Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea in Matematica**

# SULLE SUPERFICI DI RIEMANN:
# il teorema di Riemann-Roch

**Tesi di Laurea in Geometria**


**Relatore:**
**PETRACCI ANDREA**

**Presentata da:**
**MINELLI MARIA ESMERALDA**


**Anno Accademico 2023-2024**

*All'intraprendente falansterio*
*e ai suoi grandi progetti*

# Introduzione

Nel 1938, Federigo Enriques scriveva di come, tra gli sviluppi che coinvolsero diversi rami della matematica nel corso del diciannovesimo secolo, *"nessuno apparirà più meraviglioso dello sviluppo della geometria. Perché questa disciplina, che pareva dover rimanere fissata per sempre negli schemi dell'Euclide, non solo è cresciuta per nuovi apporti, ma ha radicalmente trasformato il suo spirito, i suoi metodi, i suoi oggetti, così da divenire veramente scienza nuova"*. Enriques spiega come questa rinascita dello *"spirito geometrico"* fosse in buona parte dovuta al crescente utilizzo dell'algebra nei metodi della geometria analitica e come, di conseguenza, nacque la necessità di *"rielaborare le idee geometriche in guisa da rispondere allo spirito di generalità introdotto dall'Algebra"*.

Il cuore di questa tesi risiede proprio nello scoprire una natura di carattere algebrico in oggetti prettamente analitici. Il soggetto principale della trattazione saranno le superfici di Riemann, chiamate così in onore del matematico tedesco Bernhard Riemann, il cui genio contribuì in modo cruciale allo sviluppo di molti campi della matematica moderna. Nel 1851 con la sua dissertazione di dottorato dal titolo *"Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe"*, Riemann pose nuove basi nello studio delle funzioni a variabile complessa introducendone una rappresentazione su superfici composte da più fogli distesi sul piano complesso e raccordati tra loro in modo opportuno. Sarà poi Hermann Weyl nel 1913 a definire una superficie di Riemann in modo più prossimo a quello moderno. Andando un po' più nel dettaglio, quello che si vuole indagare in questa tesi è un primo legame tra le superfici di Riemann e le varietà proiettive. Se le prime appaiono come oggetti trascendenti in quanto caratterizzate da funzioni olomorfe, le varietà proiettive hanno invece una natura più algebrica in quanto risultano luoghi di zeri di polinomi omogenei nello spazio proiettivo. Grazie al teorema di Riemann-Roch si ottiene un risultato sorprendente: tutte le superfici di Riemann compatte e connesse sono varietà proiettive. Si ha così un importante punto di incontro tra la geometria complessa e la geometria algebrica, che verrà poi generalizzato nel 1956 da Jean-Pierre Serre con il principio di GAGA *("Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique")*.

La trattazione si apre con un primo capitolo introduttivo che riprende alcuni dei principali risultati di analisi complessa in merito a funzioni olomorfe e meromorfe. Nel capitolo 2 definiamo le superfici di Riemann e utilizzando il lavoro del capitolo 1, estendiamo i risultati ottenuti a questi nuovi oggetti. In particolare si definisce la struttura di alcune superfici di Riemann tra cui le curve proiettive lisce. Con il capitolo 3, introduciamo le 1-forme la cui definizione su una superficie di Riemann è data localmente sulle carte di un atlante in modo tale che le definizioni locali siano compatibili laddove le carte si intersecano. Nei capitoli 4 e 5 si incontra per la prima volta il concetto di "divisore" e si dimostrano risultati chiave relativamente a tali oggetti. Il termine "divisore" è dovuto a Kronecker che ne sviluppa la teoria negli anni ottanta del diciannovesimo secolo. I divisori rappresentano insiemi finiti di punti di una superficie di Riemann contati con una certa molteplicità. Quest'ultima è relativa a un determinato aspetto di ciò che stiamo studiando. Ad esempio con i divisori principali si tiene conto dell'ordine di zeri e poli di una certa funzione meromorfa sulla superficie in questione. Grazie ai divisori, è possibile definire spazi di funzioni meromorfe e di 1-forme che hanno un determinato comportamento per quanto riguarda i poli: gli spazi $L(D)$ ed $L^{(1)}(D)$. Sul finire del capitolo 5 si vede come, fissato un divisore, sia possibile definire un'immersione proiettiva di una superficie di Riemann compatta e connessa. Infine nel capitolo 6, si dimostra il teorema di Riemann-Roch che a prima vista può sembrare un risultato puramente algebrico di poco conto. Come suo corollario, si riesce però a dimostrare il risultato voluto: le superfici di Riemann connesse e compatte si immergono nello spazio proiettivo come luoghi di zeri di polinomi omogenei. Infine si analizzano due casi particolari: le superfici di genere 0 (che risultano isomorfe alla sfera di Riemann) e quelle di genere 1 (che sono invece isomorfe a cubiche piane lisce proiettive).

# Indice

# Capitolo 1

# Funzioni olomorfe

In questo primo capitolo, introduciamo le funzioni a variabile complessa. In particolare poniamo l'attenzione sul concetto di funzione olomorfa e su alcune sue proprietà e caratteristiche fondamentali.

**Definizione 1.1.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : U \to \mathbb{C}$ è una *funzione olomorfa* in un punto $z_0 \in U$, se il seguente limite esiste ed è un numero complesso:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{C},$$

dove $h$ varia in un intorno di 0 in $\mathbb{C}$. Indichiamo il valore del suddetto limite con $f'(z_0)$.
La funzione è olomorfa su tutto $U$ se è olomorfa in ogni punto $z_0 \in U$.

**Definizione 1.2.** Dato $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, definiamo il seguente insieme:

$$\mathcal{O}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ è olomorfa in } U\}.$$

La prima volta che si incontra una funzione complessa, è naturale identificare lo spazio $\mathbb{C}$ con il più familiare $\mathbb{R}^2$. Difatti il modo più spontaneo di pensare alla variabile complessa è come $z = x + iy$ dove $x$ e $y$ sono variabili reali.
Dunque $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ diventa $f(z) = f(x + iy) = \operatorname{Re} f(x, y) + i \operatorname{Im} f(x, y)$ dove $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono funzioni a valori reali, definite su un aperto di $\mathbb{R}^2$.
Perciò se $f$ è olomorfa in $z_0 = x_0 + iy_0$, dalla definizione si ha che:

$$f'(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + t) - f(z_0)}{t} = \partial_x \operatorname{Re} f(x_0, y_0) + i\partial_x \operatorname{Im} f(x_0, y_0) \qquad (1.1)$$

dove $t$ varia in un intorno di 0 in $\mathbb{R}$. Analogamente

$$f'(z_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + it) - f(z_0)}{it} = -i\partial_y \operatorname{Re} f(x_0, y_0) + \partial_y \operatorname{Im} f(x_0, y_0). \quad (1.2)$$

La funzione $f$ rispetta quindi le cosiddette *equazioni di Cauchy-Riemann*:

$$\partial_x \operatorname{Re} f(x_0, y_0) = \partial_y \operatorname{Im} f(x_0, y_0) \quad (1.3)$$

$$\partial_x \operatorname{Im} f(x_0, y_0) = -\partial_y \operatorname{Re} f(x_0, y_0) \quad (1.4)$$

**Osservazione 1.3.** La matrice jacobiana della funzione $(\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$ nel punto $(x_0, y_0)$ è della forma

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

per qualche $a, b \in \mathbb{R}$. Matrici di questo tipo, lette come endomorfismi di $\mathbb{C}$ rispetto alla base canonica $\{1, i\}$, rappresentano la moltiplicazione per il numero complesso $a + ib$.

**Osservazione 1.4.** Le equazioni (1.3) e (1.4), da sole non sono sufficienti per affermare che $f$ è olomorfa: a priori la funzione potrebbe non essere derivabile in alcune direzioni, sebbene dotata di derivate parziali.

Affinché siano condizioni anche sufficienti e non solo necessarie, vi è bisogno del seguente risultato:

**Proposizione 1.5.** Sia $f : U \to \mathbb{C}$ con $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Se $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ sono funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ e soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann, allora $f$ è olomorfa sul suo dominio.

*Dimostrazione.* Consideriamo $h = h_1 + ih_2$, con $h_1, h_2$ reali. Grazie alla regolarità di $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} f$, si ha:

$$\operatorname{Re} f(x + h_1, y + h_2) = \operatorname{Re} f(x, y) + \partial_x \operatorname{Re} f h_1 + \partial_y \operatorname{Re} f h_2 + |h|\psi_1(h)$$

$$\operatorname{Im} f(x + h_1, y + h_2) = \operatorname{Im} f(x, y) + \partial_x \operatorname{Im} f h_1 + \partial_y \operatorname{Im} f h_2 + |h|\psi_2(h)$$

dove $\lim_{|h| \to 0} \psi_k(h) = 0$ con $k = 1, 2$.
Moltiplicando la seconda per $i$ e sommando membro a membro, grazie alle equazioni di Cauchy-Riemann otteniamo:

$$f(z + h) = f(z) + (\partial_x \operatorname{Re} f - i\partial_y \operatorname{Re} f)(h_1 + ih_2) + |h|(\psi_1(h) + i\psi_2(h))$$

da cui

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \partial_x \operatorname{Re} f - i\partial_y \operatorname{Re} f$$

e dunque $f$ è olomorfa. $\square$

## 1.1 Legame con le serie di potenze

Altro aspetto fondamentale delle funzioni olomorfe, è il loro legame con le serie di potenze.

**Definizione 1.6.** Indichiamo con $\mathbb{C}[[T]]$ l'insieme delle serie di potenze formali nella variabile $T$, ossia $\mathbb{C}[[T]] := \{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \mid a_n \in \mathbb{C}\}$.

**Osservazione 1.7.** $\mathbb{C}[[T]]$ è una $\mathbb{C}$-algebra.

**Definizione 1.8.** Data $a \in \mathbb{C}[[T]]$ si definisce il raggio di convergenza della serie come segue:

$$R(a) := \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0,+\infty].$$

**Osservazione 1.9.** Data $a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$, per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ possiamo considerare la serie di funzioni $a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ su $\mathbb{C}$. Ricordiamo quindi che dal Teorema di Cauchy-Hadamard, si ha che $a(z)$:

- converge assolutamente sulla palla $B_{R(a)}(z_0)$;
- non converge al di fuori di $\overline{B_{R(a)}(z_0)}$.

**Proposizione 1.10.** Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $r \in ]0,+\infty]$. Sia $a = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$ serie di potenze con raggio di convergenza $R$ tale che $R \geq r$. Allora $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ è olomorfa in $B_r(z_0) \subseteq \mathbb{C}$.
Inoltre anche la derivata di $f$ corrisponde a una serie di potenze avente il medesimo raggio di convergenza: $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$

*Dimostrazione.* Vedi [SS03, Teorema 2.6, capitolo 1] $\square$

Ricordando la formula di Cauchy (vedi [SS03, Teorema 4.1, capitolo 2]), si mostra che è vero anche il viceversa, ossia che ogni funzione olomorfa ammette sviluppo in serie di potenze:

**Proposizione 1.11.** Siano $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto ed $f \in \mathcal{O}(U)$. Allora $f$ è sviluppabile in serie di potenze su ogni palla $B_r(z_0)$ tale che $\overline{B_r(z_0)} \subseteq U$. In particolare per ogni $z \in B_r(z_0)$ si ha quindi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

dove

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw.$$

*Dimostrazione.* Vedi [SS03, Teorema 4.4, capitolo 2] □

Vi è dunque una corrispondenza tra serie di potenze e funzioni olomorfe definite su palle aperte di $\mathbb{C}$. Infatti dalle Proposizioni 1.10 e 1.11, si osserva che fissato $r \in ]0, +\infty]$ e $z_0 \in \mathbb{C}$, si ha un isomorfismo di $\mathbb{C}$-algebre:

$$\{a \in \mathbb{C}[[T]] \mid R(a) \geq r\} \simeq \mathcal{O}(B_r(z_0)).$$

Possiamo formulare una corrispondenza analoga, considerando funzioni olomorfe aventi come dominio corone circolari di $\mathbb{C}$.

**Definizione 1.12.** $\mathcal{S} := \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n \in \mathbb{C}\}$ è il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle serie di Laurent. In particolare per ogni $a \in \mathcal{S}$ possiamo definire le seguenti due serie:

$$a_+ := \sum_{n \geq 0} a_n T^n \in \mathbb{C}[[T]]$$

$$a_- := \sum_{n < 0} a_n T^n = \sum_{n > 0} a_{-n} (T^{-1})^n \in \mathbb{C}[[T^{-1}]].$$

Sono ben definiti i rispettivi raggi di convergenza:

$$R_+(a) := R(a_+) = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, +\infty]$$

$$R_-(a) := \frac{1}{R(a_-)} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} \in [0, +\infty].$$

**Osservazione 1.13.** Data $a \in \mathcal{S}$ con i rispettivi raggi di convergenza $R_+$ ed $R_-$ e, fissato $z_0 \in \mathbb{C}$, dall'Osservazione 1.9 e dal Teorema di Cauchy-Hadamard abbiamo i seguenti risultati:

- $a_+(z)$ converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z - z_0| < R_+$;
- $a_-(z)$ converge assolutamente per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z - z_0| > R_-$.

**Proposizione 1.14.** Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ e $A := \{z \in \mathbb{C} \mid r^- < |z - z_0| < r^+\}$ con $0 \leq r^- < r^+ \leq +\infty$. Allora:

1. per ogni $a \in \mathcal{S}$ tale che $R_-(a) \leq r^-$ e $R_+(a) \geq r^+$, si ha che la funzione $f : A \to \mathbb{C}$ data da
$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n,$$
è ben definita e olomorfa;

2. per ogni $f \in \mathcal{O}(A)$, per ogni $r \in ]r^-, r^+[$ si ha che la serie
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right) T^n,$$
è una serie di Laurent con $R_- \leq r^-$ ed $R_+ \geq r^+$.

Si osserva che le due costruzioni appena descritte, sono una l'inversa dell'altra e danno un isomorfismo di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali:
$$\{a \in \mathcal{S} \mid R_-(a) \leq r^- \text{ e } R_+(a) \geq r^+\} \simeq \mathcal{O}(A).$$
Essendo $\mathcal{O}(A)$ una $\mathbb{C}$-algebra, anche lo spazio vettoriale del membro di sinistra risulta una $\mathbb{C}$-algebra.

Si consideri ora $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in \mathbb{C}$ e sia $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa. Grazie alla corrispondenza della Proposizione 1.14, possiamo svilupparla in serie in un intorno di $z_0$. Infatti osserviamo che se $U = B_r(z_0)$ intorno di $z_0$, ci ritroviamo esattamente nella situazione di una funzione olomorfa avente una corona circolare come dominio.
La serie così ottenuta è detta *serie di Laurent di $f$ centrata in $z_0$*. Possiamo dare la seguente definizione:

**Definizione 1.15.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $z_0 \in U$. Data $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ e $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ serie di Laurent di $f$ in $z_0$, si ha che l'*ordine* di $z_0$ in $f$ è dato dalla seguente quantità:
$$\mathrm{ord}_{z_0}(f) := \min\{n \in \mathbb{Z} \mid a_n \neq 0\} \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

**Osservazione 1.16.** Si ha che $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = +\infty$ se e solo se $f$ è nulla in un intorno puntato di $z_0$. Inoltre $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = -\infty$ se e solo se la serie di Laurent di $f$, vista come serie formale, non appartiene al campo delle frazioni di $\mathbb{C}[[T]]$. In tal caso diremo che $f$ presenta una *singolarità essenziale* in $z_0$.

**Lemma 1.17.** Siano $f$ e $g$ due funzioni sviluppabili in serie di Laurent nel punto $z_0 \in \mathbb{C}$, non identicamente nulle e tali che $\mathrm{ord}_{z_0}(f), \mathrm{ord}_{z_0}(g) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1. $\mathrm{ord}_{z_0}(fg) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) + \mathrm{ord}_{z_0}(g)$;
2. se $f$ non è identicamente nulla in un intorno puntato di $z_0$ allora $\mathrm{ord}_{z_0}\left(\frac{1}{f}\right) = -\,\mathrm{ord}_{z_0}(f)$;
3. se $g$ non è identicamente nulla in un intorno puntato di $z_0$ allora $\mathrm{ord}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathrm{ord}_{z_0}(f) - \mathrm{ord}_{z_0}(g)$;
4. $\mathrm{ord}_{z_0}(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}_{z_0}(f), \mathrm{ord}_{z_0}(g)\}$.

*Dimostrazione.* A meno di una traslazione, consideriamo $z_0 = 0$. Siano $f = \sum_{i=m}^{+\infty} a_i z^i$ e $g = \sum_{i=n}^{+\infty} b_i z^i$ dove $m, n \in \mathbb{Z}$ e $a_m \neq 0, b_n \neq 0$.

1. $$f(z)g(z) = (a_m a_n)\, z^{m+n} + \sum_{i>n+m}^{+\infty} \left( \sum_{j,k|j+k=i} a_j b_k \right) z^i,$$
   dunque $\mathrm{ord}_0(fg) = m+n$ poiché $a_m a_n \neq 0$ in quanto prodotto di elementi non nulli in $\mathbb{C}$.

2. $$\frac{1}{f}(z) = \frac{1}{z^m \sum_{i=m}^{\infty} a_i z^{i-m}} = z^{-m} \frac{1}{\sum_{i=m}^{\infty} a_i z^{i-m}} = z^{-m} h(z),$$
   dove osserviamo che $\mathrm{ord}_0(h) = 0$.
   Dunque per il punto precedente, $\mathrm{ord}_0\left(\frac{1}{f}\right) = -m + 0 = -m$.

3. segue dai due punti precedenti.

4. $$f(z) + g(z) = \sum_{i=\min\{m,n\}}^{+\infty} (a_i + b_i) z^i,$$

quindi $\text{ord}_0(f+g) \geq \min\{m,n\}$ poiché a priori potrebbero verificarsi delle cancellazioni (se $m = n$ e $a_m = -b_n$). Si ha sempre l'uguaglianza se $m \neq n$.

□

## 1.2 Punti di singolarità

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $z_0 \in U$. Data $f \in \mathcal{O}(U \smallsetminus \{z_0\})$, studiamone il comportamento nelle vicinanze del punto $z_0$.

**Teorema 1.18** (Teorema della singolarità rimovibile di Riemann)**.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto con $z_0 \in U$, e sia $f : U \smallsetminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Se $|f|$ è limitata in un intorno di $z_0$ allora esiste $\phi : U \to \mathbb{C}$ olomorfa tale che $\phi|_{U \smallsetminus \{z_0\}} = f$

*Dimostrazione.* Vedi [SS03, Teorema 3.1, capitolo 3] □

**Definizione 1.19.** Nella situazione del Teorema 1.18, diciamo che $f$ ha una *singolarità rimovibile* in $z_0$.

**Teorema 1.20** (Caratterizzazione dei poli)**.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto con $z_0 \in U$ e sia $f : U \smallsetminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa e tale che $f$ non ha una singolarità rimovibile in $z_0$. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

1. esiste un intero $k > 0$ tale che $(z-z_0)^k f(z)$ ha una singolarità rimovibile in $z_0$;
2. $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$;
3. la funzione $\frac{1}{f}$, definita in un intorno di $z_0$, ha una singolarità rimovibile nel punto $z_0$.

*Dimostrazione.*

- $1 \implies 2$: vedi [FB09, Osservazione III.4.7].
- $2 \implies 3$: dall'ipotesi 2, si ha automaticamente che $\frac{1}{f}$ è limitata in un intorno di $z_0$ e quindi presenta una singolarità rimovibile per il Teorema 1.18. Inoltre rimuovendo la singolarità si osserva che $\frac{1}{f}$ ha uno zero in $z_0$, poiché $\lim_{z \to z_0} |\frac{1}{f(z)}| = 0$.

- $3 \implies 1$: per l'ipotesi 3, esiste $B_r(z_0)$ intorno di $z_0$ tale che $f(z) \neq 0$ per ogni $z \in U \cap B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dunque $\frac{1}{f(z)}$ risulta ben definita su tale insieme e per ipotesi presenta una singolarità rimovibile in $z_0$. Quindi esiste una funzione $\phi \in \mathcal{O}(U \cap B_r(z_0))$ tale che $\phi(z) = \frac{1}{f(z)}$ per ogni $z \in U \cap B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Dunque possiamo sviluppare $\phi$ in serie di potenze: $\phi(z) = (z - z_0)^k h(z)$, dove $h(z_0) \neq 0$ ed $h \in \mathcal{O}(U \cap B_r(z_0))$. Inoltre $k > 0$ (altrimenti $f$ avrebbe una singolarità rimovibile in $z_0$) e dunque si ha:
$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \frac{1}{h(z)}.$$
Quindi $f(z)(z - z_0)^k = \frac{1}{h(z)}$ ha una singolarità rimovibile in $z_0$ .

□

**Definizione 1.21.** Nel caso in cui si verifichi una delle tre condizioni equivalenti del Teorema 1.20, diciamo che $f$ ha un *polo* in $z_0$.

**Osservazione 1.22.** I punti di singolarità essenziale, ossia i punti laddove $f$ non verifica le condizioni dei Teoremi 1.18 e 1.20, sono gli unici veri punti singolari in cui il comportamento di $f$ non è in qualche modo controllabile. Per tali punti vale infatti il teorema di Casorati-Weierstrass di cui ricordiamo solamente l'enunciato.

**Teorema 1.23.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $z_0 \in U$. Sia $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa con singolarità essenziale in $z_0$. Allora per ogni $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq U$, $f(B_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ è denso in $\mathbb{C}$.

*Dimostrazione.* Vedi [SS03, Teorema 3.3, capitolo 3] □

Un enunciato ancora più forte a tale proposito, è dato dal teorema di Picard [FB09, "So called Big Theorem of Picard", III.4].

Ricapitolando, data $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ dove $z_0 \in U$ aperto di $\mathbb{C}$, possiamo dedurre il tipo di singolarità presente nel punto $z_0$ osservando il comportamento locale di $f$ in un suo intorno:

- $f$ ha una singolarità rimovibile in $z_0$ se e solo se esiste finito il limite $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$;

- $f$ ha un polo in $z_0$ se e solo se $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$;
- $f$ ha una singolarità essenziale in $z_0$ se e solo se non esiste in $[0, +\infty]$ il limite $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$.

Si possono poi caratterizzare i punti di singolarità di una funzione in base all'ordine. In particolare se $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$ e $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ ha una singolarità essenziale in $z_0$, allora si ha $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = -\infty$.

**Lemma 1.24.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto con $z_0 \in U$ e sia $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ tale che $f$ non ha una singolarità essenziale in $z_0$, allora:

1. se $f$ ha una singolarità rimovibile in $z_0$, rimossa tale singolarità si ha che $f$ ha uno zero in $z_0$ se e solo se $\mathrm{ord}_{z_0}(f) > 0$;
2. $f$ ha un polo in $z_0$ se e solo se $\mathrm{ord}_{z_0}(f) < 0$;
3. $f$ non ha né un polo né uno zero in $z_0$ se e solo se $\mathrm{ord}_{z_0}(f) = 0$;

In particolare $f$ si estende in modo olomorfo in $z_0$ se e solo se $\mathrm{ord}_{z_0}(f) \geq 0$.

*Dimostrazione.*

1. Se $f$ ha uno zero in $z_0$, $f$ è in particolare olomorfa in un intorno di $z_0$ e dunque è ivi sviluppabile in serie come nella Proposizione 1.11:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$
Inoltre osserviamo che $f(z_0) = 0$ se e solo se $a_0 = 0$. Quindi $\mathrm{ord}_{z_0}(f)$ è necessariamente positivo.
Viceversa è ovvio che se $\mathrm{ord}_{z_0}(f) > 0$, allora $f$ si sviluppa in un intorno di $z_0$ come $f(z) = \displaystyle\sum_{n=\mathrm{ord}_{z_0}(f)}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$. In particolare $f(z_0) = 0$.
2. Segue dal Teorema 1.20 poiché $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}$ con $\psi(z)$ olomorfa. Dunque sviluppandola in serie di potenze centrate in $z_0$ si ha:
$$f(z) = \frac{a_0}{(z - z_0)^n} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k-n}.$$
Quindi il primo termine non nullo compare relativamente a una potenza di esponente negativo.

3. Proviene in modo naturale dalle due precedenti.

□

## 1.3 Funzioni meromorfe

Introduciamo ora la nozione di funzioni meromorfe su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$.

**Definizione 1.25.** Dato $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, una funzione $f : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ è *meromorfa* in $U$ se:

- $f^{-1}(\infty)$ è un chiuso discreto di $U$;
- $f|_{U \setminus f^{-1}(\infty)} \in \mathcal{O}(U \setminus f^{-1}(\infty))$ e ha poli in ogni punto di $f^{-1}(\infty)$.

L'insieme di tali funzioni è indicato con $\mathcal{M}(U)$.

**Proposizione 1.26.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Allora l'insieme delle funzioni meromorfe $\mathcal{M}(U)$ è dato dalle classi di equivalenza dell'insieme delle coppie $(f, Z)$ dove:

- $Z \subseteq U$ è un chiuso discreto;
- $f \in \mathcal{O}(U \setminus Z)$ e presenta singolarità rimovibili o poli nei punti di $Z$.

Le classi di equivalenza sono da considerarsi rispetto alla seguente relazione:

$$(f, Z) \sim (g, Y) \text{ se e solo se } f|_{U \setminus (Z \cup Y)} = g|_{U \setminus (Z \cup Y)}.$$

*Dimostrazione.* Mostriamo che la relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza. La proprietà riflessiva e quella simmetrica sono banalmente verificate. Per quanto riguarda la proprietà transitiva consideriamo $(f, Z) \sim (g, Y)$ e $(g, Y) \sim (h, W)$. Allora vale:

$$f|_{U \setminus (Z \cup Y)} = g|_{U \setminus (Z \cup Y)} \qquad g|_{U \setminus (Y \cup W)} = h|_{U \setminus (Y \cup W)}.$$

In particolare si ha

$$f|_{U \setminus (Z \cup Y \cup W)} = g|_{U \setminus (Z \cup Y \cup W)} = h|_{U \setminus (Z \cup Y \cup W)},$$

quindi $(f, Z) \sim (h, Y \cup W)$. Ma $h$ presenta poli o singolarità rimovibili solo nei punti di $W$ e quindi $(h, Y \cup W) = (h, W)$ e dunque si ha $(f, Z) \sim (h, W)$.

Ora proviamo che l'insieme $\mathcal{M}(U)$ della Definizione 1.25 è equivalente all'insieme dell'enunciato.

- Sia $f : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tale che $f|_{U \smallsetminus f^{-1}(\infty)} \in \mathcal{O}(U \smallsetminus f^{-1}(\infty))$ dove $f^{-1}(\infty)$ è un chiuso, discreto formato dai poli di $f$. Allora posto $Z = f^{-1}(\infty)$, possiamo associare a tale funzione la classe di equivalenza $[(f|_{U \smallsetminus Z}, Z)]_\sim$.

- Viceversa, consideriamo una coppia $(g, Z)$ dove $Z \subseteq U$ è un chiuso discreto e $g \in \mathcal{O}(U \smallsetminus Z)$ presenta singolarità rimovibili o poli nei punti di $Z$. Allora possiamo associargli una funzione $f : U \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tale che:

$$f(z) = \begin{cases} g(z) & \text{se } z \in U \smallsetminus Z \\ \lim_{w \to z} g(w) & \text{se } z \in Z \text{ è una singolarità rimovibile di } g \\ \infty & \text{se } z \in Z \text{ è un polo di } g \end{cases}.$$

  Tale $f$ risulta essere meromorfa su $U$ rispetto alla Definizione 1.25. Infatti $f|_{U \smallsetminus f^{-1}(\infty)}$ è una funzione olomorfa sul dominio di definizione poiché risulta coincidere con la funzione olomorfa $g$ estesa in modo tale da rimuoverne le singolarità rimovibili. Inoltre $f^{-1}(\infty)$ è l'insieme dei poli di $g$ ed è un sottoinsieme di $Z$: è ancora un chiuso discreto.
  Mostriamo dunque che tale associazione è ben posta rispetto alle classi di equivalenza. Siano $(g, Z) \sim (h, Y)$, abbiamo che:

  - se $z \in U \smallsetminus (Z \cup Y)$ allora $g(z) = h(z)$;
  - se $z \in Z$ ma $z \notin Y$ allora $h$ è ben definita in $z$. Segue quindi che $z$ è una singolarità rimovibile di $g$. Infatti le due funzioni coincidono in un intorno di $z$ e dunque abbiamo:

  $$\lim_{w \to z} g(w) = \lim_{w \to z} h(w) = h(z) \in \mathbb{C};$$

  - se $z \in Y$ ma $z \notin Z$ allora $g$ è ben definita in $z$. In modo del tutto analogo a prima, si ha quindi che $z$ è una singolarità rimovibile di $h$;

– se $z \in Z \cap Y$ allora, dato che $h$ e $g$ coincidono in un intorno di $z$, si comporteranno allo stesso modo. Dunque $z$ è un polo di entrambe le funzioni o è una singolarità rimovibile per tutte e due.

Dunque avendo osservato tali comportamenti, si nota che le funzioni $f$ associate a due coppie equivalenti, coincidono.

□

**Osservazione 1.27.** Tutte le funzioni olomorfe su $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, sono meromorfe: $\mathcal{O}(U) \subseteq \mathcal{M}(U)$. L'insieme $\mathcal{M}(U)$ è inoltre un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale.

Per le funzioni meromorfe vale la caratterizzazione delle singolarità in base all'ordine, enunciata nel Lemma 1.24.

## 1.4 Alcuni teoremi

Vediamo ora alcuni teoremi classici di notevole rilievo.

**Teorema 1.28** (Discretezza di zeri e poli)**.** Sia $f$ meromorfa su $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. Se $f$ non è identicamente nulla, allora sia il luogo dei suoi zeri che quello dei suoi poli risulta un sottoinsieme discreto di $U$.
In altre parole, gli zeri e i poli sono punti isolati.

*Dimostrazione.* Sia $z_0 \in U$ tale che $f(z_0) = 0$ e consideriamo lo sviluppo in serie di potenze di $f$ in un intorno di $z_0$:

$$f(z) = (z - z_0)^k \psi(z).$$

Si avrà dunque $k$ intero positivo e $\psi(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n-k}$ olomorfa ed in particolare non nulla in $z_0$.
Per continuità di $\psi$ si ha quindi che $\psi(z) \neq 0$ in un intorno di $z_0$ in cui quindi $f$ si annulla solo in $z_0$ stesso.
Analogamente segue la discretezza dei poli di $f$ che posso pensare come zeri di $1/f$. □

**Corollario 1.29.** Dato $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $\mathcal{O}(U)$ è un dominio di integrità.

*Dimostrazione.* Siano $f, g \in \mathcal{O}(U)$ tale che $fg = 0$. Notiamo che $\mathbb{V}(fg) = U$ ma $\mathbb{V}(fg) = \mathbb{V}(f) \cup \mathbb{V}(g)$ e dunque $\mathbb{V}(f)$ e $\mathbb{V}(g)$ non possono essere entrambi insiemi discreti: una tra le due funzioni è necessariamente nulla. $\square$

**Proposizione 1.30.** Se $U \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto connesso, $\mathcal{M}(U)$ è un campo.

*Dimostrazione.* Definiamo la moltiplicazione tra elementi di $\mathcal{M}(U)$. Siano $f, g \in \mathcal{M}(U)$ allora per ogni $z_0 \in U$ possiamo considerare lo sviluppo in serie di Laurent delle due funzioni. Dunque per ogni $z_0 \in U$, esistono $m, n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ tali che $m = \mathrm{ord}_{z_0}(f), n = \mathrm{ord}_{z_0}(g)$ e in un intorno di $z_0$ vale:

$$f(z) = \sum_{j \geq m} a_j (z - z_0)^j;$$

$$g(z) = \sum_{k \geq n} a_k (z - z_0)^k.$$

Dunque la serie formale, in un intono di $z_0$, associata al prodotto delle due funzioni risulta:

$$a(z) = f(z)g(z) = (z - z_0)^{n+m} \left( \sum_{j \geq m} a_j (z - z_0)^{j-m} \sum_{k \geq n} a_k (z - z_0)^{k-n} \right).$$

Possiamo quindi definire il prodotto in $z_0$ come:

$$(fg)(z_0) := \begin{cases} a(z_0) & \text{se } m + n \geq 0 \\ \infty & \text{se } m + n < 0 \end{cases}$$

La funzione così ottenuta risulta ancora un elemento di $\mathcal{M}(U)$. Infatti $(fg)^{-1}(\infty) \subseteq f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty)$ e dunque è un sottoinsieme discreto di $U$. Inoltre $(fg)|_{U \smallsetminus (fg)^{-1}(\infty)}$ è olomorfa poiché localmente serie di potenze di ordine $\geq 0$.

Data $f \in \mathcal{M}(U)$ non nulla, definiamo ora la sua inversa. Per ogni $z_0 \in U$ considero lo sviluppo in serie di Laurent di $f$ in un intorno del punto. Otteniamo così la seguente scrittura formale di $\frac{1}{f}$, in un intorno di $z_0$:

$$b(z) = \frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^{-m} \frac{1}{\sum_{j \geq m} a_j (z - z_0)^{j-m}} = (z - z_0)^{-m} h(z),$$

dove $h$ risulta olomorfa in $z_0$ e tale che $\mathrm{ord}_{z_0}(h) = 0$. Dunque definiamo l'inversa di $f$ in $z_0$ come:

$$g(z_0) = \left(\frac{1}{f}\right)(z_0) := \begin{cases} b(z_0) & \text{se } m \leq 0 \\ \infty & \text{se } m > 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che $g^{-1}(\infty)$ è composto dai punti di $U$ tali che $\mathrm{ord}_{z_0}(f) > 0$, ossia dagli zeri di $f$ o al più dalle singolarità rimovibili di $f$ per cui $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$. Quindi $g^{-1}(\infty)$ è un insieme discreto grazie al Teorema 1.28. Inoltre laddove $f$ presentava dei poli, dal Teorema 1.20 sappiamo che $g$ presenta delle singolarità rimovibili (in particolare proprio degli zeri) e dunque rimosse tali singolarità, $g$ risulta olomorfa su $U \setminus (f^{-1}(0))$. Quindi $g \in \mathcal{M}(U)$. □

**Teorema 1.31** (Teorema del prolungamento analitico)**.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e siano $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Sono equivalenti i seguenti fatti:

- $f = g$;
- $\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$ ha punti di accumulazione in $U$;
- esiste un punto $z_0 \in U$ tale che $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

*Dimostrazione.* Vedi [FB09, III.3.2]. □

Tale risultato è di notevole rilievo in quanto evidenzia la rigidità del comportamento delle funzioni olomorfe: basta infatti che due funzioni coincidano su un piccolo insieme avente punti di accumulazione nel dominio, affinché siano uguali su tutta la componente connessa contenente tale sottoinsieme (fatto assolutamente falso nel caso reale).

**Teorema 1.32** (Teorema della mappa aperta)**.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e sia $f \in \mathcal{O}(U)$. Allora sono equivalenti i seguenti fatti:

1. $f$ è non costante;
2. $f$ è aperta;
3. $f(U)$ è aperto in $\mathbb{C}$;
4. per ogni $a \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(a)$ è discreto;

5. per ogni $z_0 \in U$, esiste $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tale che $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

*Dimostrazione.*

- $1 \implies 2$: Vedi [SS03, Teorema 4.4, capitolo 3].
- $2 \implies 3$: ovvio.
- $3 \implies 4$: se per assurdo esistesse $a \in \mathbb{C}$ tale che $f^{-1}(a)$ è un sottoinsieme di $U$ che ha punti di accumulazione, allora dal Teorema 1.31 avremmo che $f = a$ ed in particolare $f(U) = \{a\}$ che non è un aperto di $\mathbb{C}$. Abbiamo così ottenuto una contraddizione.
- $4 \implies 5$: se per assurdo esistesse un punto $z_0 \in U$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ si ha $f^{(n)}(z_0) = 0$, allora lo sviluppo di $f$ in un intorno di $z_0$ sarebbe $f(z) = a_0$ per ogni $z \in B_r(z_0)$. Dunque $B_r(z_0) \subseteq f^{-1}(a_0)$, contraddicendo l'ipotesi per cui $f^{-1}(a_0)$ doveva essere discreto.
- $5 \implies 1$: se per assurdo $f$ fosse costante, per ogni punto $z_0 \in U$ avrei lo sviluppo in serie pari a $f(z) = k \in \mathbb{C}$ e quindi in particolare $f^{(n)}(z_0) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ contraddicendo l'ipotesi.

□

**Teorema 1.33** (Principio del massimo)**.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $z_0 \in U$ ed $r > 0$ tale che $B_r(z_0) \subseteq U$. Sia poi $f \in \mathcal{O}(U)$. Se per ogni $z \in B_r(z_0)$ vale $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, allora $f$ è costante in $U$.

*Dimostrazione.* Vedi [Lan99, Teorema 7.1, capitolo 2]. □

Enunciamo infine, il teorema della funzione implicita per funzioni in due variabili complesse, che ci tornerà utile in seguito. Tale risultato ci permette di descrivere localmente luoghi di zeri come grafici di funzioni olomorfe.

**Definizione 1.34.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto. Una funzione $f : U \to \mathbb{C}$ è *olomorfa* in $U$ se per ogni punto $w \in U$ esiste un suo intorno aperto $I_w \subseteq U$ in cui $f$ è sviluppabile in serie di potenze:

$$f(z) = \sum_{v_1,\dots,v_n \in \mathbb{N}} a_{v_1,\dots,v_n}(z_1 - w_1)^{v_1} \cdots (z_n - w_n)^{v_n}.$$

**Osservazione 1.35.** Si osserva che se $f$ è olomorfa su $U \subseteq \mathbb{C}^n$ aperto, è ivi continua e risulta olomorfa come funzione nelle singole variabili $z_k$. Vale inoltre anche il viceversa: una funzione continua su $U$ e olomorfa nelle singole variabili $z_k$, è olomorfa su $U$ (vedi [GR09, pp. 2-3, capitolo 1]).

**Teorema 1.36.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}^2$ aperto e sia $f : U \to \mathbb{C}$ funzione olomorfa. Sia poi $(z_0, w_0) \in U$ tale che $f(z_0, w_0) = 0$ e $\partial_z f(z_0, w_0) \neq 0$. Allora esistono:

- $V$ intorno aperto di $z_0$ in $\mathbb{C}$,
- $W$ intorno aperto di $w_0$ in $\mathbb{C}$,
- $g : W \to V$ olomorfa,

tali che $V \times W \subseteq U$ e $f^{-1}(0) \cap (V \times W) = \{(g(w), w) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in W\}$.
Per ogni $w \in W$, vale inoltre

$$g'(w) = -\frac{\partial_w f(g(w), w)}{\partial_z f(g(w), w)}.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo $f$ come funzione a variabili reali, identificando $U$ nel modo naturale come sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \text{ tale che } (x, y, \xi, \eta) \mapsto (\operatorname{Re} f(x, y, \xi, \eta), \operatorname{Im} f(x, y, \xi, \eta))$$

dove $z = x + iy$ e $w = \xi + i\eta$.
Si ha la seguente matrice jacobiana:

$$J_{(x_0,y_0,\xi_0,\eta_0)}(f) = \begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} f & \partial_y \operatorname{Re} f & \partial_\xi \operatorname{Re} f & \partial_\eta \operatorname{Re} f \\ \partial_x \operatorname{Im} f & \partial_y \operatorname{Im} f & \partial_\xi \operatorname{Im} f & \partial_\eta \operatorname{Im} f \end{pmatrix}$$

dove omettiamo le valutazioni delle derivate nel punto corrispondente a $(z_0, w_0)$ per evitare di appesantire la notazione.
Si osservi che essendo $f$ funzione olomorfa, grazie alle equazioni di Cauchy-Riemann si ha:

$$0 \neq \partial_z f = \partial_x \operatorname{Re} f + i\partial_x \operatorname{Im} f, \tag{1.5}$$

non nullo per ipotesi.
Sempre per le medesime relazioni, il minore $2 \times 2$ di sinistra diventa:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} f & \partial_y \operatorname{Re} f \\ \partial_x \operatorname{Im} f & \partial_y \operatorname{Im} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} f & -\partial_x \operatorname{Im} f \\ \partial_x \operatorname{Im} f & \partial_x \operatorname{Re} f \end{pmatrix}$$

che risulta quindi invertibile poiché avente determinante non nullo (grazie alla relazione (1.5)).

Dunque, essendo $f$ di classe $\mathcal{C}^1$, sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Dini in più variabili reali: esistono quindi $W$ intorno aperto di $(\xi_0, \eta_0)$ in $\mathbb{R}^2$, $V$ intorno aperto di $(x_0, y_0)$ in $\mathbb{R}^2$ e $g : W \to V$ di classe $\mathcal{C}^1$ tale che

$$f^{-1}(0) \cap (V \times W) = \{(g(\xi, \eta), \xi, \eta) \in \mathbb{R}^4 \mid (\xi, \eta) \in W\}.$$

Questo è l'insieme $\{(g(w), w) \mid w \in W\}$ che risulta essere un intorno di $(z_0, w_0)$, dove abbiamo identificato $W$ in modo canonico come sottoinsieme di $\mathbb{C}$.

Inoltre identificando anche $V$ come sottoinsieme di $\mathbb{C}$, mostriamo che $g$, come funzione a variabili complesse, è olomorfa.
Dal teorema di Dini abbiamo anche che per ogni $w = \xi + i\eta \in W$ vale:

$$J_w(g) = -\begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} f & \partial_y \operatorname{Re} f \\ \partial_x \operatorname{Im} f & \partial_y \operatorname{Im} f \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_\xi \operatorname{Re} f & \partial_\eta \operatorname{Re} f \\ \partial_\xi \operatorname{Im} f & \partial_\eta \operatorname{Im} f \end{pmatrix}.$$

Si osserva che considerando $f$ come funzione nella sola variabile $z$, si ha ancora una funzione olomorfa che soddisfa quindi le equazioni di Cauchy-Riemann. Perciò per ogni $z \in V$ esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \operatorname{Re} f & \partial_y \operatorname{Re} f \\ \partial_x \operatorname{Im} f & \partial_y \operatorname{Im} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

In modo del tutto analogo, considerando $f$ come funzione nella sola variabile $w$, si ha che per ogni $w \in W$ esistono $c, d \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{pmatrix} \partial_\xi \operatorname{Re} f & \partial_\eta \operatorname{Re} f \\ \partial_\xi \operatorname{Im} f & \partial_\eta \operatorname{Im} f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Quindi la matrice jacobiana di $g$ per ogni $w \in W$ assume la seguente forma:

$$J_w(g) = -\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = -\frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} ac + bd & -ad + bc \\ ad - bc & ac + bd \end{pmatrix}.$$

La funzione $g$ risulta quindi olomorfa grazie al Teorema 1.5 e perciò $f^{-1}(0)$ è localmente grafico di funzioni olomorfe. Infine utilizzando quanto trovato nel calcolo di $J_w(g)$ e la relazione (1.1), si ottiene la forma di $g'(w)$ dell'enunciato.

$\square$

**Osservazione 1.37.** Il teorema, vale anche nel caso in cui si verifichi l'ipotesi $\partial_w f(z_0, w_0) \neq 0$. In tal caso il luogo di zeri di $f$ sarà localmente grafico di una funzione olomorfa $g : V \to W$ e dunque si avrà $f^{-1}(0) \cap (V \times W) = \{(z, g(z)) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in V\}$.

# Capitolo 2

# Superfici di Riemann

Introduciamo il concetto di superficie di Riemann, investigando la loro struttura e comportamento relativamente a funzioni olomorfe.

## 2.1 Definizioni ed esempi

Per prima cosa, è necessario spiegare cosa si intende per struttura complessa su uno spazio topologico.

**Definizione 2.1.** Dato $X$ spazio topologico, una *carta complessa* di $X$ è una coppia $(\phi, U)$ dove $U \subseteq X$ è un aperto di $X$, $\phi(U)$ è un aperto di $\mathbb{C}$ e $\phi : U \to \mathbb{C}$ è un omeomorfismo sull'immagine.
Diciamo che $\phi$ è centrata in $p \in U$, se $\phi(p) = 0$.

**Definizione 2.2.** Dato $X$ spazio topologico, diciamo che due carte $(\phi_\alpha, U_\alpha)$ e $(\phi_\beta, U_\beta)$ sono *compatibili* se si verifica una delle seguenti:

- $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$;
- $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è una funzione olomorfa.

La funzione $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ è detta *funzione di transizione.*

**Osservazione 2.3.** Se $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ è olomorfa sul suo dominio, allora anche l'inversa $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ è olomorfa: si ha quindi un biolomorfismo.

**Osservazione 2.4.** Le carte ci permettono di vedere $X$ in $\mathbb{C}$: localmente abbiamo quindi delle coordinate complesse per ogni punto di $X$. Diremo che data $\phi$ carta su X, $z = \phi(x)$ è una coordinata locale di $X$.

**Definizione 2.5.** Sia $X$ uno spazio topologico. Un *atlante* su $X$ è una collezione di carte $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ tali che:

- $\{U_\alpha\}_\alpha$ è un ricoprimento aperto di $X$;
- le carte sono due a due compatibili.

**Definizione 2.6.** Diremo che due atlanti $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ dello spazio $X$, sono *compatibili* se la loro unione è ancora un atlante di $X$, ovvero se le carte di uno sono compatibili con quelle dell'altro.

Notiamo che tale nozione di compatibilità è una relazione di equivalenza sull'insieme degli atlanti di $X$. La seguente definizione è quindi ben posta:

**Definizione 2.7.** Dato $X$ spazio topologico, una *struttura complessa* su $X$ è una classe di equivalenza di atlanti di $X$ rispetto alla relazione di compatibilità. Equivalentemente, una struttura complessa è un atlante massimale di $X$.

In questo modo atlanti compatibili determinano la stessa struttura complessa.

**Esempio 2.8.** Vediamo ora un esempio di due strutture complesse differenti sullo stesso spazio topologico: avremo due atlanti che non risultano compatibili tra loro.

Sia $X = (\mathbb{C}, \tau_\epsilon)$ e definiamo le seguenti carte globali che compongono rispettivamente i due atlanti:

$$\phi : X \to \mathbb{C} \text{ tale che } x + iy \mapsto x + iy;$$
$$\psi : X \to \mathbb{C} \text{ tale che } x + iy \mapsto x - iy;$$

dove $x, y \in \mathbb{R}$. Osserviamo però che la funzione di transizione $h = \psi \circ \phi^{-1}$ non è olomorfa su $\mathbb{C}$ in quanto non rispetta le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\partial_x \operatorname{Re} h = 1 \neq -1 = \partial_y \operatorname{Im} h$$

e dunque non è verificata l'equazione (1.3).
Le carte dei due atlanti non sono compatibili.

**Definizione 2.9.** Una *superficie di Riemann* (o varietà complessa di dimensione uno) è uno spazio topologico Hausdorff (T2), a base numerabile (N2) e dotato di una struttura complessa.

**Osservazione 2.10.** Notiamo che una superficie di Riemann è, in particolare, una varietà topologica di dimensione due. Infatti $X$ è localmente euclideo tramite le carte. Si osservi però, che la richiesta di compatibilità tra le carte rende la struttura molto più rigida di una semplice varietà topologica.

**Esempio 2.11.** $(\mathbb{C}, [(\mathbb{C}, id_{\mathbb{C}})])$ è una superficie di Riemann, dove consideriamo su $\mathbb{C}$ la struttura complessa data dall'atlante composto dalla sola carta globale identità.

**Esempio 2.12.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. $(U, [(U, id_U)])$ è una superficie di Riemann, dove consideriamo su $U$ la struttura complessa data dall'atlante composto dalla sola carta globale identità.

**Esempio 2.13** (Sfera di Riemann)**.** Consideriamo $X = S^2 \subset (\mathbb{R}^3, \tau_\epsilon)$ dotata della topologia di sottospazio, e $\{V_1, V_2\}$ ricoprimento aperto di $X$ dato da $V_1 = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ e $V_2 = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$.
Si considerino poi le seguenti proiezioni stereografiche:

$$\begin{aligned} \phi_1 : V_1 \subset S^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\longmapsto \frac{x}{1-t} + i\frac{y}{1-t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 : V_2 \subset S^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\longmapsto \frac{x}{1+t} - i\frac{y}{1+t} \end{aligned}$$

Si osservi che tali omeomorfismi sono compatibili:

$$\begin{aligned} \phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(V_1 \cap V_2) &\longrightarrow \phi_2(V_1 \cap V_2) \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

è infatti una funzione che risulta olomorfa su $\phi_1(V_1 \cap V_2) = \mathbb{C}^*$ grazie alla Proposizione 1.5. Infatti è di classe $\mathcal{C}^1$ e rispetta le equazioni di Cauchy-Riemann: la sua matrice jacobiana, rispetto alle variabili $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$z = x + iy$, è

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} y^2-x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2-x^2 \end{pmatrix}.$$

Inoltre $X$ è ovviamente T2 e N2 in quanto sottospazio di $\mathbb{R}^3$. Si ha quindi che $(X, [\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\}])$ è una superficie di Riemann e prende il nome di *sfera di Riemann*.

**Osservazione 2.14.** La sfera di Riemann è una varietà complessa di dimensione uno, compatta e connessa. Inoltre ricordiamo che $S^2$ è omeomorfa alla retta proiettiva $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, ed è la compattificazione di Alexandroff del piano $\mathbb{C}$. La sfera di Riemann è infatti spesso indicata con $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

**Esempio 2.15.** Vediamo dunque esplicitamente anche la struttura complessa standard di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
Consideriamo il ricoprimento aperto dato dalle due carte affini standard, con i rispettivi omeomorfismi su $\mathbb{C}$. Siano dunque:

$$U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid z_0 \neq 0\},$$

$$U_1 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid z_1 \neq 0\}$$

aperti tali che $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = U_0 \cup U_1$, e siano date le mappe

$$i_0 : U_0 \to \mathbb{C} \ \text{ tale che } [z_0 : z_1] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_0}\right) = u,$$

$$i_1 : U_1 \to \mathbb{C} \ \text{ tale che } [z_0 : z_1] \mapsto \left(\frac{z_0}{z_1}\right) = v.$$

Osserviamo che $U_0 \cap U_1$ viene mappato omeomorficamente da entrambe le carte in $\mathbb{C}^*$. Le mappe sono inoltre compatibili, infatti:

$$i_1 \circ i_0^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \ \text{ tale che } u \mapsto \frac{1}{u}.$$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è T2 ed N2. Dunque $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}), [\{(U_0, i_0), (U_1, i_1)\}])$ è una superficie di Riemann compatta e connessa.

Vedremo sul finire del capitolo che tale superficie risulta biolomorfa alla sfera di Riemann dell'Esempio 2.13.

**Esempio 2.16** (Grafico di una funzione olomorfa)**.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso e sia $f \in \mathcal{O}(U)$. Consideriamo $X = \{(z, f(z)) \mid z \in U\} \subseteq (\mathbb{C}^2, \tau_\epsilon)$ dotato della topologia di sottospazio. $X$ è dunque T2 e N2.
Sia poi

$$\pi : X \longrightarrow U \text{ tale che } (z, w) \longmapsto z.$$

$(X, \pi)$ è una carta globale per $X$, che rende quest'ultima una superficie di Riemann.

**Definizione 2.17.** Sia $p \in \mathbb{C}[z, w]$ polinomio non costante per cui vale $\mathbb{V}(p, \partial_z p, \partial_w p) = \emptyset$. Il luogo di zeri $X = \mathbb{V}(p) \subseteq \mathbb{C}^2$ è detta *curva piana affine liscia (o non singolare).*

**Proposizione 2.18.** Una curva piana affine liscia ha una struttura canonica di superficie di Riemann.

*Dimostrazione.* Data $X$ come nella Definizione 2.17, dotiamola di una struttura complessa.

Per prima cosa notiamo che per ogni $(z_0, w_0) \in X$ si ha $\partial_z p(z_0, w_0) \neq 0$ o $\partial_w p(z_0, w_0) \neq 0$.
Senza perdere di generalità supponiamo quindi $\partial_z p(z_0, w_0) \neq 0$ (altrimenti il ragionamento è del tutto simmetrico).
Per il Teorema 1.36, esistono $W$ intorno aperto di $w_0$ in $\mathbb{C}$, $V$ intorno aperto di $z_0$ in $\mathbb{C}$ e $g : W \to V$ olomorfa tale che $p^{-1}(0) \cap (V \times W) = \{(g(w), w) \in \mathbb{C}^2 \mid w \in W\}$. Tale insieme è un intorno di $(z_0, w_0)$ in $X$: $X$ è localmente grafico di funzioni olomorfe.
Consideriamo le carte date da tali intorni e dalle corrispondenti mappe locali $\pi$ (come in 2.16). Queste risultano a due a due compatibili:

- se le due carte sono entrambe proiezioni sulla medesima componente e i domini hanno intersezione non banale, allora la funzione di transizione tra esse è l'identità;
- se le due carte proiettano rispettivamente su $z$ e su $w$ e hanno domini che si intersecano non banalmente, allora la funzione di transizione sarà del tipo

$$\pi_z \circ \pi_w^{-1} : V_w \to V_z \text{ tale che } w \mapsto g(w)$$

che è olomorfa per quanto precedentemente osservato.

X è inoltre T2 ed N2 in quanto sottospazio di $\mathbb{C}^2$ e dunque con la struttura complessa sopra descritta, risulta una superficie di Riemann. □

**Definizione 2.19.** Sia $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ polinomio omogeneo non nullo di grado $d \geq 1$ tale che il chiuso proiettivo $\mathbb{V}(F, \partial_{x_0}F, \partial_{x_1}F, \partial_{x_2}F) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ risulta vuoto, allora $X = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ è un insieme ben definito nel piano proiettivo e prende il nome di *curva piana proiettiva liscia*.

**Proposizione 2.20.** Data $X$ come nella Definizione 2.19, considerando le carte standard $U_i = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_i \neq 0\}$, gli insiemi $X \cap U_i$ tramite l'identificazione canonica delle carte con $\mathbb{C}^2$ sono delle curve piane affini lisce. Inoltre vale anche il viceversa: se $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$ è tale che $X_i = \mathbb{V}(F) \cap U_i$ è una curva piana affine liscia in $\mathbb{C}^2$ per ogni $i \in \{0, 1, 2\}$, allora si ha che $X = \mathbb{V}(F)$ è una curva piana proiettiva liscia.

*Dimostrazione.* Mostriamolo per $i = 0$, in quanto i casi con le altre carte sono del tutto analoghi.
Sia dunque $X_0 = X \cap U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_0 \neq 0,\ F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$ e sia $\phi$ l'omeomorfismo tra $U_0$ e $\mathbb{C}^2$ dato dalla seguente funzione:

$$\phi : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \text{ tale che } [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right).$$

Dunque osserviamo che $p = F(1, u, v)$ è un polinomio a due variabili complesse e si ha $X_0 = \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid F(1, u, v) = 0\} = \mathbb{V}(p)$ curva in $\mathbb{C}^2$.
Supponiamo per assurdo che non sia una curva piana affine liscia: esiste $(u_0, v_0) \in \mathbb{V}(p, \partial_u p, \partial_v p)$. Mostriamo che $[1 : u_0 : v_0] \in \mathbb{V}(F, \partial_{x_0}F, \partial_{x_1}F, \partial_{x_2}F)$ contraddicendo così l'ipotesi per cui $X$ era in partenza una curva piana proiettiva liscia.
Si ha infatti:

$$F([1 : u_0 : v_0]) = p(u_0, v_0) = 0$$
$$\partial_{x_1}F([1 : u_0 : v_0]) = \partial_u p(u_0, v_0) = 0;$$
$$\partial_{x_2}F([1 : u_0 : v_0]) = \partial_v p(u_0, v_0) = 0.$$

Per l'ultima derivata ricordiamo la formula di Eulero per i polinomi omogenei:

$$F = \frac{1}{d} \sum_i x_i\, \partial_{x_i} F \quad \text{dove } d \text{ è il grado del polinomio.}$$

Da questa deduciamo che:

$$\begin{aligned}\partial_{x_2}F([1:u_0:v_0]) &= dF([1:u_0:v_0]) - u_0\partial_{x_1}F([1:u_0:v_0]) - v_0\partial_{x_2}F([1:u_0:v_0])\\ &= 0.\end{aligned}$$

Per il viceversa si procede in modo analogo tramite un assurdo. □

Una famiglia importante di curve piane proiettive lisce, è quella delle *curve ellittiche in forma di Legendre.* Vediamole nel prossimo esempio.

**Esempio 2.21.** Sia $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0,1\}$ e consideriamo il seguente insieme:

$$X = \overline{\mathbb{V}(y^2 - x(x-1)(x-\lambda))} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C}).$$

Mostriamo che è liscia. Sia $p(x_0, x, y) = x_0y^2 - x^3 + (\lambda+1)x_0x^2 - \lambda x_0^2 x$ l'omogeneizzazione del polinomio che definisce la curva affine $X \cap U_0$, verifichiamo che non ci siano punti di $X$ che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases}\partial_{x_0}p = 0\\ \partial_x p = 0\\ \partial_y p = 0\end{cases} \iff \begin{cases} y^2 + (\lambda+1)x^2 - 2\lambda x x_0 = 0\\ -3x^2 + 2(\lambda+1)x_0x - \lambda x_0^2 = 0\\ 2x_0y = 0\end{cases}.$$

Osserviamo che partendo dall'ultima equazione, abbiamo due situazioni possibili:

- $x_0 = 0$ e dunque sostituendo nelle restanti equazioni otterremmo che $x = 0$ ed $y = 0$. Questa soluzione però non è accettabile poiché tali coordinate non individuano un punto dello spazio proiettivo;
- $y = 0$. In tal caso ci riduciamo ad analizzare il seguente sistema:

  $$\begin{cases} x[(\lambda+1)x - 2\lambda x_0] = 0\\ -3x^2 + 2(\lambda+1)x_0x - \lambda x_0^2 = 0\end{cases}.$$

  Allora dalla prima equazione otteniamo nuovamente due possibili strade:

  - $x = 0$ e dunque sostituendo nella seconda si ottiene che $x_0 = 0$. Ancora una volta avremmo così trovato delle coordinate che non individuano alcun punto nello spazio proiettivo;

- $x_0 = \frac{\lambda+1}{2\lambda}x$. Sostituendo tale risultato nella seconda si ottiene un'equazione del tipo $(\lambda-1)^2x^2=0$. Essendo $\lambda \neq 1$ per ipotesi, l'unica soluzione possibile è $x=0$. Ma allora anche $x_0=0$ e nuovamente troviamo le tre coordinate nulle;

Riassumendo il sistema non ammette soluzioni e dunque la curva è liscia.

**Proposizione 2.22.** Una curva piana proiettiva liscia ha una struttura canonica di superficie di Riemann.

*Dimostrazione.* Data $X$ come nella Definizione 2.19, dotiamola di una struttura complessa.

Consideriamo i tre aperti $X_i = X \cap U_i$ che ricoprono la curva proiettiva e che abbiamo dimostrato immergersi in $\mathbb{C}^2$ come curve affini, di cui abbiamo già dato la struttura complessa nella Proposizione 2.18.
Consideriamo dunque le seguenti funzioni su $X_0$:

$$\phi_0^{(1)} : X_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } [x:y:z] \mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \mapsto \frac{y}{x}$$

$$\phi_0^{(2)} : X_0 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } [x:y:z] \mapsto \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \mapsto \frac{z}{x}.$$

Siano poi costruite funzioni analoghe per $X_1$ e $X_2$. Tali funzioni, scelte localmente in modo opportuno, sono carte di $X$ e la dotano di struttura complessa. Le funzioni sono infatti tra loro compatibili. Vediamo ad esempio la compatibilità di $\phi_0^{(1)}$ e $\phi_1^{(2)}$.
Sia $p \in X_0 \cap X_1$ e $W_0 \subseteq X_0$, $W_1 \subseteq X_1$ intorni di $p$. Siano poi date le due carte:

$$\phi_0^{(1)} : W_0 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } [x:y:z] \mapsto \frac{y}{x};$$

$$\phi_1^{(2)} : W_1 \longrightarrow \mathbb{C} \text{ tale che } [x:y:z] \mapsto \frac{z}{y}$$

Rinominandole rispettivamente $\phi_0$ e $\phi_1$, mostriamo che $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}$ e la sua inversa, sono entrambe olomorfe. Da quanto osservato per le carte delle curve affini lisce, esiste $g$ funzione olomorfa tale che $X_1$ come curva affine ne è localmente grafico, in un intorno di $p$:

$$\phi_1^{-1} : \phi(W_1) \longrightarrow W_1 \text{ tale che } w \mapsto [g(w):1:w].$$

Quindi

$$\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(W_1 \cap W_0) \longrightarrow W_1 \cap W_0 \longrightarrow \phi_0(W_1 \cap W_0) \text{ è tale che } w \mapsto \frac{1}{g(w)}$$

risulta una funzione olomorfa. Le verifiche per l'inversa e le altre carte sono analoghe.
Infine si osserva che $X$ è T2 ed N2 in quanto sottospazio di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$: $X$ è una superficie di Riemann. □

**Osservazione 2.23.** Le curve piane affini lisce, non sono mai superfici di Riemann compatte perché sempre illimitate. Infatti in tal caso lo spazio topologico $X$ con cui si ha a che fare è il luogo di zeri di un polinomio $p \in \mathbb{C}[z, w]$ come nella Definizione 2.17. Ma allora per ogni $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ fissato, il polinomio $p(\tilde{z}, w)$ è un polinomio a coefficienti complessi in una variabile, che ammette dunque un numero finito di soluzioni (per il teorema fondamentale dell'algebra). Dunque per ogni $\tilde{z} \in \mathbb{C}$ esistono un numero finito di coppie $(\tilde{z}, w_j) \in X$. $X$ è quindi illimitato.

Al contrario, ogni curva piana proiettiva liscia è compatta poiché risulta un chiuso di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, spazio topologico compatto.

Per quanto riguarda la connessione di tali curve piane lisce, la situazione è più delicata e richiede risultati più avanzati.

**Teorema 2.24** (della sezione iperpiana di Lefschetz)**.** Sia $X \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ una varietà algebrica proiettiva di dimensione pura $n$. Sia $H \subseteq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ un iperpiano contenente gli eventuali punti singolari di $X$. Allora, detta $Y = X \cap H$, si ha che la mappa di inclusione $i : Y \hookrightarrow X$ induce in omologia singolare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ l'omomorfismo $i_* : H_k(Y) \to H_k(X)$ tale che:

- $i_*$ è un isomorfismo se $k < n - 1$;
- $i_*$ è suriettivo se $k = n - 1$.

*Dimostrazione.* Vedi [Mil63, Corollario 7.3, parte I]. □

**Corollario 2.25.** Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ un'ipersuperficie algebrica definita da un polinomio omogeneo di grado $d$. Allora l'inclusione $i : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ induce in omologia singolare a coefficienti in $\mathbb{Z}$ l'omomorfismo $i_* : H_k(Y) \to H_k(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ tale che:

- $i_*$ è un isomorfismo se $k < n - 1$;
- $i_*$ è suriettivo se $k = n - 1$.

In particolare, $Y$ è connessa per archi se $n \geq 2$.

*Dimostrazione.* Considero $\nu_{d,n} : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ la $d$-esima mappa di Veronese (si veda [SKKT00, sezione 5.1]). Dunque $\nu(\mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$ risulta una varietà algebrica proiettiva di dimensione $n$ in $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ ed inoltre esiste $H \subseteq \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ iperpiano tale che $\nu^{-1}(H) = Y$ (si veda [Sha77, sezione 4, capitolo I]). Posto $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si ha un isomorfismo (in particolare un omeomorfismo) di coppie: $(X, Y) \simeq (\nu(X), \nu(X) \cap H)$. La seconda coppia rispetta le ipotesi del Teorema 2.24 da cui $i_* : H_k(\nu(X) \cap H) \to H_k(\nu(X))$ è isomorfismo se $k < n - 1$ ed è omomorfismo suriettivo se $k = n - 1$. Poiché i gruppi di omologia risultano in particolar modo invarianti per omeomorfismo, si ha la tesi. Infine, ricordando che $H_0(\mathbb{P}^n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$, si ha che $H_0(Y) \simeq \mathbb{Z}$ per $n \geq 2$ e dunque $Y$ è connessa per archi. □

Osserviamo quindi che le curve piane proiettive risultano connesse per archi grazie al Corollario 2.25 nel caso $n = 2$.

Possiamo trovare superfici di Riemann anche in spazi proiettivi di dimensione maggiore: poniamoci in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, varietà complessa di dimensione $n$. In modo del tutto corrispondente a quanto già osservato per le superfici della Definizione 2.19, presentiamo i seguenti oggetti.

**Definizione 2.26.** Siano $F_1, \ldots, F_{n-1}$ polinomi omogenei in $n+1$ variabili. Sia $X = \bigcap_{i=0}^{n-1} \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid F_i(z_0, \cdots, z_n) = 0\}$ tale che la matrice delle derivate parziali $\left(\partial_{x_j} F_i\right)_{i,j} \in M_{n-1,n+1}(\mathbb{C})$ abbia rango $n - 1$. Tale $X$ è detta *curva liscia a intersezione completa.*

La condizione richiesta sulla matrice, assicura che $X$ sia localmente grafico di $n - 1$ funzioni olomorfe. Le carte sono dunque date da rapporti di appropriate coordinate. In quanto chiuso in uno spazio compatto, $X$ come nella Definizione 2.26, risulta una superficie di Riemann compatta.

**Osservazione 2.27.** Non tutte le superfici di Riemann che in quanto spazi topologici sono sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, sono curve lisce a intersezione completa. Alcune di esse infatti presentano tale struttura solo localmente (cioè gli

$n-1$ polinomi potrebbero essere diversi da un intorno di un punto a uno di un altro). Un esempio classico di tale comportamento è dato dalla cubica gobba in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

**Esempio 2.28.** Consideriamo l'immersione di Veronese $\nu_{1,3} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ tale che $\nu_{1,3}([x : y]) = [x^3 : x^2y : xy^2 : y^3]$. Sia $X$ l'immagine di tale funzione, ossia la cubica gobba. Dette $x_0, x_1, x_2, x_3$ le coordinate di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, osserviamo che $X$ necessita di tre equazioni per essere descritta globalmente:

$$x_0x_3 = x_1x_2; \qquad x_0x_2 = x_1^2; \qquad x_1x_3 = x_2^2.$$

Localmente però ne sono sempre sufficienti solo due di queste poiché quella restante si ricava dalle altre (vedi [Mir95, p. 17, capitolo I]).

Più in generale per quanto riguarda superfici di Riemann proiettive, sarà centrale il concetto di superfici immerse olomorficamente in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, che introdurremo nella prossima sezione.

## 2.2 Funzioni a valori complessi

Conoscendo ora la struttura delle superfici di Riemann, procediamo descrivendo come le funzioni olomorfe si comportano su di esse: incontreremo molti risultati familiari già trattati nel Capitolo 1.

**Definizione 2.29.** Siano $X$ una superficie di Riemann, $p \in X$ e $W \subseteq X$ un intorno aperto di $p$. Una funzione $f : W \to \mathbb{C}$ è *olomorfa nel punto* $p$ se esiste una carta $(\phi, U)$ di $X$ tale che $p \in U$ e $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa in $\phi(p)$ (nel senso della Definizione 1.1).

**Osservazione 2.30.** Data $X$ superficie di Riemann, si osservi che tramite gli opportuni cambi di coordinate da una carta all'altra, se $f$ è olomorfa in $p \in X$ allora per ogni carta $\phi$ che copre $p$ (ossia che ha tale punto nel suo dominio), si ha che $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa in $\phi(p)$.
Notiamo inoltre che $f$ è olomorfa su tutto $W$ intorno di $p \in X$ se e solo se esiste un insieme di carte $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha \subseteq \mathbb{C}\}_\alpha$ tali che:

- $W \subseteq \cup_\alpha U_\alpha$;

- $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ è olomorfa su $W \cap U_\alpha$, per ogni $\alpha$.

**Osservazione 2.31.** Ogni carta complessa $\phi$ su $X$ superficie di Riemann, è una funzione olomorfa sulla medesima superficie. Basta infatti considerare la carta stessa: $\phi \circ \phi^{-1} = id$ è banalmente olomorfa.

**Definizione 2.32.** Data $X$ superficie di Riemann e $W \subseteq X$ aperto, definiamo il seguente insieme:

$$\mathcal{O}(W) := \{f : W \to \mathbb{C} \mid f \text{ è olomorfa su } W\}$$

**Osservazione 2.33.** Dato $W \subseteq X$ aperto di $X$ superficie di Riemann, $\mathcal{O}(W)$ è una $\mathbb{C}$-algebra.

Vediamo ora qualche esempio di funzioni olomorfe.

**Esempio 2.34.** Sia $X = \mathbb{C}_\infty$, determiniamo $\mathcal{O}(X)$. Pensiamo ad $X$ come alla retta proiettiva e dunque consideriamo $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ olomorfa. Siano poi date le due carte standard:

$$\phi_0 : U_0 \to \mathbb{C} \text{ tale che } [x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_1}{x_0} = z$$

$$\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C} \text{ tale che } [x_0 : x_1] \mapsto \frac{x_0}{x_1} = w$$

e ricordiamo che $\phi_0 \circ \phi_1^{-1} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ è tale che $\phi_0 \circ \phi_1^{-1}(w) = \frac{1}{w}$. Inoltre essendo $f$ olomorfa si ha:

$$f(\phi_0^{-1}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{per sviluppo in serie in } z = 0,$$

$$f(\phi_1^{-1}(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \quad \text{per sviluppo in serie in } w = 0.$$

Tali sviluppi valgono per ogni $z, w \in \mathbb{C}$. Inoltre devo imporre la compatibilità di tali funzioni nei punti di $X$ mappati da entrambe le carte: $f \circ \phi_0^{-1} = f \circ \phi_1^{-1}$ su $\mathbb{C}^*$. Quindi si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n \quad \text{con } z = \frac{1}{w}$$

cioè
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n.$$
Ma tale uguaglianza è rispettata se e solo se $a_n = 0 = b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{>0}$ e $a_0 = b_0$. Dunque le uniche funzioni olomorfe su tutta la sfera di Riemann sono le funzioni costanti: $\mathcal{O}(X) \cong \mathbb{C}$.

**Esempio 2.35.** Data $X$ curva piana affine liscia con la struttura complessa definita nella Proposizione 2.18, grazie all'Osservazione 2.31 e all'Osservazione 2.33, possiamo concludere che qualsiasi funzione polinomiale $g(z,w)$ ristretta ad $X$ appartiene a $\mathcal{O}(X)$.
Analogamente per $X$ curva piana proiettiva liscia, se consideriamo $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in X$ tale che $x_0 \neq 0$, si avrà che ogni polinomio $g(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ ristretto su $X$ è una funzione olomorfa nel punto $p$. In particolare possiamo riscrivere il polinomio $g$ come $\frac{G(x,y,x)}{x^d}$ dove $d$ è il grado di $g$ e $G(x,y,z)$ è l'omogenizzazione di $g$. Quindi più in generale dati $G, H$ polinomi omogenei dello stesso grado tali che $H(p) \neq 0$, la funzione $\frac{G}{H}$ ristretta ad $X$, è olomorfa nel punto $p$.

In modo del tutto analogo a quanto definito nel Capitolo 1, anche per funzioni su superfici di Riemann, si parla di singolarità.

**Definizione 2.36.** Sia $X$ superficie di Riemann, $p \in X$ e $U \subseteq X$ intorno aperto di $p$. Data $f : U \setminus \{p\} \subseteq X \to \mathbb{C}$ olomorfa, diciamo che:

- $f$ ha una *singolarità rimovibile in p* se esiste una carta $\phi : U \to V$ tale che $f \circ \phi^{-1}$ ha una singolarità rimovibile in $\phi(p)$ nel senso della Definizione 1.19;

- $f$ ha una *polo in p* se esiste una carta $\phi : U \to V$ tale che $f \circ \phi^{-1}$ ha un polo in $\phi(p)$ nel senso della Definizione 1.21;

- $f$ ha una *singolarità essenziale in p* se esiste una carta $\phi : U \to V$ tale che $f \circ \phi^{-1}$ ha una singolarità essenziale in $\phi(p)$.

Osserviamo con il seguente Lemma che tali definizioni sono ben poste, ossia non dipendono dalla carta scelta per coprire il punto $p$.

**Lemma 2.37.** Sia $X$ superficie di Riemann, $p \in X$ e $U \subseteq X$ intorno aperto di $p$. Allora $f \in \mathcal{O}(U \smallsetminus \{p\})$ presenta nel punto $p$ una singolarità rimovibile (rispettivamente un polo o una singolarità essenziale) se e solo se per ogni carta $\psi$ che copre il punto $p$, $f \circ \psi^{-1}$ ha una singolarità rimovibile (rispettivamente un polo o una singolarità essenziale) nel punto $\psi(p)$.

*Dimostrazione.* Considero $\psi : V \subseteq X \to \mathbb{C}$ carta di $X$, dove $V$ è un aperto di $X$ tale che $p \in V$. Per ipotesi $f$ ha una singolarità rimovibile nel punto $p$, cioè esiste una carta $\phi : U \to \mathbb{C}$ tale che $f \circ \phi^{-1}$ ha una singolarità rimovibile in $\phi(p)$. Per compatibilità delle carte di una superficie di Riemann, $\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \phi(U \cap V)$ è un biolomorfismo che indichiamo con $h$. Si ha quindi che $f \circ (\psi|_{U\cap V})^{-1} = f \circ (h^{-1} \circ \phi|_{U\cap V})^{-1} = (f \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1}) \circ h$. Dato che per ipotesi $f \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1}$ presenta una singolarità rimovibile in $\phi(p)$, precomponendo con $h$ si ottiene una funzione con una singolarità rimovibile in $h^{-1}(\phi(p)) = \psi(p)$. Infatti:

$$\lim_{z \to h^{-1}(p)} |(f \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1})(h(z))| = \lim_{w \to p} |(f \circ (\phi|_{U\cap V})^{-1})(w)| \in \mathbb{C}\,.$$

Si procede in modo analogo per gli altri tipi di singolarità. □

Avendo esposto le principali caratteristiche delle funzioni olomorfe su una superficie di Riemann a valori complessi, possiamo ora definire in modo opportuno cosa si intende per superficie di Riemann proiettiva immersa olomorficamente.

**Definizione 2.38.** Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ una superficie di Riemann. Diciamo che $X$ è *immersa olomorficamente* in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se per ogni $p \in X$ esiste una coordinata omogenea $z_j$ tale che:

- $z_j \neq 0$ nel punto $p$;
- per ogni $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\dfrac{z_k}{z_j}$ è una funzione olomorfa in un intorno di $p$;
- esiste una coordinata omogenea $z_i$ tale che $\dfrac{z_i}{z_j}$ è una coordinata locale di $X$ in un intorno di $p$.

Una superficie di Riemann siffatta, è detta *curva proiettiva liscia*.

**Osservazione 2.39.** Le curve piane proiettive lisce descritte in precedenza, risultano un caso particolare di queste superfici di Riemann appena definite.

Definiamo il concetto di funzione meromorfa su una superficie di Riemann.

**Definizione 2.40.** Una funzione $f : X \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ su $X$ superficie di Riemann, è *meromorfa in* $p$ se esiste una carta $\phi$ tale che $f \circ \phi^{-1}$ è meromorfa in un intorno di $\phi(p)$, nel senso della Definizione 1.25.
Dato poi $W \subseteq X$ aperto, diciamo che $f$ è meromorfa su tutto $W$ se lo è in ogni punto $p \in W$. Indichiamo l'insieme delle funzioni meromorfe su $W$ come $\mathcal{M}(W)$.

**Osservazione 2.41.** Osserviamo che se $W \subseteq X$ è un aperto connesso, allora $\mathcal{M}(W)$ è un campo (segue dalla Proposizione 1.30).

Consideriamo ora $X$ superficie di Riemann, $p \in X$ ed $U \subseteq X$ un intorno aperto del punto $p$. Sia poi $f : U \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e $\phi : U \to V \subseteq \mathbb{C}$ una carta di X. Indichiamo infine la coordinata locale di $X$ vicino a $p$ con $z = \phi(x)$. Avremo quindi che $f \circ \phi^{-1}$ è olomorfa in $V \setminus \{z_0\}$ dove $z_0 = \phi(p)$. Grazie dunque a quanto osservato nel Capitolo 1 come conseguenza della Proposizione 1.14, possiamo sviluppare la nostra funzione in serie di Laurent:

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_n a_n(z - z_0)^n.$$

Tale sviluppo è detto *serie di Laurent di f nel punto p rispetto a* $\phi$.

**Definizione 2.42.** Data $X$ superficie di Riemann e $f$ funzione meromorfa nel punto $p \in X$, sia $\sum_n a_n(z - z_0)^n$ lo sviluppo in serie di Laurent di $f$ nel punto $p$ nella coordinata locale $z$. Allora si pone

$$\mathrm{ord}_p(f) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}.$$

**Lemma 2.43.** Sia $X$ superficie di Riemann, $p \in X$ e $f$ funzione meromorfa nel punto $p$. La definizione di $\mathrm{ord}_p(f)$ è ben posta, cioè non dipende dalla carta scelta per definire la serie di Laurent di $f$ nel punto $p$.

*Dimostrazione.* Consideriamo due carte su $X$ che coprono $p$: siano $U, U' \subseteq X$ intorni aperti di $p$ con le rispettive mappe

$$\phi : U \to V \subseteq \mathbb{C} \text{ con } \phi(x) = z,$$

$$\psi : U' \to V' \subseteq \mathbb{C} \text{ con } \psi(x) = w.$$

Sia $\sum_{n \geq n_0} a_n (z - z_0)^n$ lo sviluppo in serie di Laurent di $f$ in $p$, rispetto a $\phi$ con $c_{n_0} \neq 0$. Sia poi $h$ la funzione di transizione tra le due carte:

$$h = \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap U') \to \phi(U \cap U').$$

$h$ è biolomorfa per compatibilità delle carte. In particolare è invertibile in $w_0 = \psi(p)$, ossia $h'(w_0) \neq 0$. Quindi sviluppando $h$ in serie di potenze centrate in $w_0$ si ha:

$$z = h(w) = h(w_0) + \sum_{n \geq 1} \frac{h^{(n)}(w_0)}{n!}(w - w_0)^n = z_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{h^{(n)}(w_0)}{n!}(w - w_0)^n.$$

Lo sviluppo di $f$ in serie di Laurent in $p$ rispetto alla coordinata $w$ diventa:

$$\sum_{n \geq n_0} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n \geq n_0} a_n \left( \sum_{m \geq 1} \frac{h^{(m)}(w_0)}{m!}(w - w_0)^m \right)^n.$$

Si osserva che, essendo $h'(w_0) \neq 0$, il primo coefficiente non nullo è proprio quello di grado $n_0$. L'ordine è quindi ben definito. $\square$

**Osservazione 2.44.** Dalla Definizione 2.42 di $\mathrm{ord}_p(f)$, si ha che valgono in modo naturale le medesime proprietà esposte nel Lemma 1.17 e nel Lemma 1.24.

Vediamo un esempio significativo di calcolo dell'ordine di una funzione olomorfa su $X$ superficie di Riemann.

**Esempio 2.45.** Sia $X$ curva piana proiettiva liscia definita nell'Esempio 2.21. Consideriamo la curva piana affine liscia data da:

$$X_0 = X \cap U_0 = \mathbb{V}(y^2 - x(x-1)(x-\lambda)) = \mathbb{V}(f) \subseteq \mathbb{C}^2.$$

Detto dunque $p = (0,0)$, calcoliamo $\mathrm{ord}_p(x)$ e $\mathrm{ord}_p(y)$.

Per prima cosa osserviamo che $\partial_x f(x,y) = -3x^2 + 2(1+\lambda)x - \lambda$ e quindi $\partial_x f(p) = -\lambda \neq 0$. Dunque per il Teorema 1.36, esistono $U$ e $V$ rispettivamente intorni aperti di $x = 0$ ed $y = 0$ in $\mathbb{C}$, ed esiste $g : V \to U$ olomorfa tale che:

$$W = X_0 \cap (U \times V) = \{(g(y), y) \mid y \in V\}.$$

Dunque localmente a $p$, consideriamo come carta locale la proiezione $\pi : W \to V$. Data quindi $h \in \mathcal{O}(X)$, avremo che $\mathrm{ord}_p(h) = \mathrm{ord}_0(h \circ \pi^{-1})$.

- Sia $h(x,y) = x$: devo determinare l'ordine in 0 della funzione $h \circ \pi^{-1}$. Si ha:

  $$(h \circ \pi^{-1})(y) = h(g(y), y) = g(y).$$

  Vediamo cosa succede in $y = 0$. Si ha:

  $$g(0) = 0 \quad \text{per come è stata costruita } g;$$

  $$g'(y)|_{y=0} = \left[\frac{2y}{3(g(y))^2 - 2(1+\lambda)g(y) + \lambda}\right]|_{y=0} = 0 \quad \text{per il Teorema 1.36;}$$

  Detto $r(y) = 3(g(y))^2 - 2(1+\lambda)g(y) + \lambda$:

  $$g''(y)|_{y=0} = \left[\frac{2r(y) - 2y(6g(y)g'(y) - 2(1+\lambda)g'(y))}{(r(y))^2}\right]|_{y=0} = 2 \neq 0.$$

  Dunque $\mathrm{ord}_p(x) = 2$.

- Sia $h(x,y) = y$: devo determinare l'ordine in 0 della funzione $h \circ \pi^{-1}$. Si ha:

  $$(h \circ \pi^{-1})(y) = h(g(y), y) = y.$$

  Vediamo cosa succede in $y = 0$:

  $$(h \circ \pi^{-1})(0) = 0; \qquad (h \circ \pi^{-1})'(y)|_{y=0} = 1 \neq 0.$$

  Dunque $\mathrm{ord}_p(y) = 1$.

Infine, illustriamo brevemente alcuni dei teoremi ereditati dall'analisi complessa classica già incontrati nel Capitolo 1.

**Teorema 2.46** (Discretezza di zeri e poli)**.** Sia $X$ superficie di Riemann e $W \subseteq X$ aperto connesso. Sia $f \in \mathcal{M}(W)$. Se $f$ non è identicamente nulla, allora sia il luogo dei suoi zeri che quello dei suoi poli è un sottoinsieme discreto e chiuso di $W$.

*Dimostrazione.* Si osservi che $f$ ha uno zero in $p \in W$ se e solo se $f \circ \phi^{-1}$ ha uno zero in $\phi(p)$, dove $\phi$ è una qualsiasi carta di $X$ che copre il punto $p$. Ricordando inoltre la definizione di poli data nella Definizione 2.36, segue in modo naturale dal Teorema 1.28 che il luogo degli zeri di $f$ e quello dei suoi poli sono sottoinsiemi discreti di $W$.
Mostriamo ora che sono anche chiusi. Indichiamo con $Z$ l'insieme degli zeri di $f$. Visto che $f$ è meromorfa, nei punti in cui si annulla è in particolar modo olomorfa e dunque continua. Quindi $Z$ è un chiuso di $X$ poiché retroimmagine di un chiuso di $\mathbb{C}$ (ossia di $\{0\}$) tramite una funzione continua. Analogamente si ottiene il risultato sull'insieme dei poli, che possono considerarsi zeri della funzione $\frac{1}{f}$. □

**Corollario 2.47.** Data $X$ superficie di Riemann compatta e connessa ed $f \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulla, si ha che $f$ ha un numero finito di zeri e di poli.

*Dimostrazione.* Dal Teorema 2.46, sappiamo che l'insieme degli zeri e quello dei poli, sono chiusi e discreti in $X$. Indichiamo con $Z$ l'insieme degli zeri di $f$. $Z$ è quindi chiuso in un compatto, dunque $Z$ è a sua volta compatto. Inoltre per discretezza di $Z$, per ogni $p \in Z$ esiste un intorno aperto $W_p$ in $X$ tale che $W_p \cap Z = \{p\}$. Dunque considerando il ricoprimento aperto di $Z$ dato da $\{W_p \cap Z\}_{p \in Z}$, deve esistere un sottoricoprimento finito poiché $Z$ è compatto: $Z$ è necessariamente finito.
Analogamente si ottiene il risultato sull'insieme dei poli, che possono considerarsi zeri della funzione $\frac{1}{f}$. □

**Teorema 2.48** (Teorema del prolungamento analitico)**.** Sia $X$ superficie di Riemann e $W \subseteq X$ aperto connesso. Siano $f, g \in \mathcal{M}(W)$. Se $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ha punti di accumulazione in $W$, allora $f = g$ su tutto $W$.

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 1.31. □

**Teorema 2.49** (Principio del massimo)**.** Data $X$ superficie di Riemann, sia $W \subseteq X$ aperto connesso. Sia $f \in \mathcal{O}(W)$ e $p \in W$. Se esiste un intorno $W'$ di $p$ in $W$ tale che per ogni $x \in W'$ si ha $|f(x)| \leq |f(p)|$, allora $f$ è costante su $W$.

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 1.33. □

**Corollario 2.50.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa e sia $f \in \mathcal{O}(X)$. Allora $f$ è una funzione costante e in particolare vale quindi $\mathcal{O}(X) \simeq \mathbb{C}$.

*Dimostrazione.* Essendo $f$ olomorfa, $|f|$ è una funzione continua su $X$ compatta. Per il teorema di Weierstrass, esiste quindi un punto di massimo per $|f|$. Ma allora per il Principio del massimo, $f$ deve necessariamente essere una funzione costante. □

**Osservazione 2.51.** Si osservi che tale corollario è coerente con quanto avevamo calcolato esplicitamente nell'Esempio 2.34.

## 2.3 Funzioni tra superfici di Riemann

Finora sono state trattate solo funzioni da una superficie di Riemann al campo complesso. Estendiamo ora tali concetti introducendo funzioni tra due superfici di Riemann.

**Definizione 2.52.** Siano $X$ e $Y$ due superfici di Riemann. Diciamo che $F : X \to Y$ è una *mappa olomorfa* nel punto $p \in X$, se esistono:

- $U_1 \subseteq X$ intorno aperto di $p$ e $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ carta di $X$,
- $U_2 \subseteq Y$ intorno aperto di $F(p)$ e $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ carta di $Y$,

tali che $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ è olomorfa in $\phi_1(p)$ nel senso della Definizione 1.1.

Diremo che $F$ è olomorfa su $X$, se è olomorfa in ogni suo punto.

**Osservazione 2.53.** La definizione è ben posta, in quanto se è verificata da una coppia di carte, allora risulta vera per qualsiasi altra coppia di carte scelte.

**Osservazione 2.54.** Se $X$ è una superficie di Riemann e $Y = \mathbb{C}$ pensata come superficie di Riemann dotata della struttura complessa data dalla carta identità, le mappe olomorfe $F : X \to Y$ sono esattamente le funzioni olomorfe trattate nella Sezione 2.2.

**Proposizione 2.55.** Si consideri la collezione delle superfici di Riemann. Inoltre per ogni coppia $X, Y$ di superfici, si consideri l'insieme delle mappe olomorfe da $X$ in $Y$. Si ottiene allora una categoria avente come oggetti le superfici di Riemann e come morfismi le mappe olomorfe.

*Dimostrazione.* È sufficiente mostrare che la mappa identità e la normale composizione di morfismi sono funzioni olomorfe e quindi fanno parte dei morfismi dichiarati.

- Per ogni $X$ superficie di Riemann, $id : X \to X$ è una mappa olomorfa;
- Per ogni $X, Y, Z$ superfici di Riemann e per ogni mappa olomorfa $F : X \to Y$, $G : Y \to Z$ si ha che $G \circ F : X \to Z$ è ancora una mappa olomorfa. Infatti, fissato $p \in X$, esistono $U_1$ intorno di $p$ in $X$, $U_2$ intorno di $F(p)$ in $Y$ e $U_3$ intorno di $G(F(p))$ in $Z$ con le rispettive carte $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ tali che $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ e $\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}$ sono funzioni olomorfe rispettivamente in $\phi_1(p)$ e in $\phi_2(F(p))$.
  Osserviamo quindi che $\phi_3 \circ (G \circ F) \circ \phi_1^{-1} = \phi_3 \circ (G \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \circ F) \circ \phi_1^{-1} = (\phi_3 \circ G \circ \phi_2^{-1}) \circ (\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})$. Risulta perciò una funzione olomorfa in $\phi_1(p)$ perché composizione di due funzioni olomorfe: $G \circ F$ è una mappa olomorfa.

□

**Definizione 2.56.** Date $X$ e $Y$ superfici di Riemann, $F : X \to Y$ è un *biolomorfismo* (o *isomorfismo*), se $F$ è olomorfa, biettiva e con inversa olomorfa.

Due superfici di Riemann si dicono *biolomorfe* se esiste un biolomorfismo tra loro.

**Proposizione 2.57.** Le due descrizioni della sfera di Riemann come $S^2$ e come $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono biolomorfe, considerando rispettivamente le due strutture descritte negli Esempi 2.13 e 2.15.

*Dimostrazione.* Utilizzando le notazioni dell'Esempio 2.13 e quelle dell'Esempio 2.15, abbiamo che $V_1 = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ e $V_2 = S^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$.

Definiamo la seguente funzione:

$$F : S^2 \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$$
$$(x, y, t) \longmapsto \begin{cases} [x + iy : 1 - t] & \text{se } (x, y, t) \in V_1 \\ [1 + t : x - iy] & \text{se } (x, y, t) \in V_2 \end{cases}$$

Osserviamo per prima cosa che tale funzione è ben definita. Sia $(x, y, t) \in V_1 \cap V_2$, mostriamo che $[x + iy : 1 - t] = [1 + t : x - iy]$:

$$[x + iy : 1 - t] = \left[\frac{1}{1 - t} : \frac{1}{x + iy}\right] = \left[\frac{1}{1 - t} : \frac{x - iy}{x^2 + y^2}\right] = \left[\frac{1 - t^2}{1 - t} : x - iy\right] =$$
$$= [1 + t : x - iy],$$

dove tutti i passaggi sono leciti perché $x, y \neq 0$ e $t \notin \{1, -1\}$. Inoltre dato che $(x, y, t) \in S^2$ si ha che $x^2 + y^2 + t^2 = 1$.
Mostriamo che è un biolomorfismo. Si osserva che possiamo riscrivere $F$ come segue:

$$F(x, y, t) = \begin{cases} (i_1^{-1} \circ \phi_1)(x, y, t) & \text{se } (x, y, t) \in V_1 \\ (i_0^{-1} \circ \phi_2)(x, y, t) & \text{se } (x, y, t) \in V_2 \end{cases}.$$

In questo modo si vede facilmente che $F$ è olomorfa:

- per ogni $(x, y, t) \in V_1$ considero le carte $\phi_1$ e $i_1$ per cui si ha che $i_1 \circ F \circ \phi_1^{-1} = id_{\mathbb{C}}$;
- per ogni $(x, y, t) \in V_2$ considero le carte $\phi_2$ e $i_0$ per cui si ha che $i_0 \circ F \circ \phi_2^{-1} = id_{\mathbb{C}}$.

Essendo $id_{\mathbb{C}}$ olomorfa, $F$ rispetta la definizione 2.52.
La dimostrazione si conclude con analoghe considerazioni sull'inversa di $F$, definita come:

$$F^{-1} : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to S^2$$
$$[z_0, z_1] \mapsto \begin{cases} (\phi_2^{-1} \circ i_0)([z_0 : z_1]) & \text{se } [z_0 : z_1] \in U_0 \\ (\phi_1^{-1} \circ i_1)([z_0 : z_1]) & \text{se } [z_0 : z_1] \in U_1 \end{cases}.$$

$\square$

Anche per le funzioni olomorfe tra due superfici di Riemann, valgono alcuni dei teoremi già visti. Riportiamo di seguito i principali.

**Teorema 2.58** (Teorema della mappa aperta)**.** Date $X$ e $Y$ superfici di Riemann, $X$ connessa e $F : X \to Y$ olomorfa e non costante, allora $F$ è aperta.

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 1.32. □

**Proposizione 2.59.** Date $X$ e $Y$ superfici di Riemann $F : X \to Y$ olomorfa e iniettiva, allora $F$ è un biolomorfismo con l'immagine.

*Dimostrazione.* La funzione inversa $F^{-1} : F(X) \to X$ è quindi ben definita. Resta da provare che è olomorfa. Ma questo è vero, poiché per ipotesi si ha che per ogni $p \in X$ esistono

- $U_1 \subseteq X$ intorno di $p$ e $\phi_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ carta di $X$,
- $U_2 \subseteq Y$ intorno di $F(p)$ e $\phi_2 : U_2 \to \mathbb{C}$ carta di $Y$

tali che $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ è olomorfa in $\phi_1(p)$. Inoltre è invertibile, aperta e la sua derivata prima risulta non nulla. Quindi $\phi_1 \circ F^{-1} \circ \phi_2^{-1}$ risulta derivabile in senso complesso in $\phi_2(p)$ ed è dunque ivi olomorfa. □

**Teorema 2.60** (Teorema del prolungamento analitico)**.** Date $X$ e $Y$ superfici di Riemann con $X$ connessa, siano $F, G : X \to Y$ mappe olomorfe. Se $F = G$ su un sottoinsieme di $X$ che ha punti di accumulazione, allora $F = G$ globalmente su $X$.

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 1.31. □

**Proposizione 2.61.** Siano $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, $Y$ superficie di Riemann connessa. Data $F : X \to Y$ mappa olomorfa non costante, si ha che $Y$ è compatta ed $F$ è suriettiva.

*Dimostrazione.* Essendo $F$ olomorfa e non costante, dal Teorema 2.58 si ha che $F(X)$ è un aperto in $Y$. Ma $X$ è anche compatta ed $F$ è continua in quanto olomorfa: $F(X)$ è un compatto in $Y$. Dato che $Y$ è T2 perché superficie di Riemann, $F(X)$ è chiuso in quanto compatto in uno spazio T2.

$F(X)$ è quindi un insieme non vuoto sia aperto che chiuso in $Y$: per connessione di $Y$ si ha $F(X) = Y$. Automaticamente $Y$ è compatta e $F$ è suriettiva. $\square$

**Teorema 2.62** (Discretezza delle preimmagini)**.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann con $X$ connessa, $F : X \to Y$ olomorfa e non costante. Allora per ogni $y \in Y$, l'insieme $F^{-1}(y)$ è un chiuso discreto di $X$. In particolare se $X$ è compatta ed $Y$ è connessa, allora l'insieme delle preimmagini è non vuoto e finito per ogni $y \in Y$.

*Dimostrazione.* Sia $y \in Y$. Scegliamo una carta di $Y$ centrata in $y$, nelle coordinate locali $z$. Preso poi $x \in F^{-1}(y)$, scegliamo una carta di $X$ centrata in $x$, nelle coordinate locali $w$. Essendo $F$ olomorfa, si ottiene una funzione olomorfa $g$ espressa nelle coordinate locali scelte: $z = g(w)$. Osserviamo che tale funzione ha uno zero nell'origine, poiché $F(x) = y$. Dunque per discretezza degli zeri del Teorema 1.28, esiste un intorno di $x$ che non contiene altre retroimmagini di $y$. Quindi $F^{-1}(y)$ è discreto. Inoltre è anche un chiuso di $X$, poiché retroimmagine di un chiuso ($\{y\}$), tramite $F$ continua (perché olomorfa). Difatti i singoletti di $Y$ sono chiusi, perché essendo uno spazio T2 è in particolare T1.
Nel caso di superfici compatte, osserviamo che dalla Proposizione 2.61 si ha che $F$ è suriettiva: $F^{-1}(y) \neq \emptyset$ per ogni $y \in Y$. Inoltre l'insieme risulta finito perché discreto in un compatto (analoghi ragionamenti visti nel Teorema 2.47). $\square$

Essere in grado di costruire funzioni olomorfe tra superfici di Riemann diverse, ci permette di vedere le funzioni meromorfe da una superficie di Riemann al piano complesso, in maniera differente.

**Proposizione 2.63.** Data $X$ superficie di Riemann connessa, esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathcal{M}(X)$ e l'insieme delle funzioni olomorfe da $X$ alla sfera di Riemann che non sono la funzione che vale costantemente $\infty$.

*Dimostrazione.* Penso a $\mathbb{C}_\infty$ come alla retta proiettiva complessa, con le carte descritte nell'Esempio 2.15. Dunque $\mathbb{C}_\infty = U_0 \cup [0:1]$ dove $U_0$ si identifica tramite $i_0$ con il piano complesso, mentre $[0:1]$ corrisponde al punto $\infty$.

Sia $f \in \mathcal{M}(X)$ e consideriamo $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ tale che:

$$F(x) = \begin{cases} [1 : f(x)] & \text{se } x \text{ non è un polo di } f \\ [0 : 1] & \text{se } x \text{ è un polo di } f \end{cases}.$$

Proviamo che è olomorfa in ogni punto di $X$:

- per ogni $p \in X$ che non è un polo di $f$, si ha che $F(p) = [1 : f(p)]$ e dunque considero una carta $\phi$ di $X$ definita su un intorno $U$ di $p$ che non contiene punti che siano poli di $f$. Consideriamo inoltre la carta $i_0$ che copre $F(p)$ e osserviamo che $i_0(F(x)) = f(x)$ per ogni $x$ nel suddetto intorno di $p$. Dunque su $\phi(U)$ si ha che $i_0 \circ F \circ \phi^{-1} = f \circ \phi^{-1}$. Tale funzione risulta olomorfa poiché $f$ è olomorfa su $U$ per ipotesi;

- per ogni $p \in X$ polo di $f$, considero anche in questo caso una carta $\phi$ di $X$ definita su un intorno $V$ di $p$ che non contiene altri poli di $f$. Osserviamo che in questo caso è la la carta $i_1$ che copre $F(p) = [0 : 1]$. Si nota che $i_1(F(x)) = \begin{cases} \frac{1}{f(x)} & \text{se } x \in V \setminus \{p\} \\ 0 & \text{se } x = \{p\} \end{cases}$. Inoltre la funzione $\frac{1}{f}$ è olomorfa in $V \setminus \{p\}$ e presenta una singolarità rimovibile in $p$: $\lim_{x \to p} \left| \frac{1}{f(x)} \right| = 0$ perchè $p$ era un polo di $f$. Dunque $i_1 \circ F$ è olomorfa su tutto $V$ in quanto coincide con il reciproco di $f$ a cui è stata rimossa la singolarità. Dunque consideriamo su $\phi(V)$ la funzione $i_1 \circ F \circ \phi^{-1}$ che risulta olomorfa.

Viceversa, data $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ olomorfa, osserviamo che dal Teorema 2.62, $F^{-1}(\infty)$ è un chiuso e discreto di $X$. Considero $f : X \setminus F^{-1}(\infty) \to \mathbb{C}$ tale che $f(x) = i_0(F(x))$. Dunque $[(f, F^{-1}(\infty))] \in \mathcal{M}(X)$: $f$ è olomorfa nel suo dominio di definizione e $F^{-1}(\infty)$ è un chiuso discreto di $X$. Resta da provare che tale insieme è composto da soli poli di $f$: sia $p \in F^{-1}(\infty)$ e sia $\phi$ carta di $X$ che copre $p$, allora

$$\lim_{z \to \phi(p)} |f(\phi^{-1}(z))| = \lim_{x \to p} |i_0(F(x))| = \lim_{[z_0:z_1] \to [0:1]} |i_0([z_0 : z_1])| = \lim_{(z_0,z_1) \to (0,1)} \left| \frac{z_1}{z_0} \right| =$$
$$= +\infty.$$

Quindi $f$ ha un polo in $p$. $\square$

Le funzioni olomorfe tra superfici di Riemann, localmente assumono tutte la medesima forma: operano infatti come un elevamento a potenza.

**Proposizione 2.64** (Forma locale normale)**.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann. Data $F : X \to Y$ non costante e olomorfa nel punto $p \in X$, esiste uno e un solo intero $m \geq 1$ che soddisfa quanto segue: per ogni carta $\phi_2$ di $Y$ centrata in $F(p)$, esiste una carta $\phi_1$ di $X$ centrata in $p$, tale che $\phi_2(F(\phi_1^{-1}(w))) = w^m$.

*Dimostrazione.* Siano $(\psi, U)$ e $(\phi_2, V)$ carte rispettivamente di $X$ e di $Y$, centrate in $p$ e $F(p)$: dato che $F$ è olomorfa, si ha che $h := \phi_2 \circ F \circ \psi^{-1}$ è olomorfa e definita su $\psi(U)$. In particolare $h(0) = \phi_2(F(\psi^{-1}(0))) = \phi_2(F(p)) = 0$ e quindi $m := \mathrm{ord}_0(h) > 0$. Sviluppando $h$ in serie di Laurent in $z = 0$ e raccogliendo il termine di grado minimo, si ha:

$$h(z) = z^m r(z),$$

dove $r$ è una funzione olomorfa tale che $\mathrm{ord}_0(r) = 0$. A meno di restrizioni, posso considerare che $r(z) \neq 0$ per ogni $z \in \psi(U)$.

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo
$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}^* \arrow[d, "t"] \\ \psi(U) \arrow[ur, "s"] \arrow[r, "r"] & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$
, dove:

- $t$ è il rivestimento ad $m$ fogli di $\mathbb{C}^*$, ossia $t(u) = u^m$;
- $s$ è il sollevamento della mappa $r$ rispetto al rivestimento $t$.

Osserviamo che tale $s$ esiste poiché, a meno di restrizione, possiamo sempre considerare che $U$ sia omeomorfo a un palla in $\mathbb{C}$, dunque le ipotesi del sollevamento delle mappe continue sono soddisfatte. Inoltre $s$ è olomorfa poiché, dalla commutatività del diagramma, risulta composizione di funzioni olomorfe in quanto $t$ è un biolomorfismo locale. Vale quindi $h(z) = (zs(z))^m$. Denominiamo $\eta(z) := zs(z)$: tale funzione è olomorfa perché prodotto di funzioni olomorfe; in particolare $\eta'(0) \neq 0$. Per il teorema di invertibilità locale, $\eta$ è quindi localmente invertibile in un intorno di 0. Definiamo $\phi_1 := \eta \circ \psi$: è ancora una carta di $X$ centrata in $p$. Indicando con la variabile $w$ le coordinate locali relative a quest'ultima carta, la funzione di transizione tra $\phi_1$ e $\psi$ è data da $(\phi_1 \circ \psi^{-1})(z) = \eta(z) = w$. Si ha dunque:

$$(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1})(w) = (\phi_2 \circ F \circ \psi^{-1})(\eta^{-1}(w)) = h(\eta^{-1}(w)) = h(z) = (zs(z))^m = w^m.$$

L'unicità di $m$ segue osservando che abbiamo in realtà provato che in un intorno di $p$, la funzione $F$ presenta esattamente $m$ preimmagini per ogni punto vicino a $F(p)$. Dunque l'intero trovato non dipende dalle carte scelte, ma è intrinseco alla struttura di $F$. □

**Definizione 2.65.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann ed $F : X \to Y$ olomorfa. Dato $p \in X$, definiamo la *molteplicità di $F$ nel punto $p$* come l'intero $m$ determinato dalla Proposizione 2.64.

Indichiamo $m$ con $\text{mult}_p(F)$.

**Osservazione 2.66.** Dalla Proposizione 2.64 si ha $\text{mult}_p(F) \geq 1$.

**Esempio 2.67.** Ogni carta $(\phi, U)$ su una superficie di Riemann $X$, ha molteplicità 1 in ogni punto. Infatti basta considerare $\phi$ stessa come carta su $U \subseteq X$ e l'identità come carta su $\phi(U) \subseteq \mathbb{C}$. Si ottiene in questo modo che la funzione $\phi$ in coordinate locali diventa $(id \circ \phi \circ \phi^{-1})(z) = z$. Dunque $\text{mult}_p(\phi) = 1$ per ogni $p \in U$.

Nel caso di funzioni meromorfe su una superficie di Riemann, vi è il legame più auspicabile tra l'ordine della funzione in un punto e la molteplicità della corrispondente mappa olomorfa.

**Lemma 2.68.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa. Data $f \in \mathcal{M}(X)$ e la corrispondente funzione olomorfa $F : X \to \mathbb{C}_\infty$, si ha:

- se $p \in X$ non è un polo di $f$, allora $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$;
- se $p \in X$ è un polo di $f$, allora $\text{mult}_p(F) = -\text{ord}_p(f)$.

*Dimostrazione.*

- Sia $p \in X$ un punto che non è polo di $f$. La funzione $f(x) - f(p)$ presenta uno zero in $x = p$. Sia $\phi$ carta su $X$ tale che $\phi(x) = z$ e $\phi(p) = z_0$. Analogamente considero $i_0$ carta su $\mathbb{C}_\infty$ tale che $i_0(y) = w$ e $i_0(F(p)) = w_0$. Trasliamo tali coordinate:

- $\phi_1(x) := (t_{z_0} \circ \phi)(x) = t_{z_0}(z) = z - z_0$ è carta su $X$ centrata in $p$;
- $\phi_2(y) := (t_{w_0} \circ i_0)(y) = t_{w_0}(w) = w - w_0$ è carta su $\mathbb{C}_\infty$ centrata in $F(p)$.

Dalla dimostrazione della Proposizione 2.64 e dalla costruzione di $F$ si ha:

$$\text{mult}_p(F) = ord_0(\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}) = ord_0((t_{w_0} \circ f) \circ \phi_1^{-1}) = ord_p(f - f(p)).$$

Dunque $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p(f - f(p))$.

- Sia ora $p \in X$ un polo di $f$. Allora per come è stata costruita $F$ nella Proposizione 2.63, si ha che $\text{mult}_p(F) = \text{ord}_p \frac{1}{f} = -\text{ord}_p(f)$.

□

Restringiamoci per un momento, a osservare le mappe olomorfe tra superfici di Riemann connesse e compatte.

**Definizione 2.69.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann connesse e compatte. Data $F : X \to Y$ non costante e olomorfa, definiamo il *grado di $F$* come segue:

$$\deg(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F),$$

dove $y$ è un punto qualsiasi di $Y$.

Tale definizione è ben posta, grazie alla seguente Proposizione.

**Proposizione 2.70.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann connesse e compatte. Data $F : X \to Y$ non costante e olomorfa, per ogni $y \in Y$ si ha che $d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p(F)$ non dipende da $y$.

*Dimostrazione.* Vogliamo provare che la funzione $d : Y \to \mathbb{Z}$ tale che $y \mapsto d_y(F)$, è localmente costante. Essendo $Y$ connesso, ciò implica che $d$ è una funzione costante e la tesi sarà così provata.

Consideriamo una funzione $f : B_0(1) \to B_0(1)$ tale che $f(z) = z^m$ per un certo intero $m \geq 1$. In questo caso $f$ è olomorfa e suriettiva. In particolare notiamo che i punti $z \neq 0$ hanno esattamente $m$ preimmagini distinte di molteplicità 1, mentre per $z = 0$ si ha una sola preimmagine che ha però molteplicità $m$. Quindi la nostra tesi è verificata.

Dunque se mostriamo che la $F$ della nostra ipotesi, si scrive localmente (cioè in un intorno di $y \in Y$) come unione disgiunta di funzioni del tipo appena presentato, avremo che localmente la mappa è costante. Proviamo quindi che preso un intorno nell'immagine, la sua retroimmagine si scrive come unione disgiunta di intorni su ognuno dei quali $F$, in coordinate locali, si comporta come elevamento a potenza.

Fissiamo un punto $y \in Y$. Dal Teorema 2.62, sia $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ la fibra di $y$. Scegliamo dunque una carta di $Y$ centrata in $y$, nelle coordinate locali $w$. Analogamente consideriamo $n$ carte su $X$ rispettivamente centrate in $x_1, \dots, x_n$, nelle coordinate locali $z_1, \dots, z_n$. Dalla Proposizione 2.64, si ha che per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ esiste $m_i \in \mathbb{Z}$ tali che $F$ in un intorno di $x_i$ si esprime in coordinate locali come $w = z_i^{m_i}$. Dunque $F$ ristretta a tali intorni di $x_i$, si comporta in coordinate locali esattamente come voluto.

Resta solo da provare che nell'intorno di $y$, non vi siano degli elementi le cui preimmagini non sono contenute negli intorni degli $x_i$. Supponiamo per assurdo che esistano degli elementi arbitrariamente vicini ad $y$, le cui preimmagini non sono contenute in nessuno degli intorni di $x_i$. Esiste quindi una successione di punti in $X$ non appartenenti agli intorni di $x_i$, tale che l'immagine di tale successione tramite $F$, converge ad $y$. Essendo $X$ compatto possiamo estrarre dalla successione dei punti, una sottosuccessione $\{t_n\}_n$ convergente a un punto $x \in X$. Inoltre si ha che $\{F(t_n)\}_n$ converge in $Y$ al punto $y \in Y$. Dunque per continuità di $F$ deve valere che $F(x) = y$: $x$ è perciò uno degli $x_i$. Ma questo è assurdo poiché nessuno degli elementi della successione $\{t_n\}_n$ si trovava in un intorno di $x_i$. □

**Corollario 2.71.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann compatte e connesse. $F : X \to Y$ olomorfa è un isomorfismo se e solo se $\deg(F) = 1$.

*Dimostrazione.* Se $F$ è un isomorfismo, allora è in particolar modo una funzione iniettiva e dunque per ogni $y \in F$ esiste una e una sola $x \in X$ tale che $F(x) = y$. Si ha perciò che $\deg(F) = \mathrm{mult}_x(F)$. Se per assurdo tale molteplicità fosse maggiore di 1, allora avremmo che in un intorno di $x$, $F$ in coordinate locali assume la forma $z \mapsto z^m$ con $m \geq 2$. Questo implicherebbe che in un intorno di $x$, $F$ non sarebbe più iniettiva e ciò è assurdo.

Viceversa, se $\deg(F) = 1$ si ha che per ogni $y \in Y$ vale:

$$\sum_{x \in F^{-1}(y)} \mathrm{mult}_x(F) = 1.$$

Essendo però $\mathrm{mult}_x(F) \geq 1$, si ha che necessariamente deve esistere uno e un solo punto $x \in X$ tale che $F(x) = y$. $F$ è quindi iniettiva e dalla Proposizione 2.59 si ha che $F$ è un isomorfismo con l'immagine. La prova si conclude osservando che $F$ è in realtà anche suriettiva grazie alla Proposizione 2.61. □

Da tali considerazioni segue la seguente proposizione interessante.

**Proposizione 2.72.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa e sia $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che ha un unico polo nel punto $p \in X$. Supponiamo inoltre che tale polo sia di ordine 1. Allora $X$ è isomorfa alla sfera di Riemann.

*Dimostrazione.* Costruisco la funzione olomorfa tra $X$ e $\mathbb{C}_\infty$, corrispondente alla funzione $f$ come visto nella Proposizione 2.63. Dunque per ipotesi e per il Lemma 2.68 si ha $\deg(F) = \sum_{x \in F^{-1}(\infty)} \mathrm{mult}_x(F) = \mathrm{mult}_p(F) = -\mathrm{ord}_p(f) = 1$. Ma allora dal Corollario 2.71, si ha che $F$ è un isomorfismo. □

Concludiamo il capitolo, presentando un risultato sull'ordine delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann connessa e compatta.

**Proposizione 2.73.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e compatta. Sia $f \in \mathcal{M}(X)$ non costante, allora

$$\sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f) = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ la funzione olomorfa associata ad $f$. Siano $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ gli zeri di $F$ (e dunque anche di $f$) e $\{y_1, \dots, y_m\} \subseteq X$ le retroimmagini di $\infty$ (ossia i poli di $f$). Dunque per come è definito il grado si ha:

$$\sum_{x_i} \mathrm{mult}_{x_i}(F) = deg(F) = \sum_{y_i} \mathrm{mult}_{y_i}(F).$$

Ricordiamo inoltre che gli unici punti di $f$ che hanno ordine non nullo sono i suoi zeri e i suoi poli. Dunque, utilizzando anche il Lemma 2.68 si ha:

$$\sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ord}_{x_i}(f) + \sum_{j=1}^{m} \mathrm{ord}_{y_j}(f) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mult}_{x_i}(F) - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{mult}_{y_j}(F) = 0.$$

□

# Capitolo 3

# 1-forme su superfici di Riemann

Un ulteriore strumento importante in questa trattazione, sono le 1-forme. Presentiamo questi oggetti in maniera classica, evidenziando alcuni aspetti che riutilizzeremo in seguito.

Procediamo introducendo per prime le 1-forme differenziabili su un aperto di $\mathbb{C}$.
Dato $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, il modo più spontaneo di definire una 1-forma differenziale su tale insieme, è pensare ad $U$ come aperto di $\mathbb{R}^2$. Dunque prendiamo $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ a valori complessi su $U$ e definiamo $\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$, 1-forma differenziale su $U$.

È bene però evitare di ricondurre tutto alle variabili reali. Ricordiamo che le variabili $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $z = x + iy$, sono legate alla variabile complessa $z$ e alla sua coniugata $\overline{z}$, dalle seguenti relazioni:

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}; \tag{3.1}$$

$$y = \frac{z - \overline{z}}{2i}. \tag{3.2}$$

Tali relazioni si riflettono in modo naturale anche sui differenziali e si pone per definizione:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}z + \mathrm{d}\overline{z}}{2}; \tag{3.3}$$

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - \mathrm{d}\overline{z}}{2i}. \tag{3.4}$$

Dunque ogni 1-forma differenziale su un aperto $U \subseteq \mathbb{C}$ si può scrivere solo in funzione di $z, \overline{z}$ e dei loro differenziali: data $\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$ sostituendo con le relazioni appena descritte si ha $\omega = f(z)\mathrm{d}z + g(z)\mathrm{d}\overline{z}$. Diamo quindi la seguente definizione.

**Definizione 3.1.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e siano date $f(z)$ e $g(z)$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^\infty$ a valori complessi su $U$. Allora una *1-forma* $\mathcal{C}^\infty$ *su* $U$ è del tipo:

$$\omega = f(z)\mathrm{d}z + g(z)\mathrm{d}\overline{z}.$$

Diremo che $\omega$ è una 1-forma nella coordinata $z$. Indichiamo il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di tali 1-forme con $\mathcal{E}^{(1)}(U)$.

**Definizione 3.2.** Siano $\omega_1, \omega_2$ 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ rispettivamente sugli aperti $U_1 \subseteq \mathbb{C}$ e $U_2 \subseteq \mathbb{C}$, tali che:

$$\omega_1 = f_1(z)\mathrm{d}z + g_1(z)\mathrm{d}\overline{z};$$

$$\omega_2 = f_2(w)\mathrm{d}w + g_2(w)\mathrm{d}\overline{w}.$$

Detta infine $h : U_2 \to U_1$ funzione olomorfa, diciamo che $\omega_1$ *si trasforma in* $\omega_2$ *tramite* $h$ se $\begin{cases} f_2(w) = f_1(h(w))h'(w) \\ g_2(w) = g_1(h(w))\overline{h'(w)} \end{cases}$. Scriveremo che $\omega_2 = h^*\omega_1$.

**Osservazione 3.3.** Si osservi che tale definizione è coerente con la regola della catena dei differenziali. Infatti vale che $\mathrm{d}z = h'(w)\mathrm{d}w$ e $\mathrm{d}\overline{z} = \overline{h'(w)}\mathrm{d}\overline{w}$. Notiamo anche che la parte relativa a $\mathrm{d}z$ si trasforma in quella relativa a $\mathrm{d}w$ e analogamente per le parti coniugate.

Estendiamo dunque la definizione di tali oggetti alle superfici di Riemann.

**Definizione 3.4.** Sia $X$ superficie di Riemann. Una funzione $f : X \to \mathbb{C}$ è di *classe* $\mathcal{C}^\infty$ se per ogni punto $p \in X$ esiste una carta $(\phi, U)$ tale che $p \in U$ e per cui $f \circ \phi^{-1}$ è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ sul suo dominio di definizione. Indichiamo l'insieme di tali funzioni con $\mathcal{C}^\infty(X)$.

Osserviamo che tale definizione è ben posta, poiché cambiando carta, la condizione resta verificata.

**Definizione 3.5.** Sia $X$ superficie di Riemann e sia $\mathcal{A} = [\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha]$ la sua struttura complessa. Una *1-forma* $\mathcal{C}^\infty$ *su* $X$ è una collezione $\{\omega_\alpha\}_\alpha$ di 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ sugli aperti $\phi_\alpha(U_\alpha)$, tali che per ogni coppia di carte $\phi_\alpha$ e $\phi_\beta$ aventi domini che si intersecano non banalmente, si ha che $\omega_\alpha$ si trasforma in $\omega_\beta$ tramite la funzione di transizione $h = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$.

Indichiamo con $\mathcal{E}^{(1)}(U)$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ definite su $U \subseteq X$ aperto di una superficie di Riemann.

**Osservazione 3.6.** Dati $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ e $\mathcal{A}' = \{(\psi_\alpha, V_\alpha)\}_\alpha$ due atlanti della superficie $X$ si ha che la 1-forma definita dalla collezione $\{\omega_\alpha\}_\alpha$ sugli aperti $\phi_\alpha(U_\alpha)$ è uguale a quella determinata da $\{\eta_\alpha\}_\alpha$ definita sugli aperti $\psi_\alpha(V_\alpha)$ se per ogni $U_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ si ha $\eta_\beta = (\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1})^* \omega_\alpha$.

Grazie all'Osservazione 3.3, possiamo parlare di 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ solo in $\mathrm{d}z$ o solo in $\mathrm{d}\overline{z}$. Risulta quindi ben posta la seguente definizione.

**Definizione 3.7.** Una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ su una superficie di Riemann, è del *tipo* $(1,0)$ se è localmente della forma $f(z)\mathrm{d}z$. Invece è del *tipo* $(1,0)$ se è localmente della forma $g(z)\mathrm{d}\overline{z}$.

Indichiamo con $\mathcal{E}^{(1,0)}(U)$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ di tipo $(1,0)$ definite su $U \subseteq X$ aperto di una superficie di Riemann. Analogamente indichiamo $\mathcal{E}^{(0,1)}(U)$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle 1-forme $\mathcal{C}^\infty$ di tipo $(0,1)$.

**Osservazione 3.8.** La proprietà di essere del tipo $(1,0)$ o $(0,1)$ è intrinseca alla 1-forma in questione, ossia è invariante per cambio di carta (basti infatti ricordare come le espressioni in coordinate locali della 1-forma si trasformano l'una nell'altra).

**Osservazione 3.9.** Si osserva che $\mathcal{E}^{(1)}(U) = \mathcal{E}^{(1,0)}(U) \oplus \mathcal{E}^{(0,1)}(U)$, con $U \subseteq X$ aperto di una superficie di Riemann.

Consideriamo $X$ superficie di Riemann ed $f$ funzione di classe $\mathcal{C}^\infty$ su $X$. Presa una carta $(\phi, U)$ di $X$, possiamo esprimere $f$ localmente nella variabile $z$ e costruire la seguente 1-forma:

$$\mathrm{d}f = \partial_z f \mathrm{d}z + \partial_{\overline{z}} f \mathrm{d}\overline{z}.$$

In particolare si hanno le seguenti due 1-forme:

$$\partial f = \partial_z f \mathrm{d}z \qquad \overline{\partial} f = \partial_{\overline{z}} \mathrm{d}\overline{z}.$$

Si ha quindi $\mathrm{d}f = \partial f + \overline{\partial} f$. Vediamo quindi che tali 1-forme sono in realtà ben definite globalmente su tutta $X$, ossia che le definizioni locali sono tra loro compatibili tramite i cambi di coordinate.

**Lemma 3.10.** Sia $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$ con $X$ superficie di Riemann. Allora $\mathrm{d}f \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, ossia è una 1-forma ben definita globalmente.

*Dimostrazione.* Siano $(\phi_1, U_1)$ e $(\phi_2, U_2)$ due carte di $X$ tali che $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dette $z$ e $w$ rispettivamente le coordinate locali della prima e della seconda carta. Abbiamo quindi le seguenti due definizioni locali di $\mathrm{d}f$:

$$\omega_1 = \partial_z(f \circ \phi_1^{-1})\mathrm{d}z + \partial_{\overline{z}}(f \circ \phi_1^{-1})\mathrm{d}\overline{z};$$

$$\omega_2 = \partial_w(f \circ \phi_2^{-1})\mathrm{d}w + \partial_{\overline{w}}(f \circ \phi_2^{-1})\mathrm{d}\overline{w}.$$

Sia $h = \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$, ossia $z = h(w)$. Ricordiamo che tale funzione di transizione è olomorfa e vale dunque $\partial_w h(w) = h'(w)$. Dunque grazie alla regola della catena si ha:

$$\partial_z(f \circ \phi_1^{-1})(h(w))h'(w) = \partial_w(f \circ \phi_1^{-1} \circ h)(w) = \partial_w(f \circ \phi_2^{-1})(w);$$

$$\partial_{\overline{z}}(f \circ \phi_1^{-1})(h(w))\overline{h'(w)} = \partial_{\overline{w}}(f \circ \phi_1^{-1} \circ h)(w) = \partial_{\overline{w}}(f \circ \phi_2^{-1})(w).$$

Quindi $\omega_1$ si trasforma in $\omega_2$ tramite $h$: $\mathrm{d}f$ è ben definita su $X$. La prova mostra anche la buona definizione delle 1-forma $\partial f$ e $\overline{\partial} f$. □

**Osservazione 3.11.** Data $X$ superficie di Riemann ed $f \in \mathcal{C}^\infty(X)$, allora $f \in \mathcal{O}(X)$ se e solo se $\overline{\partial} f = 0$.

*Dimostrazione.* Considero $f$ in coordinate locali e dunque la penso come funzione da un aperto di $\mathbb{C}$ a valori complessi. Osserviamo inoltre che dalle relazioni (3.1) e (3.2) si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\partial_x \operatorname{Re} f - \partial_y \operatorname{Im} f\right) + \frac{i}{2}\left(\partial_x \operatorname{Im} f + \partial_y \operatorname{Re} f\right).$$

Dunque se $f$ è olomorfa, rispetta le condizioni di Cauchy-Riemann e dunque automaticamente si ha $\partial_{\overline{z}} f = 0$. Viceversa se vale $\partial_{\overline{z}} f = 0$, per la Proposizione 1.5 si ha che $f$ è olomorfa. □

**Definizione 3.12.** Data $X$ superficie di Riemann e $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, diciamo che $\omega$ è *esatta* su un aperto $U \subseteq X$ se esiste una funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, tale che $\mathrm{d}f = \omega$ su $U$.

**Definizione 3.13.** Data $X$ superficie di Riemann e $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, $\omega$ è *localmente esatta* su $X$ se esiste un ricoprimento aperto $\{U_\alpha\}_\alpha$, tale che per ogni $\alpha$, $\omega|_{U_\alpha}$ è una 1-forma esatta su $U_\alpha$.

**Definizione 3.14.** Sia $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$ dove $X$ è una superficie di Riemann. Localmente nelle carte di un'atlante di $X$, si ha $\omega$ della forma $\omega = f(z)\mathrm{d}z + g(z)\mathrm{d}\overline{z}$. Si dice dunque che $\omega$ è *chiusa* su tale carta se $\partial_z g = \partial_{\overline{z}} f$.

**Proposizione 3.15.** Ogni 1-forma esatta è chiusa. In generale non è vero il viceversa

*Dimostrazione.* Si veda [Car63, Proposizione 3.1 e Proposizione 4.2, capitolo II]) □

Definiamo ora le 1-forme olomorfe.

**Definizione 3.16.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una *1-forma olomorfa* su $U$ è del tipo:

$$\omega = f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $f \in \mathcal{O}(U)$.

In modo analogo a quanto visto per le 1-forme $\mathcal{C}^\infty$, vale la Definizione 3.2 per cui possiamo trasformare una 1-forma olomorfa in un'altra tramite una funzione olomorfa tra gli aperti di definizione delle forme in questione.

**Definizione 3.17.** Sia $X$ superficie di Riemann e sia $\mathcal{A} = [\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha]$ la sua struttura complessa. Una *1-forma olomorfa su $X$* è una collezione di 1-forme olomorfe $\{\omega_\alpha\}$ sugli aperti $\phi_\alpha(U_\alpha)$, tali che per ogni coppia di carte $\phi_\alpha$ e $\phi_\beta$ aventi domini che si intersecano non banalmente, si ha che $\omega_\alpha$ si trasforma in $\omega_\beta$ tramite il cambio di coordinate $h = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$.

Indichiamo con $\Omega^{(1)}(U)$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle 1-forme olomorfe definite su $U \subseteq X$ aperto di una superficie di Riemann.

**Lemma 3.18.** Data $X$ superficie di Riemann e $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$, allora $\omega \in \Omega^{(1)}(X)$ se e solo se $\omega$ è del tipo $(1,0)$ ed è chiusa.

*Dimostrazione.* Considero $U \subseteq X$ aperto, dunque $\omega$ nelle coordinate locali di $U$ si scrive come $\omega = f(z)\mathrm{d}z$, con $f$ funzione olomorfa. Osserviamo dunque che $\partial_z g - \partial_{\overline{z}} f = 0 - 0 = 0$ per l'Osservazione 3.11 e poiché $\omega$ non presenta una funzione $g$ associata al differenziale $\mathrm{d}\overline{z}$. Quindi $\omega$ è chiusa e di tipo $(1, 0)$.

Viceversa se prendiamo $\omega$ una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ chiusa del tipo $(1, 0)$, allora $\omega$ è localmente del tipo $\omega = f(z)\mathrm{d}z$. Essendo chiusa vale che $\partial_z g = \partial_{\overline{z}} f$ cioè $\partial_{\overline{z}} f = 0$ Quindi per l'Osservazione 3.11, si ha che $f$ è olomorfa. □

**Esempio 3.19.** Determiniamo l'insieme delle 1-forme olomorfe definite globalmente sulla sfera di Riemann. Utilizziamo per le carte le notazioni dell'Esempio 2.15. Sia dunque $\omega$ una 1-forma olomorfa su $\mathbb{C}_\infty$. Questa nelle coordinate locali $v$ della carta $(i_1, U_1)$ sarà della forma

$$\omega = f(v)\mathrm{d}v,$$

dove $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$. Dunque cambiando carta tramite la funzione di transizione $h = i_1 \circ i_0^{-1}$, otteniamo che $\omega$ nelle coordinate locali $u$ della carta $(i_0, U_0)$ diventa:

$$\omega = f(h(u))h'(u)\mathrm{d}u = -f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u.$$

Affinché $\omega$ sia 1-forma olomorfa, $f\left(\frac{1}{u}\right)\frac{1}{u^2}$ deve essere una funzione olomorfa. Ma, per questione di ordini, questo accade se e solo se $f$ è la funzione nulla. Dunque $\Omega^{(1)}(\mathbb{C}_\infty) = \{0\}$.

**Proposizione 3.20.** Sia $X = \overline{\mathbb{V}(y^2 - x(x-1)(x-\lambda))} \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ curva ellittica in forma di Legendre come nell'Esempio 2.21. Allora esiste una 1-forma olomorfa definita su tutto $X$ che non si annulla mai.

*Dimostrazione.* Indichiamo con $[x_0 : x_1 : x_2]$ le coordinate di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Per prima cosa definiamo una 1-forma olomorfa su $X \cap U_0$. Tale porzione di curva è omeomorfa tramite la carta standard $i_0$ alla curva affine liscia $\mathbb{V}(y^2 - x(x-1)(x-\lambda)) \subseteq \mathbb{C}^2$ dove $i_0 : X \cap U_0 \to \mathbb{C}^2$ tale che $i_0([x_0 : x_1 : x_2]) = (\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}) = (x, y)$. Sui punti di quest'ultima curva vale dunque la seguente uguaglianza:

$$y^2 = x^3 - (1 + \lambda)x^2 + \lambda x.$$

Da questa ricaviamo le seguenti 1-forme:

$$2y\mathrm{d}y = (3x^2 - 2(1 + \lambda)x + \lambda)\mathrm{d}x. \tag{3.5}$$

Definiamo quindi una 1-forma $\omega$ su $X \cap U_0$ che localmente risulta:

$$\omega|_{X\cap U_0} = \begin{cases} \frac{2}{3x^2-2(1+\lambda)x+\lambda}\mathrm{d}y = g_1(x)\mathrm{d}y & \text{se } 3x^2 - 2(1+\lambda)x + \lambda \neq 0 \\ \frac{1}{y}\mathrm{d}x = g_2(y)\mathrm{d}x & \text{se } y \neq 0 \end{cases}.$$

Tale forma è olomorfa e ben definita su tutto $X \cap U_0$:

- $g_1$ e $g_2$ sono olomorfe sui loro domini;
- le forme coincidono nell'intersezione dei domini grazie alla relazione (3.5);
- non ci sono punti in cui $y = 0$ e $3x^2 - 2(1+\lambda)x + \lambda = 0$ poiché la curva è liscia.

Vogliamo infine estendere $\omega$ ad 1-forma olomorfa su tutta la curva $X$: resta da definirla su una carta contente i punti di $X \cap H_0 = \{[0 : 0 : 1]\}$. Considero dunque $X \cap U_2$ a cui appartiene $[0 : 0 : 1]$. Tale porzione di curva è omeomorfa alla curva affine liscia $\mathbb{V}(p)$ tramite la carta $i_2 : X \cap U_2 \to \mathbb{C}^2$ tale che $i_2([x_0 : x_1 : x_2]) = (\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_0}) = (u, v)$, dove si ha $p(u, v) = u - v^3 + (1 + \lambda)v^2u - \lambda vu^2$. Tramite la funzione $\phi = i_0 \circ i_2^{-1}$, trasformiamo l'1-forma $\omega$ definita su $X \cap U_0 \cap U_2$ esprimendola nelle coordinate locali $u, v$. Osserviamo che $x_0 \neq 0 \neq x_2$ e dunque in particolare $y \neq 0$ ossia $\omega = \frac{1}{y}\mathrm{d}x$. Inoltre $\phi(u, v) = \left(\frac{v}{u}, \frac{1}{u}\right)$. Quindi si ha:

$$\phi^*\omega = u\left(\frac{1}{u}\mathrm{d}v - \frac{v}{u^2}\mathrm{d}u\right) = \mathrm{d}v - \frac{v}{u}\mathrm{d}u.$$

Vogliamo provare che tale 1-forma è olomorfa e ben definita in un intorno di $i_2([0 : 0 : 1]) = (0, 0)$. Osservando che $\partial_u p|_{(0,0)} = (1+(\lambda+1)v^2-2\lambda vu)|_{(0,0)} = 1 \neq 0$, possiamo applicare il Teorema 1.36: esiste $F$ funzione olomorfa tale che in un intorno di $u = 0$ si ha $u = F(v)$. Essendo olomorfa si sviluppa in serie di Laurent centrata in $v = 0$: $u = cv^n + v^{n+1}h(v)$ dove $n = \mathrm{ord}_0 F$ e $h$ è olomorfa. Ricordiamo che stiamo lavorando con $(u, v) \in \mathbb{V}(p)$ e vale dunque la seguente uguaglianza:

$$u = v^3 - (1 + \lambda)v^2u + \lambda vu^2.$$

Si ha dunque:

$$u = v^3 + v^5\tilde{h}(v)$$

dove $\tilde{h}(v)$ è olomorfa tale che $\mathrm{ord}_0(\tilde{h}) = 0$. Allora:

$$\phi^*\omega = \left(1 - \frac{v}{v^3 + v^5\tilde{h}(v)}\partial_v(v^3 + v^5\tilde{h}(v))\right)\mathrm{d}v = g(v)\mathrm{d}v.$$

Tale forma risulta olomorfa perché $g(v)$ è somma di funzioni olomorfe, in particolare il quoziente è olomorfo poiché frazione di funzioni olomorfe di ordine 3 (e dunque funzione complessivamente di ordine 0). Inoltre $g(v)$ non si annulla mai in un intorno di $v = 0$. Ho così costruito una 1-forma definita su tutta la curva $X$ che non si annulla mai. □

Infine possiamo parlare di 1-forme meromorfe.

**Definizione 3.21.** Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto. Una *1-forma meromorfa* su $U$ è un'espressione formale del tipo:

$$\omega = f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $f \in \mathcal{M}(U)$.

Come nei casi precedenti, vale anche per le 1-forme meromorfe la nozione di trasformazione di una 1-forma in un'altra tramite una mappa olomorfa.

**Definizione 3.22.** Sia $X$ superficie di Riemann e sia $\mathcal{A} = [\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha]$ la sua struttura complessa. Una *1-forma meromorfa su* $X$ è una collezione di 1-forme meromorfe $\{\omega_\alpha\}$ sugli aperti $\phi_\alpha(U_\alpha)$, tali che per ogni coppia di carte $\phi_\alpha$ e $\phi_\beta$ aventi domini che si intersecano non banalmente, si ha che $\omega_\alpha$ si trasforma in $\omega_\beta$ tramite il cambio di coordinate $h = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$.

Indichiamo con $\mathcal{M}^{(1)}(U)$ il $\mathbb{C}$-spazio vettoriale delle 1-forme meromorfe definite su $U \subseteq X$ aperto di una superficie di Riemann.

Sia $X$ superficie di Riemann e $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U)$ dove $U \subseteq X$ è un intorno di $p \in X$. Scegliamo una carta di $X$ centrata in $p$, nella coordinata locale $z$. Dunque possiamo scrivere $\omega = f(z)\mathrm{d}z$ dove $f$ è una funzione meromorfa nel punto $z = 0$. In questo caso possiamo definire l'ordine di $\omega$.

**Definizione 3.23.** L'*ordine di $\omega$ nel punto $p$* è l'ordine della funzione $f$ nel punto $z = 0$.

**Proposizione 3.24.** La definizione di ordine di $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U)$ con $U$ intorno di $p \in X$, dove $X$ è una superficie di Riemann, è ben posta.

*Dimostrazione.* Mostriamo infatti che è indipendente dalla carta scelta. Sia $\phi$ carta di $X$ centrata nel punto $p$, tale che $z = \phi(x)$. Dunque si ha $\omega$ nella coordinata $z$ si scrive come $\omega_\phi = f(z)\mathrm{d}z$, dove $f$ è meromorfa in $z = 0$. Dalla definizione abbiamo quindi $\mathrm{ord}_p(\omega) = \mathrm{ord}_0(f)$.
Consideriamo ora un'altra carta $\psi$, centrata in $p$ e tale che $w = \psi(x)$. Detta $h = \phi \circ \psi^{-1}$ funzione di transizione tra le due carte, abbiamo che $\omega$ nella coordinata $w$ sarà della forma:

$$\omega_\psi = f(h(w))h'(w)\mathrm{d}w.$$

Allora si ha:

$$\mathrm{ord}_0((f \circ h) \cdot h') = \mathrm{ord}_0(f \circ h) + \mathrm{ord}_0(h') = \mathrm{ord}_{h(0)}(f) + \mathrm{ord}_0(h').$$

Ma $h(0) = 0$ e quindi $\mathrm{ord}_{h(0)}(f) = \mathrm{ord}_0(f)$. Inoltre $\mathrm{ord}_0(h') = 0$ poiché $h'$ è olomorfa in $w = 0$ ed è non nulla perché $h$ è un biolomorfismo. $\square$

**Osservazione 3.25.** Presa $X$ superficie di Riemann, $p \in X$, $U \subseteq X$ intorno di $p$ e $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(U)$, allora $\omega$ è olomorfa nel punto $p$ se e solo se $\mathrm{ord}_p(w) \geq 0$ (vedi Lemma 1.24).

**Definizione 3.26.** Data $X$ superficie di Riemann, $p \in X$ e $\omega$ una 1-forma meromorfa, diciamo che:

- $p$ è un *polo* di $\omega$ di ordine $n$ se $\mathrm{ord}_p(w) = -n < 0$;
- $p$ è uno *zero* di $\omega$ di ordine $n$ se $\mathrm{ord}_p(w) = n > 0$;

**Osservazione 3.27.** Gli zeri e i poli di una 1-forma meromorfa, formano insiemi discreti, in quanto corrispondono a zeri e poli di funzioni meromorfe da aperti di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$ (vedi Teorema 1.28).

Avendo a disposizione delle 1-forme, vi sono una serie di operazioni che possiamo effettuare per ottenerne altre. Vediamo per prima la moltiplicazione tra una 1-forma e una funzione.

Data $X$ superficie di Riemann, considero $g \in \mathcal{C}^\infty(X)$ ed $\omega \in \mathcal{E}^{(1)}(X)$. Possiamo quindi definire una 1-forma $g\omega$. Tale 1-forma è localmente del tipo $gf_1\mathrm{d}z + gf_2\mathrm{d}\overline{z}$, dove $\omega$ è localmente $f_1\mathrm{d}z + f_2\mathrm{d}\overline{z}$. L'1-forma $g\omega$ così definita, gode in modo naturale delle seguenti proprietà:

- se $\omega$ è del tipo $(1,0)$, allora anche $g\omega$ è del tipo $(1,0)$;
- se $\omega$ è del tipo $(0,1)$, allora anche $g\omega$ è del tipo $(0,1)$
- se $\omega$ è olomorfa e $g \in \mathcal{O}(X)$, allora $g\omega$ è olomorfa;

In modo analogo si definisce l'1-forma $g\omega$ dove $g \in \mathcal{M}(X)$ ed $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. In questo caso vale $\mathrm{ord}_p(g\omega) = \mathrm{ord}_p(g) + \mathrm{ord}_p(\omega)$.

**Lemma 3.28.** Siano $\omega_1$ e $\omega_2$ due 1-forme meromorfe non identicamente nulle su $X$ superficie di Riemann. Allora, esiste un'unica funzione $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $\omega_2 = f\omega_1$.

*Dimostrazione.* Sia $(\phi, U)$ carta su $X$, nelle coordinate locali $z$. Dunque in tali coordinate locali le 1-forme sono del tipo: $\omega_1 = g_1(z)\mathrm{d}z$ e $\omega_2 = g_2(z)\mathrm{d}z$, dove $g_1, g_2$ sono funzioni meromorfe su $\phi(U)$ aperto di $\mathbb{C}$. Definiamo dunque $h := \frac{g_2}{g_1}$ che è ancora funzione meromorfa su $\phi(U)$. La funzione $f = h \circ \phi$ risulta meromorfa su $U$ e svolge il ruolo voluto. Concludiamo la prova osservando che $f$ così trovata è ben definita ossia non dipende dalla carta locale scelta. Sia infatti $(\psi, V)$ un'altra carta su $X$ nelle coordinate locali $w$ e sia $r = \phi \circ \psi^{-1}$ funzione di transizione tra le carte. Allora rispetto alla coordinata $w$ le 1-forme sono: $\omega_1 = g_1(r(w))r'(w)\mathrm{d}w$ e $\omega_2 = g_2(r(w))r'(w)\mathrm{d}w$. Dunque avremo:

$$\tilde{f} = \left(\frac{(g_1 \circ r)r'}{(g_2 \circ r)r'}\right) \circ \psi = \frac{g_1}{g_2} \circ r \circ \psi = h \circ \phi = f.$$

□

**Proposizione 3.29.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa. Sia $\omega \in \Omega^{(1)}(X)$ mai nulla su $X$, allora per ogni $U \subseteq X$ aperto si ha il seguente isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{O}(U) &\longrightarrow \Omega^{(1)}(U) \\ f &\longmapsto f\omega. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Proviamo che $\varphi$ è iniettiva. Sia $f \in \mathcal{O}(U)$ tale che $f\omega = 0$. Sia $(\phi, V)$ una carta di $U$ tale che $\omega$ in coordinate locali è della forma $\omega = g(z)\mathrm{d}z$. Dunque su $V$ si ha $f\omega = f(z)g(z)\mathrm{d}z$. Ma tale forma è nulla se e solo se $f$ nelle coordinate locali $z$ è identicamente nulla ($\omega$ non si annulla mai per ipotesi e quindi la funzione $g$ non è mai nulla). Ripetendo il ragionamento su ogni carta di $X$, si ha che $f$ è nulla su tutte le carte e dunque si ha $f \equiv 0$. Per provare che $\varphi$ è anche suriettiva, consideriamo $\mu \in \Omega^{(1)}(U)$. Dunque sulla carta $(\phi, V)$ avremo:

$$\omega = g(z)\mathrm{d}z \qquad \mu = h(z)\mathrm{d}z.$$

Poniamo $f_V(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$ che è olomorfa poiché $g$ non si annulla mai. Definiamo $f$ in questo modo su ogni carta, resta dunque solo da mostrare che tali definizioni si incollano bene e si ha che $\varphi(f) = \mu$. Considero dunque un'altra carta $(\psi, W)$ nelle coordinate locali $w$:

$$\omega = a(w)\mathrm{d}w \qquad \mu = b(w)\mathrm{d}w.$$

Detta $r = \phi \circ \psi^{-1}$ si ha $\begin{cases} a(w) = g(r(w))r'(w) \\ b(w) = h(r(w))r'(w) \end{cases}$ e dunque:

$$f_W(w) = \frac{b(w)}{a(w)} = \frac{h(r(w))}{g(r(w))} = f_V(r(w)).$$

□

**Corollario 3.30.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa che ammette una 1-forma olomorfa mai nulla, allora si ha $\Omega^{(1)}(X) \simeq \mathbb{C}$.

*Dimostrazione.* Segue dalla Proposizione 3.29 e dal Corollario 2.50. □

**Osservazione 3.31.** Per $X$ curva ellittica in forma di Legendre abbiamo costruito esplicitamente una 1-forma olomorfa mai nulla (si veda Proposizione 3.20) e dunque avremo che $\Omega^{(1)}(X) \simeq \mathbb{C}$.

Un'altra importante operazione è il pullback di una 1-forma da una superficie di Riemann ad un'altra.

**Definizione 3.32.** Siano $X$ e $Y$ due superfici di Riemann e sia $F : X \to Y$ una funzione olomorfa. Data $\omega$ una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ su $Y$, vogliamo definire una 1-forma su $X$. Sia $(\phi, U)$ una carta su $X$ e $(\psi, V)$ una carta su $Y$ tale che $F(U) \subseteq V$. Indichiamo le coordinate locali delle due carte, rispettivamente con $w = \phi(x)$ e $z = \psi(y)$; sia $h = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$. Quindi, se $\omega$ nella coordinata $z$ si scrive come $\omega = f(z)\mathrm{d}z + g(z)\mathrm{d}\overline{z}$ , definiamo la 1-forma $F^*\omega$ nella coordinata $w$ come:

$$F^*\omega = f(h(w))h'(w)\mathrm{d}w + g(h(w))\overline{h'(w)}\mathrm{d}\overline{w}.$$

$F^*\omega$ è detta *pullback di $\omega$ tramite $F$* ed è una 1-forma $\mathcal{C}^\infty$ ben definita su $X$.

L'1-forma $F^*\omega$ gode delle seguenti proprietà in modo naturale:

- se $\omega$ è del tipo $(1,0)$, allora anche $F^*\omega$ è del tipo $(1,0)$;
- se $\omega$ è del tipo $(0,1)$, allora anche $F^*\omega$ è del tipo $(0,1)$;
- se $\omega$ è olomorfa, allora anche $F^*\omega$ è olomorfa;
- se $\omega$ è meromorfa, allora anche $F^*\omega$ è meromorfa.

**Osservazione 3.33.** Tutte le volte che abbiamo trasformato una 1-forma $\omega_1$ in una 1-forma $\omega_2$, in realtà non abbiamo fatto altro che delle operazioni di pullback tramite la funzione di trasformazione $h$ (si veda la Definizione 3.2). Nel caso delle forme su superfici di Riemann, il pullback è stato effettuato tramite le mappe di cambio carta.

Concludiamo questo breve capitolo con un lemma sull'ordine di queste 1-forme di pullback.

**Lemma 3.34.** Siano $X$ e $Y$ due superfici di Riemann. Siano inoltre $F : X \to Y$ olomorfa e $\omega$ una 1-forma meromorfa su $Y$. Fissato $p \in X$, si ha:

$$\mathrm{ord}_p(F^*\omega) = (1 + \mathrm{ord}_{F(p)}(\omega))\,\mathrm{mult}_p(F) - 1.$$

*Dimostrazione.* Siano $z$ e $w$ rispettivamente le coordinate locali centrate in $p$ ed $F(p)$, tramite le quali $F$ assume la forma locale normale: $z \mapsto z^n = w$, dove $n = \mathrm{mult}_p(F)$. L'1-forma $\omega$ nelle coordinate $w$ si scrive come $\omega = (cw^k + \sum_{j \geq k} c_j w^{k+1})\mathrm{d}w$ dove $k = \mathrm{ord}_{F(p)}(\omega)$ e $c \in \mathbb{C}^*$. Abbiamo quindi che $F^*\omega$ nelle coordinate $z$ è:

$$F^*\omega = \left( cz^{nk} + \sum_{j \geq k} c_j z^{n(k+1)} \right) (nz^{n-1})\mathrm{d}z.$$

Ma allora $\mathrm{ord}_p(F^*\omega) = nk + n - 1$, come volevasi dimostrare. $\square$

# Capitolo 4

# Divisori su superfici di Riemann

Introduciamo in questo capitolo i divisori e gli spazi di funzioni ed 1-forme ad essi associati.

## 4.1 Alcune tipologie di divisori e la lineare equivalenza

**Definizione 4.1.** Sia $X$ una superficie di Riemann, un *divisore su* $X$ è una funzione $D : X \to \mathbb{Z}$ a supporto discreto, ossia tale che $\{p \in X \mid D(p) \neq 0\}$ è un sottoinsieme discreto di $X$. Indichiamo il divisore $D$ come:

$$D := \sum_{p \in X} D(p) \cdot p.$$

L'insieme dei divisori su $X$ si indica con $\mathrm{Div}(X)$.

**Osservazione 4.2.** $\mathrm{Div}(X)$ è un gruppo rispetto alla somma punto a punto. In particolare se $X$ è una superficie di Riemann compatta, il supporto di $D$ è finito e dunque $\mathrm{Div}(X)$ è il gruppo abeliano libero sui punti di $X$.

**Definizione 4.3.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e sia $D \in \mathrm{Div}(X)$, allora il *grado di* $D$ *su* $X$ è:

$$\deg(D) = \sum_{p \in X} D(p).$$

Tale definizione è ben posta grazie alla finitezza del supporto di $D$.

**Definizione 4.4.** Sia $X$ una superficie di Riemann connessa ed $f \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulla. Definiamo il divisore associato ad $f$ come:

$$\operatorname{div}(f) := \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p.$$

Un tale divisore prende il nome di *divisore principale* su $X$. Indichiamo l'insieme di questi divisori con $\operatorname{PDiv}(X)$.

Osserviamo che tale divisore rispetta la Definizione 4.1, ricordando che solo zeri e poli di una funzione meromorfa hanno ordine non nullo e che vale la discretezza data dal Teorema 2.46.

**Osservazione 4.5.** I divisori principali ereditano in modo del tutto naturale le proprietà dell'ordine delle funzioni meromorfe. Date $f, g \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulle, con $X$ superficie di Riemann connessa, si ha:

- $\operatorname{div}(fg) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$;
- $\operatorname{div}(\frac{f}{g}) = \operatorname{div}(f) - \operatorname{div}(g)$;
- $\operatorname{div}(\frac{1}{f}) = -\operatorname{div}(f)$.

Dunque $\operatorname{PDiv}(X)$ è un sottogruppo di $\operatorname{Div}(X)$: è l'immagine dell'omomorfismo di gruppi abeliani dato da $\operatorname{div} : \mathcal{M}(X) \to \operatorname{Div}(X)$ che associa ad ogni funzione meromorfa il rispettivo divisore principale.

Possiamo poi scrivere ogni divisore principale come somma di due divisori non negativi nel modo seguente.

**Definizione 4.6.** Dato $\operatorname{div}(f)$ divisore principale su $X$ superficie di Riemann, poniamo:

- $\operatorname{div}_0(f) := \displaystyle\sum_{\{p \in X | \operatorname{ord}_p(f) > 0\}} \operatorname{ord}_p(f) \cdot p$, detto il *divisore degli zeri di* $f$;
- $\operatorname{div}_\infty(f) := \displaystyle\sum_{\{p \in X | \operatorname{ord}_p(f) < 0\}} (-\operatorname{ord}_p(f)) \cdot p$, detto il *divisore dei poli di* $f$.

Si ha quindi $\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}_0(f) - \operatorname{div}_\infty(f)$.

**Lemma 4.7.** Data $X$ superficie di Riemann compatta e connessa e $f \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulla, allora si ha $\deg(\operatorname{div}(f)) = 0$.

*Dimostrazione.* Se $f$ è costante allora la tesi è vera poiché la funzione non presenta né zeri né poli e dunque $\operatorname{div}(f)$ è il divisore nullo. D'altra parte se $f$ è non costante, il risultato segue banalmente dalla Proposizione 2.73. $\square$

**Proposizione 4.8.** Se $X$ è la sfera di Riemann allora vale anche il viceversa: se $D \in \operatorname{Div}(X)$ è tale che $\deg(D) = 0$ allora $D \in \operatorname{PDiv}(X)$.

*Dimostrazione.* Pensiamo ad $X$ come a $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Avremo che:

$$D = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \lambda_i - \left( \sum_{i=1}^{n} m_i \right) \cdot \infty,$$

dove i $\lambda_i \in \mathbb{C}$ sono punti distinti in $X$. Dunque $D = \sum_{i=1}^{n} m_i \, (\lambda_i - \infty)$ e dato che $\operatorname{PDiv}(X)$ è un sottogruppo di $\operatorname{Div}(X)$, ci basta provare che $\lambda_i - \infty \in \operatorname{PDiv}(X)$. Esibiamo dunque una funzione $f \in \mathcal{M}(X)$ con un solo zero di ordine 1 in $\lambda_i$ ed un solo polo semplice in $\infty$:

$$f(x) = x - \lambda_i \text{ per ogni } x \in \mathbb{C}$$

è una funzione che presenta un solo zero in $x = \lambda_i$. Cambiando coordinate per leggere $f$ nella carta che contiene il punto $\infty$, si deduce immediatamente che $f$ ha un polo semplice in quest'ultimo punto. $\square$

**Definizione 4.9.** Sia $X$ una superficie di Riemann ed $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ non identicamente nulla. Definiamo il divisore associato ad $\omega$ come:

$$\operatorname{div}(\omega) := \sum_{p \in X} \operatorname{ord}_p(\omega) \cdot p.$$

Un tale divisore prende il nome di *divisore canonico* su $X$. Indichiamo l'insieme di questi divisori con $\operatorname{KDiv}(X)$.

Osserviamo anche in questo caso che tale divisore rispetta la Definizione 4.1, grazie all'Osservazione 3.27.

**Osservazione 4.10.** Dal Lemma 3.28 si ha che $\operatorname{KDiv}(X)$ è un laterale di $\operatorname{PDiv}(X)$ in $\operatorname{Div}(X)$.

**Definizione 4.11.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann con $X$ connessa. Sia $F : X \to Y$ funzione olomorfa non costante. Fissato $q \in Y$, definiamo il seguente divisore:

$$F^*(q) := \sum_{p \in F^{-1}(q)} \mathrm{mult}_p(F) \cdot p \ \in \mathrm{Div}(X).$$

Esso prende il nome di *divisore della preimmagine di* $q$.

Si nota che tale divisore rispetta la Definizione 4.1 grazie al Teorema 2.62.

**Osservazione 4.12.** Osserviamo che se $X$ e $Y$ sono superfici di Riemann connesse e compatte, allora $\deg(F^*(q)) = \deg(F)$ per ogni $q \in Y$ (si veda la Definizione 2.69).

Da questa costruzione, possiamo definire il concetto più generale di pullback di un divisore.

**Definizione 4.13.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann con $X$ connessa ed $F : X \to Y$ olomorfa e non costante. Dato $D = \sum_{q \in Y} n_q \cdot q \in \mathrm{Div}(Y)$, si pone:

$$F^*(D) := \sum_{q \in Y} n_q F^*(q) \in \mathrm{Div}(X).$$

Tale divisore è detto *pullback di* $D$ *su* $X$.

**Lemma 4.14.** Siano $X$ e $Y$ superfici di Riemann con $X$ connessa, allora:

- la funzione $F^* : \mathrm{Div}(Y) \to \mathrm{Div}(X)$ che associa ad ogni divisore di $Y$ il pullback tramite $F$, è un omomorfismo di gruppi;
- il pullback di un divisore principale, è ancora un divisore principale;
- se $X$ e $Y$ sono compatte, allora $\deg(F^*(D)) = \deg(F)\deg(D)$.

*Dimostrazione.* Vedi [Mir95, Lemma 1.17, capitolo V]. □

Vediamo ora in che modo è possibile relazionare tra loro divisori definiti su una stesso spazio. Data $X$ superficie di Riemann, possiamo definire una relazione di equivalenza sull'insieme $\mathrm{Div}(X)$.

**Definizione 4.15.** Siano $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$. Si dice che $D_1$ e $D_2$ sono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è un divisore principale. Scriveremo quindi

$$D_1 \sim D_2 \iff D_1 - D_2 \in \mathrm{PDiv}(X).$$

**Lemma 4.16.** Data $X$ superficie di Riemann si ha:

1. la relazione $\sim$ descritta nella Definizione 4.15, è una relazione di equivalenza;

2. $D \sim 0$ se e solo se $D \in \mathrm{PDiv}(X)$;

3. se $X$ è compatta e connessa, allora due divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado;

4. se $f \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulla, allora $\mathrm{div}_0(f) \sim \mathrm{div}_\infty(f)$;

5. presi due qualsiasi divisori canonici, essi sono linearmente equivalenti. In particolare, su $X$ superficie compatta e connessa, il grado dei divisori canonici è un invariante. Inoltre ogni divisore linearmente equivalente a un divisore canonico, è a sua volta canonico.

*Dimostrazione.* Le prime due seguono in modo ovvio dalla definizione di lineare equivalenza. Per quanto riguarda la terza, considero $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ tali che $D_1 \sim D_2$. Allora esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$. In particolare, utilizzando il Lemma 4.7, avremo:

$$\deg(D_1) = \deg(\mathrm{div}(f)) + \deg(D_2) = 0 + \deg(D_2) = \deg(D_2).$$

La quarta segue in modo immediato dalla Definizione 4.6. Infine l'ultima segue dall'Osservazione 4.10 $\square$

**Definizione 4.17.** Sia $X$ superficie di Riemann, allora definiamo il *gruppo delle classi (divisoriali)* di $X$ come:

$$\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{Div}(X)/_\sim.$$

Sia $X$ compatta e connessa. Allora grazie al punto 3 del Lemma 4.16 si ha che la seguente funzione è ben definita:

$$\deg : \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{tale che } \deg([D]) = \deg(D).$$

Tale mappa è un omomorfismo di gruppi suriettivo: fissato un punto $p \in X$, per ogni $m \in \mathbb{Z}$ basta infatti considerare il divisore $D = m \cdot p$.

**Proposizione 4.18.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa. Allora $\deg : \mathrm{Cl}(X) \to \mathbb{Z}$ è un isomorfismo se e solo se $X$ è la sfera di Riemann.

*Dimostrazione.* Se $X$ è la sfera di Riemann, allora si ha $\mathrm{Ker}(\deg) = \{[D] \in \mathrm{Cl}(X) \mid \deg(D) = 0\} = \{[0]\}$. Infatti per l'Osservazione 4.8, sappiamo che i divisori di grado zero sono tutti principali e in particolare sono tutti equivalenti al divisore nullo. Dunque deg è un isomorfismo.

Viceversa se deg è un isomorfismo, supponiamo per assurdo che $X$ non sia biolomorfa alla sfera di Riemann. Consideriamo dunque $p, q \in X$ distinti e definiamo il divisore $D = p - q$. Osserviamo che $D$ non è principale: se infatti lo fosse, esisterebbe $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $\mathrm{div}(f) = D$ ossia esisterebbe una funzione olomorfa $F : X \to \mathbb{C}_\infty$ tale che $F^{-1}(0) = \{p\}$ e $F^{-1}(\infty) = q$. $F$ sarebbe quindi una mappa di grado 1 e dunque per il Corollario 2.71 sarebbe un isomorfismo, ma ciò è impossibile poiché $X$ non è biolomorfa a $\mathbb{C}_\infty$. Dunque $D$ è un divisore su $X$ di grado zero che non è principale cioè $[D] \neq [0]$. Ma allora deg non sarebbe un isomorfismo. □

Osserviamo inoltre che è possibile considerare una relazione d'ordine parziale sull'insieme dei divisori.

**Definizione 4.19.** Data $X$ superficie di Riemann e $D \in \mathrm{Div}(X)$, diciamo che:

- $D \geq 0$ se $D(p) \geq 0$ per ogni $p \in X$. In questo caso diremo che $D$ è un divisore *effettivo*;
- $D > 0$ se $D \geq 0$ e $D \neq 0$.

Analogamente per $D \leq 0$ e $D < 0$.

Osserviamo che qualsiasi divisore $D$ si può scrivere in modo unico come $D = P - N$, dove $P$ ed $N$ sono due divisori effettivi a supporto disgiunto (come ad esempio visto per i divisori principali nella Definizione 4.6).

**Osservazione 4.20.** Notiamo dunque che se $f \in \mathcal{M}(X)$ allora $f$ è olomorfa su $X$ se e solo se $\mathrm{div}(f) \geq 0$. Analogamente se $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$ allora $\omega$ è una 1-forma olomorfa se e solo se $\mathrm{div}(\omega) \geq 0$.

Dato un numero finito di divisori su $X$, è possibile definire il divisore minimo.

**Definizione 4.21.** Siano $D_1, \dots, D_n \in \mathrm{Div}(X)$, il *divisore minimo* è definito come:

$$D(p) := \min\{D_1(p), \dots, D_n(p)\}$$

per ogni $p \in X$.

## 4.2 Spazi di funzioni e di 1-forme associati ai divisori

**Definizione 4.22.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e $D \in \mathrm{Div}(X)$, lo *spazio delle funzioni meromorfe con poli limitati da* $D$ è:

$$L(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Il nome dato a tale insieme risulta chiaro nel momento in cui si esplicitano le condizioni richieste sulle funzioni che compongono tale insieme. Infatti, affinché $f \in L(D)$, si deve avere che $\mathrm{ord}_p(f) \geq -D(p)$ per ogni $p \in X$. Questo implica che:

- se esiste almeno un punto $p \in X$ tale che $D(p) > 0$, la funzione $f$ può ammettere poli di ordine inferiore ai valori positivi assunti da $D$;
- se esiste almeno un punto $p \in X$ tale che $D(p) < 0$, la funzione $f$ deve avere zeri di ordine superiore ai valori assoluti delle immagini negative di $D$.

Equivalentemente stiamo richiedendo che, per ogni $p \in X$, la serie di Laurent di $f$ centrata in $p$ non presenti termini di grado inferiore a $-D(p)$.

**Osservazione 4.23.** Osserviamo che $L(D)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Inoltre dati $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ tali che $D_1 \leq D_2$ si ha che $L(D_1) \subseteq L(D_2)$. Nel caso in cui consideriamo il divisore nullo, si ha che lo spazio $L(0)$ coincide con $\mathcal{O}(X)$, grazie all'Osservazione 4.20.

**Lemma 4.24.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, e sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che $\deg(D) < 0$. Allora $L(D) = \{0\}$.

*Dimostrazione.* Sia $f \in L(D)$ e supponiamo per assurdo $f \neq 0$. Allora poniamo $E = \mathrm{div}(f) + D \in \mathrm{Div}(X)$. Tale divisore è effettivo poiché $f \in L(D)$ e dunque $\deg(E) \geq 0$. Abbiamo quindi $0 \leq \deg(E) = \deg(\mathrm{div}(f)) + \deg(D) = \deg(D)$, per il Lemma 4.7. Ma ciò è assurdo perché per ipotesi avevamo $\deg(D) < 0$. $\square$

Quindi lavorando con superfici compatte, è ragionevole considerare divisori di grado non negativo, per evitare i casi di spazi $L(D)$ banali.

**Proposizione 4.25.** Sia $X = \mathbb{C}_\infty$ e $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che $\deg(D) \geq 0$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ elementi distinti di $\mathbb{C}$: $D$ sarà della forma

$$D = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \lambda_i + e_\infty \cdot \infty,$$

dove $\sum_{i=1}^n e_i + e_\infty \geq 0$. Detto $f_D(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{-e_i}$, si ha:

$$L(D) = \{g(z) f_D(z) \mid g(z) \text{ è un polinomio di grado al più } \deg(D)\}.$$

*Dimostrazione.* Sia $g(z) \in \mathbb{C}[z]$, polinomio di grado $d$ e dunque $\mathrm{div}(g) \geq -d \cdot \infty$. Osserviamo che il divisore principale associato a $f_D$ è della forma:

$$\mathrm{div}(f_D) = \sum_{i=1}^{n} (-e_i) \cdot \lambda_i + \left( \sum_{i=1}^{n} e_i \right) \cdot \infty.$$

Perciò,

$$\mathrm{div}(g f_D) + D = \mathrm{div}(g) + \mathrm{div}(f_D) + D = \mathrm{div}(g) + \left( \sum_{i=1}^{n} e_i + e_\infty \right) \cdot \infty \geq$$
$$\geq (\deg(D) - d) \cdot \infty.$$

Quindi se $d \leq \deg(D)$, allora $g f_D \in L(D)$.

Proviamo ora l'altra inclusione: sia $h \in L(D)$ e poniamo $g = \frac{h}{f_D}$. Allora abbiamo:

$$\mathrm{div}(g) = \mathrm{div}(h) - \mathrm{div}(f_D) \geq -D - \mathrm{div}(f_D) = \left( -\sum_{i=1}^{n} e_i - e_\infty \right) \cdot \infty =$$
$$= -\deg(D) \cdot \infty.$$

Deduciamo quindi che $g$ non ha poli in $\mathbb{C}$ ma ne ha al più uno nel punto $\infty$ di ordine al massimo $\deg(D)$. Perciò $g$ è un polinomio al massimo di grado $\deg(D)$. □

Grazie a questo calcolo esplicito, possiamo immediatamente dedurre le dimensioni dello spazio $L(D)$ della sfera di Riemann.

**Corollario 4.26.** Sia $D \in \mathrm{Div}(\mathbb{C}_\infty)$, allora:

$$\dim L(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg(D) < 0 \\ 1 + \deg(D) & \text{se } \deg(D) \geq 0 \end{cases}.$$

**Definizione 4.27.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e $D \in \mathrm{Div}(X)$, il *sistema lineare completo di* $D$ è:

$$|D| := \{E \in \mathrm{Div}(X) \mid E \sim D \text{ e } E \geq 0\}.$$

Osserviamo che se $X$ è compatta, connessa e $\deg(D) < 0$, allora $|D| = \emptyset$ (basta ricordare il punto 3 del Lemma 4.16).
Tali sistemi lineari completi, nel caso di superfici compatte, presentano una naturale struttura di spazio proiettivo.

**Lemma 4.28.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa. Sia $S$ la seguente funzione:

$$S : \mathbb{P}(L(D)) \to |D| \text{ tale che } S([f]) = \mathrm{div}(f) + D.$$

Allora, $S$ è ben definita ed è una corrispondenza biunivoca.

*Dimostrazione.* Mostriamo innanzitutto che $S$ è ben definita. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ non nullo e considero $f$ e $g = \lambda f$ (cioè $[f] = [g]$). Osserviamo che $\mathrm{div}(\lambda f) = \mathrm{div}(f)$, poiché la moltiplicazione per uno scalare non modifica l'ordine della funzione nei vari punti. Dunque $S([f]) = S([g])$.

Mostriamo che $S$ è suriettiva. Sia $E \in |D|$: esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $E = \mathrm{div}(f) + D$. Dato che $E \geq 0$, si ha che $f \in L(D)$ e dunque $S(f) = E$, cioè $S$ è suriettiva.

Infine proviamo l'iniettività. Sia $S(f) = S(g)$ cioè $\mathrm{div}(f) + D = \mathrm{div}(g) + D$. Perciò cancellando $D$, si ha che $\mathrm{div}\left(\frac{f}{g}\right) = 0$ ossia $\frac{f}{g}$ non presenta né zeri né poli su $X$. Dunque dal Corollario 2.50, esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ non nullo, tale che $\frac{f}{g} = \lambda$. In particolare si ha $[f] = [g]$. □

Vi è dunque un legame esplicito tra lo spazio $L(D)$ e il sistema lineare completo $|D|$.

**Definizione 4.29.** Dato un sistema lineare completo $|D|$ di una superficie di Riemann compatta e connessa, un *sistema lineare* è un sottoinsieme di $|D|$ che tramite la mappa $S$ corrisponde a un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(L(D))$.

**Definizione 4.30.** La *dimensione* di un sistema lineare, è la dimensione del corrispondente sottospazio proiettivo in $\mathbb{P}(L(D))$.

In modo del tutto analogo, possiamo costruire uno spazio di 1-forme relative a un divisore.

**Definizione 4.31.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e $D \in \mathrm{Div}(X)$, lo *spazio delle 1-forme mermorfe con poli limitati da* $D$ è:

$$L^{(1)}(D) := \{\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X) \smallsetminus \{0\} \mid \mathrm{div}(\omega) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

**Osservazione 4.32.** $L^{(1)}(D)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. In particolare $L^{(1)}(0) = \Omega^{(1)}(X)$.

Vediamo ora che legame esiste tra gli spazi finora presentati.

**Proposizione 4.33.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e siano $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ tali che $D_1 \sim D_2$. Detta $h \in \mathcal{M}(X)$ tale che $D_1 = \mathrm{div}(h) + D_2$, allora:

1.
$$\mu_h : L(D_1) \to L(D_2) \text{ tale che } \mu_h(f) = hf,$$
è un isomorfismo di spazi vettoriali;

2.
$$\mu_h^{(1)} : L^{(1)}(D_1) \to L^{(1)}(D_2) \text{ tale che } \mu_h^{(1)}(\omega) = h\omega,$$
è un isomorfismo di spazi vettoriali.

*Dimostrazione.* Mostriamo che $\mu_h$ è un isomorfismo, la prova per $\mu_h^{(1)}$ è del tutto analoga. Sia $f \in L(D_1)$: $\mathrm{div}(f) \geq -D_1$. Allora, $\mathrm{div}(hf) = \mathrm{div}(h) + \mathrm{div}(f) \geq \mathrm{div}(h) - D_1 = -D_2$. Dunque $hf \in L(D_2)$ e perciò $\mu_h$ è una funzione ben posta. Osserviamo che $\mu_{\frac{1}{h}}$ risulta essere l'inversa di $\mu_h$ e pertanto si ha l'isomorfismo voluto poiché le mappe sono lineari. $\square$

**Proposizione 4.34.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e sia $\omega$ una 1-forma meromorfa non identicamente nulla. Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ e $K = \mathrm{div}(\omega) \in \mathrm{KDiv}(X)$. Allora

$$\mu_\omega : L(D+K) \to L^{(1)}(D) \text{ tale che } \mu_\omega(f) = f\omega,$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

*Dimostrazione.* Sia $f \in L(D+K)$: $\mathrm{div}(f) \geq -D-K$. Allora si ha $\mathrm{div}(f\omega) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(\omega) \geq -D-K+K = -D$, e quindi $f\omega \in L^{(1)}(D)$. La funzione è ben definita. Osserviamo inoltre che è lineare e iniettiva ($f\omega = g\omega$ se e solo se $(f-g)\omega = 0$ ossia $f = g$). Resta da provare che è suriettiva. Sia $\omega' \in L^{(1)}(D)$. Per il Lemma 3.28, esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $\omega' = f\omega$. Poiché $\omega' \in L^{(1)}(D)$, si ha che:

$$\mathrm{div}(f) + D + K = \mathrm{div}(f\omega) + D = \mathrm{div}(\omega') + D \geq 0.$$

Dunque $f \in L(D+K)$ ed è tale che $\mu_\omega(f) = \omega'$. □

Concludiamo il capitolo stimando la dimensione degli spazi $L(D)$ e $L^{(1)}(D)$ nel caso di una superficie di Riemann compatta e connessa.

**Lemma 4.35.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa. Sia $p \in X$ e $D \in \mathrm{Div}(X)$. Poiché $D - p \leq D$ vale l'inclusione $L(D-p) \subseteq L(D)$. Allora $L(D-p) = L(D)$ oppure $L(D-p)$ ha codimensione 1 in $L(D)$.

Dunque in generale si ha: $0 \leq \dim L(D) - \dim L(D-p) \leq 1$.

*Dimostrazione.* Sia $n = -D(p)$, allora ogni funzione $f \in L(D)$ è tale che il suo sviluppo in serie di Laurent centrato in $p$, presenta termini di ordine maggiore o uguale ad $n$: $f(z) = c_n z^n + \sum_{k \geq n+1} c_k z^k$. Consideriamo la seguente mappa:

$$\alpha : L(D) \to \mathbb{C} \text{ tale che } \alpha(f) = c_n.$$

Osserviamo che $\alpha$ dipende dallo sviluppo di $f$ in coordinate locali, cioè dipende dalla scelta della carta che copre $p$. Inoltre $\alpha$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali e si ha:

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\alpha) = \{f \in L(D) \mid c_n = 0\} &= \{f \in L(D) \mid \mathrm{ord}_p(f) \geq n+1\} = \\ &= \{f \in L(D) \mid \mathrm{ord}_p(f) \geq -D(p)+1\} = L(D-p).\end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione il punto cruciale risulta essere la nullità o meno del coefficiente $c_n$. Dunque possiamo concludere indipendentemente dalle coordinate locali nel seguente modo. Se $\alpha$ è la mappa nulla, allora si ha $L(D-p) = L(D)$. Altrimenti $\alpha$ è necessariamente suriettiva e quindi dal teorema del rango abbiamo $\dim L(D) = \dim L(D-p) + 1$, esattamente quanto volevasi dimostrare. □

**Proposizione 4.36.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa e sia $D \in \mathrm{Div}(X)$. Allora $L(D)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita.

Più precisamente, scrivendo $D = P - N$ con $P$ ed $N$ divisori effettivi a supporto disgiunto, si ha $\dim L(D) \leq 1 + \deg(P)$.

*Dimostrazione.* Osserviamo per prima cosa che per $D = 0$, la tesi è verificata. Infatti in tal caso si ha dall'Osservazione 4.23 che $L(0) = \mathcal{O}(X)$. Ma tale insieme è isomorfo a $\mathbb{C}$ (vedi Corollario 2.50) e dunque $\dim L(0) = 1$. Procediamo ora per induzione sul grado di $P$, parte non negativa di $D$. Se $\deg(P) = 0$, allora necessariamente $P = 0$ e dunque $\dim L(P) = 1$. Dato che $D \leq P$, si ha $L(D) \subseteq L(P)$ e quindi:

$$\dim L(D) \leq \dim L(P) = 1 = 1 + \deg(P).$$

Supponiamo quindi che la proposizione sia vera per i divisori $D$ che hanno parte positiva di grado $k-1$. Proviamo che è vero anche per $D$ tale che $\deg(P) = k \geq 1$. Esiste sicuramente un punto $p \in X$ tale che $P(p) \geq 1$. Consideriamo quindi il divisore $D - p$, la cui parte positiva sarà data da $P - p$ e avrà dunque grado $k-1$. Perciò, usando l'ipotesi induttiva, si ha $\dim L(D-p) \leq 1 + \deg(P-p) = k = \deg(P)$. La dimostrazione si conclude utilizzando il Lemma 4.35 e osservando quanto segue:

$$\dim L(D) \leq 1 + \dim L(D-p) \leq 1 + \deg(P).$$

La dimensione è quindi finita, poiché il grado di $P$ è sempre un intero maggiore o uguale a 0. □

**Corollario 4.37.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa e sia $D \in \mathrm{Div}(X)$, allora $L^{(1)}(D)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale finito dimensionale.

*Dimostrazione.* Segue dalla Proposizione 4.34 e dalla 4.36. □

# Capitolo 5

# Divisori e mappe olomorfe nello spazio proiettivo

In questo capitolo ci concentriamo sulle superfici di Riemann che risultano in qualche modo collegate a sottoinsiemi dello spazio proiettivo. In particolare vedremo il legame esistente tra i divisori di tali superfici e le funzioni olomorfe da esse nello spazio proiettivo. Vedremo infine, le condizioni affinché una superficie di Riemann compatta si immerga olomorficamente nello spazio proiettivo.

## 5.1 Divisori di intersezione e mappe olomorfe

**Definizione 5.1.** Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ una curva proiettiva liscia, come era stata definita nella Definizione 2.38. Indichiamo con $[x_0 : \cdots : x_n]$ le coordinate dello spazio proiettivo e consideriamo $G \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ polinomio omogeneo di grado $d$, che non si annulli identicamente su $X$. Sia $p \in X \cap \mathbb{V}(G)$ e $H \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_d$ tale che $H(p) \neq 0$. Quindi $\frac{G}{H}|_X \in \mathcal{M}(X)$ e definiamo il divisore di $G$ su $X$ come:

$$\operatorname{div}(G)(p) := \begin{cases} \operatorname{ord}_p \left(\frac{G}{H}|_X\right) & \text{se } G(p) = 0 \\ 0 & \text{se } G(p) \neq 0 \end{cases}$$

per ogni $p \in X$.
Tale divisore è detto *divisore di intersezione* di $G$ su $X$.

Questo divisore tiene conto (con molteplicità) di dove il polinomio $G$ si annulla su $X$, ossia rappresenta le intersezioni della curva $X$ con $\mathbb{V}(G)$.

**Osservazione 5.2.** Osserviamo che tale divisore è ben definito ed è effettivo. Il suo supporto è infatti discreto (addirittura finito dato che $X$ è compatta), poiché i punti $p \in X$ tali che $\operatorname{div}(G)(p) \neq 0$, sono gli zeri di $\frac{G}{H}|_X$, funzione meromorfa da $X$ in $\mathbb{C}$. Difatti $\frac{G}{H}|_X$ si annulla in $p$ poiché $G(p) = 0$ e $H(p) \neq 0$: $\operatorname{ord}_p\left(\frac{G}{H}|_X\right) > 0$ e il divisore è perciò effettivo. Inoltre $\operatorname{div}(G)$ non dipende dalla scelta di $H$, ma solo da $G$. Infatti se usassimo un altro polinomio $H'$, allora andremmo a guardare l'ordine nel punto $p$ della funzione meromorfa $\frac{G}{H'}$. Ma quest'ultima, è prodotto di $\frac{G}{H}$ con $\frac{H}{H'}$ e dunque $\operatorname{ord}_p\left(\frac{G}{H'}\right) = \operatorname{ord}_p\left(\frac{G}{H}\right) + \operatorname{ord}_p\left(\frac{H}{H'}\right) = \operatorname{ord}_p\left(\frac{G}{H}\right)$, poiché $\frac{H}{H'}$ ha ordine 0 nel punto $p$.

Una buona scelta per $H$ è quella di considerare il polinomio $x_i^d$ dove $x_i$ è una coordinata omogenea che non si annulla in $p$.

Si noti, che grazie alle proprietà di $\operatorname{ord}_p\left(\frac{G}{H}\right)$, vale che $\operatorname{div}(G_1G_2) = \operatorname{div}(G_1) + \operatorname{div}(G_2)$ dove $G_1, G_2$ sono polinomi omogenei.

**Lemma 5.3.** Siano $G_1, G_2 \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]_d$ e $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ curva proiettiva liscia tale che i polinomi $G_1$ e $G_2$ non si annullano identicamente su $X$. Allora, posta $f = \frac{G_1}{G_2}$:

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(G_1) - \operatorname{div}(G_2).$$

*Dimostrazione.* Vedi [Mir95, Lemma 1.23, capitolo V] □

**Definizione 5.4.** Dato $G$ polinomio omogeneo di grado 1 ed $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ curva proiettiva liscia, il divisore di intersezione $\operatorname{div}(G)$ è detto *divisore di iperpiano.*

**Esempio 5.5.** Sia $X \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ curva ellittica definita nell'Esempio 2.21. Consideriamo poi i seguenti iperpiani:

$$H_0 = \mathbb{V}(x_0) \qquad H_1 = \mathbb{V}(x_1) = \overline{\{x = 0\}} \qquad H_2 = \mathbb{V}(x_2) = \overline{\{y = 0\}}.$$

Calcoliamo i relativi divisori.

- $\operatorname{div}(H_0)$: per prima cosa determiniamo i punti di intersezione tra l'iperpiano e la curva $X$. Si ha:

$$X \cap H_0 = \{[0:0:1]\}.$$

Dunque si consideri l'iperpiano $H_2$ a cui il punto di intersezione non appartiene: possiamo così calcolare il valore che il divisore assume in tale punto. Dobbiamo quindi determinare $\operatorname{ord}_{[0:0:1]}\left(\frac{x_0}{x_2}\right)$. Osserviamo che $[0:0:1] \in X \cap U_2$ dove identifichiamo $X \cap U_2$ come la curva affine liscia data da $\mathbb{V}(r)$ con $r(x_0, x) = x_0 - x^3 + (\lambda+1)x_0x^2 - \lambda x_0^2 x$. Dunque $\operatorname{ord}_{[0:0:1]}\left(\frac{x_0}{x_2}\right) = \operatorname{ord}_{(0,0)}(x_0)$: ci siamo quindi ricondotti a un calcolo analogo a quello visto nell'Esempio 2.45. Utilizzando le medesime idee e svolgendo i relativi calcoli, si ottiene $\operatorname{ord}_{(0,0)}(x_0) = 3$.
Quindi $\operatorname{div}(H_0) = 3 \cdot [0:0:1]$. Infatti l'iperpiano $H_0$ interseca la curva $X$ con molteplicità 3 nel punto $[0:0:1]$.

- $\operatorname{div}(H_1)$: determiniamo i punti di intersezione tra $X$ e l'iperpiano. Avremo:

$$X \cap H_1 = \{[1:0:0], [0:0:1]\}.$$

Tale divisore avrà quindi due punti nel supporto: calcoliamone il valore.

  - $p_1 = [1:0:0]$: scegliamo l'iperpiano $H_0$ tale che $p_1 \notin H_0$ e consideriamo $\operatorname{ord}_{[1:0:0]}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)$. Notiamo che $p_1 \in X \cap U_0$ dove $X \cap U_0$ si identifica con la curva affine liscia già studiata nell'Esempio 2.45. Dunque $\operatorname{ord}_{[1:0:0]}\left(\frac{x_1}{x_0}\right) = \operatorname{ord}_{(0,0)}(x) = 2$;
  - $p_2 = [0:0:1]$: scegliamo l'iperpiano $H_2$ tale che $p_2 \notin H_2$ e consideriamo $\operatorname{ord}_{[0:0:1]}\left(\frac{x_1}{y}\right)$. Notiamo che $p_2 \in X \cap U_2$ dove $X \cap U_2$ si identifica con la curva affine liscia $\mathbb{V}(r)$. Dunque $\operatorname{ord}_{[0:0:1]}\left(\frac{x_1}{y}\right) = \operatorname{ord}_{(0,0)}(x) = 1$.

Quindi $\operatorname{div}(H_1) = 2 \cdot [1:0:0] + 1 \cdot [0:0:1]$.

- $\operatorname{div}(H_2)$: determiniamo i punti di intersezione tra $X$ e l'iperpiano. Si ha:

$$X \cap H_2 = \{[1:0:0], [1:1:0], [1:\lambda:0]\}.$$

Osserviamo che tutti e tre i punti di intersezione non appartengono all'iperpiano $H_0$ e si trovano invece su $X \cap U_0$: il calcolo dei relativi ordini si riduce allo studio della curva affine liscia dell'Esempio 2.45. Avremo:

- $\mathrm{ord}_{[1:0:0]}\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = \mathrm{ord}_{(0,0)}(y) = 1$;
- $\mathrm{ord}_{[1:1:0]}\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = \mathrm{ord}_{(1,0)}(y) = 1$;
- $\mathrm{ord}_{[1:\lambda:0]}\left(\frac{x_2}{x_0}\right) = \mathrm{ord}_{(\lambda,0)}(y) = 1$.

Quindi $\mathrm{div}(H_2) = 1 \cdot [1:0:0] + 1 \cdot [1:1:0] + 1 \cdot [1:\lambda:0]$.

Introduciamo ora una nozione di notevole importanza.

**Definizione 5.6.** Sia $X$ una curva proiettiva liscia immersa in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Il *grado* di $X$ è il grado di un qualsiasi divisore di iperpiano di $X$. Indichiamo tale intero con $\deg(X)$.

**Osservazione 5.7.** La definizione è ben posta: non dipende dall'iperpiano scelto. Infatti dal Lemma 5.3, deduciamo che qualsiasi coppia di divisori di iperpiano su $X$ risulta linearmente equivalente. In particolare essendo $X$ una superficie compatta, tali divisori hanno lo stesso grado (vedi il punto 3 del Lemma 4.16).

Per le curve piane proiettive lisce, si ha una nozione di grado della curva come grado del polinomio omogeneo che la definisce. In realtà tale nozione di grado coincide con quella più generale della Definizione 5.6. Vale infatti la seguente proposizione.

**Proposizione 5.8.** Sia $X = \mathbb{V}(F) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ una curva piana proiettiva liscia, dove $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d$. Allora $\deg(X) = d$ nel senso dei divisori di iperpiani.

*Dimostrazione.* Vedi [Mir95, Proposizione 2.12, capitolo V]. □

**Osservazione 5.9.** Si noti che tale risultato è coerente con quanto calcolato nell'Esempio 5.5.

**Osservazione 5.10.** Ricordiamo che la nozione di grado di $X$ curva proiettiva liscia non è una proprietà intrinseca della curva ma dipende dall'immersione $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Introduciamo a questo punto il concetto di mappa olomorfa da una superficie di Riemann $X$ allo spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

**Definizione 5.11.** Sia $X$ superficie di Riemann e sia data la funzione $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Diciamo che $\phi$ è *olomorfa nel punto* $p \in X$, se esistono $g_0, \dots, g_n \in \mathcal{O}(U)$ con $U \subseteq X$ intorno del punto $p$, tali che non sono tutte nulle in $p$ e $\phi(x) = [g_0(x) : \cdots : g_n(x)]$ per ogni $x \in U$.

Osserviamo che se una delle funzioni $g_i$ è non nulla in $p$, allora per continuità è non nulla in un intorno di $p$. Dunque la mappa è ben definita.

Ricordiamo che nel caso di $X$ superficie compatta, non esistono funzioni olomorfe non costanti su tutta $X$. Quindi se vogliamo definire un'interessante funzione $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa in tutti i punti di $X$, ci aspettiamo di non utilizzare le stesse $g_i$ in ogni punto della superficie. Possiamo quindi considerare $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulle. Definiamo la seguente funzione:

$$\phi_f : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \text{ tale che } \phi_f(p) = [f_0(p) : \cdots : f_n(p)].$$

Tale $\phi_f$ a priori risulta definita solo per i punti $p \in X$ tali che:

- $p$ non è uno zero di ogni $f_i$ per $i \in \{0, \dots, n\}$;
- $p$ non è un polo di nessuna delle $f_i$ per $i \in \{0, \dots, n\}$.

Dunque si ha che tale $\phi_f$ è una funzione olomorfa in ogni punto $p \in X$ in cui risulta ben definita. La funzione si può però estendere in modo olomorfo anche nei punti dove a priori non sarebbe ben posta.

**Lemma 5.12.** Date $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ non identicamente nulle su $X$ superficie di Riemann connessa, si ha che la mappa $\phi_f$ si estende a una mappa olomorfa su tutta $X$.

*Dimostrazione.* Fissiamo $p \in X$ e poniamo $m = \min_{i\in\{0,\dots,n\}} \mathrm{ord}_p(f_i)$. I problemi nella definizione di $\phi_f$ si presentano se $m \neq 0$. Per discretezza dei poli e degli zeri delle funzioni meromorfe, per ognuno di tali $p$ possiamo considerare un intorno tale che:

- non contenga poli di alcuna delle $f_i$ se non $p$ stesso;

- non ci siano zeri comuni a tutte le $f_i$ se non in $p$ stesso.

Scegliamo quindi una coordinata locale su tale intorno, centrata nel punto $p$. In questo modo ognuna delle $f_i$ letta in tali coordinate locali $z$, risulta olomorfa in un intorno $V$ di $z = 0$, tranne al più in $z = 0$ stesso. Inoltre in $V \setminus \{0\}$ non ci sono zeri comuni a tutte le $f_i$. Dunque lavorando nello spazio proiettivo, per ogni $z \in V \setminus \{0\}$ si ha:

$$\phi_f(z) = [f_0(z) : \cdots : f_n(z)] = [z^{-m} f_0(z) : \cdots : z^{-m} f_n(z)].$$

Poniamo $g_i(z) = z^{-m} f_i(z)$ che osserviamo avere ordine maggiore di zero (ed esattamente zero in corrispondenza di almeno un indice) nel punto $p$. Dunque per ogni $z \in V \setminus \{0\}$ si ha $g_i$ olomorfa per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$ ed esiste almeno un indice $i$ per cui $g_i(z) \neq 0$. Dunque definendo $\phi_f(0) = [g_0(0) : \cdots : g_n(0)]$ si ha che $\phi_f$ è ben definita su tutto $V$ in modo olomorfo: $\phi_f$ è olomorfa dunque anche nel punto $p$. □

**Proposizione 5.13.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e sia $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa. Allora esistono $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(X)$, non identicamente nulle, tali che $\phi = \phi_f$. Inoltre se esistono $g_0, \ldots, g_n \in \mathcal{M}(X)$ tali che $\phi_f = \phi_g$, allora esiste $\lambda \in \mathcal{M}(X)$ tale che $g_i = \lambda f_i$ per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$.

*Dimostrazione.* Vedi [Mir95, Proposizione 4.3, capitolo V]. □

Ricordando che con $X$ superficie di Riemann connessa si ha che $\mathcal{M}(X)$ è un campo, possiamo affermare che ad ogni funzione olomorfa $\phi$ da $X$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, corrisponde un sottospazio unidimensionale di $\mathcal{M}(X)^{n+1}$ (pensato come $\mathcal{M}(X)$-spazio vettoriale): ad ogni $\phi$ corrisponde una $(n+1)$-upla di funzioni meromorfe determinata a meno di multipli.

## 5.2 Mappe olomorfe e sistemi lineari di divisori

Consideriamo $X$ superficie di Riemann compatta e connessa. Ad ogni mappa olomorfa $\phi : X \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, possiamo associare un sistema lineare nel senso della Definizione 4.29 nel modo seguente. Grazie alla Proposizione

5.13, esistono $f_0, \ldots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ tali che $\phi = [f_0 : \cdots : f_n]$. Consideriamo poi il divisore $D = -\min_i\{\mathrm{div}(f_i)\} \in \mathrm{Div}(X)$. Quindi per ogni $p \in X$ vale $\mathrm{ord}_p(f_i) \geq -D(p)$, per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$:

$$f_i \in L(D), \text{ per ogni } i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Definiamo dunque $V_f := \mathrm{span}\{f_0, \ldots, f_n\}$ sottospazio di $L(D)$. A questo facciamo corrispondere il seguente insieme di divisori:

$$|\phi| = \{\mathrm{div}(g) + D \mid g \in V_f\} \subseteq |D|.$$

Osserviamo che seppur la costruzione di $D$ dipende fortemente dalle $f_i$ scelte, il sistema lineare $|\phi|$ è indipendente da tale scelta ed è dunque ben definito, come mostriamo con il prossimo lemma.

**Lemma 5.14.** Data $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, il sistema lineare $|\phi|$ associato a $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa è ben definito.

*Dimostrazione.* Mostriamo che $|\phi|$ è indipendente dalla scelta delle $f_i$ effettuata per descrivere $\phi$. Supponiamo che esistano anche $g_0, \ldots, g_n \in \mathcal{M}(X)$ tali che $\phi = [g_0 : \cdots : g_n]$. Dalla Proposizione 5.13, esiste $\lambda \in \mathcal{M}(X)$ tale che $g_i = \lambda f_i$ per ogni $i$. Quindi abbiamo che $\mathrm{div}(g_i) = \mathrm{div}(\lambda) + \mathrm{div}(f_i)$. Siano poi

$$D = -\min_i\{\mathrm{div}(f_i)\} \in \mathrm{Div}(X);$$
$$D' = -\min_i\{\mathrm{div}(g_i)\} \in \mathrm{Div}(X).$$

Si ha $D' = D - \mathrm{div}(\lambda)$ e dunque in particolare $D$ e $D'$ sono linearmente equivalenti: $|D| = |D'|$. Consideriamo un elemento di $|\phi_g|$ e mostriamo che appartiene anche a $|\phi_f|$:

$$\mathrm{div}\left(\sum_i a_i g_i\right) + D' = \mathrm{div}\left(\sum_i a_i \lambda f_i\right) + D' = \mathrm{div}\left(\sum_i a_i f_i\right) + D \in |\phi_f|.$$

In modo del tutto analogo si mostra anche il viceversa: $|\phi_f| \subseteq |\phi_g|$. Dunque i due sistemi lineari coincidono, ossia $|\phi|$ è ben definito. $\square$

**Osservazione 5.15.** Si noti che tutti i divisori di $|\phi|$ hanno lo stesso grado poiché sono tutti linearmente equivalenti tra loro (vedi punto 3 del Lemma 4.16).

**Definizione 5.16.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa e con immagine non degenere ossia $\phi(X)$ non è contenuto in un iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (equivalentemente le funzioni coordinate che definiscono la mappa sono linearmente indipendenti). Il sistema lineare $|\phi|$ ottenuto secondo la costruzione precedentemente descritta, è detto *sistema lineare della mappa* $\phi$.

In tal caso $|\phi|$ ha esattamente dimensione $n$, poiché il relativo sottospazio vettoriale di $L(D)$ ha dimensione $n+1$.

Vi è un modo più geometrico di associare un sistema lineare a una mappa olomorfa, utilizzando i divisori di iperpiano.

Sia $X$ superficie di Riemann e $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mappa olomorfa. Consideriamo $H \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ iperpiano definito da $L$ polinomio omogeneo di grado 1, tale che $\phi(X) \nsubseteq H$. Sia $p \in X$ e sia $M$ un polinomio omogeneo di grado 1 che non si annulla in $\phi(p)$. Dunque $h = \left(\frac{L}{M}\right) \circ \phi$ è una funzione olomorfa in un intorno di $p$. Dunque possiamo definire il seguente divisore:

$$\phi^*(H)(p) := \mathrm{ord}_p(h).$$

Essendo $h$ olomorfa, $\phi^*(H)(p)$ risulta sempre non negativo. In particolare è strettamente positivo se $\phi(p) \in H$. Ci riferiamo al divisore $\phi^*(H)$ indicandolo come *divisore di iperpiano per la mappa* $\phi$.

Mostriamo che l'insieme di tali divisori dà esattamente luogo al sistema lineare associato alla mappa $\phi$.

**Lemma 5.17.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa tale che $\phi = [f_0 : \cdots : f_n]$. Sia poi $H = \mathbb{V}\left(\sum_{i=0}^n a_i x_i\right)$ iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e $D = -\min_i\{\mathrm{div}(f_i)\}$. Se $\phi(X) \nsubseteq H$, allora:

$$\phi^*(H) = \mathrm{div}\left(\sum_i a_i f_i\right) + D.$$

*Dimostrazione.* Fissiamo un punto $p \in X$ e sia $j$ tale che $\mathrm{ord}_p(f_j) = -D(p)$. Dunque $x_j$ è una coordinata che non si annulla in $\phi(p)$ (se così non fosse, avremmo che $f_i(p) = 0$ per ogni $i$ ma questo non può accadere). Consideriamo quindi $M = x_j$ per definire il divisore $\phi^*(H)$. Quindi detto $L = \sum_{i=0}^n a_i x_i$, si ha $h = \left(\frac{L}{M}\right) \circ \phi$ non si annulla identicamente in un intorno di $p$. Allora:

$$\mathrm{ord}_p(h) = \mathrm{ord}_p\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right) - \mathrm{ord}_p(f_j) = \mathrm{ord}_p\left(\sum_{i=0}^{n} a_i f_i\right) + D(p).$$

□

Da questo segue immediatamente il risultato voluto.

**Corollario 5.18.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa. Allora l'insieme dei divisori di iperpiano $\{\phi^*(H)\}$ coincide con il sistema lineare $|\phi|$.

Se dunque ad ogni mappa olomorfa da $X$ superficie di Riemann compatta e connessa in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è possibile associare un sistema lineare, è naturale chiedersi per quali sistemi lineari sia possibile fare l'associazione inversa, ossia trovare una mappa olomorfa corrispondente al sistema.

Osserviamo una proprietà dei sistemi $|\phi|$ descritti.

**Lemma 5.19.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mappa olomorfa. Allora per ogni punto $p \in X$, esiste un divisore $E \in |\phi|$ tale che $E(p) = 0$. In altre parole nessun punto di $X$ è nel supporto di ogni divisore del sistema lineare $|\phi|$.

*Dimostrazione.* Siano $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$ tali che $\phi = [f_0 : \cdots : f_n]$ e sia dunque $D = -\min_i\{\mathrm{div}(f_i)\}$. Gli elementi di $|\phi|$ sono della forma $\mathrm{div}\left(\sum_i a_i f_i\right) + D$, dove $a_i \in \mathbb{C}$. Sia $k = \min_i(\mathrm{ord}_p(f_i))$ e supponiamo sia assunto per $i = j$. Sia quindi $E = \mathrm{div}(f_j) + D \in |\phi|$ e osserviamo che:

$$E(p) = \mathrm{div}(f_j)(p) + D(p) = k - k = 0.$$

Dunque $E$ è il divisore cercato. □

**Osservazione 5.20.** Tale risultato si mostra anche pensando al sistema $|\phi|$ definito come l'insieme dei divisori di iperpiano $\{\phi^*(H)\}$. Infatti un punto $p \in X$ è nel supporto di ognuno di tali divisori se e solo se $\phi(p) \in H$ per ogni iperpiano $H$. Ma dato un punto nel proiettivo, esiste sempre un iperpiano a cui tale punto non appartiene.

Vedremo che tale proprietà è l'unica richiesta necessaria affinché un sistema lineare corrisponda a una mappa olomorfa. Diamo quindi la seguente definizione.

**Definizione 5.21.** Sia $Q$ un sistema lineare su $X$ superficie di Riemann compatta e connessa. Diciamo che $p \in X$ è un *punto base di* $Q$, se è contenuto nel supporto di ogni divisore $E \in Q$. Se $Q$ non presenta alcun punto base si dice che $Q$ è un sistema *libero da punti base.*

Quindi il sistema $|\phi|$ associato alla mappa olomorfa $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è un sistema libero per quanto osservato nel Lemma 5.19.

**Lemma 5.22.** Consideriamo un punto $p \in X$ con $X$ superficie di Riemann, e un sistema lineare $Q \subseteq |D|$, dove $D \in \mathrm{Div}(X)$. Sia poi $V \subseteq L(D)$ sottospazio tale che $Q = \{\mathrm{div}(f) + D \mid f \in V\}$. Allora $p$ è un punto base di $Q$ se e solo se $V \subseteq L(D-p)$. In particolare $p$ è un punto base di $|D|$ se e solo se $L(D) = L(D-p)$.

*Dimostrazione.* Sia dunque $f \in V$: $\mathrm{ord}_p(f) + D(p) \geq 0$ per ogni $p \in X$. Dunque $p \in X$ è un punto base di $Q$ se e solo se per ogni $f \in V$ si ha $\mathrm{ord}_p(f) + D(p) \geq 1$. Ma ciò accade se e solo se $f \in L(D-p)$ per ogni $f \in V$. $\square$

**Proposizione 5.23.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa, sia $D \in \mathrm{Div}(X)$. Allora $|D|$ è un sistema libero se e solo se per ogni punto $p \in X$ si ha $\dim L(D-p) = \dim L(D) - 1$.

*Dimostrazione.* Dal Lemma 5.22 abbiamo che $p \in X$ non è un punto base di $|D|$ se e solo se esiste una funzione $f \in L(D)$ tale che $f \notin L(D-p)$ cioè $\mathrm{ord}_p(f) = -D(p)$. Equivalentemente $|D|$ è un sistema libero se e solo se $L(D) \nsubseteq L(D-p)$. Ma questo per il Lemma 4.35, ci dice che $\dim L(D) - \dim L(D-p) = 1$. $\square$

**Proposizione 5.24.** Sia $Q \subseteq |D|$ un sistema lineare libero di dimensione $n$ su $X$ superficie di Riemann compatta e connessa. Allora esiste $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa tale che $Q = |\phi|$. Inoltre tale $\phi$ è unica a meno di un cambio di coordinate in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

*Dimostrazione.* Vedi [Mir95, Proposizione 4.15, capitolo V]. □

Seppur in generale un sistema lineare completo $|D|$ su una superficie di Riemann $X$ non è un sistema libero, osserviamo che limitare la nostra attenzione ai sistemi liberi non è riduttivo ai fini dei corrispondenti spazi di funzioni.

**Definizione 5.25.** Sia $|D|$ sistema lineare completo su $X$ superficie di Riemann. Definiamo il seguente divisore:

$$F(p) := \min_{E \in |D|} E(p) \cdot p,$$

per ogni $p \in X$. $F \in \mathrm{Div}(X)$ è detto *divisore fisso* del sistema $|D|$.

Osserviamo che nel supporto di $F$ compaiono tutti e soli i punti base del sistema $|D|$. Dunque il sistema lineare completo $|D - F|$ non presenta punti base. Inoltre $|D| = F + |D - F|$.

**Lemma 5.26.** Se $F$ è il divisore fisso del sistema lineare completo $|D|$ definito su $X$ superficie di Riemann, allora $L(D - F) = L(D)$.

*Dimostrazione.* Un'inclusione è ovvia: $F \geq 0$ e dunque $D - F \leq D$ cioè $L(D-F) \subseteq L(D)$. Per l'inclusione opposta consideriamo $f \in L(D)$. Dunque $\mathrm{div}(f)+D \in |D|$ e quindi esiste $D'$ divisore non negativo tale che $\mathrm{div}(f)+D = F + D'$. Ma allora $f \in L(D - F)$ poiché $\mathrm{div}(f) + (D - F) = D' \geq 0$. □

## 5.3 Criteri di immersione

Possiamo quindi restringere la nostra attenzione a sistemi lineari liberi e alle mappe olomorfe ad essi corrispondenti. Lavoriamo inoltre con $X$ superficie di Riemann compatta. L'intento è ora quello di determinare dei criteri affinché $\phi_D : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ funzione olomorfa associata a $|D|$ sistema libero su $X$, sia un immersione nello spazio proiettivo. Osserviamo che avremo $n = \dim L(D) - 1$ per la Proposizione 5.24 e il Lemma 4.28.

Per prima cosa, determiniamo quando risulta una mappa iniettiva. Per fare ciò necessitiamo di un lemma tecnico preliminare.

**Lemma 5.27.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che $|D|$ è un sistema libero. Allora, fissato $p \in X$, esiste una base $\{f_0, \ldots, f_n\}$ dello spazio vettoriale $L(D)$ tale che:

- $\mathrm{ord}_p(f_0) = -D(p)$;
- $\mathrm{ord}_p(f_i) > -D(p)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.

*Dimostrazione.* Sia $L(D-p)$ sottospazio di $L(D)$ avente codimensione 1 (grazie al Lemma 4.35). Sia $\{f_1, \ldots, f_n\}$ base di $L(D-p)$ e completiamola a base di $L(D)$ aggiungendo una funzione $f_0 \in L(D) \setminus L(D-p)$. Osserviamo dunque che abbiamo così la base voluta:

- $\mathrm{ord}_p(f_i) \geq -D(p) + 1 > -D(p)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- $\mathrm{ord}_p(f_0) = -D(p)$ poiché se $\mathrm{ord}_p(f_0) > -D(p)$ avremmo che $f_0 \in L(D-p)$, ma ciò è assurdo.

$\square$

Abbiamo dunque il seguente criterio di iniettività.

**Proposizione 5.28.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa, sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che $|D|$ è un sistema libero. Siano $p, q \in X$ punti distinti, allora $\phi_D(p) = \phi_D(q)$ se e solo se $L(D-p-q) = L(D-p) = L(D-q)$. Quindi $\phi_D$ è iniettiva se e solo se $\dim L(D-p-q) = \dim L(D) - 2$ per ogni coppia di punti distinti $p, q \in X$.

*Dimostrazione.* Dato che considerando una base diversa in $L(D)$ si ha semplicemente un cambio lineare di coordinate per la mappa $\phi_D$ (si veda la dimostrazione della Proposizione 5.24), possiamo controllare che $\phi_D(p) = \phi_D(q)$ utilizzando una qualsiasi base di $L(D)$. Prendiamo dunque la base $\{f_0, \ldots, f_n\}$ data dal Lemma 5.27. Osserviamo che, guardando alle $f_i$ sviluppate in serie di Laurent nelle coordinate locali $z$ centrate in $p$, riscalando per $z^{-D(p)}$ si ha $\phi_D(p) = [1 : 0 : \cdots : 0]$. Dunque $\phi_D(q) = \phi_D(p)$ se e solo se $\phi_D(q) = [1 : 0 : \cdots : 0]$ ossia se $\mathrm{ord}_q(f_0) < \mathrm{ord}_q(f_i)$ per ogni $i \geq 1$. Ma $q$ non è un punto base di $|D|$ e questo succede se e solo se $\mathrm{ord}_q(f_0) = -D(q)$ e $\mathrm{ord}_q(f_i) > -D(q)$, per ogni $i \geq 1$. Questo avviene se e solo se $\{f_1, \ldots, f_n\}$

è una base per $L(D-q)$. Ma tale base era stata scelta in modo da essere anche base di $L(D-p)$. Quindi riassumendo $\phi_D(q) = \phi_D(p)$ se e solo se $L(D-p) = L(D-q)$. Inoltre dato che per ogni $f \in L(D-p)$ si ha anche che $f \in L(D-q)$ con $p$ e $q$ distinti osserviamo che $L(D-p) \subseteq L(D-p-q)$. Dato che l'inclusione inversa è sempre vera per quanto visto nell'Osservazione 4.23, si ha l'uguaglianza tra i tre spazi come voluto.

Essendo $|D|$ libero, per la Proposizione 5.23 abbiamo $\dim L(D-p) = \dim L(D-q) = \dim L(D)-1$. Quindi dal Lemma 4.35 abbiamo che $\dim L(D-p-q)$ è pari a $\dim L(D)-1$ o a $\dim L(D)-2$. Per quanto appena provato, se $\phi_D$ è iniettiva si ha che per ogni coppia di punti distinti $p$ e $q$ deve valere l'inclusione stretta $L(D-p-q) \subsetneq L(D-p)$ e dunque $\dim L(D-p-q) = \dim L(D)-2$. Viceversa, se per ogni coppia di punti distinti $p$ e $q$ si ha $\dim L(D-p-q) = \dim L(D)-2$, allora $L(D-p-q) \subsetneq L(D-p) \subsetneq L(D)$. Dunque $\phi_D$ è iniettiva. □

L'iniettività della mappa $\phi_D$ non è però sufficiente ai fini della nostra trattazione. Infatti affinché sia un'immersione nello spazio proiettivo, richiediamo anche che l'immagine della superficie di Riemann tramite $\phi_D$ sia olomorficamente immersa, ossia che $\phi_D(X)$ sia una curva proiettiva liscia.

**Proposizione 5.29.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa, sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che $|D|$ è un sistema libero. Supponiamo che $\phi_D$ sia iniettiva. Allora, fissato un punto $p \in X$, esiste $U \subseteq X$ intorno di $p$ tale che $\phi_D(U)$ è una superficie di Riemann olomorficamente immersa se e solo se $L(D-2p) \neq L(D-p)$.

*Dimostrazione.* Considero come nella proposizione precedente, $\{f_0, \dots, f_n\}$ base dello spazio $L(D)$ data dal Lemma 5.27. Dunque si ha:

$$\mathrm{ord}_p(f_0) = -D(p);$$

$$\mathrm{ord}_p(f_i) > -D(p) \text{ per ogni } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Se supponiamo che esista un $j \in \{1, \dots, n\}$ tale che $\mathrm{ord}_p(f_j) = -D(p)+1$ allora, riscalando di $-D(p)$, avremo che $f_j$ ha uno zero semplice in $p$ e quindi in particolare la sua derivata prima è non nulla. Possiamo dunque applicare il Teorema della funzione implicita, grazie al quale esiste un intorno di $p$ la cui immagine tramite $\phi_D$ risulta una superficie di Riemann olomorficamente immersa in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. In particolare la 0-esima coordinata è non nulla, $\frac{f_i}{f_0}$ è olomorfa su tale immagine per ogni $i$ ed infine $\frac{f_j}{f_0}$ è coordinata locale sull'immagine. Osserviamo che la funzione $f_j$ di cui abbiamo bisogno è esattamente una funzione tale che $f_j \in L(D-p)$ ma $f_j \notin L(D-2p)$. □

Riassumendo, dalle ultime due proposizioni si evince il seguente criterio.

**Teorema 5.30.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa, sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che $|D|$ è un sistema libero. Allora, $\phi_D$ è una mappa olomorfa iniettiva e $\phi_D(X)$ è una curva proiettiva liscia in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ se e solo se per ogni coppia di punti $p, q \in X$ (distinti o no) si ha $\dim L(D-p-q) = \dim L(D) - 2$.

In tal caso $\phi_D$ è quindi un isomorfismo sull'immagine ed è perciò un'immersione come richiesta: ci permette di vedere $X$ come superficie di Riemann all'interno dello spazio proiettivo.

**Definizione 5.31.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che:

- $|D|$ è un sistema libero;
- $\phi_D$ è un'immersione olomorfa.

In questo caso si dice che $D$ è un *divisore molto ampio.*

**Esempio 5.32.** Sia $X = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sfera di Riemann e sia $D = 3\cdot[1:0]$ divisore di $X$. Osserviamo che $\dim L(D) = 4$ per il Corollario 4.26. Inoltre $D$ è un divisore molto ampio:

- $|D|$ è un sistema libero per la Proposizione 5.23, infatti per ogni $p \in X$ si ha $\dim L(D-p) = 3$ per il Corollario 4.26;
- $\phi_D$ è un embedding per il Teorema 5.30, infatti per ogni $p, q \in X$ si ha $\dim L(D-p-q) = 2$ sempre per il Corollario 4.26.

Indicata con $x$ la coordinata locale relativa alla carta $U_0$ $\left(\text{ossia } x = \frac{x_1}{x_0}\right)$, abbiamo che $\{1, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}\}$ è una base dello spazio vettoriale $L(D)$. Dunque per il Teorema 5.30 si ha la seguente immersione olomorfa:

$$\begin{aligned} \phi_D : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [x_1^3 : x_0 x_1^2 : x_0^2 x_1 : x_0^3]. \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che, a meno di un cambio di coordinate proiettive, abbiamo ritrovato l'immersione di Veronese $\nu_{1,3}$. Sia ora $W = \text{span}\{1, x^{-1}, x^{-2}\}$ sottospazio vettoriale di $L(D)$ e consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \arrow[dd, dashed, "p"] \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \arrow[ur, "\phi_D"] \arrow[dr, "\phi_{\mathbb{P}(W)}"] & \\ & \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

dove $\phi_{\mathbb{P}(W)}([x_0 : x_1]) = [x_1^3 : x_0 x_1^2 : x_0^3]$ e $p([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) = [x_0 : x_1 : x_3]$ è la proiezione di di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ su $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dal punto $[0 : 0 : 1 : 0]$. Si osserva che $\phi_{\mathbb{P}(W)}$ è ancora olomorfa ed iniettiva ma la sua immagine in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, ossia $\mathbb{V}(z_1^3 - z_2 z_0^2)$, non è liscia in $[0 : 0 : 1]$.

Concludiamo il capitolo con un'osservazione in merito al grado della curva proiettiva liscia di cui una determinata superficie di Riemann è immagine attraverso una funzione olomorfa.

**Proposizione 5.33.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa. Sia $\phi : X \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ una mappa olomorfa tale che $\phi(X)$ è una curva proiettiva liscia. Allora, preso $H$ iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, si ha:

$$\deg(\phi^*(H)) = \deg(\phi)\deg(\phi(X)).$$

*Dimostrazione.* Sia $L$ polinomio omogeneo di grado 1 che definisce l'iperpiano $H$. Sia $p \in X$ e sia $M$ un secondo polinomio omogeneo di grado 1 tale che non si annulli in $\phi(p)$. Allora, detto $\mathrm{div}(L)$ il divisore di iperpiano di $L$ su $\phi(X)$, si ha:

$$\phi^*(H)(p) = \mathrm{ord}_p\left(\frac{L}{M}\circ\phi\right) = \mathrm{mult}_p(\phi)\,\mathrm{ord}_{\phi(p)}\left(\frac{L}{M}\right) = \mathrm{mult}_p(\phi)\cdot\mathrm{div}(L)(\phi(p)).$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\deg(\phi^*(H)) &= \sum_{p\in X}\phi^*(H)(p) = \\ &= \sum_{q\in\phi(X)}\ \sum_{p\in\phi^{-1}(q)}\mathrm{mult}_p(\phi)\cdot\mathrm{div}(L)(q) = \\ &= \sum_{q\in\phi(X)}\mathrm{div}(L)(q)\cdot\deg(\phi) = \\ &= \deg(\phi)\deg(\phi(X)).\end{aligned}$$

□

**Corollario 5.34.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa e compatta. Sia $D\in\mathrm{Div}(X)$ tale che $\phi_D : X\to\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è un'immersione olomorfa di $X$. Allora:

$$\deg(\phi(X)) = \deg(D).$$

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dalla Proposizione 5.33 osservando che $\deg(\phi) = 1$ poiché $\phi$ è iniettiva. Inoltre dal Corollario 5.18 segue che $\deg(D) = \deg(\phi^*(H))$. □

# Capitolo 6

# Riemann-Roch e un'importante conseguenza

In questo ultimo capitolo, lavoreremo con $X$ superfici di Riemann compatte e connesse. Inoltre è necessario assumere che su tali $X$ esistano delle funzioni meromorfe globali non costanti. Tale risultato non è affatto banale ed è noto come *Teorema di esistenza di Riemann* (vedi [Har16]).

## 6.1 Resti di Laurent e il problema di Mittag-Leffler

**Definizione 6.1.** Data una serie di Laurent $a(z)$, un polinomio di Laurent $r(z) = \sum_{i=n}^{m} c_i z^i$ tale che $c_m \neq 0$ è detto *resto di Laurent* per $a(z)$ se la serie $a(z) - r(z)$ presenta solo termini di grado maggiore o uguale a $m + 1$.

**Lemma 6.2.** Siano $\{p_1, \ldots, p_n\} \subseteq X$ un numero finito di punti distinti e siano $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$. Allora esiste una funzione $f \in \mathcal{M}(X)$ tale che $\mathrm{ord}_{p_i}(f) = m_i$ per ogni $i \in 1, \ldots, n$.

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo risultato segue dal *Lemma di approssimazione delle serie di Laurent* di cui si ha un'ampia trattazione in [Mir95, Lemmi 1.10-1.15, capitolo VI]. □

Procediamo dunque fissando per ogni punto $p \in X$ una coordinata locale $z_p$ centrata nel punto $p$ stesso.

**Definizione 6.3.** Un *divisore di resti di Laurent* è dato dalla somma formale seguente:

$$\sum_{p \in X} r_p \cdot p,$$

dove per ogni $p \in X$, $r_p(z_p)$ è un polinomio di Laurent nella coordinata $z_p$, non identicamente nullo solo per un numero finito di punti. Indichiamo l'insieme dei divisori di questo tipo con $\mathcal{T}(X)$ che risulta dunque essere un gruppo rispetto alla somma formale.

Osserviamo che tale divisore non è a coefficienti interi come quelli incontrati nei capitoli precedenti. Utilizzeremo però i divisori classici per definire i seguenti insiemi.

**Definizione 6.4.** Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ e consideriamo il sottogruppo di $\mathcal{T}(X)$ così costruito:

$$\mathcal{T}[D](X) := \left\{ \sum_{p \in X} r_p \cdot p \;\middle|\; \text{per ogni } r_p \neq 0 \text{ si ha } \deg(r_p) < -D(p) \right\}$$

dove $\deg(r_p)$ è il grado massimo del polinomio $r_p$.

È naturale ora definire una mappa di troncamento che ad ogni elemento di $\mathcal{T}(X)$ associa un elemento del sottogruppo $\mathcal{T}[D](X)$ semplicemente rimuovendo da ogni polinomio $r_p$ i termini di grado maggiore o uguale a $-D(p)$. In modo del tutto analogo, dati $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ tali che $D_1 \leq D_2$ definiamo la seguente mappa:

$$t_{D_2}^{D_1} : \mathcal{T}[D_1](X) \longrightarrow \mathcal{T}[D_2](X),$$

tale che da ogni polinomio $r_p$ vengono rimossi i termini di grado maggiore o uguale a $-D_2(p)$.

Possiamo inoltre definire un operatore di moltiplicazione. Fissiamo $D \in \mathrm{Div}(X)$ e sia $f \in \mathcal{M}(X)$ e definiamo la seguente funzione:

$$\begin{aligned} \mu_f^D : \mathcal{T}[D](X) &\longrightarrow \mathcal{T}[D - \mathrm{div}(f)](X) \\ \sum_{p \in X} r_p \cdot p &\longmapsto \sum_{p \in X} (f r_p) \cdot p. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\mu_f^D$ è un isomorfismo: infatti $\mu_{\frac{1}{f}}^{D-\mathrm{div}(f)}$ è la sua inversa.

Analizziamo dunque come tali oggetti risultino in realtà legati agli spazi $L(D)$. Consideriamo la seguente funzione:

$$\alpha_D : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{T}[D](X)$$

che ad ogni $f \in \mathcal{M}(X)$ associa $\sum_{p\in X} f_p \cdot p$ dove $f_p$ coincide con lo sviluppo in serie di Laurent di $f$ nella variabile locale $z_p$ a cui si rimuovono tutti i termini di grado maggiore o uguale a $-D(p)$. Tale somma risulta finita (ossia $r_p \neq 0$ solo per finiti punti $p$) grazie alla finitezza dei poli di $f$ (si veda Corollario 2.47) e a quella del supporto di $D$.

**Osservazione 6.5.** Ricordando la Definizione 4.22, si nota immediatamente che $L(D) = \mathrm{Ker}(\alpha_D)$.

Tramite la mappa $\alpha_D$ associamo ad ogni funzione meromorfa un divisore di Laurent nell'insieme $\mathcal{T}[D](X)$. Possiamo però chiederci se è possibile fare il viceversa, ossia se dato $Z = \sum_{p\in X}(r_p)\cdot p \in \mathcal{T}[D](X)$ sia possibile ricostruire una funzione meromorfa su $X$ tale che presenti come resti di Laurent i termini $r_p$ di $Z$. Osserviamo che se $r_p = 0$ e $D(p) = 0$, allora la preimmagine di $Z$ tramite la funzione $\alpha_D$ deve essere una funzione $f$ tale che $\mathrm{ord}_p(f) \geq 0$ (ossia $f$ è olomorfa in $p$). Se $r_p = 0$ e $D(p) > 0$ allora la preimmagine che sto cercando potrebbe ammettere un polo in $p$, ma escludiamo tale caso. Riassumendo, vogliamo costruire una funzione che presenti determinati resti di Laurent in un numero finito di punti e altrove (cioè nei punti dove $r_p = 0$) risulti olomorfa e non presenti ulteriori poli. In altre parole ci chiediamo quando la funzione $\alpha_D$ risulta suriettiva.

Tale problema è noto come *problema di Mittag-Leffler*. La possibilità di risoluzione di quest'ultimo su una determinata superficie $X$, è quantificata dal cokernel dell'applicazione $\alpha_D$. Infatti $Z \in \mathcal{T}[D](X)$ è un elemento dell'immagine di $\alpha_D$ se e solo se la sua classe nel cokernel di $\alpha_D$ è nulla. Indichiamo il cokernel in questione con il simbolo $H^1(D) = \mathcal{T}[D](X)/\,\mathrm{Im}(\alpha_D)$.

Consideriamo $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ tali che $D_1 \leq D_2$. Dato che $L(D_1) \subseteq$

$L(D_2)$ e $t_{D_2}^{D_1} \circ \alpha_{D_1} = \alpha_{D_2}$, si hanno le seguenti successioni esatte corte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/L(D_1) & \xrightarrow{\alpha_{D_1}} & \mathcal{T}[D_1](X) & \longrightarrow & H^1(D_1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \big\downarrow \varphi & & \big\downarrow t_{D_2}^{D_1} & & \big\downarrow \psi & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/L(D_2) & \xrightarrow{\alpha_{D_2}} & \mathcal{T}[D_2](X) & \longrightarrow & H^1(D_2) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

tali che il diagramma commuta. Osserviamo che le mappe verticali sono tutte suriettive e dunque dal Lemma del serpente (vedi [AM16, Proposizione 2.10]) si ha la successione esatta dei kernel:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker}(\varphi) \longrightarrow \operatorname{Ker}\left(t_{D_2}^{D_1}\right) \longrightarrow \operatorname{Ker}(\psi) \longrightarrow 0$$

**Osservazione 6.6.** Notiamo che:

- $\operatorname{Ker}(\varphi) = L(D_2)/L(D_1)$ e dunque:

$$\dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \dim(L(D_2)) - \dim(L(D_1));$$

- $\operatorname{Ker}\left(t_{D_2}^{D_1}\right)$ è composto dai divisori di Laurent $\sum_{p \in X} r_p \cdot p$ tali che, in ogni punto $p$, $r_p$ ha termini di grado maggiore uguale a $-D_2(p)$ e non presenta termini di grado maggiore di $-D_1(p)$. Dunque si ha:

$$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(t_{D_2}^{D_1}\right)\right) = \sum_{p \in X} (D_2(p) - D_1(p)) = \deg(D_2) - \deg(D_1);$$

- $\operatorname{Ker}(\psi) = H^1(D_1)/H^1(D_2)$ e lo indichiamo con $H^1(D_1/D_2)$. Anch'esso risulta di dimensione finita, grazie alla finitezza degli altri due kernel. Difatti per esattezza della successione e primo teorema di omomorfismo, si ha:

$$\begin{aligned}
\dim(H^1(D_1/D_2)) &= \dim\left(\operatorname{Ker}\left(t_{D_2}^{D_1}\right)\right) - \dim(\operatorname{Ker}(\varphi)) = \\
&= [\deg(D_2) - \dim(L(D_2))] - [\deg(D_1) - \dim(L(D_1))].
\end{aligned}$$

**Proposizione 6.7.** Sia $D \in \operatorname{Div}(X)$, allora $H^1(D)$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita.

*Dimostrazione.* Vedi [Mir95, Proposizione 2.7, capitolo VI]. □

**Osservazione 6.8.** Dati $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(X)$ tali che $D_1 \leq D_2$, dalla finitezza degli spazi $H^1(D_1)$ e $H^1(D_2)$ si ha che $\dim H^1(D_1/D_2) = \dim H^1(D_1) - \dim H^1(D_2)$. Dunque dall'Osservazione 6.6 si ha:

$$\dim L(D_1) - \deg(D_1) - \dim H^1(D_1) = \dim L(D_2) - \deg(D_2) - \dim H^1(D_2).$$

Dato che qualsiasi coppia di divisori ha un divisore massimo comune, la quantità $\dim L(D) - \deg(D) - \dim H^1(D)$ è costante per ogni $D \in \mathrm{Div}(X)$.

Possiamo dunque enunciare una prima formulazione del teorema di Riemann-Roch.

**Teorema 6.9.** Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$, allora vale:

$$\dim L(D) - \dim H^1(D) = \deg(D) + 1 - \dim H^1(0).$$

*Dimostrazione.* Dall'Osservazione 6.8 si ha:

$$\begin{aligned}\dim L(D) - \deg(D) - \dim H^1(D) &= \dim L(0) - \deg(0) - \dim H^1(0) = \\ &= 1 - \dim H^1(0).\end{aligned}$$

Riordinando i termini si ha la tesi. □

Lo spazio $H^1(D)$ è in realtà strettamente legato anche allo spazio delle 1-forme meromorfe su $X$.

**Teorema 6.10** (Dualità di Serre)**.** Sia $D \in \mathrm{Div}(X)$ e consideriamo la seguente mappa:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res} : L^{(1)}(-D) &\longrightarrow (H^1(D))^* \\ \omega &\longmapsto \mathrm{Res}_\omega : H^1(D) \to \mathbb{C}\end{aligned}$$

con $\mathrm{Res}_\omega \left(\sum_{p\in X} r_p \cdot p\right) := \sum_{p\in X} c_{-1}(r_p\omega)$ dove $c_{-1}(r_p\omega)$ è il coefficiente di grado $-1$ nello sviluppo nel punto $p$ nelle coordinate locali $z_p$ di $r_p\omega$. Allora la mappa Res è ben definita ed è un isomorfismo di $\mathbb{C}$-spazi vettoriali.

In particolare per ogni divisore canonico $K \in \mathrm{KDiv}(X)$ si ha:

$$\dim H^1(D) = \dim L^{(1)}(-D) = \dim L(K - D).$$

*Dimostrazione.* La buona definizione della funzione è trattata in [Mir95, pp. 186-187, capitolo VI]. La prova che Res è un isomorfismo si può invece trovare in [Mir95, pp. 187-191, capitolo VI]. Osserviamo infine che dato l'isomorfismo, l'uguaglianza $\dim H^1(D) = \dim L^{(1)}(-D)$ è ovvia. Inoltre grazie all'isomorfismo della Proposizione 4.34, si ha $\dim L^{(1)}(-D) = \dim L(K - D)$ e dunque si ha l'uguaglianza del teorema. □

**Osservazione 6.11.** Si osservi che i termini $c_{-1}(r_p\omega)$ altro non sono che i residui della 1-forma meromorfa $r_p\omega$ nel punto $p \in X$. Per approfondire risultati più generali su tali residui si può consultare [Mir95, sezione 3, capitolo IV].

## 6.2 Genere di una superficie di Riemman

Occorre introdurre il concetto di *genere* di una superficie di Riemann. La prima nozione di genere che solitamente si incontra è quella topologica.

**Definizione 6.12.** Sia $S$ varietà topologica compatta, connessa e orientabile di dimensione reale 2. Il *genere topologico* di $S$ è dato da:

$$g = \frac{1}{2} b_1(S),$$

dove $b_1(S)$ è il primo numero di Betti di $S$ ossia il rango di $H_1(S, \mathbb{Z})$, primo gruppo di omologia singolare di $S$ a coefficienti in $\mathbb{Z}$. Equivalentemente $g$ è tale che $\chi(S) = 2 - 2g$ dove $\chi(S)$ è la caratteristica di Eulero-Poincaré topologica di $S$.

Osserviamo che le superfici di Riemann compatte e connesse sono superfici per cui il genere topologico è definito: sono infatti orientabili poiché le funzioni olomorfe preservano l'orientazione (vedi [Mir95, p.5, capitolo I]).

**Proposizione 6.13.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta e connessa di genere topologico $g$. Allora esiste un divisore canonico $K \in \mathrm{KDiv}(X)$ tale che $\deg(K) = 2g - 2$.

*Dimostrazione.* L'idea è considerare $f \in \mathcal{M}(X)$ non costante e la corrispettiva funzione olomorfa $F : X \to \mathbb{C}_\infty$. Sia poi $\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(\mathbb{C}_\infty)$ definita localmente sulla carta $U_0$ come $\omega = \mathrm{d}z$: tale 1-forma presenta solo un polo doppio nel punto all'infinito $[0:1]$. Si considera poi $\eta = F^*\omega \in \mathcal{M}^{(1)}(X)$. Utilizzando la formula di Riemann-Hurwitz e il Lemma 3.34 si ha che $\deg(\mathrm{div}(\eta)) = 2g-2$ (si consulti [Mir95, Proposizione 1.14, capitolo V] per maggiori dettagli). □

**Osservazione 6.14.** Osserviamo che con $X$ come nell'ipotesi, si ha che ogni divisore canonico di $X$ ha grado pari a $2g-2$ (vedi punti 3 e 5 del Lemma 4.16).

**Definizione 6.15.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta e connessa. Definiamo il genere olomorfo di $X$ come:

$$g = \dim \Omega^{(1)}(X).$$

Ricordiamo che $\dim \Omega^{(1)}(X) = \dim L^{(1)}(0) = \dim L(K)$ per ogni $K \in \mathrm{KDiv}(X)$.

**Proposizione 6.16.** Le due nozioni di genere per $X$ superficie di Riemann compatta e connessa coincidono.

*Dimostrazione.* Osserviamo che dal Teorema 6.10 abbiamo che $\dim H^1(K) = \dim L(0)$ ma $\dim L(0) = \dim \mathcal{O}(X) = 1$ per compatezza. Inoltre si ha anche che $\dim H^1(0) = \dim L(K)$. Dunque applicando il Teorema 6.9 otteniamo:

$$\dim L(K) - \dim H^1(K) = \deg(K) + 1 - \dim H^1(0).$$

Usando quanto precedentemente osservato e la Proposizione 6.13, si ha:

$$2 \dim H^1(0) = 2 + 2g - 2 = 2g.$$

Quindi $g = \dim H^1(0) = \dim L(K)$. □

## 6.3 Il teorema di Riemann-Roch e curve proiettive

Enunciamo ora il teorema di Riemann-Roch nella sua versione finale.

**Teorema 6.17** (Teorema di Riemann-Roch)**.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta, connessa di genere $g$. Allora, presi $D \in \mathrm{Div}(X)$ e $K \in \mathrm{KDiv}(X)$, vale la seguente formula:

$$\dim L(D) - \dim L(K-D) = \deg(D) + 1 - g.$$

*Dimostrazione.* Segue dal Teorema 6.9 osservando che:

- $\dim H^1(D) = \dim L(K - D)$ grazie al Teorema 6.10;
- $\dim H^1(0) = g$ per quanto mostrato nella Proposizione 6.16.

$\square$

**Corollario 6.18.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa, compatta di genere $g$. Se $D \in \mathrm{Div}(X)$ è tale che $\deg(D) \geq 2g-1$, allora $H^1(D) = 0$ e $\dim L(D) = \deg(D) + 1 - g$.

*Dimostrazione.* Sia $f \in L(K-D)$ non identicamente nulla, allora deve valere che $\sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(f) \geq -\deg(K) + \deg(D)$. Ricordiamo che per l'Osservazione 6.14 si ha $\deg(K) = 2g - 2$. Inoltre dato che $X$ è compatta e connessa si ha che $\sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p(f) = 0$ per la Proposizione 2.73. Dunque:

$$0 \geq -(2g-2) + \deg(D) \geq -2g + 2 + 2g - 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \geq 1.$$

Ma questo è assurdo, quindi $L(K - D) = \{0\}$. Dato che $\dim H^1(D) = \dim L(K - D) = 0$ allora si ha $H^1(D) = \{0\}$. Infine applicando il Teorema di Riemann-Roch si ha l'uguaglianza voluta. $\square$

Il Teorema di Riemann-Roch ci permette di trovare delle condizioni che i divisori devono rispettare affinché una data superficie si possa immergere olomorficamente nello spazio proiettivo.

**Proposizione 6.19.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa, compatta e di genere $g$. Se $D \in \mathrm{Div}(X)$ è tale che $\deg(D) \geq 2g + 1$, allora $D$ è molto ampio.

*Dimostrazione.* Proviamo che per ogni coppia di punti $p, q \in X$ si ha $\dim L(D - p - q) = \dim L(D) - 2$. Osserviamo che i divisori $D$, $D - p$ e $D - p - q$ hanno tutti grado almeno $2g - 1$. Quindi per il Corollario 6.18 si ha:

- $\dim L(D) = \deg(D) + 1 - g$;
- $\dim L(D-p) = \deg(D-p) + 1 - g = \deg(D) - 1 + 1 - g = \dim L(D) - 1$;
- $\dim L(D - p - q) = \deg(D - p - q) + 1 - g = \deg(D) - 2 + 1 + g = = \dim L(D) - 2$.

In particolare per ogni punto $p \in X$, si ha $\dim L(D-p) = \dim L(D) - 1$: per la Proposizione 5.23, il sistema $|D|$ è libero. Sono quindi rispettate tutte le ipotesi del Teorema 5.30 e dunque si ha quanto volevasi dimostrare. □

A questo punto della trattazione, segue in modo naturale il seguente teorema.

**Teorema 6.20.** Tutte le superfici di Riemann connesse e compatte sono varietà complesse proiettive. Ossia data $X$ superficie di Riemann connessa, compatta e di genere $g$, essa si immerge olomorficamente nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ per $n = g+1$.

In altre parole, esiste $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ olomorfa, iniettiva e tale che $i(X)$ è una curva proiettiva liscia.

*Dimostrazione.* È sufficiente costruire un divisore $D \in \mathrm{Div}(X)$ tale che $\deg(D) = 2g+1$. Fatto ciò, la dimostrazione si conclude utilizzando la Proposizione 6.19. Ci basta dunque prendere un punto $p \in X$ e considerare il divisore $D = (2g+1) \cdot p$. Osserviamo che $\dim L(D) = \deg(D) + 1 - g = g + 2$ per il Corollario 6.18 e dunque si ha l'immersione di $X$ in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con $n = \dim L(D) - 1$. □

## 6.4 Superfici di Riemann di genere basso

Analizziamo più nel dettaglio le superfici di genere 0 e quelle di genere 1.

**Proposizione 6.21.** Sia $X$ una superficie di Riemann compatta, connessa e di genere 0. Allora $X$ è isomorfa alla sfera di Riemann.

*Dimostrazione.* Sia $p \in X$ e consideriamo il divisore $D = p \in \mathrm{Div}(X)$. Sia poi $K \in \mathrm{KDiv}(X)$: dall'Osservazione 6.14 si ha $\deg(K) = -2$. Quindi $\deg(K-D) = -2-1 < 0$ e dunque $L(K-D) = \{0\}$ per il Lemma 4.24. Dal Teorema di Riemann-Roch si ha $\dim L(D) = 2$. Dal Teorema 6.20 abbiamo quindi la seguente immersione olomorfa:

$$i : X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Essendo $i$ iniettiva si ha $\deg(i) = 1$ e dunque per il Corollario 2.71 si ha che $i$ è un isomorfismo. □

**Proposizione 6.22.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta, connessa e di genere 1. Allora $X$ è isomorfa a una cubica piana liscia proiettiva.

*Dimostrazione.* Sia $K \in \mathrm{KDiv}(X)$: dall'Osservazione 6.14 si ha $\deg(K) = 0$. Consideriamo poi $p \in X$ e prendiamo il divisore $D = 3 \cdot p$. Abbiamo quindi $\deg(K - D) < 0$ e dunque $L(K - D) = \{0\}$. Dal Teorema di Riemann-Roch si ha $\dim L(D) = 3$. Quindi dal Teorema 6.20 si ha che $X$ si immerge olomorficamente in una curva proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. In particolare dal Corollario 5.34 si ha che $\deg(\phi(X)) = 3$ e quindi $\phi(X)$ è isomorfa a una cubica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. $\square$

Vediamo una realizzazione concreta di tali immersioni nel caso dei tori complessi. Definiamo per prima cosa queste superfici di Riemann non ancora incontrate nella trattazione.

**Definizione 6.23.** Sia $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ un sottogruppo discreto isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ ossia tale per cui esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ tali che $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$. Allora consideriamo lo spazio topologico $X := \mathbb{C}/\Lambda$. Grazie alla proiezione al quoziente $\pi : \mathbb{C} \to X$, possiamo dotare $X$ di una struttura complessa in modo che $\pi$ sia olomorfa (si veda [Mir95, pp. 9-10, capitolo I]).

La superficie di Riemann così ottenuta è un *toro complesso* e risulta compatta, connessa e di genere 1 (poiché topologicamente omeomorfa a un toro).

**Osservazione 6.24.** Possiamo sempre ricondurci, a meno di biolomorfismo, a considerare un toro complesso ottenuto grazie a un reticolo del tipo $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ dove $\tau \in \mathbb{C}$ tale che $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.

Infatti, consideriamo $X = \mathbb{C}/\Lambda'$ con $\Lambda' = \mathbb{Z}\lambda_1 + \mathbb{Z}\lambda_2$ e sia $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Sia inoltre $m_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $m_\alpha(z) = \alpha z$. Osserviamo che tale mappa passa al quoziente e induce un biolomorfismo tra $X$ e $\mathbb{C}/\alpha\Lambda'$. In particolare per $\alpha = \lambda_1^{-1}$ si ha che $X$ è biolomorfo al toro ottenuto quozientando per il reticolo $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\lambda_1^{-1}\lambda_2)$ dove, a meno di prendere il suo opposto, si ha $\tau = \lambda_1^{-1}\lambda_2$ con parte immaginaria positiva.

Presentiamo ora un'importante funzione su tali superfici, detta *funzione $\wp$ di Weierstrass.*

**Definizione 6.25.** Sia $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ reticolo e consideriamo $\wp_\Lambda$ la serie di funzioni meromorfe tale che:

$$\wp_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right).$$

**Proposizione 6.26.** La funzione $\wp_\Lambda$ è meromorfa su $\mathbb{C}$ ed inoltre $\Lambda$-invariante, ossia $\wp_\Lambda(z+\lambda) = \wp_\Lambda(z)$ per ogni $\lambda \in \Lambda$ e per ogni $z \in \mathbb{C}$.

*Dimostrazione.* Vedi [Kir92, Proposizione 5.10 e Lemma 5.13, capitolo 5]. □

Grazie al fatto che $\wp_\Lambda$ è $\Lambda$-invariante, la funzione di Weierstrass passa bene al quoziente definendo in questo modo una funzione meromorfa sul toro complesso $\mathbb{C}/\Lambda$.

**Osservazione 6.27.** Sia $\wp_\Lambda$ che $\wp'_\Lambda$ presentano poli solo nel reticolo $\Lambda$. Dunque $\wp_\Lambda$ su $\mathbb{C}/\Lambda$ presenta poli solo in 0.

**Proposizione 6.28.** Sia $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ reticolo e $X = \mathbb{C}/\Lambda$. Allora la funzione $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $\varphi([z]_\Lambda) = \begin{cases} [0:0:1] & \text{se } z \in \Lambda \\ [1:\wp(z):\wp'(z)] & \text{se } z \in \mathbb{C} \smallsetminus \Lambda \end{cases}$ è un'immersione avente come immagine la seguente curva piana proiettiva liscia:

$$\varphi(X) = \overline{\{y^2 = 4x^3 + ax + b\}}$$

dove $a, b \in \mathbb{C}$.

*Dimostrazione.* Vedi [Kir92, Proposizioni 5.23 e 5.43, capitolo 5]. □

Vale inoltre il seguente risultato:

**Proposizione 6.29.** Sia $X$ superficie di Riemann connessa, compatta e di genere 1. Allora $X$ è isomorfa a un toro complesso.

*Dimostrazione.* L'idea è considerare il rivestimento universale $p : \widetilde{X} \to X$ dove $\widetilde{X}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ poiché $X$ è omeomorfo ad $S^1 \times S^1$. Sappiamo quindi che $\pi_1(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ agisce su $\widetilde{X}$ con due traslazioni indipendenti. In particolare $\pi_1(X)$ è isomorfo a un reticolo $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$. Inoltre consideriamo su $\widetilde{X}$ la struttura di superficie di Riemann in modo tale che $p$ sia una mappa olomorfa (si veda [Mir95, Lemma 4.7, capitolo III]). Occorre dunque mostrare che $\widetilde{X}$ è isomorfa a $\mathbb{C}$ come superficie di Riemann (si veda [Mir95, Proposizione 1.9, capitolo VII]). Si ha poi che $X$ è isomorfa a $\widetilde{X}/_\sim$ dove $\sim$ è la relazione di equivalenza indotta dall'azione di $\pi_1(X)$, identificato con il gruppo delle trasformazioni di rivestimento, su $\widetilde{X}$. A questo punto si ha il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{C} \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{X}/_\sim \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{C}/\Lambda \end{tikzcd}$$

Tutte le mappe sono olomorfe ed in particolare $\phi$ risulta isomorfismo. Si ha quindi che $X$ è isomorfa come superficie di Riemann a $\mathbb{C}/\Lambda$. □

Infine facciamo un paio di considerazioni sulle superfici di genere $g \geq 2$.

**Proposizione 6.30.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta, connessa di genere $g$ e sia $K \in \mathrm{KDiv}(X)$. Allora:

- se $g = 2$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 3$ si ha che $nK$ è molto ampio;
- se $g \geq 3$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq 2$ si ha che $nK$ è molto ampio.

*Dimostrazione.* Il risultato segue in modo immediato dalla Proposizione 6.19 ricordando che $\deg(K) = 2g - 2$ (vedi Proposizione 6.13). Infatti:

- se $g = 2$ allora $\deg(nK) = 2n \geq 6$ e quindi in particolare si verifica che $\deg(nK) \geq 2g + 1 = 5$;
- se $g \geq 3$ allora $\deg(nK) = n(2g - 3) \geq 4g - 6$ e quindi in particolare si verifica che $\deg(nK) \geq 2g + 1$.

□

Si ha immediatamente il seguente corollario.

**Corollario 6.31.** Sia $X$ superficie di Riemann compatta, connessa e di genere $g$. Sia $K \in \mathrm{KDiv}(X)$:

- se $g = 2$ allora $\phi_{|3K|} : X \to \mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ è un immersione olomorfa;
- se $g \geq 3$ allora $\phi_{|2K|} : X \to \mathbb{P}^{3g-4}(\mathbb{C})$ è un immersione olomorfa.

# Bibliografia


[AM16] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Series in Mathematics. Westview Press, Boulder, CO, economy edition, 2016. For the 1969 original see [MR0242802].

[Car63] Henri Cartan. *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*. Éditions Scientifiques Hermann, Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-London, 1963.

[FB09] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Complex analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2009.

[For91] Otto Forster. *Lectures on Riemann surfaces*, volume 81 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991. Translated from the 1977 German original by Bruce Gilligan, Reprint of the 1981 English translation.

[GR09] Robert C. Gunning and Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1965 original.

[Har16] David Harbater. Riemann's existence theorem. In *The legacy of Bernhard Riemann after one hundred and fifty years. Vol. I*, volume 35.1 of *Adv. Lect. Math. (ALM)*, pages 275–286. Int. Press, Somerville, MA, 2016.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Kir92] Frances Kirwan. *Complex algebraic curves*, volume 23 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Lan99] Serge Lang. *Complex analysis*, volume 103 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, fourth edition, 1999.

[Man15] Marco Manetti. *Topology*, volume 91 of *Unitext*. Springer, Cham, italian edition, 2015. La Matematica per il 3+2.

[Mil63] J. Milnor. *Morse theory*, volume No. 51 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1963. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells.

[Mir95] Rick Miranda. *Algebraic curves and Riemann surfaces*, volume 5 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[Sha77] I. R. Shafarevich. *Basic algebraic geometry*. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. Translated from the Russian by K. A. Hirsch, Revised printing of Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. 213, 1974.

[SKKT00] Karen E. Smith, Lauri Kahanpää, Pekka Kekäläinen, and William Traves. *An invitation to algebraic geometry*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2000.

[SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis*, volume 2 of *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.