cose note per capire quella successiva. Come vedi lui ti legge quello su cui sei, se torni indietro ci ritorni sopra perché legge il nuovo no? Quello l'ha appena aggiornato dove è appena andato il cursore. Allora questa matrice qui è una matrice quattro per quattro. Scrivendola ci si rende conto che è una matrice identità, quindi la matrice che sulla diagonale principale ha tutti elementi pari a uno. Il determinante di una matrice di questo tipo è uno perché la matrice identità è sempre determinante pari a uno e quindi allora non vado a fare il calcolo che sarebbe pesante fatto... Sarebbe un calcolo molto lungo, ma la matrice d'identità ha determinante pari a uno e con questo diciamo mi sembra che l'esercizio tre sia terminato.	
51	NVDA: Vuoto, esercizio quattro due punti.	Riapre il file degli esercizi e scende di qualche riga da dove aveva lasciato il cursore per vedere se l'esercizio chiede altro.
52	Omero: Infatti, l'esercizio tre è terminato.	

C.4 Esercizio 4

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Omero: OK, Procedo con l'esercizio quattro.	
2	NVDA: Esercizio quattro due punti. Risolvere il seguente sistema di Cramer due punti A asterisco decimo uguale b dove.	Ascolta la prima riga dell'esercizio, spostandovisi con il cursore.
3	Omero: Allora sono ritornato all'esercizio numero quattro. Divertente che dice A asterisco decimo, quindi non è un decimo ma è una X è ovvio che rappresenta il vettore delle incognite, no? Torno nella posizione di prima per aprire il file Excel.	
4	NVDA: Esercizio 4 xlsx. A1, A2, A1.	Apre il file Excel dove svolgerà l'esercizio e si sposta giù e su per accertarsi di essere nella prima cella del file.
5	Omero: Ok allora solito magheggio per avercelo direttamente a portata di mano, quindi pasi all'Excel con un comando solo che è l'Alt + Tab, con un colpo solo di comando.	
6	NVDA: Esercizio quattro due punti. Risolvere il seguente sistema di Cramer due punti A asterisco decimo uguale b dove A uguale due virgola uno.	Ascolta nuovamente la prima riga dell'esercizio e la seconda e la terza.
7	Omero: La prima matrice (intende riga) è due, uno.	
8	NVDA: B1, A1. Due A1, uno B1. A2.	Si sposta a destra e a sinistra per accertarsi di essere nelle cella giusta ed inserisce elemento per elemento la prima riga della matrice. Si posiziona poi nella cella dove dovrà iniziare ad inserire la seconda riga.
9	Omero: Ok ho salvato.	

10	NVDA: Meno uno virgola tre, due virgola uno, meno due virgola tre.	Si sposta su e giu con il cursore per ascoltare la seconda riga di A.
11	Omero: Meno uno virgola tre.	
12	NVDA: Trattino uno A2, tre B2.	Inserisce elemento per elemento, uno per cella, la seconda riga di A.
13	Omero: Ok, ho salvato.	
14	X uguale aperta parentesi x virgola y chiusa parentesi.	Prosegue nell'ascolto dell'esercizio.
15	Omero: X uguale (x,y) è il vettore delle incognite.	
16	NVDA: b uguale aperta parentesi 4 virgola 9 chiusa parentesi. Vuoto.	Prosegue nell'ascolto dell'esercizio fino alla fine.
17	Omero: Ok, poi è finito. b uguale quattro virgola nove. Torno di qua (intende nel foglio Excel).	
18	NVDA: Due A1, uno B1, C1.	Si sposta con il cursore nella cella C1.
19	Omero: Allora per comodità non lo metto direttamente in C, sottinteso diciamo che ci sono delle incognite perché abbiamo capito il problema. Lo scriverò in D.	
20	NVDA: Quattro D1, nove D2.	Scrive il vettore colonna b nella colonna D.

21	Omero: Quindi allora non vado a scrivere quello che è banale perché ce l'ho tra virgolette in testa, nel senso che c'è una matrice due per due, un vettore incognito (x,y) che si trova a destra della matrice che fa una moltiplicazione della matrice A e poi c'è uguale un vettore termine noto che è stato chiamato B con gli elementi quattro e nove. Allora vediamo un po' prima di risolvere il passare a risolvere il sistema il sistema in questo modo vedere se la matrice è effettivamente invertibile perché A moltiplicato X uguale a B. X la soluzione è uguale ad A alla meno uno matrice inversa moltiplicato per il vettore B che è il vettore termine noto. Quindi prima cosa calcolare il determinante.	
22	NVDA: C2, tre B2, trattino uno A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11.	SI sposta con il cursore fino alla cella A11.
23	Omero: Allora come al solito vado in un punto comodo, il punto A11 per esempio e vado a calcolare il determinante della matrice sperando che sia diverso da zero ovviamente.	
24	NVDA: Più A1 asterisco B2 trattino A2 asterisco B1. Cella A12. Sette con formula A11.	Scrive la formula del determinante e calcola la formula premendo invio.

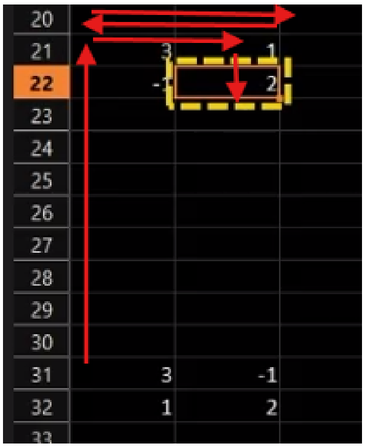
25	Omero: Sette con formula A11. Allora questa è una matrice due per due, quindi esiste un modo per così dire semplificato di fare già la matrice inversa, che sarebbe quello di sulla diagonale principale, di scambiare gli elementi, dividerli per il determinante e sulla matrice che non è la principale ma è l'altro, non mi ricordo come si chiama. Sull'altra diagonale sempre dividere per il determinante mettere il segno meno e lasciare gli elementi dove sono. Però proviamo a fare tutto il conto. Allora vado in una posizione comoda, la A21.	
26	NVDA: A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21.	Scorre con il cursore fino alla cella A21.
27	Omero: Ok in A21, in A21 andrò a scrivere il complemento algebrico dell'elemento prima riga prima colonna della matrice A. Siccome la matrice è uno due per due, il complemento algebrico sarà l'elemento posto nella posizione B2. La posizione B2 non ha bisogno di cambiare il segno perché è fatta direttamente, perché... L'elemento prima riga, prima colonna, quindi una riga, una colonna, la somma dei due è pari; quindi, meno uno elevato al quadrato siamo a posto che viene ancora uno. Quindi in posizione A21, basterà scrivere B2.	
28	NVDA: Più B2. B21, tre con formula A21.	Scrive il complemento algebrico che verifica spostandosi prima a destra e poi a sinistra.

29	Omero: OK, è una prima, è un prima, una prima parte del calcolo poi nella B21, quindi seconda colonna della prima riga, allora due più uno fa tre quindi ci va il meno davanti per il complemento algebrico dell'elemento, che non è altro che l'elemento A2, quindi viene fuori meno a due.	
30	NVDA: Trattino A2. C21, uno con formula B21. A22.	Scrive il complemento algebrico con davanti il segno meno che verifica spostandosi prima a destra e poi a sinistra. Posiziona poi il cursore nella nuova cella da riempire.
31	Omero: Poi vediamo quest'altro elemento seconda riga prima colonna, prima colonna. Allora è ancora a un termine con due più uno tre; quindi, meno uno elevato al cubo è meno; quindi, ci vorrà il segno meno per il complemento algebrico di questo elemento qui che è il B1, la posizione B1.	
32	NVDA: Trattino B1. Tre con formula A21, meno uno con formula A22.	Scrive il complemento algebrico con davanti il segno meno che verifica spostandosi in alto e in basso con il cursore.
33	Omero: Poi l'ultimo allora per salvare l'ha salvata Ctrl + S. L'ultimo, allora l'ultimo non è altro che in posizione seconda riga seconda colonna quindi pari e meno uno elevato alla quarta fa uno. Per chiaramente il complemento algebrico che viene qui cioè A1.	
34	NVDA: Più A1. Due con formula B22.	Scrive l'ultima cella della matrice dei complementi algebrici.

35	Omero: Quindi due con formula B22. Ok prima parte del calcolo della matrice fatto, procedo, vado ancora in una posizione comoda quindi nella cella A31 per procedere con la trasposizione.	
36	NVDA: Meno uno con formula A22, A23, A24, A25, A26, A27, A28, A29, A30, A31.	Scorre con il cursore prima a sinistra e poi giù fino alla cella A31.
37	Omero: Allora devo trasporre. Quindi la prima riga diventa la prima colonna, viene trasformata in colonna. E cosa succede che il… Allora eravamo nella A21, la A31 diventa ancora più A21.	
38	NVDA: Più A21, tre con formula A31.	Riscrive il contenuto della cella A21 nella A31.
39	Omero: La cella A32 diventa…	
40	NVDA: Più B21, uno con formula A32.	Completa la prima colonna.
41	Omero: E questa è stata trasposta, la seconda riga diventa la seconda colonna, quindi in cella B, in cella B31, in cella B31, che è quella che c'è adesso, giusto?	
42	NVDA: Tre con formula A31, B31.	Verifica di trovarsi nella cella desiderata.
43	Omero: Devo mettere la A…	
44	NVDA: Più A22, meno uno con formula B31.	Continua nella scrittura della matrice trasposta.
45	Omero: E sotto nella B32 devo mettere la cella B22.	
46	NVDA: Più B22, due con formula B32. Meno uno con formula B31, tre con formula A31, uno con formula A32.	Termina la scrittura della matrice trasposta.
47	Omero: Allora tre uno vado a verificare che non ho copiato sbagliato.	

48 NVDA: Tre con formula A31, A30, A29, A28, A27, A26, A25, A24, A23, meno uno con formula A22, tre con formula A21, uno con formula B21, tre con formula A21, uno con formula B21, due con formula B22.

Si sposta con il cursore per verificare la correttezza della trasposizione.



49 Omero: Ok, le ho correttamente trasposte. Salvo adesso manca un passaggio che è quello della divisione per il valore del determinante. Allora il determinante l'avevo calcolato nella cella A11. Se non mi sbaglio, andiamo a vedere.

50 NVDA: Meno uno con formula A22, tre con formula A21, A20, A19, A18, A17, A16, A15, A14, A13, A12, sette con formula A11.

Sale con il cursore per ritrovare la cella in cui aveva cacolato il determinante.

51 Omero: Ok, in A11 c'è il determinante, allora vado nella cella comoda A41.

52 NVDA: A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, tre con formula A21, meno uno con formula A22, A23, A24, A25, A26, A27, A28, A29, A30, tre con formula A31, uno con formula A32, A33, A34, A35, A36, A37, A38, A39, A40, A41.

Si sposta con il cursore fino alla cella A41.

53 Omero: A41 cosa faccio? Devo prendere l'ultima matrice che era la trasposta e dividerla per il determinante, quindi viene fuori. . .

54 NVDA: Cella A41, più A31 barra A11, zero virgola quattro due otto. . .

Divide per il valore del determinante.

55 Omero: Sì, vengono dei decimali di fianco viene fuori cella B.

56 NVDA: Cella B41, più B31 barra A11, meno zero virgola uno quattro... A42. Più A32 barra A11, zero virgola uno quattro... B42, più B32 barra A11, zero virgola due otto cinque. . .

Termina il calcolo della matrice inversa.

57 Omero: Allora adesso, al di là dei numeri che risultano con la frazione dividendo per sette ovviamente che è il determinante vediamo che non ho scritto sbagliato.

58 NVDA: Cella A41, più A31 barra A11, zero virgola quattro due otto. . . Cella B41, più B31 barra A11, meno zero virgola uno quattro... Zero virgola due otto cinque. . . con formula B42. Zero virgola uno quattro. . . con formula A42. Più A32 barra A11, zero virgola uno quattro... B42, più B32 barra A11, zero virgola due otto cinque. . .

Verifica di aver scritto correttamente i calcoli.

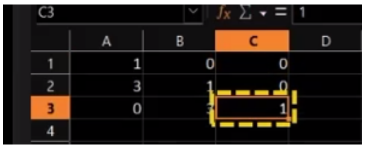
59 Omero: Ok, quindi sì, va bene. Da A41 a B42 ho ottenuto la matrice inversa. Adesso andrò ancora a fare un punto comodo e vado a fare il prodotto tra la matrice e il vettore termine noto che non ho scritto nella colonna C, ma ho scritto nella colonna D1 e D2. Quindi vado in A51.

60	NVDA: Zero virgola uno quattro... con formula A42. A43, A44, A45, A46, A47, A48, A49, A50, A51.	Si sposta con il cursore fino alla cella A51.
61	Omero: Quindi in A51 (calcolerò) il prodotto tra la matrice due per due e un vettore colonna, cioè una colonna due righe e sarà ancora un vettore colonna una colonna due righe. Allora che cosa, cosa, cosa sarà pari allora? Sarà pari a più A41 moltiplicato...	
62	NVDA: Più A41 asterisco D1 più B41 asterisco D2. Zero virgola due quattro otto cinque... con formula A51. A52. Più A42 asterisco D1 più B42 asterisco D2. Tre virgola uno quattro due otto... con formula A52.	Scrive il vettore soluzione del sistema di Cramer proposto nell'esercizio. 
63	Omero: OK quindi adesso si tratta di verificare che non ho scritto delle stupidaggini.	
64	NVDA: Tre virgola uno quattro due otto... con formula A52. Cella A52, più A quattro due asterisco D1 più B quattro due asterisco D2. Zero virgola due quattro otto cinque... con formula A51. Cella A51, più A quattro uno asterisco D1 più B quattro uno asterisco D2.	Veerifica la correttezza del prodotto matrice vettore.
65	Omero: Ok è scritto correttamente. Questo è il risultato del prodotto, quindi per me l'esercizio quattro è terminato così ed è corretto quello che ho fatto. Ok bene.	

C.5 Esercizio 5

Riga	Cosa viene detto	Cosa viene fatto
1	Omero: Allora provo a procedere con l'esercizio cinque, che è quello insomma di cui teoricamente ho dovuto studiare un po' di più. Ecco, ho dovuto ragionare un po' di più su questa cosa qua. Ecco, non ha grandi conti però insomma è un po' più un po' più ostico per più che altro allora andiamo a vedere. Ok file di calcolo. Creo un altro file che a me piace fare ordine e non voglio avere le cose che si sovrappongono. Ok, creo un foglio di lavoro. Ho aperto quale esercizio cinque vediamo un po' cosa dice.	Fa una serie di azioni, tra quali l'impostare il comando Alt + Tab per passare da un file all'altro e crea un nuovo foglio di calcolo.
2	NVDA: Esercizio cinque due punti. Sia T un'applicazione lineare da R accento circonflesso tre in R accento circonflesso tre rappresentata dalla matrice. M uguale. Sette virgola zero virgola uno. Zero virgola due virgola zero. Uno virgola tre virgola zero. Rispetto alla base. B uguale.	Spostandosi con il cursore tra le righe del file degli esercizi legge le prime righe dell'esercizio cinque.
3	Omero: Vedi che è stato fondamentale che tu mi abbia scritto le cose incolonnate in modo tale che le pause nel discorso, nella lettura che sono naturali a una persona che legge con gli occhi o che ascolta ma legge con gli occhi, qui non ci sono e vengono, per così dire, introdotte, spezzando e mettendo incolonnato là dove serve, ti dà il tempo di pensare perché si ferma, no? E vai giù di riga in riga	

4	NVDA: Relativa alla base. B uguale. Aperta graffa aperta parentesi uno virgola tre virgola zero chiusa parentesi.	Ascolta il primo vettore della base.
5	Omero: Uno virgola tre virgola zero.	
6	NVDA: Aperta parentesi zero virgola uno virgola tre chiusa parentesi.	Ascolta il secondo vettore della base.
7	Omero: Zero, uno, tre.	
8	NVDA: Aperta parentesi zero virgola zero virgola uno chiusa parentesi chiusa graffa.	Ascolta il terzo vettore.
9	Omero: Zero, zero, uno.	
10	NVDA: File di calcolo, A1, A2, A1.	Apre il file Excel e si accerta di trovarsi in A1 spostandosi con il cursore.
11	Omero: Ok, comincio a scriverli di qua.	
12	NVDA: Uno A1, tre A2, zero A3. Tre B3, uno B2, zero B1. Zero C1, zero C2, uno C3.	Inserisce per colonne elemento per elemento, uno per ogni cella, i vettori della base B.



13	Aperta parentesi zero virgola zero virgola uno chiusa parentesi chiusa graffa. Aperta parentesi zero virgola uno virgola tre chiusa parentesi. Aperta graffa aperta parentesi uno virgola tre virgola zero chiusa parentesi.	Riascolta i vettori della base dal file degli esercizi.
14	Omero: Okay, quindi le ho scritte correttamente.	

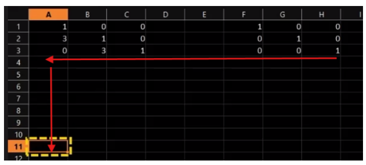
15	NVDA: Aperta parentesi zero virgola uno virgola tre chiusa parentesi. Aperta parentesi zero virgola zero virgola uno chiusa parentesi chiusa graffa. Trovare la matrice di T rispetto alla base canonica. C uguale. Aperta graffa aperta parentesi uno virgola zero virgola zero chiusa parentesi. Aperta parentesi zero virgola uno virgola zero chiusa parentesi. Aperta parentesi zero virgola zero virgola uno chiusa parentesi chiusa graffa.	Ascolta fino alla fine l'esercizio cinque.
16	Omero: Ok, C è la base canonica, lo spazio vettoriale delle basi canoniche. Allora cominciamo F, G, H.	
17	Zero C2, zero C1. D1, E1, F1. Uno F1, zero F2, zero F3. Zero G3, uno G2, zero G1. Zero H1, zero H2, uno H3.	Scrive da F1 ad H3 i vettori della base canonica.
18	Omero: Abbiamo una base in dimensione tre, c'è uno spazio vettoriale di dimensione tre e dobbiamo trovare la matrice del cambiamento di base, allora da questa base B alla base canonica uno, zero, zero; zero, uno, zero; zero, zero, uno. Allora di solito che cosa si fa? Si costruiscono una serie di sistemi lineari in cui praticamente il vettore destinazione... Allora chiamiamo base di partenza la base B, la base di arrivo chiamiamola è la base C che ho scritto nelle colonne F, G e H. Quindi la base di partenza è nelle colonne A, B, C e la base di arrivo nelle colonne F, G e H. Allora su questa cosa qui come si può procedere?	

Bisognerebbe scrivere quella combinazione lineare con parametri per esempio x, y, z scalari della vecchia base, quindi del vettore nella colonna A nella colonna B e nella colonna C siano uguali al primo vettore della nuova base, della base canonica. Quindi un vedente scriverebbe uno, zero, zero uguale allo scalare chiamiamolo x che moltiplica il primo vettore della base che è uno, tre, zero più y che èl'altro scalare che moltiplica il secondo vettore della base B che è zero, uno, tre, più il terzo che è z, che moltiplica il terzo vettore zero, zero, uno. Quindi verrebbe fuori un sistema lineare con le tre incognite x, y e z. i otterrebbe in questo modo il risultato di queste tre colonne, la x, la y e la z che sono praticamente la prima colonna della matrice del cambio di base. Allora scrivere tutto quanto diventa impegnativo. Allora quello che io intendo fare è ragionare a mente, ma questo ragionamento è un ragionamento, come dire, un po' più sofisticato che si fa quando si conosce bene la cosa. Quindi si va a scrivere una matrice di tipo tre per tre che rappresenta le basi di partenza, incolonnate come in forma di vettore colonna uno di fianco all'altro, come ho già scritto dalla A1 alla C3 e poi si va a fare il prodotto con un vettore incognite (x, y, z) a dare il termine noto che è il vettore colonna della base di arrivo, del primo vettore della base di arrivo. Io procederei in questo modo.

Stessa cosa per il secondo vettore e per il terzo vettore della base di arrivo, quindi l'unica cosa che cambia non sono le basi (intende i vettori) di partenza ma cambieranno e le incognite x, y, z e il termine noto che sono la base (intende i vettori) di arrivo. Quindi il giochino sarà tutto nel fare un'inversione di una matrice di tipo tre per tre, quella costituita dai vettori colonna delle... Quella che ha come colonne i vettori della base di partenza quindi quelle che ho scritto in A, B, C. Io lo farei così. Altri invece scrivono tutto il sistema, il sistemone che diventa un'infinità di conti e direi che vale la pena di sfruttare la proprietà di sintesi dell'algebra e di lavorare in questo modo. Quindi A1, A2, A3 è il primo vettore della base di partenza, B1, B2, B3 è il secondo vettore della base di partenza. Stessa cosa per C1, C2, C3, che rappresenta il terzo vettore. Prima cosa, come al solito, calcolare il determinante perché bisogna vedere che effettivamente le basi siano...

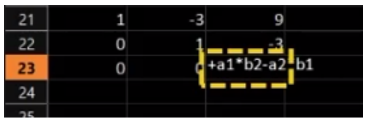
19 NVDA: Zero G3, zero F3, E3, D3, uno C3, tre B3, zero A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11.

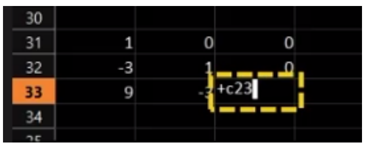
si sposta con il cursore fino alla cella A11.



20	Omero: Siano linearmente indipendenti. Allora la cosa più comoda, sempre utilizzando l'algoritmo di Laplace, è mettersi... Allora prima cosa, mettersi nella cella A11 così è fuori dai giochi e siamo abbastanza lontani da tutto. Calcolarlo per il C3, il C3 per l'elemento nella terza riga terza colonna. Questo C3 qui è tre più tre sei. Quindi il segno è positivo. Quindi più l'elemento C3 vediamo più C3 moltiplicato...	
21	NVDA: Più c3 asterisco aperta parentesi a1 asterisco b2 trattino a2 asterisco b1. A12. Uno con formula A11.	Scrive la formula per il calcolo del determinante.
22	Omero: Perfetto, viene un determinante comodo e se no comincia a diventare pesantino il conto. Viene uno. Ok, diamo una salvata, determinante a posto. Adesso si tratta di fare prima l'inversione della matrice composta da questi vettori qui e poi moltiplicarla per il vettore uno, zero, zero. Allora vediamo di fare l'inversione. Vado in una posizione comoda, quindi sarà la cella A21.	
23	NVDA: A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, A21.	Si sposta con il cursore fino alla cella A21.
24	Omero: Vado nella cella A21 e procedo con l'inversione quindi. Vediamo un po' come si può fare. Al posto della A1 devo fare il calcolo del complemento algebrico con il segno. A1 è positivo, quindi lascio il più.	

25	NVDA: Cella A21, più b2 asterisco c3 trattino b3 asterisco c2. A22.Uno con formula A21. B21.	Calcola il primo complemento algebrico.
26	Omero: Ok, poi vediamo quello successivo in B21, quindi deve essere innanzitutto col segno meno davanti.	
27	NVDA: Cella B21 trattino aperta parentesi a2 asterisco c3 trattino a3 asterisco c2 chiusa parentesi. B22. Tre con formula B21.	Calcola il secondo complemento algebrico.
28	Omero: C21 stesso discorso di prima, quindi allora questo sarà col segno più.	
29	NVDA: Più a2 asterisco b3 trattino a3 asterisco b2. C22. Nove con formula C21. B21. A21. A22.	Scrive il terzo complemento algebrico.
30	Omero: Ok e questo è il primo, procedo con l'altro con il successivo, allora quest'altro è meno perché è un due uno quindi è meno.	
31	NVDA: Cella A22. Trattino aperta parentesi b1 asterisco c2 trattino b3 asterisco c1 chiusa parentesi. A23. Zero con formula A22. B22.	Prosegue nel calcolo.
32	Omero: Poi la B22 che è quello centrale, è positivo qua perché è due due, quindi più.	
33	NVDA: Più a1 asterisco c3 trattino a3 asterico c1. B23. Uno con formula B22. C23.	Prosegue con il calcolo della matrice dei complementi algebrici.
34	Omero: Quest'altro è dispari, quindi meno... Allora siamo al C3.	
35	NVDA: Cella C22. Trattino aperta parentesi a1 asterisco b3 trattino a3 asterisco b1 chiusa parentesi. C23. Meno tre con formula C22. Uno con formula B22. Zero con formula A21. A23.	Scrive l'ultima cella della seconda riga della matrice e sposta il cursore fino all'inizio della terza riga della stessa.

36	Omero: OK, poi procediamo ancora l'ultima riga, l'ultima riga. Allora l'ultima riga viene fuori. Il primo termine è un tre più uno quattro, quindi positivo, quindi.	
37	NVDA: Cella A23. Più a1 asterisco b2 trattino a2 asterisco b1. A24. Zero con formula A23. B23.	Scrive il primo complemento algebrico della terza riga.
38	Omero: Poi B23, quest'altro è negativo perché è tre più due cinque.	
39	NVDA: Cella B23Trattino aperta parentesi a1 asterisco c2 trattino a2 asterisco c1 chiusa parentesi. B24. Zero con formula B23. C23.	Scrive il secondo elemento della terza riga.
40	Omero: Salvo. L'ultimo allora questo è tre più tre, quindi è sei, è positivo, quindi è più.	
41	NVDA: Cella C23. Più a1 asterisco b2 trattino a2 asterisco b1. C24. Uno con formula C23.	termina la scrittura della matrice dei complementi algebrici. 
42	Omero: Ok quindi dalla cella A21 alla C23 ho calcolato la matrice dei complementi algebrici. Adesso si tratta di fare la trasposta, quindi la prima riga diventa la prima colonna, la seconda riga la seconda colonna la terza riga la terza colonna e dividerla per il determinante. Il determinante l'abbiamo calcolato in A11 ed è uno. Quindi diventa banale il diviso per determinante è uno step banale, no?	
43	NVDA: Zero con formula A22, uno con formula A21, A20, A19, A18, A17, A16, A15, A14, A13, A12, uno con formula A11.	Torna alla cella A11 per verificare il valore del determinante.

44	Omero: Infatti in A11 c'è il determinante, allora iniziamo in A31.	
45	NVDA: A12, A13, A14, A15, A16, A17, A18, A19, A20, uno con formula A21, zero con formula A22, zero con formula A23, A24, A25, A26, A27, A28, A29, A30, A31.	Si sposta con il cursore fino alla cella A31.
46	Omero: In A31 quindi si tratterà di scrivere la riga 21 però in forma di colonna quindi.	
47	NVDA: Cella A31, più a21, cella A32, più b21, cella A33, più c21. A14. Nove con formula A33, meno tre con formula A32, uno con formula A31. B31.	Scrive nella prima colonna dell'inversa la prima riga della matrice dei complementi algebrici. La verifica scorrendo con il cursore lungo la colonna e si posiziona nella cella dove andrà a scrivere il prossimo elemento.
48	Omero: Qui, qui basterà scrivere la riga 22.	
49	NVDA: Cella B31, più a22. Cella B32, più b22. Cella B33, più c22. B34. Meno tre con formula B33, uno con formula B32, zero con formula B31. C31.	Scrive nella seconda colonna dell'inversa la seconda riga della matrice dei complementi algebrici. La verifica scorrendo con il cursore lungo la colonna e si posiziona nella cella dove andrà a scrivere il prossimo elemento.
50	Omero: In C31 ci vuole la terza riga, quindi è la riga 23.	
51	NVDA: Cella C31, più a23. Cella C32, più b23. Cella C33, più c23. C34. Uno con formula C33, zero con formula C32, zero con formula C31. Zero con formula B31. Uno con formula A31.	Scrive nella terza colonna dell'inversa la terza riga della matrice dei complementi algebrici. La verifica scorrendo con il cursore lungo la colonna. Torna nella cella A31. 

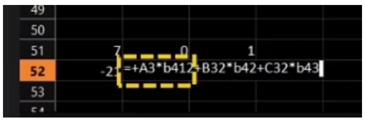
52 Omero: Ok, a questo punto ho ottenuto la matrice inversa. Non vado a scrivere diviso A11, anche se andrebbe fatto per diciamo formalismo, andrebbe fatto, non lo vado a scrivere perché tanto viene diviso uno e andrei comunque a incasinare le cose, non darebbe alcun vantaggio. A questo punto questa matrice inversa va moltiplicata per il vettore uno, zero, zero. Quindi cosa succede che di questa matrice inversa il vettore prima riga della matrice inversa per il vettore uno, zero, zero va a selezionare la prima colonna e questa prima colonna diventa la prima colonna della matrice del cambio di base. In maniera analoga, il vettore zero, uno, zero verrebbe esattamente la seconda colonna e per il vettore zero, zero, uno la terza colonna. Quindi si deduce che questa matrice inversa è la matrice del cambio di base per passare dalla base B iniziale alla base C. E direi che l'esercizio finisce così.

53 Intervistatore: In realtà per trovare la matrice associata a T rispetto alla base canonica bisognerebbe moltiplicare questa matrice che hai appena calcolato per la matrice M dell'esercizio e infine moltiplicarla per l'inversa di questa matrice di cambio di base. Mancherebbe semplicemente un calcolo, una moltiplicazione tra matrici.

54	Omero: Quindi c'è la matrice dell'applicazione lineare in mezzo al prodotto, a sinistra c'è la matrice del cambio di base che ho ottenuto adesso giusto? A destra c'è l'inversa della matrice del cambio di base.	
55	Intervistatore: Che però, anche se forse non ti sei reso conto, hai già scritto.	
56	Omero: Esatto, è quella iniziale, quella da A1 a C3. No, questo sinceramente non l'ho colto dalla... È una mia mancanza di teoria questo. Se vuoi posso farlo se si tratta semplicemente di un prodotto tra matrici.	
57	Intervistatore: Se ne avessi tempo e voglia, io lo farei.	
58	Omero: Sì, va bene, lo facciamo. È un esercizio di calcolo vero e proprio.	
59	NVDA: Meno tre con formula A32, nove con formula A33, A34, A35, A36, A37, A38, A39, A40, A41.	Scorre con il cursore fino alla cella A41.
60	Omero: Allora in A41 devo andare a scrivere la matrice iniziale.	Apre il file degli esercizi.
61	NVDA: Trovare la matrice di T rispetto alla base canonica. Aperta parentesi zero virgola zero virgola uno chiusa parentesi chiusa graffa. Aperta parentesi zero virgola uno virgola tre chiusa parentesi. Aperta graffa aperta parentesi uno virgola tre virgola zero chiusa parentesi. B uguale. Relativa alla base. Uno virgola tre virgola zero. Zero virgola due virgola zero. Sette virgola zero virgola uno. M uguale. Sette virgola zero virgola uno; zero virgola due virgola zero; uno virgola tre virgola zero.	Ascolta nuovamente la matrice dell'esercizio scorrendo con il cursore dal punto dove era arrivato all'inizio della matrice. 

62	Omero: Ok questa è la matrice iniziale.	Apre il foglio di Excel.
63	NVDA: A41 sette, B41 zero, C41 uno. Zero B41, sette A41. A42 zero, B42 due, C42 zero. Due B42, zero A42. A43 uno, B43 tre, C43 zero.	Inserisce elemento per elemento la matrice M nel foglio Excel dalla cella A41 alla C43.
64	Omero: Quindi allora adesso prodotto tra matrici e ovviamente spezzo il problema in due parti perché prima faccio la matrice che ho calcolato nelle celle A31 C33 per la matrice M e dopo andrò a calcolare l'altro pezzo della matrice con il prodotto con la matrice A1 C3. Chiaramente il problema va spezzato.	
65	NVDA: Tre B43, uno A43. A44, A45, A46, A47, A48, A49, A50, A51.	Sposta il cursore fino alla cella A51 in modo da allontanarsi il più possibile dai calcoli svolti fin'ora.
66	Omero: Allora A51. Prima sono quelle A31 e poi questa (la matrice M).	
67	NVDA: Cella A51. Più a tre uno asterisco a quattro uno più b tre uno asterisco a quattro due più c tre uno asterisco a quattro tre. A52. Sette con formula A51. B51	Scrive il primo elemento della prima matrice prodotto. Sposta poi il cursore nella cella in cui andrà a scrivere la prossima combinazione lineare.
68	Omero: E questo è il primo elemento. Poi vediamo il secondo elemento. Questo è l'esercizio del prodotto di matrici fatto all'inizio, l'esercizio uno. Allora secondo elemento.	

69	NVDA: Cella B51. Più a tre uno asterisco b quattro uno più b tre uno asterisco b quattro due più c tre uno asterisco b quattro tre. B52. Zero con formula B51. Sette con formula A51, zero con formula B51, C51. Scrive il secondo elemento della prima matrice prodotto. Sposta poi il cursore prima a sinistra per controllare di trovarsi nella posizione giusta e poi nella cella in cui andrà a scrivere la prossima combinazione lineare.	
70	Omero: Ora C51 diventa.	
71	NVDA: Cella C51. Più a tre uno asterisco c quattro uno più b tre uno asterisco c quattro due più c tre uno asterisco c quattro tre. C52, uno con formula C51. Zero con formula B51, sette con formula A51.	Scrive l'ultimo elemento della prima riga della prima matrice prodotto e si sposta con il cursore, ripassando sulle celle già completate, nella cella A52.
72	Omero: Adesso diventa un po' pesantino fare il conto così comunque vediamo se riesco a non sbagliarlo. Intanto salvo. In A52 dobbiamo scrivere la seconda riga.	
73	NVDA: Sette con formula A51. A52. Cella A52. Più a tre due asterisco a quattro uno più b tre due asterisco a quattro due più c tre due asterisco a quattro tre. A53. Meno ventuno con formula A52. B52.	Scrive i della prima matrice prodotto e l primo elemento della seconda riga che riverifica spostandosi su e giù, poi si sposta con il cursore nella cella B52.
74	Omero: Ok, poi quest'altro è sempre la seconda riga della prima per la seconda colonna della seconda.	
75	NVDA: Cella B52. Più a tre due asterisco b quattro due più b tre due asterisco b quattro due più a.	Scrive una parte della combinazione lineare.

76	Intervistatore: C'è qualcosa che non mi torna.	
77	Omero: Ho sbagliato qualcosa? Allora questo qua rivediamo.	
78	NVDA: Cella B52. Più a tre due asterisco b quattro due più b tre due asterisco b quattro due più a. Meno ventuno con formula A52. B52.	Riascolta quanto scritto scorrendo con il cursore da sinistra a destra per poi cancellarlo, spostarsi nella prima cella a sinistra e tornare nella B52.
79	Omero: Allora provo a farlo diversamente. Provo a usare la tecnica che ho usato all'inizio.	
80	NVDA: Cella B52. Più a tre due più b tre due più c tre due. B53, meno due con formula B52. Cella B52. Più a tre asterisco b quattro uno due più b tre due asterisco b quattro due più c tre due vuoto asterisco b quattro tre. B53, due con formula B52. C52.	Riutilizza la tecnica sfruttata nel primo esercizio, ovvero quella di scrivere prima la somma degli elementi della prima riga della prima matrice e poi andare a completare la combinazione. Sbaglia un inserimento che però non cambia il risultato. Infine, si sposta nella cella sottostante per poi ritornare alla B52 e verificare il risultato per poi spostarsi nella C52. 
81	Omero: Capito cosa ho fatto? Ho prima scritto la riga e poi vado a scrivere la colonna che è un po' più facile. Come facevo nell'esercizio uno.	
82	NVDA: Cella C52. Più a tre due più b tre due più c tre due. C53, meno due con formula C52. Cella C52. Più a tre due asterisco c quattro uno più b tre due asterisco c quattro due più c tre due vuoto asterisco c quattro tre. Due con formula B52, meno tre con formula C52.	Scrive l'ultima combinazione lineare della seconda riga sfruttando sempre la tecnica di cui sopra.

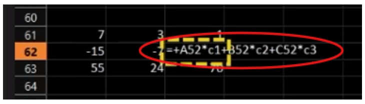
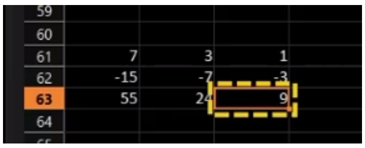
83	Omero: Ok salviamo. A53, allora vediamo di essere un po' più furbi qua per farla più semplice.	
84	NVDA: Cella A53. a tre tre più b tre tre più c tre tre. A54, A53. Seleziona, incolla B53, incolla C53. a tre tre più b tre tre più c tre tre B53. a tre tre più b tre tre più c tre tre A53. Più a tre tre più b tre tre più c tre tre. B53. Più a tre tre più b tre tre più c tre tre. C53. Più a tre tre più b tre tre più c tre tre. Sette con formula B53, sette con formula A53.	Scrive la prima parte della combinazione data dalla somma degli elementi della terza riga della matrice di cambio di base, per poi ricopiarla sulle celle accanto e calcolarla assegnando davanti il segno più.
85	Omero: Ok adesso la riga trentatré, la terza riga l'abbiamo fatta, adesso si tratta delle tre colonne della sezione quaranta. Quindi sarà la colonna A, la colonna B e la colonna C.	
86	NVDA: Cella A53, più a tre tre più b tre tre più c tre tre vuoto. Più a tre tre asterisco a quattro uno più b tre tre asterisco a quattro due più c tre tre asterisco a quattro tre vuoto. A54, sessantaquattro con formula A53. B53.	Completa la combinazione lineare per la prima cella della terza riga della matrice.
87	Omero: È corretta?	
88	Intervistatore: Sì, è corretta.	
89	NVDA: Cella B53, più a tre tre più b tre tre più c tre tre vuoto. Più a tre tre asterisco b quattro uno più b tre tre asterisco b quattro due più c tre tre asterisco b quattro tre vuoto. B54, meno tre con formula B53. C53.	Completa la combinazione lineare per la seconda cella della terza riga della matrice.

90	Cella C53, più a tre tre più b tre tre più c tre tre vuoto. Più a tre tre asterisco c quattro uno più b tre tre asterisco c quattro due più c tre tre asterisco c quattro tre vuoto. C54, nove con formula C53.	Completa la combinazione lineare per la terza cella della terza riga della matrice.
91	Omero: Come vedi ogni tanto l'Excel non legge quello che sta dopo, eh. A un certo punto fa un casino lui, eh. Comunque questa è la prima matrice diciamo ottenuta dal prodotto della matrice dell'inversione delle basi con quella l'applicazione lineare. Bisogna moltiplicare l'applicazione lineare con la matrice A1, A2 e A3 queste qui, giusto?	
92	Intervistatore	Esattamente.
93	Omero: Ok, vado in una nuova sezione.	
94	NVDA: Meno tre con formula B53, sessantaquattro con formula A53. A54, A55, A56, A57, A58, A59, A60, A61.	Scorre con il cursore fino alla cella A61.
95	Omero: A61, partiamo da A61. Allora vediamo di farla in maniera semplice, quindi la prima cosa da fare è quella di scriversi qui, prima di tutto, tutte le righe, così viene più semplice.	

96	NVDA: Cella A61, a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. Seleziona, incolla B61, incolla C61. B61, a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. A61, a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. A62, A61, a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. Più a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. A62, otto con formula A61. B61, a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. Più a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. B62, otto con formula B61. C61, a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. Più a cinque uno più b cinque uno più c cinque uno. C62, otto con formula C61. Otto con formula B61, otto con formula A61.	Compila la prima riga della matrice finale sfruttando il copia incolla e calcolando, una volta assegnato il più alla formula, la somma degli elementi della prima riga della matrice prodotto.
97	A62, otto con formula A61. Meno ventidue con formula A62. Cella A62, a cinque due più b cinque due più c cinque due vuoto. Seleziona, incolla B62, incolla C62. B62, a cinque due più b cinque due più c cinque due. A62, a cinque due più b cinque due più c cinque due.	Incolla la formula anche per colonne.
98	A63, A62, a cinque due più b cinque due più c cinque due. Più a cinque due più b cinque due più c cinque due. A63, meno ventidue con formula A62. B62, a cinque due più b cinque due più c cinque due. Più a cinque due più b cinque due più c cinque due. B63, meno ventidue con formula B62.	

	C62, a cinque due più b cinque due più c cinque due. Più a cinque due più b cinque due più c cinque due. C63, meno ventidue con formula C62. Meno ventidue con formula B62, meno ventidue con formula A62.	Compila la seconda riga della matrice finale sfruttando nuovamente il copia incolla e calcolando, una volta assegnato il più alla formula, la somma degli elementi della seconda riga della matrice prodotto.
99	A63, meno ventidue con formula A62. Settanta con formula A63. Cella A63, a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre vuoto. Seleziona, incolla B63, incolla C63. B63, a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre. A63, a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre.	Incolla la formula per colonne.
100	A64, A63, a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre. Più a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre. A64, settanta con formula A63. B63, a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre. Più a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre. B64, settanta con formula B63. C63, a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre. Più a cinque tre più b cinque tre più c cinque tre. C64, settanta con formula C63. Settanta con formula B63, settanta con formula A63.	Compila la terza riga della matrice finale sfruttando nuovamente il copia incolla e calcolando, una volta assegnato il più alla formula, la somma degli elementi della seconda riga della matrice prodotto.
101	Omero: Adesso li sto calcolando. Ok adesso diciamo la parte iniziale di questo conto qui ho un po' semplificato utilizzando le formule di Excel no? Adesso si tratta di fare la combinazione lineare con la matrice da A1 a C3, quella che avevo scritto all'inizio.	

102	NVDA: Meno ventidue con formula A62, otto con formula A61. Cella A61, più a cinque uno asterisco a uno più b cinque uno asterisco a due più c cinque uno asterisco a tre. Meno ventidue con formula A62, sette con formula A61. Meno ventidue con formula A62.	Completa la combinazione lineare per la cella A61. Si sposta con il cursore nella cella A62.
103	Omero: Adesso mi sto facendo subito A1, A2, A3 così è sempre uguale ed è già, come dire, nel cervello, no?	
104	NVDA: Cella A62, più a cinque due asterisco a uno più b cinque due asterisco a due più c cinque due asterisco a tre. Settanta A63, meno quindici con formula A62. Settanta con formula A63.	Completa la combinazione lineare per la cella A62, spostandosi pertanto per colonne anziché per righe. Si sposta con il cursore nella cella A63.
105	Cella A63, più a cinque tre asterisco a uno più b cinque tre asterisco a due più c cinque tre asterisco a tre. A64, cinquantacinque con formula A63. Meno quindici con formula A62, sette con formula A61, otto con formula B61.	Completa la combinazione lineare per la prima colonna. Si sposta con il cursore nella cella B61 per completare la seconda colonna.
106	Omero: Allora qua ci va la colonna B1, B2, B3.	
107	NVDA: Cella B61, più a cinque uno asterisco b uno più b cinque uno asterisco b due più c cinque uno asterisco b tre. Meno ventidue con formula B62, tre con formula B61. Meno ventidue con formula B62.	Completa la combinazione lineare per la cella B61. Si sposta con il cursore nella cella B62.
108	Cella B62, più a cinque due asterisco b uno più b cinque due asterisco b due più c cinque due asterisco b tre. Settanta B63, meno sette con formula B62. Settanta con formula B63.	Completa la combinazione lineare per la cella B62, spostandosi sempre per colonne anziché per righe. Si sposta con il cursore nella cella B63.

109	Cella B63, più a cinque tre asterisco b uno più b cinque tre asterisco b due più c cinque tre asterisco b tre. B64, ventiquattro con formula B63. Meno sette con formula B62, tre con formula B61, otto con formula C61.	Completa la combinazione lineare per la seconda colonna. Si sposta con il cursore nella cella C61 per completare la matrice.
110	Omero: Ok l'ultimo vettore da moltiplicare che è il C.	
111	NVDA: Cella C61, più a cinque uno asterisco c uno più b cinque uno asterisco c due più c cinque uno asterisco c tre. Meno ventidue con formula C62, uno con formula C61. Meno ventidue con formula C62.	Completa la combinazione lineare per la cella C61. Si sposta con il cursore nella cella C62.
112	Cella C62, più a cinque due asterisco c uno più b cinque due asterisco c due più c cinque due asterisco C tre. Settanta C63, meno tre con formula C62. Settanta con formula C63.	Completa la combinazione lineare per la cella C62, spostandosi sempre per colonne anziché per righe. Si sposta con il cursore nella cella C63. 
113	Cella C63, più a cinque tre asterisco c uno più b cinque tre asterisco c due più c cinque tre asterisco c tre. C64, nove con formula C63.	Completa la combinazione lineare dell'ultima cella così da terminare la matrice. 
114	Omero: Ok, giusto, questa è la matrice richiesta. Spero di aver, come dire, "traguardato".	

C.6 Domanda 1 & 2

Riga	Cosa viene detto
1	Omero: Ah, c'erano le due domande finali allora. Questo facilissimo da rispondere. Che cosa utilizzi? Utilizzo il leggi schermo NVDA che hai visto che attraverso la telefonata senti chi parla. Probabilmente è filtrato dal sistema, cioè, c'è un filtro dentro al microfono, perché mi capita anche con i colleghi di non sentire la lettura. Chiaramente deve essere in grado di leggere le celle di Libre Office che è stato selezionato apposta perché prima avevo un altro che era PlanMaker e non su PlanMaker non funzionava. Un software di calcolo banalmente come Libre Office oppure anche l'OpenOffice. Possono andare bene, meglio ancora l'Excel, ma per ragioni di costo e di licenze e tutto quanto ho preferito usare un software libero. Altri software per fare i conti delle matrici sicuramente ce ne sono altri, come una volta c'era il Mathcad però è a pagamento, io non ce l'ho. E probabilmente ci sono tanti altri software. Ecco, questo, questo sì, per farlo col software.
2	Perché serve usare il software? Perché serve il computer con il lettore di schermo. Perché sennò con la calcolatrice o a mente e la carta uno non sa dove andare a scrivere. Ci vorrebbero tanti pallottolieri quanti sono gli elementi della matrice per poterli contare no? Con un sistema tattile.
3	Sì, queste sono le risposte che ti posso dare. Poi, comunque, si cerca di utilizzare strumenti di comune reperibilità e di costo basso, non tanto per una questione di costo, ma per una questione che, quando si affronta ogni cosa che riguarda la disabilità va provata più volte e non è detto che funzioni quello che c'è scritto sulla carta. Si dice una cosa, poi si va lì e non è così semplicemente oppure non si riesce a capire come fare, magari lo fa ma è arzigogolato, è complesso. E via così. Insomma.
4	Inoltre sulla stessa tastiera ho due tastiere, una che è quella del leggi schermo con i comandi del leggi schermo da tastiera e l'altra è quella del computer quella tradizionale. Altra cosa importante è che utilizzo una tastiera meccanica relativamente vecchia. Questa è una tastiera del duemila dieci, ne ho di più vecchie. Perché? Perché sono più facili da toccare. C'è lo spazio tra F4 e F5, i tasti sono più grossi, il tastierino numerico è ben separato. E quindi è così anche il tasto fine, il tasto inizio, il tasto Canc si trovano e questa non ce l'ha.

La caps lock, che è un comando che serve per il leggi schermo, ha un gradino, ha uno scalino, in quelle vecchie c'è uno scalino dove metti il mignolo e senti che sei lì, oltre che i due segnalini sulla lettera F, sulla lettera J e sul cinque del tastierino numerico che servono per mettere le dita. Non c'è il pulsante Fn funzione per attivare i pulsanti F, che è un'altra complicazione. Non c'è il tastierino sovrapposto alla parte destra della tastiera come nelle tastiere dei portatili che sono veramente detestabili a mio parere.

5 Io utilizzo delle tastiere molto vecchie con un convertitore da connessione PS2 a USB proprio per questo motivo, perché al tatto hanno più corsa, soprattutto sono rigide all'inizio e poi affondi e senti tutta la corsa del pulsante mentre quelle ad isola che usi tu del portatile sono quadrati tutti i piatti con pochissima corsa e a me dà fastidio perché non hai il tempo di creare la consapevolezza di quello che stai facendo assolutamente.

6 Ok, un'altra cosa che mi viene in mente che non ti ho detto ma che avrebbe potuto semplificare ulteriormente la lettura degli esercizi... Se volevi proprio essere... aiutare, avresti potuto scrivere prima riga, poi alla seconda seconda riga. Perché? Perché poi io vado a quella sotto, la legge, ma non so più se sono sulla prima o sulla seconda. E perché prima riga e non riga uno e riga due, perché sennò te la vai a confondere coi numeri che stanno dopo. Quindi non so, questi sono un po' i miei stratagemmi, quello che metto io in pista per risolvere questa cosa qua.

7 Intervistatore: Quando dovevi prendere appunti in classe che stratagemmi utilizzavi?

8 Omero: Allora diciamo che, quando partiamo dall'inizio in università già avevo qualche problema con gli occhi, mi mettevo molto davanti, che significa alzarsi presto la mattina e cercare di aprire bene gli occhi e di copiare più che altro senza tanto ragionare ma concentrarsi su quello che si va a copiare. Facevo così, non mi preoccupavo tanto del capire perché mi avrebbe portato via potenza intellettiva, ma nel copiare correttamente.

9 Oggi che lavoro in ufficio, quando devo prendere appunti apro il mio TXT e scrivo. Battendo ovviamente conosco il metodo 10 dita perché è la prima cosa da imparare. Forse oggi è più importante dello scrivere con la penna. Ecco quindi oggi, se dovessi prendere degli appunti mi preoccuperei di scrivere cercando sempre di incolonnare, cioè ogni cosa ha una sua riga, quindi si fa il più possibile a capo proprio perché per quanto nel momento in cui si va a ricostruire si va a riscrivere così. Poi anziché la virgola sarebbe preferibile usare il punto e virgola. Perché la virgola potrebbe essere confusa con i decimali. Però dipende dagli esercizi. Ecco, dipende da che cosa si va a fare. Anche lì la parentesi quadra non la userei perché diventa complicato fare AltGr più il pulsante non mi ricordo se la e accentata. Comunque lo trovo qual è, e userei comunque le parentesi rotonde. Un'altra cosa che farei è quella di mettere sulla tastiera, su questa tastiera non ce l'ho, ma su altre ce l'ho, in prossimità del numero zero e del cinque che servono per fare uno l'uguale, l'altro per fare la percentuale. Mettere tipo un cerotto che è ruvido e lo senti al tatto. Sono tipici stratagemmi da accecato? Sì, i numeri di solito si mettono col tastierino numerico, però l'uguale se serve fare l'uguale diventa un po' complicato andare al backspace, poi c'è la i accentata, il punto di domanda con l'apostrofino, e poi c'è l'uguale uguale zero, poi comincia il nove eccetera. Poi da quest'altra parte la prima lo devi saltare quindi metti le quattro dita, io faccio così un, due, tre, quattro (mette le dita sui primi tre tasti in alto da sinistra) e poi quello dopo il cinque con l'indice ti sposti e vai con su quello dopo il cinque. Oppure dipende da come sono fatte le tastiere, alcune le senti sotto l'F4 però i tasti non sono mai incolonnati esattamente a squadra, quindi diventa complicato sentirli così. Se ci sono, se ci sono altre domande, insomma, un po' i metodi che userei in algebra lineare sono questi. Poi dipende dalla complicazione, dalla complicazione, perché finché son matrici tre per tre e quattro per quattro si possono fare così a Excel. Quando perché diventa complicato andare a scrivere riferimento righe e colonna. Potenzialmente in Excel c'è anche la possibilità di cambiare i riferimenti, per cui anziché le colonne ABCD puoi mettere C1 C2 C3. Ma perché non lo uso? Perché poi quando devi scrivere riferimento alla colonna, anziché mettere A1 che sono soltanto due digitazioni la A e l'uno devi scrivere R1C1 è il doppio son quattro eh e quindi diventa complicato per niente.

Appendice D

Dispensa Algebra Lineare

Definizione 1. *Il rango di una matrice A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.*

Definizione 2. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

matrice 2 per 2. Allora il determinante di A è il valore

$$a * d - c * d.$$

Sia

$$B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

matrice 3 per 3. Allora il determinante di B è il valore

$$a * (e * i - f * h) - b * (d * i - f * g) + c * (d * h - e * g).$$

Sia

$$C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \\ o & p & q & r \end{pmatrix}$$

matrice 4 per 4. Allora il determinante di C è il valore

$$a*det\begin{pmatrix} f & g & h \\ l & m & n \\ p & q & r \end{pmatrix} - b*det\begin{pmatrix} e & g & h \\ i & m & n \\ o & q & r \end{pmatrix} + c*det\begin{pmatrix} e & f & h \\ i & l & n \\ o & p & r \end{pmatrix} - d*det\begin{pmatrix} e & f & g \\ i & l & m \\ o & p & q \end{pmatrix}.$$

Se il determinante di A è 0, allora A non è invertibile.

Teorema 1. *Sia A una matrice invertibile, allora la sua inversa è*

$$A^{-1} = (b_{ij}), \quad dove \ \ b_{ij} = \frac{A_{ji}}{det(A)}.$$

Quindi un metodo per calcolare l'inversa di A consiste in: costruire la matrice dei complementi algebrici, il cui elemento di posto ij è

$$(c_{ij}) = (-1)^{i+j} * det(A_{ij}),$$

trasporla e dividerla per il determinante di A. Se B è la matrice inversa di A allora:

$$A \cdot B = B \cdot A = Id.$$

Teorema 2 (Cramer)**.** *Dato un sistema di n equazioni lineari in n incognite*

$$A \cdot x = b$$

con $det(A) \neq 0$, esso ammette esattamente una soluzione.

Teorema 3. *Sia $A \cdot x = b$ un sistema di Cramer, allora la soluzione x del sistema è il vettore di elementi*

$$x_i = \frac{det(A_i)}{det(A)}$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo l'i-esima colonna di A con il vettore b.

Teorema 4. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $F : V \to V$ una trasformazione lineare. Siano inoltre $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ due basi ordinate di V. Allora la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{C}$ è data dal prodotto della matrice M di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, che ha sulle colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{C}$ rispetto a quelli della base $\mathcal{B}$ (vedi esempio 2), per la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$, per la matrice inversa di M, cioè la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, che ha sulle colonne le coordinate dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a quelli della base $\mathcal{C}$.*

Esempio 1 (riduzione di una matrice)**.** *Considero la matrice 3 per 3*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sostituisco alla riga 2 la riga 2 meno tre volte la riga 1 e sostituisco alla riga 3 la riga 3 meno la riga 1 e ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto devo solamente far comparire uno zero in posizione 3,2. Per farlo sostituisco alla riga 3 due volte la terza riga meno la riga 2 e ottengo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

che è una matrice a scala di rango 3 perchè sulle righe ha 3 vettori linearmente indipendenti.

Esempio 2 (matrice di cambiamento di base)**.** *Sia $V = \mathbb{R}^2$. Siano date le basi*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}, \; \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Per scrivere la matrice del cambiamento di base che permette di passare dalla base C a B dobbiamo determinare i coefficienti delle combinazioni lineari che permettono di scrivere i vettori di B rispetto alla base C.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di passaggio si ottiene disponendo per colonne i coefficienti delle precedenti combinazioni lineari

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Viceversa, per scrivere la matrice del cambiamento di base che permette di passare dalla base B a C dobbiamo determinare i coefficienti delle combinazioni lineari che permettono di scrivere i vettori di C rispetto alla base B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matrice di passaggio si ottiene disponendo per colonne i coefficienti delle precedenti combinazioni lineari

$$N = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Osservo che M e N sono una l'inversa dell'altra.

Bibliografia

[Abrahamson et al., 2019] Abrahamson, D., Flood, V. J., Miele, J. A., and Siu, Y.-T. (2019). Enactivism and ethnomethodological conversation analysis as tools for expanding universal design for learning: The case of visually impaired mathematics students. *ZDM*, 51:291–303.

[Ahmetovic et al., 2021] Ahmetovic, D., Bernareggi, C., Bracco, M., Murru, N., Armano, T., and Capietto, A. (2021). Latex as an inclusive accessibility instrument for highschool mathematical education. In *Proceedings of the 18th international web for all conference*, pages 1–9.

[Archambault et al., 2007] Archambault, D., Stöger, B., Fitzpatrick, D., Miesenberger, K., et al. (2007). Access to scientific content by visually impaired people. *Upgrade*, 8(2):14.

[Assad, 2015] Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving. *International Journal of Education and Social Science*, 2(1):17–26.

[Bonfigliuoli and Pinelli, 2010] Bonfigliuoli, C. and Pinelli, M. (2010). *Disabilità visiva: teoria e pratica nell'educazione per alunni non vedenti e ipovedenti*. Edizioni Erickson.

[Cohen et al., 2002] Cohen, L., Manion, L., and Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. routledge.

[De Freitas and Sinclair, 2014] De Freitas, E. and Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom*. Cambridge University Press.

[Dell'Osbel, 1992] Dell'Osbel, G. (1992). La condizione dei non vedenti: aspetti medico-epidemiologici e socio-assistenziali. *D. Galati, Vedere con la mente. Conoscenza, affettività, adattamento dei non vedenti. Milano: Franco Angeli.*

[Dorier, 1995] Dorier, J.-L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia mathematica*, 22(3):227–261.

[Dorier, 2000] Dorier, J.-L. (2000). *On the teaching of linear algebra*, volume 23. Springer Science & Business Media.

[Dorier, 2003] Dorier, J.-L. (2003). Teaching linear algebra at university. *arXiv preprint math/0305018*.

[Elio Borgonovi, 2022] Elio Borgonovi, Francesco Alberto Comellini, F. F. L. M. G. M. A. S. G. T. (2022). Gli studenti con disabilità nelle università italiane.

[Goldin, 1997] Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, pages 40–177.

[Goldin, 2012] Goldin, G. A. (2012). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In *Handbook of research design in mathematics and science education*, pages 517–545. Routledge.

[Harel, 2000] Harel, G. (2000). Three principles of learning and teaching mathematics: Particular reference to linear algebra-old and new observations. *On the teaching of linear algebra*, pages 177–189.

[Healy and Fernandes, 2014] Healy, L. and Fernandes, S. (2014). The gestures of blind mathematics learners. *Emerging perspectives on gesture and embodiment in mathematics*, pages 125–150.

[Healy et al., 2016] Healy, L., Ramos, E. B., Fernandes, S. H. A. A., and Peixoto, J. L. B. (2016). Mathematics in the hands of deaf learners and blind learners: Visual–gestural–somatic means of doing and expressing mathematics. In *Mathematics education and language diversity: The 21st ICMI study*, pages 141–162. Springer International Publishing Cham.

[Herzberg and Rosenblum, 2014] Herzberg, T. S. and Rosenblum, L. P. (2014). Print to braille: Preparation and accuracy of mathematics materials in k-12 education. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 108(5):355–367.

[Hillel and Sierpinska, 1994] Hillel, J. and Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. *the Proceedings PME*, 18(2):65–72.

[Hodges and Keller, 1999] Hodges, J. S. and Keller, M. J. (1999). Visually impaired students' perceptions of their social integration in college. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 93(3):153–165.

[Hutchinson et al., 1998] Hutchinson, J. S. O., Atkinson, K., and Orpwood, J. (1998). *Breaking down barriers: Access to further and higher education for visually impaired students.* Nelson Thornes.

[ICF, 2001] ICF, C. I. d. F. (2001). della disabilità e della salute.

[Jaworski et al., 2011] Jaworski, B., Treffert-Thomas, S., and Bartsch, T. (2011). Linear algebra with a didactical focus.

[Ketema Dabi and Negassa Golga, 2023] Ketema Dabi, G. and Negassa Golga, D. (2023). The role of assistive technology in supporting the engagement of students with visual impairment in learning mathematics: An integrative literature review. *British Journal of Visual Impairment*, page 02646196231158922.

[Levinson, 2019] Levinson, E. (2019). *Transition: Facilitating the postschool adjustment of students with disabilities*. Routledge.

[Lonchamp, 2012] Lonchamp, J. (2012). An instrumental perspective on cscl systems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, 7:211–237.

[Machell et al., 1996] Machell, J. et al. (1996). Library and information services for visually impaired people: national guidelines. *(No Title)*.

[Maffia et al., 2023] Maffia, A., Manolino, C., Miraliotta, E., et al. (2023). Algebraic structure sense in a blind subject. In *PROCEEDINGS OF THE PME CONFERENCE*, volume 3, pages 307–314. University of Haifa.

[Mason and McCall, 2013] Mason, H. and McCall, S. (2013). *Visual impairment: Access to education for children and young people*. Routledge.

[Moore, 1995] Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22(3):262–303.

[Norman et al., 1998] Norman, K., Caseau, D., and Stefanich, G. P. (1998). Teaching students with disabilities in inclusive science classrooms: Survey results. *Science Education*, 82(2):127–146.

[PEDERSEN, 2007] PEDERSEN, T. V. (2007). Design of a didactic situation–mathematical experiments in linear algebra.

[Piaget, 1977] Piaget, J. (1977). *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*. FeniXX.

[Rabardel and Bourmaud, 2003] Rabardel, P. and Bourmaud, G. (2003). From computer to instrument system: a developmental perspective. *Interacting with computers*, 15(5):665–691.

[Rabardel and Samurçay, 2001] Rabardel, P. and Samurçay, R. (2001). From artifact to instrument-mediated learning. In *Symposium on New challenges to research on Learning*, pages 21–23.

[Richardson et al., 2002] Richardson, J. T., Roy, A. W., Richardson, J., and Roy, A. (2002). The representation and attainment of students with a visual impairment in higher education. *British Journal of Visual Impairment*, 20(1):37–48.

[Sahin and Yorek, 2009] Sahin, M. and Yorek, N. (2009). Teaching science to visually impaired students: A small-scale qualitative study. *Online Submission*, 6(4):19–26.

[Sedaghatjou et al.,] Sedaghatjou, M., Kooshyar, F., and Campbell, S. R. A novel approach on enabling advanced mathematical communication in absence of sight.

[Stöger and Miesenberger, 2015] Stöger, B. and Miesenberger, K. (2015). Accessing and dealing with mathematics as a blind individual: State of the art and challenges. *Enabling Access for Persons with Visual Impairment*, 199:203.

[van Leendert et al., 2023] van Leendert, A., Boonstra, L., Doorman, M., Drijvers, P., van der Steen, J., and Pel, J. (2023). An exploratory study to improve reading and comprehending mathematical expressions in braille. *British Journal of Visual Impairment*, 41(2):312–327.

[Verillon and Rabardel, 1995] Verillon, P. and Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. *European journal of psychology of education*, pages 77–101.

[White, 2008] White, T. (2008). Debugging an artifact, instrumenting a bug: Dialectics of instrumentation and design in technology-rich learning environments. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13:1–26.