Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

INTRODUZIONE ALLE SUPERFICI CON DIMENSIONE DI KODAIRA ZERO E SUPERFICI K3

Tesi di laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Dott.
ENRICO FATIGHENTI

Presentata da:
GIULIO PETRACCINI

Anno Accademico 2023-2024

Introduzione

Uno degli obiettivi principali di questa tesi è studiare una particolare famiglia di superfici algebriche di grande interesse geometrico: le *superfici K3*. In termini tecnici, si tratta di superfici semplicemente connesse con divisore canonico banale. Il loro studio apparve già rilevante fin dagli albori della geometria algebrica, in particolare nel contesto della scuola italiana di inizio '900, capitanata da Guido Castelnuovo. Infatti, lo studio delle superfici K3 è strettamente correlato allo studio delle curve canoniche, di grande importanza nel contesto della geometria algebrica classica. Come vedremo nel corso della tesi, le superfici K3 occupano un ruolo centrale all'interno della classificazione di Enriques-Kodaira delle superfici, senza dubbio uno dei successi apicali della scuola italiana. Il primo ad avviarne uno studio sistematico fu però André Weil negli anni '50, e fu proprio Weil a coniarne il nome. In "Oeuvres Scientifiques - Collected Papers II" scrisse:

> "Nella seconda parte del mio trattato, ci occupiamo delle varietà Kähler conosciute come K3, così chiamate in onore di Kummer, Kähler, Kodaira e della bellezza della montagna K2 in Kashmir."

Successivamente, il primo matematico a utilizzare il nome "superficie K3" fu in effetti proprio Kunihiko Kodaira. Al di là della loro rilevanza in geometria e altri ambienti matematici, come per esempio la teoria dei nodi e i sistemi integrabili, il loro interesse non si limita soltanto alla matematica. Le superfici K3 sono infatti il caso 2-dimensionale delle varietà di Calabi-Yau e delle varietà Hyperkähler, le quali forniscono un modello di centrale importanza nello studio della fisica moderna e, più precisamente, in teoria delle stringhe.

Un punto di partenza nello studio delle superfici K3, e in questa tesi, è la *dimensione di Kodaira*, un importante invariante numerico per le superfici. Introdotta inizialmente da Igor Shafarevich durante un seminario, venne successivamente estesa da Shigeru Iitaka a varietà di dimensione arbitraria. La dimensione di Kodaira è un invariante di una varietà che, in un certo senso, è un analogo algebro-geometrico della nozione di curvatura: dimensione negativa corrisponde a curvatura positiva, dimensione 0 alla piattezza, dimensione positiva a curvatura negativa. La dimensione di Kodaira è alla base della già nominata classificazione delle superfici algebriche di Enriques-Kodaira, e più in generale delle varietà algebriche. In un certo senso, le varietà con dimensione di Kodaira "bassa" vengono considerate speciali, mentre quelle con dimensione di Kodaira massima vengono dette di tipo generale. Le superfici K3 si collocano tra le superfici con dimensione di Kodaira 0, assieme alle superfici abeliane, alle superfici di Enriques e alle superfici biellittiche. Il loro analogo 1-dimensionale sono le curve ellittiche, ovvero curve di genere 1. In questa tesi quindi, ci occuperemo di studiare alcuni elementi introduttivi di queste importanti superfici.

Andando più nel dettaglio, nel primo capitolo introdurremo alcuni strumenti classici della geometria algebrica e, più in generale, della geometria complessa. Ad esempio, daremo la definizione di fascio e di fibrato lineare su una varietà proiettiva liscia sul campo dei numeri complessi e descriveremo le principali costruzioni standard che ci serviranno poi nel resto della tesi. Per esempio, definiremo il gruppo di Picard, ovvero il gruppo dei fibrati lineari su una varietà a meno di isomorfismo. Successivamente, introdurremo i divisori (sia di Weil che di Cartier), analizzeremo il legame che sussiste tra divisori e fibrati, e spiegheremo in che modo siano utili per immergere le varietà negli spazi proiettivi.

Nel secondo capitolo inizieremo a focalizzarci sulle superfici, e ci porremo il problema di capire in quale modo si intersechino le curve che vivono su una data superficie. Definiremo quindi il prodotto di intersezione e proveremo che è una forma bilineare simmetrica ben definita sul gruppo di Picard di una superficie. Useremo questo, tra le altre cose, per dimostrare alcuni risultati classici come ad esempio il Teorema di Bézout per curve piane, la formula genere-grado e il Teorema di Riemann-Roch per superfici.

Nel terzo capitolo inizieremo ad entrare nel vivo della tesi. Parleremo di scoppiamenti, risoluzioni di mappe ed enunceremo il criterio di Castelnuovo per le (-1)-curve. Si tratta di risultati classici di geometria birazionale delle superfici che ci permetteranno di capire come possa procedere una classificazione birazionale delle superfici. Proprio a questo proposito, introdurremo la dimensione di Kodaira κ, un importante invariante birazionale (non solo per superfici ma per varietà di dimensione arbitraria) che ci permetterà di delineare una prima suddivisione in quattro classi: $\kappa = -\infty, 0, 1, 2$. Concluderemo il capitolo classificando le superfici minimali con dimensione di Kodaira 0, che sono:

superfici K3, superfici di Enriques, superfici abeliane, superfici biellittiche.

Nel quarto ed ultimo capitolo ci concentreremo prettamente sulle superfici K3. In un primo momento faremo un'analisi più teorica: studieremo le caratteristiche topologiche, gli invarianti, calcoleremo i numeri di Hodge e faremo alcune considerazioni sul gruppo di Picard di una superficie K3. Successivamente, passeremo all'analisi di alcuni esempi espliciti selezionati: capiremo quali superfici K3 si possono ottenere come intersezioni complete in uno spazio proiettivo, vedremo la costruzione della superficie di Kummer di una superficie abeliana e studieremo le mappe associate ai sistemi lineari di curve lisce su una superficie K3 al variare del loro genere. In particolare, vedremo esplicitamente come immergere le superfici K3 che sono intersezioni complete tramite sistemi lineari di curve lisce di uno specifico genere. Faremo un paio di esempi di superfici K3 che ammettono fibrazioni ellittiche, e concluderemo analizzando il legame che c'è tra le superfici di Enriques e le superfici K3 che ammettono un'involuzione senza punti fissi.

Indice

Capitolo 1

Fasci, fibrati e divisori su varietà

In questo primo capitolo andremo ad introdurre alcuni degli strumenti base della geometria algebrica che ci serviranno per tutto il resto della trattazione. Salvo diversa indicazione, X sarà sempre una varietà algebrica proiettiva liscia su $\mathbb{C}$.

1.1 Fasci

Definizione 1.1.1. Sia X uno spazio topologico. Un *prefascio* $\mathcal{F}$ di gruppi abeliani su X è il dato di:

i) un gruppo abeliano $\mathcal{F}(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$;

ii) un morfismo di gruppi abeliani $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, detto *morfismo di restrizione*, per ogni $V \subseteq U$ aperti in X.

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ vengono detti *sezioni* di $\mathcal{F}$ su U. Per non appesantire troppo la notazione, nel seguito scriveremo $s|_V$ piuttosto che $\rho_{UV}(s)$.

Possiamo definire in maniera totalmente analoga un prefascio di insiemi, di anelli, o in generale un prefascio a valori in una qualsiasi categoria. Per farlo basta sostituire le parole "gruppo abeliano" e "omomorfismo di gruppi abeliani" con gli opportuni oggetti e morfismi desiderati.

Definizione 1.1.2. Un prefascio $\mathcal{F}$ su uno spazio topologico X è un *fascio* se:

i) per ogni aperto $U \subseteq X$ e per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di U, se $s, t \in \mathcal{F}(U)$ sono due sezioni su U tali che $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ per ogni $i \in I$, allora si ha $s = t$;

ii) per ogni aperto $U \subseteq X$, per ogni ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di U e per ogni famiglia di sezioni $\{s_i \in \mathcal{F}(U_i)\}_{i\in I}$ tali che $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$ per ogni $i, j \in I$, allora esiste una sezione $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} = s_i$ per ogni $i \in I$.

Esempio 1.1.3. Sia X una varietà. Per ogni aperto $U \subseteq X$ sia $\mathcal{O}_X(U)$ l'anello delle funzioni regolari su U, e per ogni $V \subseteq U$ aperto sia $\rho_{UV} : \mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ l'ovvia restrizione di funzioni. Allora si ha che $\mathcal{O}_X$ è un fascio di anelli su X. Che sia un prefascio è ovvio, mentre le due condizioni aggiuntive che lo rendono un fascio valgono perché una funzione che è 0 localmente è 0, e perché una funzione che è regolare localmente è regolare. Chiamiamo $\mathcal{O}_X$ il *fascio delle funzioni regolari* su X.

Esempio 1.1.4. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo abeliano. Definiamo il *fascio costante* $\underline{G}_X$ come segue. Diamo a G la topologia discreta e per ogni aperto $U \subseteq X$ definiamo $\underline{G}_X(U) := \{\varphi : U \to G \text{ continua}\}$ con le ovvie mappe di restrizione. Otteniamo dunque un fascio e osserviamo che se l'aperto U è connesso allora $\underline{G}_X(U) \cong G$. Inoltre, se le componenti connesse di U sono aperte, si ha che $\underline{G}_X(U) \cong \prod_{|\pi_0(U)|} G$.

Definizione 1.1.5. Sia $\mathcal{F}$ un prefascio su X e $p \in X$ un punto. Definiamo $\mathcal{F}_p$ la *spiga* di $\mathcal{F}$ in p come

$$\mathcal{F}_p = \{(U, s) \mid p \in U \subseteq X,\ s \in \mathcal{F}(U)\}/\sim$$

dove $(U, s) \sim (V, t)$ se $s|_{U\cap V} = t|_{U\cap V}$.

Esempio 1.1.6. Consideriamo una varietà X e il suo fascio delle funzioni regolari $\mathcal{O}_X$. Sia p un punto di X. In questo caso, si ha che la spiga $\mathcal{O}_{X,p}$ di $\mathcal{O}_X$ in p è l'insieme delle coppie (U, φ), detti *germi*, dove U è un aperto di X contente p e φ è una funzione regolare in p, con la relazione che identifica due coppie (U, φ) e (V, ψ) se $\varphi|_{U\cap V} = \psi|_{U\cap V}$. Inoltre, osserviamo che $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello locale: l'unico ideale massimale $\mathfrak{m}_p$ è dato dall'insieme dei germi di funzioni regolari che si annullano in p. Ad esempio, se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva con anello delle coordinate omogeneo $\mathbb{C}[X]$, allora si può dimostrare che $\mathcal{O}_{X,p} = \mathbb{C}[X]_{(\mathfrak{m}_p)}$.

Definizione 1.1.7. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due prefasci su X. Un *morfismo di prefasci* da $\mathcal{F}$ in $\mathcal{G}$ è il dato di un omomorfismo di gruppi abeliani $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ per ogni aperto $U \subseteq X$, tale che per ogni $V \subseteq U$ aperti si ha $\rho_{UV} \circ f_U = f_V \circ \rho_{UV}$.

Se $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ sono fasci, allora un *morfismo di fasci* è semplicemente un morfismo di prefasci tra i due.

Osserviamo che ogni morfismo $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ di prefasci su X induce un morfismo $f_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P$ sulle spighe, per ogni $P \in X$.

Proposizione 1.1.8. *Sia $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su uno spazio topologico X e $U \subseteq X$ un aperto. Allora:*

1. *f_U è iniettivo se e solo se $f_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ è iniettivo per ogni $p \in U$;*
2. *f_U è un isomorfismo se e solo se $f_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ è un isomorfismo per ogni $p \in U$.*

Per la dimostrazione di questa proposizione si può consultare [Gat02, Exercise 13.8]. Questo fatto ci spinge a definire l'iniettività e la suriettività di un morfismo di fasci sulle spighe.

Definizione 1.1.9. Sia $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di fasci su uno spazio topologico X. Allora diciamo che f è *iniettivo*, *suriettivo* o un *isomorfismo* se lo è $f_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ per ogni $p \in X$.

Osservazione 1.1.10. Grazie alla Proposizione 1.1.8, abbiamo che f è iniettivo se e solo se f_U è iniettivo per ogni aperto $U \subseteq X$. Invece, si può osservare che se f è suriettivo, allora non è necessariamente vero che f_U è suriettivo.

Definizione 1.1.11. Sia $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo di prefasci. Definiamo il *prefascio nucleo* di f come il prefascio dato da $U \mapsto \ker(f_U)$. Definiamo analogamente il *prefascio immagine* e il *prefascio conucleo.*

Osservazione 1.1.12. Si può osservare che il prefascio $\ker(f)$ è effettivamente un fascio, ma i prefasci $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Coker}(f)$ in generale non sono fasci. Per renderli dei fasci bisogna fascificarli.

Definizione 1.1.13. Una successione di fasci

$$\cdots \to \mathcal{F}_i \xrightarrow{f_i} \mathcal{F}_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \mathcal{F}_{i+2} \to \cdots$$

su uno spazio topologico X si dice *esatta* se $\mathrm{Im}(f_i) \cong \ker(f_{i+1})$ per ogni i.

Per la dimostrazione del seguente fatto si rimanda a [Gat02, Lemma 13.21].

Proposizione 1.1.14. *Una successione di fasci su uno spazio topologico X è esatta se e solo se la successione indotta sulle spighe sopra ogni punto di X è esatta.*

Dal momento che questa tesi non ha alcuna intenzione di essere un'introduzione alla teoria dei fasci, riportiamo di seguito alcune costruzioni classiche.

i) Dato un fascio $\mathcal{F}$ su X e $U \subseteq X$ un aperto, la *restrizione* di $\mathcal{F}$ a U è il fascio $\mathcal{F}_{|U}$ tale che per ogni aperto $V \subseteq U$ si ha $\mathcal{F}_{|U}(V) := \mathcal{F}(V)$, con gli ovvi morfismi di restrizione.

ii) Dati $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci su X e un aperto $U \subseteq X$, definiamo $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ il fascio tale che $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) := \mathcal{H}om(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{G}_{|U})$, con gli ovvi morfismi di restrizione.

iii) Sia $f : X \to Y$ una mappa continua tra due spazi topologici e sia $\mathcal{F}$ un fascio su X. Il *push-forward* di $\mathcal{F}$ tramite f è il fascio tale che per ogni $U \subseteq Y$ si ha

$$f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))$$

e dati $V \subseteq U$ aperti, si definisce $\rho_{U,V} := \rho_{f^{-1}(U), f^{-1}(V)}$.

iv) Dato $\mathcal{F}$ un fascio su una varietà X, definiamo il fascio *duale*, che denotiamo $\mathcal{F}^\vee$, come il fascio ottenuto fascificando il prefascio dato da $U \mapsto \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}_{|U}, \mathcal{O}_U)$. Con $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ intenderemo $H^0(X, \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}))$.

v) Dati $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due fasci su una varietà X e un aperto $U \subseteq X$, definiamo $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ il fascio ottenuto fascificando il prefascio dato da $U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U)$.

vi) Sia $f : X \to Y$ un morfismo tra varietà e sia $\mathcal{E}$ un fascio di $\mathcal{O}_Y$-moduli su Y. Definiamo il *pull-back* di $\mathcal{E}$ tramite f, che denotiamo $f^*\mathcal{E}$, come il fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli $f^{-1}\mathcal{E} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$.

Esempio 1.1.15. Sia P un punto di una varietà X e sia $i : P \hookrightarrow X$ la mappa di inclusione. Si ha $\mathcal{O}_P(P) = \mathbb{C}$ e $\mathcal{O}_P(\emptyset) = \{0\}$. Quindi il fascio $i_*\mathcal{O}_P$ è dato da

$$(i_*\mathcal{O}_P)(U) = \mathcal{O}_P(i^{-1}(U)) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } P \in U \\ \{0\} & \text{se } P \notin U \end{cases}$$

per ogni aperto $U \subseteq X$, e il morfismo

$$\begin{aligned} i^* \colon \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} &\to i_*\mathcal{O}_P \\ \varphi &\mapsto \varphi \circ i \end{aligned}$$

è semplicemente la valutazione di una funzione φ regolare su $U \subseteq X$ nel punto P (se questo sta in U). Il fascio $i_*\mathcal{O}_P$ viene spesso denotato $\mathbb{C}_P$ ed è chiamato *fascio grattacielo* su X in P.

Esempio 1.1.16. Sia $n \in \mathbb{N}_{>0}$ e $d \in \mathbb{Z}$. Per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{P}^n$ definiamo

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(U) := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n] \text{ tali che } \deg(f) - \deg(g) = d \text{ e } g(P) \neq 0 \text{ per ogni } P \in U \right\}$$

come sottoinsieme di $\mathbb{C}(x_0, ..., x_n)$. Poniamo anche $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\emptyset) := \{0\}$. Si può facilmente osservare che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ è un fascio su $\mathbb{P}^n$ con le seguenti proprietà.

i) Per $d = 0$, si ha $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(0) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ tramite l'isomorfismo $\frac{f}{g} \mapsto \frac{f}{g}$.

ii) Per ogni $e \in \mathbb{Z}$ e per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{P}^n$ abbiamo le mappe di moltiplicazione

$$(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(U) \times (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e))(U) \to (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+e))(U), \ (\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi.$$

In particolare, per $e = 0$ ne deduciamo che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ è un fascio di moduli su $\mathbb{P}^n$.

iii) Dalla definizione segue facilmente che $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$. In particolare, abbiamo che $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\mathbb{P}^n) = \{0\}$ per ogni $d < 0$. Per $d \neq 0$, il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ e il fascio di struttura $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ non sono isomorfi dal momento che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{C}$ e $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d))(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$. Però diventano isomorfi se ristretti alle carte affini standard U_i di $\mathbb{P}^n$:

$$\begin{aligned} f \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i} &\to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_{U_i} \\ \varphi &\mapsto \varphi x_i^d \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} f^{-1} \colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)|_{U_i} &\to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i} \\ \varphi &\mapsto \frac{\varphi}{x_i^d} \end{aligned}.$$

Da ciò e anche da ii), vedremo grazie alla prossima definizione che il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ su $\mathbb{P}^n$ è un fascio di $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$-moduli localmente libero di rango 1.

iv) Per ogni $d, e \in \mathbb{Z}$ si ha un isomorfismo di fasci $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(e) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d+e)$.

Esempio 1.1.17. Sia $i : Z \hookrightarrow X$ l'inclusione di una sottovarietà. Si può mostrare che esiste una successione esatta di fasci su X

$$0 \to \mathcal{I}_{Z/X} \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Z \to 0,$$

dove la seconda mappa è semplicemente il pull-back delle funzioni regolari, come abbiamo già visto. Definiamo quindi $\mathcal{I}_{Z/X}$ il *fascio di ideali* di Z in X come il nucleo di questo morfismo. Nel caso di un'ipersuperficie irriducibile $X \subseteq \mathbb{P}^n$, si può mostrare che il fascio di ideali di X in $\mathbb{P}^n$ è dato da $\mathcal{I}_{X/\mathbb{P}^n} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)$. In questo caso, vedremo che $\mathcal{I}_{X/\mathbb{P}^n}$ è un fibrato lineare, dal momento che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-d)$ lo è. Spesso nel seguito scriveremo semplicemente $\mathcal{O}_Z$ al posto di $i_*\mathcal{O}_Z$ quando vogliamo considerarlo come fascio su X. Adottiamo anche la notazione $\mathcal{O}_X(-Z) := \mathcal{I}_{Z/X}$ e $\mathcal{O}_X(Z) := \mathcal{O}_X(-Z)^\vee$.

Definizione 1.1.18. Sia X una varietà e $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari su X. Un *fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli* è il dato di un fascio $\mathcal{E}$ su X tale che per ogni aperto $U \subseteq X$ si ha che $\mathcal{E}(U)$ è un $\mathcal{O}_X(U)$-modulo e inoltre per ogni $V \subseteq U$ aperti in X il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{E}(U) \arrow[r, "*"] \arrow[d, "\sigma_{UV} \times \rho_{UV}"'] & \mathcal{E}(U) \arrow[d, "\rho_{UV}"] \\ \mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{E}(V) \arrow[r, "*"] & \mathcal{E}(V) \end{tikzcd},$$

dove σ_{UV}, ρ_{UV} sono le mappe di restrizione rispettivamente di $\mathcal{O}_X$, $\mathcal{E}$, e $*$ è la moltiplicazione del modulo. In tal caso diciamo che $\mathcal{E}$ è un $\mathcal{O}_X$-modulo.

Definizione 1.1.19. Sia X una varietà e $\mathcal{O}_X$ il suo fascio delle funzioni regolari. Dato un fascio $\mathcal{F}$ di $\mathcal{O}_X$-moduli su X, diciamo che è *localmente libero di rango r* se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di X tale che per ogni $i \in I$ si ha $\mathcal{F}_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{X}{}^{\oplus r}_{|U_i}$. In particolare, se $\mathcal{F}$ è localmente libero di rango 1 è detto *fascio invertibile.*

Esempio 1.1.20. Come avevamo già anticipato, il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ su $\mathbb{P}^n$ è localmente libero. Invece, un fascio grattacielo, ad esempio, non è localmente libero. Basta prendere un punto p di $\mathbb{P}^1$ e osservare che la fibra ha rango 1 sopra p e 0 altrove. Dato che un fascio localmente libero di rango 1 (ovvero un fibrato lineare come vedremo tra poco) ha rango della fibra costante, ne deduciamo che il fascio grattacielo non è un fascio localmente libero.

Un esempio di fondamentale importanza è quello del fascio delle sezioni di un fibrato vettoriale.

Esempio 1.1.21. Sia $\pi : E \to X$ una fibrato vettoriale di rango r su una varietà X. Vediamo che le sezioni di tale fibrato costituiscono un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli localmente libero di rango r. Su ogni aperto $U \subseteq X$ esiste sempre almeno una sezione, la sezione nulla, ovvero la sezione che mappa $x \mapsto 0_x$, dove 0_x è il vettore nullo di E_x. Date due sezioni $s_1, s_2 \in \mathcal{E}(U)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha che $s_1 + s_2$ e $\lambda \cdot s_1$ sono ancora sezioni perché localmente sono definite da funzioni regolari (essendo morfismi) e quindi le due operazioni di somma e prodotto punto per punto sono ben definite. Inoltre, per ogni $\varphi \in \mathcal{O}_X(U)$ il prodotto $\varphi \cdot s$ è ancora una sezione poiché per ogni $x \in U$ si ha che $\varphi(x) \in \mathbb{C}$, quindi $\varphi(x) \cdot s(x) \in E_x$. Ne deduciamo che $\mathcal{E}$ è un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli. Per vedere che è localmente libero di rango r consideriamo un ricoprimento aperto trivializzante $\{U_i\}_{i\in I}$.

A questo punto basta osservare che una sezione su U_i è un morfismo

$$\begin{aligned} s\colon U_i &\to \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}^r \\ x &\mapsto (x, f_1(x), ..., f_r(x)) \end{aligned},$$

dove $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ per ogni $i \in I$. Quindi abbiamo un isomorfismo di $\mathcal{O}_X(U_i)$-moduli

$$\mathcal{E}(U) \cong \mathcal{O}_X(U_i)^{\oplus r}$$

e chiaramente lo stesso vale per ogni aperto $V \subseteq U$.

Dunque, l'esempio precedente e il prossimo risultato ci danno la possibilità di poter definire un fibrato vettoriale di rango r su una varietà X come un fascio di $\mathcal{O}_X$-moduli localmente libero di rango r. In questa tesi scegliamo di adottare questa convenzione.

Teorema 1.1.22. *Sia X una varietà e $r \in \mathbb{N}$. A meno di isomorfismi di fibrati e fasci, si ha la seguente bigezione:*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} \textit{fibrati vettoriali su } X \\ \textit{di rango } r \end{matrix} \right\} &\longrightarrow \left\{ \begin{matrix} \textit{fasci localmente liberi di} \\ \mathcal{O}_X\textit{-moduli di rango } r \end{matrix} \right\} \\ E \xrightarrow{\pi} X &\longmapsto \mathcal{E} \textit{ fascio delle sezioni di } (E, \pi) \end{aligned}.$$

Per la dimostrazione del precedente teorema si veda [Huy05, Proposition 2.2.19].
In generale, quando si parla di fibrati vettoriali è del tutto equivalente conoscere lo spazio totale con le trivializzazioni, le funzioni di transizione o il fascio delle sezioni. In virtù di ciò, nel seguito capiterà spesso di indicare allo stesso modo un fibrato e il suo fascio delle sezioni.

Abbiamo già osservato che il nucleo di un morfismo di fasci è sempre un fascio. In generale però, lo stesso non vale per un morfismo di fibrati:

Esempio 1.1.23. Consideriamo i due fibrati lineari $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ e $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ su $\mathbb{P}^1$. Dare un morfismo globale di fibrati tra questi è equivalente a dare $f \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^\vee \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \cong \mathbb{C}[x_0, x_1]_1$. Dunque, se prendiamo $f = x_0$, per ogni $p \in \mathbb{P}^1$ la mappa tra le fibre sopra p è data dalla moltiplicazione per $f(p)$. Quindi, per $p = [0 : 1]$ abbiamo nucleo di dimensione 1 mentre per ogni altro punto di $\mathbb{P}^1$ il nucleo è 0. Ne deduciamo che $\ker(f)$ non è un fibrato vettoriale dal momento che il rango della fibra sopra $[0 : 1]$ è 1 mentre al di fuori è 0.

1.2 Gruppo di Picard

In questa breve sezione andremo ad introdurre uno degli strumenti più importanti per studiare e comprendere la geometria delle varietà proiettive: il gruppo di Picard, ovvero il gruppo dei fibrati vettoriali di rango 1 su una varietà a meno di isomorfismo. Come abbiamo visto in precedenza, questo concetto e quello fascio localmente libero di rango 1 sono del tutto analoghi. In questa sezione, se non specificato, X sarà una varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$ e $\mathcal{O}_X$ il suo fascio di struttura, ovvero il fascio delle funzioni regolari. Ricordiamo che dati $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ due $\mathcal{O}_X$-moduli localmente liberi di rango 1, il loro prodotto tensoriale $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ è ancora un $\mathcal{O}_X$-modulo localmente libero di rango 1.

Definizione 1.2.1. Definiamo il *gruppo di Picard* di X come

$$\mathrm{Pic}(X) := \{\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ è un fibrato vettoriale di rango } 1\}/\cong,$$

ovvero l'insieme delle classi di isomorfismo di fibrati vettoriali di rango 1 su X. Non è difficile osservare che $(\mathrm{Pic}(X), \otimes_{\mathcal{O}_X})$ è un gruppo, dove l'inverso di $\mathcal{L}$ è $\mathcal{L}^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ e l'elemento neutro è $\mathcal{O}_X$.

Enunciamo ora un teorema molto utile, nonché importante, che useremo spesso nel corso della trattazione. Per la dimostrazione si veda [Huy05, Proposition 4.1.15].

Ricordiamo che, dato un fascio $\mathcal{F}$ su una varietà X, si definisce $h^i(X, \mathcal{F}) := \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{F})$.

Teorema 1.2.2 (Dualità di Serre)**.** *Sia X una varietà di dimensione n, e sia $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$. Allora per ogni $0 \leq i \leq n$ esiste un isomorfismo*

$$H^i(X, \mathcal{L}) \cong H^{n-i}(X, K_X \otimes \mathcal{L}^\vee)^\vee.$$

In particolare, $h^i(X, \mathcal{L}) = h^{n-i}(X, K_X \otimes \mathcal{L}^\vee)$.

Per la dimostrazione del seguente teorema si rimanda a [Huy05, Corollary 2.2.10].

Teorema 1.2.3. *Sia X una varietà e $\mathcal{O}_X$ il fascio delle funzioni regolari. Allora si ha un isomorfismo di gruppi* $\mathrm{Pic}(X) \cong H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Consideriamo ora la successione esponenziale, ovvero la successione esatta corta di fasci

$$0 \to \mathbb{Z}_X \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^* \to 0.$$

Questa induce una successione esatta lunga in coomologia

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X),$$

che grazie al teorema diventa

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X).$$

Il morfismo c_1 è detto *prima classe di Chern* di X e definiamo la *varietà di Picard* di X come $\mathrm{Pic}^0(X) := \ker(c_1)$. Il gruppo $\mathrm{NS}(X) := \mathrm{Pic}(X)/\,\mathrm{Pic}^0(X)$ è detto *Néron-Severi* di X. Si può provare che $\mathrm{NS}(X) = H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$, da cui segue che $\mathrm{NS}(X)$ è un gruppo abeliano finitamente generato. Definiamo quindi il *rango di Picard* di X, che denotiamo $\rho(X)$, come il rango della parte libera di $\mathrm{NS}(X)$.

Esempio 1.2.4. Se X è una curva irriducibile, allora si ha che $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ per ragioni di dimensione e $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ per dualità di Poincaré. Scegliendo un generatore di $H^2(X, \mathbb{Z})$, la mappa $c_1 : \mathrm{Pic}(X) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ è detta *grado*, e la indicheremo *deg*.

1.3 Divisori su varietà algebriche

In geometria algebrica, i divisori sono una generalizzazione delle sottovarietà di codimensione 1 di una varietà. Si hanno due tipi di divisori: i divisori di Weil e quelli di Cartier. Entrambi i nomi furono coniati da David Mumford in onore di André Weil e Pierre Cartier. Da un punto di vista topologico, in un certo senso, si può dire che i divisori di Weil giocano il ruolo di alcune classi di omologia della varietà, mentre quelli di Cartier rappresentano classi di coomologia. In presenza di una varietà liscia, un risultato analogo alla dualità di Poincaré dice che divisori di Weil e di Cartier coincidono.

1.3.1 Divisori di Cartier

Sia X una varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$ e $\mathcal{O}_X$ il suo fascio di struttura. Indichiamo con k_X il fascio delle funzioni razionali su X.

Definizione 1.3.1. Un *divisore di Cartier* su X è una sezione globale del fascio $k_X^*/\mathcal{O}_X^*$.

Analogamente, usando la coomologia di Čech, si può rappresentare un divisore di Cartier nella seguente maniera: sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di X e, per ogni $i \in I$, sia $f_i \in k_X^*(U_i)$. Dunque, per poter definire un divisore di Cartier, dobbiamo richiedere che per ogni $i, j \in I$ si abbia $f_i/f_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$. In parole povere, un divisore di Cartier è localmente il luogo degli zeri e dei poli di una funzione razionale su X. Chiaramente si ha la seguente succesione esatta di fasci

$$0 \to \mathcal{O}_X^* \to k_X^* \to k_X^*/\mathcal{O}_X^* \to 0,$$

che induce la seguente successione esatta in coomologia

$$H^0(X, k_X^*) \to H^0(X, k_X^*/\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\alpha} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong \mathrm{Pic}(X).$$

Dunque, è possibile associare ad ogni divisore di Cartier la classe di un fibrato in $\mathrm{Pic}(X)$. Vediamo più esplicitamente cosa fa α. Sia $D = \{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$ un divisore di Cartier su X. Consideriamo la famiglia $\{\varphi_{ij}\}_{i,j \in I}$, dove $\varphi_{ij} := f_i/f_j$. Dal momento che D è un divisore di Cartier, si ha che $\varphi_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$. Inoltre, osserviamo che $\varphi_{ii} = 1$, $\varphi_{ij}^{-1} = \varphi_{ji}$ e $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$, quindi a D si può associare un unico fibrato lineare (a meno di isomorfismo), il quale denotiamo $\mathcal{O}_X(D)$. Più precisamente, si ha che

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in k_X(U) \mid f \cdot f_i \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i) \ \forall i \in I \text{ tale che } U \cap U_i \neq \emptyset\},$$

e per ogni $i \in I$ la mappa

$$\mathcal{O}_{U_i} \xrightarrow{\cdot 1/f_i} \mathcal{O}_X(D)_{|U_i}$$

è un isomorfismo.

Definizione 1.3.2. Un divisore di Cartier si dice *principale* se appartiene a $\mathrm{im}(H^0(X, k_X^*))$. Due divisori di Cartier si dicono *linearmente equivalenti* se la loro differenza è un divisore principale. Possiamo quindi definire il gruppo

$$\mathrm{Car}(X) := \frac{H^0(X, k_X^*/\mathcal{O}_X^*)}{\mathrm{im}(H^0(X, k_X^*))}.$$

Osservazione 1.3.3. Notiamo che la successione esatta in coomologia dà l'immersione

$$\alpha : \mathrm{Car}(X) \hookrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

In un contesto più generale ed ampio, questa mappa non è detto che sia un isomorfismo, ma nel nostro caso lo è (ad esempio se X è proiettiva è vero).

1.3.2 Divisori di Weil

In questa sezione X sarà sempre una varietà proiettiva liscia e irriducibile su $\mathbb{C}$.

Definizione 1.3.4. Si dice *divisore primo* su X un chiuso $Y \subseteq X$ irriducibile e tale che $\dim(Y) = \dim(X) - 1$. Denotiamo con $P(X)$ l'insieme dei divisori primi su X.

Definizione 1.3.5. Un *divisore di Weil* su X è un elemento del gruppo abeliano libero generato da $P(X)$, cioè un elemento del tipo

$$\sum_{Y \in P(X)} a_Y Y,$$

dove $a_Y \in \mathbb{Z}$ per ogni $Y \in P(X)$ e $a_Y \neq 0$ per al più un numero finito di divisori primi. Denotiamo con $\mathrm{WDiv}(X)$ l'insieme dei divisori di Weil su X. Diciamo che un divisore di Weil $D = \sum a_Y Y$ è *effettivo* se $a_Y \geq 0$ per ogni Y. Inoltre, se D, D' sono due divisori di Weil su X, scriviamo $D \geq D'$ se $D - D'$ è effettivo.

Definizione 1.3.6. Dato $Y \in P(X)$ un divisore primo su X, consideriamo $\mathcal{O}_{X,Y} = \{f \in k(X) \mid Y \not\subseteq X \smallsetminus \mathrm{dom}(f)\}$, sottoanello di $k(X)$; si può osservare che $\mathcal{O}_{X,Y}$ è un dominio a ideali principali locale. Sia quindi $t \in \mathcal{O}_{X,Y}$ il generatore dell'unico ideale massimale. Consideriamo la seguente funzione:

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_Y \colon k(X)^* &\to \mathbb{Z} \\ f &\mapsto m \end{aligned},$$

dove $m = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid ft^n \text{ è invertibile in } \mathcal{O}_{X,Y}\}$. Chiamiamo quindi m l'*ordine di annullamento* di f lungo Y, e lo denotiamo $\mathrm{ord}_Y(f)$.

Riportiamo qualche proprietà dell'ordine:

i) $\mathrm{ord}_Y : k(X)^* \to \mathbb{Z}$ è un morfismo di gruppi suriettivo;

ii) $\mathrm{ord}_Y(0) := +\infty$;

iii) $\mathrm{ord}_Y(f + g) \geq \min\{\mathrm{ord}_Y(f),\ \mathrm{ord}_Y(g)\}$;

iv) $\mathcal{O}_{X,Y} = \{f \in k(X) \mid \mathrm{ord}_Y(f) \geq 0\}$;

v) l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,Y}$ è $\{f \in k(X) \mid \mathrm{ord}_Y(f) > 0\}$.

Definizione 1.3.7. Consideriamo il seguente morfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} \mathrm{div} \colon k(X)^* &\to \mathrm{WDiv}(X) \\ f &\mapsto \sum_{Y \in P(X)} \mathrm{ord}_Y(f) Y \end{aligned}.$$

Diciamo che un divisore di Weil D è *principale* se $D \in \mathrm{Im}(\mathrm{div})$, ovvero se è il divisore di una funzione razionale su X. Nel seguito, per semplicità scriveremo (f) piuttosto che $\mathrm{div}(f)$.

Definizione 1.3.8. Siano D, $D' \in \mathrm{WDiv}(X)$. Diciamo che D e D' sono *linearmente equivalenti*, e scriviamo $D \sim D'$, se $D - D'$ è un divisore principale. Si può osservare facilmente che $\sim$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathrm{WDiv}(X)$. Definiamo quindi $\mathrm{Cl}(X) := \mathrm{WDiv}(X)/\sim$ il *gruppo di classe* di X.

Cerchiamo ora di capire che relazione c'è tra divisori di Weil e divisori di Cartier. Iniziamo col considerare $\{(U_i, f_i)\}_{i\in I}$ un divisore di Cartier. Ad esso possiamo facilmente associare un divisore di Weil:

$$D := \sum_{Y \in P(X)} \mathrm{ord}_Y(f_{i(Y)})Y$$

dove $i(Y) \in I$ è scelto tra tutti gli $i \in I$ tali che $U_i \cap Y \neq \emptyset$. Chiaramente ne posso esistere diversi, ma se $i, j \in I$ sono tali che $U_i \cap U_j \cap Y \neq \emptyset$, allora $f_i/f_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ e quindi $\mathrm{ord}_Y(f_i) = \mathrm{ord}_Y(f_j)$. In conclusione, D è un divisore di Weil ben definito. Inoltre, se il divisore di Cartier considerato è principale, allora anche D è principale. Infatti, se esiste $f \in k(X)^*$ tale che $f_i = f_{|U_i}$ e $\mathrm{ord}_Y(f_i) = \mathrm{ord}_Y(f)$, allora $D = (f)$. Dunque abbiamo un morfismo di gruppi

$$\beta : \mathrm{Car}(X) \to \mathrm{Cl}(X).$$

Componendo con α^{-1} otteniamo

$$\beta \circ \alpha^{-1} : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Cl}(X).$$

Proposizione 1.3.9. *Se X è una varietà proiettiva liscia, allora $\beta : \mathrm{Car}(X) \to \mathrm{Cl}(X)$ è un isomorfismo di gruppi.*

Quindi nel caso di una varietà proiettiva liscia, i gruppi $\mathrm{Pic}(X)$, $\mathrm{Car}(X)$ e $\mathrm{Cl}(X)$ sono tutti isomorfi tra loro.

Ora applichiamo questo risultato per calcolare il gruppo di Picard di $\mathbb{P}^n$.

Proposizione 1.3.10. *Sia $D = \sum n_i Y_i$ un divisore di Weil in $\mathbb{P}^n$ e definiamo il grado di D come $\deg(D) = \sum n_i \deg(Y_i)$, dove $\deg(Y_i)$ è il grado dell'ipersuperficie Y_i. Sia H l'iperpiano $V(x_0)$. Allora:*

1. *se D è un divisore di grado d, allora $D \sim dH$;*

2. *per ogni $f \in \mathbb{C}^*$, $\deg(f) = 0$;*

3. *la funzione grado $\deg : \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{Z}$ è un isomorfismo di gruppi.*

Dimostrazione. Sia $S = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]$ l'anello delle coordinate omogeneo di $\mathbb{P}^n$. Se g è un elemento omogeneo di grado d, possiamo fattorizzarlo nel prodotto di polinomi irriducibili $g = g_1^{n_1}...g_r^{n_r}$. Ogni g_i definisce un'ipersuperficie Y_i di grado $d_i = \deg(g_i)$, dunque possiamo considerare il divisore $(g) = \sum n_i Y_i$. Si ha $\deg(g) = d$. Ora, una funzione razionale f su $\mathbb{P}^n$ è un quoziente g/h di polinomi omogenei dello stesso grado. Chiaramente $(f) = (g) - (h)$, da cui segue $\deg(f) = 0$, che prova 2.

Se D è un qualunque divisore di grado d, possiamo scriverlo come differenza $D_1 - D_2$ di divisori effettivi di grado rispettivamente d_1, d_2, con $d = d_1 - d_2$. Siano quindi $D_1 = (g_1)$ e $D_2 = (g_2)$, dove g_1 e g_2 sono polinomi omogenei. Allora si ha che $D - dH = (g_1/x_0^d g_2)$, il che prova 1. In conclusione, 1 e 2 ci dicono che $\deg : \mathrm{Cl}(\mathbb{P}^n) \to \mathbb{Z}$ è ben definito e iniettivo, il fatto che sia un omomorfismo suriettivo è ovvio. $\square$

Dal momento che $\mathbb{P}^n$ è una varietà proiettiva liscia, la precedente proposizione ci dice che $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}$.

Ragionando in maniera simile, si può provare che $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1_{[x_0:x_1]} \times \mathbb{P}^1_{[y_0:y_1]}) \cong \mathbb{Z}^2$, dove questa volta un'ipersuperficie è data da un polinomio bi-omogeneo in $\mathbb{C}[x_0, x_1] \otimes \mathbb{C}[y_0, y_1]$ di bi-grado (d_1, d_2) (con $\mathbb{P}^1_{[x_0:x_1]}$ intendiamo $\mathbb{P}^1$ con coordinate $[x_0 : x_1]$). Più in generale, vale $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^{n_1} \times ... \times \mathbb{P}^{n_r}) \cong \mathbb{Z}^r$.

Consideriamo ora $D = \sum n_Y Y$ un divisore di Weil su una varietà proiettiva liscia X. Quindi possiamo rappresentare D come un divisore di Cartier $\{(U_i, f_i)\}_{i \in I}$, al quale è associato il fibrato lineare $\mathcal{O}_X(D)$. Ricordiamo che per ogni aperto $U \subseteq X$ si ha

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in k_X(U) \mid f \cdot f_i \in \mathcal{O}(U \cap U_i)\ \forall i \in I \text{ tale che } U \cap U_i \neq \emptyset\}.$$

Sia $Y \in P(X)$ tale che $Y \cap U \neq \emptyset$, e sia $i \in I$ tale che $U_i \cap Y \neq \emptyset$. Poiché $f \cdot f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$, abbiamo che $\mathrm{ord}_Y(f \cdot f_i) > 0$, dunque $\mathrm{ord}_Y(f) > \mathrm{ord}_Y(f_i)$. Ricordando che $n_Y = \mathrm{ord}_Y(f_i)$, abbiamo che

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in k_X(U) \mid \mathrm{ord}_Y(f) > n_Y\ \forall\ Y \in P(X) \text{ tale che } U \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Grazie alla nozione di divisore effetivo, possiamo scrivere lo spazio delle sezioni globali del fibrato lineare associato a D:

$$\mathcal{O}_X(D)(X) = \{f \in k(X) \mid (f) \geq -D\}.$$

In altre parole, se D è un divisore di Weil e $\mathcal{L}$ il fibrato lineare associato, allora lo spazio delle sezioni globali $H^0(X, \mathcal{L})$ è lo spazio di tutti i divisori effettivi linearmente equivalenti a D, ovvero tutti i divisori di Weil associati a $\mathcal{L}$.

Esempio 1.3.11. Consideriamo il divisore dH su $\mathbb{P}^n$. In questo caso, abbiamo che $\{D \in \mathrm{WDiv}(\mathbb{P}^n) \mid D \sim dH,\ D \geq 0\} = \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_d$, dunque è naturale osservare che questo è esattamente lo spazio delle sezioni globali del fibrato lineare $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ su $\mathbb{P}^n$. In effetti, il fibrato associato a dH è proprio $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

Queste considerazioni ci permettono di introdurre un paio di concetti chiave che ci saranno poi molto utili nel seguito: sistemi lineari e ampiezza.

Come al solito, X sarà una varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$ e $\mathcal{L}$ un fibrato lineare su X.

Definizione 1.3.12. Definiamo il *sistema lineare completo* associato a $\mathcal{L}$ come

$$|\mathcal{L}| := \{D \in \mathrm{WDiv}(X) \mid D \geq 0,\ \mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{L}\}.$$

Per quanto osservato poco fa, si ha che $|\mathcal{L}| = H^0(X, \mathcal{L})$, dunque $|\mathcal{L}|$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e ogni suo sottospazio vettoriale è detto *sistema lineare*.

Definizione 1.3.13. Il *luogo base* di $\mathcal{L}$ è definito come

$$\mathrm{Bs}(\mathcal{L}) := \bigcap_{D \in |\mathcal{L}|} D.$$

Ogni punto in $\mathrm{Bs}(\mathcal{L})$ è detto *punto base* di $\mathcal{L}$. Usando le sezioni, si ha che $\mathrm{Bs}(\mathcal{L}) = \bigcap_{s \in H^0(X,\mathcal{L})} V(s)$, ovvero è il luogo degli zeri comuni delle sezioni globali di $\mathcal{L}$.

L'importanza di introdurre i sistemi lineari, e quindi in generale di lavorare con fibrati lineari e con le loro sezioni globali, risiede nel fatto che queste in un certo senso governano tutte le possibili mappe razionali verso $\mathbb{P}^n$. Per cui, capire tutti i modi possibili in cui una varietà può essere mappata negli spazi proiettivi è equivalente a comprendere la natura di tutti i fibrati lineari sulla varietà, da cui l'importanza del gruppo di Picard.

Più precisamente, scelta una base $\{s_0, ..., s_n\}$ di $H^0(X, \mathcal{L})$, possiamo definire un morfismo

$$\begin{aligned} \varphi_{|\mathcal{L}|} \colon X \setminus \mathrm{Bs}(\mathcal{L}) &\to \mathbb{P}^n \\ x &\mapsto [s_0(x) : ... : s_n(x)] \end{aligned}.$$

Osserviamo che in generale questa mappa è soltanto razionale su X, poiché non è definita in $\mathrm{Bs}(\mathcal{L})$, e che dipende dalla scelta di una base. In realtà, una diversa scelta della base di $H^0(X, \mathcal{L})$ dà la stessa mappa, a meno di un cambio di coordinate proiettivo.

Definizione 1.3.14. Un fibrato lineare $\mathcal{L}$ si dice *globalmente generato* se $\mathrm{Bs}(\mathcal{L}) = \emptyset$. Si dice *molto ampio* se è globalmente generato e se la mappa $\varphi_{|\mathcal{L}|}$ è un'immersione chiusa. Inoltre, $\mathcal{L}$ si dice ampio se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathcal{L}^{\otimes n}$ è molto ampio.

Esempio 1.3.15. Consideriamo su $\mathbb{P}^1$ il fibrato lineare $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$, con d un intero positivo. Abbiamo osservato che $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)| = \mathbb{C}[x_0, x_1]_d$, dunque la mappa associata è

$$\begin{aligned} \varphi_{|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)|} \colon \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^d \\ [x_0 : x_1] &\mapsto [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : ... : x_0 x_1^{d-1} : x_1^d] \end{aligned}$$

ed è chiamata *d-Veronese* di $\mathbb{P}^1$. Osserviamo che è un morfismo ben definito e che è un'immersione chiusa, dunque $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)$ è molto ampio.

Concludiamo il primo capitolo enunciando un importante risultato che ci tornerà spesso utile in tutto il resto della trattazione. Per la dimostrazione si veda [Huy05, Proposition 2.2.17].

Teorema 1.3.16 (Formula di aggiunzione)**.** *Sia X una varietà proiettiva liscia, D un divisore liscio su X e $i : D \hookrightarrow X$ l'inclusione. Allora si ha*

$$K_D \cong i^*(K_X \otimes \mathcal{O}_X(D)).$$

In termini divisoriali, possiamo riscrivere la formula di aggiunzione come

$$K_D \sim (K_X + D)_{|D}.$$

Capitolo 2

Intersezione di curve su superfici

In questo secondo capitolo cercheremo di capire come si intersecano le curve su una superficie. Più precisamente, parleremo di molteplicità di intersezione tra curve, definiremo il prodotto di intersezione sul gruppo di Picard di una superficie e ne vedremo alcune importanti applicazioni, tra cui la formula di Riemann-Roch per superfici.

In questo capitolo, se non specificato, S sarà sempre una superficie proiettiva liscia su $\mathbb{C}$.

2.1 Forma di intersezione

In precedenza abbiamo definito il gruppo di Picard di una varietà proiettiva. Nel caso specifico delle superfici, si può definire su questo gruppo una forma bilineare simmetrica, ispirata dal mondo della topologia algebrica, che ora andremo ad introdurre.

Definizione 2.1.1. Siano C, C' due curve irriducibili distinte su una superficie S e sia $\mathcal{O}_{S,p}$ l'anello locale di S nel punto $p \in C \cap C'$. Se f e g sono equazioni di C e C' in p, allora definiamo la *molteplicità di intersezione* di C e C' in p come

$$m_p(C \cap C') := \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{S,p}/(f,g),$$

dove $(f,g) \subseteq \mathcal{O}_{S,p}$ è l'ideale generato da f e g. Se $m_p(C \cap C') = 1$, diciamo che C e C' sono *trasverse* in p. La *molteplicità di intersezione* di C e C' è definita come

$$C \cdot C' := \sum_{p \in C \cap C'} m_p(C \cap C').$$

Osservazione 2.1.2. Il fatto che $\mathcal{O}_{S,p}/(f,g)$ sia un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione finita segue dal Nullstellensatz. Inoltre, se C e C' sono curve irriducibili distinte, $C \cap C'$ è, a livello insiemistico, un insieme finito di punti e dunque la molteplicità di intersezione è un intero (non negativo) ben definito.

Ricordiamo che se C è una curva irriducibile, allora si ha $\mathcal{I}_{C/S} = \mathcal{O}_S(-C)$. Se C e C' sono due curve irriducibili distinte su S, poniamo

$$\mathcal{O}_{C\cap C'} := \mathcal{O}_S/(\mathcal{O}_S(-C) + \mathcal{O}_S(-C')).$$

Questo è un fascio grattacielo supportato su $C \cap C'$, e si può osservare che se $p \in C \cap C'$ allora si ha

$$(\mathcal{O}_{C\cap C'})_p = \mathcal{O}_{S,p}/(f, g),$$

dove f e g sono equazioni locali per C e C'.

Da ciò segue che

$$C \cdot C' = h^0(S, \mathcal{O}_{C\cap C'}).$$

Definizione 2.1.3. Sia X una varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$ di dimensione n e $\mathcal{F}$ un fibrato vettoriale su X. Definiamo la *caratteristica di Eulero-Poincaré* di $\mathcal{F}$ come

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i h^i(X, \mathcal{F}).$$

Osservazione 2.1.4. Se $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ è una successione esatta di fibrati su X, allora si ha $\chi(\mathcal{F}_2) = \chi(\mathcal{F}_1) + \chi(\mathcal{F}_3)$.

Definizione 2.1.5. Siano $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \in \mathrm{Pic}(S)$. Definiamo il *prodotto di intersezione* di $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ come

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}' := \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{L}^\vee) - \chi(\mathcal{L}'^\vee) + \chi(\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{L}'^\vee).$$

Osserviamo che con $\cdot$ indichiamo sia la molteplicità di intersezione tra curve, sia il prodotto di intersezione tra fibrati lineari. Il prossimo lemma mostra il legame che sussiste tra i due.

Lemma 2.1.6. *Siano C e C' due curve irriducibili distinte su S. Allora si ha che*

$$\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{O}_S(C') = C \cdot C'.$$

Dimostrazione. Consideriamo la seguente successione

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C - C') \xrightarrow{(t,-s)^T} \mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C') \xrightarrow{(s,t)} \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{C\cap C'} \to 0,$$

dove $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C))$, $t \in H^0(S, \mathcal{O}_S(C'))$ sono due sezioni che definiscono C e C'. Grazie alla Proposizione 1.1.14, per mostrare che è esatta basta provare che per ogni $p \in C \cap C'$ la successione

$$0 \to \mathcal{O}_{S,p} \xrightarrow{(g,-f)^T} \mathcal{O}_{S,p}^{\oplus 2} \xrightarrow{(f,g)} \mathcal{O}_{S,p} \to \mathcal{O}_{S,p}/(f,g) \to 0$$

è esatta, dove f e g sono equazioni locali per C e C' rispettivamente. Per farlo, dobbiamo mostrare che se $a, b \in \mathcal{O}_{S,p}$ sono tali che $af = bg$, allora esiste $k \in \mathcal{O}_{S,p}$ tale che $a = kg$ e $b = kf$. Ma ciò segue facilmente dal momento che f e g sono coprimi (poiché C e C' sono curve distinte irriducibili), e poiché $\mathcal{O}_{S,p}$ è un dominio a fattorizzazione unica (S è liscia). Ora, il fatto che la successione sia esatta implica che

$$\chi(\mathcal{O}_S(-C-C')) + \chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C')) + \chi(\mathcal{O}_{C\cap C'}).$$

Inoltre, si ha $\chi(\mathcal{O}_S(-C) \oplus \mathcal{O}_S(-C')) = \chi(\mathcal{O}_S(-C)) + \chi(\mathcal{O}_S(-C'))$, $\mathcal{O}_S(-C) = \mathcal{O}_S(C)^\vee$ e $\mathcal{O}_S(-C-C') = \mathcal{O}_S(-C) \otimes \mathcal{O}_S(-C')$. Dal momento che $\mathcal{O}_{C\cap C'}$ è un fascio grattacielo, si ha $h^i(S, \mathcal{O}_{C\cap C'}) = 0$ per ogni $i > 0$. Allora $\chi(\mathcal{O}_{C\cap C'}) = h^0(S, \mathcal{O}_{C\cap C'}) = C \cdot C'$. Dalla definizione di prodotto di intersezione e dalle osservazioni appena fatte, segue immediatamente che $\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{O}_S(C') = \chi(\mathcal{O}_S)$, il che conclude la dimostrazione. $\square$

Per il prossimo lemma abbiamo bisogno del Teorema di Riemann-Roch per curve, di cui diamo l'enunciato senza però fornire una dimostrazione. Per i più curiosi, si veda [Har13, Theorem 1.3].

Teorema 2.1.7 (Riemann-Roch per curve). *Sia D un divisore su una curva proiettiva liscia C. Allora vale*

$$h^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - h^0(C, K_C \otimes \mathcal{O}_C(D)^\vee) = \deg(D) + 1 - g(C).$$

Lemma 2.1.8. *Sia C una curva liscia irriducibile su S e $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S)$. Allora*

$$\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{L} = \deg(\mathcal{L}_{|C}).$$

Dimostrazione. Consideriamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0.$$

Si ha $\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C))$. Tensorizzando con $\mathcal{L}^\vee$ si ottiene $\chi(\mathcal{L}^\vee_{|C}) = \chi(\mathcal{L}^\vee) - \chi(\mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{O}_S(-C))$. Ora, per definizione si ha che

$$\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{L} = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{O}_S(-C)) - \chi(\mathcal{L}^\vee) + \chi(\mathcal{O}_S(-C) \otimes \mathcal{L}^\vee) = \chi(\mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{L}^\vee_{|C}).$$

Usando il Teorema di Riemann-Roch per curve, otteniamo $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g(C)$ (poiché $\deg(\mathcal{O}_C) = 0$) e $\chi(\mathcal{L}_{|C}) = \deg(\mathcal{L}_{|C}) + 1 - g(C)$, da cui

$$\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{L} = \deg(\mathcal{L}_{|C}).$$

□

Siamo finalmente in grado di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 2.1.9. *Sia S una superficie proiettiva liscia. Il prodotto di intersezione*

$$\cdot : \mathrm{Pic}(S) \times \mathrm{Pic}(S) \to \mathbb{Z}$$

è una forma bilineare simmetrica tale che $\mathcal{O}_S(C) \cdot \mathcal{O}_S(C') = C \cdot C'$ per ogni due curve irriducibili distinte C, C' su S.

Dimostrazione. Il fatto che sia simmetrica è ovvio. Consideriamo $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3 \in \mathrm{Pic}(S)$ e poniamo

$$s(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) := \mathcal{L}_1 \cdot (\mathcal{L}_2 \otimes \mathcal{L}_3) - \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_3.$$

Se $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}_S(C)$ per qualche $i = 1, 2, 3$ e per qualche curva irriducibile C, allora per il Lemma 2.1.8 (e per il fatto che $\deg : \mathrm{Pic}(S) \to \mathbb{Z}$ è un omomorfismo di gruppi) si ha $s(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) = 0$ e quindi la bilinearità in questo caso è stata provata. Per il caso generale, abbiamo bisogno del seguente fatto:

> Sia D un divisore di Weil su S, e H una sezione iperpiana di S (per una data immersione). Allora esiste $n \geq 0$ tale che $D + nH$ è una sezione iperpiana (per un'altra immersione). In particolare, possiamo scrivere $D = A - B$ dove A e B sono curve lisce su S tali che $A = D + nH$ e $B = nH$.

Siano quindi $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}' \in \mathrm{Pic}(S)$. Scriviamo $\mathcal{L}' = \mathcal{O}_S(A - B)$ con A, B curve lisce su S. Osservando che $s(\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{O}_S(B)) = 0$, si ottiene

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_S(A) - \mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_S(B).$$

Da ciò e dal Lemma 2.1.8 deduciamo la linearità in $\mathcal{L}$, e la bilinearità è provata. La parte rimanente è semplicemente il Lemma 2.1.6, quindi concludiamo. □

Osservazione 2.1.10. E' importante notare che, a differenza della molteplicità di intersezione, il prodotto di intersezione fra due curve su una superficie può essere anche negativo. Nel prossimo capitolo, vedremo che le curve che hanno auto-intersezione uguale a -1 hanno un ruolo molto importante nella classificazione delle superfici.

Se D, D' sono due divisori su S, scriviamo $D \cdot D'$ per $\mathcal{O}_S(D) \cdot \mathcal{O}_S(D')$. Il fatto chiave è che, grazie al precedente teorema, possiamo calcolare il prodotto di intersezione $\mathcal{O}_S(D) \cdot \mathcal{O}_S(D')$ rimpiazzando D (o D') con un qualsiasi divisore linearmente equivalente.

Vediamo ora un'applicazione interessante del precedente teorema: dimostriamo il Teorema di Bézout per curve.

Esempio 2.1.11 (Bézout per curve)**.** Consideriamo come superficie $\mathbb{P}^2$. Nel capitolo 1 1.3.10, abbiamo dimostrato che $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}$. Siano C, C' due curve di grado d, d', e siano L, L' due rette distinte. Dal momento che $C \sim dL$, $C' \sim d'L'$, il Teorema 2.1.9 implica che

$$C \cdot C' = dL \cdot d'L' = dd'(L \cdot L') = dd'.$$

Vediamo ora com'è fatta la forma di intersezione nel caso di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Esempio 2.1.12. Grazie all'immersione di Segre, possiamo considerare $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ come una (l'unica a meno di proiettività) quadrica liscia in $\mathbb{P}^3$. Siano $H_1 = \{[1:0]\} \times \mathbb{P}^1$, $H_2 = \mathbb{P}^1 \times \{[1:0]\}$, $U = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \smallsetminus (H_1 \cup H_2)$. Poiché $U \cong \mathbb{A}^2$, ogni divisore su U è divisore di una funzione razionale ($\operatorname{Pic}(\mathbb{A}^2) = \{0\}$). Sia quindi D un divisore su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$; allora si ha $D_{|U} = \operatorname{div}(\phi)$ su U, e quindi esistono due interi n e m tali che

$$D = \operatorname{div}(\phi) + nH_1 + mH_2,$$

da cui $D \sim nH_1 + mH_2$. Ne deduciamo che $\operatorname{Pic}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}[H_1] \oplus \mathbb{Z}[H_2]$. Chiaramente $H_1 \cdot H_2 = 1$. Per calcolare H_1^2, grazie al Teorema 2.1.9, possiamo considerare la curva $C = \{[0:1]\} \times \mathbb{P}^1$ che è linearmente equivalente a H_1. Ora, poiché $C \cap H_1 = \emptyset$, si ha $H_1^2 = C \cdot H_1 = 0$. Analogamente, si ha $H_2^2 = 0$. Dunque, la matrice associata alla forma di intersezione su $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, rispetto alla base scelta, è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia Γ una curva in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ data un polinomio bi-omogeneo di bi-grado (n, m). Abbiamo che $\Gamma \sim nH_1 + mH_2$. Se Γ' è una curva di bi-grado (n', m'), il Teorema 2.1.9 ci dà

$$\Gamma \cdot \Gamma' = (nH_1 + mH_2) \cdot (n'H_1 + m'H_2) = mn' + nm'.$$

2.2 Riemann-Roch per superfici

In questa breve sezione enunciamo e dimostriamo una delle formule più importanti in tutta la teoria delle superfici: il Teorema di Riemann-Roch (nel caso delle superfici). Successivamente, vedremo anche alcune applicazioni che ci saranno utili nel seguito.

Teorema 2.2.1 (Riemann-Roch per superfici). *Per ogni $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(S)$ vale*

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L} \cdot K_S).$$

Dimostrazione. Calcoliamo $\mathcal{L}^\vee \cdot (\mathcal{L} \otimes K_S^\vee)$. Dalla definizione di prodotto di intersezione

$$\mathcal{L}^\vee \cdot (\mathcal{L} \otimes K_S^\vee) = \chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{L}) - \chi(K_S \otimes \mathcal{L}^\vee) + \chi(K_S).$$

Per dualità di Serre, $\chi(K_S) = \chi(\mathcal{O}_S)$ e $\chi(K_S \otimes \mathcal{L}^\vee) = \chi(\mathcal{L})$, dunque

$$\mathcal{L}^\vee \cdot (\mathcal{L} \otimes K_S^\vee) = 2(\chi(\mathcal{O}_S) - \chi(\mathcal{L})).$$

Usando la bilinearità della forma di intersezione

$$\mathcal{L}^\vee \cdot (\mathcal{L} \otimes K_S^\vee) = \mathcal{L}^\vee \cdot \mathcal{L} + \mathcal{L}^\vee \cdot K_S^\vee = -\mathcal{L}^2 + \mathcal{L} \cdot K_S$$

da cui la tesi. □

Osservazione 2.2.2. Spesso scriveremo la formula appena dimostrata in termini di divisori; porremo quindi $h^i(S, \mathcal{O}_S(D)) = h^i(D)$. Per dualità di Serre, si ha $h^i(D) = h^{2-i}(K_S - D)$ per ogni $0 \leq i \leq 2$. Quindi possiamo scrivere la formula di Riemann-Roch come

$$h^0(D) + h^0(K_S - D) - h^1(D) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(D^2 - D \cdot K_S).$$

Un'importante conseguenza della formula di Riemann-Roch per superfici è la formula del genere. Prima di enunciarla però, ricordiamo com'è definito il genere geometrico.

Definizione 2.2.3. Sia X una varietà proiettiva irriducibile liscia su $\mathbb{C}$ di dimensione n. Definiamo il *genere geometrico* di X come

$$p_g(X) := h^0(X, K_X) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X, \bigwedge^n \Omega_X^1),$$

dove per definizione $K_X = \bigwedge^n TX^\vee$ come fibrati lineari, e $TX = \Omega_X^1$.

Osservazione 2.2.4. Per una curva proiettiva irriducibile liscia C, si ha che $g(C) = h^1(C, \mathcal{O}_C)$. Infatti, per dualità di Serre abbiamo che $h^1(C, \mathcal{O}_C) = h^{1-1}(C, K_C \otimes \mathcal{O}_S^\vee) = h^0(C, K_C)$.

Teorema 2.2.5 (Formula del genere). *Sia C una curva irriducibile su S. Allora il genere di C è*

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K_S).$$

Dimostrazione. Per dualità di Serre, abbiamo che $g(C) = h^1(S, \mathcal{O}_C)$. Consideriamo la successione esatta

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_C \to 0.$$

Si ha $\chi(\mathcal{O}_S) = \chi(\mathcal{O}_S(-C)) + \chi(\mathcal{O}_C)$. Dalla formula di Riemann-Roch per superfici applicata a $\mathcal{O}_S(-C)$, si ottiene

$$\chi(\mathcal{O}_S(-C)) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K_S),$$

e quindi sostituendo

$$-\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S(-C)) - \chi(\mathcal{O}_S) = \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K_S).$$

Dato che $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g(C)$, allora si ha

$$g(C) - 1 = \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K_S)$$

da cui

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K_S).$$

□

Vediamone un'applicazione.

Esempio 2.2.6 (Formula genere-grado). Sia C una curva liscia di grado d in $\mathbb{P}^2$. Per aggiunzione, $K_{\mathbb{P}^2} = -3H$ e quindi applicando il Teorema 2.2.5 otteniamo

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(d^2 - 3d) = \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

ovvero la formula genere-grado per una curva piana proiettiva liscia.

Concludiamo questo capitolo enunciando la formula di Noether per superfici, senza però dimostrarla. Infatti, questa formula segue immediatamente da una più generale formula di Riemann-Roch. Per una dimostrazione si veda [Huy05, pg. 233].

Teorema 2.2.7 (Formula di Noether). *Vale*

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{K_S^2 + \chi_{\text{top}}(S)}{12},$$

dove $\chi_{\text{top}}(S)$ indica la caratteristica di Eulero-Poincaré topologica di S: $\chi_{\text{top}}(S) = \sum(-1)^i b_i$, con $b_i = \text{rk } H^i(S, \mathbb{Z})$.

Capitolo 3

Geometria birazionale delle superfici

Questo terzo capitolo è dedicato alla geometria birazionale delle superfici. L'obiettivo è quello di dare un'idea di come si possano classificare le superfici a meno di birazionalità. Per farlo, introdurremo alcuni concetti che ci saranno utili anche successivamente, come ad esempio quello di scoppiamento. Parleremo poi della dimensione di Kodaira di una varietà proiettiva liscia, ponendo particolare attenzione al caso delle superfici. L'importanza di questo caso sta nel fatto che la dimensione di Kodaira è un invariante birazionale, e il primo passo per dare una classificazione birazionale delle superfici è proprio quello di suddividerle in base alle loro dimensione di Kodaira.

3.1 Scoppiamenti e contrazioni di (-1)-curve

Come in precedenza, se non specificato, S sarà sempre una superficie proiettiva liscia su $\mathbb{C}$.

Definizione 3.1.1. Sia S una superficie e $p \in S$ un punto. Allora esistono una superficie $\hat{S}$ e un morfismo $\epsilon : \hat{S} \to S$, che sono unici a meno di isomorfismo, tali che:

i) $\epsilon_{|\epsilon^{-1}(S \smallsetminus p)} : \epsilon^{-1}(S \smallsetminus p) \to S \smallsetminus p$ è un isomorfismo;

ii) $E := \epsilon^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$.

Diremo che ϵ è lo *scoppiamento* di S in p, ed E è la *curva eccezionale* dello scoppiamento.

Esempio 3.1.2. Sia p un punto di $\mathbb{P}^2_{[x_0:x_1:x_2]}$ tale che $p = V(h_0, h_1)$ con $h_0, h_1 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_1$. Consideriamo $S = V(h_1y_0 - h_0y_1) \subseteq \mathbb{P}^2_{[x_0:x_1:x_2]} \times \mathbb{P}^1_{[y_0:y_1]}$ e la restrizione a S della proiezione naturale sul primo fattore $\pi : \mathbb{P}^2_{[x_0:x_1:x_2]} \times \mathbb{P}^1_{[y_0:y_1]} \to \mathbb{P}^2_{[x_0:x_1:x_2]}$. La fibra sopra p è $\{p\} \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1$, mentre per ogni altro punto diverso da p la fibra è un punto. Dunque $S \cong \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$, dove $S = V(f)$ con $f \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1}(1,1)|$.

Riportiamo alcune importanti proprietà relative agli scoppiamenti. Per la dimostrazione della seguente proposizione si veda [Bea96, Prop.II.3].

Proposizione 3.1.3. *Sia S una superficie, $\epsilon : \hat{S} \to S$ lo scoppiamento di S in p e $E \subseteq \hat{S}$ la curva eccezionale.*

1. *Esiste un isomorfismo di gruppi* $\mathrm{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\hat{S})$ *definito da* $(D, n) \mapsto \epsilon^*D + nE$.
2. *Siano D, D' due divisori su S. Allora $(\epsilon^*D)\cdot(\epsilon^*D') = D\cdot D'$, $E\cdot(\epsilon^*D) = 0$ e $E^2 = -1$.*
3. $\mathrm{NS}(\hat{S}) \cong \mathrm{NS}(S) \oplus \mathbb{Z}[E]$.
4. $K_{\hat{S}} = \epsilon^*K_S + E$.

Usiamo subito questo risultato per determinare la forma di intersezione su $\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$.

Esempio 3.1.4. Sia $p \in \mathbb{P}^2$ un punto e $\epsilon : \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in p. Sappiamo che $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}[H]$, dove $[H]$ è la classe iperpiana di $\mathbb{P}^2$. Per la Proposizione 3.1.3, si ha che $\mathrm{Pic}(\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}[H] \oplus \mathbb{Z}[E]$, dove E è la curva eccezionale dello scoppiamento. Inoltre, abbiamo che $E^2 = -1$, $(\epsilon^*H)^2 = H^2 = 1$ e $E \cdot (\epsilon^*H) = 0$. Dunque, la matrice associata alla forma di intersezione su $\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2$ rispetto a questa base è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Enunciamo ora i principali risultati relativi alla classificazione birazionale delle superfici. Per le dimostrazioni complete si rimanda a [Bea96, § II].

Teorema 3.1.5 (Risoluzione dell'indeterminazione)**.** *Sia $\phi : S \dashrightarrow X$ una mappa razionale da una superficie a una varietà. Allora esiste una superficie S', un morfismo $\eta : S' \to S$ che è composizione di un numero finito di scoppiamenti, e un morfismo $f : S' \to X$ tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "f"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & X \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Esempio 3.1.6. Sia $S = \mathbb{P}^2$ e $p \in \mathbb{P}^2$. La proiezione da p dà una mappa razionale

$$\pi_p : S \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

che non è definita soltanto in p. Scoppiare S in p risolve l'indeterminazione.

Il seguente teorema è senza alcun dubbio il risultato chiave per quanto concerne la comprensione dei morfismi birazionali tra superfici.

Teorema 3.1.7. *Sia $f : S \to S_0$ un morfismo birazionale tra superfici. Allora esiste una sequenza di scoppiamenti $\epsilon_k : S_k \to S_{k-1}$ con $k = 1, ..., n$ e un isomorfismo $u : S \xrightarrow{\sim} S_n$ tale che $f = \epsilon_1 \circ \cdots \epsilon_n \circ u$.*

Quindi, ogni morfismo birazionale tra due superfici è composizione di un numero finito di scoppiamenti e isomorfismi.

Corollario 3.1.8. *Sia $\phi : S \dashrightarrow S'$ una mappa birazionale tra superfici. Allora esiste una superficie $\hat{S}$ e un diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd} & \hat{S} \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S \arrow[rr, dashed, "\phi"'] & & S' \end{tikzcd}$$

dove i morfismi f, g sono composizione di scoppiamenti e isomorfismi.

Diciamo che una curva $E \subseteq S$ è una (-1)-curva se è isomorfa a $\mathbb{P}^1$ e soddisfa $E^2 = -1$. Quindi, sicuramente, la curva eccezionale di uno scoppiamento è una (-1)-curva. In realtà vale anche il viceversa, ossia che se $E \subseteq S$ è una (-1)-curva allora è la curva eccezionale di uno scoppiamento. Questo fatto, conosciuto in letteratura come il criterio di contrazione di Castelnuovo, è uno dei principali risultati nella teoria della classificazione delle superfici. La dimostrazione è un risultato classico, ma complesso e sofisticato. Rimandiamo a [Bea96, Theorem II.17] per una trattazione completa.

Teorema 3.1.9 (Criterio di Castelnuovo)**.** *Sia S una superficie, $E \subseteq S$ una (-1)-curva. Allora E è una curva eccezionale su S.*

La principale conseguenza di questo risultato è la seguente: ogni volta che si ha una (-1)-curva su una superficie S possiamo sempre contrarla dal momento che proviene da uno scoppiamento $\epsilon : S \to S'$. Quindi, contraendo la curva eccezionale, otteniamo una superficie S' (che si dimostra essere liscia) tale che $\rho(S') = \rho(S) - 1$ per la Proposizione 3.1.3, dove $\rho(S)$ indica il rango del gruppo di Picard di S.

Definizione 3.1.10. Una superficie S si dice *minimale* se ogni morfismo birazionale $S \to S'$ è un isomorfismo. Un *modello minimale* per una superficie S è una superficie S' che è minimale e birazionale a S.

Enunciamo un corollario fondamentale del Teorema di Castelnuovo.

Corollario 3.1.11. *Una superficie è minimale se e solo se non contiene* (-1)*-curve. In particolare, ogni superficie ha un modello minimale.*

Deduciamo quindi un fatto molto importante: se si vuole ottenere una classificazione birazionale delle superfici è sufficiente classificare le superfici minimali, dal momento che ogni superficie ammette un modello minimale. Per questo motivo, la classificazione di Enriques-Kodaira delle superfici è semplicemente una classificazione birazionale delle superfici minimali.

Prima di passare ad altro, è importante osservare che il modello minimale di una superficie non è necessariamente unico.

Esempio 3.1.12. Consideriamo $S = \mathbb{P}^2$ e $S' = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. S e S' sono superfici birazionali ma non isomorfe. Tuttavia, sono entrambe superfici minimali dal momento che non contengono curve eccezionali (a partire dalla forma di intersezione, si può direttamente osservare che in entrambi i casi si ha $C^2 > 0$ per ogni curva C sulla superficie). Dunque, ogni superficie birazionale a $\mathbb{P}^2$ può avere almeno due modelli minimali non isomorfi.

Concludiamo questa sezione introducendo alcuni invarianti numerici di una superficie. Ad ogni superficie S siamo in grado di associare diversi interi, ad esempio i seguenti invarianti algebro-geometrici:

i) $q(S) = h^1(S, \mathcal{O}_S)$;

ii) $p_g(S) = h^2(S, \mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(K))$ (per dualità di Serre);

iii) $P_n(S) = h^0(S, \mathcal{O}_S(nK))$ per $n \geq 1$.

Chiamiamo $P_n(S)$ il *plurigenere* di S, $p_g = P_1$ è il genere geometrico, e q è detto *irregolarità* di S. Osserviamo che $\chi(\mathcal{O}_S) = h^0(S, \mathcal{O}_S) - h^1(S, \mathcal{O}_S) + h^2(S, \mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S)$. Possiamo anche considerare i seguenti invarianti topologici:

i) $b_i(S) = \mathrm{rk}\ H^i(S, \mathbb{Z})$;

ii) $\chi_{\mathrm{top}}(S) = \sum_i (-1)^i b_i(S)$.

Abbiamo che $b_0 = b_4 = 1$ e $b_1 = b_3$ per dualità di Poincaré, dunque $\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 2b_1(S) + b_2(S)$. Questi numeri sono legati fra di loro da un'equazione che viene dalla teoria di Hodge:

$$q(S) = h^0(S, \Omega^1_S) = \frac{1}{2} b_1(S).$$

Spesso nel seguito scriveremo semplicemente q, p_g, P_n, b_i laddove non ci sia ambiguità. L'importanza di questi numeri è dovuta al seguente fatto.

Proposizione 3.1.13. *Gli interi q, p_g, P_n sono invarianti birazionali.*

Dimostrazione. Proviamo prima che $q(S) = h^0(S, \Omega^1_S)$ è un invariante birazionale. Sia $\phi : S' \dashrightarrow S$ una mappa birazionale. Poiché il luogo dei punti dove non è definita deve avere codimensione 2 in S', si ha che ϕ corrisponde a un morfismo $f : S' \setminus \{p_1, ..., p_n\} \to S$. Per ogni 1-forma $\omega \in H^0(S, \Omega^1_S)$, la forma $f^*\omega$ è una 1-forma razionale su S' con poli in $\{p_1, ..., p_n\}$. Poiché i poli di una forma sono divisori (quindi non possono essere dei punti nel nostro caso), allora $f^*\omega$ è regolare su tutta S'. Dunque, abbiamo una mappa iniettiva $\phi^* : H^0(S, \Omega^1_S) \to H^0(S', \Omega^1_{S'})$. Dato che ϕ è birazionale, segue che ϕ^* ha un'inversa e quindi $q(S) = q(S')$. Per p_g e P_n la dimostrazione è analoga. □

Osservazione 3.1.14. Nonostante p_g e P_n siano invarianti birazionali, K^2 non lo è. Infatti, se consideriamo $\epsilon : \mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ lo scoppiamento di $\mathbb{P}^2$ in un punto p, per la Proposizione 3.1.3 si ha che $K_{\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2} = \epsilon^* K_{\mathbb{P}^2} + E$. Per aggiunzione, $K_{\mathbb{P}^2} = -3H$ e quindi $K^2_{\mathrm{Bl}_p\mathbb{P}^2} = (-3H+E)^2 = 9H^2 - 6H \cdot E + E^2 = 9+0-1 = 8$, mentre invece $K^2_{\mathbb{P}^2} = (-3H)^2 = 9H^2 = 9$.

Ricordando che $\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{K_S^2 + \chi_{\text{top}}(S)}{12}$ (formula di Noether), deduciamo che nemmeno la caratteristica di Eulero è un invariante birazionale, dato che $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S)$. Inoltre, usando la scomposizione di Hodge e il fatto che $h^{p,q} = h^{q,p}$, otteniamo $\chi_{top}(S) = 2 - 2b_1(S) + b_2(S) = 2 - 4q(S) + 2h^0(\Omega^2_S) + h^1(\Omega^1_S) = 2 - 4q(S) + 2p_g(S) + h^1(\Omega^1_S)$, quindi nemmeno $h^1(\Omega^1_S)$ è un invariante birazionale.

La precedente osservazione e la Proposizione 3.1.13 ci suggeriscono che, nel diamante di Hodge di una superficie

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h^{2,2} & & \\
 & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\
h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2}, \\
 & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\
 & & h^{0,0} & &
\end{array}$$

l'unico numero che non è un invariante birazionale è $h^{1,1}$.

3.2 Dimensione di Kodaira

In questa sezione introduciamo la nozione di dimensione di Kodaira di una varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$, ponendo particolare attenzione al caso delle superfici. Infatti, in questo caso la dimensione di Kodaira rappresenta un importante invariante birazionale che permette di dare una prima classificazione delle superfici in base all'ampiezza del divisore canonico.

Definizione 3.2.1. Sia X una varietà proiettiva liscia su $\mathbb{C}$, K il divisore canonico di X e $\varphi_{|nK|}$ la mappa razionale associata al sistema lineare $|nK|$. Definiamo la *dimensione di Kodaira* di S come

$$\kappa(X) := \max_{n\geq 1}\{\dim(\varphi_{|nK|}(X))\}.$$

Se $|nK| = \emptyset$ allora $\varphi_{|nK|}(X) = \emptyset$, e in tal caso poniamo $\dim(\emptyset) = -\infty$.

Dunque, ciò che possiamo evincere da questa definizione è che la dimensione di Kodaira di una varietà in un certo senso ci dice quanto il canonico sia efficace nell'immergere la varietà in uno spazio proiettivo.

Osservazione 3.2.2. La dimensione di Kodaira è additiva, ovvero $\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$.

Nel caso delle curve si ha una descrizione molto esplicita.

Esempio 3.2.3. Sia C una curva proiettiva liscia di genere g. Allora:

i) $\kappa(C) = -\infty \iff g = 0$.

ii) $\kappa(C) = 0 \iff g = 1$.

iii) $\kappa(C) = 1 \iff g \geq 2$.

Consideriamo ora il caso delle superfici. Se $\kappa(S) = -\infty$, si hanno tre modelli minimali: $\mathbb{P}^2$, $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e $\mathbb{P}_C(E)$, ossia il fibrato proiettivo associato a un fibrato vettoriale $E \xrightarrow{\pi} C$ di rango 2 su una curva proiettiva liscia C. La classificazione nel caso $\kappa(S) = 2$ è di gran lunga quella più complicata, mentre il caso $\kappa(S) = 1$ è di difficoltà intermedia.

Proposizione 3.2.4. *Sia $S_{d_1,\dots,d_r}$ una superficie in $\mathbb{P}^{r+2}$ che è intersezione completa di r ipersuperfici di grado $d_1, \dots, d_r$. Allora:*

1. *Le superfici S_2, S_3, $S_{2,2}$ sono razionali (quindi $\kappa = -\infty$).*

2. Le superfici S_4, $S_{2,3}$, $S_{2,2,2}$ *hanno* $K \cong \mathcal{O}_S$ *e* $\kappa = 0$.

3. Tutte le altre superfici hanno $\kappa = 2$.

Dimostrazione. Abbiamo $K \sim kH$, dove H indica la classe iperpiana della superficie per una data immersione, K il divisore canonico della superficie e $k = (\sum d_i) - r - 3$ per aggiunzione. Per $k < 0$ abbiamo:

(a) per $r = 1$, si ha S_2, $S_3 \subseteq \mathbb{P}^3$, che sono isomorfe rispettivamente a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e $\mathrm{Bl}_{\{P_1,...,P_6\}}\mathbb{P}^2$ ($P_1, ..., P_6$ in posizione generale), le quali sono chiaramente razionali;

(b) per $r = 2$, abbiamo soltanto $S_{2,2} \subseteq \mathbb{P}^4$, che si può provare essere isomorfa $\mathrm{Bl}_{\{P_1,...,P_5\}}\mathbb{P}^2$ ($P_1, ..., P_5$ in posizione generale), e quindi razionale;

(c) per $r > 2$, non si ha più nessun nuovo caso.

Per $k = 0$, e quindi $K \cong \mathcal{O}_S$, abbiamo:

(a) per $r = 1$, si ha $S_4 \subseteq \mathbb{P}^3$, che ha $\kappa = 0$ poiché $K^{\otimes n} \cong \mathcal{O}_S$ per ogni $n \geq 1$, e quindi $h^0(nK) = 1$ per ogni $n \geq 1$.

(b) per $r = 2$, si ha $S_{2,3} \subseteq \mathbb{P}^4$, che per lo stesso motivo di sopra ha $\kappa = 0$.

(c) per $r = 3$, si ha $S_{2,2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$, che ha $\kappa = 0$.

(d) per $r > 3$ non si hanno nuovi casi.

Per tutte le altre intersezioni complete, il canonico è un multiplo positivo di H (che dà un'immersione) e quindi $\kappa = 2$. □

Poiché l'oggetto principale di questa tesi sono le superfici K3, ovvero una classe particolare di superfici con $\kappa = 0$, da questo momento in poi ci concentreremo soltanto sul caso $\kappa = 0$. Dato che le superfici con $\kappa = 0$ hanno un unico modello minimale, possiamo limitarci allo studio delle superfici minimali. D'ora in poi, S sarà sempre una superficie proiettiva liscia su $\mathbb{C}$ tale che $\kappa(S) = 0$.

Una prima considerazione che possiamo fare è che, dalla definizione, segue immediatamente che $\kappa(S) = 0 \iff P_n = 0$ o 1 per ogni $n \geq 1$, ed esiste un N tale che $P_N = 1$. In particolare, si ha $p_g \leq 1$.

Proviamo ora due fatti che ci serviranno per dimostrare il teorema conclusivo di questa sezione.

Lemma 3.2.5. *Sia S una superficie proiettiva liscia.*

(i) Se esiste una curva irriducibile C su S tale che $K_S \cdot C < 0$ e $C^2 \geq 0$, allora $P_n(S) = 0$ per ogni $n > 0$.

(ii) Se esiste $n > 0$ tale che $P_n(S) \neq 0$, ed esiste una curva irriducibile C su S tale che $K_S \cdot C < 0$, allora C è una (-1)-curva.

Dimostrazione. (i) Supponiamo per assurdo che esista $n > 0$ tale che $P_n(S) \neq 0$. Allora $|nK_S| \neq \emptyset$, e sia $D \in |nK_S|$. Possiamo scrivere $D = kC + R$, dove $k \in \mathbb{Z}$ e R è un divisore effettivo che non contiene C. Poiché $n > 0$ e $K_S \cdot C < 0$, si ha che $D \cdot C < 0$ ($D \sim nK_S$). Inoltre, possiamo dedurre che $k \neq 0$ perché altrimenti avremmo $D \cdot C = kC^2 + R \cdot C = 0 + 0 = 0$. Affinché D sia effettivo si deve avere che $k \geq 0$, ma allora $k \geq 1$. Ma ora avremmo

$$0 > nK_S \cdot C = D \cdot C = kC^2 + R \cdot C \geq kC^2 \geq 0,$$

il che è chiaramente una contraddizione. Dunque $P_n(S) = 0$ per ogni $n > 0$.

(ii) Dobbiamo analizzare due casi: $K_S \cdot C \leq -2$ e $K_S \cdot C = -1$. Nel primo, usando la formula del genere, otteniamo

$$0 \leq g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + K_S \cdot C) \leq C^2,$$

ma allora per il punto (i) dovremmo avere che $P_n(S) = 0$ per ogni $n > 0$, il che è in contraddizione con l'ipotesi e quindi si deve necessariamente avere $K_S \cdot C = -1$. Da (i), si ha $C^2 < 0$, e usando di nuovo la formula del genere abbiamo

$$0 \leq g(c) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 - 1),$$

da cui $C^2 \geq -1$. Ma $C^2 < 0$, dunque $C^2 = -1$ e, sostituendo nella formula precedente, otteniamo anche $g(C) = 0$. Concludiamo che C è una (-1)-curva su S.

□

Lemma 3.2.6. *Sia S una superficie minimale con $\kappa(S) = 0$. Allora:*

(i) $K_S^2 = 0$;

(ii) $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$;

(iii) siano n e m interi positivi tali che $P_n = P_m = 1$; allora, se d è il massimo comune divisore tra n e m, si ha $P_d = 1$.

Dimostrazione. (i) Per qualche $N \geq 1$, $|NK_S|$ contiene un divisore effettivo D; per il Lemma 3.2.5 si ha $D \cdot K_S \geq 0$, $K_S^2 \geq 0$. Per assurdo supponiamo $K_S^2 > 0$. Usando Riemann-Roch per superfici abbiamo che

$$h^0(nK_S) + h^0((1-n)K_S) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{n(n-1)}{2} K_S^2.$$

Per ogni $n \geq 2$ si ha $|(1-n)K_S| = \emptyset$, altrimenti avremmo $E \in |(1-n)K_S|$ che darebbe $E \cdot K_S \geq 0$ e quindi $K_S^2 \leq 0$ (perché $E \sim (1-n)K_S$ e $E \cdot K_S = (1-n)K_S^2$). Dunque, si ha $h^0((1-n)K_S) = 0$, da cui

$$P_n = h^0(nK_S) \geq \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{n(n-1)}{2} K_S^2.$$

Ma ciò è assurdo poiché avremmo che P_n tende a $+\infty$ per n che va a $+\infty$, contraddicendo quindi $\kappa(S) = 0$.

(ii) Usando $K_S^2 = 0$, la formula di Noether dà

$$12\chi(\mathcal{O}_S) = 2 - 4q + b_2,$$

dove abbiamo usato che $\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 2b_1 + b_2$ e $b_1 = 2q$. Ricordiamo che $\chi(\mathcal{O}_S) = h^0(\mathcal{O}_S) - h^1(\mathcal{O}_S) + h^2(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g$. Dunque, sostituendo $4q = 4 + 4p_g - 4\chi(\mathcal{O}_S)$ nella formula precedente, otteniamo

$$8\chi(\mathcal{O}_S) = -2 - 4p_g + b_2 \geq -2 - 4p_g \geq -6,$$

poiché $p_g \leq 1$ dato che $\kappa(S) = 0$. Concludiamo che $\chi(\mathcal{O}_S) \geq 0$.

(iii) Sia $D \in |nK_S|$ e $E \in |mK_S|$. Siano poi n', $m' \in \mathbb{Z}$ coprimi tali che $n = dn'$ e $m = dm'$. Si ha che $m'D$, $n'E \in |\frac{nm}{d}K_S|$, con $\dim|\frac{nm}{d}K_S| = 1$ poiché $K_S \cong \mathcal{O}_S$, e quindi $m'D = n'E$. Ma allora esiste un divisore effettivo Δ tale che $D = n'\Delta$ e $E = m'\Delta$. Ora consideriamo $\epsilon = [\Delta - dK_S] \in \text{Pic}(S)$. Poiché $D \sim nK_S$, si ha che $n'\epsilon \sim n'\Delta - n'dK_S \sim D - nK_S \sim 0$. Analogamente, otteniamo $m'\epsilon \sim 0$. Ma dato che $\text{MCD}(n', m') = 1$, allora $\epsilon \sim 0$. In conclusione, abbiamo $\Delta \in |dK_S|$ e quindi $P_d = 1$.

□

Concludiamo questo capitolo con la classificazione delle superfici minimali con dimensione di Kodaira 0.

Teorema 3.2.7 (e definizioni)**.** *Sia S una superficie minimale con $\kappa(S) = 0$. Allora S appartiene a uno dei seguenti quattro casi:*

1) $p_g = 0$, $q = 0$; allora $2K_S \cong \mathcal{O}_S$, e diciamo che S è una superficie di Enriques.

2) $p_g = 0$, $q = 1$; allora S è una superficie biellittica, cioè $S \cong (E \times F)/G$ dove E, F sono curve ellittiche e G è un gruppo finito di traslazioni di E che agisce su F in modo che $F/G \cong \mathbb{P}^1$.

3) $p_g = 1$, $q = 0$; allora $K_S \cong \mathcal{O}_S$, e diciamo che S è una superficie K3.

4) $p_g = 1$, $q = 2$; allora S è una superficie abeliana, cioè è un toro complesso polarizzato di dimensione 2.

Dimostrazione. Sappiamo che sicuramente $p_g \leq 1$. Supponiamo prima $p_g = 0$. Se $q = 0$, si ha necessariamente $P_2 \geq 1$ per il criterio di Castelnuovo. Infatti, se $P_2 = 0$ allora S sarebbe razionale ma ciò non è possibile perché altrimenti si avrebbe $P_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Ma siccome $P_n \leq 1$ per ogni $n \geq 1$, si ha $P_2 = 1$. Usando Riemann-Roch con $3K_S$, dato che $K_S^2 = 0$ per il Lemma 3.2.6, si ha

$$h^0(3K_S) + h^0(-2K_S) \geq \chi(\mathcal{O}_S) \geq 1.$$

Poiché $p_g = 0$, per il Lemma 3.2.6 si ha $P_3 = 0$. Infatti, se fosse $P_3 = 1$ allora per il Lemma 3.2.6, dato che $P_2 = P_3 = 1$, si avrebbe $P_1 = p_g = 1$, il che è una contraddizione. Quindi, dalla disuguaglianza deduciamo che $h^0(-2K_S) \geq 1$. Dunque abbiamo che $h^0(2K_S) \geq 1$, $h^0(-2K_S) \geq 1$, ma ciò è possibile se e solo se $2K_S \cong \mathcal{O}_S$, il che prova 1).

Per quanto riguarda le superfici minimali con $p_g = 0$, $q \geq 1$ si può dimostrare che le uniche con $\kappa = 0$ sono le superfici biellittiche. Per un'analisi completa di questo caso e per la classificazione di tali superfici si veda [Bea96, § VI].

Ora supponiamo $p_g = 1$. Dal Lemma 3.2.6 segue che $q = 0, 1$ o 2, poiché $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g \geq 0$. Se $q = 0$, da Riemann-Roch con $2K_S$ si ottiene $h^0(2K_S) + h^0(-K_S) \geq \chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q + p_g = 2$ ($K_S^2 = 0$). Poiché $h^0(2K_S) = P_2 \leq 1$, segue che $h^0(-K_S) \geq 1$ e quindi, dato che $p_g \geq 1$ e $h^0(-K_S) \geq 1$, si ha $K_S \cong \mathcal{O}_S$, che prova 3).

Ora invece supponiamo $q = 1$. Dalla successione esponenziale, passando alla successione esatta lunga in coomologia otteniamo

$$H^1(S, \mathbb{Z}) \to H^1(S, \mathcal{O}_S) \to \mathrm{Pic}(S),$$

dove la parte libera di $H^1(S,\mathbb{Z})$ ha rango 2. Possiamo supporre che questa sia generata da $\{1,\alpha\}$. Quindi, prendendo ad esempio $\delta = \frac{1+\alpha}{2}$, abbiamo che $\delta \notin \mathrm{im}(H^1(S,\mathbb{Z}))$ ma $2\delta \in \mathrm{im}(H^1(S,\mathbb{Z}))$ (stiamo identificando δ con $(\delta,0)$ nel caso in cui $H^1(S,\mathbb{Z})$ abbia torsione). Quindi, dall'esattezza della successione, possiamo dedurre che esiste $\epsilon \in \mathrm{Pic}(S)$ tale che $\epsilon \ncong \mathcal{O}_S$ ma $2\epsilon \cong \mathcal{O}_S$. In particolare, $\epsilon \cdot D = 0$ per ogni divisore D su S ($\epsilon \sim -\epsilon \Rightarrow \epsilon \cdot D = (-\epsilon)\cdot D \Rightarrow 2\epsilon \cdot D = 0$), e $h^0(\epsilon) = h^0(-\epsilon) = 0$ ($\epsilon \sim -\epsilon$). Ora, Riemann-Roch con ϵ e il Lemma 3.2.6 danno

$$h^0(\epsilon) + h^0(K_S - \epsilon) \geq \chi(\mathcal{O}_S) \geq 1,$$

quindi $h^0(K_S - \epsilon) \geq 1$. Siano $D \in |K_S - \epsilon|$, $E \in |K_S|$; allora $2D$, $2E \in |2K_S|$, da cui $2D = 2E$ poiché $P_2 = 1$. Ma allora si avrebbe $D = E$ e quindi $K_S - \epsilon \sim K_S$, il che contraddice $\epsilon \ncong \mathcal{O}_S$. Ne deduciamo che non esiste una superficie con $p_g = P_2 = q = 1$.

Il punto 4) è decisamente più complicato degli altri. Per ragioni di sintesi, e visto il focus di questa tesi, si rimanda a [Bea96, Proposition VIII.6] per una dimostrazione completa. □

Capitolo 4

Superfici K3

Nonostante in questa tesi trattiamo soltanto il caso delle superfici algebriche, è importante sottolineare che la definizione di superficie K3 è più generale: una superficie K3 è una superficie complessa, compatta, semplicemente connessa, con divisore canonico banale. Nel caso algebrico (proiettivo), sono esattamente quelle che abbiamo definito alla fine del precedente capitolo, ovvero superfici algebriche proiettive lisce con divisore canonico banale e irregolarità zero. E' bene sottolineare in effetti come la generica superficie K3 non sarà algebrica.

4.1 Diamante di Hodge e rango di Picard

Iniziamo col fare alcune considerazioni di tipo generale sulle superfici K3. Innanzitutto, si può facilmente osservare come $K_S \cong \mathcal{O}_S$ implichi la loro minimalità. Infatti, se così non fosse, potremmo contrarre una (-1)-curva sulla superficie S ottenendo una superficie liscia $\hat{S}$, e quindi grazie alla Proposizione 3.1.3 avremmo che $K_S = \epsilon^* K_{\hat{S}} + E \sim 0$, il che chiaramente è assurdo. Inoltre, sempre da $K_S \cong \mathcal{O}_S$, dalla formula di Noether

$$\chi(\mathcal{O}_S) = \frac{K_S^2 + \chi_{\text{top}}(S)}{12}$$

otteniamo $\chi_{\text{top}}(S) = 24$, poiché $K_S^2 = 0$ e $\chi(\mathcal{O}_S) = h^0(\mathcal{O}_S) - h^1(\mathcal{O}_S) + h^2(\mathcal{O}_S) = 2h^0(\mathcal{O}_S) - q = 2 - 0 = 2$ per una superficie K3. Quindi, poiché $\chi_{\text{top}}(S) = 2 - 4q + b_2$, si ha $b_2 = 22$.

Calcoliamo ora il diamante di Hodge di una superficie K3.

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{2,2} & & \\ & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\ h^{2,0} & & h^{1,1} & & h^{0,2} \\ & h^{1,0} & & h^{0,1} & \\ & & h^{0,0} & & \end{array}$$

Ricordiamo che $H^{p,q}(S) \cong H^q(S, \Omega_S^p)$, quindi in particolare $h^{p,q} = h^q(\Omega_S^p)$, e che $H^{p,q}(S) \cong \overline{H^{q,p}(S)}$, da cui $h^{p,q} = h^{q,p}$.

i) $h^{0,0} = h^0(\mathcal{O}_S) = 1$;

ii) $h^{1,0} = h^{0,1} = h^1(\mathcal{O}_S) = q = 0$ poiché $q = 0$ definizione;

iii) $h^{2,0} = h^0(\Omega_S^2) = h^0(K_S) = h^0(\mathcal{O}_S) = 1$;

iv) Per la scomposizione di Hodge si ha $b_2 = h^{2,0} + h^{1,1} + h^{0,2}$, dove $b_2 = 22$ come avevamo già visto applicando la formula di Noether. Quindi $h^{1,1} = 20$.

Dunque, abbiamo che il diamante di Hodge di una superficie K3 è

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 1 & & 20 & & 1. \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Detto ciò, cerchiamo ora di dedurre alcune informazioni sul gruppo di Picard di una superficie K3. Prima di tutto, consideriamo la successione esponenziale

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S^* \to 0.$$

Dal momento che $H^0(S, \mathcal{O}_S) = \mathbb{C}$, $H^0(S, \mathcal{O}_S^*) = \mathbb{C}^*$, e ricordando che $H^1(S, \mathcal{O}_S^*) \cong \mathrm{Pic}(S)$, passando alla successione esatta lunga in coomologia otteniamo

$$0 \to H^1(S, \mathbb{Z}) \to H^1(S, \mathcal{O}_S) \to \mathrm{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}) \to H^2(S, \mathcal{O}_S) \to H^2(S, \mathcal{O}_S^*) \to H^3(S, \mathbb{Z}).$$

Per definizione di superficie K3, abbiamo $h^1(S, \mathcal{O}_S) = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, quindi possiamo dedurre che $H^1(S, \mathbb{Z}) = 0$. A questo punto, abbiamo bisogno del seguente fatto. Per la dimostrazione si rimanda a [Mér85, Proposition 1.1].

Proposizione 4.1.1. *Sia S una superficie K3. Allora $H_1(S, \mathbb{Z}) = 0$.*

Quindi, usando la dualità di Poincaré, per una superficie K3 si ha $H^1(S, \mathbb{Z}) = H_1(S, \mathbb{Z}) = H^3(S, \mathbb{Z}) = H_3(S, \mathbb{Z}) = 0$. Dunque la successione diventa

$$0 \to \operatorname{Pic}(S) \xrightarrow{c_1} H^2(S, \mathbb{Z}) \to H^2(S, \mathcal{O}_S) \to H^2(S, \mathcal{O}_S^*) \to 0.$$

Ricordando che $\operatorname{Pic}^0(S) = \ker(c_1)$ e $\operatorname{NS}(S) = \operatorname{Pic}(S)/\operatorname{Pic}^0(S)$, poiché $c_1 : \operatorname{Pic}(S) \to H^2(S, \mathbb{Z})$ è iniettiva, deduciamo che $\operatorname{Pic}(S) \cong \operatorname{NS}(S)$. Ora, poiché $\operatorname{NS}(S)$ è un gruppo abeliano finitamente generato, per la classificazione dei gruppi abeliani finitamente generati si ha che $\operatorname{Pic}(S) = \mathbb{Z}^r \oplus \bigoplus_n \mathbb{Z}_{/(n)}$, ovvero ha una parte libera e una parte di torsione. Per determinare la parte di torsione, ci serve il Teorema dei coefficienti universali. Per la dimostrazione si veda [Hat02, Theorem 3.2].

Teorema 4.1.2 (Coefficienti universali)**.** *Sia X uno spazio topologico e G un gruppo abeliano. Allora si ha la seguente successione esatta corta:*

$$0 \to \operatorname{Ext}^1(H_{k-1}(X, \mathbb{Z}), G) \to H^k(X, G) \to \operatorname{Hom}(H_k(X, \mathbb{Z}), G) \to 0.$$

Applicando il teorema con $G = \mathbb{Z}$ e $k = 2$, otteniamo

$$0 \to \operatorname{Ext}^1(H_1(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to H^2(S, \mathbb{Z}) \to \operatorname{Hom}(H_2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \to 0.$$

Siccome siamo a coefficienti in $\mathbb{Z}$, abbiamo che $\operatorname{Hom}(H_2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \mathrm{F}(H_2(S, \mathbb{Z}))$ e $\operatorname{Ext}^1(H_1(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = \mathrm{T}(H_1(S, \mathbb{Z}))$, dove F e T indicano rispettivamente la parte libera e la parte di torsione del gruppo. Essendo quindi $\operatorname{Hom}(H_2(S, \mathbb{Z}), \mathbb{Z})$ libero, la successione spezza e si ottiene

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathrm{F}(H_2(S, \mathbb{Z})) \oplus \mathrm{T}(H_1(S, \mathbb{Z})).$$

Ma ora, poiché $H_1(S, \mathbb{Z}) = 0$, deduciamo che $H^2(S, \mathbb{Z})$ non ha torsione. Dunque, poiché $c_1 : \operatorname{Pic}(S) \to H^2(S, \mathbb{Z})$ è iniettiva come già osservato, nemmeno $\operatorname{Pic}(S)$ ha torsione. Abbiamo quindi ottenuto un risultato importante: se S è una superficie K3 allora $\operatorname{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}^{\rho(S)}$, dove $\rho(S)$ è il rango di Picard di S.

A questo punto, per determinare astrattamente il gruppo di Picard di una superficie K3 è sufficiente conoscere il suo rango di Picard. Inoltre, dato che per una superficie K3 si ha $b_2 = \operatorname{rk} H^2(S, \mathbb{Z}) = 22$, deduciamo che $\rho(S) \leq 22$. Possiamo essere più precisi. In effetti, si può dimostrare che per una superficie proiettiva liscia si ha $\operatorname{NS}(S) = H^2(S, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(S)$. Dal momento che per una superficie K3 abbiamo già osservato che $\operatorname{Pic}(S) \cong \operatorname{NS}(S)$ e $h^{1,1} = 20$, possiamo finalmente concludere che $\rho(S) \leq 20$.

Concludiamo questa sezione analizzando un paio di esempi espliciti di superfici K3 (non generiche) con rango di Picard maggiore di uno.

Esempio 4.1.3. Consideriamo $X = V(x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) \subseteq \mathbb{P}^3$ la quartica di Fermat in $\mathbb{P}^3$, che è chiaramente una superficie K3 per aggiunzione e per il Teorema della sezione iperpiana. Un generico rappresentante della sua classe iperpiana $[H] \in \mathrm{Pic}(X)$ è dato da una curva liscia di genere 3, ad esempio per il Teorema 4.2.8. Per osservare che $\rho(X) > 1$, basta quindi mostrare che X contiene almeno una retta: ad esempio si ha $L = V(x_0 - ix_1, x_2 - ix_3) \subseteq X$. In realtà, si può mostrare che ne contiene esattamente 48. Se ζ_k con $k = 1, 2, 3, 4$ sono le radici quarte dell'unità, abbiamo 16 rette della forma

$$L_{k,h} = V(x_0 - \zeta_k x_1, x_2 - \zeta_h x_3).$$

Scambiando tra di loro le variabili, otteniamo le altre 32 rette:

$$L_{k,h} = V(x_0 - \zeta_k x_2, x_1 - \zeta_h x_3)$$

$$L_{k,h} = V(x_0 - \zeta_k x_3, x_2 - \zeta_h x_1).$$

Si può effettivamente mostrare che non ce ne sono altre, anche se per nulla banale. Precedentemente, abbiamo provato che ogni superficie K3 può avere rango di Picard al massimo 20, quindi queste rette non sono sicuramente tutte indipendenti tra di loro. Più precisamente, si può dimostrare che $\rho(X) = 20$ e quindi che la quartica di Fermat in $\mathbb{P}^3$ ha rango di Picard massimale.

Esempio 4.1.4. Sia $X = V(F_0, F_1, F_2, F_3) \subseteq \mathbb{P}^3_{[\underline{x}]} \times \mathbb{P}^3_{[\underline{y}]}$ dove $F_i \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3}(1,1)|$. Consideriamo la restrizione a X della proiezione naturale sul primo fattore $\pi : \mathbb{P}^3_{[\underline{x}]} \times \mathbb{P}^3_{[\underline{y}]} \to \mathbb{P}^3_{[\underline{x}]}$. Raccogliendo i monomi y_j con $j = 0, 1, 2, 3$, possiamo scrivere $F_i(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{j=0}^3 y_j h_j^{(i)}(\underline{x})$, con $h_j^{(i)} \in \mathbb{C}[\underline{x}]_1$ e $i = 0, 1, 2, 3$. Preso un punto $p \in \mathbb{P}^3_{\underline{x}}$, si ha che $\pi_{|X}^{-1}(p)$ è il luogo in $\mathbb{P}^3_{\underline{y}}$ descritto da

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^3 y_j h_j^{(0)}(p) = 0 \\ \sum_{j=0}^3 y_j h_j^{(1)}(p) = 0 \\ \sum_{j=0}^3 y_j h_j^{(2)}(p) = 0 \\ \sum_{j=0}^3 y_j h_j^{(3)}(p) = 0 \end{cases}.$$

Dunque, genericamente si ha $\pi_{|X}^{-1}(p) = \emptyset$, tranne quando la matrice

$$M := \begin{pmatrix} h_0^{(1)}(\underline{x}) & h_1^{(1)}(\underline{x}) & h_2^{(1)}(\underline{x}) & h_3^{(1)}(\underline{x}) \\ h_0^{(2)}(\underline{x}) & h_1^{(2)}(\underline{x}) & h_2^{(2)}(\underline{x}) & h_3^{(2)}(\underline{x}) \\ h_0^{(3)}(\underline{x}) & h_1^{(3)}(\underline{x}) & h_2^{(3)}(\underline{x}) & h_3^{(3)}(\underline{x}) \\ h_0^{(4)}(\underline{x}) & h_1^{(4)}(\underline{x}) & h_2^{(4)}(\underline{x}) & h_3^{(4)}(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

perde rango. Più precisamente, osserviamo che non si può avere $rk(M) < 3$ perché la codimensione del luogo in $\mathbb{P}^3_{\underline{x}}$ dato da $\mathrm{rk}(M) \leq 2$ sarebbe uguale a 4 (si veda [FTT24, Theorem 3.4]). Quindi, il luogo dei punti di $\mathbb{P}^3_{\underline{x}}$ la cui fibra è non vuota è esattamente $V(\det(M)) \subseteq \mathbb{P}^3_{\underline{x}}$, che chiaramente è una quartica dal momento che $h_j^{(i)}(\underline{x})$ sono tutte forme lineari. Dunque, X è isomorfo a una quartica genericamente liscia in $\mathbb{P}^3_{\underline{x}}$, e quindi, in particolare, è una superficie K3.

Ora proviamo che $\rho(X) > 1$. Sappiamo già che $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3) \cong \mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}[H_1] \oplus \mathbb{Z}[H_2]$, dove $[H_1]$ e $[H_2]$ sono i pull-back delle classi iperpiane dei due $\mathbb{P}^3$ tramite le rispettive proiezioni. Se consideriamo la successione esponenziale e passiamo alla successione esatta lunga in coomologia, usando il fatto che $H^i(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3}) = 0$ per ogni $i > 0$, otteniamo che $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3) \cong H^2(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3, \mathbb{Z})$. Inoltre, abbiamo già visto in precedenza che $\mathrm{Pic}(X) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ se X è una superficie K3. Per il Teorema della sezione iperpiana di Lefschetz, $H^2(\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$ è iniettiva; in particolare abbiamo $[H_1]$, $[H_2] \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Ma allora, poiché $[H_1]$, $[H_2]$ sono due classi divisoriali, si ha che $[H_1]$, $[H_2] \in \mathrm{Pic}(X)$, e chiaramente sono indipendenti anche in $\mathrm{Pic}(X)$. Ne deduciamo che $\rho(X) \geq 2$.

4.2 Sistemi lineari su superfici K3 e costruzioni

In questa sezione iniziamo a mettere mano e a lavorare ad alcuni esempi espliciti. Più precisamente, oltre a vedere qualche costruzione classica, studieremo i sistemi lineari associati a curve su una superficie K3 e cercheremo di capire come e dove le superfici vengano immerse al variare del genere delle curve.

Lemma 4.2.1. *Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un'intersezione completa di dimensione d. Allora si ha $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ per $0 < i < d$.*

Dimostrazione. Più in generale, proviamo che $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ per $0 < i < d$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Procedendo induttivamente sul numero di equazioni che definiscono X, basta provare che se l'asserto vale per X, allora vale che per $Y = X \cap V(f_r)$, dove $V(f_r)$

è un'ipersuperficie liscia di grado r. A questo punto basta considerare la successione esatta corta

$$0 \to \mathcal{O}_X(k-r) \to \mathcal{O}_X(k) \to \mathcal{O}_Y(k) \to 0,$$

passare alla successione esatta lunga in coomologia e usare l'ipotesi induttiva $H^i(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ per $0 < i < d$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$. □

Cerchiamo quindi di capire quali sono le superfici K3 che si ottengono come intersezioni complete in uno spazio proiettivo.

Esempio 4.2.2 (Intersezioni complete)**.** Nel precedente capitolo, abbiamo visto che le uniche superfici che sono intersezione completa con $K \cong \mathcal{O}_S$ sono $S_4 \subseteq \mathbb{P}^3$, $S_{2,3} \subseteq \mathbb{P}^4$ e $S_{2,2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$. Grazie al Lemma 4.2.1, in tutti questi casi si ha $h^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$. Deduciamo quindi che sono superfici K3.

Esempio 4.2.3. Sia A una superficie abeliana, quindi $A \cong \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$ con una data polarizzazione (ovvero un'immersione fissata in uno spazio proiettivo). Fissando un'origine, A ha una struttura di gruppo che viene dalla somma in $\mathbb{C}^2$. Sia τ l'involuzione di A data da $a \mapsto -a$. L'insieme dei punti fissi è dato esattamente dagli elementi di ordine 2 del gruppo, che sono 16 punti $\{p_1, ..., p_{16}\}$. Sia $\epsilon : \hat{A} \to A$ lo scoppiamento di A in questi 16 punti, e $E_i = \epsilon^{-1}(p_i)$ le curve eccezionali. Possiamo estendere l'involuzione τ a un'involuzione σ di $\hat{A}$. Denotiamo con S il quoziente $S = \hat{A}/\{1, \sigma\}$ dato dall'azione di $\{1, \sigma\} \cong \mathbb{Z}_{/2}$ su $\hat{A}$, e sia $\pi : \hat{A} \to S$ la proiezione al quoziente (che è un rivestimento ramificato di grado 2).

Proposizione 4.2.4 (Superficie di Kummer)**.** *$S = \hat{A}/\{1, \sigma\}$ è una superficie K3, detta superficie di Kummer di A.*

Dimostrazione. Prima proviamo che S è liscia. Siccome fuori da E_i il rivestimento π è non ramificato, basta controllare che i punti $\pi(q)$, con $q \in E_i$, siano lisci. In un intorno di p_i, si hanno coordinate locali (x, y) su A tali che $\tau^* x = -x$, $\tau^* y = -y$. Poniamo $x' = \epsilon^* x$, $y' = \epsilon^* y$. Possiamo supporre che x' e $t = \frac{y'}{x'}$ siano coordinate locali su A vicino q ($q \in E_i \cong \mathbb{P}^1$). Si ha $\sigma^* x' = -x'$, $\sigma^* t = \frac{-y'}{-x'} = t$, quindi t e $u = (x')^2$ formano un sistema di coordinate locali su S in un intorno di $\pi(q)$: dunque S è liscia.

Ora calcoliamo il divisore canonico di S. Consideriamo la 2-forma regolare $\omega = dx \wedge dy$ su A. Questa è mai nulla e si ha $\tau^* \omega = d(-x) \wedge d(-y) = dx \wedge dy = \omega$, per cui la 2-forma $\epsilon^* \omega$ è invariante per l'azione di $\{1, \sigma\}$. Allora si può provare che $\epsilon^* \omega = \pi^* \alpha$, dove α è una

2-forma razionale su S il cui divisore è concentrato negli E_i. Sia $q \in E_i$. In un intorno di q abbiamo

$$\epsilon^*\omega = dx' \wedge dy' = dx' \wedge d(tx') = x'dx' \wedge dt = \frac{1}{2}du \wedge dt.$$

Segue che α è regolare e non nulla in q, quindi $\mathrm{div}(\alpha) = 0$ e $K_S \cong \mathcal{O}_S$.

Proviamo infine che $q = h^1(\mathcal{O}_S) = h^0(\Omega^1_S) = 0$. Se S avesse una 1-forma regolare non nulla, allora $\hat{A}$ avrebbe una 1-forma invariante per σ. Poiché $\epsilon^* : H^0(A, \Omega^1_A) \to H^0(\hat{A}, \Omega^1_{\hat{A}})$ è un isomorfismo, come abbiamo visto nella Proposizione 3.1.13, ciò implicherebbe l'esistenza di una 1-forma su A invariante per τ, il che è assurdo poiché $H^0(A, \Omega^1_A)$ ha come base $\{dx, dy\}$ e quindi non può essere invariante. Concludiamo che $q(S) = 0$ e quindi che S è una superficie K3. □

Osservazione 4.2.5. Se avessimo fin da subito quozientato A per l'azione di $\{1, \tau\}$, invece di scoppiare e poi quozientare, avremmo ottenuto una varietà singolare con 16 punti doppi ordinari r_i, ovvero le immagini dei p_i mediante la proiezione al quoziente.

Osservazione 4.2.6. Poiché il rivestimento $\pi : \hat{A} \to S$ ha grado 2, deduciamo che la superficie di Kummer di A contiene 16 (-2)-curve, ovvero le proiezioni delle curve eccezionali dello scoppiamento $\pi(E_i)$. Quindi la superficie di Kummer di A è una superficie K3 che contiene 16 rette (tutte indipendenti), da cui $\rho(S) \geq 17$. Dunque, S è una superficie K3 altamente non generica dal momento che una superficie K3 generica ha rango di Picard 1.

Il prossimo obiettivo è quello di studiare i sistemi lineari su una superficie K3 e i morfismi che questi definiscono. Prima di enunciare il prossimo risultato però, diamo una definizione.

Definizione 4.2.7. Una curva C si dice *iperellittica* se $g(C) \geq 2$ e se ammette un rivestimento $2:1$ di $\mathbb{P}^1$, ovvero se esiste un morfismo (necessariamente ramificato) $C \to \mathbb{P}^1$ di grado 2.

Teorema 4.2.8. *Sia S una superficie K3 e $C \subseteq S$ una curva liscia di genere g. Allora:*

1. $C^2 = 2g - 2$ *e* $h^0(C) = g + 1$.

2. *Se $g \geq 1$, il sistema lineare $|C|$ non ha punti base, quindi definisce un morfismo $\varphi_{|C|} : S \to \mathbb{P}^g$; la restrizione di $\varphi_{|C|}$ a C è il morfismo canonico $C \to \mathbb{P}^{g-1}$ definito da $|K_C|$.*

3. Se $g = 2$, $\varphi_{|C|} : S \to \mathbb{P}^2$ *è un morfismo di grado* 2 *che ramifica su una sestica in* $\mathbb{P}^2$.

4. Se $g \geq 3$, *si hanno due possibilità:* $\varphi_{|C|}$ *è un morfismo birazionale, e una generica curva di* $|C|$ *non è iperellittica; oppure* $\varphi_{|C|}$ *è un morfismo* $2:1$ *verso una superficie razionale (possibilmente singolare) di grado* $g-1$ *in* $\mathbb{P}^g$ *e, inoltre, una generica curva di* $|C|$ *è iperellittica.*

5. Se $g \geq 3$ *(rispettivamente* $g = 2$*), la restrizione di* $\varphi_{|2C|}$ *a* C *(rispettivamente* $\varphi_{|C|}$*) è birazionale.*

Dimostrazione. 1. Dalla formula del genere $g = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K_S)$, ricordando che per una superficie K3 si ha $K_S \cong \mathcal{O}_S$, otteniamo $g = 1 + \frac{1}{2}C^2$ da cui $C^2 = 2g - 2$. Usando Riemann-Roch per superfici con C, otteniamo

$$h^0(S, \mathcal{O}_S(C)) - h^1(S, \mathcal{O}_S(C)) + h^2(S, \mathcal{O}_S(C)) = g + 1$$

poiché $h^1(\mathcal{O}_S) = 0$ e $h^0(\mathcal{O}_S) + h^2(\mathcal{O}_S) = 2h^0(K_S) = 2$. Inoltre, per dualità di Serre, si ha che $h^2(\mathcal{O}_S(C)) = h^0(K_S \otimes \mathcal{O}_S(-C)) = h^0(\mathcal{O}_S(-C)) = 0$. Quindi, $h^0(\mathcal{O}_S(C)) = g + 1$ è equivalente a $h^1(\mathcal{O}_S(C)) = 0$. Consideriamo la successione esatta di fasci su S

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \to \mathcal{O}_S \to i_*\mathcal{O}_C \to 0.$$

Passando alla successione esatta lunga in coomologia, e osservando che $H^0(S, \mathcal{O}_S(-C)) = H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, abbiamo

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(S, i_*\mathcal{O}_C) \to H^1(S, \mathcal{O}_S(-C)) \to 0,$$

da cui $h^0(\mathcal{O}_S) + h^1(\mathcal{O}_S(-C)) = h^0(i_*\mathcal{O}_C)$. Poiché $h^0(\mathcal{O}_S) = h^0(i_*\mathcal{O}_C) = 1$, si ha $h^1(\mathcal{O}_S(-C)) = 0$, ma per dualità di Serre $h^1(\mathcal{O}_S(C)) = h^1(\mathcal{O}_S(-C)) = 0$. Ciò prova $h^0(\mathcal{O}_S(C)) = g + 1$.

2. Poiché $K_S \cong \mathcal{O}_S$ e $K_C \cong \mathcal{O}_S(K_S + C)_{|C}$ (per aggiunzione), tensorizzando con $\mathcal{O}_S(C)$ la precedente successione otteniamo

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S(C) \to i_*K_C \to 0,$$

dove $\mathcal{O}_S \cong \mathcal{O}_S(C - C)$. Passando alla successione esatta lunga in coomologia, e sfruttando che per una superficie K3 si ha $h^1(\mathcal{O}_S) = 0$, otteniamo

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S) \to H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \to H^0(S, i_*K_C) \to 0,$$

dove $H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) = |C|$, $H^0(S, i_*K_C) = H^0(C, K_C) = |K_C|$ sistemi lineari su S. Quindi, essendo $H^0(S, \mathcal{O}_S(C)) \to H^0(S, i_*K_C)$ suriettiva, abbiamo che $|C|$ taglia su C il sistema lineare completo $|K_C|$. Poiché quest ultimo non ha punti base su C, concludiamo che $|C|$ non ha punti base, sempre per il fatto che la mappa in coomologia è suriettiva. La seconda parte segue dalle considerazioni appena fatte.

3. Se $g = 2$ abbiamo che $C^2 = 2$, quindi $\varphi_{|C|}$ ha grado 2, ovvero è una mappa $2:1$ su $\mathbb{P}^2$. Sia $\Delta \subseteq \mathbb{P}^2$ il luogo di ramificazione. Abbiamo che $C = \varphi_{|C|}^{-1}(L)$, dove $L = \varphi_{|C|}(C)$ è una retta in $\mathbb{P}^2$ (segue dal fatto che abbiamo usato C per mappare S in $\mathbb{P}^2$). Poiché $\varphi_{|C|}$ è $2:1$ su $\mathbb{P}^2$ ramificata in Δ, in particolare, restringendosi a C, è $2:1$ su L ramificata in $\Delta \cap L$. Quindi $(\varphi_{|C|})_{|C} : C \to L$ è un morfismo di grado 2 verso $L \cong \mathbb{P}^1$. Per Riemann-Hurwitz, dato che $\chi_{\text{top}}(C) = 2 - 2g = -2$ e $\chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^1) = 2$, questa mappa ramifica in 6 punti. Dunque $\deg(\Delta \cap L) = 6$ e, poiché L è una retta, concludiamo che $\deg(\Delta) = 6$, ovvero che $\varphi_{|C|} : S \to \mathbb{P}^2$ è un rivestimento $2:1$ ramificato su una sestica in $\mathbb{P}^2$.

4. Dalla teoria delle curve si ha che se C è una curva liscia di genere $g \geq 2$, allora K_C è molto ampio se e solo se C non è iperellittica (per una dimostrazione di questo fatto si veda [Har13, Proposition 5.2]). Dunque, se C non è iperellittica, si ha che la restrizione di $\varphi_{|C|}$ a C è un'immersione, dato che abbiamo già mostrato che questo è il morfismo canonico $C \to \mathbb{P}^1$ definito da $|K_C|$. Dal momento che $\varphi_{|C|}^{-1}(\varphi_{|C|}(C)) = C$, abbiamo che $\varphi_{|C|}$ è un morfismo di grado 1, dunque è un morfismo birazionale. Se invece $\varphi_{|C|}$ non è birazionale, ogni curva liscia in $|C|$ è iperellittica. Quindi, per un punto generico $x \in S$, si ha che $\varphi_{|C|}^{-1}(\varphi_{|C|}(x))$ è costituito da due punti, e dunque $\varphi_{|C|}$ ha grado 2. Poiché $C^2 = 2g - 2$, l'immagine di $\varphi_{|C|}$ è una superficie Σ (possibilmente singolare) di grado $\frac{2g-2}{2} = g - 1$ in $\mathbb{P}^g$, le cui sezioni iperpiane sono le curve razionali (birazionali a $\mathbb{P}^1$) $\varphi_{|C|}(C)$. Da ciò segue che Σ è razionale, perché, se così non fosse, le sezioni iperpiane avrebbero genere positivo.

5. La restrizione di $\varphi_{|2C|}$ (rispettivamente $\varphi_{|3C|}$) a C è il morfismo 2-canonico (rispettivamente 3-canonico), che è un'immersione dal momento che K_C è molto ampio. Analogamente a prima, ciò prova che tali morfismi sono birazionali.

□

Esempio 4.2.9. Data S una superficie K3 e $C \subseteq S$ una curva liscia di genere 2, il Teorema 4.2.8 ci dice che $|C|$ realizza S come rivestimento ramificato di grado 2 di $\mathbb{P}^2$

che ramifica su una sestica in $\mathbb{P}^2$. Usiamo Riemann-Roch per mostrare che $|C|$ immerge S come sestica in $\mathbb{P}(1,1,1,3)$, e ritrovare quanto appena dimostrato. Costruiamo l'anello delle coordinate $\bigoplus_{n\geq 1} H^0(S,nC)$ per capire dove e come viene immersa S. Applicando Riemann-Roch a nC e il Teorema 4.2.8, otteniamo che $h^0(nC) = 2+n^2$.

i) Per $n=1$, si ha $h^0(C) = 3 = \dim \mathrm{Sym}^1(V_3^\vee)$, dove $\mathrm{Sym}^1(V_3^\vee) = \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]_1$ (le variabili x_i hanno peso 1).

ii) Per $n=2$, si ha $h^0(2C) = 6 = \dim \mathrm{Sym}^2(V_3^\vee)$, dove $\mathrm{Sym}^2(V_3^\vee) = \mathbb{C}[x_0,x_1,x_2]_2$.

iii) Invece, per $n=3$ si ha $h^0(3C) = 11$ mentre $\dim \mathrm{Sym}^3(V_3^\vee) = 10$, quindi dobbiamo introdurre una nuova variabile y di peso 3. Dunque, si ha $H^0(S,3C) = \mathrm{Sym}^3(V_3^\vee) \oplus \langle y\rangle$.

iv) Per $n=4$, si ha $h^0(4C) = 18 = \dim \mathrm{Sym}^4(V_3^\vee) \oplus \langle x_0y, x_1y, x_2y\rangle$.

v) Per $n=5$, si ha $h^0(5C) = 27 = \dim \mathrm{Sym}^5(V_3^\vee) \oplus \langle x_0^2y, x_1^2y, x_2^2y, x_0x_1y, x_0x_2y, x_1x_2y\rangle$.

vi) Per $n=6$ invece, $h^0(6C) = 38$ mentre

$$\dim \mathrm{Sym}^6(V_3^\vee) \oplus \langle y^2, x_0^3y, x_1^3y, x_2^3y, x_0^2x_1y, x_0^2x_2y, x_1^2x_0y, x_1^2x_2y, x_2^2x_0y, x_2^2x_1y, x_0x_1x_2y\rangle = 39.$$

Dunque, si ha una relazione in grado 6 tra le variabili x_0,x_1,x_2,y, dove ricordiamo che y ha peso 3 e le altre hanno peso 1.

vii) Per $n\geq 7$, si può provare che non si aggiungono nuove variabili né nuove relazioni.

Deduciamo quindi che S viene immersa da $|C|$ come una sestica in $\mathbb{P}(1,1,1,3)$.

Prima di passare oltre, osserviamo che se X_{2d} è un'ipersuperficie di grado $2d$ in $\mathbb{P}(1,\ldots,1,d)$, allora $X_{2d} = V(y^2 + yf_d(\underline{x}) + f_{2d}(\underline{x}))$, dove $f_d(\underline{x})$ e $f_{2d}(\underline{x})$ sono polinomi di grado rispettivamente d e $2d$ in $\underline{x} = (x_0,\ldots,x_n)$. Avendo quindi un polinomio di secondo grado nella variabile y, possiamo completare il quadrato e ottenere che $X_{2d} = V(y^2 - F_d(\underline{x}))$. Quindi X_{2d} è un rivestimento ramificato di $\mathbb{P}^n$ di grado 2 che ramifica su un'ipersuperficie di grado d in $\mathbb{P}^n$.

Tornando al nostro caso, possiamo concludere che S viene immersa in $\mathbb{P}(1,1,1,3)$ come $V(y^2 - F_3(x_0,x_1,x_2))$, e quindi è un rivestimento ramificato di $\mathbb{P}^2$ di grado 2 che ramifica su una sestica in $\mathbb{P}^2$.

Ora invece, applichiamo quanto visto nel Teorema 4.2.8 a qualche esempio esplicito. Ci restringiamo al caso in cui $\varphi_{|C|}$ sia birazionale. In precedenza, abbiamo osservato che le uniche superfici K3 che sono intersezione completa sono $S_4 \subseteq \mathbb{P}^3$, $S_{2,3} \subseteq \mathbb{P}^4$ e $S_{2,2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$. Ora vediamo che si possono ottenere come immersioni tramite sistemi lineari di curve lisce di genere rispettivamente 3, 4 e 5.

Esempio 4.2.10. Sia S una superficie K3, $C \subseteq S$ curva liscia di genere $g = 3$. Per Riemann-Roch, si ha che $h^0(nC) = 2(n^2+1)$ per ogni $n \geq 1$, e quindi S viene immersa da $|C|$ in $\mathbb{P}^3$. Costruiamo l'anello delle coordinate $\bigoplus_{n\geq 1} H^0(S, nC)$ di $\varphi_{|C|}(S) \subseteq \mathbb{P}^3$. Confrontiamo quindi $h^0(S, nC)$ e $h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(n)) = \binom{3+n}{3}$. Per $n = 1, 2, 3$ le dimensioni coincidono, mentre per $n = 4$ si ha $h^0(S, 4C) = 34$ e $h^0(\mathbb{P}^3, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)) = 35$. Dunque abbiamo una relazione in grado 4. Per $n \geq 5$, abbiamo $h^0(S, nC) = \binom{n+3}{3} - \binom{n-1}{3}$, dove il secondo membro dell'uguaglianza è la dimensione delle n-forme omogenee tenendo conto delle relazioni introdotte. Dunque, concludiamo che una curva liscia di genere 3 su una superficie K3 immerge quest'ultima come una quartica in $\mathbb{P}^3$.

Prima di passare al prossimo esempio, osserviamo che S dipende da 19 parametri. Infatti, euristicamente una quartica in $\mathbb{P}^3$ dipende da 35 paramentri, dato che $\dim \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]_4 = \binom{7}{3} = 35$, a cui però dobbiamo sottrarre $\dim \mathrm{GL}(4, \mathbb{C}) = 16$, e quindi $35 - 16 = 19$.

Esempio 4.2.11. Consideriamo ora invece una curva liscia C di genere 4. Per Riemann-Roch, abbiamo che $h^0(S, nC) = 2+3n^2$, mentre $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(n)) = \binom{4+n}{4}$. Quindi abbiamo che S viene immersa da $|C|$ in $\mathbb{P}^4$. Ragionando come nell'esempio precedente, abbiamo la prima relazione in grado 2, poiché $h^0(S, 2C) = 14$ mentre $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)) = 15$. Per $n = 3$, abbiamo $h^0(S, 3C) = 29$ e $h^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(3)) = 35 - 5 = 30$ (tenendo conto della relazione introdotta) e quindi abbiamo un'altra relazione in grado 3. Per $n \geq 4$, come in precedenza, non si hanno più relazioni. Dunque una curva liscia di genere 4 immerge S come intersezione completa di una quadrica e una cubica in $\mathbb{P}^4$.

Contiamo ancora i parametri. Per la quadrica abbiamo $\binom{4+2}{2} = 15$ parametri, mentre per la cubica $\binom{4+3}{3} - 5 = 30$. Dato che $\dim \mathrm{GL}(5, \mathbb{C}) = 25$, proiettificando otteniamo che $S_{2,3}$ dipende da $(45-2)-(25-1) = 19$ parametri.

Esempio 4.2.12. Consideriamo una curva liscia di genere 5. Per Riemann-Roch, $h^0(S, nC) = 2 + 4n^2$, mentre $h^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(n)) = \binom{5+n}{5}$. S viene immersa in $\mathbb{P}^5$. Analogamente a prima, si osserva che le uniche relazioni si hanno in grado 2: $h^0(S, 2C) = 18$ mentre $h^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(2)) = 21$. Quindi otteniamo che S viene immersa da $|C|$ come intersezione completa di 3 quadriche in $\mathbb{P}^5$.

Come nei precedenti due casi, si può osservare che $S_{2,2,2}$ dipende da 19 parametri. Ovviamente non si tratta di un caso...

Abbiamo appena discusso la struttura delle superfici K3 di grado $2g-2$ in $\mathbb{P}^g$ per $g=3$, 4 e 5. In realtà, tali superfici esistono per ogni $g \geq 3$. Infatti, si può dimostrare che per ogni $g \geq 3$, esiste una superficie K3 $S = S_{2g-2}$ immersa in $\mathbb{P}^g$. Per la dimostrazione di questo fatto si veda [Bea96][Proposition VIII.15].

Quindi, una considerazione che possiamo fare è che ogni superficie K3 immersa in uno spazio proiettivo ha necessariamente grado pari.

4.3 Fibrazioni ellittiche

In questa breve sezione tratteremo un tipo particolare di superfici K3: le superfici K3 che ammettono fibrazioni ellittiche. Diamo innanzitutto la definizione.

Definizione 4.3.1. Sia S una superficie K3. Diciamo che S ammette una *fibrazione ellittica* se esiste una mappa $S \to \mathbb{P}^1$ tale che la fibra sopra un punto generico sia una curva ellittica, ovvero una curva liscia di genere 1.

Una cosa che possiamo osservare fin da subito è la seguente: se una superficie K3 polarizzata (quindi immersa in un qualche spazio proiettivo) ammette fibrazioni ellittiche, allora deve necessariamente avere rango di Picard almeno 2. Infatti, se $S \to \mathbb{P}^1$ è una fibrazione ellittica su S, con S immersa in $\mathbb{P}^n$, allora abbiamo che il pull-back della classe iperpiana di $\mathbb{P}^1$ definisce su $\mathrm{Pic}(S)$ una classe divisoriale indipendente dalla restrizione a S della classe iperpiana di $\mathbb{P}^n$; un motivo è che la prima ha quadrato 0, mentre la seconda ha quadrato positivo.

Vediamo ora un paio di esempi espliciti.

Esempio 4.3.2. Sia $S \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1}(3,2)|$ un divisore di bi-grado $(3,2)$ in $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Per aggiunzione, si ha $K_S \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1}(-3,-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1}(3,2)) \cong \mathcal{O}_S$ e, grazie al Teorema della sezione iperpiana di Lefschetz, segue che $q(S) = 0$. Dunque S è una superficie K3.

Consideriamo la restrizione a S della proiezione $\pi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$. Supponiamo che $\mathbb{P}^2$ abbia coordinate $[x_0 : x_1 : x_2]$ e che $\mathbb{P}^1$ abbia coordinate $[y_0 : y_1]$. Raccogliendo le variabili x_i, si ha che $S = V(\sum_{i=0}^{2} x_i^3 Q(y_0, y_1) + \sum_{i=1,2} x_0^2 x_i Q(y_o, y_1) + \sum_{i=0,2} x_1^2 x_i Q(y_o, y_1) + \sum_{i=0,1} x_2^2 x_i Q(y_o, y_1) + x_0 x_1 x_2 Q(y_0, y_1))$, dove Q_i sono quadriche in $\mathbb{P}^1$. Quindi per ogni $p \in \mathbb{P}^1$, si ha che $\pi_{|S}^{-1}(p) = V(\sum_{i=0}^{2} x_i^3 Q(p) + \sum_{i=1,2} x_0^2 x_i Q(p) + \sum_{i=0,2} x_1^2 x_i Q(p) +$

$\sum_{i=0,1} x_2^2 x_i Q(p) + x_0 x_1 x_2 Q(p))$ è genericamente una cubica liscia in $\mathbb{P}^2$. Per la formula genere-grado, il genere di una cubica liscia in $\mathbb{P}^2$ è 1. Quindi concludiamo che $\pi_{|S} : S \to \mathbb{P}^1$ è una fibrazione ellittica su S.

Prima di passare al prossimo esempio, osserviamo che in questo caso $\rho(S) > 1$ si poteva dedurre anche grazie al Teorema della sezione iperpiana, dal momento che $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1}(3,2)$ è ampio su $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$.

Esempio 4.3.3. Sia $S = V(f) = V(x_0^4 - x_1^4 + x_2^4 - x_3^4) \subseteq \mathbb{P}^3$, che chiaramente è una superficie K3. Fattorizziamo $f = (x_0^2 - x_1^2)(x_0^2 + x_1^2) + (x_2^2 - x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$, e per ogni $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$ definiamo $C_{\lambda,\mu} := V(\lambda(x_0^2 - x_1^2) - \mu(x_2^2 + x_3^2),\ \mu(x_0^2 + x_1^2) - \lambda(x_2^2 - x_3^2))$. Osserviamo che per ogni $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$, $C_{\lambda,\mu}$ è una curva contenuta in S. Consideriamo la proiezione $\pi : S \to \mathbb{P}^1_{[\lambda:\mu]}$. La fibra sopra un punto generico è quindi l'intersezione di due quadriche in $\mathbb{P}^3$, ovvero una curva liscia di grado 4 che, per aggiunzione, è una curva ellittica. Più precisamente, si potrebbe mostrare che sono esattamente 6 i punti la cui la fibra è singolare. Concludiamo che $\pi : S \to \mathbb{P}^1_{[\lambda:\mu]}$ è una fibrazione ellittica su S.

4.4 Superfici K3 e superfici di Enriques

Concludiamo la trattazione analizzando il legame che c'è tra le superfici K3 e le superfici di Enriques. Ricordiamo che S è una superficie di Enriques se $p_g = q = 0$ e $K_S^{\otimes 2} \cong \mathcal{O}_S$.

Se X è una varietà e $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ è un fascio invertibile di ordine 2 (ovvero si ha un isomorfismo $\alpha : \mathcal{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X$), allora a $\mathcal{L}$ corrisponde un rivestimento ramificato di grado 2 $\pi : X' \to X$ tale che $\pi^*\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{X'}$. Pensando a $\mathcal{L}$ come fibrato lineare, possiamo infatti definire $X' = \{u \in \mathcal{L} \mid \alpha(u^{\otimes 2}) = 1\}$ e prendere π come la proiezione di $\mathcal{L}$ su X, ottenendo così il rivestimento richiesto. Per vedere che $\pi^*\mathcal{L}$ è banale su X', basta osservare che

$$\begin{aligned} X' &\to X' \times_X \mathcal{L} = \pi^*\mathcal{L} \\ u &\mapsto (u, u) \end{aligned}$$

è una sezione mai nulla di $\pi^*\mathcal{L}$.

Prima di enunciare e dimostrare il risultato principale, abbiamo bisogno di un lemma.

Lemma 4.4.1. *Sia $\pi : S' \to S$ un rivestimento ramificato di grado n tra superfici. Allora:*

(i) $K_{S'}^2 = nK_S^2$;

(ii) $\chi_{top}(S') = n\chi_{top}(S)$;

(iii) $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = n\chi(\mathcal{O}_S)$.

Dimostrazione. (i) Segue facilmente dal momento che $\pi^* K_S = K_{S'}$.

(ii) Scelta una triangolazione di S, si ha $\chi_{\mathrm{top}}(S) = \sum(-1)^i f_i(S)$, dove $f_i(S)$ indica il numero di facce di dimensione i. Poiché le facce sono semplicemente connesse, la loro retroimmagine in S' dà una triangolazione di questa, e chiaramente $f_i(S') = nf_i(S)$.

(iii) Applicando la formula di Noether e i due punti precedenti, otteniamo

$$\chi(\mathcal{O}_{S'}) = \frac{K_{S'}^2 + \chi_{\mathrm{top}}(S')}{12} = \frac{nK_S^2 + n\chi_{\mathrm{top}}(S)}{12} = n\chi(\mathcal{O}_S).$$

□

Teorema 4.4.2. *1. Sia S una superficie di Enriques, e $\pi : S' \to S$ il rivestimento ramificato di grado 2 corrispondente al fascio invertibile K_S di ordine 2. Allora S' è una superficie K3.*

2. Viceversa, il quoziente di una superficie K3 rispetto a un'involuzione senza punti fissi è una superficie di Enriques.

Dimostrazione. 1. Poiché $\pi^* K_S \cong K_{S'}$ e, per quanto detto sopra, $\pi^* K_S \cong \mathcal{O}_{S'}$, abbiamo che $K_{S'} \cong \mathcal{O}_{S'}$. Dal Lemma 4.4.1, abbiamo che $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = 2\chi(\mathcal{O}_S) = 2$. Per dualità di Serre abbiamo $h^2(S', \mathcal{O}_{S'}) = h^0(S', \mathcal{O}_{S'}) = 1$, dunque $\chi(\mathcal{O}_{S'}) = h^0(S', \mathcal{O}_{S'}) - h^1(S', \mathcal{O}_{S'}) + h^2(S', \mathcal{O}_{S'}) = 2 - q(S')$. Quindi $q(S') = 0$, e S' è una superficie K3.

2. Sia $\pi : S' \to S$ un rivestimento ramificato di grado 2, dove S' è una superficie K3 e S è il quoziente di S' rispetto a un'involuzione senza punti fissi. Poiché $\pi^* K_S \cong K_{S'} \cong \mathcal{O}_{S'}$, si può verificare che $K_S^{\otimes 2} \cong \pi_* \pi^* K_S \cong \mathcal{O}_S$. Inoltre, per il Lemma 4.4.1, si ha $\chi(\mathcal{O}_S) = 1$. Poiché $\chi(\mathcal{O}_S) = 1 - q(S) + p_g(S)$, otteniamo $q(S) = p_g(S)$. Ma si deve necessariamente avere $q(S) = h^0(\Omega_S^1) = 0$, altrimenti il pull-back di una 1-forma regolare non banale su S' darebbe una 1-forma regolare non banale su S', che però ha $q = 0$ essendo K3. Dunque $q(S) = p_g(S) = 0$ e concludiamo che S è una superficie di Enriques.

□

Osserviamo che il precedente teorema dà una bigezione tra le superfici di Enriques e le superfici K3 che ammettono un'involuzione priva di punti fissi.

Grazie al Lemma 4.4.1 e al fatto che per una superficie K3 si ha $\chi_{\text{top}} = 24$, deduciamo che una superficie di Enriques ha $\chi_{\text{top}} = \frac{24}{2} = 12$. Inoltre, per definizione di superficie di Enriques, abbiamo $p_g = q = 0$, quindi $h^{2,0} = h^{0,2} = p_g = 0$ e $h^{1,0} = h^{0,1} = q = 0$. Dunque, si ha $12 = \chi_{\text{top}} = 2b_0 - 2b_1 + b_2 = 2 - 2(0+0) + (0 + h^{1,1} + 0)$, da cui $h^{1,1} = 10$. Il diamante di Hodge di una superficie di Enriques è quindi

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 10 & & 0. \\ & 0 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

Inoltre, da $q = p_g = 0$ segue anche che se S è una superficie di Enriques allora $\text{Pic}(S) \cong H^2(S, \mathbb{Z})$. Grazie al Teorema 4.4.2 e alla semplice connessione delle superfici K3, possiamo dedurre che il rivestimento universale di una superficie di Enriques è una superficie K3 e che è un rivestimento a 2 fogli. Dunque, per ogni superficie di Enriques si ha $H_1(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_{/(2)}$. Per il Teorema 4.1.2 e per le considerazioni appena fatte, otteniamo $H^2(S, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_2} \oplus T(H_1(S, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}^{10} \oplus \mathbb{Z}_{/(2)}$ e quindi $\text{Pic}(S) \cong \mathbb{Z}^{10} \oplus \mathbb{Z}_{/(2)}$.

Per concludere, vediamo un esempio.

Esempio 4.4.3. Sia $S_{2,2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$ un'intersezione completa di tre quadriche della forma

$$Q_i(x_0, x_1, x_2) + Q_i'(x_3, x_4, x_5) = 0,$$

dove Q_i, Q_i' sono forme quadratiche in tre variabili ($i = 1, 2, 3$). Per una scelta generica di Q_i, Q_i', abbiamo che $S_{2,2,2}$ è una superficie liscia. Consideriamo la seguente involuzione di $\mathbb{P}^5$

$$\sigma \colon \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^5$$
$$[x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4 : -x_5]$$

e osserviamo che $\sigma(S_{2,2,2}) = S_{2,2,2}$, cioè definisce un'involuzione di $S_{2,2,2}$. Il luogo dei punti fissi di σ è $V(x_0, x_1, x_2) \cup V(x_3, x_4, x_5)$. Supponiamo quindi che le tre coniche Q_i non abbiano punti in comune in $V(x_0, x_1, x_2)$, e analogamente per Q_i'. In questo modo, abbiamo che σ agisce su $S_{2,2,2}$ senza punti fissi e quindi, per il Teorema 4.4.2, $S_{2,2,2}/\sigma$ è una superficie di Enriques.

Concludiamo osservando che le tre quadriche che abbiamo considerato sono altamente non generiche. Infatti, dalle considerazione fatte sopra, deduciamo che $\rho(S_{2,2,2}) \geq 10$ e quindi $S_{2,2,2}$ è una superficie K3 non generica.

Chiaramente, quanto appena detto non dipende dall'esempio esplicito che abbiamo preso in considerazione ma vale in generale: se una superficie K3 ammette un'azione libera di $\mathbb{Z}_{/(2)}$, allora $\rho \geq 10$ e in particolare non è generica.

Bibliografia

[Bea96] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*. 34. Cambridge University Press, 1996.

[FTT24] Enrico Fatighenti, Fabio Tanturri e Federico Tufo. «On the geometry of some quiver zero loci Fano fourfolds (with an appendix by E. Kalashnikov and F. Tufo)». In: *arXiv preprint arXiv:2406.04389* (2024).

[Gat02] Andreas Gathmann. «Algebraic geometry». In: *Notes for a class taught at the University of Kaiserslautern* 2003 (2002), p. 2002.

[Har13] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Vol. 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0521795400.

[Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry: an introduction*. Vol. 78. Springer, 2005.

[Mér85] Jean-Yves Mérindol. «Propriétés élémentaires des surfaces K3». In: *Astérisque* 126 (1985), pp. 45–57.