

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

LE ONDE GRAVITAZIONALI E LA LORO PROPAGAZIONE

Relatore:
Prof.
Roberto Casadio

Presentata da:
Giovanni Guarnera

Anno Accademico 2023/2024

*A Claudia,
ai miei genitori*

Sommario

Le onde gravitazionali, teorizzate da Einstein nella sua Relatività Generale, costituiscono una forma unica di radiazione nel panorama cosmico, distinta dalla radiazione elettromagnetica che ha a lungo rappresentato il nostro unico strumento di osservazione e comprensione dell'Universo. Originare da fenomeni cosmici in cui grandi masse variano la loro distribuzione molto velocemente, le onde gravitazionali si propagano nello spazio quasi del tutto indisturbate, trasportando informazioni preziose sui sistemi che le hanno generate, come buchi neri, stelle di neutroni e supernovae. Questa tesi si propone di esplorare gli aspetti fondamentali legati alla generazione, rivelazione e propagazione di tali onde. Viene presentato il formalismo che sottende questi processi e sono trattati i sistemi fisici responsabili della generazione e della rivelazione della radiazione gravitazionale.

Abstract

Gravitational waves, theorized by Einstein in his General Relativity, are a unique form of radiation in the cosmic landscape, different from electromagnetic radiation, which has been our only chance of observing the Universe for a long time. They originate from cosmic phenomena in which large masses rapidly change their distribution and they propagate through space, undisturbed, carrying valuable information about the systems responsible of their emission, such as black holes, neutron stars, and supernovae. This thesis aims to explore the fundamental aspects related to the generation, detection, and propagation of such waves. The formalism related to these processes is presented, and the physical systems responsible for the generation and detection of gravitational radiation are discussed.

Indice

Introduzione	3
1 Fondamenti di Relatività Generale	5
1.1 Varietà differenziabili, metrica e varietà Riemanniane	6
1.2 Trasporto parallelo, geodetiche e curvatura	8
1.3 Fisica su spazi curvi	11
1.4 Equazioni di campo di Einstein	13
1.5 Limite Newtoniano	14
1.6 Verso le onde gravitazionali	16
2 Onde gravitazionali	19
2.1 Generazione delle onde gravitazionali	19
2.2 Sistemi che generano le onde gravitazionali	23
2.3 Rivelazione delle onde gravitazionali	28
3 Propagazione delle onde gravitazionali	35
3.1 Soluzioni di onda piana nella teoria linearizzata	36
3.2 Gauge trasverso a traccia nulla	37
3.3 Effetto del passaggio dell'onda gravitazionale sulle particelle libere	39
3.4 Polarizzazione delle onde gravitazionali	41
3.5 Flusso di energia delle onde gravitazionali	43
3.6 L'informazione trasportata dalle onde gravitazionali	46

Conclusioni	47
A Luminosità di un'onda gravitazionale in funzione della luminosità interna	49

Introduzione

Le onde gravitazionali sono perturbazioni dello spazio-tempo che si propagano alla velocità della luce, interagendo debolmente con la materia che incontrano. Durante lo scorso secolo, la loro esistenza è stata a lungo oggetto di discussione. Einstein stesso, diverse volte, si dichiarò scettico sulla questione, nonostante fu proprio la sua teoria della Relatività Generale, pubblicata nel 1916, a suggerire che potesse esistere questo tipo di radiazione. Fino al 1969, solo Weber e i suoi studenti si dedicarono alla ricerca delle onde gravitazionali e fu quando dichiararono di averle osservate che molti iniziarono a costruire i propri rivelatori, per replicarne i risultati. In verità, il gruppo di Weber aveva commesso un errore e i nuovi rivelatori, per molti anni, fallirono tutti nell'osservazione delle onde. Ciò nonostante, molti gruppi hanno continuato a lavorare nel settore e, ad oggi, alcuni di loro hanno, finalmente avuto successo. Il 14 Settembre 2015, per la prima volta, gli interferometri LIGO e VIRGO hanno osservato il segnale delle onde gravitazionali, modificando per sempre la storia dell'astronomia osservativa, rivelando nuovi orizzonti nella comprensione dell'Universo.

I motivi per cui abbiamo investito così tanto tempo e risorse nell'osservazione della radiazione gravitazionale sono diversi. In principio c'è la necessità umana di indagare la realtà in maniera sempre più profonda, alla ricerca di risposte; ai fini pratici, invece, dimostrare l'esistenza delle onde gravitazionali è stata un'importantissima conferma della validità della teoria della Relatività Generale e, soprattutto, ha dato il via a nuove modalità di osservazione del cosmo. Infatti, questo tipo di radiazione permette la rivelazione

di eventi cosmici estremi come la fusione di buchi neri e stelle di neutroni e, in ragione della sua interazione debole con la materia, è l'unica capace di trasportare informazioni rilevanti provenienti da sistemi opachi alla radiazione elettromagnetica, come i nuclei delle *supernovae* o perfino il *Big Bang*. Attualmente, il limite più grande all'osservazione delle onde gravitazionali è dato dalle strumentazioni: gli interferometri che possediamo non sono sufficientemente sensibili per rivelare radiazione gravitazionale proveniente da sistemi di questo tipo, ma rivelatori più sofisticati sono in fase di progettazione e saranno operativi entro qualche decennio.

In questo lavoro di tesi sarà trattata la teoria delle onde gravitazionali con un accento particolare allo studio della loro propagazione. Nel dettaglio, nel primo capitolo saranno poste le basi della teoria della Relatività generale, dal punto di vista del formalismo matematico e fisico. Il secondo capitolo verterà sullo studio della generazione e della rivelazione della radiazione gravitazionale. In particolare, si deriveranno le equazioni che descrivono il processo di generazione delle onde e si approfondiranno i sistemi fisici responsabili della loro generazione e i rivelatori utilizzati per la loro osservazione. Infine, nel terzo e ultimo capitolo, saranno approfonditi gli aspetti relativi alla propagazione delle onde gravitazionali.

Capitolo 1

Fondamenti di Relatività Generale

*Cerco un centro di gravità
permanente
che non mi faccia mai cambiare
idea sulle cose, sulla gente.*

— Franco Battiato, *Centro di
gravità permanente*

Per poter discutere di onde gravitazionali, è prima necessario introdurre una serie di concetti ed equazioni che derivano dalla Relatività Generale di Einstein, teoria pubblicata nel 1916 che ha stravolto il paradigma della fisica del '900. La sua importanza risiede nei seguenti principi:

- **Primo principio della Relatività Generale (Principio di equivalenza):** in un corpo la massa inerziale e la massa gravitazionale sono uguali;
- **Secondo principio della Relatività Generale:** le leggi della fisica devono essere di natura tale da valere rispetto ad un sistema di riferimento in moto arbitrario;

- **Principio di Mach:** il campo G , che descrive le proprietà dello spazio, è completamente determinato dalle masse dei corpi.

Un'importante conseguenza di questi principi è la reinterpretazione dell'interazione gravitazionale, rappresentata non più come interazione a distanza tra corpi massivi (come previsto dalla teoria Newtoniana) ma come effetto della curvatura dello spazio-tempo: in assenza di masse lo spazio è piatto, mentre, in loro presenza, è da esse curvato. Queste ultime, muovendosi in uno spazio curvo, cadono le une verso le altre.

Infine, il rigoroso formalismo matematico della teoria della Relatività Generale permette, coerentemente con quanto postulato dal suo secondo principio, una trattazione valida in tutti i sistemi di riferimento, inerziali e non.

1.1 Varietà differenziabili, metrica e varietà Riemanniane

Il concetto matematico di spazio curvo ha origine nelle varietà. Di particolare interesse sono le varietà differenziabili, cioè spazi topologici che localmente sono approssimabili allo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n o ad una sua porzione.

Per questi oggetti è possibile definire una *mappa*, cioè un'applicazione da un aperto della varietà $D \subseteq \mathcal{M}$ a \mathbb{R}^n o un suo sottoinsieme, che si esprime $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. ϕ si dice continua se manda ogni insieme aperto $A \subseteq D$ in un insieme (o sottoinsieme) aperto di \mathbb{R}^n .

Una *carta* è una coppia (A, ϕ) , dove $A \subseteq \mathcal{M}$ e ϕ è una mappa continua invertibile, $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}^n$. La mappa di una carta è un insieme di n coordinate per l'insieme aperto $A \subseteq \mathcal{M}$.

Infine, una collezione \mathcal{A} di carte è detta *atlante* se ricopre del tutto \mathcal{M} . Matematicamente, una varietà è una classe di equivalenza di atlanti. Degli esempi di varietà differenziali sono la superficie di una sfera o un qualsiasi "iperpiano" m -dimensionale in uno spazio euclideo n -dimensionale ($m \leq n$).

In fisica, quasi tutte le varietà considerate sono differenziabili quasi-ovunque e, nello specifico, lo spazio-tempo, di fondamentale interesse in Relatività Generale, è differenziabile.

Varietà Riemanniana. Per poter misurare tempi e distanze tra punti, è essenziale che nelle varietà considerate sia introdotta una metrica, individuata da un tensore metrico. Si dice tensore metrico, e lo si indica con \mathbf{g} , un tensore di tipo (0,2) che manda due vettori qualsiasi dello spazio in cui è definito in un numero reale e che rispetti le seguenti proprietà:

1) è simmetrico:

$$g(\vec{v}, \vec{w}) = g(\vec{w}, \vec{v}) = g_{ij}v^i w^j \quad ,$$

dove $g_{ij} = g(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$;

2) è non degenere:

$$[g(\vec{v}, \vec{w}) = 0, \forall \vec{w} \in T_p \iff \vec{v} = 0] \iff \det(g_{ij}) \neq 0 \quad .$$

In presenza di una metrica, se questa è definita positiva (cioè se $\mathbf{g}(\vec{V}, \vec{V}) > 0$), allora la varietà è detta Riemanniana, altrimenti è detta pseudo-Riemanniana. Visto che, per considerazioni fisiche, è sempre possibile costruire un sistema localmente inerziale in un punto e per questi sistemi la metrica è quella di Minkowski

$$\eta_{\alpha\beta} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ,$$

allora, in tutte le varietà Riemanniane considerate la metrica avrà segnatura (3, 1, 0), equivalente a quella di Minkowski, dal momento che la segnatura è conservata da qualsiasi cambio di coordinate.

Da sola, una varietà differenziabile è un oggetto “primitivo”, che consiste in una collezione amorfa di punti arrangiati localmente come punti dello spazio euclideo, ma quando si introduce una metrica le si conferisce una specifica

forma, semplificando la trattazione della sua curvatura.

Per dare una precisa definizione matematica di quest'ultima, è necessario fare uso del trasporto parallelo lungo percorsi orientati.

1.2 Trasporto parallelo, geodetiche e curvatura

Per dare una precisa definizione matematica di curvatura, è innanzitutto importante distinguere tra curvatura intrinseca ed estrinseca. La curvatura estrinseca di una varietà è quella che si ha considerando quest'ultima come una superficie in uno spazio di dimensione maggiore, confrontando le linee che giacciono sulla superficie con quelle "dritte" che non le appartengono, mentre quella intrinseca è data dalle relazioni tra i punti lungo cammini sulla varietà stessa. Quando si parla di curvatura dello spazio-tempo, ci si riferisce a quella intrinseca, dato che le linee di universo sono confinate a rimanere nello spazio-tempo. Solo questo tipo di curvatura sarà oggetto di studio.

Trasporto parallelo. Sia definito un campo vettoriale \vec{V} sulla varietà \mathcal{M} e sia data una curva γ su \mathcal{M} . Se i vettori \vec{V} , a punti infinitesimamente vicini della curva, sono paralleli e conservano le componenti, allora \vec{V} è stato trasportato parallelamente lungo la curva. In formalismo matematico, se $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$ è il vettore tangente alla curva (λ è il parametro lungo la curva), allora, in un sistema di riferimento localmente inerziale, in un punto \mathcal{P} , per le componenti di \vec{V} deve valere:

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0 \text{ in } \mathcal{P},$$

cioè

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = U^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = 0 \text{ in } \mathcal{P},$$

visto che $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ in \mathcal{P} nel sistema di riferimento localmente inerziale. La terza uguaglianza, però, è invariante in qualunque sistema di riferimento, quindi può essere scelta come *definizione di trasporto parallelo di \vec{V} lungo \vec{U}* .

Geodetiche. Le geodetiche sono curve che trasportano il proprio vettore tangente parallelo a sè stesso, cioè:

$$\nabla_{\vec{U}} \vec{U} = U^\beta U^\alpha_{;\beta} = U^\beta U^\alpha_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0 .$$

Se scegliamo λ come parametro della curva, allora $U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ e $U^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{d}{d\lambda}$:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 . \quad (1.1)$$

Questa è un'equazione differenziale del secondo ordine quasi-lineare per $x^\alpha(\lambda)$, dove λ è detto parametro affine. Quindi, data una posizione iniziale (x_0^α) e una direzione iniziale (U_0^α) esiste un'unica soluzione, cioè una sola geodetica.

Curvatura. Sia \mathcal{M} una varietà differenziabile e sia definito su di essa un meccanismo per il trasporto parallelo di vettori lungo percorsi orientati. Allora, se nello spostare un generico vettore \mathbf{V} lungo un percorso chiuso γ sulla varietà, questo non ritorna parallelo a sè stesso, \mathcal{M} è una varietà a curvatura non nulla.

Si considerino due campi vettoriali $\vec{V} = \frac{d}{d\lambda}$ e $\vec{W} = \frac{d}{d\mu}$, tali che $[\vec{V}, \vec{W}] = 0$, in modo che definiscano un circuito chiuso (vedi Figura 1.1). Si definisca in un punto A della varietà \mathcal{M} un vettore generico \vec{U} e se ne effettui il trasporto parallelo in un punto C tramite due percorsi diversi.

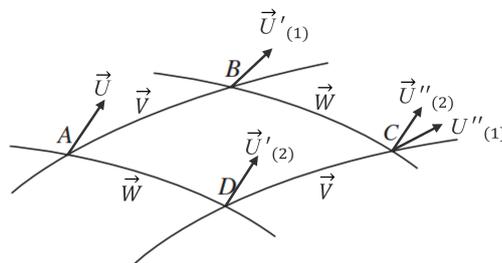


Figura 1.1: Trasporto parallelo di un generico vettore \mathbf{V} su un percorso chiuso.

Si trasporti parallelamente prima \vec{U} in B lungo \vec{V} , e poi in C lungo \vec{W} , ottenendo

$$\vec{U}_{(1)}'' = e^{\delta\mu\nabla_{\vec{w}}} e^{\delta\lambda\nabla_{\vec{v}}} \vec{U} .$$

Si proceda analogamente sull'altro percorso, trasportando parallelamente \vec{U} in D lungo \vec{W} e poi in C lungo \vec{V} , ottenendo, così,

$$\vec{U}_{(2)}'' = e^{\delta\lambda\nabla_{\vec{v}}} e^{\delta\mu\nabla_{\vec{w}}} \vec{U} .$$

Per spostamenti infinitesimali $|\delta\lambda| \ll 1$ e $|\delta\mu| \ll 1$, rispettivamente lungo \vec{V} e \vec{W} , la differenza tra i due vettori risultanti è il vettore

$$\delta\vec{U} = \vec{U}_{(1)}'' - \vec{U}_{(2)}'' = \delta\lambda\delta\mu [\nabla_{\vec{v}}, \nabla_{\vec{w}}] \vec{U} + O(3) .$$

Si definisca il *tensore di Riemann* come il tensore R di tipo (1,3) che, date due direzioni \vec{V} e \vec{W} , produce un tensore di tipo (1,1) $R(\vec{V}, \vec{W})$, la cui contrazione con il vettore \vec{U} genera

$$R(\vec{V}, \vec{W})\vec{U} = [\nabla_{\vec{v}}, \nabla_{\vec{w}}]\vec{U} - \nabla_{[\vec{v}, \vec{w}]}\vec{U} . \quad (1.2)$$

Ricordando che nel sistema di riferimento scelto $[\vec{V}, \vec{W}] = 0$, allora l'Eq. (1.2) può essere espressa nel seguente modo:

$$\delta\vec{U} = \delta\lambda\delta\mu R(\vec{V}, \vec{W})\vec{U} + O(3) .$$

Questa è la precisa definizione matematica di curvatura intrinseca di una varietà: quando il tensore di Riemann non è identicamente nullo, trasportare parallelamente un vettore lungo un percorso chiuso non riporta il vettore al suo valore iniziale. Invece

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = 0 \iff \text{varietà piatta} ,$$

cioè, quando il tensore di Riemann è nullo, sulla varietà *piatta* si ha una definizione globale di parallelismo e un generico vettore può essere trasportato parallelamente su qualsiasi percorso chiuso ritornando a sè stesso.

Quindi, il tensore di Riemann caratterizza la curvatura dello spazio-tempo e si può dimostrare che è legato alla metrica dalla relazione:

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}) . \quad (1.3)$$

Inoltre, $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ è antisimmetrico nella prima coppia e nella seconda coppia di indici e simmetrico rispetto allo scambio delle due coppie.

Deviazione geodetica. In uno spazio curvo, linee parallele, quando estese, non restano tali e questo si può formulare matematicamente usando il tensore di Riemann. Infatti, si considerino due geodetiche γ e γ' su una varietà (con vettori tangenti \vec{V} e \vec{V}' e parametro affine λ) e si definisca il "vettore connessione" $\vec{\xi}$ che collega punti diversi delle due geodetiche a intervalli uguali di λ . Per quest'ultimo, vale la seguente equazione, in qualsiasi sistema di riferimento:

$$\nabla_{\vec{V}}\nabla_{\vec{V}}\xi^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}V^{\mu}V^{\nu}\xi^{\beta} . \quad (1.4)$$

Questa è l'*equazione di deviazione geodetica* [1] e mostra che le forze di marea date dall'effetto di un campo gravitazionale possono essere rappresentate dalla curvatura dello spazio-tempo su cui le particelle seguono traiettorie geodetiche.

1.3 Fisica su spazi curvi

Mentre nella teoria della Relatività Speciale è possibile costruire sistemi di riferimento inerziali globali, nella Relatività Generale ciò non è permesso. Questo è dovuto al fatto, e lo si prova sperimentalmente, che in presenza di un campo gravitazionale non uniforme gli orologi sono soggetti a desincronizzazione, cioè al fenomeno del redshift gravitazionale; pertanto, si possono solo individuare delle piccole regioni di spazio-tempo in cui costruire sistemi di riferimento localmente inerziali.

Secondo la Relatività Generale,

un sistema è inerziale se, rispetto ad esso, un corpo, lasciato a sé stesso, persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme.

I sistemi di riferimento inerziali sono, quindi, quelli corrispondenti ad osservatori in caduta libera (che si muovono lungo traiettorie geodetiche) e il famoso esperimento mentale di Einstein chiarisce il fatto: per un osservatore dentro un ascensore senza finestre, è impossibile distinguere tra il caso in cui l'ascensore cade verso il basso, soggetto all'attrazione gravitazionale, e il caso in cui l'ascensore è fermo nel vuoto. Inoltre, per un osservatore dentro un ascensore in moto accelerato nel vuoto, gli oggetti cadono come se fossero soggetti alla forza di attrazione gravitazionale in un ascensore fermo. Su questa intuizione è fondato il principio di equivalenza, in due diverse forme:

Principio di equivalenza debole: particelle in caduta libera si muovono su geodetiche di tipo tempo dello spazio-tempo.

In forma più generale:

Principio di equivalenza di Einstein: un qualsiasi esperimento fisico, che non coinvolga né la gravità né campi definiti su grandi regioni dello spazio, se eseguito in un sistema di riferimento inerziale in caduta libera, avrà lo stesso esito che avrebbe se fosse eseguito nello spazio-tempo piatto della Relatività Speciale.

Quindi, la gravità localmente non introduce nulla di nuovo e tutti i suoi effetti si manifestano su regioni estese dello spazio-tempo.

Per degli osservatori in sistemi non inerziali, invece, in accordo con il secondo principio della Relatività Generale, le leggi fisiche della Relatività Speciale avranno la forma di equazioni tensoriali, invarianti per quanto si evince dalla geometria differenziale, con le derivate parziali rimpiazzate dalle derivate covarianti. Questo si traduce nel seguente principio:

Principio di covarianza generale: *le leggi della fisica in un sistema di riferimento generico si ottengono dalle leggi della Relatività Speciale rimpiazzando le quantità tensoriali dei gruppi di Lorentz con le quantità tensoriali della varietà dello spazio-tempo.*

Determinata la descrizione della gravità, e la sua azione sulla materia, basata

sull'idea di varietà curva con una metrica, è ora necessario ricavare una legge che mostri come le sorgenti di campi gravitazionali determinano la metrica.

1.4 Equazioni di campo di Einstein

Per ricavare le equazioni di campo di Einstein, si cerca una descrizione quanto più vicina a quella delle *equazioni di Maxwell con sorgente* in forma tensoriale

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu\nu} &= -J^\nu, \\ F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\end{aligned}\tag{1.5}$$

per cui vale la *conservazione della densità di corrente*:

$$\partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu}) = \partial_\nu J^\nu = 0.\tag{1.6}$$

Visto che, in assenza di forze non gravitazionali, il moto di una particella neutra è descritto dall'Eq. (1.1), si associa alle gamma di Christoffel il ruolo della forza gravitazionale e alla metrica quello del potenziale gravitazionale. Di conseguenza, si cerca, per il lato sinistro delle equazioni che si stanno ricavando, un operatore differenziale che sia al più al secondo ordine per la metrica. L'oggetto ricercato è il tensore di Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}\tag{1.7}$$

per cui valgono le seguenti proprietà: è simmetrico e soddisfa l'*identità di Bianchi*

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0,\tag{1.8}$$

che si può considerare come qualcosa di analogo all'Eq. (1.6).

Il lato destro delle equazioni è quello in cui deve apparire la sorgente che, per rispettare l'uguaglianza con $G^{\mu\nu}$, deve essere un tensore di rango (2,0). In particolare, questo oggetto è il cosiddetto tensore energia-impulso

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + p(g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu),$$

dove ρ e p sono, se si approssima la sorgente ad un fluido perfetto, rispettivamente, densità e pressione (dovuta a forze non gravitazionali) misurate localmente da un osservatore che si muove col fluido, mentre \mathbf{u} è la quadrivelocità locale. Inoltre, per $T^{\mu\nu}$ vale la seguente legge di conservazione energia-impulso:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 ,$$

compatibilmente con quanto si richiede per $G^{\mu\nu}$ nell'Eq. (1.8), visto che nelle equazioni che si stanno ricavando si sta richiedendo l'uguaglianza

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} .$$

La costante k è determinata per considerazioni di analisi dimensionale e in modo da ritrovare, nel caso limite delle equazioni, la legge di Newton. In particolare, si ha $k = 8\pi G_N$, dove G_N è la costante di gravitazione universale. In definitiva, le *equazioni di campo di Einstein* [1] hanno la forma

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G_N T^{\mu\nu} , \tag{1.9}$$

corretta, successivamente, da Einstein con l'aggiunta della *costante cosmologica* Λ , per permettere come soluzione particolare delle equazioni quella di un Universo statico. In realtà, diversi anni dopo l'elaborazione della teoria della Relatività Generale, Hubble scoprì l'espansione dell'Universo, costringendo Einstein ad abbandonare la costante. Il valore di Λ , ad oggi, è stato misurato essere diverso da zero ma, comunque, molto piccolo. Si possono, quindi, usare le Eq. (1.9) come equazioni principali.

Ad eccezione del prossimo paragrafo, sarà sempre assunta la convenzione $G_N = c = 1$.

1.5 Limite Newtoniano

Per verificare la validità delle equazioni di campo di Einstein, è necessario che queste verifichino il limite Newtoniano quando sono imposte determinate condizioni. In particolare, se ne richiedono due: il limite non relativistico

della velocità e l'approssimazione di campo debole. Si richiede, quindi, che le velocità siano molto piccole rispetto a quella della luce e la metrica sia statica e molto vicina a quella di Minkowski, nel sistema considerato. Questo è soddisfatto matematicamente imponendo per la velocità $\vec{u} = \epsilon \vec{v}$ e per la metrica

$$g_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} , \quad (1.10)$$

con $0 < \epsilon < 1$. Sia il limite non relativistico che quello di campo debole si trovano espandendo tutte le espressioni in ϵ e tenendo solo i termini al primo ordine. Rispetto ad ϵ , la quadrivelocità può essere espressa come

$$w^\mu = (1, \vec{0}) + \epsilon(0, \vec{v}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) ,$$

da cui

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \epsilon \left(0, \frac{d\vec{v}}{dt} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) . \quad (1.11)$$

Per i simboli di Christoffel, invece, si ha

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\epsilon}{2} \eta^{\alpha\beta} (h_{\mu\beta,\nu} + h_{\nu\beta,\mu} - h_{\mu\nu,\alpha}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) , \quad (1.12)$$

dove le derivate della metrica sono diverse da zero solo se non sono fatte rispetto al tempo.

Sostituendo le Eq. (1.11) e (1.12) nell'Eq. (1.1), si ricavano, per le componenti non banali sviluppate al primo ordine in ϵ , le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \approx \epsilon \frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{\mu\nu} \delta_0^\mu \delta_0^\nu \\ &\approx \epsilon \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} - \frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00,i} \right) , \end{aligned} \quad (1.13)$$

dove si è usata l'approssimazione

$$\Gamma^i_{00} \approx \frac{\epsilon}{2} \eta^{ii} (h_{0i,0} + h_{0i,0} - h_{00,i}) = -\frac{\epsilon}{2} \eta^{ii} h_{00,i} .$$

Nel limite di $\epsilon \rightarrow 1$, se si chiama "potenziale gravitazionale" la funzione

$$V = -\frac{1}{2} \eta^{ii} h_{00} \approx -\frac{1}{2} h_{00} , \quad (1.14)$$

allora l'Eq. (1.13) è equivalente all'equazione di Newton:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^i} .$$

Per verificare che questo potenziale coincida con quello Newtoniano, bisogna linearizzare le equazioni di campo di Einstein al primo ordine in ϵ

$$\epsilon(-\square h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\square h + \partial_\mu\partial^\lambda h_{\lambda\nu} + \partial_\nu\partial^\lambda h_{\lambda\mu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\partial^\rho h_{\lambda\rho} - \partial_\mu\partial_\nu h) \simeq 16\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

e effettuare una scelta di gauge covariante (equivalente al gauge di Lorentz in elettromagnetismo), detto gauge di De Donder, ricavato dalle Eq. (1.8). In questo modo, le componenti di $h_{\mu\nu}$ (che erano dieci per via della sua simmetria) si riducono a sei e le più complesse Eq. (1.15) diventano:

$$-\epsilon\square h_{\mu\nu} = 16\pi G_N(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T) . \quad (1.16)$$

Nel limite non relativistico, le velocità sono piccole e il termine dominante per il tensore energia-impulso è $T_{00} = \rho$. Inoltre, nel limite di campo debole, data la condizione sulle velocità, il termine dominante per la metrica è h_{00} , la cui derivata rispetto al tempo è nulla, perciò l'equazione (1.16) assume la forma semplice:

$$\Delta h_{00} = -8\pi G_N \rho . \quad (1.17)$$

Ricordando la relazione tra V e h_{00} data dall'Eq. (1.14), si trova l'equazione di Poisson per il potenziale Newtoniano

$$\Delta V = 4\pi G_N \rho .$$

Il limite Newtoniano, quindi, è verificato.

1.6 Verso le onde gravitazionali

Nel paragrafo precedente, la richiesta del campo debole riguardava la scelta di un *sistema di riferimento quasi-Lorentziano* in cui la metrica è data dall'Eq. (1.10). Si può dimostrare, usando le *trasformazioni di Lorentz di*

ffondo in questo sistema di riferimento, che $h_{\mu\nu}$ trasforma come se fosse, da solo, un tensore in Relatività Speciale. Infatti, se la trasformazione ha la forma

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} x^{\beta} ,$$

allora il tensore metrico trasforma come

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} \eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} h_{\mu\nu} ,$$

da cui, visto che $\eta_{\mu\nu}$ è tale per cui

$$\Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} ,$$

si trova

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}} \Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}} h_{\mu\nu} .$$

Si può, quindi, pensare uno spazio leggermente curvo come uno spazio piatto con un tensore $h_{\mu\nu}$ definito su di esso e definire tutti i campi fisici della Relatività Generale in termini di $h_{\mu\nu}$.

Oltre al cambio di coordinate dato dalle trasformazioni di Lorentz di fondo, ne esiste un altro che lascia l'Eq. (1.10) inalterata, della forma:

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \xi^{\alpha}(x^{\beta}) ,$$

dato da un vettore ξ^{α} , le cui componenti sono funzioni della posizione. Se si richiede che ξ^{α} sia piccolo, cioè $|\xi^{\alpha}_{,\beta}| \ll 1$, allora l'effetto del cambio di coordinate è quello di modificare $h_{\alpha\beta}$:

$$h_{\alpha\beta}^{(\text{NUOVO})} = h_{\alpha\beta}^{(\text{VECCHIO})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} . \quad (1.18)$$

Queste sono le *trasformazioni di gauge*.

Il tensore di Riemann, nel limite del campo debole, al primo ordine, ha la forma

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}) ,$$

mentre il tensore di Einstein, se si introduce il tensore di traccia inversa di $h^{\alpha\beta}$

$$\bar{h}^{\alpha\beta} := h^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} h , \quad (1.19)$$

e si richiede la condizione di *gauge di Lorentz*¹

$$\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 ,$$

si può esprimere come

$$G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\square\bar{h}^{\alpha\beta} .$$

In questo modo le Eq. (1.9) diventano le *equazioni della teoria linearizzata*

$$\square\bar{h}^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu} , \tag{1.20}$$

le cui soluzioni per $\bar{h}^{\mu\nu}$ sono dette *onde gravitazionali* [1].

¹Il gauge di Lorentz non è unico ma è, in realtà, una classe di gauge.

Capitolo 2

Onde gravitazionali

*Supererò le correnti
gravitazionali,
lo spazio e la luce per non farti
invecchiare.*

— Franco Battiato, *La cura*

In Relatività Generale, la gravità è discussa in termini di spazio-tempo dinamico, dove variazioni di campo gravitazionale si propagano come onde, dette *onde gravitazionali*, alla velocità della luce. In questo capitolo si approfondiranno gli aspetti legati alla generazione e alla rivelazione di queste ultime.

2.1 Generazione delle onde gravitazionali

Per comprendere la generazione delle onde gravitazionali, è necessario risolvere le Eq. (1.20), applicando qualche approssimazione. Si assume che la dipendenza dal tempo del tensore $T_{\mu\nu}$ stia in un termine di oscillazione sinusoidale con frequenza Ω , che è la parte reale di

$$T_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}(x^i)e^{-i\Omega t} .$$

Si assume, inoltre, che la regione di spazio in cui $S_{\mu\nu} \neq 0$ sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda di un'onda gravitazionale di frequenza Ω . La prima approssimazione è ragionevole, dal momento che molte sorgenti astrofisiche sono periodiche: stelle pulsanti, pulsar, sistemi binari. Inoltre, una generica dipendenza dal tempo può essere ridotta a somme di dipendenze sinusoidali tramite l'analisi di Fourier. La seconda approssimazione è detta di *moto lento*, perchè si richiede che le velocità tipiche all'interno della regione della sorgente (la cui estensione si indica con L) siano molto piccole

$$v = \Omega L \ll 1 ,$$

ed è anch'essa ragionevole, dal momento che è soddisfatta dalla maggior parte delle sorgenti di onde gravitazionali (ad eccezione delle più potenti).

In questo modo le Eq. (1.20) assumono la forma

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu}(x^i)e^{-i\Omega t} , \quad (2.1)$$

delle cui soluzioni si conserverà solo la parte reale. Si cerca, quindi, una soluzione del tipo

$$\bar{h}_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}(x^i)e^{-i\Omega t} . \quad (2.2)$$

Mettendo insieme le Eq. (2.1) e (2.2), si ha

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\mu\nu} = -16\pi S_{\mu\nu} . \quad (2.3)$$

Nel vuoto, dove $S_{\mu\nu} = 0$, l'Eq. (2.3) diventa

$$(\nabla^2 + \Omega^2)B_{\mu\nu} = 0 , \quad (2.4)$$

le cui soluzioni, in coordinate sferiche e nell'approssimazione di moto lento, sono descritte dalla somma di onde sferiche entranti ed uscenti dalla sorgente

$$B_{\mu\nu} = \frac{M_{\mu\nu}}{r}e^{i\Omega r} + \frac{N_{\mu\nu}}{r}e^{-i\Omega r} ,$$

dove $M_{\mu\nu}$ e $N_{\mu\nu}$ sono costanti. Dal momento che la trattazione riguarda le onde emesse dalla sorgente, quindi uscenti, si pone il termine $N_{\mu\nu}$ (associato all'onda entrante verso l'origine) uguale a 0 e si ha:

$$B_{\mu\nu} = \frac{M_{\mu\nu}}{r}e^{i\Omega r} . \quad (2.5)$$

Bisogna, adesso, determinare $M_{\mu\nu}$ in funzione della sorgente e, per fare ciò, si fa uso della richiesta secondo cui la sorgente non si annulla solo all'interno di una sfera di raggio $\epsilon \ll 2\pi/\Omega$. Integrando l'Eq. (2.3) all'interno di questa sfera si ottiene

$$\begin{aligned} \int (\nabla^2 + \Omega^2) B_{\mu\nu} d^3x &= \\ &= \int \nabla^2 B_{\mu\nu} d^3x + \int \Omega^2 B_{\mu\nu} d^3x = -16\pi \int S_{\mu\nu} d^3x . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nell'Eq.(2.6), il secondo termine

$$\int \Omega^2 B_{\mu\nu} d^3x \leq \Omega^2 |B_{\mu\nu}|_{max} 4\pi \frac{\epsilon^3}{3}$$

è trascurabile nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, mentre il primo termine, nello stesso limite, può essere sviluppato nel seguente modo:

$$\int \nabla^2 B_{\mu\nu} d^3x = \oint \mathbf{n} \cdot \nabla B_{\mu\nu} dS = 4\pi\epsilon^2 \left(\frac{d}{dr} B_{\mu\nu} \right)_{r=\epsilon} \approx -4\pi M_{\mu\nu} ,$$

dove si è fatto uso del teorema di Gauss, nella prima uguaglianza, e del fatto che l'integrale di superficie è svolto al di fuori della sorgente (dove B è dato dall'Eq. (2.5) ed ha simmetria sferica) nella seconda uguaglianza.

Infine, se si definisce l'integrale a destra nell'Eq. (2.6) come di seguito

$$J_{\mu\nu} = \int S_{\mu\nu} d^3x , \quad (2.7)$$

mettendo tutto insieme, si ricavano le seguenti relazioni:

$$M_{\mu\nu} = 4J_{\mu\nu} , \quad (2.8)$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = 4J_{\mu\nu} \frac{e^{i\Omega(r-t)}}{r} . \quad (2.9)$$

Le Eq. (2.8) e (2.9) possono essere ulteriormente semplificare sfruttando le proprietà del tensore energia-momento. Infatti, dall'Eq. (2.7), si ricava

$$J_{\mu\nu} e^{-i\Omega t} = \int T_{\mu\nu} d^3x \quad (2.10)$$

e derivando rispetto al tempo:

$$-i\Omega J^{\mu 0} e^{-i\Omega t} = \int T^{\mu 0}{}_{,0} d^3x . \quad (2.11)$$

Dalla legge di conservazione per $T_{\mu\nu}$,

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 ,$$

si ha la relazione

$$T^{\mu 0}{}_{,0} = -T^{\mu k}{}_{,k} ,$$

che può essere sostituita nell'Eq. (2.11) per ottenere

$$i\Omega J^{\mu 0} e^{-i\Omega t} = \int T^{\mu k}{}_{,k} d^3x = \oint T^{\mu k} n_k dS , \quad (2.12)$$

dove per l'ultima uguaglianza si è usato il teorema di Gauss. Dal momento che l'integrale di superficie è svolto al di fuori della sorgente, dove $T^{\mu\nu} = 0$, la parte destra dell'Eq. (2.12) si annulla. Questo significa che, per $\Omega \neq 0$ (dal momento che per $\Omega = 0$ l'onda non esiste), vista la simmetria di $J^{\mu\nu}$, si ha

$$J^{\mu 0} = J^{0\mu} = 0 , \quad (2.13)$$

da cui

$$\bar{h}^{\mu 0} = \bar{h}^{0\mu} = 0 .$$

Usando l'Eq. (2.13), l'Eq. (2.10) può essere ridefinita nei soli indici spaziali

$$J_{jk} e^{-i\Omega t} = \int T_{jk} d^3x = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \int T^{00} x^j x^k d^3x , \quad (2.14)$$

dove, nella seconda uguaglianza, è stato utilizzato il teorema del viriale in forma tensoriale. Per l'approssimazione di moto lento, $T^{00} \approx \rho$, quindi si definisce il *tensore di momento di quadrupolo* della distribuzione di massa

$$\begin{aligned} I^{jk} &:= \int T^{00} x^j x^k d^3x \\ &= D^{jk} e^{-i\Omega t} . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Mettendo insieme le Eq. (2.14) e (2.15) si ottiene, infine, la soluzione dell'Eq. (2.1) nella forma più semplificata

$$\bar{h}_{jk} = -2\Omega^2 I_{jk} \frac{e^{i\Omega r}}{r} = -2\Omega^2 D_{jk} \frac{e^{i\Omega(r-t)}}{r}, \quad (2.16)$$

detta *approssimazione di quadrupolo per la radiazione gravitazionale*.

L'Eq. (2.16) descrive la generazione delle onde gravitazionali e suggerisce che a produrle sono le *oscillazioni di quadrupolo*. Questo vuol dire che sistemi con massa a simmetria sferica non emettono radiazione se si muovono, pulsando, conservando la loro simmetria. Invece, affinché siano prodotte onde gravitazionali, i sistemi devono deformarsi (schiacciandosi o allungandosi) periodicamente e la frequenza delle oscillazioni di quadrupolo sarà trasmessa alle onde gravitazionali.

Si può fare una particolare scelta di gauge, quella di gauge trasverso a traccia nulla (che sarà discusso in dettaglio nel prossimo capitolo, dedicato alla propagazione delle onde), per semplificare l'Eq. (2.16). In particolare, scelti gli assi in modo che, nel punto dove si misura l'onda, questa viaggi nella direzione z , si ottiene

$$\bar{h}_{zi}^{TT} = 0, \quad (2.17)$$

$$\bar{h}_{xx}^{TT} = -\bar{h}_{yy}^{TT} = -\Omega^2 (\bar{Q}_{xx} - \bar{Q}_{yy}) \frac{e^{i\Omega r}}{r}, \quad (2.18)$$

$$\bar{h}_{xy}^{TT} = -2\Omega^2 \bar{Q}_{xy} \frac{e^{i\Omega r}}{r}, \quad (2.19)$$

dove

$$\bar{Q}_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I^l_l$$

è detto *tensore di momento di quadrupolo ridotto* [1].

2.2 Sistemi che generano le onde gravitazionali

Le principali sorgenti di onde gravitazionali nell'Universo sono i sistemi binari, le stelle di neutroni rotanti, le supernovae e il Big Bang.

Si consideri un sistema altamente dinamico, come quelli appena nominati, di massa M e dimensione R . Secondo il teorema del viriale, un sistema di questo tipo ha, approssimativamente, un'energia cinetica proporzionale a M^2/R . Inoltre, il tempo caratteristico per una massa per muoversi da una parte all'altra di esso è

$$T \sim \frac{R}{(\text{velocità media})} \sim \frac{R}{(M/R)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{R^3}{M}\right)^{\frac{1}{2}},$$

da cui

$$L_{interna} \sim \frac{(\text{energia cinetica})}{T} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^{\frac{5}{2}}. \quad (2.20)$$

La luminosità (intesa come flusso di energia) di un'onda gravitazionale prodotta in questo sistema è data dal quadrato dell'Eq. (2.20) (vedi Appendice A):

$$L_{GW} \sim \left(\frac{M}{R}\right)^5.$$

Questa derivazione (vedi Misner, [2]) è stata fatta nel limite non relativistico delle velocità e nell'approssimazione di campo quasi-Newtoniano (assunzioni necessarie per usare il teorema del viriale e per esprimere L_{GW} in funzione di $L_{interna}$), perciò non è valida quando la dimensione del sistema si avvicina al raggio di Schwarzschild ¹, perchè gli effetti gravitazionali diventerebbero particolarmente intensi.

Per la conservazione dell'energia, le forze di reazione della radiazione abbassano l'energia interna del sistema allo stesso rateo con cui le onde gravitazionali trasportano via energia. Il tempo necessario affinché il sistema modifichi le sue proprietà in maniera consistente, per via di queste forze, è

$$\tau_{reazione} \sim \left(\frac{L_0}{L_{interna}}\right) T \sim \left(\frac{R}{M}\right)^{\frac{5}{2}} T,$$

perciò l'effetto della reazione della radiazione è trascurabile quando il sistema non è vicino al proprio raggio di Schwarzschild.

¹Il raggio di Schwarzschild, definito come $R_s = 2M$, individua la superficie sferica singolare dove avviene il cambio di segnatura del tensore metrico nella metrica di Schwarzschild.

Dato un sistema, come quello di una stella pulsante, che tende ad uno stato di equilibrio, la reazione della radiazione agisce per rallentare i moti interni, contribuendo alla formazione dell'equilibrio. Nel caso opposto, nei sistemi come quelli binari, lontani dalla condizione di equilibrio, la perdita di energia sotto forma di radiazione gravitazionale può intensificare i moti interni e, di conseguenza, aumentare l'intensità della radiazione [1].

Sistemi binari. I sistemi binari sono i sistemi più semplici tra quelli che irradiano e la loro trattazione è semplificata nell'approssimazione di grande distanza tra gli oggetti che li compongono, in maniera che questi possano essere trattati come dei corpi puntiformi.

L'entità degli effetti relativistici in questi sistemi dipende principalmente dalle masse m_1 e m_2 del sistema, o meglio, da una loro combinazione $\mu M^{2/3}$, dove $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ è la massa ridotta e $M = m_1 + m_2$ è la massa totale. La semplicità del modello sta nella richiesta di questi soli parametri e, per lo stesso motivo, l'osservazione di radiazione gravitazionale fatta tramite sistemi binari è più affidabile di quella fatta attraverso altre sorgenti.

Si definisce una nuova massa associata al sistema, chiamata *massa di chirp*,

$$\mathcal{M} := \mu^{3/5} M^{2/5} ,$$

che può essere espressa in termini della velocità angolare orbitale ω e della sua derivata prima rispetto al tempo, secondo la relazione (per i calcoli, vedi Andersson, [3]):

$$\mathcal{M} = \left(\frac{5}{96} \right)^{3/5} \dot{\omega}^{3/5} \omega^{-11/5} . \quad (2.21)$$

A partire da \mathcal{M} , è possibile definire una serie di quantità importanti associate all'evoluzione dei sistemi binari:

- il *tempo di chirp* del sistema:

$$\tau_{chirp} := \frac{\omega}{\dot{\omega}} = \frac{5}{96} \mathcal{M} (\mathcal{M} \omega)^{-8/3} ,$$

è il tempo di scala caratteristico per il restringimento dell'orbita, durante il quale la frequenza dell'onda gravitazionale aumenta;

- il *tempo di fusione*:

$$\tau_{fusione} = \frac{5}{256} \mathcal{M} (\mathcal{M}\omega)^{-\frac{8}{3}},$$

è il tempo di vita del sistema binario;

- la *fase orbitale*:

$$\psi_{fusione} = \frac{1}{32} (\mathcal{M}\omega)^{-\frac{5}{3}}, \quad (2.22)$$

è la quantità di fase orbitale restante quando la frequenza orbitale è ω .

Il numero di orbite rimanenti prima della fusione è dato da $\psi_{fusione}/2\pi$.

Dal momento che la luminosità dell'onda gravitazionale L_{GW} dipende anch'essa da $\mathcal{M}\omega$, è possibile esprimerla in funzione della fase orbitale:

$$L_{GW} = \frac{1}{160\psi_{fusione}^2}.$$

Questo risultato è particolarmente interessante: la luminosità della radiazione gravitazionale di un sistema binario dipende solo dal numero di orbite rimanenti prima della fusione delle due masse e ciò è valido anche nei sistemi binari reali, dove i corpi non sono puntiformi e la coalescenza avviene in leggero anticipo rispetto a quanto previsto dal modello. Dato che la luminosità della radiazione non dipende dalla massa, ciò che distingue i sistemi poco massivi da quelli molto massivi è la durata del picco di radiazione, che si osserva solo per l'ultima orbita.

Si può determinare il valore f_{max} del picco di frequenza, prima della fusione delle due masse, considerando il valore di frequenza che si trova quando ai due corpi rimane metà di un'orbita. La frequenza dell'onda gravitazionale, in un sistema binario, è il doppio di quella angolare orbitale, quindi, invertendo l'Eq. (2.22), normalizzando la massa di chirp rispetto alla massa solare e ponendo $\psi = \pi$, si ottiene

$$f_{max} = 4 \left(\frac{M_{\odot}}{\mathcal{M}} \right) kHz. \quad (2.23)$$

L'osservazione della radiazione gravitazionale tramite gli *interferometri terrestri* ha confermato la validità dell'Eq. (2.23) trovando una buona compatibilità tra i valori sperimentali e quelli previsti dal modello.

I sistemi binari più interessanti sono, sicuramente, quelli dati da stelle di neutroni e buchi neri, in quanto oggetti estremamente compatti e massivi. In particolare, questi ultimi, quando fondono, danno luogo ad un singolo buco nero che, per un breve intervallo di tempo, oscilla irradiando le deformità. La *radiazione di ringdown* che caratterizza questo fenomeno è data da

$$f_{ringdown} \sim 16 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right) kHz ,$$

dove M è la massa del buco nero finale. Questo segnale permette di identificare univocamente un sistema binario di buchi neri rispetto a un qualsiasi altro tipo di sistema.

Stelle di neutroni rotanti. Generalmente, le stelle di neutroni si manifestano come pulsar, cioè come oggetti che ruotano velocemente emettendo radiazione elettromagnetica in coni ristretti, osservata sulla Terra come impulsi ad intervalli di tempo estremamente regolari. Affinché siano prodotti i fasci di radiazione elettromagnetica, è necessario che i sistemi siano asimmetrici nella massa, quindi saranno anche sorgenti di onde gravitazionali, di cui si può calcolare l'ampiezza tramite le Eq. (2.17), (2.18), (2.19). Nel caso di una pulsar quasi-simmetrica rispetto all'asse di rotazione, l'ampiezza di entrambe le polarizzazioni dell'onda, irradiate nella direzione dell'asse, è approssimata dalla formula

$$h \sim 2\epsilon\Omega^2 \frac{I_{NS}}{r} ,$$

dove I_{NS} è il momento di inerzia della stella di neutroni ed ϵ è una misura del rapporto di asimmetria della stella rispetto al proprio asse di rotazione. Utilizzando i valori tipici $I_{NS} = 10^{38} \text{ kg m}^2$, $r = 1 \text{ kpc}$, $\Omega = 2\pi f$ con $f = 60 \text{ Hz}$ e considerando l'asimmetria piccola $\epsilon = 10^{-6}$, si ottiene $h \sim 10^{-26}$. Questa è un'ampiezza piccola ma rilevabile, soprattutto quando la frequenza e la posizione della pulsar sono già note grazie alle osservazioni radio.

Le onde gravitazionali emesse da una stella di neutroni rotante trasportano energia, sottraendola alla rotazione, quindi rallentandola. Questo effetto è detto di *spin-down*.

Per quanto riguarda le supernovae e il Big Bang, attualmente non si è in grado

di isolare il segnale delle onde gravitazionali prodotte da questi sistemi. In entrambi i casi, lo studio della radiazione gravitazionale da essi generata è interessante perchè permetterebbe di osservare i sistemi più in profondità di quanto permetta la radiazione elettromagnetica.

2.3 Rivelazione delle onde gravitazionali

La rivelazione delle onde gravitazionali è un processo complicato dal momento che, per sorgenti lontane, le ampiezze della metrica perturbata $h_{\mu\nu}$ sono piccole. Nonostante ciò, sono stati realizzati degli apparati abbastanza precisi da osservare la radiazione, la cui esistenza è stata confermata l'11 Febbraio 2016, grazie agli interferometri LIGO E VIRGO (di cui si discuterà più avanti nel paragrafo).

Barra di Weber. La barra di Weber è il primo rivelatore di onde gravitazionali ad essere stato concepito e non è altro che una lunga barra di metallo, risonante al passaggio dell'onda. La sua idealizzazione più semplice consiste in due masse puntiformi m collegate tra loro da una molla priva di massa con costante di elasticità k , costante di smorzamento ν e lunghezza a riposo l_0 . Se il sistema giace sull'asse x del sistema di riferimento trasverso a traccia nulla (che, si ricorda, sarà discusso nel prossimo capitolo sulla propagazione delle onde gravitazionali) e le masse sono posizionate in x_1 e in x_2 , allora in uno spazio-tempo piatto valgono le seguenti equazioni:

$$mx_{1,00} = -k(x_1 - x_2 + l_0) - \nu(x_1 - x_2)_{,0} , \quad (2.24)$$

$$mx_{2,00} = -k(x_2 - x_1 - l_0) - \nu(x_2 - x_1)_{,0} . \quad (2.25)$$

Se si definiscono l'allungamento ξ , la frequenza di risonanza ω_0 e il tasso di smorzamento γ come segue:

$$\xi = x_2 - x_1 - l_0 , \quad \omega = \sqrt{\frac{2k}{m}} , \quad \gamma = \frac{\nu}{m} ,$$

allora, combinando le Eq. (2.24) e (2.25), si ottiene

$$\xi_{,00} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = 0 , \quad (2.26)$$

che corrisponde all'equazione dell'oscillatore armonico smorzato.

Al passaggio di un'onda gravitazionale, il sistema non reagisce seguendo la dinamica descritta dall'Eq. (2.26). Per ottenere la risposta del sistema alla perturbazione, si divide il problema in parti [1].

Innanzitutto, una particella libera rimane a riposo nel sistema di riferimento trasverso a traccia nulla. Questo significa che un sistema di riferimento localmente inerziale a riposo in x_1 , prima dell'arrivo dell'onda, resta a riposo anche dopo il suo passaggio. Se per questo sistema si usano le coordinate $\{x^{\alpha'}\}$, quando gli unici movimenti nel sistema sono quelli prodotti dall'onda, si ha $\xi \ll l_0$. Di conseguenza, le velocità delle masse sono piccole e valgono le equazioni di Newton:

$$mx_{,0'0'}^{j'} = F^{j'} ,$$

dove $\{F^{j'}\}$ sono le componenti delle forze non gravitazionali che agiscono sulle masse. Dato che $\{x^{\alpha'}\}$ differisce dalle coordinate del sistema trasverso a traccia nulla $\{x^\alpha\}$ solo per termini di ordine $h_{\mu\nu}$, si possono riesprimere le equazioni di Newton nelle coordinate $\{x^\alpha\}$:

$$mx_{,00}^j = F^j + O(|h_{\mu\nu}|^2) . \quad (2.27)$$

Si considera, poi, che l'unica forza non gravitazionale che agisce su ciascuna massa è quella dovuta alla molla e, tramite l'Eq. (2.27), si ricavano le equazioni:

$$mx_{1,00} = -k(l_0 - l) - \nu(l_0 - l)_{,0} , \quad (2.28)$$

$$mx_{2,00} = -k(l - l_0) - \nu(l - l_0)_{,0} , \quad (2.29)$$

dove l è la lunghezza propria della molla, espressa, quando l'onda gravitazionale viaggia nella direzione z , dalla relazione

$$l(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [1 + h_{xx}^{TT}(t)]^{\frac{1}{2}} dx \approx [x_2(t) - x_1(t)] \left[1 + \frac{1}{2} h_{xx}^{TT}(t) \right] + O(|h_{\mu\nu}|^2) . \quad (2.30)$$

Ponendo $\xi = l - l_0$, sottraendo l'Eq. (2.28) all'Eq. (2.29) e sostituendo ad l quanto trovato nell'Eq. (2.30), si ottiene l'equazione fondamentale che

governa la risposta del rivelatore al passaggio dell'onda gravitazionale:

$$\xi_{,00} + 2\gamma\xi_{,0} + \omega_0^2\xi = \frac{1}{2}l_0h_{xx,00}^{TT}, \quad (2.31)$$

che è l'equazione di un oscillatore armonico smorzato con forzante. Quindi, si può usare la barra di Weber come rivelatore risonante per sorgenti di radiazione gravitazionale a frequenza fissata. La qualità della risposta è data da

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma},$$

detto *fattore di qualità*; quando $Q \gg 1$, il sistema risponde in maniera significativa solo a frequenze attorno a $\omega_0 \pm 2\gamma$.

La barra di Weber ha delle importanti limitazioni legate all'agitazione termica delle particelle del sistema e alle vibrazioni esterne che possono modificare o, addirittura, nascondere il segnale di radiazione gravitazionale. Pertanto, è stato necessario sviluppare altri tipi di apparati.

Rivelatori a fascio di luce. I rivelatori che utilizzano la luce per effettuare le misure, vista la sua posizione privilegiata nella teoria della Relatività, sono più sofisticati. Infatti, inviando un segnale luminoso verso un oggetto distante e misurando il tempo di ritorno del segnale, si ha una misura della distanza propria dall'oggetto, anche in uno spazio-tempo curvo.

Ci si ponga, adesso, in un sistema di riferimento trasverso a traccia nulla. Si considerino due oggetti in caduta libera, posti sull'asse x , a distanza L , e un'onda gravitazionale che viaggia nella direzione dell'asse z , con polarizzazione $+$, cioè con le componenti date dall'Eq. (2.19) uguali a zero. In queste condizioni, la metrica è

$$ds^2 = -dt^2 + [1 + h_+(z - t)]dx^2 + [1 - h_+(t - z)]dy^2 + dz. \quad (2.32)$$

Per misurare la distanza tra i due corpi, uno è posto nell'origine e invia un segnale luminoso verso l'altro, che lo riflette; il primo corpo misura, poi, il tempo proprio trascorso dall'emissione del fotone. Quest'ultimo, muovendosi lungo l'asse x , si muove lungo una linea d'universo nulla ($ds^2 = 0$) con

$dy = dz = 0$. Dall'Eq. (2.32), quindi, si ricava

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{1 + h_+}, \quad (2.33)$$

che è la velocità effettiva, diversa da 1 perchè è una *velocità coordinata*.

Se il primo corpo emette un fotone al tempo $t_{partenza}$, allora il fotone impiega

$$t_{arrivo} = t_{partenza} + \int_0^L [1 + h_+(t(x))]^{\frac{1}{2}} dx$$

per arrivare al secondo corpo. Nella teoria linearizzata, h_+ è piccolo e $t(x)$, che compare nell'argomento di h_+ , può essere approssimato al valore che assume in uno spazio-tempo piatto: $t(x) = t_{inizio} + x$. Espandendo la radice quadrata, si ottiene

$$t_{arrivo} = t_{partenza} + L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{partenza} + x) dx .$$

Considerando anche il tempo impiegato dalla luce per ritornare al primo corpo dopo essere stata riflessa dal secondo, in definitiva, per il tempo di ritorno si ha:

$$t_{ritorno} = t_{partenza} + 2L + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{partenza} + x) + \frac{1}{2} \int_0^L h_+(t_{partenza} + L + x) dx . \quad (2.34)$$

Se L è abbastanza piccolo rispetto alla lunghezza d'onda della radiazione gravitazionale, in modo che si possa considerare h_+ costante durante il cammino della luce, il tempo di ritorno è proporzionale alla distanza propria L . Infatti, quando la separazione tra i due corpi è piccola, si può utilizzare un sistema di riferimento localmente inerziale in caduta libera con i corpi e, in questo sistema, devono valere le leggi della Relatività Speciale, in cui l'uso di un segnale luminoso fornisce una misura esatta della distanza propria.

Se si deriva $t_{ritorno}$ rispetto a $t_{partenza}$ nell'Eq. (2.34), si ottiene il tasso di variazione del tempo di ritorno al passaggio dell'onda gravitazionale:

$$\frac{dt_{ritorno}}{dt_{partenza}} = 1 + \frac{1}{2} [h_+(t_{partenza} + 2L) - h_+(t_{partenza})] .$$

Si può osservare che questa quantità dipende solo dalla metrica dell'onda nel momento in cui il fotone è emesso e nel momento in cui è ricevuto.

Se il segnale inviato dall'origine non è un singolo fotone, ma radiazione elettromagnetica continua, allora la derivata del tempo di ritorno non è altro che la variazione in frequenza dell'onda stessa. Quindi, se si osservano variazioni di redshift nella frequenza della radiazione elettromagnetica che ritorna all'origine, il fenomeno può essere direttamente correlato a variazioni di ampiezza dell'onda gravitazionale.

Interferometri. Gli interferometri sono rivelatori molto precisi che utilizzano la luce per osservare il passaggio di onde gravitazionali. In particolare, la luce coerente di un LASER attraversa un separatore di fascio che ne invia metà all'interno di un braccio e l'altra metà in un braccio perpendicolare (vedi Figura 2.2). I due fasci di luce, che hanno la stessa fase, quando ritornano dopo essere stati riflessi dagli specchi posti all'estremità finale dei bracci, si ricongiungono e interferiscono. L'interferenza misura la differenza nella lunghezza dei due bracci: se la differenza cambia al passaggio di un'onda gravitazionale, allora cambia la figura di interferenza. Gli interferometri, quindi, sono due rivelatori a fascio di luce posti perpendicolarmente l'uno all'altro, che funzionano per confronto tra i tempi di ritorno lungo i due bracci: i fasci sono correlati in fase e interferiscono costruttivamente quando percorrono la stessa lunghezza propria.

Il 14 Settembre 2015, gli interferometri LIGO [4] (situati negli USA), in collaborazione con l'interferometro VIRGO [5] (situato in Italia), hanno registrato per la prima volta l'emissione di onde gravitazionali dalla fusione di due buchi neri [6]. La Figura (2.1) ne fornisce una rappresentazione schematica.

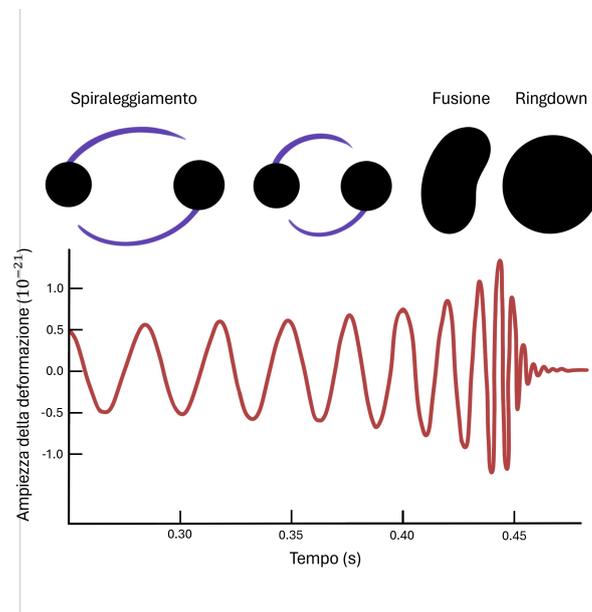


Figura 2.1: Rappresentazione schematica dell'emissione di onde gravitazionali dalla fusione di due buchi neri. Il grafico riporta i valori dell'ampiezza di deformazione in funzione del tempo.

Sia LIGO che VIRGO hanno bracci di dimensioni notevoli, rispettivamente di 4 km e di 3 km , e implementano una serie di tecnologie volte ad eliminare, o quantomeno ridurre, il rumore nel segnale. In particolare, tutti i componenti ottici sono sospesi, per non essere soggetti alle vibrazioni esterne, e sono realizzati in materiali altamente risonanti, in modo da confinare il rumore termico a bande strette attorno a valori risonanti di frequenza lontani da quelli che gli strumenti vogliono osservare. Visto che gli interferometri sono degli apparati particolarmente complessi e sensibili, c'è sempre la possibilità che si osservino dei disturbi nel segnale che possono essere interpretati in maniera errata. Per questo motivo, e non solo, è utile che gli interferometri operino insieme: se più rivelatori osservano, contemporaneamente, un segnale di radiazione gravitazionale, allora è molto probabile che l'osservazione sia corretta e si possono, inoltre, individuare la posizione della sorgente e la polarizzazione dell'onda.

Attualmente, la rete di interferometri terrestri è composta dai due interfe-

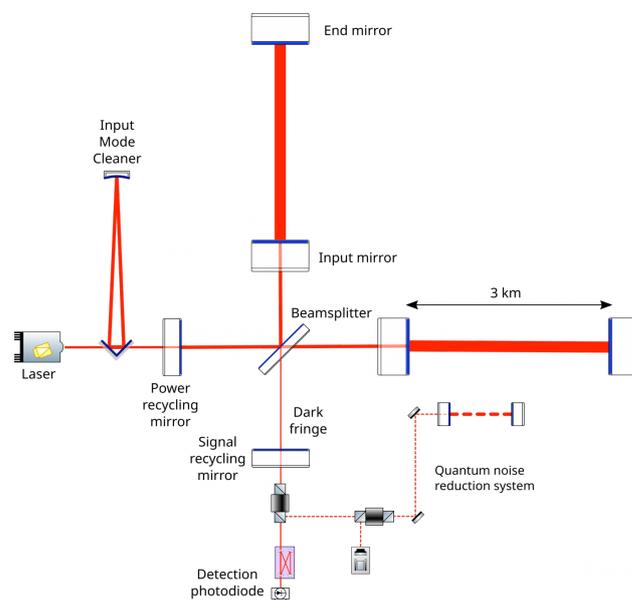


Figura 2.2: Rappresentazione schematica dell'apparato Advanced Virgo. Fonte: virgo-gw.eu, "Optical layout"

rometri LIGO, da VIRGO e da KAGRA [7] (situato in Giappone), ma un quinto rivelatore si aggiungerà entro la fine di questo decennio: LIGO-India [8]. Nonostante l'alto grado di precisione di questi sistemi, la rete non è in grado di coprire l'intero spettro di radiazione gravitazionale, quindi è in corso la progettazione di nuovi interferometri, ancora più grandi, che implementeranno tecnologie più avanzate: l'Einstein Telescope [9] in Europa e il Cosmic Explorer [10] negli USA. Inoltre, per osservare onde gravitazionali con frequenze al di sotto di 1 Hz , che non possono essere osservate sulla Terra a causa del rumore dato dal suo campo gravitazionale, l'ESA sta progettando l'interferometro spaziale LISA [11], composto da tre satelliti orbitanti attorno al Sole alla distanza di 1 AU , distanti $2.5 \times 10^6 \text{ km}$ tra loro, disposti ai vertici un triangolo equilatero. L'impiego di questo apparato dovrebbe permettere di osservare fenomeni di fusione di buchi neri supermassicci e di ottenere informazioni sull'Universo primordiale.

Capitolo 3

Propagazione delle onde gravitazionali

*Navigare, navigare nello spazio,
nello spazio, di più.
Sequimmo per istinto le scie
delle Comete
come avanguardie di un altro
sistema solare.
No time, no space,
another race of vibrations,
the sea of the simulation.*

— Franco Battiato, *No Time
No Space*

In accordo con la teoria della Relatività Generale, l'Universo è permeato da radiazione gravitazionale che, dopo essere stata prodotta da sistemi binari, pulsar, supernovae e altri sistemi dinamici, si propaga nello spazio-tempo alla velocità della luce, interagendo minimamente con la materia.

Localmente, si può ignorare l'interazione delle onde con la curvatura su larga scala dell'Universo e considerare che queste si propagano nello spazio-tempo piatto, usando le equazioni di teoria linearizzata introdotte nel Capitolo 1.

3.1 Soluzioni di onda piana nella teoria linearizzata

Le equazioni che descrivono la propagazione delle onde gravitazionali nel vuoto si ricavano a partire dalle Eq. (1.20), richiedendo $T^{\mu\nu} = 0$:

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = 0 . \quad (3.1)$$

Le soluzioni più semplici per le Eq. (3.1) sono date dalla parte reale di

$$\bar{h}^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta} e^{ik_\alpha x^\alpha} , \quad (3.2)$$

dove $\{k^\alpha\}$ sono le componenti costanti di una qualche uno-forma e $\{A^{\alpha\beta}\}$ sono le componenti costanti di un generico tensore. Date le Eq. (3.2), derivando $\bar{h}^{\alpha\beta}$ rispetto a μ , si ottiene

$$\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu} = ik_\mu \bar{h}^{\alpha\beta} . \quad (3.3)$$

Riesprimendo le Eq. (3.1) in funzione della metrica

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu\nu} = 0 ,$$

e utilizzando le Eq. (3.3), si ricavano le seguenti equazioni:

$$\eta^{\mu\nu} \bar{h}^{\alpha\beta}_{,\mu\nu} = -\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu \bar{h}^{\alpha\beta} = 0 ,$$

che si annullano solo se

$$\eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = k^\mu k_\mu = 0 . \quad (3.4)$$

Quindi, le Eq. (3.2) sono soluzioni delle Eq. (3.1) solo se k_α è un' uno-forma nulla, cioè se il quadrivettore associato k^α è tangente alla linea di universo di un fotone. In questo caso le Eq. (3.2) descrivono una soluzione di tipo ondulatorio, in cui il valore di $\bar{h}^{\alpha\beta}$ è costante sull'ipersuperficie per cui vale

$$k_\alpha x^\alpha = \omega t + k_i x^i = const. , \quad (3.5)$$

dove si è posto $k_0 = \omega$, frequenza dell'onda, secondo la convenzione.

Un fotone che si muove lungo la direzione del vettore \vec{k} , si muove lungo la curva

$$x^\mu(\lambda) = k^\mu \lambda + l^\mu, \quad (3.6)$$

dove λ è il parametro della curva e l^μ è la posizione del fotone a $\lambda = 0$. Utilizzando le Eq. (3.4) nelle Eq. (3.6), si ottiene

$$k_\mu x^\mu(\lambda) = k_\mu l^\mu = \text{const.} \quad (3.7)$$

Confrontando le Eq. (3.5) e (3.7), si trova che il fotone viaggia alla stessa velocità e fase dell'onda gravitazionale. Si può, quindi, concludere, che l'onda viaggia alla velocità della luce e \vec{k} è la direzione di propagazione. Inoltre, visto che k_α è una uno-forma nulla, vale la relazione di dispersione

$$\omega^2 = |\mathbf{k}|^2,$$

da cui si ricava che la velocità di fase e la velocità di gruppo sono entrambe uguali ad 1 e, quindi, non c'è dispersione.

Per ricavare le equazioni di teoria linearizzata, utilizzate per definire le Eq. (3.1), è stato imposto il gauge di Lorentz

$$\bar{h}^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0.$$

Quindi, data questa scelta di gauge, dall'Eq. (3.3) si trova la restrizione su $A^{\alpha\beta}$:

$$A^{\alpha\beta} k_\beta = 0, \quad (3.8)$$

cioè $A^{\alpha\beta}$ deve essere ortogonale a \vec{k} . In questo modo le componenti indipendenti del tensore si riducono da dieci (vista la simmetria) a sei.

Si conclude che la soluzione per un'onda che si propaga, $\bar{h}^{\alpha\beta} = \Re\{A^{\alpha\beta} e^{ik_\alpha x^\alpha}\}$, è una soluzione di onda piana.

3.2 Gauge trasverso a traccia nulla

Effettuando una particolare scelta di gauge, è possibile ridurre ulteriormente il numero delle componenti indipendenti di $A^{\alpha\beta}$.

Si cerca una trasformazione che permetta di rimanere all'interno della classe dei gauge di Lorentz e questo è verificato dall'uso di un qualsiasi vettore che soddisfi la relazione:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \xi_\alpha = 0 .$$

Si sceglie una soluzione del tipo

$$\xi_\alpha = B_\alpha e^{ik_\mu x^\mu} ,$$

dove B_α è una costante e k^μ è lo stesso quadrivettore, tangente alla linea di universo di un fotone, ottenuto per le soluzioni dell'onda.

Usando le Eq. (1.18) e (1.19) si ha

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{(\text{NUOVO})} = \bar{h}_{\alpha\beta}^{(\text{VECCHIO})} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta} \xi^\mu{}_{,\mu} ,$$

da cui, sostituendo le soluzioni di tipo ondulatorio e dividendo per l'esponentiale in comune, si ottiene:

$$A_{\alpha\beta}^{(\text{NUOVO})} = A_{\alpha\beta}^{(\text{VECCHIO})} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + i\eta_{\alpha\beta} B^\mu k_\mu .$$

Si può scegliere B_α in modo da imporre due condizioni su $A_{\alpha\beta}^{(\text{NUOVO})}$:

$$A^\alpha{}_\alpha = 0 , \tag{3.9}$$

$$A_{\alpha\beta} U^\beta = 0 , \tag{3.10}$$

dove \vec{U} è una quadrivelocità fissata.

Le Eq. (3.8), (3.9) e (3.10) sono chiamate *condizioni di gauge trasverso a traccia nulla* (TT).

Si noti che la condizione sulla traccia data dall'Eq. (3.9) implica

$$\bar{h}_{\alpha\beta}^{TT} = h_{\alpha\beta}^{TT} .$$

Effettuando una trasformazione di Lorentz di fondo in cui il vettore \vec{U} scelto per il gauge TT è il vettore tempo di base $U^\beta = \delta_0^\beta$, allora le Eq. (3.8) e (3.10) implicano $A_{\alpha z} = 0$ per ogni α . Quindi, in questo particolare sistema di riferimento, solo A_{xx} , A_{yy} e $A_{xy} = A_{yx}$ sono diversi da zero e la condizione

sulla traccia implica $A_{xx} = -A_{yy}$. In definitiva, si hanno solo due costanti indipendenti per $A_{\alpha\beta}$: A_{xx}^{TT} e A_{xy}^{TT} [1].

Tensore di Riemann nel gauge TT. Nel gauge trasverso a traccia nulla, le componenti

$$R_{j0k0} = R_{0j0k} = -R_{j00k} = -R_{0jk0}$$

assumono la forma semplice

$$R_{j0k0} = -\frac{1}{2}h_{jk,00}^{TT} .$$

Dal momento che il tensore di curvatura di Riemann è invariante per scelta di gauge, $h_{\mu\nu}$ non può essere ridotto ulteriormente.

3.3 Effetto del passaggio dell'onda gravitazionale sulle particelle libere

L'azione delle onde gravitazionali sulle particelle libere può essere considerata come quella di una forza di marea e si può utilizzare l'equazione di deviazione geodetica per valutarne l'effetto. Si considerino due particelle in caduta libera e si definisca ξ^α il vettore che le connette. Nel sistema di riferimento localmente inerziale definito nel punto della prima geodetica, dove $\vec{\xi}$ è originato, le distanze coordinate sono distanze proprie, se si trascurano i termini quadratici. Quindi, in queste coordinate, le componenti di $\vec{\xi}$ corrispondono a distanze proprie misurabili, quando le geodetiche delle due particelle sono abbastanza vicine tra loro. Inoltre, in questo sistema di riferimento, l'Eq. (1.4) si semplifica notevolmente. La prima derivata covariante di $\vec{\xi}$ rispetto ad \vec{U} , vettore tangente alla geodetica, è uguale a $d\xi^\alpha/d\tau$. Anche la seconda derivata covariante agisce come una normale derivata rispetto a τ , dal momento che, in queste coordinate, i simboli di Christoffel si annullano. L' Eq. (1.4), quindi, si può riesprimere nel seguente modo:

$$\frac{d^2}{d\tau^2}\xi^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu\beta}U^\mu U^\nu \xi^\beta , \quad (3.11)$$

dove \vec{U} è la quadrivelocità delle due particelle. Nel sistema di riferimento adottato, lo spazio-tempo è localmente piatto, quindi $\vec{U} = (1, 0, 0, 0)$ e, inizialmente, $\vec{\xi} = (0, \epsilon, 0, 0)$. In questo modo, l'Eq. (3.11) diventa

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\alpha = \xi R^\alpha{}_{00x} = -\xi R^\alpha{}_{0x0} . \quad (3.12)$$

Questo implica che il tensore di Riemann può essere misurato localmente semplicemente osservando le variazioni di distanza propria tra geodetiche vicine. Dal momento che il tensore di Riemann è invariante per scelta di gauge, le sue componenti non dipendono dalla scelta di un sistema localmente inerziale o di coordinate TT. Quindi, anche l'Eq. (3.12) ha un'interpretazione indipendente dalla scelta di gauge e, in particolare, si ha che le ξ^α sono le lunghezze proprie delle componenti del vettore $\vec{\xi}$.

Nel sistema di riferimento trasverso a traccia nulla, per un'onda che si propaga nella direzione dell'asse z , le componenti del tensore di Riemann sono

$$\begin{aligned} R^x{}_{0x0} &= R_{x0x0} = -\frac{1}{2} h_{xx,00}^{TT} , \\ R^y{}_{0x0} &= R_{y0x0} = -\frac{1}{2} h_{xy,00}^{TT} , \\ R^y{}_{0y0} &= R_{y0y0} = -\frac{1}{2} h_{yy,00}^{TT} = -R^x{}_{0x0} , \end{aligned}$$

mentre tutte le altre componenti indipendenti si annullano [1]. Quindi, per due particelle separate inizialmente lungo x dal vettore $\vec{\xi}$, valgono

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT} , \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT} . \end{aligned}$$

Analogamente, per due particelle separate lungo y dallo stesso vettore $\vec{\xi}$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^y &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{yy}^{TT} = -\frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xx}^{TT} , \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^x &= \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{xy}^{TT} . \end{aligned}$$

3.4 Polarizzazione delle onde gravitazionali

Si consideri un'onda piana monocromatica che si propaga nella direzione z di un sistema di riferimento trasverso a traccia nulla. In queste coordinate, le uniche componenti di $h_{\mu\nu}^{TT}$ che non si annullano, come visto precedentemente, sono

$$\begin{aligned} h_{xx}^{TT} &= -h_{yy}^{TT} = \Re\{A_+ e^{-i\omega(t-z)}\} , \\ h_{xy}^{TT} &= h_{yx}^{TT} = \Re\{A_\times e^{-i\omega(t-z)}\} , \end{aligned}$$

dove A_+ e A_\times rappresentano due modi indipendenti di polarizzazione. Quindi, è possibile scomporre l'onda gravitazionale in due componenti polarizzate linearmente o, in alternativa, in due componenti polarizzate circolarmente [2].

Onde gravitazionali polarizzate linearmente. Si definiscono i versori \mathbf{e}_+ e \mathbf{e}_\times , rispettivamente nelle direzioni x e y . I tensori unitari di polarizzazione lineare sono

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_+ &\equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y , \\ \mathbf{e}_\times &\equiv \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x . \end{aligned}$$

Quando $A_\times = 0$, l'onda piana ha polarizzazione \mathbf{e}_+ e si esprime nel seguente modo:

$$h_{jk} = \Re\{A_+ e^{-i\omega(t-z)} e_{+jk}\} .$$

Per comprendere l'effetto della radiazione gravitazionale nell'alterazione della separazione geodetica tra particelle, si consideri un anello di particelle sul piano x - y , attorno ad una particella centrale. Al passaggio dell'onda, l'anello, nel sistema di riferimento proprio della particella centrale, è deformato in un'ellisse con assi che pulsano nelle direzioni x e y (vedi Figura 3.1).

Analogamente, quando $A_+ = 0$, l'onda gravitazionale di polarizzazione \mathbf{e}_\times

$$h_{jk} = \Re\{A_\times e^{-i\omega(t-z)} e_{\times jk}\}$$

deforma l'anello con un angolo di 45 gradi rispetto alle direzioni x e y .

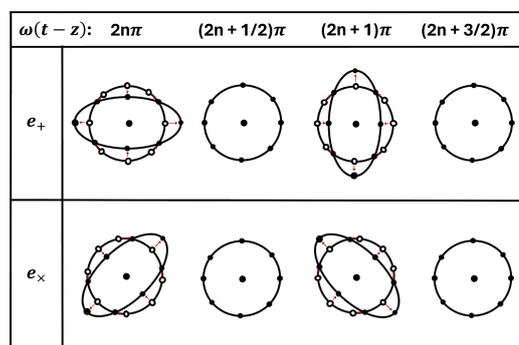


Figura 3.1: Deformazione di un anello di particelle al passaggio di un'onda gravitazionale nelle due configurazioni di polarizzazione lineare $+$ e \times .

Onde gravitazionali polarizzate circolarmente. In questo caso, i tensori unitari di polarizzazione circolare sono

$$\mathbf{e}_R \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + i\mathbf{e}_\times),$$

$$\mathbf{e}_L \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - i\mathbf{e}_\times).$$

Un'onda gravitazionale di polarizzazione \mathbf{e}_R agisce sull'anello di particelle ruotando la deformazione in senso antiorario. Nella configurazione di polarizzazione \mathbf{e}_L , invece, la deformazione ruota in senso orario (vedi Figura 3.2).

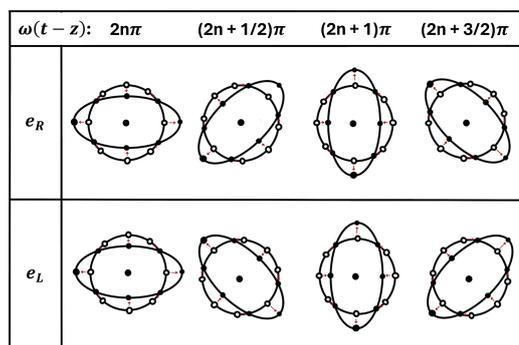


Figura 3.2: Deformazione di un anello di particelle al passaggio di un'onda gravitazionale nelle due configurazioni di polarizzazione circolare R e L.

3.5 Flusso di energia delle onde gravitazionali

Nel Capitolo 2, si è visto che le onde gravitazionali sono in grado di indurre in risonanza i rivelatori a barre, trasferendo energia a questi ultimi. Per ricavare il flusso di energia della radiazione, si consideri un insieme di oscillatori posizionati a ricoprire interamente il piano $z = 0$, molto vicini tra loro in modo che ne si possa considerare una distribuzione continua, con σ oscillatori per unità di area. Se l'onda incidente, nel sistema di riferimento trasverso a traccia nulla, ha ampiezza data da

$$\begin{aligned}\bar{h}_{xx}^{TT} &= A \cos \Omega(z - t) , \\ \bar{h}_{yy}^{TT} &= -\bar{h}_{xx}^{TT} , \\ \bar{h}_{xy}^{TT} &= \bar{h}_{yx}^{TT} = 0 ,\end{aligned}\tag{3.13}$$

allora, ogni oscillatore, dopo che il transiente si è esaurito, risponde con un'oscillazione stabile della forma

$$\xi = R \cos(\Omega t + \phi) ,$$

dove

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{2} l_0 \Omega^2 \frac{A}{[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \gamma^2]^{\frac{1}{2}}} , \\ \phi &= \arctan \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}\end{aligned}$$

si ricavano risolvendo l'Eq. (2.31). L'oscillazione è stabile perchè l'energia dissipata dalla frizione negli oscillatori è compensata dal lavoro fatto sulle singole molle dalle forze di marea gravitazionale dovute all'onda. Quindi, la potenza trasmessa ad ogni oscillatore dalla radiazione gravitazionale è

$$\frac{dE}{dt} = \nu \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = m\gamma \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 ,$$

il cui valore medio su un periodo di oscillazione ($2\pi/\Omega$) è

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi/\Omega} \int_0^{2\pi/\Omega} m\gamma\Omega^2 R^2 \sin^2(\Omega t + \phi) dt = \frac{1}{2} m\gamma\Omega^2 R^2 .$$

Dati σ oscillatori per unità di area, il flusso netto di energia dell'onda gravitazionale, mentre l'onda attraversa il piano $z = 0$, si riduce di un fattore

$$\delta F = -\frac{1}{2}\sigma m\gamma\Omega^2 R^2, \quad (3.14)$$

che corrisponde al flusso di energia per unità di tempo e di area dell'onda gravitazionale che attraversa una distribuzione continua di oscillatori sul piano $z = 0$.

Per ricavare una forma più generale per il flusso, si consideri che un oscillatore, quando messo in moto da un'onda gravitazionale, irradia anch'esso, con la stessa frequenza dell'onda. La radiazione emessa dall'oscillatore, nella direzione dell'onda incidente, e la radiazione incidente interferiscono distruttivamente, causando una riduzione di ampiezza dell'onda a valle. Assumendo, quindi, che la variazione di ampiezza sia legata ad una variazione di energia trasportata dall'onda, si può trovare un'espressione del flusso di energia in funzione dell'ampiezza. Si consideri, ancora, il piano $z = 0$ ricoperto da oscillatori, distribuiti uniformemente secondo σ . Ognuno di essi ha un tensore di quadrupolo

$$I_{xx} = m \left(\frac{R}{2} \right)^2 \cos(2(\Omega t + \phi)) + ml_0 R \cos(\Omega t + \phi). \quad (3.15)$$

Dal momento che, nel caso trattato, R è piccolo in confronto a l_0 , si può trascurare il primo termine dell'Eq. (3.15), ottenendo

$$I_{xx} = ml_0 R \cos(\Omega t + \phi). \quad (3.16)$$

Dalle Eq. (2.16) e (3.16), si ha che ogni oscillatore produce un'onda di ampiezza

$$\delta \bar{h}_{xx} = -2\Omega^2 ml_0 R \frac{\cos(\Omega(r-t) - \phi)}{r},$$

piccola rispetto all'ampiezza dell'onda incidente. Sommando i contributi di tutti gli oscillatori, in un generico punto P dello spazio vale

$$\delta \bar{h}_{xx_{totale}} = 4\pi\sigma m\Omega l_0 R \sin(\Omega(z-t) - \phi),$$

che nel sistema di riferimento trasverso a traccia nulla ha la forma

$$\delta\bar{h}_{xx}^{TT} = -\delta\bar{h}_{yy}^{TT} = 2\pi\sigma m\Omega l_0 R \sin(\Omega(z-t) - \phi) . \quad (3.17)$$

Dalle Eq. (3.13) e (3.17) si ricava l'equazione per l'onda data dall'interferenza tra l'onda incidente e quella generata dagli oscillatori:

$$\bar{h}_{xx}^{int} = \bar{h}_{xx}^{TT} + \delta\bar{h}_{xx}^{TT} = (A - 2\pi\sigma m\Omega l_0 R \sin\phi) \cos(\Omega(z-t) - \psi) ,$$

dove

$$\psi = \arctan\left(\frac{2\pi\sigma m\Omega l_0 R \cos\phi}{A}\right) .$$

Si osserva che l'effetto dell'interferenza è quello di ridurre l'ampiezza dell'onda incidente di un fattore

$$\delta A = -2\pi\sigma m\Omega l_0 R \sin\phi . \quad (3.18)$$

Dividendo l'Eq. (3.14) per l'Eq. (3.18) si ottiene la relazione

$$\frac{\delta F}{\delta A} = \frac{1}{16\pi}\Omega^2 A , \quad (3.19)$$

che è del tutto indipendente dagli oscillatori ed è, quindi, una proprietà intrinseca dell'onda gravitazionale: al variare dell'ampiezza A , il flusso varia di una quantità che dipende solo dalla frequenza Ω , da A e dalla variazione δA . Si integra l'Eq. (3.19) per avere il flusso totale dell'onda [1]:

$$F = \frac{1}{32\pi}\Omega^2 A^2 = \frac{1}{32\pi}\Omega^2 \langle \bar{h}_{\mu\nu}^{TT} \bar{h}^{TT\mu\nu} \rangle , \quad (3.20)$$

dove si è usato il fatto che la media del quadrato dell'onda è

$$\langle (\bar{h}_{xx}^{TT})^2 \rangle = \frac{1}{2}A^2 .$$

L'Eq. (3.20) è invariante per trasformazioni di Lorentz di fondo, ma non per trasformazioni di gauge, ed è valida solo nella teoria linearizzata, dove l'energia locale può essere definita in maniera semplice.

3.6 L'informazione trasportata dalle onde gravitazionali

Dopo la prima rivelazione di onde gravitazionali avvenuta il 14 Settembre 2015, una nuova branca dell'astronomia osservativa ha avuto origine. Infatti, la radiazione gravitazionale, per via della sua natura differente da quella della radiazione elettromagnetica, trasporta informazioni diverse e complementari rispetto a quest'ultima, aprendo nuove possibilità per la comprensione dell'Universo. In particolare, le onde gravitazionali trasportano informazioni riguardo le caratteristiche globali delle sorgenti, quali massa, dimensioni e velocità interne, a frequenze tipicamente comprese tra i nHz e i kHz . Le onde elettromagnetiche, invece, trasportano informazioni locali sulla composizione atomica, sulla temperatura, sulla densità e sui campi magnetici, a frequenze comprese tra i MHz e gli EHz . Inoltre, mentre la radiazione elettromagnetica interagisce con la materia che attraversa, quella gravitazionale si propaga, praticamente indisturbata, attraverso tutto. Questo rende possibile la rivelazione di onde gravitazionali provenienti da regioni opache alle onde elettromagnetiche, che altrimenti non potrebbero essere osservate in nessun modo.

Le due diverse radiazioni viaggiano alla stessa velocità c , quindi, se sono emesse da una stessa sorgente allo stesso tempo, sono osservate contemporaneamente. In aggiunta, sia la radiazione gravitazionale che quella elettromagnetica possono essere soggette al fenomeno del *lensing gravitazionale* che può amplificare o oscurare il segnale.

La complementarità tra i due diversi tipi di osservazione si rivela, oggi, fondamentale nello studio dell'Universo e permette di fare quella che è chiamata *l'astronomia multimessaggera*, cioè permette di studiare le proprietà delle sorgenti nel cosmo tramite la rivelazione di entrambi i segnali, gravitazionali ed elettromagnetici.

Conclusioni

Dopo aver posto le basi della teoria della Relatività Generale, a partire dalle equazioni della teoria linearizzata e applicando alcune approssimazioni, sono state ricavate le equazioni che descrivono il processo di generazione delle onde gravitazionali. Si è osservato che, nella giusta scelta di gauge (TT), le equazioni si semplificano notevolmente e le soluzioni hanno solo due componenti indipendenti, mentre le altre si annullano. Sono stati, poi, discussi alcuni tra i sistemi responsabili della generazione di onde gravitazionali, con particolare attenzione

- (i) ai sistemi binari, per cui sono state esaminate le relazioni fondamentali che esprimono la luminosità e le frequenze caratteristiche della radiazione in relazione ai parametri principali di tali sistemi;
- (ii) alle pulsar, per cui è stato stimato il valore dell'ampiezza di deformazione delle onde gravitazionali da esse generate.

Per quanto riguarda la rivelazione delle onde gravitazionali, sono stati mostrati i due detector più importanti: la barra di Weber e gli interferometri. Per la barra di Weber, si è visto come questa viene deformata al passaggio della radiazione gravitazionale, dimostrando che il sistema si comporta come un oscillatore armonico smorzato con forzante. Per gli interferometri, invece, si è approfondito il modo in cui la luce è utilizzata per rilevare il passaggio di un'onda. Inoltre, è stata descritta la struttura dell'apparato e sono stati illustrati i progetti attualmente in funzione e quelli in fase di progettazione. Successivamente, sono stati investigati gli aspetti legati alla propagazione

delle onde gravitazionali, ricavando le equazioni che ne descrivono il processo e studiandone le soluzioni. Anche in questo caso, si è visto che nel sistema di riferimento trasverso a traccia nulla, le soluzioni hanno solo due componenti indipendenti non nulle. Una volta comprese le modalità di propagazione, è stato analizzato l'effetto del passaggio della radiazione gravitazionale sulle particelle libere e sono state definite le diverse configurazioni di polarizzazione: lineare (con modi $+$ e \times) e circolare (con modi R e L). Inoltre, si è compreso, osservando l'interazione della radiazione con la barra di Weber, che le onde gravitazionali trasportano energia ed è stata ricavata un'espressione per il flusso in funzione del valore di ampiezza e frequenza dell'onda. Infine, si è motivato il forte interesse per l'osservazione delle onde gravitazionali: data una sorgente di radiazione nel cosmo, l'informazione trasportata da queste onde è complementare a quella delle onde elettromagnetiche e in alcuni casi è, addirittura, l'unica. Le prospettive di questi studi sono estremamente promettenti: una nuova era di esplorazione cosmica, che promuove un'ottica multimessenger, ha avuto inizio.

Appendice A

Luminosità di un'onda gravitazionale in funzione della luminosità interna

In analogia con l'elettromagnetismo, la luminosità L_{GW} di un'onda gravitazionale, in funzione del tensore di momento di quadrupolo ridotto \bar{Q}_{jk} , è

$$L_{GW} = \frac{1}{5} \langle \bar{Q}_{jk} \bar{Q}_{jk} \rangle .$$

Per poter esprimere L_{GW} in funzione della luminosità interna $L_{interna}$, si osservi che

$$\bar{Q}_{jk} \sim \frac{MR^2}{T^3} \sim \frac{M(R/T)^2}{T} \sim \frac{\text{(energia cinetica)}}{T} ,$$

dove M è la massa della parte del sistema che si muove, R è la dimensione del sistema e T è il tempo impiegato da una massa per muoversi da una parte all'altra del sistema [2]. Quindi

$$\bar{Q}_{jk} \sim L_{interna} ,$$

da cui:

$$L_{GW} \sim L_{interna}^2 .$$

Bibliografia

- [1] B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2022. ISBN: 9781108492676. URL: <https://books.google.it/books?id=okukzgeECAAJ>.
- [2] C.W. Misner et al. *Gravitation*. Princeton University Press, 2017. ISBN: 9781400889099. URL: <https://books.google.it/books?id=zAAuDwAAQBAJ>.
- [3] N. Andersson. *Gravitational-Wave Astronomy: Exploring the Dark Side of the Universe*. Oxford Graduate Texts. Oxford University Press, 2019. ISBN: 9780198568032. URL: <https://books.google.it/books?id=NdG8DwAAQBAJ>.
- [4] Caltech e MIT. *LIGO*. URL: <https://www.ligo.caltech.edu/page/about>.
- [5] EGO. *VIRGO*. URL: <https://www.virgo-gw.eu/about/>.
- [6] B.P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration e Virgo Collaboration). “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. In: *Phys. Rev. Lett.* 116, 061102 (2016).
- [7] University of Tokyo Institute for Cosmic Ray Research. *KAGRA*. URL: <https://www.nao.ac.jp/en/research/telescope/kagra.html>.
- [8] IUCAA DCSEM IPR e RRCAT. *LIGO-INDIA*. URL: <https://www.ligo-india.in/about/>.
- [9] EGO. *Einstein Telescope*. URL: <https://www.et-gw.eu/>.
- [10] USA. *Cosmic Explorer*. URL: <https://cosmicexplorer.org/>.

- [11] ESA. *LISA*. URL: https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/LISA_factsheet.

Ringraziamenti

Per prima cosa, ringrazio il Professore Roberto Casadio per avermi dato la possibilità di approfondire questo argomento e per avermi guidato nella stesura della tesi. Sono sempre stato particolarmente affascinato da tutto ciò che ruota attorno alla Relatività Generale, motivo per cui sono davvero contento di aver concluso il mio percorso in triennale con un lavoro sulle onde gravitazionali.

Ringrazio tanto la mia famiglia per il supporto fondamentale che mi ha dato in questi anni, che non sempre sono stati facili. In particolare, ringrazio Claudia, mia sorella e amica più cara, per aver creduto in me, spesso molto più di quanto ci credessi io, e ringrazio mamma e papà per essermi stati sempre vicini, facendomi forza nei momenti più difficili, riportandomi a casa con la mente ogni volta che ne ho avuto bisogno.

Ringrazio i miei zii, i miei cugini, le mie nonne per tutto l'affetto e rivolgo un pensiero ai miei nonni, che avrebbero voluto vedere questo giorno, e glielo dedico.

Ringrazio i miei amici, quelli che mi aspettano a Catania e quelli che ho conosciuto qui a Bologna, per la fortuna che ho avuto di crescere con loro.

È stato un percorso importante e bellissimo, che non avrei mai potuto affrontare senza la vostra presenza. Ringraziarvi una volta sola non è sufficiente, quindi spero tanto di potervi ringraziare di nuovo tutti alla prossima laurea.