Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

Superfici razionali e modelli anticanonici per superfici di Del Pezzo

Tesi di laurea in geometria algebrica

Relatore:
Dr. FATIGHENTI ENRICO

Presentata da:
GIAPPICHINI RICCARDO

Anno Accademico 2023-2024

E quelle coniche, sembravan proiettive...

Introduzione

La classificazione delle varietà algebriche complesse è uno dei problemi più naturali della geometria algebrica. In generale le varietà algebriche sono ben lontante dall'essere classificate, e in un qualche senso non potranno mai esserlo. Alcune risposte parziali o complete sono però possibili nel caso di dimensione bassa; in questa tesi ci poniamo in particolare l'obiettivo di descrivere alcuni aspetti della classificazione di queste in dimensione 2. Questa prende il nome di *classificazione di Enriques-Kodaira* in onore di due dei matematici che più hanno contribuito allo sviluppo della teoria. Lo studio delle superfici algebriche ha le sue origini negli ultimi anni del XIX secolo con un iniziale contributo, tra gli altri, di Max Noether e Alfred Clebsch, con l'idea di generalizzare la teoria delle curve algebriche al caso di dimensione 2. La loro eredità venne poi raccolta, a cavallo dei due secoli, dalla Scuola Italiana di Geometria Algebrica, in particolare da Corrado Segre, Eugenio Bertini, il giovane Guido Castelnuovo e altri. A lui si deve per esempio uno dei teoremi caposaldo di questa classificazione, ovvero il teorema di contrazione di Castelnuovo. Quest'ultimo ha il merito di trasformare la classificazione delle superfici razionali e non solo in un problema "algoritmico". A Castelnuovo si unisce ben presto Federigo Enriques, e successivamente molti altri geometri, per esempio Francesco Severi, Gino Fano e altri. Una prima classificazione delle superfici venne completata nel 1914 da Enriques; oggigiorno la stessa viene riformulata in linguaggio moderno in termini di un invariante birazionale detto *dimensione di Kodaira*, introdotto negli anni '60 da Kunihiko Kodaira. La classificazione è quindi divisa in quattro classi di superfici, quelle con dimensione di Kodaira $-\infty$, 0, 1, 2.

In questa tesi studieremo in particolare le superfici con dimensione di Kodaira $-\infty$. Un particolare interesse assumono quelle cosidette di Del Pezzo, ovvero il caso 2-dimensionale delle varietà di Fano. Le superfici di Del Pezzo nascono inizialmente come luogo naturale in cui studiare le curve ellittiche, e il loro studio si è rivelato fonte di forte interesse geometrico, con applicazioni anche alla teoria delle algebre di Lie e alla fisica delle alte energie. Più in generale le varietà di Fano sono un importante oggetto di studio della moderna geometria birazionale. Una delle loro più importanti proprietà geometriche è la cosidetta *limitatezza* che ci assicura come in ogni dimensione esista un numero finito di varietà di Fano a meno di deformazione grazie ad un famoso lavoro di Kollár, Miyaoka, Mori del 1992. In dimensione maggiore di 2 lo studio della geometria birazionale diventa ben più complesso e i primi passi avanti sono stati fatti da Shigefumi Mori e Shigeru Mukai con la teoria del Minimal Model Program negli anni '80 del secolo scorso. La classificazione di queste varietà è, ad oggi, completa in dimensione 2 e 3 grazie ai lavori di Mori e Mukai, mentre in dimensione superiore è ancora estremamente aperta. È impossibile non citare inoltre la medaglia Fields 2018 vinta da Caucher Birkar per aver dimostrato la limitatezza delle varietà di Fano con dati tipi di singolarità.

In questa trattazione inizieremo introducendo strumenti alla base di tutta la geometria algebrica, quali divisori di Weil, fibrati lineari e fasci, studieremo i legami tra questi e ne esporremo importanti proprietà. Introdurremo anche la coomologia dei fasci, un importante strumento che utilizzeremo in tutto il corso della tesi.

Nel secondo capitolo inizieremo studiando la geometria birazionale delle superfici. Partiremo parlando di scoppiamenti con l'obiettivo di caratterizzare i morfismi birazionali in termini di composizione di questi ultimi e isomorfismi. Introdurremo poi il concetto di modello minimale che, in un certo senso, permette di trovare la (o le) superficie più semplice tra le classi di superfici birazionali ad una fissata. Tramite il teorema di Castelnuovo riusciremo a trovare un modo esplicito per determinare modelli minimali di superfici. Nel dettaglio basterà trovare una curva sulla nostra superficie con autointersezione -1 e contrarla, fino ad ottenere una superficie senza tali curve, per arrivare ad un modello minimale.

Nel terzo e quarto capitolo introdurremo la dimensione di Kodaira come invariante birazionale e classificheremo le superfici con dimensione di Kodaira $-\infty$. In particolare divideremo queste in due classi più semplici da studiare, ossia superfici rigate e razionali. Troveremo che i modelli minimali di queste sono date da particolari fibrati proiettivi e, mediante un teorema molto generale dovuto a Grothendieck, classificheremo i fibrati sulla retta proiettiva come somma di fibrati lineari, trovando quindi una semplice descrizione dei modelli minimali per superfici razionali.

Nell'ultimo capitolo ci occuperemo di fornire esplicitamente equazioni di alcune superfici di Del Pezzo, descritte birazionalmente come scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in al più 8 punti in posizione generale. Daremo in particolare una classificazione di queste superfici e dimostreremo che, in base al loro grado, sono isomorfe a $\mathbb{P}^2$, a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ o ad uno scoppiamento del primo in al più 8 punti in posizione generale. Infine utilizzeremo varie tecniche per studiare la mappa anticanonica di queste superfici e trovare delle equazioni globali per descrivere alcune di queste varietà in appropriati spazi ambiente.

Indice

Capitolo 1

Nozioni preliminari

In questo capitolo ci occupiamo di definire alcuni oggetti che nascono in modo naturale nella geometria algebrica quali fasci, fibrati e divisori su varietà algebriche. Successivamente andremo a sviluppare la coomologia dei fasci con la quale definiremo una forma di intersezione sulle superfici ed infine andremo ad enunciare alcuni teoremi cardine della geometria.

1.1 Divisori di Weil

Nel seguito X sarà una varietà proiettiva, irriducibile, liscia su $\mathbb{C}$. La topologia che sarà utilizzata in tutta la tesi è quella di Zariski. In questa sezione andiamo a definire il gruppo dei divisori di Weil su X, una naturale generalizzazione delle ipersuperfici nella nostra varietà che ci permetteranno di studiare alcuni aspetti della geometria di X.

Definizione 1.1.1 (Divisori primi)**.** Un divisore primo su X è un sottoinsieme chiuso $D \subseteq X$ tale che D è irriducibile e $\text{codim}D = 1$.

Definizione 1.1.2 (Divisori di Weil)**.** Definiamo il gruppo dei divisori di Weil $WDiv(X)$ come il gruppo abeliano libero sui divisori primi.

Definizione 1.1.3 (Divisori effettivi)**.** Un divisore di Weil

$$\sum_{D \subseteq X \text{primo}} a_D D,\ a_D \in \mathbb{Z}$$

si dice effettivo se $a_D \geq 0$ per ogni D.

Definizione 1.1.4 (Ordine di un divisore)**.** Sia $D \subseteq X$ un divisore primo, considero

$$\mathcal{O}_{X,D} = \{f \in \mathbb{C}(X) | D \cap \mathrm{dom(f)} \neq \varnothing\}$$

è un PID e un anello locale, con ideale massimale principale (t). Definisco

$$\begin{aligned} ord_D : \mathbb{C}(X)^* &\to \mathbb{Z} \\ f &\longmapsto m \end{aligned}$$

con m il minimo intero che mi rende ft^{-m} invertibile in $\mathcal{O}_{X,D}$. Per definizione diciamo che $ord_D(0) = +\infty$. Questa definizione serve a formalizzare il più intuitivo concetto di ordine di annullamento di f lungo D.

Definizione 1.1.5 (Divisori principali e equivalenza lineare)**.** Associamo a una funzione un divisore in questo modo:

$$\begin{aligned} div : \mathbb{C}(X)^* &\to WDiv(X) \\ f &\longmapsto \sum_{D \subseteq X primo} ord_D(f) D \end{aligned}$$

Un divisore si dice principale se appartiene all'immagine di questa funzione. Due divisori si dicono invece linearmente equivalenti se la loro differenza è un divisore principale. Si noti che questa è una relazione di equivalenza.

Definizione 1.1.6 (Gruppo di classe)**.** Defiamo il gruppo di classe come

$$Cl(X) = WDiv(X)/\sim,$$

dove la relazione è la relazione di equivalenza lineare

1.2 Fasci e loro coomologia

La nostra referenza principale per questa sezione è il capitolo B del libro di Huybrechts, [Huy04]

Definizione 1.2.1. Un prefascio $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su uno spazio topologico M è il dato di:

1. Per ogni $U \subseteq M$ aperto, un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$;
2. Per ogni $U \subseteq V$ sottoinsiemi aperti di M, un morfismo di gruppi abeliani $r_{U,V} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ tali che:

(i) $r_{U,U} = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}(U)}$;

(ii) per ogni $U \subseteq V \subseteq W$ aperti di M, si ha $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W}$.

richiediamo inoltre che $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$.

La definizione si estende in modo naturale ad un fascio su una categoria qualsiasi. Data $f \in \mathcal{F}(U)$ denotiamo con $f|_V = r_{V,U}(f)$.

Definizione 1.2.2. Un fascio di gruppi abeliani su M è un prefascio di gruppi abeliani su M che soddisfa:

1. per ogni $\{U_i\}_{i\in I}$ ricoprimento aperto di U, se $f, g \in \mathcal{F}(U)$ sono tali che $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ per ogni $i \in I$, allora $f = g$;

2. per ogni famiglia $\{f_i\}_{i\in I}$ con $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tale che per ogni $i, j \in I$ valga $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, allora esiste $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che $f|_{U_i} = f_i$ per ogni i.

Definizione 1.2.3. Un morfismo di prefasci $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è una collezione di morfismi $f|_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ per ogni aperto $U \subseteq M$ tali che per ogni $V \subseteq U$ aperti di M, il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "r_{U,V}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r_{U,V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Definizione 1.2.4. Dato $\mathcal{F}$ un prefascio su M per ogni $x \in M$ definiamo la spiga di $\mathcal{F}$ in x come

$$\mathcal{F}_x = \{(U, s)|\ x \in U,\ s \in \mathcal{F}(U)\}/\sim$$

dove $(U_1, s_1) \sim (U_2, s_2)$ se esiste $U \subseteq U_1 \cap U_2$ tale che $s_1|_U = s_2|_U$.

Ogni morfismo tra fasci $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induce in modo naturale un morfismo $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ per ogni $x \in M$.

Definizione 1.2.5. Ad ogni prefascio $\mathcal{F}$ possiamo associare un fascio $\mathcal{F}^+$, detto la fascificazione di $\mathcal{F}$ come il fascio

$$\mathcal{F}^+ = \{s : U \to \bigcup_{x\in U} \mathcal{F}_x | s(x) \in \mathcal{F}_x,\ \forall\, x \in U\, \exists\, x \in V \subseteq U,\ t \in \mathcal{F}(V)\, t.c.\, s(y) = t(y)\ \forall\, y \in V\}.$$

Dato un morfismo di fasci possiamo costruire il fascio immagine come la fascificazione del prefascio che associa ad un aperto l'immagine del morfismo. In modo analogo posso definire il fascio conucleo, mentre il fascio nucleo è ben posto senza bisogno di fare alcuna fascificazione.

Definizione 1.2.6. Una sequenza $\mathcal{F}^\bullet$ di omomorfismi di fasci

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}^i \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \cdots$$

è un complesso se $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i = 0$ per ogni $i \in I$. Il complesso è esatto se $\ker(\varphi_{i+1}) = \operatorname{Im}(\varphi_i)$ per ogni $i \in I$.

Data una successione esatta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \mathcal{F}^2 \longrightarrow 0$$

non è detto che

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0(U) \longrightarrow \mathcal{F}^1(U) \longrightarrow \mathcal{F}^2(U)$$

sia esatta.

Definizione 1.2.7. Una risoluzione di un fascio $\mathcal{F}$ è un complesso $\mathcal{F}^\bullet$ e un morfismo $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^0$ tale che

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \cdots$$

sia esatta.

Definizione 1.2.8. Un fascio si dice flaccido se per ogni $U \subseteq M$ si ha che $r_{U,M}$ è suriettivo.

Proposizione 1.2.9. *Ogni fascio F ammette una risoluzione data da un complesso di fasci flaccidi.*

Definizione 1.2.10. Definiamo l'iesimo gruppo di coomologia di un fascio $H^i(M, \mathcal{F})$ come l'i-esimo gruppo di coomologia del complesso

$$\mathcal{F}^0(M) \to \mathcal{F}^1(M) \to \mathcal{F}^2(M) \to \cdots$$

indotto da una risoluzione flaccida $\mathcal{F}^\bullet$ di $\mathcal{F}$.

1.3 Fibrati lineari

Una nozione fondamentale in geometria algebrica e fortemente correlata a divisori e fasci è quella di fibrato lineare. Iniziamo quindi a definire il più generale concetto di fibrato vettoriale di rango arbitrario. La nostra principale referenza per questa sezione è [Smi+04].

Definizione 1.3.1 (Fibrati vettoriali)**.** Un fibrato vettoriale di rango r su una varietà algebrica X è una varietà algebrica E, insieme a un morfismo $\pi : E \to X$ che soddisfa le seguenti condizioni:

1. esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ tale che per ogni $i \in I$ si ha un isomorfismo $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{C}^n$ che mi rende commutativo il seguente diagramma
$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times \mathbb{C}^n \arrow[dl, "p"] \\ & U_i & \end{tikzcd}$$
con p la proiezione canonica.

2. per ogni $i, j \in I$ si ha che nell'intersezione $U_i \cap U_j$, la composizione
$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \to (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n$$
$$(x, v) \longmapsto (x, (\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(v))$$
$\in \mathrm{G}L_n(\mathbb{C})$ a ogni valore di x fissato.

Il ricomprimento aperto, assieme a una scelta di isomorfismi φ_i è detta banalizzazione locale.

Definizione 1.3.2. (Fibrati lineari) Un fibrato vettoriale di rango 1 è detto fibrato lineare.

Osservazione 1.3.3. Dato un fibrato vettoriale $\pi : E \to X$, per ogni $x \in X$ si ha che $E_x := \pi^{-1}(x)$ è una sottovarietà chiusa di E, questo ha una struttura naturale di spazio vettoriale di dimensione r.

Definizione 1.3.4. (Pullback di un fibrato) Dato un morfismo di varietà algebriche $f : X \to Y$ e un fibrato $\pi : E \to Y$ di rango r considero il prodotto fibrato
$X \times_Y E := \{(x, v) | f(x) = \pi(v)\} \subseteq X \times E$ con le proiezioni naturali. La proiezione ad X è un fibrato di rango r su X le cui fibre in ogni punto sono isomorfe a $\pi_2^{-1}(f(x))$. Questo viene denotato con f^*E.

Dati E ed F due fibrati vettoriali su una varietà X, si costruiscono in modo naturale:

1. il fibrato $E \oplus F$, fibrato vettoriale su X le cui fibre per ogni punto x sono isomorfe a $E_x \oplus F_x$;
2. il fibrato $E \otimes F$, fibrato vettoriale su X le cui fibre per ogni punto x sono isomorfe a $E_x \otimes F_x$;
3. il fibrato $\bigwedge^i E$, le cui fibre per ogni x sono isomorfe a $\bigwedge^i E_x$. Inoltre se il rango del fibrato E è r denotiamo con $det(E) = \bigwedge^r E$;
4. il fibrato $Sym^r E$ in modo analogo al precedente;
5. il fibrato duale $E^\vee$, fibrato vettoriale su X le cui fibre per ogni punto x sono isomorfe a $E_x^\vee$

Definizione 1.3.5. Sia V una varietà algebrica proiettiva non singolare di dimensione n, definiamo il suo divisore canonico $K_X = det(T^\vee V)$ dove $T^\vee V$ denota il duale del fibrato tangente.

Allo stesso modo, dato un fibrato vettoriale E possiamo costruire il suo proiettificato $\mathbb{P}_X(E)$, fibrato su X le cui fibre per ogni punto x sono isomorfe a $\mathbb{P}(E_x)$. Sia $S = \mathbb{P}_C(E)$, $p : S \to X$ il morfismo di struttura. Si può definire in modo naturale un fibrato lineare su S, $\mathcal{O}_S(1)$, come in [Huy04, Remark 2.4.5].

Definizione 1.3.6. Sia $\pi : E \to X$ un fibrato vettoriale ed $U \subseteq X$ un aperto, una sezione del fibrato su U è un morfismo $s : U \to E$ tale che $\pi \circ s$ è l'identità su U. Denoto l'insieme di tutte le sezioni di E su U con $\varepsilon(U)$. Si può costruire in modo naturale un fascio di $\mathcal{O}_X - moduli$ considerando su ogni aperto l'insieme delle sezioni di E sull'aperto. Ogni fibrato ammette almeno una sezione sopra ogni aperto, ovvero la sezione 0.

Definizione 1.3.7. Un fibrato lineare L si dice ampio se esiste un $m \in \mathbb{N}$ tale per cui $L^{\otimes m}$ induce un immersione. Cioè fissata una base $\{s_0, ..., s_N\}$ delle sezioni globali di $L^{\otimes m}$ la mappa

$$\begin{aligned} \varphi_{|L^{\otimes m}|} : X &\dashrightarrow \mathbb{P}^N \\ x &\longmapsto [s_0(x) : ... : s_N(x)] \end{aligned}$$

è un immersione. Diciamo che L è molto ampio se lui stesso induce un immersione.

Proposizione 1.3.8. *Esiste una biezione tra classi di divisori, classi di fasci di $\mathcal{O}_X -$ moduli localmente isomorfi ad $\mathcal{O}_X$ e classi di fibrati lineari.*

La dimostrazione si trova in [Sha13, Teo. VI.1.4.3]

1.4 Gruppo di Picard

Definizione 1.4.1 (Gruppo di Picard)**.** Sia S una varietà liscia, definiamo il gruppo di Picard di S, $Pic(S) = \{\text{fibrati lineari su } S\}/\sim$ dove la relazione è data dall'isomorfismo tra fibrati lineari, l'operazione è il prodotto tensoriale e l'inverso è dato dal duale.

Per quanto visto prima questo gruppo è ben definito anche a livello di divisori e di fasci di $\mathcal{O}_X$ − moduli localmente isomorfi ad $\mathcal{O}_X$, molto spesso quindi passeremo da una notazione all'altra confondendole tra loro ed utilizzando quella che ci è più comoda. In particolare nei nostri casi $Cl(S) = Pic(S)$.
Introduciamo uno strumento che utilizzeremo spesso per studiare il gruppo di Picard di una varietà:

Definizione 1.4.2. Sia X una varietà complessa, consideriamo la successione esponenziale su X

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0.$$

Usando l'identificazione tra $Pic(X)$ e $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ [Huy04, Corollary 2.2.10] definiamo la prima classe di Chern come la mappa $c_1 : Pic(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ dove c_1 è la mappa di bordo della successione lunga in coomologia ottenuta dalla sequenza esponenziale.

Esempio 1.4.3. Vogliamo studiare il gruppo di Picard di $\mathbb{P}^2$. Sia $C \subseteq \mathbb{P}^2$ un divisore primo. Esiste $f \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tale che $C = V(f)$. Definiamo $h = f/x_0^d$ ove d è il grado di C, quindi otteniamo che C è linearmente equivalente a $dV(x_0)$. Si ha che il gruppo di Picard è isomorfo a $\mathbb{Z}$ generato da $[V(x_0)]$. Un ragionamento analogo si estende al caso di $\mathbb{P}^n$ e al prodotto di spazi proiettivi $\mathbb{P}^{n_1} \times ... \mathbb{P}^{n_m}$, dove il gruppo di Picard sarà $\mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$ m volte.

Denotiamo con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ il fibrato lineare su $\mathbb{P}^1$ associato al divisore nH dove H denota la classe di un qualunque iperpiano in $\mathbb{P}^1$. con la seguente proposizione che si trova in [Huy04, Proposition 2.4.1] studiamo lo spazio delle sezioni globali di questi fibrati.

Proposizione 1.4.4. *Per $k \geq 0$ lo spazio $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k))$ è isomorfo allo spazio $\mathbb{C}[z_0, ..., z_n]_k$ dei polinomi omogenei di grado k. In particolare per $k < 0$ $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(k)) = 0$.*

Proposizione 1.4.5. *Il divisore canonico $\mathbb{K}_{\mathbb{P}^n}$ di $\mathbb{P}^n$ è $K_{\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$*

La dimostrazione si trova in [Huy04, Proposition 2.4.3].
Enunciamo adesso un risultato che ci permette di calcolare il divisore canonico di un ipersuperficie in $\mathbb{P}^n$, che segue dalla formula di aggiunzione.

Proposizione 1.4.6. *Sia X un'ipersuperficie liscia di grado d su $\mathbb{P}^n$, allora il suo divisore canonico* $K_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-n-1)_{|X} =: \mathcal{O}_X(d-n-1)$

La dimostrazione si trova in [Huy04, Corollary 2.4.9].

Definizione 1.4.7. Sia S superficie proiettiva liscia e siano $L, L' \in Pic(S)$. Definiamo il prodotto di intersezione

$$(L.L') = \chi(\mathcal{O}_s) - \chi(L^{-1}) - \chi(L'^{-1}) + \chi(L^{-1} \otimes L'^{-1}).$$

Teorema 1.4.8. *Il prodotto di intersezione definisce una forma bilineare simmetrica nel gruppo di Picard di S tale che se C e D sono due curve distinte irriducibili su S che si intersecano in un numero finito di punti allora*

$$(C.D) = \sum_{p \in C \cap D} dim(\mathcal{O}_{X,p}/(f,g))$$

con f, g le equazioni locali di C, D in p. Se C è una curva e L un divisore qualsiasi si ha $(L.C) = deg(L_{|C})$. Infine L è un fibrato lineare ampio su X se e solo se per ogni curva C in X si ha $(C.L) > 0$ e $L^2 > 0$.

Tutte le proprietà enunciate nel precedente teorema si trovano nella sezione V.1 di [Har77].

Esempio 1.4.9. Siano $[C]$,$[C']$ nel gruppo di Picard di $\mathbb{P}^2$, per quanto visto prima $[C] = [dL]$, $[C'] = [d'L']$ con L ed L' rette distinte quindi $(C.C') = dd'(L.L') = d.d'$, otteniamo quindi il teorema di Bézout sfruttando la bilinearità della forma di intersezione e la sua buona positura a livello di gruppo di Picard.

1.5 Riemann-Roch e dualità di Serre

In questa sezione vediamo dei corollari di alcuni dei teoremi più importanti della geometria algebrica. Le dimostrazioni si possono trovare nel capitolo 5 di [Huy04], nel capitolo 1 di [Bea96] e nel capitolo 3 di [Har77]. S è una superficie liscia, proiettiva.

Teorema 1.5.1 (Dualità di Serre)**.** *Sia L un fibrato lineare su S, K il divisore canonico su S, allora si ha che*

$$\chi(L) = \chi(K \otimes L^{-1});$$

in particolare $h^i(X, L) = h^{2-i}(K_s \otimes L^\vee)$ per $i \in \{0, 1, 2\}$.

Teorema 1.5.2 (Riemann-Roch per superfici). *Sia* $L \in Pic(S)$,

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{(L^2 - L.K)}{2}.$$

Teorema 1.5.3 (Formula di Noether).

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{K_S^2 + \chi_{top}(S)}{12},$$

dove $\chi_{top}(S)$ *è la caratteristica di Eulero-Poincaré di* S.

Teorema 1.5.4 (Annullamento di Kodaira). *Sia* L *un fibrato vettoriale lineare ampio su* S, *allora:*

$$H^q(S, K_S \otimes L) = 0 \text{ per ogni } q>0.$$

Capitolo 2

Geometria birazionale delle superfici

In questo capitolo inizieremo parlando di scoppiamenti di superfici. Questi possono essere considerati i mattoncini dei morfismi birazionali, vedremo infatti che queste ultime non sono altro che composizione di isomorfismi e scoppiamenti. Andremo quindi a parlare di risoluzione di singolarità e introdurremo il modello minimale di una superficie, dimostrando il teorema di contrazione di Castelnuovo.

2.1 Scoppiamenti

Nel seguito tutte le varietà che appariranno saranno superfici liscie, proiettive definite su $\mathbb{C}$.

Definizione 2.1.1. (scoppiamenti) Sia S una superficie, $x \in S$. Definiamo lo scoppiamento di S nel punto x come una superficie $\mathrm{Bl}_x(S)$ insieme a un morfismo $\varepsilon : \mathrm{Bl}_x(S) \to S$ tale che:

1. La restrizione di ε a $\varepsilon^{-1}(S - \{x\})$ è un isomorfismo con $S - \{x\}$;
2. $\varepsilon^{-1}(x) = E$ è isomorfa a $\mathbb{P}^1$.

Chiamiamo E il divisore eccezionale dello scoppiamento.

Osserviamo che lo scoppiamento esiste definendolo localmente. Sia $\widetilde{U} \subseteq S$ un aperto che contiene x in cui possiamo definire delle coordinate locali u, v in x. Supponiamo ad esempio che $u = 0$ e $v = 0$ si intersechino trasversalmente in x. A meno di restringere possiamo supporre che x sia l'unico punto di intersezione di queste due curve. Definiamo $Z = V(uY - vX) \subseteq \widetilde{U} \times \mathbb{P}^1$ dove Y, X sono coordinate omogenee di $\mathbb{P}^1$. A questo punto se consideriamo Z, assieme alla proiezione canonica verso $\widetilde{U}$, è lo scoppiamento cercato.

Esempio 2.1.2. Costruiamo globalmente lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto $p \in \mathbb{P}^2$. Siano $F, G \in H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ tali che $p = V(F, G)$. Definiamo $Z = V(uF + vG) \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ con u, v coordinate omogenee di $\mathbb{P}^1$. Consideriamo la proiezione canonica $\pi : Z \to \mathbb{P}^2$. La fibra di p è $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ poiché $uF(p) + vG(q) = 0$ per ogni $[u : v] \in \mathbb{P}^1$. Sia $q \in \mathbb{P}^2$ tale che $q \neq p$, $\pi^{-1}(q)$ è definita da un equazione lineare in $\mathbb{P}^1$ ovvero $uF(q) + vG(q) = 0$, quindi è un unico punto. La varietà cosi costruita è, per definizione, lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in p.

Lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto p, ammette una naturale proiezione verso $\mathbb{P}^1$. Per capire la struttura di questa mappa utilizziamo la seguente proposizione la cui dimostrazione si trova in [EH16, proposition 9.11]:

Proposizione 2.1.3. *Sia V' un sottospazio vettoriale di dimensione r di uno spazio vettoriale V di dimensione $n+1$. Sia $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-r}}(-1) \oplus (V' \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-r}})$, fibrato di rango $r+1$ su $\mathbb{P}^{n-r} = \mathbb{P}(V/V')$. Allora lo scoppiamento di $\mathbb{P}(V)$ in $\mathbb{P}(V')$, assieme alla sua proiezione verso $\mathbb{P}^{n-r}$ è isomorfo al fibrato proiettivo $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^{n-r}$.*

Applicando questa proposizione allo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto otteniamo che è isomorfo al fibrato proiettivo $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$.
Iniziamo a studiare alcune proprietà degli scoppiamenti.

Definizione 2.1.4. Sia C una curva su S, definiamo la trasformata stretta di C come la chiusura di $p^{-1}(C - \{p\})$ in $\mathrm{Bl}_p(S)$ e la denotiamo con $\widetilde{C}$.

Proposizione 2.1.5. *Sia C una curva su S che passa per q con molteplicità m. Sia $Bl_q(S)$ lo scoppiamento di S in q, allora vale:*

$$p^*C = \widetilde{C} + mE.$$

Dimostrazione. Iniziamo osservando che $p^*C = \widetilde{C} + kE$ per un certo $k \in \mathbb{Z}$. Consideriamo delle coordinate locali (x, y) in un aperto U contenente q. Nell'aperto $\widetilde{U} \cap (U \times \{z \neq 0\})$ possiamo prendere come coordinate $u = x$ e $v = w/z$. In queste coordinate $p(u, v) = (u, uv)$. Sia f un equazione locale di C in q. poiché C ha molteplicità m in q abbiamo che

$$f = f_m(x, y) + O(m),$$

con $f_m(x, y)$ omogeneo di grado m. Allora $f \circ p(u, v) = u^m(f_m(1, v) + O(m))$, dunque la componente E ha molteplicità m.

□

Proposizione 2.1.6. *Sia S una superficie, $Z = Bl_p(S)$, $p : Z \to S$ la mappa di scoppiamento, $E \subseteq Z$ il divisore eccezionale, allora:*

1. *$Pic(S) \oplus \mathbb{Z} \cong Pic(Z)$ e l'isomorfismo è dato da $(D, n) \to p^*D + nE$;*

2. *Siano D, D' due divisori su S, allora $(p^*D).(p^*D') = D.D'$, $E.(p^*D) = 0$, $E^2 = -1$;*

3. *$K_Z = p^*K_S + E$.*

Dimostrazione. Iniziamo dal punto (2), per le prime due formule identifichiamo D e D' con due divisori linearmente equivalenti che non contengono il punto p sfruttando il fatto che il prodotto di intersezione sia ben definito a livello di gruppo di Picard per il Teorema1.4.8. Inoltre per [SR94, Theorem 3.1], ogni volta che abbiamo un divisore ne possiamo trovare un altro linearmente equivalente che non passa per un punto scelto. Per la terza consideriamo C una curva che passa per p con molteplicità 1. Per costruzione di C la sua trasformata stretta soddisfa $\widetilde{C}.E = 1$, mentre per il punto precedente $0 = p^*C.E$ dunque $E^2 = E(p^*C - \widetilde{C}.E) = -1$. Mostriamo il punto (1). consideriamo una curva irriducibile in Z, questa è E oppure la trasformata stretta della sua immagine in S, la mappa è dunque suriettiva. Mostriamo ora l'iniettività. Sia D un divisore tale che $p^*D + nE = 0$, moltiplicandolo per E si ha $p^*D.E + nE.E = -n = 0$, dunque $n = 0$. Applicando p_* otteniamo $p_*(p^*D) = D = 0$, dunque la mappa è anche iniettiva. Mostriamo il punto (3). Sia ω una 2-forma razionale su S tale che questa sia regolare in un intorno di p e $\omega(p) \neq 0$. Consideriamo $p^*\omega$, gli zeri di questa fuori da E sono esattamente gli zeri di ω. Allora $div(p^*\omega) = p^*div(\omega) + kE$, vogliamo mostrare che $k = 1$. Denotiamo con $K_Z = div(p^*\omega)$ e con $K_X = div(\omega)$. Per la formula di aggiunzione abbiamo che

$$-2 = deg(K_{\mathbb{P}^1}) = deg(K_E) = deg((K_Z + E)_{|E}) = K_Z.E + E^2 = p^*K_X.E + (k+1)E^2 = -k - 1.$$

Dunque $2 = k + 1$ e abbiamo provato quanto voluto. □

Definizione 2.1.7. Per un divisore D definiamo il sistema lineare completo associato a D, e lo denotiamo con $|D|$, l'insieme di tutti i divisori effettivi ad esso linearmente equivalenti.

Il sistema lineare completo $|D|$ può essere identificato con $\mathbb{P}(H^0(S, \mathcal{O}_S(D)))$.

Definizione 2.1.8. Un sottospazio lineare $P \subseteq |D|$ è detto un sistema lineare su S.

Sia P un sistema lineare su S. Diciamo che una curva C è una componente fissata di P se ogni divisore di P contiene C. La parte fissata di P è invece il più grande divisore che è contenuto in ogni elemento di P. Sia F la parte fissata di P, sia $D \in P$, se consideriamo $|D - F|$ non ha parti fissate.

Definizione 2.1.9. Un punto p di S è detto punto base di P se ogni divisore di P contiene p.

Se il sistema lineare non ha parti fissate il numero di punti base è finito ed è minore di D^2.

Proposizione 2.1.10. *Sia S una superficie, esiste una biezione tra i seguenti insiemi:*

1. *{Mappe razionali $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tali che $\varphi(S)$ non è contenuto in alcun iperpiano};*
2. *{Sistemi lineari su S senza parti fissate e di dimensione n}.*

Dimostrazione. Diamo qua un idea della dimostrazione che si può trovare in [Bea96, p. II.6]. Data φ una mappa razionale gli associamo $\varphi^*|H|$ dove $|H|$ è la classe iperpiana di $\mathbb{P}^n$. Viceversa, sia P un sistema lineare senza parti fissate di dimensione n, definiamo $\varphi : S \dashrightarrow P^\vee$ che manda $x \in S$ nell'iperpiano in P formato dai divisori passanti per x; φ è definita se e solo se x non è un punto base di P. □

Teorema 2.1.11. *Sia $\varphi : S \dashrightarrow X$ una mappa razionale fra una superficie S e una varietà proiettiva X. Allora esiste una superficie S' e un morfismo $\vartheta : S' \to S$ che è una composizione di un numero finito di scoppiamenti e un morfismo $f : S' \to X$ tale che $f = \vartheta \circ \varphi$.*

Dimostrazione. Senza perdere in generalità possiamo supporre $X = \mathbb{P}^n$ e che l'immagine di S non sia contenuto in alcun iperpiano. Per quanto visto prima esiste un sistema lineare $P \subseteq |D|$ (dove D denota il tirato indietro della classe iperpiana di $\mathbb{P}^n$) di dimensione n, senza componenti fissate, associato a φ. Se P è libero da punti base, allora φ è un morfismo e prendendo $S' = S$ concludiamo. Supponiamo esista $x \in P$ un punto base. Sia S_1 lo scoppiamento di S in x e $\varepsilon : S_1 \to S$ la mappa di scoppiamento. poiché x apparteneva a ogni divisore di P, il divisore eccezionale E apparirà in $\varphi^* P$ con una certa molteplicità $k > 0$. Sia $P_1 \subseteq |\varphi^* D - kE|$, P_1 non ha componenti fissate, quindi definisce una mappa razionale φ_1 verso $\mathbb{P}^n$ che coincide con $\varphi \circ \varepsilon$. Se questa è un morfismo abbiamo finito, altrimenti iteriamo il processo. Otteniamo quindi una successione di scoppiamenti

$\varepsilon_n : S_n \to S_{n-1}$ e di sistemi lineari $P_n \subseteq |D_n| = |\varphi_n^* D_{n-1} - k_n E_n|$ senza punti fissi. P_n non ha parti fissate, perciò $D_n^2 \geq 0$, quindi $0 \leq D_n^2 = D_{n-1}^2 - k_n^2 < D_{n-1}^2$ e questo processo deve stabilizzarsi per $k >> 0$, arrivando dunque al morfismo cercato.(Si osservi che D^2 è il massimo numero di passi in cui termina questo processo). □

Proposizione 2.1.12. *Sia S una superficie irriducibile, $f : S \to S'$ un morfismo birazionale di superfici. Supponiamo che f^{-1} non sia definita in un punto $p \in S'$, allora $f^{-1}(p)$ è una curva su S.*

Dimostrazione. poiché la mappa inversa di f non è definita in un punto $f^{-1}(p)$ consiste di almeno due punti. Per il Teorema principale di Zariski [Per09, Theorem 3.1.4] le fibre di f sono connesse e di dimensione 1, quindi $f^{-1}(p)$ è una curva. □

Proposizione 2.1.13. *Sia $f : X \dashrightarrow Y$ una mappa birazionale tra superfici indefinita in un punto $x \in X$. Allora la mappa inversa $g : Y \dashrightarrow X$ contrae una curva in Y a x.*

Dimostrazione. Per definizione di mappa birazionale esiste U aperto di S tale che $f = \varphi|_U$ è un morfismo. Sia $\Gamma \subseteq X \times Y$ la chiusura del grafico di f. Denotiamo con p, q le due proiezioni canoniche rispettivamente verso X e Y che sono morfismi birazionali. Se f non è definita in x, l'inversa di q non è definita in x, quindi $q^{-1}(x)$ è una curva C per la proposizione precedente, la quale viene contratta ad x tramite q. Osserviamo che $g = q \circ (p)^{-1}$, allora C è contratta a x mediante g. □

Proposizione 2.1.14. *(Proprietà universale degli scoppiamenti) Sia $f : X \to Y$ un morfismo birazionale tra superfici tale che $f^{-1} = g$ non sia definita in un punto $y \in Y$. Allora f fattorizza come*

$$f : X \xrightarrow{h} \mathrm{Bl}_y Y \xrightarrow{p} Y,$$

dove h è un morfismo birazionale e p è la mappa di scoppiamento.

Dimostrazione. Definiamo $h := p^{-1} \circ f$, e denotiamo con h^{-1} la sua inversa. Vogliamo mostrare che h è un morfismo. Supponiamo per assurdo non lo sia, allora esiste una curva C nel $\mathrm{Bl}_y Y$ contratta tramite h^{-1} ad un punto $x \in X$. Poiche, per definizione, $h^{-1} = f^{-1} \circ p$ ed $h^{-1}(C) = x$, abbiamo che $f^{-1}(p(C)) = x$, cioè $p(C) = f(x)$. C è dunque una curva contratta da p, allora $C = E$ e $f(x) = y$ poiché il divisore eccezionale è l'unica curva contratta da p. Sia u una coordinata locale di y in Y. Se f^*u non è una coordinata locale in x su X, allora $f^*u \in m_x^2$. Quindi $p^*u = (h^{-1})^* f^*u \in m_e^2$ per ogni $e \in E$ in cui è definita, cioè in tutto E meno un numero finito di punti. Lo scoppiamento ha la proprietà che ogni coordinata locale di $y \in Y$ si solleva a una coordinata locale in ogni punto di E, meno che in uno. Allora f^*u deve essere una coordinata locale in x su X, quindi h è definita in x ed è un morfismo. □

Utilizziamo questi teoremi per dare una caratterizzazione dei morfismi birazionali.

Teorema 2.1.15. *Sia $f : X \to Y$ un morfismo birazionale tra due superfici proiettive liscie. Allora f è la composizione di un numero di finito di scoppiamenti e isomorfismi.*

Dimostrazione. Supponiamo che f non sia un isomorfismo, allora esiste un punto $y_1 \in Y$ in cui la mappa inversa non è definita. Sappiamo che f fattorizza a

$$f : X \xrightarrow{f_1} \mathrm{Bl}_{y_1}Y \xrightarrow{p_1} Y.$$

Osserviamo che f contrae tutte le curve che contrae f_1 e, in più, contrae il divisore eccezionale E_1. In particolare f_1 contrae un numero di curve strettamente minore di quante ne contragga f. Se f_1 non contrae curve, abbiamo finito. Supponiamo contragga curve, possiamo prendere un punto $y_2 \in Y$ in cui f_1^{-1} non è definita e procedere come prima. poiché il numero di curve contratte diminuisce strettamente a ogni iterazione abbiamo che questo processo deve terminare. □

Un corollario diretto di questo fatto è il seguente:

Corollario 2.1.16. *Siano X, Y due superfici liscie proiettive, f una mappa birazionale tra queste. Allora esiste una superficie Z e due morfismi $g : Z \to X$, $h : Z \to Y$ che sono composizione di scoppiamenti e isomorfismo tali che $h = f \circ g$.*

2.2 Modelli minimali e teorema di Castelnuovo

Definizione 2.2.1. Sia S una superficie, denotiamo con $B(S)$ l'insieme delle superfici birazionali ad S a meno di isomorfismo. Se $S_1, S_2 \in B(S)$ diciamo che S_1 domina S_2 se esiste un morfismo birazionale $S_1 \to S_2$. Una superficie S si dice quindi minimale se la sua classe in $B(S)$ è minimale, cioè se ogni morfismo birazionale $S \to S'$ è un isomorfismo.

Esempio 2.2.2. Consideriamo $\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$ con la sua mappa di scoppiamento verso $\mathbb{P}^2$. Per definizione di scoppiamento questa mappa è un morfismo birazionale verso $\mathbb{P}^2$ la cui inversa non è definita nel punto in cui scoppiamo. Dunque $\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$ domina $\mathbb{P}^2$.

Per la caratterizzazione delle mappe razionali abbiamo quindi che tutte le classi in $B(S)$ sono ottenute tramite scoppiamenti di superfici minimali. In particolare da ciò segue:

Proposizione 2.2.3. *Una superficie è minimale se e solo se non contiene divisori eccezionali.*

Ricordiamo che se E è un divisore eccezionale su una superficie si ha $E^2 = -1$.

Definizione 2.2.4. Sia C una curva razionale su una superficie, diciamo che C è una (-1)-curva se $C^2 = -1$.

Diamo ora una caratterizzazione numerica dei divisori eccezionali.

Teorema 2.2.5. *(Criterio di contraibilità di Castelnuovo) Sia S una superficie, $E \subseteq S$ una curva isomorfa a $\mathbb{P}^1$ con $E^2 = -1$. Allora E è un divisore eccezionale di S.*

Dimostrazione. Sia H un divisore molto ampio su S tale per cui $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$. Sia $k = H.E$ e $H' = H + kE$. osserviamo che $deg(H|_E) = k$, $deg(H'|_E) = 0$, quindi, essendo E isomorfo a $\mathbb{P}^1$ i divisori nel gruppo di Picard sono caratterizzati dal grado, da cui $\mathcal{O}_S(H)_{|E} = \mathcal{O}_E(-1)$, $\mathcal{O}_S(E)_{|E} = \mathcal{O}_E(-1)$, $\mathcal{O}_S(H')_{|E} = \mathcal{O}_E$. Consideriamo ora per ogni $1 \leq i \leq k$ la nota successione esatta corta:

$$0 \to \mathcal{O}_S(-E) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_E \to 0.$$

Tensorizzandola per $\mathcal{O}_S(H + iE)$ si ottiene:

$$0 \to \mathcal{O}_S(H + (i-1)E) \to \mathcal{O}_S(H + iE) \to O_E(k-i) \to 0.$$

Passando in coomologia e sfruttando il fatto che $H^1(E, \mathcal{O}_E)(r) = 0$ per $r \geq 0$ otteniamo la successione esatta lunga:

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_S(H + (i-1)E)) \to H^0(\mathcal{O}_S(H + iE)) \xrightarrow{r_i} H^0(\mathcal{O}_E(k-i)) \to$$
$$H^1(\mathcal{O}_S(H + (i-1)E)) \to H^0(\mathcal{O}_S(H + iE)) \xrightarrow{0} 0.$$

Si nota subito che, procedendo per induzione su i, $H^1(S, \mathcal{O}_S(H + iE)) = 0$ da cio si ha la suriettività di r_i. Vogliamo ora studiare la mappa associata ad H'. Per cominciare fissiamo una base $\{s_0, ..., s_n\}$ di $H^0(S, \mathcal{O}_S(H))$ e per ogni $1 \leq i \leq k$ scegliamo degli elementi $a_{i,o}, ..., ai, k-1$ di $H^0(S, \mathcal{O}_S)(H + iE)$ la cui restrizione ad E forma una base di

$H^0(E, \mathcal{O}_E(k-1))$. Scegliamo una sezione $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(E))$. Possiamo dunque costruire una base di $H^0(S, \mathcal{O}_S(H + iE))$ come

$$\{s^k s_0, ..., s^k, s_n, s^{k-1} a_{1,0}, ..., s^{k-1} a_{1,k-1}, ..., s a_{k-1,1}, a_{k,0}\}.$$

Consideriamo φ la mappa associata a questo sistema lineare. Se $x \in E$, allora $s(x) = 0$, $a_{k,0}(x) = 1$, quindi E viene contratto al punto $[0 : 0 : ... : 0 : 1]$. Se $x \notin E$, $s(x) \neq 0$, inoltre ricordando che $s_0, ..., s_n$ davano un immersione di S abbiamo che φ_{S-E} è un immersione. Denotiamo ora con S' l'immagine di S mediante φ. Vogliamo mostrare che questa superfice non è singolare nel punto p dove viene contratta la curva. Sia $U \subseteq S$ un aperto di E definito da $a_{k,0} \neq 0$. Definiamo delle sezioni $x, y \in \mathcal{O}_U(-E)$ come $x = \frac{a_{k-1,0}}{a_{k,0}}$, $y = \frac{a_{k-1,1}}{a_{k,0}}$. La loro restrizione ad E dormano una base di $H^0(E, \mathcal{O}_E(1))$. A meno di restringere U possiamo supporre che x e y non si annullino contemporaneamente in U. Queste definiscono quindi un morfismo $h_2 : U \to \mathbb{P}^1$. Le funzioni sx, sy definiscono un altro morfismo $h_1 : U \to \mathbb{A}^2$. La funzione $(h1, h2) : U \to \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ fattorizza lungo lo scoppiamento di $\mathbb{A}^2$ nell'origine, che denotiamo con $\widetilde{\mathbb{A}}^2$. Il morfismo $h : U \to \widetilde{\mathbb{A}}^2$ ha le seguenti proprietà:

1. h induce un isomorfismo fra E ed il divisore eccezionale in $\widetilde{\mathbb{A}}^2$;

2. per tutti gli $q \in E$, h è un isomorfismo in Zariski in un intorno di q.

La prima proprietà segue direttamente dalle scelte di x, y. Per provare la seconda proprietà mostriamo che l'immagine inversa tramite h di un sistema di coordinate locali in $h(q)$ è un sistema di coordiante locali in q. Siano u, v (rispettivamente U, V) le coordinate di $\mathbb{A}^2$ (rispettivamente $\mathbb{P}^1$). Lo scoppiamento di $\mathbb{A}^2$ nell'origine è definito dall'equazione $V(uV - vU) \subseteq \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. Supponiamo che $x(q) = 0$ ed $y(q) = 1$ così che $h(q)$ avrà coordinate $u = v = U = 0$, $V = 1$. Prendiamo v e U/V come coordinate locali in $h(q)$. Abbiamo che $h^*v = sy$ e $h^*(U/V) = x/y$; la prima si annulla in E con ordine 1, mentre la seconda se ristretta ad E determina un sistema di coordinate locali per q in E. Questo prova la seconda proprietà. Usiamo ora la classica topologia delle varietà analitiche e mostriamo che, rispetto a questa, esiste un intorno U di E tale che h induce un isomorfismo fra U ed un intorno V del divisore eccezionale di $\widetilde{\mathbb{A}}^2$. Osserviamo che mostrare ciò è abbastanza per concludere il teorema; per costruzione abbiamo un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \widetilde{\mathbb{A}}^2 \arrow[d, "\eta"] \\ \varepsilon(U) \arrow[r, "\widetilde{h}"] & \mathbb{A}^2 \end{tikzcd}$$

con η la mappa di scoppiamento e $\widetilde{h}$ un morfismo. Se h è un isomorfismo tra U e V, allora $\widetilde{h}$ è un isomorfismo fra $\varepsilon(U)$ e $\varepsilon(V)$. Per [Bea96, Remark II.13] la mappa $\varepsilon \circ h^{-1}$ fattorizza lungo un morfismo $\eta(V) \to \varepsilon(U)$, che è l'inversa di $\widetilde{h}$. poiché $\eta(V)$ è aperto in $\mathbb{A}^2$, $\varepsilon(U)$ è liscia; allora S' è liscia in p. Il teorema è quindi concluso con la proposizione che andiamo ora a dimostrare. □

Proposizione 2.2.6. *Sia $f : X \to Y$ una mappa continua tra spazi topologici di Hausdorff, $K \subseteq X$ compatto. Supponiamo che:*

1. *$f_{|K}$ è un omeomorfismo;*

2. *per ogni $k \in K$, f è un omeomorfismo locale vicino a k. Allora esiste un intorno U in X di K e un aperto V di Y tale che f induce un omeomorfismo $U \cong V$*

Dimostrazione. Diamo un idea della dimostrazione che si trova in [Bea96, Lemma II.18]. A meno di restringere X possiamo supperre che f è un omeomorfismo locale intorno ad ogni punto di X.

1. Denotiamo con $\Omega = \{(x,y) \in X \times X | \ f(x) \neq f(y) \text{ o } x = y\}$. poiché f è un omeomorfismo locale significa che Ω è aperto e, per ipotesi, $K \times K \subseteq \Omega$.

2. Sia K un sottoinsieme compatto di uno spazio X e Ω un intorno in $X \times X$ di $K \times K$. Allora esiste un intorno U in X di K tale che $U \times U \subseteq \Omega$. Per ogni $k \in K$ possiamo costruire per compattezza un aperto $U_k \times V_k$ con $k \times K \subseteq U_k \times V_k \subseteq \Omega$. Un numero finito di questi insiemi $k_1, ..., k_n$ ricoprono $K \times K$ e gli aperti $U = (\bigcup U_{k_i}) \cap (\bigcup V_{k_i})$ fanno quanto cercato.

Questi due punti insieme implicano che $f_{|U}$ sia iniettiva, e quindi un omeomorfismo. □

Grazie a questo teorema e alle osservazioni fatte prima la ricerca di un modello minimale per una superficie si riduce allo studio delle (-1)-curve sulla superficie.
Se S non ne contiene, sappiamo che lei è minimale, altrimenti possiamo procedere a contrarre la (-1)-curva e iterare fino a non averne più, ottenendo un modello minimale per S. Inoltre ogni volta che abbiamo una superficie S che domina S_1, per la caratterizzazione dei morfismi birazionali sappiamo che $\mathrm{rk}(Pic(S)) > \mathrm{rk}(Pic(S_1))$, quindi ogni superficie domina una superficie minimale. Un ultima osservazione da fare è che il modello minimale non è unico, ad esempio $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}^2$ sono birazionali ma sono entrambe superfici minimali non contenendo (-1)-curve.

Capitolo 3

Superfici rigate e razionali

In questo capitolo andremo a sfruttare quanto studiato fino ad adesso per la ricerca di modelli minimali per delle speciali classi di superfici.

3.1 Superfici rigate

Definizione 3.1.1. Una superficie S si dice rigata se è birazionale a $C \times \mathbb{P}^1$, dove C è una curva liscia. Se $C \cong \mathbb{P}^1$, S è razionale.

Esempio 3.1.2. Sia C una curva liscia, E un fibrato di rango 2 su C. Consideriamo il fibrato proiettivo $\mathbb{P}_C(E)$. Grazie alla trivialità locale di $\mathbb{P}_C(E)$ abbiamo che localmente è isomorfo a $C \times \mathbb{P}^1$, quindi è una superficie rigata.

Esempio 3.1.3. Lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto è una superfice rigata poiché per il Teorema 2.1.3 lo si può scrivere come $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$.

Definizione 3.1.4. Sia C una curva liscia. Una superficie geometricamente rigata su C è il dato di una superficie S, assieme ad un morfismo $p : S \to C$ le cui fibre sono isomorfe a $\mathbb{P}^1$.

In particolare le superfici rigate sono anche geometricamente rigate, il viceversa è meno ovvio e segue dal seguente teorema.

Teorema 3.1.5. *(Noether-Enriques) Sia S una superficie, $p : S \to C$ un morfismo da S ad una curva liscia C. Supponiamo che esista un punto $x \in X$ tale che p è liscia sopra x e $p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}^1$. Allora esiste un aperto nella topologia di Zariski $U \subseteq C$ che contiene x*

e un isomorfismo $f : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{P}^1$ *tale che*

$$f \circ \pi = p,$$

dove π *denota la naturale proiezione verso* U. *In particolare* S *è rigata.*

Dimostrazione. Dividiamo la dimostrazioni in vari passi.

Passo 1: Mostriamo che $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Per dualità di Serre abbiamo che $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ se e solo se $H^0(X, K_X) = 0$. Supponiamo per assurdo che $H^2(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$. Sia F la fibra sopra il punto c che è una curva isomorfa a $\mathbb{P}^1$. poiché $F^2 = 0$, per la formula del genere abbiamo $0 = 1 + \frac{K_X.F}{2}$, quindi $F.K_X = -2$. poiché $H^0(X, K_X) \neq 0$, segue che K_X è un divisore effettivo. Scriviamo $K_X = nF + G$, dove $n \in \mathbb{N}$ e G un divisore effettivo che non contiene F. Allora $K_X.F = G.F \geq 0$ poiché G è effettivo. Siamo giunti ad una contraddizione, perciò $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Passo 2: Cerchiamo un divisore H tale che $H.F = 1$. poiché $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, allora la prima classe di Chern $c_1 : Pic(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ è suriettiva. Per fare ciò è sufficiente trovare una classe $h \in H^2(X, \mathbb{Z})$ tale che $h.f = 1$, dove f denota l'immagine di F mediante la prima classe di Chern. Sia $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})/\text{tors}$, consideriamo $I_f = \{\alpha.f \in \mathbb{Z} | \ \alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})/\text{tors}\}$. I_f è un ideale di $\mathbb{Z}$, ed è quindi della forma $I_f = (d)$. Consideriamo $\delta \in (H^2(X, \mathbb{Z})/tors)^\vee$ il funzionale definito da $\delta(\alpha) = \frac{\alpha.f}{d}$. Per dualità di Poicarè, il prodotto cup $H^2(X, \mathbb{Z}) \otimes H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ è una dualità, in particolare la mappa associata a $H^2(X, \mathbb{Z}) \to Hom(H^2(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ è suriettiva, con nucleo il sottogruppo di torsione. Quindi esiste un $f' \in H^2(X, \mathbb{Z})/\text{tors}$ tale che $\alpha.f' = \delta(\alpha)$ per ogni $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$. In particolare $f = df'$. Se mostriamo che $d = 1$, allora $I_f = \mathbb{Z}$ e perciò esiste h tale che $h.f = 1$. Sia $k = c_1(\mathcal{O}_X(K_X))$. Per il passo 1 $fk = -2$, noi vogliamo $f'k = \frac{-2}{d}$, quindi d=1,2. sia α la classe di una curva liscia irriducibile, per la formula del genere abbiamo che $\alpha^2 + \alpha k$ è pari. Per bilinearità ciò è vero in tutto $H^2(X, \mathbb{Z})/tors$. notiamo ora che $f'k + (f')^2 = f'k$, il quale, per quanto osservato, deve essere pari, perciò $\frac{-2}{d}$ deve essere pari, concludiamo dunque che $d = 1$.

Passo 3: Sia H un divisore tale che $H.F = 1$ e consideriamo la sequenza esatta

$$0 \to \mathcal{O}_X(H + (r-1)F) \to \mathcal{O}_X(H + rF) \to \mathcal{O}_F(H + rF) \to 0.$$

Osserviamo che $deg(\mathcal{O}_F(H + rF)) = (H + rF).F = H.F = 1$, quindi $\mathcal{O}_F(H + rF) = \mathcal{O}(1)$. Passando la successione corta in coomologia e utilizzando che $H^2(F, \mathcal{O}(1)) = 0$ otteniamo che la mappa

$$b_r : H^1(X, \mathcal{O}_X(H + (r-1)F)) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(H + rF))$$

è suriettiva per ogni $r \in \mathbb{N}$. Consideriamo inoltre

$$a_r : H^0(X, \mathcal{O}_X(H + rF)) \to H^0(F, \mathcal{O}_F(1)).$$

La sequenza $h^1(X, \mathcal{O}_X(H + rF))$ diventa stazionaria per r abbastanza grande, da cui segue che b_r è un isomorfismo per un certo r e a_r è suriettiva. Consideriamo un sottospazio V di dimensione 2 di $H^0(X, \mathcal{O}_X(H+rF))$ il quale è mappato isomorficamente tramite a_r in $H^0(F, \mathcal{O}(1))$ e consideriamo $P = \mathbb{P}(V)$. poiché $\mathcal{O}(1)$ è molto ampio e $V \cong H^0(F, \mathcal{O}(1))$ tramite a_r, otteniamo che P separa i punti di F. Denotiamo con Z il luogo dei possibili punti fissati di P, questo è dato dai punti che stanno in delle fibre diverse da F, o da curve in fibre disgiunte da F. Consideriamo l'aperto $U := C \smallsetminus p(Z)$ e $P' := P_{|p^{-1}(U)}$. Ogni curva C_t in P' incontra F in un solo punto, quindi se è riducibile, deve contenere alcune fibre. Se siamo in questo caso, consideriamo C_s con $s \neq t$ deve intersecare C_t nel punto di intersezione di queste fibre, e questo sarebbe un punto base. poiché P' consiste esattamente delle sezioni di $p_{|p^{-1}(U)}$, definisce una mappa $g : p^{-1}(U) \to \mathbb{P}^1$ che manda un punto $x \in p^{-1}(U)$ nel punto di intersezione di C_t con F, ove C_t è l'unico elemento di P' che passa lungo x. Notiamo che le fibre di g incontrano le fibre di p esattamente in un punto, quindi il morfismo

$$(p, g) : p^{-1}(U) \to U \times \mathbb{P}^1$$

è un isomorfismo che preserva le fibre. □

Proposizione 3.1.6. *Sia $p : X \to C$ una superficie geometricamente rigata. Allora esiste un fibrato di rango 2, E su C e un isomorfismo $f : X \to \mathbb{P}(E)$ tale che $\pi \circ f = p$, dove $\pi : \mathbb{P}(E) \to C$ è la proiezione canonica. Inoltre due superfici geometricamente rigate $\mathbb{P}(E)$ e $\mathbb{P}(E')$ sopra C sono isomorfe se e solo se esiste un fibrato in rette su C, che denotiamo L, tale che $E \cong E' \otimes L$*

Dimostrazione. Consideriamo il fascio $GL(2, \mathcal{O}_C)$ definito nel modo seguente: per ogni aperto $U \subseteq C$, sia

$$GL(2, \mathcal{O}_C)(U) := GL(2, \mathcal{O}_C(U)).$$

Il quoziente di $GL(2, \mathcal{O}_C)$ mediante l'azione di $\mathbb{C}^*$ definisce un altro fascio, denotato $PGL(2, \mathcal{O}_C)$. Si può osservare che le classi di isomorfismo dei fibrati vettoriali di rango 2 su C sono classificati da $H^1(C, GL(2, \mathcal{O}_C))$, e quindi che le classi di isomorfismo di $\mathbb{P}^1$-fibrati su C sono classificati da $H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C))$. Dalla sequenza esatta

$$0 \to \mathbb{C}^* \to GL(2, \mathbb{C}) \to PGL(2, \mathbb{C}) \to 0$$

otteniamo una sequenza esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{O}_C^* \to GL(2, \mathcal{O}_C) \to PGL(2, \mathcal{O}_C) \to 0.$$

Guardando questa successione in coomologia otteniamo

$$Pic(C) \xrightarrow{a} H^1(C, GL(2, \mathcal{O}_C)) \xrightarrow{p} H^1(C, PGL(2, \mathcal{O}_C)) \to H^2(C, \mathcal{O}_C^*).$$

Notiamo prima di tutto che, essendo la successione esatta, $p(e) = p(e')$ se e solo se $e = e'a(L)$, da cui segue la seconda parte del teorema. Per la prima parte basta, a questo punto, mostrare che $H^2(C, \mathcal{O}_C) = 0$, ma ciò segue direttamente dalla sequenza esponenziale di C. □

Teorema 3.1.7. *Sia C una curva non razionale liscia. I modelli minimali di $C \times \mathbb{P}^1$ sono le superfici geometricamente rigate sopra C, ossia i fibrati proiettivi $\mathbb{P}_C(E)$.*

Dimostrazione. Mostriamo che una superficie geometricamente rigata $p : S \to C$ non contiene divisori eccezionali. Supponiamo contenga un tale E. Questo divisore non può essere una fibra poiché $E^2 = -1 \neq 0$, quindi $p(E) = C$ ma ciò implica che C è razionale, il che è un assurdo. Sia ora S una superficie minimale, φ una mappa birazionale da S verso $C \times \mathbb{P}^1$, q la proiezione da $C \times \mathbb{P}^1$ verso C. Consideriamo la mappa razionale $q \circ \varphi : S \dashrightarrow C$; per il teorema di eliminazione delle singolarità, esiste una superficie S_1 ed una sequenza di scoppiamenti ε_i che partono da S, ed un morfismo $f : S_1 \to C$ tale che $f = q \circ \varphi \circ \varepsilon_1 \circ \varepsilon_n$. Assumiamo che n sia il numero minimo di scoppiamenti necessari a risolvere la mappa. Supponiamo che $n > 0$, sia E il divisore eccezionale dell'ultimo scoppiamento. poiché C non è razionale, abbiamo che $f(E)$ è necessariamente contratto a un punto. Quindi f fattorizza a $f' \circ \varepsilon_n$, contraddicendo la minimalità di n. Segue quindi che $n = 0$ e che $q \circ \varphi$ è un morfismo con fibra generica isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Il teorema è concluso utilizzando la proposizione che ora enunciamo e dimostriamo. □

Proposizione 3.1.8. *Sia S una superficie minimale, C una curva liscia, $p : S \to C$ un morfismo con fibra generica isomorfa a $\mathbb{P}^1$, allora S è geometricamente rigata tramite p.*

Dimostrazione. Sia F una fibra di p. Nel Teorema 3.1.5 abbiamo visto che $F^2 = 0$, $K.F = -2$. Assumiamo per prima cosa che F sia irriducibile. Per la formula del genere abbiamo che $g(F) = 1 + \frac{-2}{2} = 0$, e quindi F è isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Se mostriamo che F non può essere riducibile abbiamo dunque finito. Supponiamo che $F = \sum n_i C_i$ sia una fibra riducibile di p, allora $n_i C_i^2 = C_i.(F - \sum_{j \neq i} n_j C_j)$. poiché possiamo sostituire F con un altra fibra abbiamo che $C_i.F = 0$, $C_i.C_j \geq 0$ e, per almeno un valore di j è strettamente positivo, essendo F connesso. dunque $C_i^2 < 0$ per ogni i. Utilizziamo quanto mostrato per concludere la dimostrazione. Supponiamo che F sia una fibra riducibile, per la formula del genere insieme all'osservazione appena fatta abbiamo che $K.C_i \geq -1$, con l'uguaglianza valida solo nel caso in cui $C_i^2 = -1$ essendo $g(C_i) = 0$. Ciò implica che C_i è un divisore eccezionale, ma ciò è impossibile sotto le nostre ipotesi. Quindi $K.C_i \geq 0$ per ogni i e $K.F \geq 0$, il che è assurdo.

□

Concludiamo il capitolo con uno studio delle superfici rigate sopra $\mathbb{P}^1$.

Teorema 3.1.9. *Ogni fibrato di rango n su $\mathbb{P}^1$ si può decomporre come somma diretta di n fibrati lineari su $\mathbb{P}^1$. In particolare le uniche superfici rigate su $\mathbb{P}^1$ sono*

$$\mathbb{F}_n = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n)) \quad con\ n \geq 0$$

La dimostrazione è un celebre lavoro di Grothendieck che si trova in [Gro57].

3.2 Superfici razionali

Iniziamo questa sezione studiando il gruppo di Picard delle superfici geometricamente rigate sopra $\mathbb{P}^1$ introdotte alla fine della scorsa sezione. La dimostrazione la si può trovare in [Bea96, Proposition IV.1]. Indicheremo con $\mathbb{F}_n$ la superficie $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-n))$ con $n \geq 0$. Inoltre indichiamo con $h = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1)$ e con f la classe di una fibra.

Proposizione 3.2.1.

1. *$Pic(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, con $f^2 = 0$, $f.h = 1$, $h^2 = n$;*
2. *Se $n>0$, allora esiste una unica curva irriducibile $B \in Pic(\mathbb{F}_n)$ con autointersezione negativa. La sua classe nel gruppo di Picard è $B = h - nf$ e soddisfa $B^2 = -n$.*

Iniziamo ora la classificazione delle superfici razionali, per fare ciò sarà di fondamentale importanza il seguente teorema che ci da una caratterizzazione di queste. Indichiamo con $P_n = h^0(\mathcal{O}_s(nK))$ per $n \geq 1$ e con $q = h^1(\mathcal{O}_s)$.

Teorema 3.2.2. *(Criterio di razionalità di Castelnuovo). Sia S una superficie con $q = P_2 = 0$. Allora S è razionale.*

La dimostrazione verrà affrontata successivamente. Iniziamo in prima istanza a vedere qualche importante appplicazione di questo teorema.

Definizione 3.2.3. Sia V una varietà di dimensione n:

1. V si dice unirazionale se esiste una mappa razionale dominante da $\mathbb{P}^n$ verso S;

2. V si dice razionale se è birazionale a $\mathbb{P}^n$.

Teorema 3.2.4. *Ogni curva unirazionale è razionale.*

Dimostrazione. Se C è unirazionale esiste un morfismo suriettivo $f : \mathbb{P}^1 \to C$. Se il genere di C fosse diverso da zero avrei una forma olomorfa non nulla su C, la quale si tira indietro a una forma non nulla olomorfa su $\mathbb{P}^1$. Ciò è assurdo poiché non esistono forme olomorfe non nulle su $\mathbb{P}^1$. □

Utilizziamo ora il teorema di Castelnuovo per risolvere il problema di Lüroth in dimensione 2.

Teorema 3.2.5. *Ogni superficie unirazionale è razionale*

Dimostrazione. Sia S unirazionale. Per il teorema di eliminazione delle indeterminazioni esiste un morfismo suriettivo da $R \to S$ con R una superficie razionale. poiché $P_2 = 0$ su R, con lo stesso ragionamento di prima otteniamo che $P_2(S) = 0$, da cui applicando Castelnuovo otteniamo la tesi. □

In dimensione più alta il problema di Lüroth è falso. Dei controesempi si trovano in [CG72] e in [AM72].

Enunciamo una proposizione da cui dedurremo il teorema di Castelnuovo:

Proposizione 3.2.6. *Sia S una superficie minimale con $q = P_2 = 0$. Allora esiste una curva razionale liscia C su S tale che $C^2 \geq 0$.*

Vediamo come utilizzare questo per dimostrare il teorema di Castelnuovo. Consideriamo la sequenza esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C) \to O_C(C) \to 0.$$

Osserviamo che $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, mettendo insieme le due cose deduciamo che $h^0(S, C) = 2 + C^2 \geq 2$. Sia D un divisore in $|C|$, se Consideriamo il pencil generato da C e D, non ha componenti di dimensione 1 fissate. Scoppiando il punto base questa mi determina un morfismo dallo scoppiamento verso $\mathbb{P}^1$ con una fibra isomorfa a C. Per il teorema di Noether-Enriques segue che S è razionale.

Per provare la proposizione abbiamo bisogno di:

Proposizione 3.2.7. *Sia S una superficie minimale con $K^2 < 0$. Per ogni $a > 0$ esiste un divisore effettivo D su S tale che $K.S \leq -a$, $|K + D| = \varnothing$.*

Dimostrazione. È sufficiente trovare un divisore effettivo E tale che $K.E < 0$. Una volta trovato avremo che esisterà una componente C di E tale che $K.C < 0$. Per la formula del genere avremo che $C^2 \geq -1$ e $C^2 = -1$ solo se C è un divisore eccezionale, il che è escluso dall'ipotesi di minimalità della nostra superficie. Possiamo dunque supporre che $C^2 \geq 0$. Consideriamo il prodotto $(aC + nK).C$, per n abbastanza grande può diventare negativo. Si può allora mostrare [Bea96, p. III.5] che $|aC + nK| = \varnothing$ per n abbastanza grande. Deve dunque esistere un n tale che $|aC + nK| \neq \varnothing$ mentre $|aC + (n+1)K| = \varnothing$. Consideriamo $D \in |aC + nK|$, abbiamo che $K.D \leq -a$ e $|K + D| = \varnothing$. Sia H una sezione iperpiana di S. Se $K.H < 0$, possiamo prendere $E = H$, se $K.H = 0$, il sistema $|K + nH|$ è vuoto per n abbastanza grande e possiamo prendere $E \in |K + nH|$. Assumiamo dunque che $K.H > 0$. Consideriamo $r_0 = \frac{K.H}{-K^2}$, allora

$$(H + r_0 K)^2 = H^2 + \frac{(K + H)^2}{-K^2} > 0, \ (H + r_0 K).K = 0;$$

dunque prendendo $r \in \mathbb{Q}$ abbastanza vicino ad r_0 otteniamo che

$$(H + rK)^2 > 0, \ (H + rK).K < 0, \ (H + rK).H > 0.$$

Se $r = \frac{p}{q}$ con $p, q > 0$, consideriamo $D_m = mq(H + rK)$, allora D_m è un divisore che soddisfra $D_m^2 > 0$, e $D_m.K < 0$. Per Riemann-Roch abbiamo quindi che $h^0(D_m) + h^0(K - D_m) \to \infty$ per $m \to \infty$. poiché $(K - D_m).H$ è negativo per m abbastanza grande, otteniamo che $|D_m| \neq \varnothing$ per m abbastanza grande; scegliamo quindi $E \in |D_m|$. □

Dimostriamo ora la proposizione 3.2.6

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa che è sufficiente provare che esiste un divisore effettivo D su S tale per cui $K.D < 0$, $|K + D| = \varnothing$. Così facendo avremo che una certa componente C di D soddisfa $K.C < 0$ e $|K + C| = \varnothing$. Applicando Riemann-Roch a $K + C$ e, successivamente, la formula del genere otteniamo che

$$0 = h^0(K + C) \geq 1 + \frac{C^2 + C.K}{2} = g(C),$$

dunque C è una curva razionale liscia. Inoltre dalla formula del genere segue che $C^2 \geq -1$, ma essendo l'uguaglianza verificata solo nel caso in cui C sia un divisore eccezionale, otteniamo che $C^2 \geq 0$ e la proposizione è dimostrata. Dividiamo la dimostrazione in vari casi:

1. Supponiamo che $K^2 < 0$, allora la dimostrazione è proprio il contenuto della proposizione 3.2.7;

2. Supponiamo che $K^2 = 0$. poiché $P_2 = 0$, abbiamo che $h^0(-K) \geq 1 + K^2$ per Riemann-Roch. Allora se $K^2 \geq 0$ otteniamo $|-K| \neq \varnothing$. Sia H una sezione iperpiana di S. Allora esiste $n \geq 0$ tale che $|H + nK| \neq \varnothing$, $|H + (n+1)K| = \varnothing$. Sia $D \in |H + nK|$, abbiamo che $|K + D| = \varnothing$ e $K.D = K.H < 0$ poiché $|-K| \neq \varnothing$ e dunque concludiamo.

3. Supponiamo che $K^2 > 0$. In questo caso abbiamo $h^0(-K) \geq 2$. Supponiamo esista un divisore riducibile $D \in |-K|$, $D = A + B$. poiché $D.K < 0$, possiamo, senza perdere di generalità, supporre che $A.K < 0$ e $|A + K| = |-B| = \varnothing$ e la proposizione è dimostrata. Supponiamo quindi che ogni divisore $D \in |-K|$ sia irriducibile. Sia H un divisore effettivo; poiché $|-K| \neq \varnothing$, allora esiste $n > 0$ tale che $|H + nK| \neq \varnothing$, $|H + (n+1)K| = \varnothing$. Dobbiamo distinguere due sottocasi:

   (a) Supponiamo che sia possibile trovare H ed n come sopra tale che $H + nK \neq 0$. Sia $E \in |H + nK|$, $E = \sum n_i C_i$. Abbiamo che $K.E = -D.E$ con $D \in |-K|$, per [Bea96, p. III.5], $D.E \geq 0$ poiché D è irriducibile. Dunque $K.C_i \leq 0$ per certi i. Mettiamo $C = C_i$, allora $|K + C| = \varnothing$ quando $g(C) = 0$ e $C^2 = -2 - K.C$ per la formula del genere. Se $K.C \leq -2$ otteniamo che $C^2 \geq 0$ e la proposizione è dimostrata. Se $K.C = -1$ otteniamo che $C^2 = -1$ e quindi C è un divisore eccezionale, il che è escluso. Se $K.C = 0$, allora $C^2 = -2$. Calcoliamo $h^0(-K - C)$. poiché $h^0(2K + C) \leq h^0(K + C) = 0$ per Riemann-Roch otteniamo che $h^0(-K-C) \geq 1 + \frac{(K+C)^2 + K.(K+C)}{2} = 1 + \frac{C^2 + 3K.C + 2K^2}{2}$, dunque $h^0(-K - C) \geq K^2 \geq 1$. poiché $C^2 = -2$ abbiamo che $C \neq -K$, allora esiste un divisore effettivo non nullo A tale che $A + C \in |-K|$. Per ipotesi $|-K|$ non conteneva divisori riducibili, siamo quindi giunti a un assurdo.

   (b) Consideriamo il caso in cui ogni divisore effettivo sia un multiplo di K, quindi $Pic(S) \cong \mathbb{Z}[K]$. Tramite la prima classe di Chern deduciamo che $H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[K]$, quindi il secondo numero di Betti è $b_2 = 1$. Per Dualità di Poincaré il prodotto cup è unimodulare, dunque $K^2 = 1$, ma per la formula di Noether

   $$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{K^2 + 2 - 2b_1 + b_2}{12},$$

   il che ci dà $b_1 = 4$. Assurdo.

□

Descriviamo ora i modelli minimali di superfici razionali.

Teorema 3.2.8. *Sia S una superficie razionale minimale, allora S è isomorfa a $\mathbb{P}^2$ o a $\mathbb{F}_n$ per $n \neq 1$.*

Dimostrazione. Sia S una superficie razionale minimale e consideriamo H una sezione iperpiana di S. Denotiamo con A l'insieme di tutte le curve liscie razionali su S con $C^2 \geq 0$. Per 3.2.6 l'insieme A è non vuoto. Sia $m = \min\{C^2 | \, C \in A\}$. Dal sottoinsieme $A_m \subseteq A$ fatto dalle curve con $C^2 = m$ scegliamo una curva C con $C.H$ minimale in A_m.

1. Mostriamo che ogni divisore $D \in |C|$ è una curva razionale liscia. Sia $D = \sum n_i C_i$. Per [Bea96, Remark III.5] $h^0(K+D) = h^0(K+C) = 0$ finchè $(K.C).C = -2$. Allora $h^0(K+C_i) = 0$ per ogni i, il che mostra che ogni curva C_i è una curva liscia razionale. poiché $K.C < 0$, esiste i tale che $K.C_i < 0$, quindi per la formula del genere $C_i^2 \geq 0$ poiché S è minimale. Sia $D = \sum_{j \neq i} n_j C_j$, così che $D = n_i C_i + D'$ e $D'.C_i \geq 0$. Abbiamo quindi

$$C^2 = D^2 = n_i^2 C_i^2 + n_i(C_i.D') + D.D'.$$

   Ora $D.D' = C.D' \geq 0$, quindi $m = C^2 \geq n_i^2 C_i^2 \geq 0$. Per minimalità di m, $C_i^2 = m$. $H.C = n_i H.C_i + H.D'$ da cui otteniamo $n_i = 1$, $H.D' = 0$ (per minimalità di $H.C$ in A_m), quindi $D' = 0$ e $D = C_i$.

2. Mostriamo $\dim|C| \leq 2$. Sia p un punto in S, sia $\mathcal{O}_p$ il suo anello locale con m_p ideale massimale. poiché $dim(\mathcal{O}_p/m_p^2) = 3$ il sistema lineare delle curve di $|C|$ passanti pepr p con molteplicità maggiore o uguale di 2 ha codimensione ≤ 3 in $|C|$, quindi è non vuoto se $dim|C| \geq 3$, contraddicendo il punto precedente.

3. Sia $C_0 \in |C|$. Consideriamo la sequenza esatta:

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C) \to \mathcal{O}_{C_0}(m) \to 0.$$

   poiché $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ ne deduciamo che $h^0(C) = m+2$ e che $|C|$ è senza punti base in C_0 da cui $|C|$ non ha alcun punto base. Per il punto precedente ci sono quindi due possibilità:

   (a) $m = 0$: allora $|C|$ determina un morfismo $S \to \mathbb{P}^1$ le cui fibre sono curve razionali liscie: S è quindi una superficie geometricamente rigata sopra $\mathbb{P}^1$, quindi una superficie $\mathbb{F}_n$ con $n \neq 1$.

(b) $m = 1$: $|C|$ determina un morfismo $f : S \to \mathbb{P}^2$; per ogni punto $p \in \mathbb{P}^2$ la fibra è l'intersezione di due curve razionali distinte in $|C|$, è quindi ridotta a un punto e f è un isomorfismo.

□

Si osservi che per $n = 1$ abbiamo lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto il quale non è minimale.

3.3 Dimensione di Kodaira

Introduciamo un importante invariante birazionale il quale ci permetterà di vedere lo studio delle superfici presentate nel corso del capitolo come l'inizio di una classificazione più ampia:

Definizione 3.3.1. Sia V una varietà proiettiva liscia, K il divisore canonico su V, scriviamo φ_{nK} per la mappa razionale associata al sistema lineare $|nK|$. Definiamo la dimensione di Kodaira di V come la massima dimensione dell'immagine[1] φ_{nK} per $k \geq 1$. Denotiamo questa con $k(V)$. Se $\varphi_{nK}(V) = \varnothing$ diciamo che $k(V) = -\infty$.

Segue dalla definizione che se X è una varietà proiettiva liscia di dimensione n, allora $k(X) \in \{-\infty, 0, 1, ..., n\}$

Esempio 3.3.2. poiché $K_{\mathbb{P}^2} = -3H_0$ si ha che $|nK_{\mathbb{P}^2}| = \varnothing$ per ogni $n \geq 1$, da cui $k(\mathbb{P}^2) = -\infty$.

Vogliamo mostrare che le superfici con dimensione di Kodaira $-\infty$ sono le superfici rigate e razionali. Per fare ciò dimostriamo prima il seguente teorema:

Teorema 3.3.3. *Sia S una superficie rigata birazionale a $C \times \mathbb{P}^1$, allora $P_m(X) = 0$ per ogni $m > 0$.*

Dimostrazione. Essendo P_m un invariante birazionale [Bea96, Proposition III.20] possiamo supporre $S = C \times \mathbb{P}^1$. Osserviamo prima di tutto che $K_{C\times\mathbb{P}^1} \cong p^*K_C + q^*K_{\mathbb{P}^1}$, dove p, q denotano le proiezioni canoniche. Stiamo inoltre identificando il gruppo di Picard con il gruppo di classe, da ciò la notazione additiva e non la notazione tensoriale. Dunque $h^0(S, K_S) = h^0(C, K_C)h^0(\mathbb{P}^1, K_{\mathbb{P}^1}) = 0$ per [Bea96, Proposition III.22] □

[1] Qua stiamo facendo un piccolo abuso di notazione identificando l'immagine di V tramite una mappa razionale, che a propri non è ben posta, con la chiusura dell'immagine di V-$\{\mathrm{ind}(\varphi)\}$

La richiesta di avere $k(S) = -\infty$ per una superficie è dunque equivalente all'annullarsi di tutti i valori di $P_m(S)$. Abbiamo quindi dimostrato:

Teorema 3.3.4. *Sia S una superficie rigata, allora $k(S) = -\infty$.*

Si può dimostrare anche il viceversa del precedente teorema e si trova in [Per09, Theorem 4.2.11].

Capitolo 4

Superfici di Del Pezzo

In questo ultimo capitolo ci proponiamo di studiare una classe molto importante di superfici, ovvero quelle di Del Pezzo. Queste sono l'analogo 2-dimensionali delle varietà di Fano, uno degli oggetti più studiati in geometria birazionale. Inizieremo dando una completa classificazione delle superfici di Del Pezzo, successivamente ci proporremo di studiare per alcune di esse alcuni modelli birazionali e le loro mappe anticanoniche. La nostra principale referenza per questa parte è il terzo capitolo di [Fat24].

4.1 Superfici di Del Pezzo

Definizione 4.1.1. (Varietà di Fano) Sia X una varietà proiettiva liscia, questa si dice varietà di Fano se il suo divisore anticanonico $-K_X$ è ampio. Le varietà di Fano di dimensione 2 vengono chiamate superfici di Del Pezzo.

Iniziamo subito ad osservare alcune proprietà di queste superfici.

Proposizione 4.1.2. *Sia S una superficie di Del Pezzo, allora S è razionale.*

Dimostrazione. Calcoliamo $h^0(2K_S) = h^2(K_S - 2K_S) = 0$. La prima uguaglianza è data dalla dualità di Serre, mentre la seconda è il teorema di annullamento di Kodaira poiché, per definizione, $-2K_S$ è ampio. Inoltre, sempre per annullamento di Kodaira $h^1(\mathcal{O}_S) = h^1(K_S - K_S) = 0$. Applicando il criterio di Castelnuovo concludiamo. $\square$

Applichiamo quanto spiegato nei capitoli precedenti e cerchiamo un modello minimale per queste superfici. Ricordiamo che i modelli minimali per le superfici razionali sono:

1. $\mathbb{P}^2$;

2. $\mathbb{F}_n$ con $n \geq 2$ o $n = 0$.

Vediamo subito che $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{F}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sono superfici di Del Pezzo utilizzando, come già visto, che i loro divisori anticanonici sono rispettivamente $-K_{\mathbb{P}^2} = 3H$ e $-K_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1} = 2H_1 + 2H_2$, dove H_1 e H_2 denotano le classi delle due rette proiettive tirate indietro, mentre H è la classe di un qualsiasi iperpiano in $\mathbb{P}^2$.

Proposizione 4.1.3. $\mathbb{P}^2$ *e* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *sono superfici di Del Pezzo*

Dimostrazione. Consideriamo per primo $\mathbb{P}^2$. Sappiamo che la sua matrice di intersezione, rispetto alla base di $Pic(\mathbb{P}^2)$ data da H, è la matrice identità. Verifichiamo che $-3H$ sia ampio con il Teorema 1.4.8. Calcoliamo per prima cosa $3H.3H = 9$. Sia ora C una curva, $Pic(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}H$, se $d \geq 0$ è il grado della curva, $C \sim dH$ nel gruppo di Picard. Siamo ora in grado di calcolare $C.3H = dH.3H = 3d \geq 0$. In modo del tutto analogo si prova che $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è di Del Pezzo. □

Vogliamo ora capire chi possono essere i modelli minimali per una superficie di Del Pezzo. Per farlo dimostriamo prima la seguente proposizione.

Proposizione 4.1.4. *Sia S una superficie di Del Pezzo, $f : S \to X$ un morfismo birazionale tra superfici proiettive liscie, allora per ogni curva irriducibile C su X, $K_X.C > 0$.*

Dimostrazione. Per il Teorema 2.1.15 sappiamo che S deve essere lo scoppiamento di X in r punti. Per la formula del divisore canonico di uno scoppiamento $-K_S = -K_X - E_1 - ... - E_r$[1]. Sia C una curva su X, $C.(-K_S) > 0$ per ampiezza di $-K_S$, ma $C.(-K_S) = C.(-K_X - E_1 - ... - E_r) = C.(-K_X)$. □

Supponiamo ora che un modello minimale per una superficie Del Pezzo S sia dato da una certa $\mathbb{F}_n$ con $n \geq 2$, allora esiste un morfismo birazionale $S \to \mathbb{F}_n$. Per la proposizione precedente $-K_{\mathbb{F}_n}.C > 0$ per ogni curva irriducibile C su $\mathbb{F}_n$. Come mostrato in [Bea96, Proposition III.18] si ha che che $K_{\mathbb{F}_n} = -2h + (n-2)H$ (nelle base introdotta nel teorema dei capitoli precedenti). Utilizzando 3.2.1 riusciamo a calcolare

$$(-K_{\mathbb{F}_n})^2 = (-2h + (n-2)H)^2 = 4n - 4(n-2) = 8.$$

Il divisore anticanonico dovrebbe essere quindi ampio per 1.4.8. Mostriamo che ciò è falso per $n \geq 2$. Consideriamo la curva $h - nH$ e calcoliamo la sua intersezione con il

[1]omettiamo il simbolo di pull-back del divisore per non appesantire ulteriormente la notazione.

divisore anticanonico, $(2h-(n-2)H)(h-nH) = 2h^2 - 2nhH - (n-2)Hh = -(n-2) \leq 0$. Siamo dunque arrivati ad un assurdo, perciò S non può dominare $\mathbb{F}_n$ per $n \geq 2$.

Dunque se S è una superficie Del Pezzo, i suoi modelli minimali possono essere solo $\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ (che sono di Del Pezzo).

Mostriamo ora quali sono gli scoppiamenti di $\mathbb{P}^2$ che sono superfici di Del Pezzo.

Proposizione 4.1.5. *Sia Z lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in al più 8 punti in posizione generale (la nozione di posizione generale verrà chiarita in seguito). Allora Z è di Del Pezzo.*

Dimostrazione. Sia Z lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in r punti in posizione generale. sappiamo che $K_Z = 3H + E_1 + ... + E_r$, dunque imponendo $(-K_Z)^2 = 9 - r > 0$ otteniamo che è possibile scoppiare $\mathbb{P}^2$ in al più 8 punti . □

Come ultima cosa proviamo la seguente proposizione:

Proposizione 4.1.6. *Lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in due punti e lo scoppiamento di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in un punto sono isomorfi.*

Dimostrazione. A meno di isomorfismo identifichiamo $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ come una quadrica liscia in $\mathbb{P}^3$, ad esempio $Q = V(z_0z_3 - z_1z_2)$. Consideriamo $\pi : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ la proiezione dal punto $p = [0 : 0 : 0 : 1] \in Q$ nel piano $\{z_3 = 0\}$. Consideriamo $\Gamma \subseteq Q \times \mathbb{P}^2$ il grafico di π. poiché i polinomi omogenei z_0, z_1, z_2 generano l'ideale del punto p segue che $\pi_1 : \Gamma \to Q$ è un isomorfismo sopra ogni punto di Q diverso da p e la mappa definita è proprio lo scoppiamento di Γ in p. Dall'altro lato, la mappa $\Gamma \to \mathbb{P}^2$ è un isomorfismo eccetto che sopra i punti $q = [0 : 0 : 1]$ e $r = [0 : 1 : 0]$ che corrispondono alle due linee in Q che passano per p. La fibra sopra questi due punti è quindi una linea, abbiamo quindi che Γ è anche isomorfo allo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in p e q. □

Abbiamo dunque provato il seguente teorema:

Teorema 4.1.7. *Sia S una superficie di Del Pezzo liscia, allora S è isomorfa a una delle seguenti superfici:*

1. $\mathbb{P}^2$;
2. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
3. $\mathrm{Bl}_{p_r}\mathbb{P}^2$, *dove p_r indicano r punti in posizione generale e $1 \leq r \leq 8$.*

Osserviamo che la richiesta che i punti siano in posizione generale è fondamentale, per mostrare ciò dimostriamo prima una proprietà delle superfici di Del Pezzo.

Proposizione 4.1.8. *Sia S una superficie di Del Pezzo liscia, C una curva razionale su S. Allora $C^2 \geq -1$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $C^2 \leq -2$. Dalla formula di aggiunzione si ottiene che $2g(C) - 2 = C(K_S + C)$, quindi $-2 \leq C.K_S - 2$, ma essendo il divisore anticanonico ampio, segue $C.K_S \leq 0$. Siamo dunque ad una contraddizione. □

Utilizziamo questo lemma per mostrare che da configurazioni speciali di punti non si ottengono superfici di Del Pezzo.

Proposizione 4.1.9. *Sia 3_p un insieme di tre punti distinti che appartengono a una retta L. Allora Bl_{3_p} non è una superficie di Del Pezzo.*

Dimostrazione. Sia π la mappa di scoppiamento, L' la trasformata stretta di L. Sappiamo che

$$\pi^* L = L' + E_1 + E_2 + E_3$$

e che $(\pi^* L)^2 = 1$, da cui $(L')^2 = -2$, quindi per la proposizione precedente la superficie non è di Del Pezzo. □

Altre configurazioni di punti speciali che non producono superfici di Del Pezzo comprendono 6 punti in una conica, 8 punti in una cubica singolare con un punto nella singolarità. Le dimostrazioni sono analoghe alla precedente. Analizziamo ora quali informazioni ci da Riemann-Roch per una superficie di Del Pezzo.

Proposizione 4.1.10. *Sia S una superficie di Del Pezzo, allora $h^0(-mK) = 1 + \frac{m(m+1)K^2}{2}$.*

Dimostrazione. Per dualità di Serre e annullamento di Kodaira si ha $\chi(\mathcal{O}_S) = h^0(\mathcal{O}_S) = 1$. Applicando Riemann-Roch per superfici:

$$\chi(-mK) = 1 + \frac{m(m+1)K^2}{2}.$$

Osservando però che $-mK = K - (m+1)K$ e riutilizzando il teorema di annullamento di Kodaira si ottiene $\chi(-mK) = h^0(-mK)$, quindi $h^0(-mK) = 1 + \frac{m(m+1)K^2}{2}$. □

Definizione 4.1.11. Sia S una superficie di Del Pezzo, definiamo il grado di S come K_S^2.

Se il divisore anticanonico è molto ampio, la nozione di grado qua sopra definita coincide con l'usuale nozione di grado nell'immersione anticanonica della superficie. Segue dalla definizione che il grado può variare tra 1 e 9. Facciamo ora un'ultima osservazione prima di andare a studiare una per una queste superfici. Ricordiamo che il gruppo $PGL(V_3)$ agisce in modo transitivo sugli insiemi di 4 punti o meno in $\mathbb{P}^2$ in posizione generale, infatti un punto su $\mathbb{P}^2$ è definito da 2 condizioni lineari, perciò 4 punti dipendono da 8 condizioni, che è proprio la dimensione di $PGL(V_3)$. Questo ragionamento euristico può essere reso formale arrivando a dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 4.1.12. *Se S_d e S'_d sono superfici di Del Pezzo di grado $d \geq 5$ diverse da $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, allora sono isomorfe.*

4.2 Modelli anticanonici per superfici di Del Pezzo

Vogliamo adesso trovare dei modelli di alcune superfici di Del Pezzo come $S = (G, \mathcal{F})$ dove G è uno spazio ambiente e $\mathcal{F}$ un fibrato globalmente generato su questo e con questa notazione intendiamo che S è il luogo di zeri di una sezione globale generica di $\mathcal{F}$. Questo linguaggio viene utile per studiare le superfici di Del Pezzo nella loro, intrinseca, immersione anticanonica.

4.2.1 Grado 9

La superficie di Del Pezzo di grado 9 è $\mathbb{P}^2$, il suo fibrato anticanonico è $-K_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}(3)$, inoltre $h^0(K) = 10$, e la mappa associata è semplicemente la terza Veronese di $\mathbb{P}^2$ verso $\mathbb{P}^9$.

4.2.2 Grado 8

In grado 8 abbiamo due superfici Del Pezzo non isomorfe, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e $\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$. Per la prima la mappa anticanonica non è altro che l'immersione di Segre associata a $\mathcal{O}(2,2)$. Abbiamo già visto nei capitoli precedenti che $\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$ può essere descritto sia come fibrato proiettivo su $\mathbb{P}^1$, sia come $\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2 = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1,1))$.

4.2.3 Grado 6

Consideriamo $f, g \in H^0(\mathbb{P}^2_x \times \mathbb{P}^2_y, \mathcal{O}(1,1))^2$. Sia $X = V(f,g) \subseteq \mathbb{P}^2_x \times \mathbb{P}^2_y$. Osserviamo che se raccogliamo le y_i, f e g possono essere riscritti come$f = y_0 f_0(x) + y_1 f_1(x) + y_2 f_2(x)$, $g =$

[2]Con $\mathbb{P}^n_x$ intendiamo che x è un insieme di coordinate omogenee

$y_0g_0(x) + y_1g_1(x) + y_2g_2(x)$. Considero

$$M(x) = \begin{pmatrix} f_0(x) & f_1(x) & f_2(x) \\ g_0(x) & g_2(x) & g_2(x) \end{pmatrix}.$$

Sia $Z = \{p \in \mathbb{P}^2_x |\ rk(M(p)) \leq 1\}$. Vogliamo studiare il luogo dei punti in cui la matrice perde di rango per mostrare che X non è altro che lo scoppiamento di questo luogo in $\mathbb{P}^2$. Osserviamo che la matrice non può essere nulla per alcun valore di $x \in \mathbb{P}^2_x$, altrimenti avrei un punto che è contemporanteamente soluzione di tutti gli $f_i(\underline{x})$ e di tutti gli $g_i(\underline{x})$. Sia π la proiezione canonica da X verso $\mathbb{P}^2_x$. Se $p \notin Z$, $\pi^{-1}(p)$ è definito dall'annullarsi di due equazioni lineari indipendenti in $\mathbb{P}^2$, per la precisione $\pi^{-1}(p) \cong V(y_0f_0(p) + y_1f_1(p) + y_2f_2(p), y_0g_0(p) + y_1g_1(p) + y_2g_2(p))$, dunque è un solo punto. Se invece $p \in Z$ le due equazioni lineari sono dipendenti, per cui $\pi^{-1}(p)$ è definito da una sola equazione in $\mathbb{P}^2$, dunque è isomorfa a $\mathbb{P}^1$ poiché possiamo esprimere una variabile in funzione delle restanti due. Abbiamo appena provato che $X = \mathrm{Bl}_Z\mathbb{P}^2$. Vogliamo capire chi è Z, ricordiamo che $rk(M) \leq 1$ se e solo se $rk(M^t) \leq 1$. Sia quindi $A \subseteq \mathbb{P}^2_x \times \mathbb{P}^1_z$ la soluzione del sistema $M^tz = 0$. Osserviamo che il grado di $\mathbb{P}^2_x \times \mathbb{P}^1_z$ è $\frac{3!}{2!1!} = 3$ [Har92, Example 18.15], allora $M^tz = 0$ è esattamente l'intersezione di tre iperpiani in $\mathbb{P}^2_x \times \mathbb{P}^1_z$ che, per definizione di grado, sono esattamente tre punti. Sia ora r la proiezione canonica da A verso $\mathbb{P}^2_x$. Se $p \notin Z$ si ha $\pi^{-1}(p)$ è definito dall'annullarsi di due equazioni lineari indipendenti in $\mathbb{P}^1$ poiché $rk(M^t) = 2$, ma nessuno punto di $\mathbb{P}^1$ può soddisfarle entrambe contemporaneamente (la soluzione di tre equazioni linearmente indipendenti omogenee in uno spazio vettoriale di dimensione 3 è il vettore 0), perciò $\pi^{-1}(p) = \varnothing$. Se $p \in Z$, se considero $\pi^{-1}(p)$ le due equazioni lineari di prima sono dipendenti, perciò la fibra è definita dall'annullarsi di un equazione lineare in $\mathbb{P}^1$, è quindi un punto. Abbiamo quindi mostrato che la restrizione di $r : A \to Z$ è un isomorfismo. Riassumendo si ha che una Del Pezzo di grado 6 la può essere descritta come $(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1,1)^{\oplus 2})$. Un altro modello per questa Del Pezzo è dato da $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1,1,1))$ [Fat24, p. 3.2.5]. Sappiamo da quanto detto nella sezione precedente che questi modelli sono isomorfi. È interessante notare come questo fenomeno sia tipico delle superfici di Del Pezzo di grado 6 e non delle varietà di cui queste sono sezioni iperpiane. Consideriamo $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e $X = (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1,1))$. Queste due varietà non sono isomorfe. Basta per esempio notare che il gruppo di Picard della prima è isomorfo a $\mathbb{Z}^3$, mentre per il teorema della sezione iperpiana di Lefschetz [Mil63, Corollary 7.3], $H^2(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \mathbb{Z}) \cong H^2(X, \mathbb{Z})$, quindi $Pic(X) \cong \mathbb{Z}^2$. Inoltre, per aggiunzione, $-K_X = \mathcal{O}_X(2,2)$, $-K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(2,2,2)$, quindi sono entrambe Fano di dimensione 3 non isomorfe, con sezioni iperpiane isomorfe.

4.2.4 Grado 4

In questa parte vogliamo introdurre una tecnica basata su Riemann-Roch. In effetti è possibile ricavare dal teorema informazioni sull'anello graduato $\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, -mK_X)$ che conseguentemente ci permettono di avere informazioni sulla mappa anticanonica. Per la proposizione 4.1.10 sappiamo che $h^0(-mK_X) = 1 + 2m(m+1)$. Per Riemann-Roch $h^0(X, -K_X) = 5$, dunque l'immersione anticanonica sarà verso $\mathbb{P}(H^0(X, -K_X)) \cong \mathbb{P}(V_5) \cong \mathbb{P}^4$. Andiamo a confrontare $h^0(X, -mK_X)$ con $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(m)) = \binom{4+n}{4}$. Per $m = 1$ coincidono. Per $m = 2$, $h^0(X, -2K_X) = 13$, ci aspettiamo quindi che lo spazio delle forme quadratiche su X abbia dimensione 13, ma se calcoliamo la dimensione dello spazio vettoriale delle forme quadratiche su $\mathbb{P}^4$, cioè $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$ questo ha dimensione 15 essendo $\dim(\mathbb{C}[X_0, ..., X_4]_2) = \dim(\mathrm{Sym}^2 V_5^\vee) = \binom{4+2}{2} = 15$. Abbiamo dunque due relazioni in grado due. Per $m = 3$, $h^0(X, -3K_X) = 25$, che coincide con $\binom{4+3}{3} - 10$ dove quest'ultima è la dimensione delle forme cubiche tenendo conto delle relazioni introdotte in grado 2. Per induzione possiamo verificare che, per $m \geq 3$ vale $1 + 2m(m+1) = \binom{4+m}{m} - 2\binom{2+m}{4}$, quindi non abbiamo più relazioni. Tutto ciò suggerisce di controllare ad una intersezione completa $X = (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2)^{\oplus 2})$. In [Fat24, Example 3.2.7] viene dimostrato come, in effetti, la generica Del Pezzo di grado 4 si ottenga in questo modo.

4.2.5 Grado 3

Consideriamo $X = (\mathbb{P}^2_x \times \mathbb{P}^3_y, \mathcal{O}(1,1)^{\oplus 3})$, dove abbiamo assegnato coordinate x_i a $\mathbb{P}^2$ e y_i a $\mathbb{P}^3$. A meno di semplici manipolazioni algebriche possiamo scrivere le equazioni di X come

$$X = V\left(\sum_{i=1}^{3} x_i f_i^1(y), \sum_{i=1}^{3} x_i f_i^2(y), \sum_{i=1}^{3} x_i f_i^3(y)\right)$$

oppure come

$$X = V\left(\sum_{i=1}^{4} y_i l_i^1(x), \sum_{i=1}^{4} y_i l_i^2(x), \sum_{i=1}^{4} y_i l_i^3(x)\right).$$

Associamo ad X due matrici, la prima

$$M(y) = \begin{pmatrix} f_1^1(y) & f_2^1(y) & f_3^1(y) \\ f_1^2(y) & f_2^2(y) & f_3^2(y) \\ f_1^3(y) & f_2^3(y) & f_3^3(y) \end{pmatrix}$$

la seconda

$$N(x) = \begin{pmatrix} l_1^1(x) & l_2^1(x) & l_3^1(x) & l_4^1(x) \\ l_1^2(x) & l_2^2(x) & l_3^2(x) & l_4^2(x) \\ l_1^3(x) & l_2^3(x) & l_3^3(x) & l_4^3(x) \end{pmatrix}.$$

Come nel caso precedente queste matrici ci saranno utili per studiare le fibre delle proiezioni. Consideriamo π la proiezione naturale da X verso $\mathbb{P}^3_y$. Definiamo $S = \{p \in \mathbb{P}^3 | \; det(M(p)) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$. Quindi $S = V(det(M(y))) = V(F_3(y))$, dove $F_3(y)$ indica un polinomio omogeneo di grado 3. Il luogo in cui questa matrice non è invertibile è una superficie cubica. Osserviamo che per [FP06] il luogo in cui si annullano i minori 2×2 di questa matrice dovrebbe essere un luogo di codimensione 4 in $\mathbb{P}^3$ ed è quindi vuoto. Fissiamo un punto $p \in \mathbb{P}^3$. Se $p \notin S$, allora $\pi^{-1}(p)$ è definito da tre equazioni lineari indipendenti in $\mathbb{P}^2$, perciò, come prima, è vuota. Se $p \in S$, allora $\pi^{-1}(p)$ è definito da due equazioni lineari indipendenti in $\mathbb{P}^2$, perciò è un punto. Considerando quindi la restrizione della proiezione $\pi : S \to S$, abbiamo mostrato che questo è un isomorfismo. Proiettiamo ora verso $\mathbb{P}^2_x$. Chiamiamo $Z = \{p \in \mathbb{P}^2 | \; rk(N(p)) \leq 2\}$. Se $p \notin Z$, allora $\pi^{-1}(p)$ è definito da tre equazioni lineari indipendenti in $\mathbb{P}^3$, quindi è esattamente un punto. Se $p \in Z$, allora $\pi^{-1}(p)$ è definito da due equazioni lineari indipendenti in $\mathbb{P}^3$, ed è quindi isomorfa a $\mathbb{P}^1$. Il luogo dove N perde rango per [FP06] è un luogo di codimensione 2 e grado 6 in $\mathbb{P}^2$, poiché è dato dall'annullarsi dei minori 3×3 della matrice, quindi 6 punti. Dunque X non è altro che lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in 6 punti. Un fatto molto interessante, la cui dimostrazione va però al di là degli scopi di questa tesi [Bea00], è che ogni superficie cubica ammette delle rappresentazioni determinantali, nello specifico ben 72 distinte, da cui segue che ogni superficie cubica è isomorfa allo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in 6 punti. Una dimostrazione del noto fatto che ogni superficie cubica ha 27 rette si può trovare in [Fat24, Example 3.2.8].

4.2.6 Grado 2

Queste superfici di Del Pezzo, insieme a quelle di grado 1, hanno una mappa anticanonica diversa dalle altre, infatti il divisore anticanonico non è molto ampio, ma è solamente ampio (ad esempio $-2K_X$ è molto ampio). Utilizzando Riemann-Roch vediamo che $h^0(X, -K_X) = 3$, dunque la mappa indotta dal divisore anticanonico va verso $\mathbb{P}(H^0(X, -K_X)) \cong \mathbb{P}(V_3) \cong \mathbb{P}^2$ il quale ha dimensione troppo 2, dunque la mappa associata non può essere un immersione. Procediamo a studiare $\bigoplus_{m \geq 0} H^0(X, -mK_X)$.

1. Per m=1 abbiamo che $h^0(X, -K_X) = \dim(V_3^\vee) = \dim(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1)$.

2. Per m=2 abbiamo $h^0(X, -2K_X) = 7$ mentre $\dim(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_2) = \dim(\mathrm{Sym}^2 V_3^\vee) = \binom{2+2}{2} = 6$, bisogna quindi introdurre una nuova variabile y di grado 2, dunque $H^0(X, -2K_X) \cong \mathrm{Sym}^2 V_3^\vee \oplus < y >$.

3. Per m=3 si ha $h^0(X, -3K_X) = 13 = \dim(\mathrm{Sym}^3 V_3^\vee \oplus (< y > \otimes V_3^\vee))$.

4. Per m=4 si ha $h^0(X, -4K_X) = 21$ mentre la dimensione di $\mathrm{Sym}^4 V_3^\vee \oplus (< y > \otimes \mathrm{Sym}^2 V_3^\vee) \oplus < y^2 >$ è 22, quindi abbiamo una relazione in grado 4.

Andando avanti si può osservare che non abbiamo più bisogno di relazioni o variabili aggiuntive. Se denotiamo con x_i le variabili di grado 1 e con y la variabile di grado due avremo che X è definita da una relazione della forma $y^2 + yg_2(x_i) + f_4(x_i) = 0$ che, a meno di manipolazioni algebriche e sfruttando il completamento del quadrato, possiamo leggere come $y^2 + h_4(x_i) = 0$. Utilizzando il linguaggio dello spazio proiettivo pesato [Rei02] abbiamo ottenuto la nostra superficie come un'ipersuperficie in $\mathbb{P}(1,1,1,2)$. Osserviamo che proiettando da X verso $\mathbb{P}^2$ abbiamo che la fibra di ogni punto $p \notin V(h_4(x_i))$ sono due punti distinti poiché è descritta dall'equazione $y^2 + h_4(p) = 0$ con $h_4(p) \neq 0$, mentre se prendiamo $q \in V(h_4(x_i))$ la fibra sarà solo un punto. La mappa anticanonica descritta è quindi un rivestimento doppio di $\mathbb{P}^2$ ramificato lungo la quartica $h_4(x_i) = 0$.

4.2.7 Tabella riassuntiva

Inseriamo in questa tabella riassuntiva tutte le superfici di Del Pezzo con le loro descrizioni come $(G, \mathcal{F})$. Per le superfici di Del Pezzo non trattate in questa tesi, le quali necessitavano di strumenti più avanzati per essere studiate, ci riferiamo al capitolo 3 di [Fat24]. Indichiamo con $\mathrm{BL}_n\mathbb{P}^2$ lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in n punti in posizione generale.

superficie	grado	descrizione
$\mathbb{P}^2$	9	
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$	8	
$\mathrm{BL}_1\mathbb{P}^2$	8	$(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1,\ \mathcal{O}(1,1))$
$\mathrm{BL}_2\mathbb{P}^2$	7	$(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1,\ \mathcal{O}(1,0,1) \oplus \mathcal{O}(1,1,0))$
$\mathrm{BL}_3\mathbb{P}^2$	6	$(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2, \mathcal{O}(1,1)^{\oplus 2})$
$\mathrm{BL}_4\mathbb{P}^2$	5	$(\mathrm{Gr}(2,5), \mathcal{O}(1)^{\oplus 4})$
$\mathrm{BL}_5\mathbb{P}^2$	4	$(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(2)^{\oplus 2})$
$\mathrm{BL}_6\mathbb{P}^2$	3	$(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}(3))$
$\mathrm{BL}_7\mathbb{P}^2$	2	$(\mathbb{P}(1,1,1,2), \mathcal{O}(4))$
$\mathrm{BL}_8\mathbb{P}^2$	1	$(\mathbb{P}(1,1,2,3), \mathcal{O}(6))$

Bibliografia

[AM72] Michael Artin e David Mumford. «Some elementary examples of unirational varieties which are not rational». In: *Proceedings of the London Mathematical Society* 3.1 (1972), pp. 75–95.

[Bea00] Arnaud Beauville. «Determinantal hypersurfaces.» In: *Michigan Mathematical Journal* 48.1 (2000), pp. 39–64.

[Bea96] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*. 34. Cambridge University Press, 1996.

[CG72] C Herbert Clemens e Phillip A Griffiths. «The intermediate Jacobian of the cubic threefold». In: *Annals of Mathematics* 95.2 (1972), pp. 281–356.

[EH16] David Eisenbud e Joe Harris. *3264 and all that: A second course in algebraic geometry*. Cambridge University Press, 2016.

[Fat24] Enrico Fatighenti. *Topics on Fano varieties*. 2024.

[FP06] William Fulton e Piotr Pragacz. *Schubert varieties and degeneracy loci*. Springer, 2006.

[Gro57] Alexandre Grothendieck. «Sur La Classification Des Fibres Holomorphes Sur La Sphere de Riemann». In: *American Journal of Mathematics* 79 (1957), p. 121. URL: `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:120532002`.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer New York, NY, 1977.

[Har92] Joe Harris. *Algebraic geometry: a first course*. Vol. 133. Springer Science & Business Media, 1992.

[Huy04] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry*. Springer Berlin, Heidelberg, 2004.

[Mil63] John Willard Milnor. *Morse theory*. 51. Princeton university press, 1963.

[Per09] Arvid Perego. *Introduction to algebraic surface*. 2009.

[Rei02] Miles Reid. «Graded rings and varieties in weighted projective space». In: *Manuscript available from www. maths. warwick. ac. uk/˜ miles* (2002).

[Sha13] Igor R Shafarevich. *Basic algebraic geometry 2: Schemes and complex manifolds*. Springer Science & Business Media, 2013.

[Smi+04] Karen Smith et al. *An invitation to algebraic geometry*. Springer Science & Business Media, 2004.

[SR94] Igor Rostislavovich Shafarevich e Miles Reid. *Basic algebraic geometry*. Vol. 2. Springer, 1994.