

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

Sistemi dinamici e teoria del caos:  
il modello di Lorenz

Relatore:  
Prof.ssa  
Simonetta Abenda

Presentata da:  
Alice Branchesi

Anno Accademico 2023/2024

*A chi è stato al mio fianco*

## Abstract

Il sistema di Lorenz rappresenta il sistema dinamico caotico più conosciuto al giorno d'oggi. Si tratta di un modello matematico per i moti di convezione all'interno dei fluidi che ha origine dagli studi del fisico britannico John William Strutt, noto come Lord Rayleigh, e che viene poi ripreso in maniera decisiva da Barry Saltzman, meteorologo e scienziato del clima statunitense, ed Edward Norton Lorenz, matematico e meteorologo statunitense. Questa tesi si propone di illustrare le nozioni principali che riguardano i sistemi di equazioni differenziali dipendenti da parametri che li rendono soggetti a fenomeni di biforcazione, per poi presentare in maniera approfondita l'esempio del sistema di Lorenz. Nel primo capitolo vengono dunque affrontate le conoscenze di base riguardanti i sistemi dinamici multidimensionali, nel secondo capitolo invece viene presentato il sistema di Lorenz con la risoluzione analitica e un accenno alla modellizzazione geometrica. In particolare, il secondo capitolo si concentra sulle conseguenze dovute alle variazioni dei valori dei parametri poiché questi hanno un ruolo decisivo nel comportamento del sistema e dunque nella sua evoluzione temporale. Nel corso della trattazione vengono presentate delle simulazioni numeriche, realizzate con il programma Wolfram Mathematica, con l'intento di chiarire i passaggi chiave dell'analisi. I codici utilizzati sono riportati in appendice.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Sistemi dinamici multidimensionali</b>	<b>3</b>
1.1 Soluzioni di un sistema di equazioni differenziali . . . . .	4
1.2 Punti di equilibrio e stabilità . . . . .	6
1.3 Soluzioni periodiche e mappa di Poincaré . . . . .	10
1.4 Teoria delle biforcazioni . . . . .	12
1.5 Sistemi dinamici caotici . . . . .	16
<b>2 Sistema di Lorenz</b>	<b>19</b>
2.1 Proprietà del sistema di Lorenz . . . . .	22
2.2 Modellizzazione geometrica . . . . .	29
<b>A Parametri del modello di Lorenz</b>	<b>36</b>
<b>B Codice Wolfram Mathematica</b>	<b>38</b>
B.1 Teoria delle biforcazioni . . . . .	38
B.2 Sistema di Lorenz . . . . .	41
<b>Bibliografia</b>	<b>42</b>

# Introduzione

A partire dagli ultimi decenni dell'Ottocento ebbero inizio i primi importanti studi riguardanti i moti convettivi nei fluidi. Il fisico britannico John William Strutt, noto come Lord Rayleigh, fu il primo a creare un vero e proprio modello della convezione termica così come è sperimentata all'interno dell'atmosfera terrestre [1, 2]. I suoi studi portarono infatti alla prima modellizzazione matematica, vennero poi ripresi da Barry Saltzman, meteorologo e scienziato del clima statunitense, a partire dal 1961 con l'intento di crearne una versione semplificata che rappresentò la base per il decisivo lavoro di Edward Norton Lorenz, matematico e meteorologo statunitense. Saltzman assunse che il sistema fosse invariante per traslazioni per specifiche direzioni così da poterne ignorare le dimensioni spaziali, utilizzando il noto metodo dell'espansione in serie di Fourier ricavò un sistema infinito di equazioni differenziali ordinarie con coefficienti di Fourier ignoti. Attraverso studi di tipo computazionale fu poi in grado di capire che tutte tranne tre delle variabili considerate tendono a zero con il passare del tempo, da un numero infinito di equazioni passò dunque ad un sistema di sole tre equazioni riuscendo così nel suo intento di semplificare il modello. Le tre variabili che compongono il sistema sono  $x$ , proporzionale all'intensità dei moti convettivi;  $y$ , proporzionale alle variazioni di temperatura orizzontali e  $z$ , proporzionale alle variazioni di temperatura verticali. A partire dal 1963 Lorenz lavorò a questa ulteriore semplificazione del sistema con l'obiettivo di renderlo un problema matematico che potesse essere studiato sia analiticamente che computazionalmente nella maniera più precisa possibile. Il contributo di Lorenz fu decisivo e per questo ad oggi il modello è noto con il nome di *sistema di Lorenz*. La peculiarità di questo modello è la dipendenza delle tre equazioni che lo compongono da tre parametri: un primo parametro detto numero di Prandtl in grado di mettere in relazione la viscosità del fluido con la sua conducibilità termica, un secondo parametro proporzionale al numero di Rayleigh in grado di caratterizzare i moti convettivi ed un ultimo parametro proporzionale alle dimensioni del sistema. Lo scopo di questo elaborato è di presentare un'analisi, il più possibile completa, della dipendenza delle soluzioni dalla variazione dei parametri. Per rendere completa la trattazione si è scelto di sviluppare il lavoro in due parti principali: una prima dedicata alle conoscenze preliminari ed una seconda all'analisi del sistema. Il primo capitolo risulta dunque introduttivo e dedicato alle nozioni che riguardano la teoria delle equazioni differenziali e delle loro soluzioni [3], la teoria delle biforcazioni e

le prime conoscenze che riguardano i sistemi dinamici di tipo caotico [4, 5], ripresi ed approfonditi in seguito. Una volta concordate definizioni, teoremi e notazioni, il secondo capitolo si apre con un'introduzione al sistema, prosegue con la risoluzione analitica [6, 7], per poi concludersi con la modellizzazione geometrica [1, 8]. Di quest'ultima si presenta solamente un accenno basato sui primi studi di John Guckenheimer, Robert F. Williams e le conferme di Albert W. Tacker; per fornirne una trattazione completa sarebbe stato necessario sviluppare un lavoro di tipo computazionale di una complessità non indifferente e per questo si è scelto di riportare le considerazioni principali e il teorema fondamentale che se ne deduce. Di fondamentale importanza, per la comprensione del ruolo assunto dai parametri all'interno del sistema, sono state alcune semplici simulazioni numeriche create con il programma Wolfram Mathematica delle quali sono stati riportati gli esempi ritenuti di maggior interesse e il codice utilizzato per realizzarle.

# Capitolo 1

## Sistemi dinamici multidimensionali

All'interno di questo capitolo si concordano e introducono le notazioni riguardo i sistemi di equazioni differenziali che vengono analizzati attraverso le loro principali proprietà e caratteristiche. Da qui in poi saranno dunque esposti i contenuti necessari per poter affrontare lo studio del sistema di Lorenz e dei sistemi caotici, oggetto di interesse dell'intera trattazione.

**Definizione 1.0.1.** *Sistema di equazioni differenziali del primo ordine*

$$\frac{dx}{dt} := \dot{x} = f(t; x) \quad (1.1)$$

dove  $f$  è una mappa

$$f : I \times \Omega \ni (t; x) \mapsto f(t; x) = \begin{bmatrix} f_1(t; x) \\ \vdots \\ f_n(t; x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

con  $I$  intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  e  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  in grado di soddisfare le seguenti proprietà:

- **continuità:**  $f \in C^0(I \times \Omega; \mathbb{R}^n)$ ;
- **locale lipschitzianità** in  $x$ : per ogni  $(\bar{t}; \bar{x}) \in I \times \Omega$  esistono una scatola

$$B_{h,r} := \{(t; x); |t - \bar{t}| \leq h, \|x - \bar{x}\| \leq r\}$$

contenuta in  $I \times \Omega$  ( $h; r > 0$ ) ed una costante  $L > 0$  tale che

$$\|f(t; x') - f(t; x'')\| \leq L\|x' - x''\|, \forall (t; x'), (t; x'') \in B_{h,r}(\bar{t}; \bar{x})$$

**Definizione 1.0.2.** *Il sistema (1.1) è detto **lineare** quando  $f$  è nella forma*

$$f(t; x) = A(t)x + b(t)$$

dove  $A \in M(n; \mathbb{R})$  matrice associata al sistema e  $b \in C^0(I; \mathbb{R}^n)$ .

**Definizione 1.0.3.** *Il sistema (1.1) è detto **omogeneo** quando*

$$b(t) = 0 \quad \forall t \in I$$

Di particolare interesse in questa trattazione sono i sistemi che non dipendono esplicitamente dalla variabile indipendente: il tempo.

**Definizione 1.0.4.** *Il sistema (1.1) è detto **autonomo** quando  $f : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  è indipendente da  $t$ , ovvero può essere riscritto come*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.2}$$

Considerando questi tipi di sistemi è possibile studiare la dipendenza dalle condizioni iniziali, si veda il Paragrafo 1.1.

Si introduce da subito anche il **problema di Cauchy** come una coppia sistema-condizione iniziale del tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

con  $x_0 \in \Omega$ .

## 1.1 Soluzioni di un sistema di equazioni differenziali

Una volta fornite le definizioni e le notazioni generali per i sistemi, diventa di centrale interesse lo studio delle loro soluzioni.

**Definizione 1.1.1.** *È definita **soluzione del sistema** (1.1) ogni funzione*

$$J \ni t \mapsto \Phi(t) = \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \vdots \\ \Phi_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

*tale che:*

- i.  $J \subset I$  è un intervallo non banale ovvero non ridotto ad un punto;*
- ii.  $\Phi$  è derivabile per ogni  $t \in J$ ;*
- iii.  $\Phi(t) \in \Omega$  per ogni  $t \in J$  e*

$$\frac{d\Phi}{dt}(t) := \dot{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\Phi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\Phi}_n(t) \end{bmatrix} = f(t; \Phi(t)), \quad t \in J$$

Inoltre, se

$$\Phi : J_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Psi : J_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sono soluzioni del sistema (1.1), è possibile affermare che  $\Psi$  è un **prolungamento** di  $\Phi$  se:

iv.  $J_1 \not\subseteq J_2$ ;

v.  $\Psi(t) = \Phi(t)$  per ogni  $t \in J_1$ .

**Definizione 1.1.2.** La soluzione  $\Phi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  per il sistema (1.1) è detta **massimale** se non ammette alcun prolungamento.

In particolare, le soluzioni dei problemi di Cauchy (1.3) verranno denotate come  $\Phi(t; x_0)$  con  $t \in I(x_0) = (\tau_-(x_0); \tau_+(x_0))$  intervallo massimale di esistenza della soluzione con  $-\infty \leq \tau_-(x_0) < 0 < \tau_+(x_0) \leq +\infty$ . Nel Capitolo 2, per lo studio del sistema fisico di Lorenz si utilizzerà l'intervallo definito  $0 \leq \tau_- < t < \tau_+(x_0) \leq +\infty$ ; più precisamente, si sceglie di far partire lo studio dall'istante di tempo  $t = 0$  e dunque  $0 = \tau_- = t$ .

**Definizione 1.1.3.** Dato

$$\mathcal{U} := \{(t; x_0) \in \mathbb{R} \times \Omega; t \in I(x_0)\}$$

si definisce **mappa flusso**  $\Phi$

$$\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \Omega$$

$$\Phi^t(x_0) := \Phi(t; x_0) := \Phi(t; x_0)$$

Si assume per semplicità che  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Vale allora la seguente proposizione:

**Proposizione 1.1.1.** La mappa flusso è una funzione continua, derivabile in  $t$  e con derivata continua

$$\Phi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

La mappa flusso ha le seguenti proprietà di gruppo:

i.  $\Phi^0 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$  funzione identità  $\Phi^0(x_0) = x_0$ ;

ii.  $\Phi^t \circ \Phi^s = \Phi^{t+s} \quad \forall (t, x_0), (t + s, x_0) \in \mathcal{U}$ .

Si introduce infine il concetto di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali. Intuitivamente una mappa flusso  $\Phi$ , o una funzione, ha una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali se esistono punti arbitrariamente vicini ad  $x$  che possono essere separati da  $x$  di almeno  $\delta$  ad ogni iterazione di  $\Phi$ . Non è necessario che questo valga per ogni punto vicino ad  $x$  ma è sufficiente che valga per un punto in ogni suo intorno. L'aggettivo *sensibile* che caratterizza il tipo di dipendenza è legato al fatto che, traiettorie che partono da punti vicini, evolvono poi in modi diversi.

**Definizione 1.1.4.** Sia  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \Omega$  una mappa flusso,  $\Phi$  ha una dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali se esiste  $\delta > 0$  tale per cui per ogni  $x \in \mathcal{U}$  e per ogni  $U$  intorno di  $x$  esistono  $y \in U$  ed  $n \geq 0$  tali per cui

$$|\Phi^{(n)}(x) - \Phi^{(n)}(y)| > \delta$$

## 1.2 Punti di equilibrio e stabilità

Di fondamentale importanza nello studio di un sistema di equazioni differenziali autonomo e, più nello specifico, di un problema di Cauchy sono i punti di equilibrio e la loro stabilità. Da questo punto in poi si considerano solo sistemi autonomi del tipo (1.2) ed in particolare

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

almeno di classe  $C^1$ .

**Definizione 1.2.1.** Un punto  $a \in \Omega$  è **di equilibrio** per il sistema (1.2) se  $f(a) = 0$ .  
Con

$$C_f := \{a \in \Omega; f(a) = 0\}$$

insieme dei punti di equilibrio.

Lo studio della stabilità dei punti di equilibrio  $a$ , definiti come sopra, consiste nel considerare dei dati iniziali  $y$  sufficientemente vicini per poi effettuare lo studio dell'evoluzione  $\Phi^t(y)$  per verificare se rimane o meno vicina ad  $a$  per  $t \geq 0$ .

**Definizione 1.2.2.** Un punto  $a \in C_f$  di equilibrio per il sistema (1.2) si definisce **stabile** se esiste  $r > 0$  tale per cui:

i. il disco di raggio  $r$  e centro  $a$ ,  $D_r(a) \subset \Omega$ ;

ii. per ogni  $0 < r' < r$  esiste  $0 < r'' \leq r'$  tale che per ogni  $y \in D_{r''}(a)$  si ha  $\tau_+(y) = +\infty$  e  $\Phi^t(y) \in D_{r'}(a)$  per ogni  $t \geq 0$ .

Si definisce  $a \in C_f$  **instabile** se non è stabile.

**Definizione 1.2.3.** Un punto  $a \in C_f$  di equilibrio per il sistema (1.2) si definisce **asintoticamente stabile** se è stabile e si ha che

$$\forall y \in D_{r''}(a), \Phi^t(y) \rightarrow a, \text{ per } t \rightarrow +\infty$$

**Osservazione 1.2.1.** Se  $a \in C_f$  è asintoticamente stabile allora è necessariamente punto isolato di  $C_f$ .

**Teorema 1.2.1.** Dato il sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  con  $A \in M(n; \mathbb{R})$  e considerato il punto di equilibrio  $x = 0$  si ha:

i.  $x = 0$  è stabile se e solo se

$$p_A^{-1}(0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$$

e per ogni  $\lambda \in p_A^{-1}(0)$ , inverso del polinomio caratteristico di  $A$  calcolato in 0, con  $\operatorname{Re}\lambda = 0$  ovvero immaginario puro, si ha  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ ;

ii.  $x = 0$  è asintoticamente stabile se e solo se

$$p_A^{-1}(0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda < 0\}$$

Infine se  $0 \neq a \in \operatorname{Ker}A$ ,  $a$  è stabile se e solo se  $0$  è stabile.

A livello operativo è funzionale andare a definire i diversi tipi di punti di equilibrio, stabili e instabili, in base allo studio degli autovalori associati.

**Definizione 1.2.4.** Dato il sistema lineare  $\dot{x} = Ax$  con  $A \in M(n; \mathbb{R})$ , sia  $a$  punto di equilibrio per il sistema. Il punto  $a$  può essere di tipo:

1. **sorgente**, quindi instabile, se tutti gli autovalori associati ad  $A$  hanno parte reale positiva;
2. **sink**, quindi asintoticamente stabile, se tutti gli autovalori associati ad  $A$  hanno parte reale negativa;
3. **sella**, quindi instabile, se alcuni autovalori, ma non tutti, associati ad  $A$  hanno parte reale positiva mentre i restanti hanno parte reale negativa;
4. **centro**, quindi stabile ma non asintoticamente stabile, se gli autovalori associati ad  $A$  sono immaginari puri non nulli.

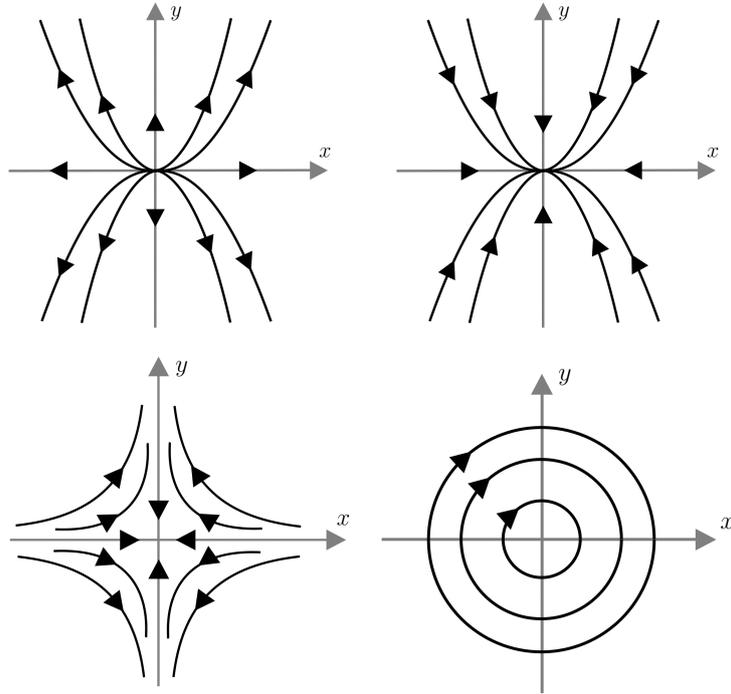


Figura 1.1: raffigurazione qualitativa in  $\mathbb{R}^2$  dei diversi tipi di punti di equilibrio. Nella prima riga: sorgente, sink; nella seconda riga: sella, centro

Fino ad ora l'analisi è stata effettuata solo per sistemi lineari. Nel caso di sistemi non lineari lo studio di stabilità e di asintotica stabilità dei punti di equilibrio diventa più complesso. Un primo metodo applicabile per la caratterizzazione dell'asintotica stabilità prevede la linearizzazione del sistema, in questi casi si parla di **stabilità lineare**.

Dato  $a \in C_f$  ed utilizzando la formula per l'espansione di Taylor si può riscrivere la funzione che descrive il sistema nel seguente modo:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + o(\|x - a\|)$$

poiché  $a$  è punto di equilibrio, per definizione, la funzione calcolata in quel punto si annulla. Si ottiene dunque il sistema nella forma

$$f(x) = f'(a)(x - a) + o(\|x - a\|)$$

dove  $f'(a)$  è la matrice jacobiana di  $f$  calcolata nel punto  $a$ .

**Teorema 1.2.2.** *Si consideri il sistema autonomo (1.2) con  $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , e sia  $a \in C_f$ . Considerando  $f'(a)$  matrice jacobiana di  $f$  in  $a$ :*

*i. se  $a$  è stabile per  $\dot{x} = f(x)$  allora  $p_{f'(a)}^{-1}(0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$*

*ii. se  $p_{f'(a)}^{-1}(0) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}\lambda < 0\}$  allora  $a$  è asintoticamente stabile per  $\dot{x} = f(x)$ .*

Questo approccio ha come evidente limite l'impossibilità di andare a caratterizzare la stabilità dei punti di equilibrio, per questo motivo si introduce un secondo metodo che prevede la definizione di una funzione di Lyapunov.

**Definizione 1.2.5.** *Dato il sistema autonomo (1.2) con*

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*ed un suo punto di equilibrio  $a \in C_f$ , diremo che una funzione  $g \in C^1(U; \mathbb{R})$  con  $U$  aperto tale che  $a \in U \subset \Omega$  è una **funzione di Lyapunov** per  $f$  relativamente ad  $a$  se:*

*i.  $g(a) = 0$  e  $g(x) > 0$  per ogni  $x \in U \setminus \{a\}$ ;*

*ii.  $\langle \nabla g(x), f(x) \rangle \leq 0$  per ogni  $x \in U$ .*

È possibile inoltre definire la **funzione di Lyapunov forte** effettuando un cambiamento al punto *ii.* della Definizione 1.2.5 del tipo

$$\langle \nabla g(x), f(x) \rangle < 0$$

per ogni  $x \in U \setminus \{a\}$ .

**Teorema 1.2.3.** *Se  $a \in C_f$  è un punto di equilibrio per il sistema autonomo (1.2) e se c'è una funzione di Lyapunov, rispettivamente di Lyapunov forte, per  $f$  relativamente ad  $a$ , allora  $a$  è stabile, rispettivamente asintoticamente stabile.*

**Teorema 1.2.4.** *Sia  $a \in C_f$  è un punto di equilibrio per il sistema autonomo (1.2), si supponga che esista una funzione  $h \in C^1(U; \mathbb{R})$ ,  $a \in U \subset \Omega$ ,  $U$  aperto tale che:*

*i.  $h(a) = 0$  e  $h(x) > 0$  per ogni  $x \in U \setminus \{a\}$ ;*

*ii.  $\langle \nabla h(x), f(x) \rangle > 0$  per ogni  $x \in U \setminus \{a\}$ ;*

*allora  $a$  è instabile.*

### 1.3 Soluzioni periodiche e mappa di Poincaré

Oltre alla stabilità dei punti di equilibrio è utile andare a considerare definizione e proprietà delle soluzioni periodiche.

**Definizione 1.3.1.** *Una funzione continua e non costante*

$$\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è **periodica** se per qualche  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  si ha

$$\Phi(t + \tau) = \Phi(t)$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Ogni  $\tau$  è detto **periodo** di  $\Phi$ .

Risulta quindi immediato riconoscere una funzione periodica ed è possibile definire l'insieme

$$P_\Phi := \{\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \tau \text{ un periodo di } \Phi\} \cup \{0\}$$

sottogruppo chiuso proprio di  $(\mathbb{R}; +)$ . Da quest'ultima definizione segue l'esistenza del **periodo minimo** di  $\Phi$ :  $T > 0$  tale per cui  $P_\Phi = \{kT; k \in \mathbb{Z}\}$ . Oltre alle orbite periodiche è possibile identificare anche i punti periodici. In particolare, facendo anche riferimento ai sistemi dinamici, è possibile pensare ad un punto periodico come ad un punto appartenente ad una traiettoria periodica non costante percorsa dal sistema.

**Definizione 1.3.2.** *Un punto  $x$  di  $\Phi$  è detto **punto periodico** se esiste  $T > 0$  tale per cui*

$$\Phi(T; x) = x$$

con  $T$  periodo minimo, come sopra.

**Teorema 1.3.1.** *Il sistema  $\dot{x} = Ax$  con  $A \in M(n; \mathbb{R})$  ha soluzioni periodiche se e solo se*

$$p_A^{-1}(0) \cap (i\mathbb{R} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$$

Più nello specifico si può andare a considerare un sistema autonomo per il quale  $f \in C^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ; si suppone che il sistema possieda un'orbita periodica definita come segue.

**Definizione 1.3.3.** *Per un problema di Cauchy (1.3) per il quale esiste  $x_0 \in \Omega$  per cui  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi^t(x_0)$  è periodica di periodo minimo  $T > 0$ , l'**orbita periodica** è definita come*

$$\gamma := \{\Phi^t(x_0); t \in [0; T]\} = \{\Phi^t(x_0); t \in \mathbb{R}\}$$

Di un'orbita periodica è possibile effettuare uno studio della stabilità, sua fondamentale caratteristica.

**Definizione 1.3.4.** L'orbita  $\gamma$  è **stabile** se per ogni aperto  $U$ , tale per cui  $\gamma \subset U \subset \Omega$ , esiste un aperto  $V$  tale per cui  $\gamma \subset V \subset U$  e tale per cui per ogni  $y \in V$  si ha che

$$t \mapsto \Phi^t(y)$$

è definita almeno per tutti i tempi  $t \geq 0$  e  $\Phi^t(y) \in U$  per ogni  $t \geq 0$ .

L'orbita  $\gamma$  è **instabile** se non è stabile.

L'orbita  $\gamma$  è **asintoticamente stabile**, o attrattore, se  $\gamma$  è stabile e per ogni  $y \in V$

$$\text{dist}(\Phi^t(y); \gamma) = \inf_{z \in \gamma} \|\Phi^t(y - z)\| \longrightarrow 0 \text{ per } t \longrightarrow +\infty$$

Fissando una ipersuperficie  $S$  passante per il punto  $x_0$  e trasversa all'orbita periodica  $\gamma$  è possibile studiare l'evoluzione  $\Phi^t(y)$  a  $t \geq 0$ , dei punti  $y \in S$  sufficientemente vicini ad  $x_0$ . Sia  $S \subset \Omega$  una sottovarietà  $(n - 1)$ -dimensionale di classe  $C^\infty$  tale per cui  $x_0 \in S$  e  $f(x_0) \notin T_{x_0}S$  diremo allora che  $S$  è **varietà trasversa a  $\gamma$  in  $x_0$** .

**Lemma 1.3.1.** Data una varietà  $S$  trasversa a  $\gamma$  in  $x_0$ , esistono  $V \subset \Omega$  intorno aperto di  $x_0$ , un  $\delta > 0$  tale per cui  $T - \delta > \delta > 0$  ed è ben definita una mappa di classe  $C^\infty$

$$V \ni y \mapsto T(y) \in (T - \delta; T + \delta)$$

tali che:

- i.  $\Phi^{T(y)}(y) \in S$ , per ogni  $y \in V$ ;
- ii.  $\Phi^t(y) \notin S$ , per ogni  $y \in V \cap S$ , per ogni  $t \in (0; T(y))$ .

La mappa  $C^\infty$

$$S \cap V \ni y \mapsto P_S(y) := \Phi^{T(y)}(y) \in S$$

si chiama **mappa di Poincaré** relativa ad  $S$  ed  $x_0$  con il relativo tempo  $T(y)$ ,  $y \in V \cap S$ .

Nello studio delle orbite risulta importante andare a considerare i comportamenti a tempi infiniti, sia nel caso  $+\infty$  che  $-\infty$ . Nel considerare l'andamento in queste condizioni si possono introdurre i concetti di insiemi limite.

**Definizione 1.3.5.** Si consideri il sistema autonomo (1.2) e

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \Phi^t(x_0)$$

soluzione del sistema, si definisce  $\omega_+$  - **limite** della soluzione, l'insieme definito nel seguente modo

$$\omega_+(\Phi^t(x_0)) = \{y \in \mathbb{R}^n; \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ successione di tempi con } t_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty; \Phi^{t_n}(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y\}$$

Analogamente si definisce  $\omega_-$  – **limite** della soluzione, l'insieme definito nel seguente modo

$$\omega_-(\Phi^s(x_0)) = \{z \in \mathbb{R}^n; \exists (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ successione di tempi con} \\ s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty; \Phi^{s_n}(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z\}$$

Prima di enunciare il lemma fondamentale legato agli insiemi limite si definisce l'insieme invariante.

**Definizione 1.3.6.** Sia  $\Lambda$  un insieme di punti;  $\Lambda$  si dice **invariante**:

- positivamente per un sistema dinamico se la soluzione soddisfa  $\Phi^t(t_0, x_0) \in \Lambda$  per ogni  $t \in J_+(t_0, x_0)$  assumendo  $x_0 \in \Lambda$  e  $t > 0$ ;
- negativamente per un sistema dinamico se la soluzione soddisfa  $\Phi^t(t_0, x_0) \in \Lambda$  per ogni  $t \in J_-(t_0, x_0)$  assumendo  $x_0 \in \Lambda$  e  $t < 0$ , ovvero assumendo l'unicità della soluzione a sinistra.

$\Lambda$  si definisce invariante se è sia positivamente che negativamente invariante.

**Lemma 1.3.2.** Gli insiemi  $\omega_{\pm}$  – limite di una soluzione definita per ogni  $t \in \mathbb{R}$  sono chiusi e invarianti.

**Teorema 1.3.2.** (Teorema di Poincaré-Bendixson) Sia  $\omega$  un insieme non vuoto, chiuso, limitato del tipo  $\omega_{\pm}$  – limite di un sistema autonomo (1.2) che non contiene punti di equilibrio  $\Rightarrow \omega$  è un'orbita periodica.

## 1.4 Teoria delle biforcazioni

Per parlare di teoria delle biforcazioni è necessario andare a considerare un sistema che, oltre che dipendere dalla variabile  $x$ , dipenda anche da un parametro  $a$  variabile. Considerando infatti un sistema del tipo

$$\dot{x} = f_a(x)$$

una biforcazione si presenta quando vi è una significativa variazione nella struttura delle soluzioni del sistema al variare di  $a$ . Il caso più semplice di biforcazioni è quello che si presenta nel momento in cui il numero di soluzioni di equilibrio varia al variare di  $a$ .

**Proposizione 1.4.1.** Sia  $\dot{x} = f_a(x)$  il sistema con  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  aperto e  $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$  anche rispetto ad  $a \in J \subset \mathbb{R}$ . Sia inoltre  $x_0 \in \Omega$  tale per cui

$$f_a(x_0) = 0 \quad e \quad f'_a(x_0) \neq 0$$

allora, dato  $\epsilon$  'piccolo',

$$\dot{x} = f_{a+\epsilon}(x)$$

ha un punto di equilibrio  $x_0(\epsilon)$  tale per cui la funzione

$$g : \epsilon \mapsto x_0(\epsilon)$$

è di classe  $C^1$  e  $x_0(0) = x_0$ .

Si introducono ora le definizioni e caratteristiche delle due biforcazioni di maggior interesse per la trattazione del sistema di Lorenz.

La prima tipologia è quella delle biforcazioni dette di tipo pitchfork supercritica e sottocritica. La variazione del parametro in questo caso porta ad avere un cambiamento nel numero di punti di equilibrio e nella loro natura. Formalmente questo tipo di biforcazione è definito nel seguente modo.

**Definizione 1.4.1.** *Sia il sistema  $\dot{x} = f_r(x)$  con  $r_0$  valore di **biforcazione pitchfork** per il parametro  $r$  tale per cui al variare di questo parametro la funzione si comporta nel seguente modo:*

$$-f_r(x) = f_r(-x)$$

ovvero che sia pari e tale per cui

$$\frac{\partial f_{r_0}}{\partial x}(0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f_{r_0}}{\partial^2 x}(0) = 0 \qquad \frac{\partial^3 f_{r_0}}{\partial^3 x}(0) \neq 0$$

$$\frac{\partial f_{r_0}}{\partial r}(0) = 0 \qquad \frac{\partial^2 f_{r_0}}{\partial x \partial r}(0) \neq 0$$

allora il sistema ha una biforcazione di tipo pitchfork caratterizzata dal segno della derivata terza:

$$\frac{\partial^3 f_{r_0}}{\partial^3 x}(0) < 0 \Rightarrow \text{supercritica}$$

$$\frac{\partial^3 f_{r_0}}{\partial^3 x}(0) > 0 \Rightarrow \text{sottocritica}$$

Qualitativamente una biforcazione di tipo pitchfork supercritica presenta il passaggio da una configurazione con un punto di equilibrio stabile ad una configurazione nella quale il medesimo punto di equilibrio diventa instabile e compaiono due nuovi punti di equilibrio instabili.

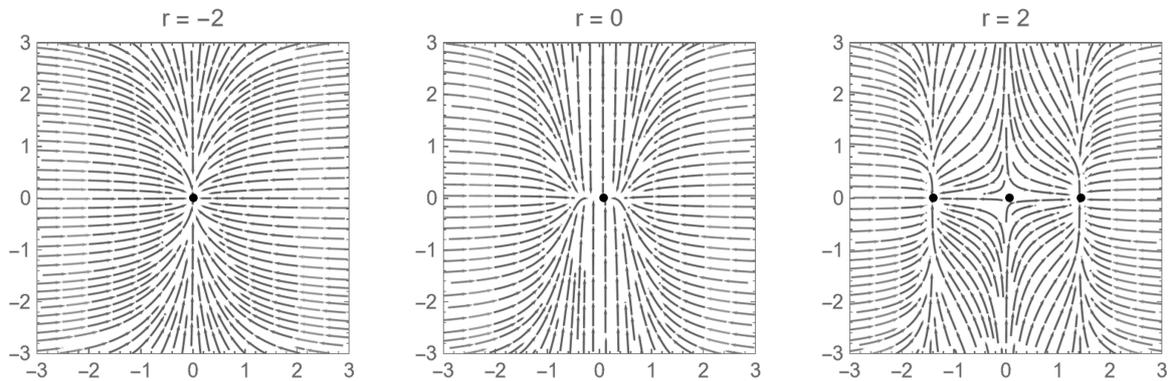


Figura 1.2: esempio qualitativo di una biforcazione pitchfork supercritica con valore di biforcazione  $r_0 = 0$

Una biforcazione di tipo pitchfork sottocritica invece, presenta il passaggio da configurazione con due punti di equilibrio instabili ed uno stabile ad una configurazione nella quale i primi due spariscono e il terzo diventa di equilibrio instabile.

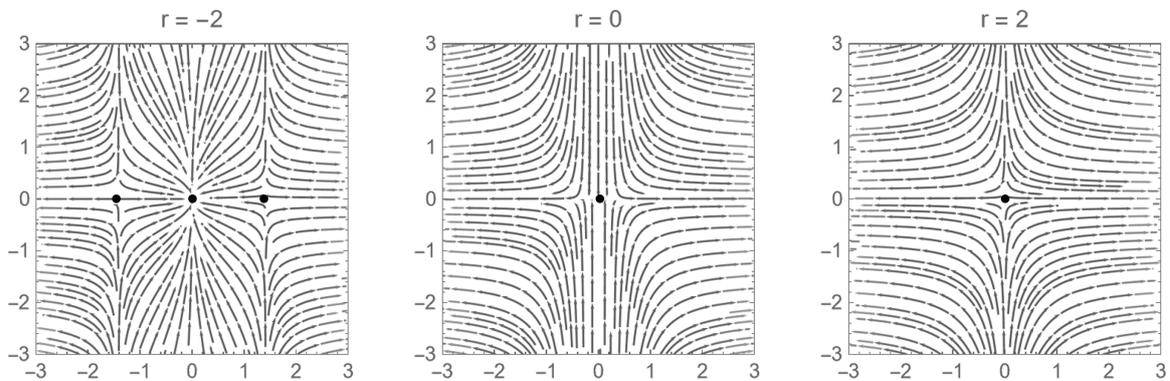


Figura 1.3: esempio qualitativo di una biforcazione pitchfork sottocritica con valore di biforcazione  $r_0 = 0$

Il secondo tipo di biforcazioni che si presentano sono invece quelle dette di Hopf. In particolare, una biforcazione di Hopf si verifica quando al punto di equilibrio è associata una coppia di autovalori complessi coniugati che ne definiscono la stabilità o instabilità. La variazione del parametro in questo caso implica una variazione del segno della parte reale degli autovalori e conseguentemente la stabilità o instabilità del punto. Si verifica così la comparsa o scomparsa di una soluzione periodica o un insieme limite attorno

al punto di equilibrio. La biforcazione di Hopf può essere supercritica o sottocritica e possono essere definite nel seguente modo.

**Definizione 1.4.2.** *Sia il sistema  $\dot{x} = f_{a_0}(x)$  con  $a_0$  valore di **biforcazione di Hopf supercritica** per il parametro  $a$ , al variare di questo parametro il sistema si modifica nel seguente modo:*

- i. 1 punto di equilibrio stabile se  $a < a_0$ ;*
- ii. biforcazione se  $a = a_0$ ;*
- iii. 1 punto di equilibrio instabile ed un insieme limite stabile se  $a > a_0$ .*

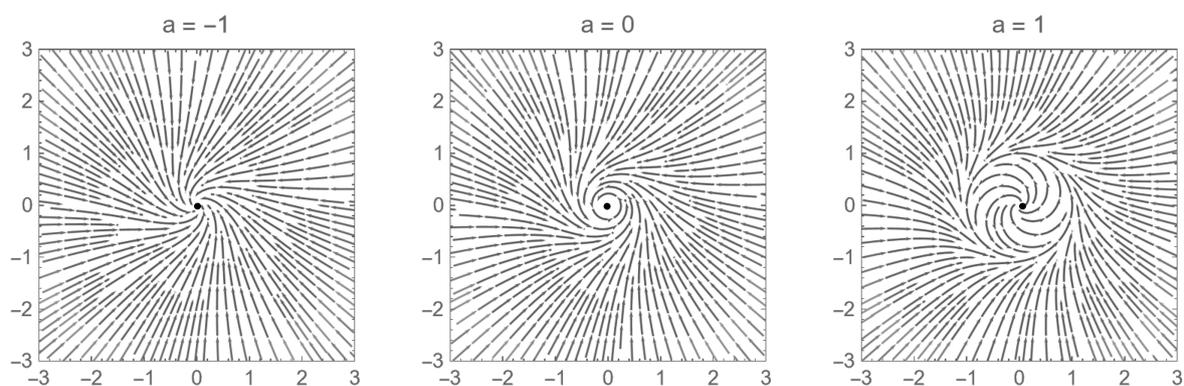


Figura 1.4: esempio qualitativo di una biforcazione di Hopf supercritica con valore di biforcazione  $a_0 = 0$

**Definizione 1.4.3.** *Sia il sistema  $\dot{x} = f_{a_0}(x)$  con  $a_0$  valore di **biforcazione di Hopf sottocritica** per il parametro  $a$ , al variare di questo parametro il sistema si modifica nel seguente modo:*

- i. 1 punto di equilibrio stabile ed un insieme limite instabile se  $a < a_0$ ;*
- ii. biforcazione se  $a = a_0$ ;*
- iii. 1 punto di equilibrio instabile se  $a > a_0$ .*

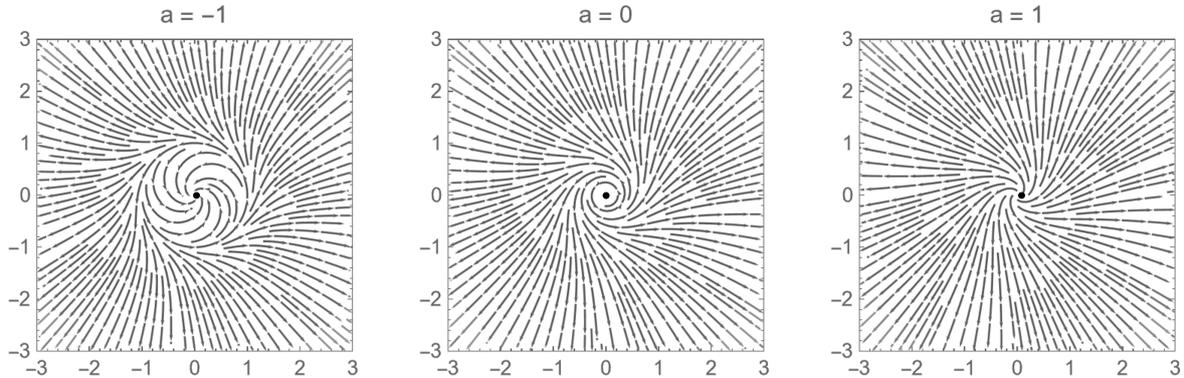


Figura 1.5: esempio qualitativo di una biforcazione di Hopf sottocritica con valore di biforcazione  $a_0 = 0$

## 1.5 Sistemi dinamici caotici

Lo studio del comportamento dei sistemi dinamici caotici può essere effettuato a partire da l'introduzione del concetto matematico di attrattore. Un attrattore può essere pensato come una regione delimitata dello spazio delle fasi, invariante nell'evoluzione temporale, che attrae a se tutte le soluzioni vicine.

**Definizione 1.5.1.** Sia  $\dot{x} = f(x)$  sistema dinamico su  $\mathbb{R}^n$  con rispettivo flusso  $\Phi(t; x)$ . Un insieme  $\Lambda$  è detto **attrattore** se:

1.  $\Lambda$  è compatto e invariante;
2. esiste un insieme aperto  $U$  contenente  $\Lambda$  tale per cui per ogni  $x \in U$ ,  $\Phi^t(x) \in U$  e  $\bigcap_{t \geq 0} \overline{\Phi^t(U)} = \Lambda$ ;
3. condizione di transitività: dati due punti  $Y_1, Y_2 \in \Lambda$  ed un generico intorno  $U_j$  per ogni  $Y_j$  in  $U$  per  $j = 1, 2$ , esiste una soluzione, ovvero una curva integrale, che parte da  $U_1$  e passa attraverso  $U_2$ .

Il sistema di Lorenz studiato nel Capitolo 2 è il più famoso e classico esempio di sistema caotico caratterizzato da un attrattore detto strano. Per poter definire in maniera rigorosa questo oggetto è necessario richiamare la Definizione 1.3.6 di invariante, la Definizione 1.3.2 di punto periodico, la Definizione 1.1.4 di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali ed introdurre quella di topologicamente transitivo.

Intuitivamente una mappa flusso topologicamente transitiva può essere pensata come una mappa che può avere punti che per iterazioni della mappa stessa passano da un intorno arbitrariamente piccolo da un altro.

**Definizione 1.5.2.** Sia  $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \Omega$  la mappa flusso del sistema,  $\Phi$  è detta **topologicamente transitiva** se per ogni coppia di insiemi aperti  $U; V \subset \mathcal{U}$  esiste  $k > 0$  tale per cui

$$\Phi^{(k)}(U) \cap V \neq \emptyset$$

**Osservazione 1.5.1.** Se la mappa contiene **orbite dense**  $\Rightarrow$  è topologicamente invariante

**Definizione 1.5.3.** Sia  $\Phi : V \rightarrow V$  la **mappa** associata al sistema,  $\Rightarrow \Phi$  è **caotica** in  $V$  se:

1.  $\Phi$  ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali;
2.  $\Phi$  è topologicamente transitiva;
3. in  $V$  i punti periodici sono densi.

**Definizione 1.5.4.** Un attrattore  $\Lambda$  è detto **strano** se il sistema dinamico  $(\Lambda, \Phi)$  è di tipo caotico e se  $\Lambda$  è frattale.

Operativamente è possibile pensare ad un insieme frattale ed invariante associato ad un sistema dinamico come ad un insieme che, osservato a scale diverse, presenta andamenti ripetitivi e sempre simili. Rigorosamente la definizione di *frattale* prevede l'utilizzo della dimensione di Hausdorff, infatti, per come venne definito da Benoît Mandelbrot "un frattale è per definizione un insieme per il quale la dimensione di Hausdorff eccede strettamente la dimensione topologica". Si considera dunque la dimensione come una sorta di proprietà di scala ed, in particolare, nel caso di dimensione topologica deve corrispondere ad un valore intero, nel caso di dimensione di Hausdorff sono permessi valori non interi.

**Definizione 1.5.5.** Sia  $M$  un oggetto geometrico e  $s \in \mathbb{R}$  un fattore di scala, la sua **dimensione** deve soddisfare la seguente relazione

$$\mu(sM) = s^D \mu(M)$$

dove  $\mu$  si assume essere una nozione di volume per la quale sia rispettato  $\mu(M) \neq 0; \infty$ .

A questo punto si definiscono la dimensione di Hausdorff e le sue proprietà.

**Definizione 1.5.6.** Siano  $s \geq 0$ ,  $\delta > 0$  ed  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  non vuoto tale per cui  $\mu(A) \neq 0; \infty$ , si definisce la misura

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{k \in I} r_k^s, A \subseteq \bigcup_{k \in I} B(x_k, r_k), 0 < r_k < \delta \right\}$$

con  $I$  insieme numerabile e tale per cui valga  $\mathcal{H}_\delta^0(\emptyset) = 0$ .

**Definizione 1.5.7.** Si definisce  $\mathcal{H}^s$  la *misura di Hausdorff s-dimensionale* di  $\mathbb{R}^n$  dove

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Lemma 1.5.1.** Sia  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $0 \leq s < t < \infty$ , allora

i.  $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$

ii.  $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$

**Definizione 1.5.8.** La *dimensione di Hausdorff* di un insieme  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  è definita nel seguente modo

$$\dim \mathcal{H}(A) := \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}$$

## Capitolo 2

### Sistema di Lorenz

Un primo modello per la convezione termica in un fluido venne proposto all'inizio del ventesimo secolo dal fisico britannico John William Strutt, meglio noto come Lord Rayleigh. Il suo modello era in grado di descrivere la convezione termica all'interno di uno strato di fluido limitato da due piani orizzontali infiniti mantenuti a temperature costanti,  $T_{top}$  e  $T_{bot}$ , con l'ipotesi che il piano in basso fosse a temperatura maggiore di quello in alto. Definendo la differenza di temperatura  $\Delta T = T_{bot} - T_{top}$ , al variare di questa variano le condizioni del fluido. A differenze di temperatura basse infatti non avviene moto del fluido, il trasporto del calore avviene solo tramite conduzione e la temperatura varia linearmente con la quota. All'aumentare della differenza di temperatura il sistema evolve e si nota la comparsa di moti convettivi all'interno del fluido, si formano delle vere e proprie celle convettive di forma cilindrica. Barry Saltzman riprese una versione semplificata del modello di Lord Rayleigh, assunse che il sistema fosse invariante per traslazioni per specifiche direzioni in modo tale da poter ignorare le dimensioni spaziali e riconducendosi così ad equazioni in due sole dimensioni spaziali. Dall'espansione in serie di Fourier delle equazioni ottenute, Saltzman ricavò un sistema infinito di equazioni differenziali ordinarie con coefficienti di Fourier ignoti. Da analisi computazionali giunse alla conclusione che, per specifiche scelte di parametri, tutte tranne tre delle variabili tendono a zero con il passare del tempo. Concretamente questo significò poter passare da uno spazio delle fasi di dimensione 7 ad un attrattore, a cui molte delle soluzioni convergono, contenuto in un sottoinsieme dello spazio delle fasi di dimensione 3. A partire dal 1963 Edward Norton Lorenz, matematico e meteorologo statunitense, riprese questo sistema in tre variabili e iniziò uno studio che fu talmente decisivo da conferire al sistema il nome di **sistema di Lorenz**. La riduzione del sistema ad infinite equazioni ad un sistema di sole tre equazioni si traduce nel passaggio da un comportamento turbolento ad un modello deterministico unidimensionale, dato dunque dalla presenza di un unico flusso valido per ogni tempo. Queste equazioni sono dette deterministiche, ovvero non randomiche o caratterizzate da termini stocastici.

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.1)$$

Le variabili scelte sono  $x$ , proporzionale all'intensità dei moti convettivi;  $y$ , proporzionale alle variazioni di temperatura orizzontali e  $z$ , proporzionale alle variazioni di temperatura verticali. I parametri rappresentano rispettivamente  $\sigma$  il numero di Prandtl che mette in relazione la viscosità del fluido con la sua conducibilità termica,  $r$  un numero proporzionale al numero di Rayleigh per la caratterizzazione dei moti convettivi e  $b$  un valore proporzionale alle dimensioni del sistema; si assume inoltre che tutti i parametri siano positivi e che  $\sigma > b + 1$ . Per completezza della trattazione si introducono ora i valori per i parametri utilizzati nello studio numerico del sistema che corrispondono con quelli utilizzati da Lorenz:  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  e  $r = 28$ . In seguito questi valori verranno discussi in maniera approfondita e ne verranno illustrate considerazioni riguardo possibili variazioni. Come condizioni iniziali invece si selezionano due punti  $P_1 = (0; 2; 0)$  e  $P_2 = (0; -2; 0)$  i quali risultano essere sufficientemente distanti da permettere di notare la somiglianza tra i due grafici. Le soluzioni associate a queste condizioni iniziali presentano comportamenti analoghi dati da rotazioni alternate attorno a due punti. Tutte le soluzioni non di equilibrio tendono infatti allo stesso sistema complicato detto **attrattore di Lorenz**.

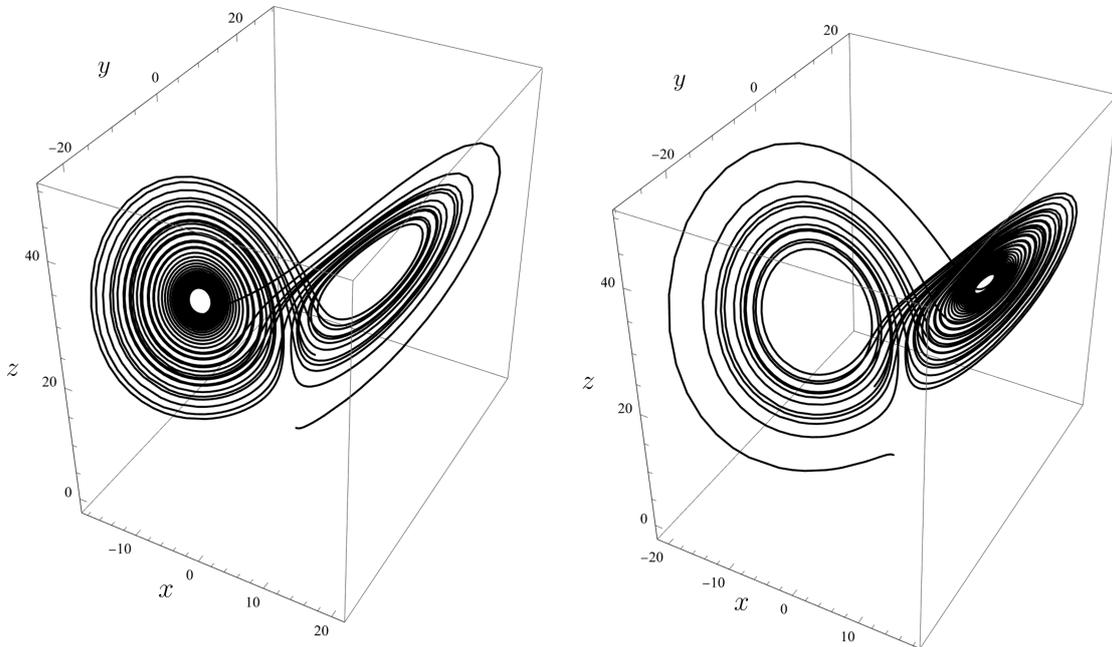


Figura 2.1: le due soluzioni del sistema ottenute imponendo come condizioni iniziali  $P_1 = (0; 2; 0)$  e  $P_2 = (0; -2; 0)$

A  $t = 0$  non risulta importante la distanza tra le soluzioni poiché, nel momento in cui queste si trovano vicino all'attrattore, si comportano allo stesso modo creando il tipico andamento attorno ai due lobi.

Modificando le condizioni iniziali, scegliendo i punti  $P_1 = (0; 20; 0)$  e  $P_2 = (0; -20; 0)$ , quanto affermato fino ad ora a livello qualitativo resta vero e coerente. Quantitativamente si nota che la scelta delle condizioni iniziali incide fin da subito sull'andamento nel tempo, l'esatta sequenza di anelli compiuti dalla traiettoria è infatti diversa in ciascuna delle quattro simulazioni. Il fatto che il comportamento a lungo termine sia analogo ma non coincidente a prescindere dalle condizioni iniziali scelte si traduce concretamente nella sensibilità e imprevedibilità delle condizioni meteo, piccole variazioni iniziali possono portare a grandi differenze negli stati finali. Quella appena illustrata è la principale caratteristica dei sistemi caotici nota come **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.

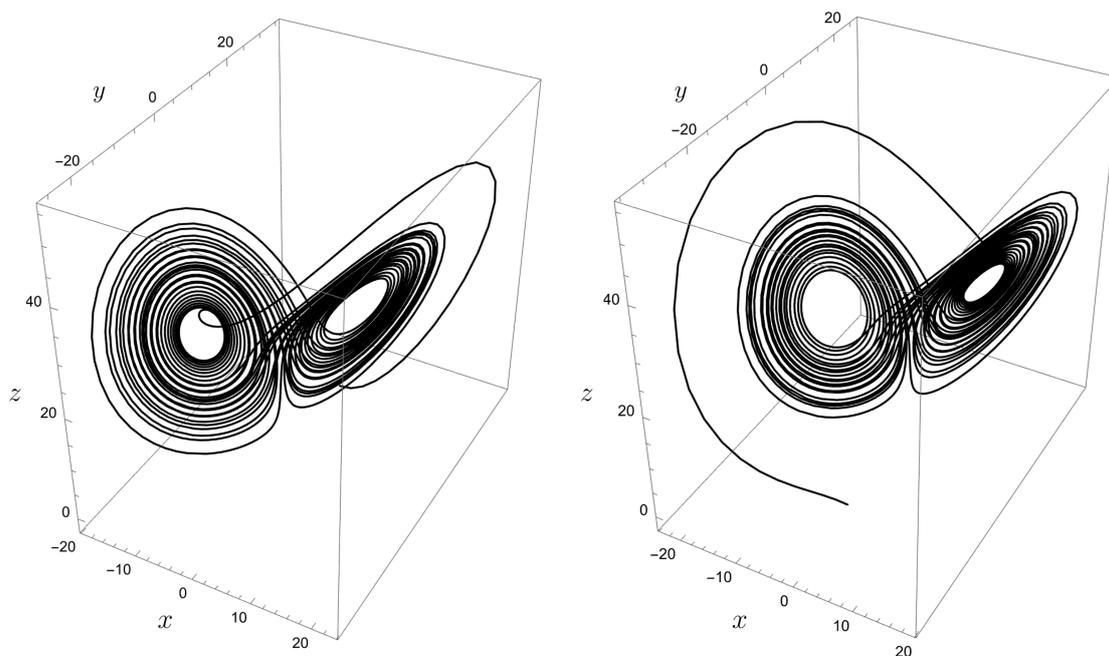


Figura 2.2: le due soluzioni del sistema ottenute imponendo come condizioni iniziali  $P_1 = (0; 20; 0)$  e  $P_2 = (0; -20; 0)$

Per completezza è importante specificare che la forma delle soluzioni del sistema non dipende soltanto dalle condizioni iniziali selezionate ma anche dal metodo di integrazione che si sceglie. Il metodo di integrazione che porta ai risultati esposti è il metodo di Eulero al quale però non verrà fatto riferimento perché esula dall'obiettivo della trattazione.

## 2.1 Proprietà del sistema di Lorenz

Prima di cominciare l'analisi del sistema di Lorenz e lo studio delle sue proprietà è utile notare che il sistema presenta una simmetria per riflessioni rispetto all'asse  $z$ . Effettuando una trasformazione del tipo:

$$(x; y; z) \rightarrow (-x; -y; z) \quad (2.2)$$

il sistema risulta invariante.

**Osservazione 2.1.1.** Per  $x = y = 0$  anche  $\dot{x} = \dot{y} = 0$ , l'asse  $z$  è dunque invariante  $\dot{z} = -bz$ .

Questa affermazione ha come prima conseguenza una delle proprietà più importanti, che verrà poi illustrata in dettaglio, ovvero che tutte traiettorie che iniziano sull'asse  $z$  rimangono su di essa e tendono verso l'origine  $(0; 0; 0)$ . Come seconda conseguenza si ha che le traiettorie che ruotano attorno all'asse  $z$  lo fanno in senso orario quando viste dall'alto rispetto al piano  $z = 0$  poiché se  $x = 0 \Rightarrow$

- $\frac{dx}{dt} > 0$  per  $y > 0$ ;
- $\frac{dx}{dt} < 0$  per  $y < 0$ .

A questo punto l'analisi può cominciare con la ricerca dei punti di equilibrio per il sistema (2.1) imponendo le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \sigma(y - x) = 0 \\ rx - y - xz = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

ricordando che i parametri devono essere strettamente positivi si giunge alle seguenti soluzioni parametriche:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (0; 0; 0) \\ Q_+ &= (\sqrt{b(r-1)}; \sqrt{b(r-1)}; r-1) \\ Q_- &= (-\sqrt{b(r-1)}; -\sqrt{b(r-1)}; r-1) \end{aligned}$$

È importante notare che gli ultimi due punti trovati possono esistere solo nel caso di  $r > 1$  mentre per  $r = 1$  si ottiene una prima **biforcazione** di tipo pitchfork supercritica. Ai punti di equilibrio trovati sono associati autovalori che ne definiscono la stabilità. Essendo anche gli autovalori di tipo parametrico dipenderanno anch'essi sensibilmente dai valori che  $\sigma$ ,  $b$  ed  $r$  assumono. Per poter proseguire l'analisi e la ricerca delle proprietà è quindi utile suddividere lo studio in due casistiche principali:  $0 \leq r \leq 1$  e  $r > 1$ .

## Analisi nel caso $0 \leq r \leq 1$

In questa prima casistica, come già detto, il punto di equilibrio esistente è uno soltanto: l'origine. Questo particolare tipo di fenomeno è quello dovuto all'assenza di moti convettivi. Per poterne studiare gli effetti sul sistema si effettua una linearizzazione del sistema (2.1), si calcolano gli autovalori della matrice jacobiana associata nel punto  $(0; 0; 0)$ .

$$Y' = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix} Y \quad (2.4)$$

Risolviendo

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

si ottengono i seguenti autovalori:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -b \\ \lambda_+ &= \frac{1}{2} \left[ -(\sigma + 1) + \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right] \\ \lambda_- &= \frac{1}{2} \left[ -(\sigma + 1) - \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r)} \right] \end{aligned}$$

Nel caso considerato,  $0 \leq r \leq 1$ , gli autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono reali negativi e si può quindi concludere che l'origine rappresenta un punto di equilibrio di tipo **sink**, ovvero asintoticamente stabile.

A questo punto della trattazione risulta valida la seguente proposizione riguardo il comportamento delle soluzioni in questo caso particolare.

**Proposizione 2.1.2.** *Suppongo  $r \leq 1 \Rightarrow$  tutte le soluzioni del sistema di Lorenz tendono all'origine, punto di equilibrio.*

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione è necessario costruire la **funzione di Lyapunov** associata al sistema e valida su tutto  $\mathbb{R}^3$ . Per costruirla è comodo utilizzare un ansatz sommativo:

$$L(x; y; z) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \quad (2.5)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma$  parametri da valutare strettamente positivi.

$$\begin{aligned} \dot{L}(x; y; z) &= \frac{dF}{dx} \dot{x} + \frac{dG}{dy} \dot{y} + \frac{dH}{dz} \dot{z} = \\ &= -2\alpha\sigma x^2 + 2(\alpha\sigma + \beta r)xy - 2\beta y^2 - 2\gamma bz^2 + 2(\gamma - \beta)xyz \end{aligned}$$

Il termine proporzionale al prodotto  $xyz$  può essere rimosso considerando il caso di  $\gamma = \beta$  mentre il termine misto proporzionale al prodotto  $xy$  non può essere eliminato per nessun valore di  $\alpha, \beta > 0$ . Per ricondursi ugualmente ad una semplificazione del termine risulta ottimale riscriverlo nella seguente forma:

$$2xy = -(x - y)^2 + x^2 + y^2$$

A questo punto la derivata della funzione di Lyapunov può essere scritta come:

$$\dot{L}(x; y; z) = -(\alpha\sigma - \beta r)x^2 - (\alpha\sigma + \beta r)(x - y)^2 - [(2 - r)\beta - \alpha\sigma]y^2 - 2\beta bz^2 \quad (2.6)$$

Considerando  $\alpha, \beta > 0$  si ottengono  $\alpha\sigma - \beta r \geq 0$  e  $(2 - r)\beta - \alpha\sigma \geq 0$ ; per esempio si possono utilizzare  $\alpha = r$  e  $\beta = \sigma$  ricavando per l'ansatz (2.5)

$$L(x; y; z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma z^2$$

e per la sua derivata (2.6)

$$\dot{L}(x; y; z) = -2\sigma(r(x - y)^2 + (1 - r)y^2 + bz^2)$$

L'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile poiché esiste una funzione di Lyapunov non costante su tutte le orbite.  $\square$

## Analisi nel caso $r > 1$

Dal caso precedente è possibile mantenere i risultati parametrici ottenuti per il punto di equilibrio  $(0; 0; 0)$  mentre è necessario estendere l'analisi anche ai punti di equilibrio  $Q_{\pm}$ . Come già detto infatti, per valori di  $r > 1$  esistono in totale tre punti di equilibrio e questo è fisicamente dovuto alla presenza di moti convettivi all'interno del fluido. I due punti di equilibrio, che si aggiungono all'origine, e gli autovalori ad essi associati dipendono ancora sensibilmente dal valore che assume il parametro  $r$ . Si nota la presenza di un valore critico per il parametro che rappresenta il passaggio per  $Q_{\pm}$  da punti di equilibrio stabili a punti di equilibrio instabili.

Se

$$r < \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1} \approx 24.74$$

l'autovalore  $\lambda_1$  è reale negativo, i due autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono invece complessi coniugati con parte reale negativa. Questo risultato implica avere i due punti di equilibrio  $Q_{\pm}$  stabili e di tipo **sink**. Numericamente si sceglie di risolvere il problema sostituendo  $r = 24.7$  e si ottengono i punti:

$$Q_+ = (7.95; 7.95; 23.7) \quad Q_- = (-7.95; -7.95; 23.7)$$

Risolvendo

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

dove  $A$  è la matrice associata al sistema, si ottiene l'equazione

$$(-\sigma - \lambda)(b + \lambda + \lambda b + \lambda^2 + x^2) - \sigma(-rb - r\lambda + zb + z\lambda + xy) = 0 \quad (2.7)$$

dalla quale, sostituendo i parametri e le coordinate dei punti  $Q_{\pm}$ , si ricavano gli autovalori associati pari a

$$\lambda_1 \approx -13.665 \quad \lambda_+ \approx -0.00109 + 9.61801 i \quad \lambda_- \approx -0.00109 - 9.61801 i$$

Nell'origine invece gli autovalori valgono

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3} \approx -2.6667 \quad \lambda_+ \approx 10.8478 \quad \lambda_- \approx -21.8478$$

$$\lambda_- < -\lambda_+ < \lambda_1 < 0 < \lambda_+$$

I valori ottenuti definiscono un punto di equilibrio di tipo **sella**.

In corrispondenza del valore critico  $r = 24.74$  si presenta una seconda **biforcazione**; in questo caso si tratta di una biforcazione di Hopf sottocritica. Al di sopra di questo valore di soglia invece i due punti di equilibrio  $Q_{\pm}$  hanno l'autovalore  $\lambda_1$  reale negativo, mentre i due autovalori  $\lambda_{\pm}$  sono complessi coniugati con parte reale positiva. Questi due punti di equilibrio risultano dunque instabili di tipo **sella**. Numericamente si sceglie di risolvere questa casistica utilizzando il valore  $r = 28$  come fatto da Lorenz, si tratta di una scelta arbitraria fatta per mantenere coerenza con il resto della trattazione. I punti di equilibrio  $Q_{\pm}$  sono rispettivamente:

$$Q_+ = (6\sqrt{2}; 6\sqrt{2}; 27) \quad Q_- = (-6\sqrt{2}; -6\sqrt{2}; 27)$$

Gli autovalori associati, calcolati a partire dall'equazione (2.7), valgono circa:

$$\lambda_1 \approx -13.855 \quad \lambda_+ \approx 0.0940 + 10.1945 i \quad \lambda_- \approx 0.0940 - 10.1945 i$$

in accordo con quanto affermato fino ad ora.

Per quanto riguarda l'origine invece gli autovalori valgono:

$$\lambda_1 = -\frac{8}{3} \approx -2.6667 \quad \lambda_+ \approx 11.8277 \quad \lambda_- \approx -22.8277$$

$$\lambda_- < -\lambda_+ < \lambda_1 < 0 < \lambda_+$$

Ancora una volta i valori ottenuti definiscono un punto di equilibrio di tipo **sella** e mantengono per il sistema lo stesso comportamento visto per  $r < 24.74$ .

Da qui in poi la trattazione proseguirà considerando solo il caso di maggior interesse ovvero per  $r = 28$ .

Dall'analisi del sistema linearizzato, dei suoi punti di equilibrio e degli autovalori associati è possibile identificare il piano di stabilità  $z = 27$ . Su questo piano giacciono i due punti di equilibrio che forniscono la simmetria del sistema rispetto all'asse  $z$ .

**Osservazione 2.1.3.** *Tutte le soluzioni nel piano di stabilità tendono all'origine tangenzialmente all'asse  $z$ .*

Dall'analisi numerica del sistema si ricava inoltre il grafico in Figura 2.4 nel quale si nota che la parte destra tende ad avvicinarsi al punto di equilibrio  $Q_-$ , appartenente al piano, per poi allontanarsi seguendo la forma di una spirale. La parte sinistra si comporta allo stesso modo, simmetricamente rispetto all'asse  $z$ , andando a richiamare il comportamento visibile anche nel grafico in Figura 2.3. Le curve, che si ottengono dal moto a spirale delle soluzioni attorno ai punti di equilibrio  $Q_{\pm}$ , intersecano continuamente la porzione del piano di stabilità. In questo piano il campo vettoriale punta verso il basso.

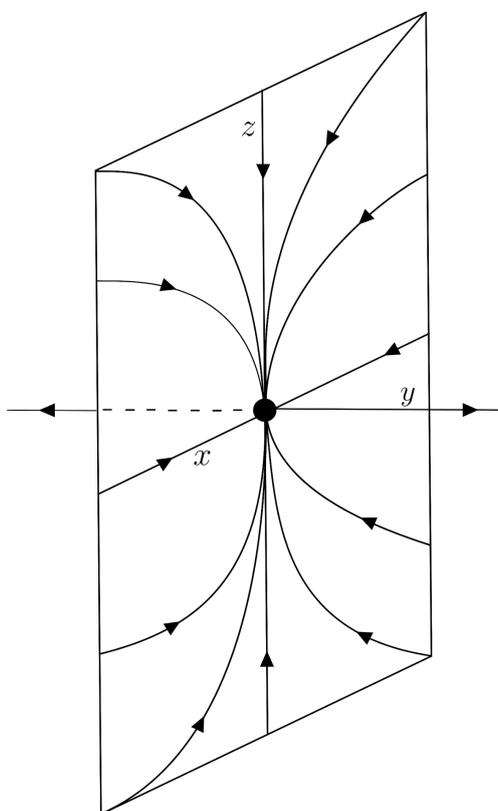


Figura 2.3: ritratto di fase del sistema di Lorenz linearizzato e risolto in  $(0; 0; 0)$

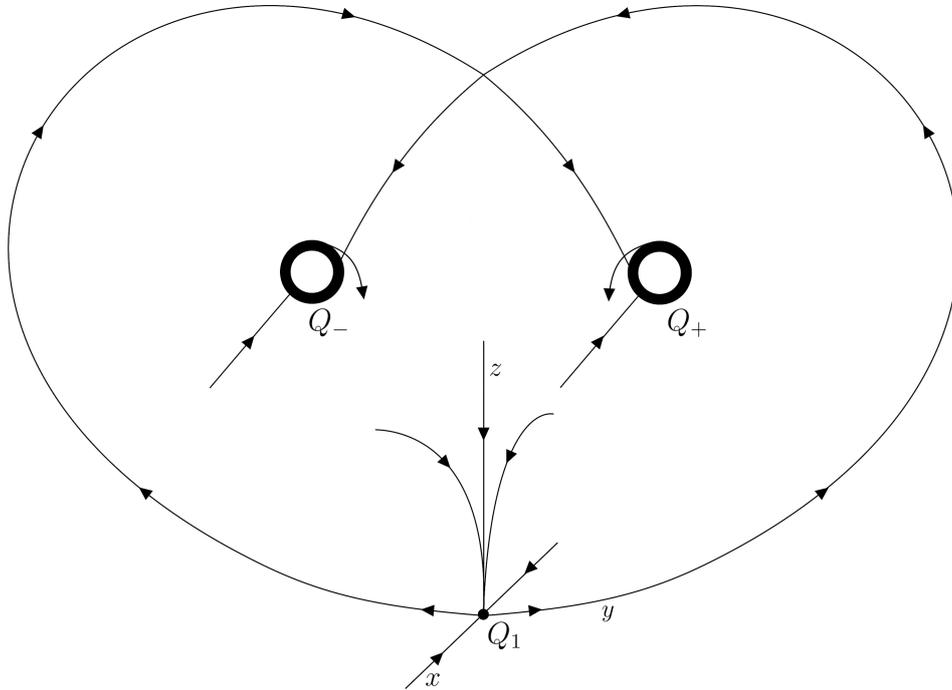


Figura 2.4: grafico dell'andamento delle soluzioni attorno ai tre punti di equilibrio

A questo punto è possibile affermare che, a differenza del caso  $0 \leq r \leq 1$ , non tutte le soluzioni confluiscono nell'origine per via della presenza di altri due punti di equilibrio. Alcune delle soluzioni infatti tendono semplicemente ad avvicinarsi, è il caso di quelle che partono lontane da  $(0; 0; 0)$ . Per dimostrare questo fatto è necessario introdurre un oggetto nello spazio che risulti limite di questo movimento. Si introduce dunque in  $\mathbb{R}^3$  un ellissoide centrato in  $(0; 0; 2r)$  nella forma

$$V(x; y; z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2 = \nu > 0 \quad (2.8)$$

che rispetti

$$\frac{dV}{dt} = -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz)$$

Si tratta di una funzione di Lyapunov scelta per semplificare la dimostrazione, nonostante fornisca un risultato non ottimale.

**Proposizione 2.1.4.** *Esiste  $\nu^*$  tale per cui qualunque soluzione che comincia fuori dall'ellissoide  $V = \nu^*$  può entrare nell'ellissoide e rimanere intrappolata per tutti i tempi futuri.*

*Dimostrazione.* Dell'ellissoide (2.8), essendo una funzione di Lyapunov, è possibile calcolare la derivata:

$$\dot{V}(x; y; z) = -2\sigma[rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2]$$

Considerando la parte dipendente dalle coordinate spaziali e omettendo le costanti moltiplicative

$$rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = \mu$$

per  $\mu > 0$  definisce un ellissoide nello spazio,

per  $\mu > br^2$  invece  $\dot{V} < 0 \Rightarrow$  è possibile scegliere  $\nu^*$  sufficientemente grande da avere che  $V = \nu^*$  contiene l'ellissoide

$$rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 = br^2$$

al suo interno  $\Rightarrow \dot{V} < 0$  per ogni  $\nu \geq \nu^*$ . □

Come conseguenza della Proposizione 2.1.4 è possibile affermare che tutte le soluzioni che partono lontane dall'origine vengono attratte da un insieme all'interno di  $\nu = \nu^*$ . Definendo  $\Lambda$  come l'insieme di tutti i punti le cui soluzioni rimangono per tutti i tempi nell'ellissoide, l' $\omega_+$  - limite di tutte le soluzioni del sistema di Lorenz appartiene a  $\Lambda$ .

**Lemma 2.1.1.** *Sia  $\dot{x} = f(x)$  sistema dinamico su  $\mathbb{R}^n$  con rispettivo flusso  $\Phi(t; x)$ . Sia  $U$  sottoinsieme aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  e  $V = \int_U dx$  il suo volume. Denotiamo in forma abbreviata:*

$$\begin{aligned} U(t) = \Phi(t; U) \quad e \quad V(t) &= \int_{U(t)} dx \\ \Rightarrow \dot{V}(t) &= \int_{U(t)} \operatorname{div}(f(x)) dx \end{aligned} \quad (2.9)$$

*Dimostrazione.*

$$V(t) = \int_{U(t)} dx = \int_U \det(d\Phi^t(x)) dx$$

Per la prima equazione variazionale

$$\Pi_x(t) = d\Phi^t(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{\Pi}_x(t) = df(\Phi^t(x))\Pi_x(t)$$

Inoltre per la formula di Liouville per sistemi lineari:

$$\det(d\Phi^t(x)) = \exp\left(\int_0^t \operatorname{div}(f(\Phi^s(x))) ds\right)$$

e poiché  $\operatorname{Tr}(df(x)) = \operatorname{div}(f(x))$

$$\Rightarrow \dot{V} = \int_U \operatorname{div}(f(\Phi^t(x))) \det(d\Phi^t(x)) dx = \int_{U(t)} \operatorname{div}(f(x)) dx$$

□

Il Lemma 2.1.1 può essere applicato al caso del sistema di Lorenz tenendo a mente che si lavora sapendo che

$$\begin{cases} \operatorname{div}(f) = -(1 + \sigma + b) \\ \frac{dV}{dt} = -(1 + \sigma + b)V_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V(t) = V_0 e^{-(1+\sigma+b)t}$$

ovvero il volume diminuisce esponenzialmente nel tempo fino ad arrivare ad annullarsi. Questa affermazione deriva dal significato di divergenza e dal suo segno: la divergenza rappresenta la misura di quanto velocemente cambia il volume  $V(t)$  sotto il flusso  $\Phi^t$  di  $f$  e in questo caso è negativa.

**Proposizione 2.1.5.** *Il volume di  $\Lambda$  è nullo.*

**Corollario 2.1.1.** *Nessuno dei punti di equilibrio per il sistema di Lorenz può essere di tipo sorgente.*

Il Corollario 2.1.1 conclude in maniera coerente quanto affermato nel corso della trattazione per il parametro  $r = 28$ . In conclusione è possibile affermare che  $\Lambda$  è un **attrattore** detto **strano**.

Il prossimo passo nell'analisi del sistema dinamico sarebbe quello di andare a studiare la **mappa di Poincaré** del sistema. Come spesso accade però, non è possibile trovare la mappa del sistema di Lorenz e per questo è necessario creare un modello geometrico semplificato.

## 2.2 Modellizzazione geometrica

L'obiettivo di creare un modello geometrico è quello di poter andare a studiare il comportamento del sistema in maniera dettagliata in specifici punti, e loro intorni, particolarmente significativi. Il modello deve quindi essere accurato e deve rispecchiare al meglio il comportamento delle equazioni, più il modello è semplice e più è immediata la verifica della sua applicabilità al sistema. In particolare, per creare un modello geometrico in grado di illustrare comportamento del sistema di Lorenz si sceglie di cominciare mantenendo invariate le proprietà studiate e di introdurre parametri che abbiano misure relative compatibili con quelle utilizzate fino ad ora. Il primo modello venne presentato da John Guckenheimer e Robert F. Williams; Albert W. Tacker dimostrò poi che il modello corrispondeva al sistema di Lorenz per specifici parametri. L'intera trattazione geometrica è stata studiata a fondo con l'obiettivo di arrivare ad una soluzione computazionale del problema. Di seguito si espongono le principali caratteristiche di questa modellizzazione ed i principali step necessari alla risoluzione numerica.

Per ipotesi si assume che:

- il sistema in analisi sia simmetrico per riflessioni rispetto all'asse  $z$ ;
- esista un punto di equilibrio  $(0; 0; 0)$ ; è necessario che esistano tre autovalori reali di cui uno positivo  $\lambda_1 > 0$  e due negativi  $\lambda_3 < \lambda_2 < 0$ . Si scelgono dunque i valori di  $\lambda_1 = 2$ ;  $\lambda_2 = -1$ ;  $\lambda_3 = -3$ ;

$\Rightarrow$  il sistema è nella forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 2y \\ \dot{z} = -z \end{cases} \quad (2.10)$$

**Osservazione 2.2.1.** *Il ritratto di fase di questo sistema corrisponde con quello ottenuto per il sistema di Lorenz in Figura 2.3.*

Per conoscere il comportamento delle soluzioni nel momento in cui transitano nei pressi del punto di equilibrio  $(0; 0; 0)$  si considera un rettangolo  $\mathcal{R}_1$  sul piano  $z = 1$  dato da

$$|x| \leq 1$$

$$0 < y \leq \epsilon < 1$$

Allo scorrere del tempo tutte le soluzioni che partono in  $\mathcal{R}_1$  possono raggiungere un rettangolo  $\mathcal{R}_2$  in  $y = 1$  dato da

$$|x| \leq 1$$

$$0 < z \leq 1$$

Si ottiene così una funzione

$$h : \mathcal{R}_1 \longrightarrow \mathcal{R}_2 \quad (2.11)$$

definita seguendo le soluzioni quando passano da  $\mathcal{R}_1$  a  $\mathcal{R}_2$ .

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy^{3/2} \\ y^{1/2} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Dalla funzione così definita segue che  $h$  trasforma rette  $y = c$  in  $\mathcal{R}_1$  in  $z = c^{1/2}$  in  $\mathcal{R}_2$ . Inoltre, poiché  $x_1 = xz_1^3$ , le rette  $x = c$  sotto l'azione di  $h$  diventano delle cubiche  $x_1 = cz_1^3$ . La definizione di questa funzione permette di trovare incidenza perpendicolare fra il piano  $xy$  e queste curve.

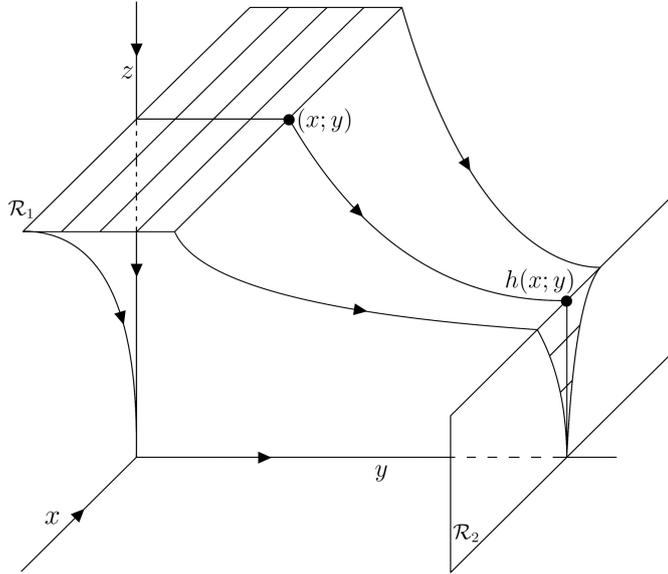


Figura 2.5: grafico della funzione  $h$  ovvero del passaggio delle soluzioni vicino al punto di equilibrio  $(0; 0; 0)$

Per mantenere la corrispondenza con il sistema di Lorenz si introducono inoltre due punti di equilibrio nel piano  $z = 27$ :

$$Q_+ = (10; 20; 27) \quad Q_- = (-10; -20; 27)$$

Si assume inoltre che le rette date da  $y = \pm 20$  e  $z = 27$  formino delle linee di stabilità intorno a  $Q_{\pm}$  e che gli altri due autovalori in questi punti di equilibrio siano complessi con parte reale positiva in modo da essere instabili di tipo sella.

Si definisce a questo punto una sezione  $\Sigma$  nel piano  $z = 27$  dato da  $|x|; |y| \leq 20$ . Questo quadrato è detto sezione trasversale 2-dimensionale. La superficie stabile in  $(0; 0; 0)$  incontra per la prima volta  $\Sigma$  nella linea di intersezione di quest'ultima con il piano  $xz$ ; queste traiettorie una volta intersecata la superficie trasversale convergono all'origine senza mai tornare. Si definiscono poi  $\zeta^{\pm}$  le due curve instabili all'origine e si assume che queste curve passino vicine a  $\Sigma$  per poi entrare al suo interno con  $\rho^{\pm} = (\pm x^*; \mp y^*)$  come primi punti di intersezione. A questo punto si considera una retta  $y = \nu$  in  $\Sigma$ . Se  $\nu = 0$  allora tutte le soluzioni che partono da un punto di questa retta tendono all'origine con lo scorrere del tempo senza però mai tornare su  $\Sigma$  ripresentando il caso della superficie stabile nell'origine. Si assume invece che tutte le altre soluzioni che si originano in  $\Sigma$ , allo scorrere del tempo, ci tornino.  $\Sigma$  può quindi essere pensata come una regione trappola, le soluzioni che la intersecano una volta non possono che tornare ad intersecarla indefinitamente.

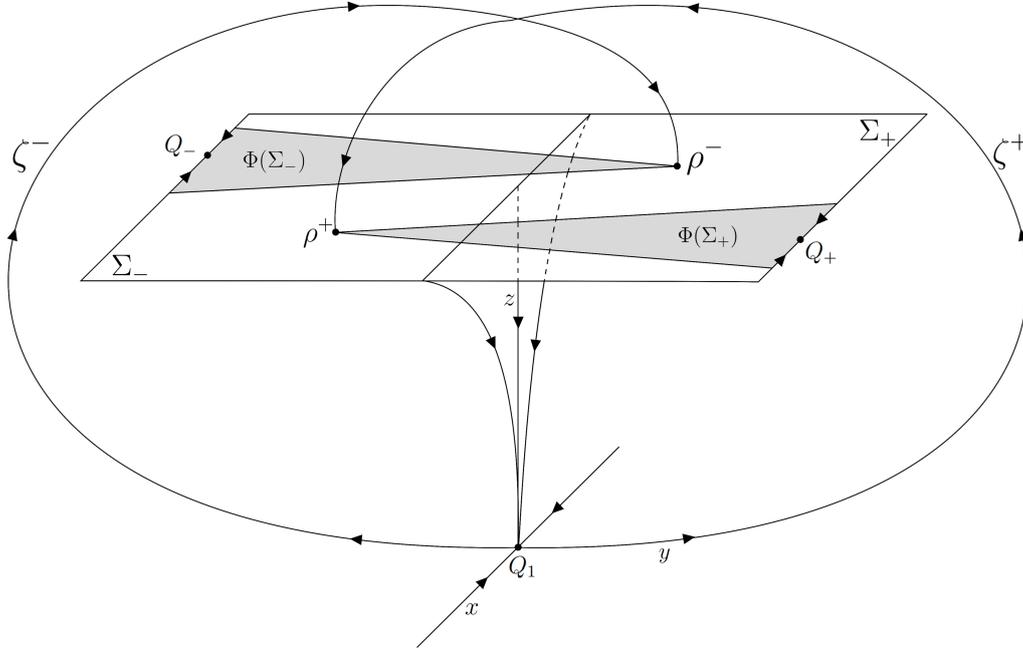


Figura 2.6: soluzioni  $\zeta^\pm$  e intersezioni con  $\Sigma^\pm$  in  $\rho^\pm$

Quest'ultima affermazione porta alle principali assunzioni su questo sistema:

- condizione di ritorno: sia  $\Sigma_+ = \Sigma \cap y > 0$  e  $\Sigma_- = \Sigma \cap y < 0$ , si assume che le soluzioni attraverso  $\Sigma_\pm$  tornino in  $\Sigma$  allo scorrere del tempo. È possibile quindi costruire una mappa di Poincaré

$$\Phi : \Sigma_+ \cup \Sigma_- \rightarrow \Sigma \quad (2.13)$$

per il quale è valida la condizione di simmetria  $\Phi(x; y) = -\Phi(-x; -y)$  data dall'equazione (2.2);

- direzione di contrazione: per ogni  $\nu \neq 0$  si assume che  $\Phi$  definita come (2.13) mappi la linea  $y = \nu$  in  $\Sigma$  nella linea  $y = g(\nu)$  per una certa funzione  $g$ . Inoltre si assume che  $\Phi$  contraiga queste linee nella direzione dell'asse  $x$ ;
- direzione di espansione: si assume che  $\Phi$  allunghi  $\Sigma_+$  e  $\Sigma_-$  nella direzione dell'asse  $y$  di un fattore maggiore di  $\sqrt{2}$  in modo da avere  $\dot{g}(y) > \sqrt{2}$ ;
- condizione di iperbolicità: si suppone che  $D\Phi$  mappi i vettori tangenti a  $\Sigma_\pm$  con pendenze  $\pm 1$  in vettori con pendenze di modulo maggiore di  $\mu > 1$ .

Analiticamente queste assunzioni implicano che la mappa (2.13) sia della forma

$$\Phi(x; y) = (f(x; y); g(y))$$

con

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\partial f}{\partial x} < c < 1 \\ \dot{g}(y) > \sqrt{2} \\ \dot{g}(y) > \mu \left| \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial f}{\partial y} \right| \end{aligned}$$

Geometricamente queste assunzioni implicano che le zone nei piani tangenti dati da  $|y| \geq |x|$  siano mappate da  $D\Phi$  all'interno di zone con pendenze maggiori.

**Osservazione 2.2.2.** *Queste assunzioni sono valide se  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$  e  $c$  sono sufficientemente piccole in tutti  $\Sigma_{\pm}$ .*

**Osservazione 2.2.3.**  $\Phi(x; 0)$  non è definita ma

$$\lim_{y \rightarrow 0^{\pm}} \Phi(x; y) = \rho^{\pm} \quad (2.14)$$

$\Rightarrow$  si definiscono  $\rho^{\pm}$  le **tips**, o punte, di  $\Phi(\Sigma_{\pm})$ . Le assunzioni fatte sugli autovalori garantiscono che  $\dot{g}(y) \rightarrow \infty$  per  $y \rightarrow 0$ .

Per identificare l'attrattore del sistema si restringe l'analisi a  $R \subset \Sigma$ , rettangolo dato da  $|y| \leq y^*$ . Siano  $R_{\pm} = R \cap \Sigma_{\pm} \Rightarrow$  ogni soluzione che parte dall'interno di  $\Sigma_{\pm}$  ma dall'esterno di  $R$  può al più intersecare  $R$  perciò è sufficiente considerare il comportamento di  $\Phi$  in  $R$ :  $\Phi(R) \subset R$ .

Si definisce  $\Phi^{(n)}$  la  $n$ -esima iterazione di  $\Phi$ .

Si definisce

$$A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{\Phi^{(n)}(R)}$$

intersezione dell'attrattore per il flusso con  $R$ ; sia

$$\mathcal{A} = \left( \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Phi^t(A) \right) \cup (0; 0; 0)$$

l'insieme a cui si aggiunge l'origine così che risulti un chiuso.

**Lemma 2.2.1.** *Per ogni aperto  $W \subset R$  esiste  $n > 0$  tale per cui  $\Pi_y(\Phi^{(n)}(W))$  è un intervallo aperto  $(-y^*; y^*)$ , proiezione di  $\Phi^{(n)}(W)$  su  $y$ . Equivalentemente  $\Phi^{(n)}(W)$  interseca ogni retta  $y = c \subset R$*

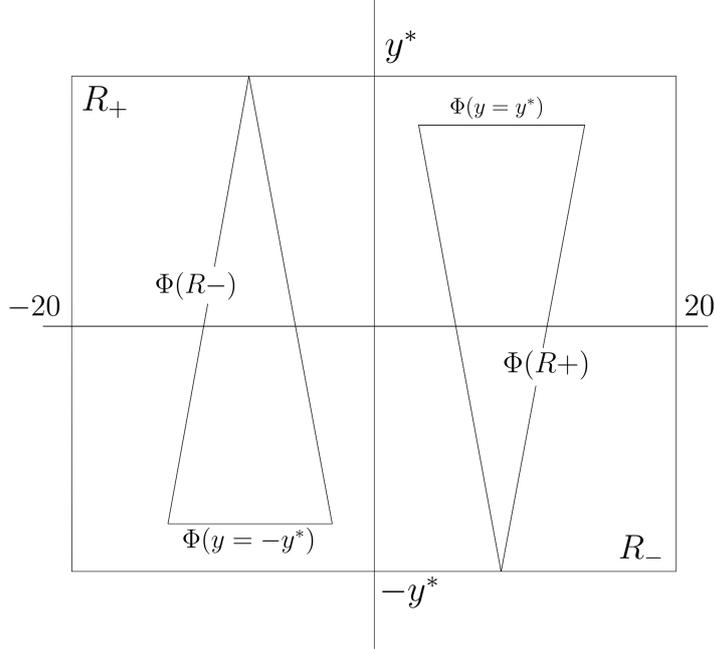


Figura 2.7: mappa di Poincaré  $\Phi$  in  $R$

**Teorema 2.2.1.**  $\mathcal{A}$  è un attrattore per il modello del sistema di Lorenz.

*Dimostrazione.* La dimostrazione del fatto che  $\mathcal{A}$  sia un attrattore per il flusso si ricava immediatamente dal fatto che  $A$  è un attrattore per la mappa  $\Phi$ .  $A$  è un insieme chiuso ma non è invariante per  $\Phi$  poiché  $\Phi$  non è definita in  $y = 0$ . Per il flusso le soluzioni attraverso i punti di  $y = 0$  appartengono ad  $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}$  è invariante.

Se  $\mathcal{O}$  è un aperto dato da  $|x| < 20$ ;  $|y| < 20 - \epsilon$  per un certo  $\epsilon$  con  $y^* < 20 - \epsilon$  allora per ogni  $(x; y) \in \mathcal{O}$  esiste  $n$  tale per cui  $\Phi^{(n)}(x; y) \in R$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^{(n)}(x; y) \subset A \quad \forall (x; y) \in \mathcal{O}$$

Dalla definizione è possibile scrivere  $A = \bigcap_{n \geq 0} \Phi^{(n)}(\mathcal{O}) \Rightarrow$  i punti 1. e 2. della Definizione 1.5.1 di attrattore valgono per  $\Phi$ .

Per dimostrare il punto 3. della Definizione 1.5.1 è necessario dimostrare che esistono due punti  $P_1; P_2 \in A$  tali per cui esistono due intorni aperti  $W_j \subset \mathcal{O}$  per  $P_j$ ,  $j = 1; 2$  e che esiste  $n \geq 0$  tale per cui  $\Phi^{(n)}(W_1) \cap W_2 \neq \emptyset$ . Dato  $U \subset R$ , sia  $\Pi_y(U)$  la proiezione di  $U$  sull'asse  $y$ , sia  $l_y(U)$  la sua  $y$ -lunghezza  $\Rightarrow U$  è una collezione finita di insiemi connessi e  $l_y(U)$  è ben definita. È necessario ora trovare un punto in  $W_1$  con immagine in  $W_2$  data dall'iterazione di  $\Phi$  tale per cui

$$|\Phi^{(k)}(x_1; y) - \Phi^{(k)}(x_2; y)| \leq c^k |x_1 - x_2|$$

Questa affermazione è valida poiché:

- a.  $\Phi^{(j)}(x_1; y)$  e  $\Phi^{(j)}(x_2; y)$  appartengono alla stessa retta parallela all'asse  $x$  per ogni  $j$ ;
- b.  $\Phi$  contrae le distanze nella direzione dell'asse  $x$  di un fattore  $c < 1$  per la seconda assunzione fatta nella costruzione del sistema.

Si assume che  $W_2$  sia un disco di diametro  $\epsilon$ , ricordando che la lunghezza di  $R$  della direzione  $x$  è pari a 40, si sceglie  $m$  tale per cui  $40 c^m < \epsilon$ . Si considera  $\Phi^{(-m)}(P_2)$ , il quale risulta definito poiché  $P_2 \in \cap_{n \geq 0} \Phi^{(n)}(R)$ ,  $\Phi^{(-m)}(P_2) = (\xi; \eta)$ , per il Lemma 2.2.1 esiste  $n$  tale per cui  $\Pi_y(\Phi^{(n)}(W_1)) = [-y^*; y^*]$ , allora è possibile scegliere  $(\xi_1; \eta) \in \Phi^{(n)}(W_1)$  tale per cui  $(\xi_1; \eta) = \Phi^{(n)}(\tilde{x}; \tilde{y})$  con  $(\tilde{x}; \tilde{y}) \in W_1$  e per cui vale che  $\Phi^{(n)}(\tilde{x}; \tilde{y})$  e  $\Phi^{(-m)}(P_2)$  hanno la stessa coordinata  $y$ .

$$\begin{aligned} |\Phi^{(m+n)}(\tilde{x}; \tilde{y}) - P_2| &= |\Phi^{(m)}(\xi_1; \eta) - P_2| = \\ &= |\Phi^{(m)}(\xi_1; \eta) - \Phi^{(m)}(\xi; \eta)| \leq \\ &\leq 40 c^m < \epsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  esiste  $(\tilde{x}; \tilde{y}) \in W_1$  con soluzione passante per  $W_2$ . □

# Appendice A

## Parametri del modello di Lorenz

Nel sistema di Lorenz i parametri inseriti all'interno delle tre equazioni differenziali non costanti sono tutti con significato fisico preciso e, per questo motivo, hanno i valori definiti ed utilizzati nel corso della trattazione.

Il parametro  $\sigma$  è detto **numero di Prandtl** ed è una grandezza adimensionale che mette in relazione la viscosità di un fluido con la conducibilità termica. Si tratta di un rapporto fra diffusività cinematica e termica per fluidi viscosi. L'equazione per ricavarlo è:

$$\sigma = \frac{\nu}{\alpha}$$

La diffusività termica è definita come:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p}$$

dove  $\lambda$  rappresenta la conducibilità termica,  $\rho$  la densità e  $c_p$  la capacità termica.

Il secondo parametro utilizzato da Lorenz è  $r$ , proporzionale al **numero di Rayleigh**. Si tratta di un'altra grandezza adimensionale che prende in considerazione le condizioni di instabilità che danno luogo ai moti convettivi nel caso di fluidi viscosi incomprimibili. Con i suoi studi Lord Rayleigh dimostrò che non è sufficiente che la temperatura decresca con la quota per avere l'innescò della convezione. Se il moto è sufficientemente lento e le dimensioni del contenitore del fluido sono sufficientemente piccole, la conduzione termica riesce ad equilibrare le differenze di temperatura e per questo motivo per far sì che inizino i moti di convezione è necessario che il numero di Rayleigh superi un certo valore di soglia. Il numero di Rayleigh è definito nel seguente modo:

$$R_a = \frac{\rho \alpha \Delta T g l^3}{\eta D}$$

dove i parametri rappresentano rispettivamente  $\rho$  la densità,  $\alpha$  il coefficiente di dilatazione termica,  $\Delta T$  la differenza di temperatura tra la superficie inferiore (ovvero quella

più calda) e quella superiore (ovvero quella più fredda),  $l$  la distanza fra le due superfici,  $g$  l'accelerazione di gravità,  $\eta$  la viscosità e  $D$  la diffusività termica del materiale.

Per far sì che si creino le celle convettive cilindriche è necessario dunque che il numero di Rayleigh superi un certo valore di soglia  $R_c$  proporzionale ad un parametro  $a > 0$  legato all'eccentricità dei cilindri. Si definisce dunque

$$R_c = \frac{\pi^4}{a^2}(1 + a^2)^3$$

il parametro  $r$  utilizzato nel sistema di Lorenz è quindi

$$r = \frac{R_a}{R_c}$$

L'ultimo parametro coinvolto all'interno del sistema di Lorenz è  $b$  che risulta proporzionale alle dimensioni del sistema, risulta infatti definito in funzione dello stesso parametro  $a$  del valore di soglia del numero di Rayleigh:

$$b = \frac{4}{1 + a^2}$$

# Appendice B

## Codice Wolfram Mathematica

Listati di codice per il programma *Wolfram Mathematica* utilizzati per le simulazioni numeriche.

### B.1 Teoria delle biforcazioni

#### Biforcazione pitchfork

Codice utilizzato per dimostrare qualitativamente l'andamento del numero di punti di equilibrio al variare del parametro nel caso di una biforcazione pitchfork supercritica e sottocritica. Per farlo sono stati scelti due sistemi, nel primo caso

$$\begin{cases} \dot{x} = rx - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

per il quale il parametro  $r$  ha assunto i valori  $-2; 0; 2$  con valore di biforcazione  $r_0 = 0$ . Nel secondo caso invece è stato scelto il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = rx + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

per il quale il parametro  $r$  ha assunto i valori  $-2; 0; 2$  con valore di biforcazione  $r_0 = 0$ .

```
1 supercriticalPitchforkSystem[r_, x_, y_] := {r x - x^3, -y}
2 subcriticalPitchforkSystem[r_, x_, y_] := {r x + x^3, -y}
3 plotForR[r_, system_] := StreamPlot[
4   Evaluate[system[r, x, y]], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
5   PlotLabel -> "r = " <> ToString[r], StreamPoints -> Fine,
6   PlotRange -> {{-3, 3}, {-3, 3}}, AxesLabel -> {"x", "y"}]
```

```

7 supercriticalPlots = Table[plotForR[r,
  supercriticalPitchforkSystem], {r, {-2, 0, 2}}]
8 subcriticalPlots = Table[plotForR[r, subcriticalPitchforkSystem],
  {r, {-2, 0, 2}}]
9 GraphicsGrid[
10  {{supercriticalPlots[[1]], supercriticalPlots[[2]],
  supercriticalPlots[[3]]},
11  {subcriticalPlots[[1]], subcriticalPlots[[2]], subcriticalPlots
  [[3]]}},
12 PlotLabel -> {"Supercritical Pitchfork Bifurcation", "
  Subcritical Pitchfork Bifurcation"}]

```

## Biforcazione di Hopf

Codice utilizzato per dimostrare qualitativamente l'andamento del numero di punti di equilibrio al variare del parametro nel caso di una biforcazione di Hopf supercritica e sottocritica. Per farlo sono stati scelti due sistemi, nel primo caso

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \omega y - (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} = \omega x + ay - (x^2 + y^2)y \end{cases}$$

per il quale il parametro  $a$  ha assunto i valori  $-1; 0; 1$ ,  $\omega = 1$  e con valore di biforcazione  $a_0 = 0$ .

Nel secondo caso invece è stato scelto il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \omega y + (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} = \omega x + ay + (x^2 + y^2)y \end{cases}$$

per il quale il parametro  $a$  ha assunto i valori  $-1; 0; 1$ ,  $\omega = 1$  e con valore di biforcazione  $a_0 = 0$ .

```

1 supercriticalHopfSystem[a_, \[Omega]_] := {ax - \[Omega]y - (x^2 + y^2)x
  , \[Omega]x + ay - (x^2 + y^2)y}
2 subcriticalHopfSystem[a_, \[Omega]_] := {ax - \[Omega]y + (x^2 + y^2)x,
  \[Omega]x + ay + (x^2 + y^2)y}
3
4 plotForA[a_, system_] := StreamPlot[
5  system[a, 1], {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
6  PlotLabel -> "a = " <> ToString[a],
7  StreamPoints -> Fine,
8  PlotRange -> {{-3, 3}, {-3, 3}},

```

```
9   AxesLabel -> {"x", "y"} ]
10
11  supercriticalPlots = Table[plotForA[a, supercriticalHopfSystem], {
12    a, {-1, 0, 1}}]
13
14  subcriticalPlots = Table[plotForA[a, subcriticalHopfSystem], {a,
15    {-1, 0, 1}}]
16
17  GraphicsGrid[{supercriticalPlots, subcriticalPlots}, PlotLabel ->
18    {"Supercritical Hopf Bifurcation", "Subcritical Hopf
19    Bifurcation"}]
```

## B.2 Sistema di Lorenz

Codice utilizzato per la simulazione numerica del sistema di Lorenz. I parametri inseriti sono coerenti con quelli utilizzati nel corso della trattazione. Per la creazione delle simulazioni in Figura 2.1 e Figura 2.2 le condizioni iniziali settate sono state rispettivamente

$$\begin{cases} x[0] == z[0] == 0, & y[0] == 2 \\ x[0] == z[0] == 0, & y[0] == -2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x[0] == z[0] == 0, & y[0] == 20 \\ x[0] == z[0] == 0, & y[0] == -20 \end{cases}$$

```
1 \[Sigma] = 10;
2 r = 28;
3 b = 8/3;
4 solution = NDSolve[{x'[t] == \[Sigma] (y[t] - x[t]),
5   y'[t] == r x[t] - y[t] - x[t] z[t],
6   z'[t] == x[t] y[t] - b z[t], x[0] == z[0] == 0,
7   y[0] == -2}, {x, y, z}, {t, 0, 35}];
8 ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t], z[t]} /. solution], {t, 0,
9   35},
10 PlotTheme -> Automatic,
   PlotStyle -> Directive[GrayLevel[0], Thickness[0.004]]]
```

# Bibliografia

- [1] Marcelo Viana. «What's New on Lorenz Strange Attractors?» In: *The Mathematical Intelligencer* (2000).
- [2] Rjucsh K. Kundu; Ira M. Cohen. *Fluid Mechanics*. Academic Press Inc, 1990.
- [3] Cesare Parenti; Alberto Parmeggiani. *Algebra lineare ed equazioni differenziali ordinarie*. Springer Milano, 2019.
- [4] Robert L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical System*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989.
- [5] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer New York, NY, 2003.
- [6] Colin Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer New York, NY, 1982.
- [7] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Atlantis Press Paris, 2013.
- [8] Morris W. Hirsch; Stephen Smale; Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Elsevier Inc., 2013.