

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

IL RUOLO DEL GRUPPO DEI LOOP NELLA GRAVITÀ QUANTISTICA

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Riccardo Marchese

Anno Accademico 2023/2024

Abstract

In questo scritto viene presentata la formulazione a loop della quantizzazione del campo gravitazionale. La struttura fondamentale che ci permette di definire una rappresentazione a loop della quantizzazione è quella del gruppo dei loop, a partire dal quale si introducono degli operatori che ci portano a quelli già visti nelle teorie di gauge. La costruzione di quest'ultimi sarà fondamentale nella creazione di una teoria gauge invariante, e invariante per diffeorfismi, quale dovrà essere una teoria quantistica della gravità.

A partire dalla definizione dello spazio su cui vivono tali operatori, si definisce un insieme di oggetti gauge invariante e loop dipendenti, che coinvolgono l'uso di connessioni, detti loop di Wilson. Insieme a questi sarà, poi, necessario definire come definire una rappresentazione quantistica puramente in termini di loop. Verrà, allora, introdotta una trasformata tra lo spazio delle connessioni e quello dei loop, la quale ha funzione di trasformare ogni ogni operatore gauge invariante, o funzione d'onda, nell'oggetto corrispondente nello spazio dei loop.

Infine, verrà presentato il passo primo della gravità a loop, ossia il calcolo dei vincoli hamiltoniano e di diffeomorfismo nel linguaggio dei loop, sfruttando gli oggetti definiti precedentemente. Si troverà che i loop di Wilson, dipendenti da loop non auto-intersecanti e regolari, soddisfano i due vincoli, avendo fatto le appropriate considerazioni sulla regolarizzazione degli stati fisici considerati.

Indice

Introduzione	iv
1 Il gruppo dei Loop e la sua rappresentazione	1
1.1 Fibrati e fibrati principali	2
1.1.1 Varietà degli spazi tangenti	2
1.1.2 Fibrato	2
1.1.3 Fibrato principale	3
1.1.4 Spazio verticale e connessione	6
1.2 Olonomie e il gruppo dei loop	9
1.3 Generatori infinitesimi del gruppo dei loop	12
1.3.1 La derivata di loop	13
1.3.2 Proprietà della derivata di loop	14
1.4 La derivata di connessione	19
1.5 Derivata di contatto e derivata funzionale	23
1.6 Rappresentazione del gruppo dei loop	25
1.7 I loop di Wilson	27
1.7.1 Le identità di Mandelstam	28
1.8 La rappresentazione a loop	30
1.8.1 La trasformazione di loop	32
1.8.2 Le funzioni d'onda nella rappresentazione a loop	34
2 Formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale e variabili di Ash- tekar	36
2.1 Formulazione hamiltoniana di un sistema con vincoli	37
2.2 Ipersuperfici, curvatura e foliazioni	38
2.2.1 Curvatura estrinseca	39
2.2.2 Foliazioni	40
2.3 Formulazione hamiltoniana della relatività generale	42
2.3.1 La decomposizione 3+1 dello spaziotempo	43
2.3.2 Forma hamiltoniana della azione di Einstein-Hilbert	45
2.4 Le nuove variabili di Ashtekar	49

2.4.1	Discussione dei vincoli	52
3	La rappresentazione a loop della Gravità Quantistica	56
3.1	Vincoli per la trasformata di loop	57
3.2	Regolarizzazione e stati fisici	61
3.2.1	Vincolo di diffeomorfismo	61
3.2.2	Vincolo hamiltoniano	62
	Conclusioni	71
A	L'Olonomia nelle teorie di Gauge	72
A.1	L'Olonomia di una connessione	72
	Bibliografia	75

Introduzione

Uno dei più grandi successi empirici di questo secolo è sicuramente stato il rilevamento di una particella che ha le proprietà di quella di Higgs (Atlas collaboration [2012](#), CMS collaboration [2012](#)), per cui ha permesso di dare una linea di demarcazione netta su ciò che conosciamo riguardo la fisica delle particelle elementari, dimostrando teorie nate e perfezionate da molte decadi. Possiamo dire che la fisica moderna è incastonata dentro tre grandi teorie: la Meccanica Quantistica e la Teoria Quantistica dei Campi, forniscono un quadro generale per tutte le teorie che descrivono particolari interazioni; il Modello Standard delle particelle elementari $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ che descrive tutta la materia osservata finora direttamente, senza includere effetti gravitazionali; la Relatività Generale, che descrive ciò che classicamente chiamiamo gravità, lo spazio ed il tempo. In questo modo, nonostante il grande successo già nominato vi sono molti problemi aperti nella fisica moderna, la cui risoluzione non necessariamente porterebbe al "termine" della stessa come si potrebbe erroneamente pensare.

Tra i problemi aperti più noti vi sono: il trovare una teoria di unificazione e la formulazione di una teoria di quantizzazione della gravità. Questi sono problemi vari, per cui se ne potrebbero nominare molti altri ¹. Il secondo riguarda la vecchia speranza di poter ridurre il numero di gradi di libertà alla nostra descrizione elementare della natura (spesso accade che gli ultimi due vengano confusi come lo stesso, ma non è necessariamente correlato, come vedremo). Il terzo problema, su cui si discuterà in parte in questo scritto, deriva dal "semplice" fatto che le teorie di cui disponiamo oggi non sono capaci di descrivere un comportamento quantistico del campo gravitazionale. Manca, dunque, una teoria capace di poter descrivere fenomeni dove sia la gravità che la teoria quantistica giocano un ruolo non indifferente. Si potrebbero portare come esempi noti quello della descrizione del "centro" di un buco nero, cosmologia primordiale, la struttura stessa della natura a piccole scale (i problemi principali della fisica moderna sono quasi sempre legati alla presenza di "infiniti" nella teoria, e dunque legato strettamente alla rinormalizzazione). Il problema, se analizzato ancora più in fondo ci mostra come le nostre teorie, da una parte la teoria quantistica dei campi e dall'altra la relatività generale, siano basate su ipotesi contraddittorie. Da un lato, abbiamo un mondo formato da quanti discreti

¹Si potrebbe discutere anche sull'aggiunta stessa del problema di una interpretazione della meccanica quantistica.

su uno spaziotempo piatto governato da simmetrie globali di Poincaré, mentre dall'altro abbiamo uno spaziotempo curvo dove "tutto" è regolare e deterministico (Rovelli 2015).

Dunque, finora non vi è alcuna evidenza chiara che contraddica totalmente le fondamenta di nessuna di queste teorie di base presentate, le quali diventano prive di significato fisico solo in certi regimi fisici. Proprio in questi regimi ci si aspetta che le predizioni di una teoria quantistica della gravità diventino rilevanti, anche se per adesso non si è avuta alcuna diretta osservazione o rilevazione per una giustificazione di una tale teoria (contrariamente a quanto si potrebbe immaginare, è un fatto non drammatico, dato che è un qualcosa di non nuovo nel terreno della fisica).

Ad oggi sono stati sviluppati due grandi tentativi della descrizione di un regime quantistico del campo gravitazionale, essi sono la teoria delle stringhe e la gravità a loop (chiamata spesso anche come gravità non perturbativa). Essi sono due modelli diversi, poiché hanno distinte ipotesi fisiche, nonostante vi siano stati dei tentativi non banali sulla possibilità di convergenza tra le teorie (Smolin 2007). Possiamo dire che il grande merito della gravità quantistica a loop è che ha costruito una formulazione matematica rigorosa di una teoria quantistica dei campi generalmente covariante non perturbativa e background indipendente (ossia non viene assunta una struttura spaziotemporale fissa, bensì uno dinamico che evolve insieme ai campi quantizzati) [21].

La versione canonica della gravità quantistica a loop nasce dal riconoscimento di soluzioni a loop della equazione di Wheeler-deWitt, o equazione di universo, ossia l'equazione che formalmente viene dalla quantizzazione canonica della relatività generale, riscritta nelle nuove variabili di Ashtekar. Infatti, la formulazione della gravità a loop si fonda sulla formulazione di Ashtekar [20] della classica relatività generale, basata sul concetto di connessioni usate come nuove variabili. Questo nuovo approccio, introdotto per affrontare vari problemi della quantizzazione classica del campo gravitazionale, rende il formalismo della relatività generale, che già di per sé è aperto a riformulazioni tramite l'introduzione di nuove tetradi (o triadi in questo caso), molto più simile alla formulazione delle teorie della fisica moderna già citate. Essenzialmente, dopo l'introduzione di queste nuove variabili, si notò (Jacobson e Smolin 1988) che l'equazione di Wheeler-deWitt riformulata in termini delle nuove variabili ammette una semplice classe di soluzioni: le tracce delle ologrammi delle connessioni di Ashtekar attorno a loop regolari e non auto-intersecanti. In altre parole i loop di Wilson [14] delle connessioni di Ashtekar risolvono questa equazione se i loop suddetti sono regolari e non auto-intersecanti. Questo è ciò che effettivamente ha portato alla nascita di una rappresentazione a loop dello spazio, ossia un cambio di base nello spazio di Hilbert della teoria, scegliendo proprio questi oggetti come i nuovi stati di base per la gravità quantistica. Chiaramente, la teoria della gravità a loop si è evoluta moltissimo negli anni con l'introduzione dei cosiddetti spin-network [21], spin foams (Oriti 2004) e una applicazione molto importante alla cosmologia sviluppata dai fondatori di questa teoria, rendendola una delle teorie della quantizzazione della gravità con moltissime implicazioni a livello teorico di non poca importanza.

Il testo qui presentato si propone di analizzare i concetti base della rappresentazione

a loop della quantizzazione del campo gravitazionale. Nel primo capitolo verranno presentati gli strumenti necessari a costruire una teoria gauge invariante e invariante per diffeomorfismi ², ossia il linguaggio base di una teoria quantistica dei campi, ma espresse nel linguaggio dei loop. Si vedrà proprio che gli stati di loop non sono degli oggetti localizzati nello spazio, ma sono quegli oggetti che definiscono essi stessi le eccitazioni fisiche della geometria. Nel secondo capitolo, invece, viene presentata la formulazione hamiltoniana della relatività generale, secondo il formalismo ADM [19], insieme alla definizione delle nuove variabili di Ashtekar, che giocheranno un ruolo fondamentale nell'ultimo capitolo. Il terzo, ed ultimo, capitolo presenta l'applicazione della rappresentazione a loop alla quantizzazione classica del campo gravitazionale, ossia, tramite gli strumenti definiti nei primi capitoli, si dimostra che i loop di Wilson delle connessioni di Ashtekar soddisfano questi vincoli, hamiltoniano e di diffeomorfismi in rappresentazione a loop, se i loop sono regolari e non auto-intersecanti, grazie alle dovute considerazioni di regolarizzazione sugli operatori di vincolo.

²L'invarianza per diffeomorfismi sta alla base della relatività generale, ed è quello che poi permette formalmente di prendere un limite al continuo del reticolo, senza che questo sia indefinito [21].

Capitolo 1

Il gruppo dei Loop e la sua rappresentazione

In questo capitolo viene introdotto lo strumento matematico delle ologonomie e concetti ad esso collegati, importanti nella descrizione delle teorie di Gauge usate nei capitoli successivi. Vengono presentati il gruppo dei loop e i suoi generatori infinitesimi, necessari per descrivere le teorie di Gauge nel linguaggio dei loop. L'attenzione maggiore viene data alle connessioni e ai suoi associati concetti di trasporto parallelo, dato il grande uso fatto nella teoria quantistica dei campi, nelle teorie di campo di Yang-Mills e nella relatività generale.

Bisogna poi evidenziare che, nel contesto delle teorie di gauge che descrivono le interazioni fondamentali, la rappresentazione a loop è una di quelle che ha permesso di eliminare il vincolo di prima classe delle teorie (e alcune ridondanze introdotte dalla teoria stessa). Basata sulla costruzione di una teoria quantistica hamiltoniana delle teorie di gauge, è ciò che ha permesso, insieme all'introduzione delle cosiddette variabili di Ashtekar, di dare un quadro per l'introduzione di tecniche loop come via naturale non perturbativa per la quantizzazione della teoria di Einstein.

Si mostrerà come le teorie di Gauge nascano come rappresentazioni del gruppo dei loop, e che tutti i consueti concetti cinematici delle teorie di Gauge riflettono le proprietà del gruppo dei loop. È, poi, importante rendersi conto che le identità e le proprietà che dimostreremo in questo capitolo, non dipendono dalla scelta del gruppo di Gauge per rappresentare il gruppo dei loop. In questo senso si può pensare ai corrispondenti generatori del gruppo come associati ad una curvatura e connessione "astratta". È, infatti, solo quando si considera una particolare rappresentazione del gruppo dei loop, in termini di un gruppo di Gauge, che queste quantità assumono il significato consueto di connessioni e curvature nelle teorie di Gauge.

1.1 Fibrati e fibrati principali

Ad introduzione di questo capitolo, si presenta la definizione di fibrato e di fibrato principale e la nozione di spazio vettoriale verticale e connessione. Essi sono strutture fondamentali nella geometria differenziale moderna e, vedremo, necessarie per definire il gruppo dei loop ed i loop di Wilson, presentati nelle prossime sezioni. I testi di riferimento usati per lo sviluppo di questa sezione sono [1] e [4]

1.1.1 Varietà degli spazi tangenti

Si inizia presentando anzitutto l'idea di Varietà degli spazi tangenti, fondamentale per definire l'idea di fibrato in generale.

Definizione 1.1. Sia M una varietà differenziabile e sia $T_x M$ lo spazio tangente al punto $x \in M$. Definiamo l'insieme TM come l'unione di tutti gli spazi tangenti in ogni punto di M

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M \quad (1.1)$$

Tutti i vettori in ogni punto $x \in M$ sono visti come punti del nuovo insieme TM , tale che se si assegna a un $v \in T_x M$ il suo punto di tangenza x si avrà una mappa suriettiva detta proiezione canonica

$$\pi : TM \rightarrow M \quad T_x M \ni v \mapsto x$$

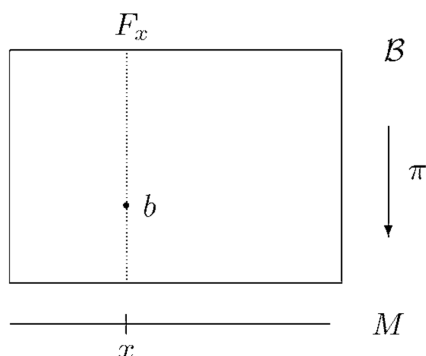
Vediamo che l'insieme TM ha una struttura naturale di varietà differenziabile, che viene introdotto dall'atlante sulla varietà M . Essenzialmente, al contrario della varietà generica M , avremo bisogno di una $2n$ -upla di numero $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$ che corrisponde in modo univoco a una carta indotta da quella su M

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{O} &\rightarrow \mathbb{R}^n[x^1, \dots, x^n], & e \\ \hat{\mathcal{O}} &:= \pi^{-1}(\mathcal{O}) \subset TM \\ \Rightarrow \hat{\psi} : \hat{\mathcal{O}} &\rightarrow \mathbb{R}^{2n}[x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n] \end{aligned}$$

dove (x^1, \dots, x^n) indicano dove i vettori v risiedono e (v^1, \dots, v^n) danno la sua decomposizione rispetto alle coordinate di base in $T_x M$. In questo modo se $\{\mathcal{O}_a, \psi_a\}$ è un atlante su M , allora $\{\hat{\mathcal{O}}_a, \hat{\psi}_a\}$ è un atlante su TM .

1.1.2 Fibrato

Fatta una breve introduzione sulla varietà TM , che fornisce un esempio paradigmatico di un oggetto assai utile e fondamentale, definiamo l'idea di fibrato. Si noti che, per TM ,



a ogni punto $x \in M$ si ha un'altra varietà, ossia lo spazio vettoriale $T_x M$ diffeomorfo a \mathbb{R}^n . Una generalizzazione, a questo punto, è naturale: a ogni punto $x \in M$ avrò una varietà F_x diffeomorfe a una varietà comune F .

La varietà F è detta fibra tipica, mentre F_x è la fibra su un punto x , M è detta base, e

$$B := \bigcup_{x \in M} F_x$$

è lo spazio totale. Tutti questi elementi insieme costituiscono una struttura detta fibrato. Il concetto di fibrato è anche comprendente di due varietà, B ed M , e una mappa suriettiva (proiezione canonica)

$$\pi : B \rightarrow M.$$

Inoltre, le preimmagini $F_x = \pi^{-1}(x)$ devono essere diffeomorfe a una varietà comune F e, in aggiunta, ogni F_x deve essere una sottovarietà in B . Infine, bisogna anche richiedere una struttura locale di prodotto: esiste un ricoprimento U della base M e un sistema di diffeomorfismi

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

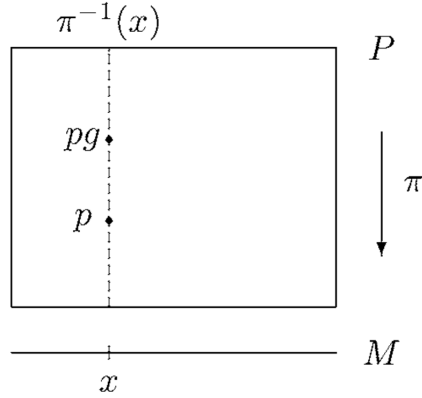
tale che

$$\pi_1 \circ \Phi = \pi, \quad \text{ove } \pi_1 : M \times F \rightarrow M.$$

Infine, una notazione tipica del fibrato usata in letteratura è (B, π, M, F) . In questo modo identifichiamo la struttura del capitolo precedente $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ con il cosiddetto fibrato tangente.

1.1.3 Fibrato principale

Prima di definire e parlare dei fibrati principali stessi, diamo una definizione assai utile in questo contesto.



Definizione 1.2. Definiamo azione destra da parte di un gruppo G su una varietà P come una operazione

$$\begin{aligned} \triangleleft : P \times G &\rightarrow P \\ (p, g) &\mapsto \triangleleft(p, g) =: p \triangleleft g \end{aligned}$$

tale che soddisfa:

- (i) $(p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2 = p \triangleleft (g_1 \circ g_2), \forall g_1, g_2 \in G$;
- (ii) $p \triangleleft e = p$;

dove \circ è l'operazione di composizione interna del gruppo G , ed e è il suo elemento neutro. Inoltre, diciamo che un'azione \triangleleft è libera se $\forall g_1, g_2 \in G$ e $p \in P$ si ha che

$$(p \triangleleft g_1 = p \triangleleft g_2) \iff (g_1 = g_2).$$

Mentre, un'azione è detta essere transitiva se $\forall p, q \in P$ esiste un elemento $g \in G$ tale che $p = q \triangleleft g$.

Avendo definito cos'è un fibrato e l'azione di un gruppo, si può procedere a una estensione, molto importante nelle sezioni successive, dal momento che fa da cornice e struttura portante di tutte questi concetti su cui si appoggia la rappresentazione a loop delle teorie di gauge. I fibrati principali sono dei fibrati su cui agisce un gruppo, detto gruppo di struttura, dove in questo contesto di varietà differenziabili si richiede che G sia un gruppo di Lie. Quello che si vuole ottenere, poi, è che l'azione del gruppo sia solo sulle fibre del fibrato e non sulla base, come vedremo nella definizione.

Definizione 1.3. Sia G un gruppo di Lie che agisce da destra, tramite \triangleleft , su una varietà P , spazio totale di un fibrato (P, π, M) . Diremo che (P, π, M, G) è un G -fibrato principale se:

(i) l'azione è libera e transitiva sulle fibre;

(ii) $\forall g \in G, p \in P$

$$\pi(p \triangleleft g) = \pi(p)$$

(iii) Se (U, Φ) è una carta del fibrato, allora si ha

$$\Phi(p \triangleleft g) = (\pi(p \triangleleft g), \phi(p \triangleleft g)) = (\pi(p), \phi(p) \triangleleft g) .$$

Questo significa che la seguente mappa debba commutare:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times G \\ \triangleleft G \uparrow & & \triangleleft G \uparrow \\ \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\Phi} & U \times G \\ \pi \downarrow & \swarrow pr_1 & \\ U & & \end{array}$$

ossia deve valere

$$\begin{cases} \Phi(p \triangleleft g) = \Phi(p) \triangleleft g & \forall g \in G, p \in \pi^{-1}(U) \\ pr_1 \circ \Phi = \pi \end{cases}$$

dove definiamo $\Phi(p) \triangleleft g$ per $\Phi(p) = (\pi(p), \phi(p)) \in U \times G$, come:

$$\Phi(p) \triangleleft g = (\pi(p), \phi(p)) \triangleleft g := (\pi(p), \phi(p) \triangleleft g)$$

Si noti, che in questo caso l'azione di \triangleleft fa muovere i punti delle fibre sempre in altri punti della stessa, come visto nelle definizioni.

Equivalentemente, un'altra definizione che viene spesso data nel contesto di diffeomorfismi è:

Sia $\pi : P \rightarrow M$ un fibrato, dove P, M sono delle varietà. Se sullo spazio totale su cui agisce un certo gruppo G , le fibre sono diffeomorfe a G (ossia, se $y \in P_x$ allora $y \triangleleft g \in P_x \forall g \in G$), l'azione è verticale libera e transitiva (per ogni $x \in M$ e $y \in P_x$ la mappa $G \rightarrow P_x$ che manda g a $y \triangleleft g$ è un diffeomorfismo) è detto fibrato principale con un gruppo G .

Infine, in letteratura un fibrato principale viene spesso identificato generalmente come (P, π, M, G) , ove G è un generico gruppo di struttura.

Isomorfismo tra fibrati principali

Dalla definizione di fibrato principale questo porta con sé delle strutture principali: tre varietà differenziabili, un gruppo di struttura e un'azione destra del gruppo sullo spazio totale. Se vogliamo definire un isomorfismo tra fibrati principali dovremo chiaramente richiedere varie condizioni sulle mappe che dovranno preservare le strutture del fibrato principale. Siano (P, π, M, G) e (P', π', M', G) , rispettivamente con \triangleleft e \triangleleft' , allora li diremo isomorfi se

$$\exists \chi : P \rightarrow P' \quad \text{e} \quad \phi : M \rightarrow M' \quad \text{tali che}$$

$$\begin{cases} \forall p \in P, g \in G : \chi(p \triangleleft g) = \chi(p) \triangleleft' g \\ \phi \circ \pi = \pi' \circ \chi \end{cases}$$

Dunque, i fibrati principali saranno isomorfi e

$$(P, \pi, M, G) \cong (P', \pi', M', G)$$

Infine, se avessimo anche un gruppo di struttura diverso tra i due fibrati, G e G' , dovremo avere un omomorfismo tra i due gruppi di Lie ($f : G \rightarrow G'$), così che la prima relazione d'isomorfismo diventi:

$$\chi(p \triangleleft g) = \chi(p) \triangleleft' f(g) .$$

Definite queste strutture matematiche su cui agiremo nelle prossime sezioni è assai importante introdurre altre due nozioni tra loro connesse, ossia il sottospazio verticale e sottospazio orizzontale, o connessione.

1.1.4 Spazio verticale e connessione

Definizione 1.4. Sia $\pi : P \rightarrow M$ un fibrato. L'esistenza stessa della proiezione π individua nello spazio tangente di ogni punto $x \in P$ un sottospazio verticale

$$\text{Ver}_x P \leq T_x P \quad \text{Ver}_x := \text{Ker} \pi_{*x},$$

dove $\pi_* : TP \rightarrow TM$ è il push-forward della proiezione di π . Un vettore $w \in T_x P$, allora, è detto verticale se è proiettato in zero. Questo processo significa che w è tangente alla fibra, ossia una curva arbitraria che rappresenta w ($[\gamma] \equiv W$) va da x lungo la fibra in cui risiede x .

Si rappresenta un generale campo vettoriale verticale, avendo le coordinate canoniche (x^i, v^i) su TM , come

$$V = V^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i} .$$

Definizione 1.5. Sia $\pi : P \rightarrow M$ un fibrato. Definiamo sollevamento una procedura generale che assegna un oggetto geometrico sulla base M a un oggetto geometrico sullo spazio totale P del fibrato.

Si può introdurre un semplice sollevamento da M a TM , che si può generalizzare nel contesto di fibrati principali in modo automatico. Sia

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M \quad t \mapsto \gamma(t)$$

una curva su M . Allora la curva

$$\hat{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow TM \quad t \mapsto \dot{\gamma}(t)$$

è chiamata sollevamento naturale della curva γ da M a TM . Si enunciano di seguito delle proprietà fondamentali e immediate.

- La curva sollevata $\hat{\gamma}$ è sempre esattamente sulla curva γ

$$\pi \circ \hat{\gamma} = \gamma$$

- Se $x^a(t)$ sono le coordinate sulla curva γ , allora le coordinate sulla curva sollevata sono $(x^a(t), \dot{x}^a(t))$, tale che

$$\begin{aligned} \gamma(t) &\leftrightarrow x^a(t) \\ \hat{\gamma}(t) &\leftrightarrow (x^a(t), v^a(t)) = (x^a(t), \dot{x}^a(t)) \end{aligned}$$

Infine, consideriamo un vettore u su M , tale che $u \in T_x M \equiv \pi^{-1}(x)$. Associamo una curva nella fibra $\pi^{-1}(x)$ su x col vettore

$$\sigma(t) := v + tu \quad v \in \pi^{-1}(x)$$

Il vettore tangente a zero della curva è un vettore nel punto $v \in TM$

$$u^\uparrow := \dot{\sigma}(0) \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (v + tu)$$

Questo vettore è chiamato sollevamento verticale di un vettore u nel punto $v \in TM$. Questo gode di alcune proprietà:

- le coordinate della curva $\sigma(t)$ sono

$$x^a(t) = x^a \quad v^a(t) = v^a + tu^a$$

- il vettore risultante è verticale

$$u^\uparrow \equiv \dot{\sigma}(0) \in \text{Ver}_v TM \leq T_v TM$$

Notiamo che un singolo vettore u può essere sollevato in questo modo a ogni punto della fibra π^{-1} su x , dando origine a uno campo vettoriale verticale definito sulla fibra. Se esiste un campo vettoriale $u = u^a(x)\partial_a$ su M , il sollevamento verticale genera un campo vettoriale su TM , che è chiamato sollevamento verticale del campo u .

Si sono costruiti, in questo modo, un insieme di spazi vettoriali, sottospazi dello spazio tangente, in ogni punto di P . A partire da questo possiamo associare ad ogni spazio verticale definito, uno spazio orizzontale, tale che lo spazio tangente sarà scomponibile come somma diretta dei due. Vedremo che la scelta di questi cosiddetti spazi orizzontali sarà quello che viene chiamato come "connessione".

Connessione su un fibrato principale

Definiamo in questa breve sezione un oggetto largamente usato in teoria quantistica dei campi. Partendo dal fibrato principale, procediamo con la definizione di un oggetto, che definisce la nozione di trasporto parallelo sul fibrato, cioè un modo per "connettere" o identificare le fibre su punti vicini.

Definizione 1.6. Sia (P, π, M, G) un fibrato principale, diremo *connessione* la famiglia di $\{H_p P\}_{p \in P} \subset TP$ di sottospazi vettoriali di $T_p P$, tale che

- (i) $T_p P = H_p P \oplus \text{Ver}_x P$;
- (ii) $\forall g \in G : (\triangleleft g)_* H_p P = H_{p \triangleleft g} P$;
- (iii) $\forall X$ su P , campo vettoriale liscio sulla fibra, questo si può scomporre in due campi vettoriali lisci:

$$X = X^{hor} + X^{ver}$$

dove $X^{hor} : P \rightarrow HP$ e $X^{ver} : P \rightarrow VP$.

La seconda condizione è particolare e meno immediata delle altre, ossia possiamo considerare in modo equivalente un vettore orizzontale in un punto $p \triangleleft g$ o prendere un vettore orizzontale nel punto p e portarlo in $p \triangleleft g$ tramite $(\triangleleft g)_*$, push-forward dell'azione destra del gruppo (per questo motivo è possibile affermare che il sottospazio orizzontale in $p \in P$ genera ogni sottospazio orizzontale nella fibra $P_{\pi(p)}$).

Connessione 1-forma

La definizione di connessione che si è data è di carattere totalmente geometrico, però se volessimo definire un metodo più lineare per la valutazione di sottospazi orizzontali dobbiamo definire un metodo algebrico nella assegnazione degli $H_p P$ ai $V_p P$. La assegnazione, come vedremo, sarà illustrata da una 1-forma a valori in un'algebra di Lie \mathfrak{g} , $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ (è un fibrato cotangente con valori nell'algebra di Lie, definito in modo complementare al fibrato tangente, spazio in cui vivono i covettori).

Definizione 1.7. Sia (P, π, M, G) un fibrato principale, diremo che una $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ è una connessione 1-forma sul fibrato se:

- (i) $\forall A \in \mathfrak{g}, p \in P: \omega_p(X_p^A) = A$ ¹ ;
- (ii) $\forall g \in G, p \in P, X_p \in T_pP : ((\lrcorner g)_*\omega)_p(X_p) = g^{-1}(\omega_p(X_p))g$;
- (iii) $p \mapsto \omega_p$ è una mappa liscia.

Allora la connessione su P è una 1-forma differenziale su P con valori nella algebra di Lie \mathfrak{g} di G , che riproduce i generatori della algebra di Lie dei campi vettoriali fondamentali su P . Si noti che, spesso, si identifica il termine "G-connessione" con (P, ω) , mentre ω è chiamato lui stesso "forma di connessione" o "1-forma di connessione" del fibrato principale.

Dunque, la connessione 1-forma è proprio una proiezione di T_pP sul sottospazio verticale $V_pP \cong \mathfrak{g}$, mentre lo spazio orizzontale è dato dal suo nucleo:

$$\mathcal{H}_p\mathcal{P} := \ker(\omega_p) := \{v_p \in T_p\mathcal{P} \mid \omega_p(v_p) = 0\} .$$

Si può, infine, dimostrare che il sottospazio orizzontale così definito coincide con quello definito precedentemente della definizione 1.6.

1.2 Olonomie e il gruppo dei loop

Il concetto di connessione è fondamentale, dal momento che permette di, presi due punti, farne un confronto in una forma invariante. Infatti, se sappiamo come fare un trasporto parallelo di un qualsiasi oggetto matematico lungo una curva, si può definire la derivata covariante di questo oggetto in direzione della curva; viceversa, data la nozione di derivata covariante si introduce quella di trasporto parallelo lungo una qualsiasi curva.

Data una curva chiusa arbitraria, il risultato del trasporto parallelo dipende in generale dalla scelta della curva. Per ogni curva chiusa γ in una varietà con origine in uno stesso punto o il trasporto parallelo associa un elemento di H del gruppo di Lie associato al fibrato. L'elemento parallelamente trasportato del fibrato è ottenuto dall'originale dall'azione dell'elemento di gruppo H ; l'oggetto dipendente dal percorso è chiamata *olonomia* $H(\gamma)$ (si veda A.1 per un approfondimento maggiore).

Generalizzando la nozione di olonomia può essere definita intrinsecamente senza alcun riferimento a connessioni; in questo modo ha più risvolti matematici e fisici. Esse possono essere viste come omomorfismi da una struttura di gruppo definita, come classe di equivalenze di curve chiuse, su un gruppo di Lie [2]. Ogni classe di equivalenza è ciò che è tecnicamente chiameremo loop e la struttura di gruppo definita da essi è detto

¹ $X^A : P \rightarrow TP$ è un campo vettoriale generato da un elemento $A \in \mathfrak{g}$: $\forall f \in C^\infty(P), p \in P$
 $X_p^A(f) = \frac{d}{dt}|_0 f(p \lrcorner e^{tA})$.

gruppo dei loop (in questo contesto ci si riferirà spesso ad esso come spazio dei loop). Il gruppo dei loop rappresenta la struttura base di tutte le formulazioni non locali delle teorie di gauge in termini di ologomie.

Nonostante il fatto che il gruppo dei loop non è un gruppo di Lie, potremo definire dei generatori infinitesimi per quest'ultimo, tale che quando sono rappresentati nello spazio delle funzioni dei loop danno origine a operatori differenziali nello spazio dei loop, che emergono in modo semplice e consistente come rappresentazione dei generatori infinitesimi del gruppo dei loop.

In questa trattazione, al fine di fare emergere la struttura di gruppo dei loop si è voluto usare dei loop non parametrizzati.

Iniziamo considerando un insieme di curve parametrizzate, su una varietà M che sono continue e lisce a tratti. Una curva p è una mappa

$$p : [0, s_1] \cup [s_1, s_2] \cdots [s_{n-1}, 1] \rightarrow M \quad (1.2)$$

liscia in ogni intervallo chiuso $[s_i, s_{i+1}]$ e continua in tutto il dominio. Possiamo dare una naturale composizione di curve parametrizzate, infatti date due curve lisce a tratti p_1 e p_2 tale che ogni punto della prima è lo stesso punto iniziale della seconda denotiamo $p_1 \circ p_2$ la curva:

$$p_1 \circ p_2(s) = \begin{cases} p_1(2s) & s \in [0, 1/2] \\ p_2(2(s - 1/2)) & s \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (1.3)$$

Invece, la curva attraversata nella direzione opposta, è data da

$$p^{-1}(s) := p(1 - s) \quad (1.4)$$

Seguiamo adesso con la definizione di una relazione di equivalenza identificando p con $p \circ \phi$, per tutte le orientazioni, preservando parametrizzazioni differenziabili $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, al fine di trattare curve non parametrizzate. Da notare, inoltre che la composizione di queste curve è ben definita e indipendente dai membri della classi di equivalenza usati nella loro definizione.

Consideriamo adesso delle curve chiuse l, m, \dots , che hanno inizio e fine nello stesso punto o ; denotiamo L_o l'insieme di queste curve chiuse. Questo insieme è un semigrupp² sotto la legge di composizione $(l, m) \rightarrow l \circ m$; l'identità è definita come la curva costante $i(s) = o$ per ogni s e ogni parametrizzazione. Non abbiamo, però, in questo modo una struttura di gruppo, non essendo la curva opposta l^{-1} un elemento inverso del gruppo tale che $l \circ l^{-1} \neq i$.

Le ologomie sono associate al trasporto parallelo attorno a curve chiuse. Nel caso di un fibrato banale³ la connessione è data da una 1-forma dell'algebra di Lie su M . Il trasporto parallelo su una curva chiusa $l \in L_o$ è una mappa dal fibrato su o a se stesso

²Un semigrupp è un insieme dotato di una operazione binaria associativa

³Un fibrato è detto banale quando è isomorfo al fibrato prodotto $f : B \rightarrow M \times F$.

data dal cosiddetto esponenziale di percorso ordinato, indicato con operatore P (si veda [3] per la sua definizione esatta):

$$H_A(l) = P \exp \int_l A_a(y) dy^a \quad (1.5)$$

Nel caso generale di un fibrato principale (P, π, M, G) , possiamo definire la mappa di ologonomia in modo seguente. Scelto un punto \hat{o} del fibrato su o , usiamo la connessione A per alzare la curva l in M a una curva \hat{l} in P tale che il punto iniziale è $\hat{l}(0) = \hat{o}$ e il punto di fine $\hat{l}(1) = \hat{l}(0)H_A(l)$ che definisce l'ologonomia H_A come elemento del gruppo G (il prodotto indica proprio l'azione del gruppo G). La principale proprietà di H_A è

$$H_A(l \circ m) = H_A(l)H_A(m) \quad (1.6)$$

Un cambio di punti del fibrato da o a un certo $\hat{o}' = \hat{o}g$ induce alla trasformazione

$$H'_A(l) = g^{-1}H_A(l)g \quad (1.7)$$

Dunque, ora, per trasformare l'insieme L_o in un gruppo dobbiamo introdurre una relazione di equivalenza, ossia cercare di identificare tutte le curve chiuse che portano alla stessa ologonomia per tutte le connessioni lisce, essendo che le curve con la stessa ologonomia portano le stesse informazioni fisiche [2]. La classe di equivalenza sotto questa relazione, ossia quelle curve che condividono la stessa ologonomia, verrà chiamata da ora in avanti *loop*, denotati con lettere greche.

Procediamo nel dare tre definizioni di questa relazione di equivalenza.

Definizione 1.8. Sia

$$H_A : L_o \rightarrow G \quad (1.8)$$

la mappa di ologonomia di una connessione A definita sul fibrato principale (P, π, M, G) . Due curve $l, m \in L_o$ sono equivalenti, $l \sim m$, se $H_A(l) = H_A(m)$ per ogni (P, π, M, G) e connessione liscia A .

Definizione 1.9. Definiamo i loop equivalenti alla identità. Data una curva chiusa l è detta *sottile* [5] se esiste una omotopia di l alla curva nulla, in cui l'immagine della omotopia è inclusa nella immagine di l . Questo tipo di curve non racchiude in sé alcun tipo di area della varietà M . Date due curve chiuse $l, m \in L_o$ sono equivalenti, $l \sim m$, se $l \circ m^{-1}$ è sottile (equivalente a una curva nulla).

Definizione 1.10. Data le curve chiuse l ed m e tre curve aperte p_1, p_2, q tale che

$$\begin{aligned} l &= p_1 \circ p_2 \\ m &= p_1 \circ q \circ q^{-1} \circ p_2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

allora $l \sim m$.

Può essere mostrato che le definizioni 2 e 3 sono equivalenti; inoltre, le curve equivalenti secondo le definizioni 2 e 3 lo sono anche per la 1.

Date queste definizioni possiamo mostrare che la composizione tra loop è ben definita ed è ancora un loop.

Definizione 1.11. Se $\alpha \equiv [l]$ e $\beta \equiv [m]$, allora $\alpha \circ \beta = [l \circ m]$, dove si è indicata la classe di equivalenza con le parentesi quadre.

Definite le relazioni di equivalenza, definiamo l'inverso di un loop. Dal momento che la composizione di una curva con il suo opposto porta a una curva nulla, allora diamo tale definizione.

Definizione 1.12. Dato un loop α , $\alpha \circ \alpha^{-1} = \iota$, dove ι è l'insieme delle curve chiuse equivalenti con la curva nulla (oppure detti loop sottili).

Definizione 1.13. Siano due loop α e β , sono detti vicini, se, preso α in intervallo $U_\epsilon(\beta)$, esistono almeno due curve parametrizzate $a(s) \in \alpha$ e $b(s) \in \beta$ tale che $a(s) \in U_\epsilon(b(s))$ con la tipica topologia delle curve (indotta da spazio di curve continue).

Denotiamo, inoltre l'insieme dei loop con punto base o \mathcal{L}_o , che costituisce un gruppo non abeliano sotto la legge di composizione, e gruppo topologico secondo tale topologia, è detto *gruppo dei loop*.

Un risultato importante è che ogni omomorfismo

$$\phi : \mathcal{L}_o \rightarrow G \tag{1.10}$$

dove G è un gruppo di Lie, definisce una olonomia associata a una connessione, che in generale non è una funzione liscia. Imponendo ulteriori condizioni di derivabilità sull'omomorfismo, si assicura che un fibrato e una connessione sono definite tali che H è la olonomia di questa connessione [5].

Usando da ora in avanti funzioni dei loop, come l'olonomia che è la più importante, sarà necessario introdurre la nozione di continuità nello spazio dei loop, dato che si useranno frequentemente funzioni definite in questo spazio. Iniziamo presentando una serie di operatori e proprietà di tale gruppo.

1.3 Generatori infinitesimi del gruppo dei loop

Consideriamo una rappresentazione del gruppo dei loop data da operatori agenti su funzioni continue nella topologia introdotta nella precedente sezione. Introduciamo un insieme di operatori differenziali agenti su queste funzioni in relazione con i generatori infinitesimi del gruppo dei loop, in termini dei quali si possono costruire gli elementi del gruppo.

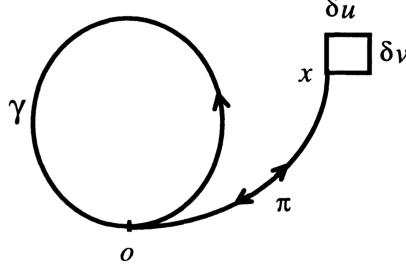


Figura 1.1: *Il loop infinitesimo che definisce la derivata di loop*

1.3.1 La derivata di loop

Data una certa funzione $\Psi(\gamma)$ continua e a valori complessi di \mathcal{L}_o vogliamo considerare la sua variazione quando il loop γ cambia di un infinitesimo loop $\delta\gamma$ con punto base x connesso da un percorso π_x^o al punto base di γ (come mostrato in Fig.1.1). Si vuole valutare, dunque, il cambio di una funzione quando si modifica il suo argomento da γ a $\pi_x^o \circ \delta\gamma \circ \pi_o^x \circ \gamma$. Al fine di considerare questa variazione consideriamo una famiglia infinitesima di loop $\delta\gamma$ che contiene la curva, in particolari coordinate, ottenuta dall'attraversamento del vettore u^a , v^a e i loro opposti in modo da formare un loop infinitesimo. Denotiamo queste particolari curve con la notazione $\delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v}$ (non considerando la dipendenza da ϵ_i di ogni percorso).

Dato un certo percorso π e un loop γ , una funzione loop differenziabile dipende soltanto dai vettori infinitesimi $\epsilon_1 u^a$ e $\epsilon_2 v^a$, tale che assumiamo che la funzione abbia rispetto a questi ultimi tale espansione,

$$\begin{aligned} \Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) &= \Psi(\gamma) + \epsilon_1 u^a Q_a(\pi_o^x) \Psi(\gamma) + \epsilon_2 v^a P_a(\pi_o^x) \Psi(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b + v^a u^b) S_{ab}(\pi_o^x) \Psi(\gamma) \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b - v^a u^b) \Delta_{ab}(\pi_o^x) \Psi(\gamma) \end{aligned} \quad (1.11)$$

dove Q, P, S, Δ sono operatori differenziali nello spazio delle funzioni $\Psi(\gamma)$. Considerando il caso in cui i vettori u è collineare col vettore v allora avremo $\delta\gamma$ che è un loop nullo e tutti i termini, eccetto uno, devono annullarsi; avremo $Q = P = S = 0$, ma essendo che la combinazione antisimmetrica si annullerebbe già, Δ non serve che sia nullo. Dunque, una funzione dei loop è differenziabile se per ogni percorso π_o^x e vettori u, v l'effetto della infinitesima deformazione è completamente contenuto in un operatore simmetrico dipendente dal percorso $\Delta(\pi_o^x)$,

$$\Psi(\pi_o^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x^o \circ \gamma) = \left(1 + \frac{1}{2} \sigma^{ab}(x) \Delta_{ab}(\pi_o^x)\right) \Psi(\gamma) \quad (1.12)$$

dove $\sigma^{ab}(x) = \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b)$ è l'elemento d'area del loop infinitesimo. Chiameremo questo operatore la *derivata di loop* [2].

Notiamo che ciò che è stato dimostrato per una funzione arbitraria nello spazio dei loop, dove non contribuiscono gli altri operatori diversi da Δ , per le funzioni di curve al posto di quelle nello spazio dei loop questi operatori sono in generale presenti e non escludibili. Inoltre, notiamo che il risultato della applicazione della derivata di loop su una funzione di un loop è ancora una funzione di un loop (per ogni percorso aperto c'è una diversa derivata). Data questa definizione, poi, è cruciale avere un punto base fissato, per ogni loop, su cui attaccare il percorso aperto che definisce la derivata; importante, specialmente per le considerazioni successive sulle identità di Bianchi, che non si sarebbe potuta dimostrare se avessimo avuto una derivata agente soltanto sui punti del loop [6].

Alla fine della sezione precedente si è notato come il gruppo dei loop agisse naturalmente sui percorsi aperti, dando come risultato una deformazione stessa del percorso. Possiamo, infatti, trovare un esempio di questo fatto nell'estensione della definizione di derivata di loop per percorsi aperti ⁴

$$\Psi(\pi^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x \circ \gamma^y) = (1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}(x)\Delta_{ab}(\pi^x))\Psi(\gamma^y) \quad (1.13)$$

1.3.2 Proprietà della derivata di loop

Caratteristiche tensoriali

Una prima e lampante proprietà della derivata di loop (1.12) è che si comporta come un tensore sotto trasformazioni locali di coordinate contenente la fine del punto del percorso π^x per funzioni loop differenziabili. Richiediamo che tutta l'espressione sia invariante, e notando che che la derivata di loop è contratta con il tensore d'area, per la legge del quoziente esso deve essere un tensore. Inoltre notiamo che la derivata di loop è associata alla superficie descritta dai vettori infinitesimi du^a, dv^b , piuttosto che ai vettori infinitesimi individuali, essendo invariante sotto trasformazioni vettoriali che preservano l'elemento d'area.

Operazioni di commutazione

Le derivate di loop sono operatori non commutativi, dato che, come vedremo, sono naturalmente associate al fatto di essere generatori di un gruppo non abeliano. Possiamo, però, determinare delle relazioni di commutazione direttamente da proprietà geometriche. Consideriamo due loop infinitesimi $\delta\eta_1, \delta\eta_2$ dati da

$$\delta\eta_1 = \pi^x \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \pi_x \quad e \quad \delta\eta_2 = \chi^y \circ \delta q \delta r \delta \bar{q} \delta \bar{r} \chi_y \quad (1.14)$$

⁴Al fine di alleggerire la notazione si indicherà da ora in avanti un generico percorso π^x oppure π_x a seconda del verso, sottintendendo il punto base o , ove non necessario.

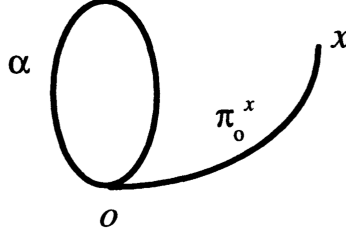


Figura 1.2: Il percorso deformato usato per derivare l'espressione delle relazioni di commutazione.

e gli elementi d'area

$$\sigma_1^{ab} = \epsilon_1 \epsilon_2 (u^a v^b - v^a u^b) \quad e \quad \sigma_2^{ab} \epsilon_3 \epsilon_4 (q^a r^b - r^a q^b). \quad (1.15)$$

Allora possiamo scrivere, espandendo l'espressione

$$\begin{aligned} \Psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ (\delta\eta_1)^{-1} \circ (\delta\eta_2)^{-1} \circ \gamma) &= (1 + \frac{1}{2}\sigma_1^{ab}\Delta_{ab}(\pi^x))(1 + \frac{1}{2}\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi^y)) \\ &\quad \times (1 - \frac{1}{2}\sigma_1^{ef}\Delta_{ef}(\pi^x))(1 - \frac{1}{2}\sigma_2^{gh}\Delta_{gh}(\chi^y))\Psi(\gamma) \\ &= (1 + \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\sigma_2^{cd}[\Delta_{ab}(\pi^x), \Delta_{cd}(\chi^y)])\Psi(\gamma) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Definendo e, semplificando la relazione, la composizione dei due percorsi $\chi^y = \delta\eta_1 \circ \chi^y$, possiamo riscrivere il tutto come

$$\begin{aligned} \Psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \circ (\delta\eta_1)^{-1} \circ (\delta\eta_2)^{-1} \circ \gamma) &= \\ (1 + \frac{1}{2}\sigma_2^{ab}\Delta_{ab}(\chi^y))(1 - \frac{1}{2}\sigma_2^{cd}\Delta_{cd}(\chi^y))\Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (1.17)$$

per cui, usando la definizione di derivata di loop per curve aperte e lasciando solo i termini al primo ordine per ogni ϵ_i , otteniamo

$$\Psi(\delta\eta_1 \circ \delta\eta_2 \delta\eta_1^{-1} \circ \delta\eta_2^{-1} \circ \gamma) = (1 + \frac{1}{4}\sigma_1^{ab}\sigma_2^{cd}\Delta_{ab}(\pi^x)[\Delta_{cd}(\chi^y)])\Psi(\gamma) \quad (1.18)$$

dove $\Delta_{ab}(\pi^x)[\Delta_{cd}(\chi^y)]$ rappresenta l'azione della prima derivata di loop solo sulla dipendenza dal percorso della seconda derivata, tale che guardando alle ultime due relazioni si arriva a

$$[\Delta_{ab}(\pi^x), \Delta_{cd}(\chi^y)] = \Delta_{ab}(\pi^x)[\Delta_{cd}(\chi^y)] \quad (1.19)$$

da cui si ha l'antisimmetria di

$$\Delta_{ab}(\pi^x)[\Delta_{cd}(\chi^y)] = -\Delta_{cd}(\chi^y)[\Delta_{ab}(\pi^x)]. \quad (1.20)$$

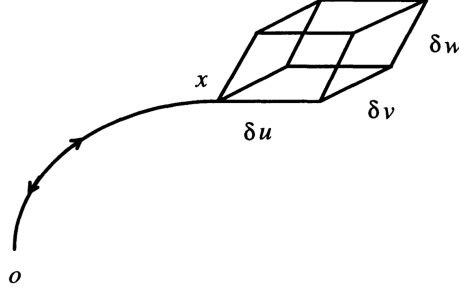


Figura 1.3: Il loop per ricavare l'identità di Bianchi.

Da queste espressioni possiamo evidenziare la dipendenza dal percorso della derivata di loop, nel senso che essi esprimono la variazione della derivata quando il percorso stesso è variato. Queste operazioni possono essere viste sotto un'altra luce. Introduciamo un operatore dipendente dal loop $U(\alpha)$ nello spazio delle funzione dei loop che ha effetto di dare una deformazione finita all'argomento della funzione

$$\begin{aligned} U(\alpha)\Psi(\gamma) &\equiv \Psi(\alpha \circ \gamma) \quad \text{t.c.} \\ U(\alpha)^{-1} &= U(\alpha^{-1}), \quad U(\alpha)U(\beta)\Psi(\gamma) = U(\alpha \circ \beta)\Psi(\gamma) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Avendo definito l'operatore inverso e la legge di composizione, consideriamo ora l'azione della derivata di loop lungo un percorso deformato su una funzione di loop, applicando la definizione (1.12)

$$\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}(x)\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi^x)\right)\Psi(\gamma) = \Psi(\alpha \circ \pi^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x \circ \alpha^{-1} \circ \gamma). \quad (1.22)$$

Usiamo allora la definizione dell'operatore 1.21 per avere

$$\Psi(\alpha \circ \pi^x \circ \delta\gamma \circ \pi_x \circ \alpha^{-1} \circ \gamma) = U(\alpha)\left(1 + \frac{1}{2}\sigma^{ab}(x)\Delta_{ab}(\pi^x)\right)U(\alpha)^{-1}\Psi(\gamma) \quad (1.23)$$

da cui abbiamo l'identità

$$\Delta_{ab}(\alpha \circ \pi^x) = U(\alpha)\Delta_{ab}(\pi^x)U(\alpha)^{-1}, \quad (1.24)$$

che esprime la proprietà di trasformazione della derivata di loop sotto trasformazioni finite del suo percorso.

Identità di Bianchi

Quest'altro insieme di relazioni può essere ottenuto ancora dalle proprietà geometriche dei loop. Introduciamo le usuali identità di Bianchi, usando un nuovo operatore differenziale chiamato derivata di fine punto che agisce su funzioni di percorsi aperti [7]. Data

una funzione $\Psi(\pi^x)$, una carta di coordinate sul punto x e un vettore in quella carta u^a , definiamo l'operatore di percorso aperto o derivata di Mandelstam, considerando la variazione di una funzione quando il percorso è esteso da x a $x + \epsilon u$ dal percorso infinitesimo δu :

$$\Psi(\pi^x \circ \delta u) = (1 + \epsilon u^a D_a) \Psi(\pi^x). \quad (1.25)$$

Denotiamo il nuovo percorso come $\pi^{x+\epsilon u}$. Inoltre, si può facilmente notare che, per la legge del quoziente dei tensori, D_a trasforma come una 1-forma.

Avendo introdotto l'operatore deriviamo l'identità di Bianchi, consideriamo un loop sottile ι , rappresentato da una forma infinitesima di cubo con lati $\delta u, \delta v, \delta w$ connessi dal percorso π^x , mostrato in Fig.1.3. Notando che le curve infinitesime rappresentano a tutti gli effetti un prolungamento di un infinitesimo tale che lo scriviamo come $\pi^{x+\epsilon u}$. Essendo, poi, ι indistinguibile dal loop identità possiamo avere che $\Psi(\gamma) = \Psi(\iota \circ \gamma) \quad \forall \gamma$. Esplicitamente si ha

$$\begin{aligned} \iota = & \pi^x \circ \delta u \delta v \delta u \delta \bar{u} \delta \bar{u} \circ \pi_x \circ \pi^x \circ \delta u \delta w \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_x \\ & \circ \pi^x \circ \delta w \delta \bar{u} \delta \bar{u} \delta \bar{u} \circ \pi_x \circ \pi^x \circ \delta w \delta w \delta \bar{v} \delta \bar{v} \circ \pi_x \\ & \circ \pi^x \circ \delta v \delta w \delta \bar{u} \delta \bar{u} \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_x \circ \pi^x \circ \delta v \delta w \delta \bar{v} \delta \bar{v} \delta \bar{u} \circ \pi_x \end{aligned} \quad (1.26)$$

Notando che questo ι è formato da sei loop infinitesimi connessi dal percorso, scriviamo l'ultima identità in termini della derivata di loop

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma) = & (1 + \epsilon_2 \epsilon_3 v^a w^b \Delta_{ab}(\pi^{x+\epsilon_1 u})) (1 + \epsilon_1 \epsilon_3 u^c w^d \Delta_{cd}(\pi^x)) \\ & (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 u^e v^f \Delta_{ef}(\pi^{x+\epsilon_3 w})) (1 + \epsilon_3 \epsilon_2 w^s w^d \Delta_{gh}(\pi^x)) \\ & (1 + \epsilon_3 \epsilon_1 w^i u^j \Delta_{ij}(\pi^{x+\epsilon_2 v})) (1 + \epsilon_2 \epsilon_1 v^i \Delta_{kl}(\pi^x)) \Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Raccogliendo i termini al solo primo ordine e applicando la definizione (1.25), notando che i vettori u, v, w sono arbitrari avremo le identità di Bianchi

$$D_a \Delta_{bc}(\pi^x) + D_b \Delta_{ca}(\pi^x) + D_c \Delta_{ab}(\pi^x) = 0. \quad (1.28)$$

Identità di Ricci

Consideriamo l'azione di quattro derivate di Mandelstam lungo i vettori u, v su una funzione di un percorso aperto $\Psi(\pi^x)$. Mantenendo i termini al primo ordine otteniamo i termini

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon_1 u^a D_a) (1 + \epsilon_2 v^b D_b) (1 - \epsilon_1 u^c D_c) (1 - \epsilon_2 v^d D_d) \Psi(\pi^x) = \\ (1 + \epsilon_1 \epsilon_2 u^a v^b [D_a, D_b]) \Psi(\pi^x). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Questo è equivalente ad aggiungere un loop infinitesimo alla fine di un percorso tale che possiamo riscriverlo in termini della derivata di loop per la funzione $\Psi(\pi^x \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_x \circ \pi^x)$, ottenendo

$$[D_a, D_b] \Psi(\pi^x) = \Delta(\pi^x) \Psi(\pi^x) \quad (1.30)$$

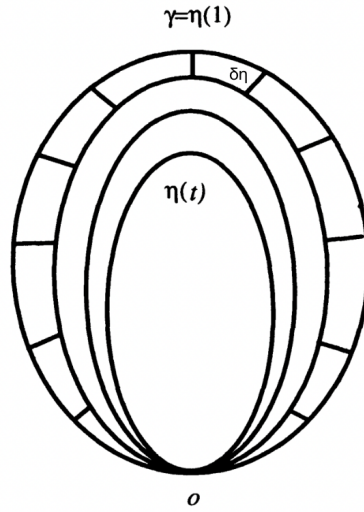


Figura 1.4: La costruzione di un loop finito a partire dalla derivata di loop. Le curve $\delta\eta_i$ sono determinate da due elementi nella famiglia di curve $\eta(t)$.

L'espressione è evidentemente analoga a quella del commutatore per le derivate covarianti in termini della curvatura.

Generatori del gruppo dei loop

Mostriamo, adesso, come, con la sovrapposizione di derivate di loop, generare ogni loop finito omotopico alla identità. Introduciamo una parametrizzazione per dimostrarlo, sia $\gamma(s)$ una curva parametrizzata appartenente alla classe di equivalenza che definisce il loop finito γ tale che $s \in [0, 1]$. Si consideri una famiglia di loop parametrizzati $\eta(s, t)$ interpolando in modo liscio tra $\gamma(s)$ e il loop identità, tale che $\eta(s, 0)$ è nella classe di equivalenza della identità, e $\eta(s, 1) = \gamma(s)$. Nei seguenti passaggi dimostrativi si ometterà la dipendenza da s ove non necessario.

Consideriamo le curve $\eta(s, 1)$, $\eta(s, 1 - \epsilon)$, esse differiscono di un infinitesimo elemento di area. La dimostrazione esposta di seguito consiste nel ricoprire questa area infinitesima che separa le due curve, tale che lungo esse possiamo definire una derivata di loop (avendo identificato proprio n curve chiuse tra le due curve). Esprimiamo, ora, la curva

$$\gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \eta(s, 1 - \epsilon) \circ \delta\eta_1 \circ \cdots \circ \delta\eta_n, \quad (1.31)$$

dove $\delta\eta_i$ sono quelli⁵ mostrati in figura 1.4. Possiamo ora scrivere, espandendo al primo

⁵Si noti bene che, analiticamente, l'aumento di n è correlato strettamente alla diminuzione di ϵ , che garantisce che le curve $\delta\eta_i$ diventino sempre più piccole e l'approssimazione della curva $\gamma(s) = \eta(s, 1)$ sia precisa.

ordine e usando la definizione (1.12),

$$\Psi(\eta(1)) = \Psi(\eta(1 - \epsilon)) + \epsilon \int_0^1 ds \dot{\eta}^a(1 - \epsilon, s) \eta'^b(1 - \epsilon, s) \Delta_{ab}(\eta(1 - \epsilon)_o^s) \Psi(\eta(1 - \epsilon)), \quad (1.32)$$

dove $\dot{\eta}(t, s) \equiv d\eta(t, s)/ds$ e $\eta'(t, s) \equiv d\eta(t, s)/dt$ (essi rappresentano proprio gli elementi d'area infinitesima). Passeremo da $\eta(1 - \epsilon, s)$, aumentando il parametro n , per arrivare a $\eta(0)$, iterando la stessa costruzione per arrivare alla forma completa esponenziale, ordinata t .

$$\Psi(\eta(1)) = T \exp \left(\int_0^1 dt \oint_0^1 ds \dot{\eta}^a(t, s) \eta'^b(t, s) \Delta_{ab}(\eta(t)^s) \Psi(\eta(0)) \right) \quad (1.33)$$

dove l'integrale nell'esponenziale è detto T-ordinato (data la natura non abeliani dei loop). L'espressione data è il risultato di un processo iterativo non banale, che, oltre che mostrare la versione loop del teorema di Stokes non abeliano [8], rende evidente che la derivata di loop è un generatore dello spazio dei loop, tale che consente di generare ogni loop finito omotopo alla identità.

Notiamo che l'espressione per l'elemento finito del gruppo coinvolge la sovrapposizione di infiniti numeri di generatori associati a diversi percorsi, che esprime una situazione totalmente diversa da quella data dalla struttura del gruppo di Lie. Sappiamo bene che date le equazioni di struttura di un gruppo di Lie, che determinano un numero finito di generatori, per cui basta prendere l'esponenziale dei generatori per esprimere ogni elemento del gruppo; al contrario, qui è evidentemente differente, dato che non possiamo definire un numero non intero di potenze di $\delta\eta$. Identificando, infine, la derivata di loop come generatore del gruppo dei loop, grazie all'espressione (1.33), possiamo riscrivere le relazioni di commutazione della derivata di loop

$$[\Delta_{ab}(\pi^x), \Delta_{cd}(\chi^y)] = \lim_{\epsilon_i \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma^{ab}} (\Delta_{cd}(\delta\eta_1 \circ \chi^y) - \Delta_{cd}(\chi^y)). \quad (1.34)$$

Si noti che l'espressione può essere ottenuta facilmente uguagliando la (1.16) e (1.17), prendendone il limite, con le dovute semplificazioni.

1.4 La derivata di connessione

Abbiamo visto nella sezione precedente le proprietà dell'operatore della derivata di loop che ricalcano quelle dell'operatore di curvatura o tensore di campo nel contesto delle teorie di Gauge.

Introduciamo in questo contesto un altro operatore differenziale fondamentale nel contesto della definizione di una teoria di Gauge. Questo operatore appare naturalmente nella costruzione di teorie di gauge usando il gruppo dei loop, anche se essa può essere formulata totalmente in termini della derivata di loop dipendente dal percorso.

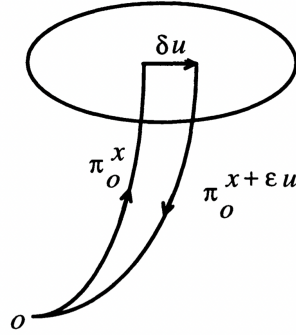


Figura 1.5: Il percorso che definisce la derivata di connessione. Si assume che il punto di origine sia nella stessa carta di coordinate.

Consideriamo un ricoprimento di una varietà con una regione di coordinate su essa disposta. Attribuiamo a ogni regione di coordinate \mathcal{P}^i un percorso π^{y_i} , dall'origine al punto generico $y_i \in \mathcal{P}^i$. Introduciamo anche una funzione continua con supporto sui punti della carta di coordinate tale che associ ad ogni punto x sulla carta un percorso π_x^x . Dato un vettore u in x , la derivata di connessione di una funzione continua $\Psi(\gamma)$ sarà ottenuta dal considerare la deformazione del loop dato dal percorso $\pi^{y_i} \circ \pi_{y_i}^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}^{y_i} \circ \pi_{y_i}$ in figura 1.5. Diremo, dunque, che la derivata di connessione esiste ed è ben definita se la funzione di loop del loop deformato ammette una espansione in termini di ϵu^a

$$\Psi(\pi^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u} \circ \gamma) = (1 + \epsilon u^a \delta_a(x)) \Psi(\gamma) \quad (1.35)$$

dove si è indicato $\pi^{y_i} \circ \pi_{y_i}^x$ con π^x e viceversa per l'altra curva. La definizione, adesso, può essere estesa immediatamente per funzioni su percorsi aperti, come è stato fatto per la derivata di loop. Il nome di quest'ultima non verrà distinto da quella sui loop, il contesto determinerà univocamente a quale derivata ci stiamo riferendo.

Notiamo che la deformazione introdotta nella figura 1.4 sarebbe stata potuta generare da applicazioni di successive derivate di loop. Questo implica che ogni funzione che è loop differenziabile dovrebbe essere differenziabile rispetto alla connessione, tale che possiamo stabilire una naturale relazione tra i due operatori. Notiamo anzitutto che la seguente dimostrazione ci condurrà ad avere la stessa forma della relazione nota tra connessione e curvatura (o potenziale vettore e campo) nelle teorie di Gauge [10].

Consideriamo la seguente identità nello spazio dei loop, mostrata in fig.1.6

$$\begin{aligned} \delta\gamma &\equiv \pi^x \circ \delta u \delta v \delta \bar{u} \delta \bar{v} \circ \pi_x = \\ &= \pi^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u} \circ \pi^{x+\epsilon u} \circ \delta v \circ \pi_{x+\epsilon_1 u + \epsilon_2 v} \circ \pi^{x+\epsilon_1 u + \epsilon_2 v} \circ \delta \bar{u} \circ \pi_{x+\epsilon_2 v} \circ \pi^{x+\epsilon_2 v} \circ \delta \bar{v} \circ \pi_x. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Notiamo che il primo membro è la stessa struttura di percorso usato per definire la derivata di loop, mentre il seconda ha quella di derivata di connessione. Questo implica la seguente identità tra i due operatori differenziali,

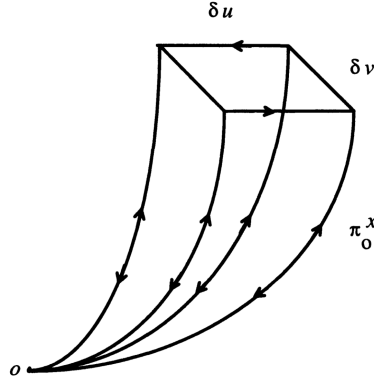


Figura 1.6: Il percorso che definisce la relazione tra derivata di connessione e derivata di loop.

$$(1 + \epsilon_1 \epsilon_2 u^a v^b \Delta_{ab}(\pi^x)) \Psi(\gamma) = (1 + \epsilon_1 u^a \delta_a(x)) (1 + \epsilon_2 v^b \delta_b(x + \epsilon_1 u)) \times (1 - \epsilon_1 u^c \delta_c(x + \epsilon_1 u + \epsilon_2 v)) (1 - \epsilon_2 v^a \delta_a(x + \epsilon_2 v)) \Psi(\gamma). \quad (1.37)$$

Riscrivendo la relazione tenendola al primo ordine per $\epsilon_1 \epsilon_2$, si avrà

$$\Delta_{ab}(\pi^x) = \partial_a \delta_b(x) - \partial_b \delta_a(x) + [\delta_a(x), \delta_b(x)]. \quad (1.38)$$

Si è ottenuto la derivata di loop per il percorso π^x in relazione con la derivata di connessione [2]. Questo implica che questa derivata di loop soddisferà tutte le relazioni descritte nella sezione precedente, dato che è derivata da una costruzione nello stesso spazio di loop totalmente simile a quello usato per derivare le sue proprietà.

Nelle teorie di gauge la connessione, è detto essere gauge dipendente, ossia non è univocamente determinato. In uno spazio di loop una connessione si manifesta come tale attraverso la scelta di certi percorsi usati per calcolare la derivata di connessione.

Consideriamo una derivata di connessione nel punto x e due percorsi dall'origine al punto, dati da due funzioni $\pi^x = f(x)$ e $\chi^x = g(x)$. Consideriamo due percorsi equivalenti nello spazio dei loop

$$\chi^x \circ \delta u \circ \chi_{x+\epsilon u} = \chi^x \circ \pi_x \circ \pi^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u} \circ \pi^{x+\epsilon u} \circ \chi_{x+\epsilon u}. \quad (1.39)$$

Introduciamo un operatore dipendente dal punto $U(x)$, costruito dall'operatore di loop di deformazione $U(\gamma)$ in sezione 1.3.2, e il loop associato al punto x , tale che $U(x) \equiv U(\chi^x \circ \pi_x)$. Questo ci porta alla identità tra gli operatori

$$(1 + \epsilon u^a \delta_a^{(x)}(x)) \Psi(\gamma) = U(x) (1 + \epsilon u^a \delta_a^{(\pi)}(x)) U^{-1}(x + \epsilon u) \Psi(\gamma). \quad (1.40)$$

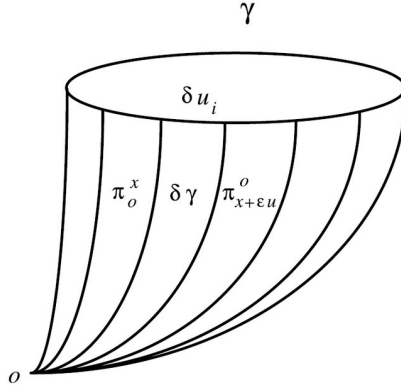


Figura 1.7: La generazione di un loop finito usando i generatori infinitesimi.

Da questo possiamo immediatamente calcolare la variazione della derivata di connessione quando variano le coordinate nel percorso,

$$\delta_a^{(x)}(x) = U(x)\delta_a^{(\pi)}(x)U(x)^{-1} + U(x)\partial_a U(x)^{-1}, \quad (1.41)$$

che rappresenta una analoga legge di trasformazione per una connessione di gauge sotto cambio del gauge.

Questa relazione è una espressione del fatto che generatori infinitesimi associati con la connessione permettono di costruire loop finiti [9]. Si possono usare incrementi infinitesimi generati dalla derivata di connessione per costruire un loop. L'espressione di quanto detto, nello spazio dei loop, è

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta\gamma_1 \circ \delta\gamma_2 \circ \dots \circ \delta\gamma_n, \quad (1.42)$$

dove, infatti, $\delta\gamma_i = \pi^{x_i} \delta u_i \pi_{x_i + \epsilon u_i}^o$ ⁶. Questa relazione, poi, connette l'operatore di deformazione con la derivata di connessione,

$$U(\gamma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^a}{k} \delta_a(x_1)\right) \times \left(1 + \frac{(x_3 - x_2)^a}{k} \delta_a(x_2)\right) \dots \left(1 + \frac{(x_{k+1} - x_k)^a}{k} \delta_a(x_k)\right). \quad (1.43)$$

Da questa espressione, avendo usato le proprietà dell'operatore mostrate in sezione 1.3.2 per ottenere l'espressione di $U(\delta\gamma_i)$, possiamo ricavare la forma di un esponenziale di

⁶si è diviso il percorso in segmenti uguali, evitando di esprimere ϵu^a , ma nel modo in cui è scritta l'espressione

percorso ordinato, scritta come

$$U(\gamma) = \text{Pexp} \left(\int_{\gamma} dy^a \delta_a(y) \right). \quad (1.44)$$

Ancora una volta questo ci riporta una espressione già vista nelle teorie di gauge, ossia l'olonomia in termini dell'esponenziale di percorso ordinato di una connessione $\delta_a(y)$, come 1-forma di gauge con valori nell'algebra dei loop \mathcal{L}_o .

1.5 Derivata di contatto e derivata funzionale

Nei precedenti paragrafi sono stati introdotti degli operatori e caratteristiche tipiche del gruppo dei loop, senza alcun diretto analogo nello spazio delle curve parametrizzate. Adesso analizziamo una possibile relazione tra questi operatori e la derivata funzionale $\delta / \delta p(s)$ che agisce sui funzionali di curve parametrizzate $\Psi[p(s)]$. L'operatore che ci permette di fare questo collegamento è la cosiddetta derivata di contatto $\mathcal{C}_a(x)$, che, come vedremo nell'ultimo capitolo, giocherà un ruolo fondamentale nella costruzione di una teoria invariante per diffeomorfismi.

Definiamo la derivata di contatto di una funzione di loop come

$$\mathcal{C}_a(x)\Psi(\gamma) = \oint_{\gamma} dy^b \delta(x-y) \Delta_{ab}(\gamma^y) \Psi(\gamma). \quad (1.45)$$

Può essere considerata come la proiezione della derivata di loop sulla tangente del loop γ stesso,

$$X^a(x, \gamma) = \oint_{\gamma} dy^a \delta(x-y). \quad (1.46)$$

Evidenziamo una importante proprietà: la derivata di contatto è generatrice di diffeomorfismi su funzioni di loop. Adesso, dato un diffeomorfismo infinitesimo $x \rightarrow x'^a = x^a + \epsilon u^a$, l'espressione per $\Psi(\gamma'_\epsilon)$, dove il loop considerato è quello ottenuto trascinando γ col diffeomorfismo, è data da

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma'_\epsilon) &= (1 + \epsilon \int d^3x u^a(x) \mathcal{C}_a(x)) \Psi(\gamma) \\ &= (1 + \epsilon \oint_{\gamma} dy^b u^a(y) \Delta_{ab}(\gamma^y)) \Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Dimostriamo adesso che \mathcal{C}_a è un generatore di diffeomorfismi, ossia soddisfa la corrispondente algebra

$$\left[\int d^3x N^a(x) \mathcal{C}_a(x), \int d^3y M^a(y) \mathcal{C}_a(y) \right] = \int d^3x \mathcal{L}_{\vec{M}} N^a(x) \mathcal{C}_a(x), \quad (1.48)$$

dove N^a ed M^a sono campi vettoriali arbitrari su una varietà tridimensionale.

Iniziamo un calcolo che sarà utile nella dimostrazione, ossia valutiamo l'azione della derivata di loop su una derivata di contatto,

$$\begin{aligned} (1 + \frac{1}{2}\sigma^{cd}\Delta_{cd}(\gamma^z)) \int_{\gamma} dy^a \delta(y-x) \Delta_{ab}(\gamma^y) \Psi(\gamma) := \\ \int_{\delta\gamma_z \circ \gamma} dy^a \delta(y-x) \Delta_{ab}((\delta\gamma_z \circ \gamma)^y) \Psi(\delta\gamma_z \circ \gamma). \end{aligned} \quad (1.49)$$

In questa espressione $\delta\gamma_z$ è il loop infinitesimo aggiunto a γ tramite un percorso dall'origine fino al punto z . Dunque, ciò che si è ottenuto è l'azione di una deformazione infinitesima di area che agisce su una derivata di contatto.

Adesso, espandendo il lato destro di quest'ultima uguaglianza, e riscrivendola usando le derivate di Mandelstam,

$$\Delta_{ab}(\gamma^{z+u}) = (1 + u^c D_c) \Delta_{ab}(\gamma^z), \quad (1.50)$$

$$\Delta_{ab}(\gamma^{z+u+v}) = (1 + v^d D_d)(1 + u^c D_c) \Delta_{ab}(\gamma^z), \quad (1.51)$$

$$\delta(z+u-x) = (1 + u^a \partial_a) \delta(z-x). \quad (1.52)$$

otteniamo una espressione combinata, dove osserviamo il contributo della derivata di loop [2], avendo eliminato i termini di ordine superiore,

$$\begin{aligned} \Delta_{cd}(\gamma_z) \oint_{\gamma} dy^a \delta(x-y) \Delta_{ab}(\gamma^y) \Psi(\gamma) = \\ 2(\partial_{[c} \delta(z-x) \Delta_{d]b}(\gamma^z) + \delta(z-x) D_{[c} \Delta_{d]b}(\gamma^z)) \Psi(\gamma) \\ + \oint_{\gamma} dy^a \Theta(y-z) \delta(y-x) \Delta_{cd}(\gamma^z) [\Delta_{ab}(\gamma^y)] \Psi(\gamma) \\ + \oint_{\gamma} dy^a \delta(y-x) \Delta_{cd}(\gamma^z) \Delta_{cd}(\gamma^y) \Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (1.53)$$

In questo modo possiamo calcolare l'azione di due diffeomorfismi,

$$\begin{aligned} C(\vec{N}) C(\vec{M}) \Psi(\gamma) = \int d^3 w N^d(w) \oint_{\gamma} dz^c \delta(w-z) \Delta_{cd}(\gamma^z) \\ \cdot \int d^3 x M^b(x) \oint_{\gamma} dy^a \delta(y-x) \Delta_{ab}(\gamma^y) \Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Espandendo, così, questa espressione per i due diffeomorfismi di campi vettoriali. otterremo sei termini, che ricombinati ci danno la corretta espressione di $C(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{M})$, mostrata nella relazione (1.48). I calcoli, per brevità e semplicità sono stati omessi.

Si conclude mostrando la relazione tra la derivata di contatto e l'usuale derivata funzionale. Possiamo, anzitutto, scrivere l'espressione $\int d^3x u^a(x)\mathcal{C}_a$ in termini di curve parametrizzate

$$\int d^3x u^a(x)\mathcal{C}_a(x) = \oint_0^1 ds u^a(p(s)) \frac{\delta}{\delta p^a(s)}, \quad (1.55)$$

dove $p(s)$ è una delle curve parametrizzate nella classe di equivalenza dei loop γ . Lo si nota se consideriamo γ classe di equivalenza delle curve $[p^a(s)]$, tale che $\Psi(\gamma') = \Psi[p^a(s) + \epsilon u^a(p(s))]$. Allora possiamo affermare,

$$\mathcal{C}_a(x) = \oint ds \delta(x - p(s)) \frac{\delta}{\delta p(s)^a}, \quad (1.56)$$

che mette in relazione le due derivate. E' chiaro ed evidente notare che queste espressioni si equivalgono solo quando agiscono su funzioni di loop, essendo che la derivata funzionale agisce su funzioni di curve parametrizzate, su cui la derivata di contatto non è propriamente definita. Dunque, l'uguaglianza tra la derivata funzionale e quella di contatto è garantita nel contesto delle funzioni dei loop, ovvero le funzioni che dipendono dalla forma globale del loop piuttosto che dalla specifica parametrizzazione delle curve che lo compongono. Questo significa che per qualsiasi funzione che dipende solo dalla topologia del loop, possiamo trattare le derivate funzionali e di contatto come equivalenti. Questa uguaglianza, poi, è particolarmente utile nelle teorie di gauge e nella rappresentazione dei loop dove le funzioni di loop giocano un ruolo cruciale come vedremo successivamente.

1.6 Rappresentazione del gruppo dei loop

Nelle sezioni precedenti abbiamo mostrato le relazioni tra i generatori del gruppo dei loop, indipendenti in generale da una particolare rappresentazione. Studiamo in particolare la loro forma in un contesto di una particolare rappresentazione in termini di un dato gruppo di gauge. Ricordiamo che questo è essenzialmente un gruppo di Lie che rappresenta simmetrie locali nelle teorie di gauge, come fa la teoria di Yang-Mills [11].

Le teorie di gauge sorgono come rappresentazioni, omomorfismi, del gruppo dei loop su un certo gruppo di gauge G .

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : \mathcal{L}_o &\rightarrow G \quad t.c. \\ \gamma &\rightarrow H(\gamma), \end{aligned} \quad (1.57)$$

tale che $H(\gamma_1)H(\gamma_2) = H(\gamma_1 \circ \gamma_2)$.

Assumiamo di considerare uno specifico gruppo di Lie, ossia $SU(N)$ con $N^2 - 1$ generatori X^i tale che $Tr X^i = 0$ e

$$[X^i, X^j] = C_k^{ij} X^k, \quad (1.58)$$

dove C_k^{ij} sono le costanti di struttura del gruppo. Assumeremo che questa rappresentazione sia loop differenziabile, perché se così non fosse non avremmo di fronte delle olonomie come già definito, ma delle olonomie generalizzate. In questo modo otterremo la solita struttura degli oggetti associati alle teorie di gauge, ma nel linguaggio dei loop.

Calcoliamo l'azione della derivata di connessione in questa rappresentazione

$$(1 + \epsilon u^a \delta_a(x))H(\gamma) = H(\pi^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u} \circ \gamma) = H(\pi^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u})H(\gamma). \quad (1.59)$$

Essendo il loop nella prima olonomia vicini alla identità, considerata la topologia dello spazio dei loop, ed essendo H continua e differenziabile,

$$H(\pi^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u}) = 1 + i\epsilon u^a A_a(x), \quad (1.60)$$

dove $A_a(x)$ è un elemento della algebra del gruppo, ossia in quella considerata $A_a(x) = A_a^i X^i$. Allora possiamo concludere

$$\delta_a(x)H(\gamma) = iA_a(x)H(\gamma). \quad (1.61)$$

Seguendo lo stesso ragionamento possiamo ottenere l'azione della derivata di loop,

$$\Delta_{ab}(\pi^x)H(\gamma) = iF_{ab}(x)H(\gamma), \quad (1.62)$$

dove F_{ab} è un campo tensoriale antisimmetrico.

Ricordando che il percorso è quello che determina la trasformazione di gauge, supponiamo di cambiare il percorso $\pi^x \rightarrow \pi'^x = \pi'^x \circ \pi_x \circ \pi^x$. Usando l'equazione di trasformazione, il campo trasforma come

$$F'_{ab} = H(x)F_{ab}(x)H(x)^{-1}, \quad (1.63)$$

dove $H(x) = H(\pi'^x \circ \pi_x)$. Da qui arriviamo alla usuale relazione che definisce la curvatura in termini del potenziale,

$$F_{ab}(x) = \partial_a A_b(x) - \partial_b A_a(x) + i[A_a, A_b]. \quad (1.64)$$

Arriviamo così alle trasformazioni di gauge in termini della connessione da (1.41),

$$A_a(x)' = H(x)A_a(x)H(x)^{-1} - iH(x)\partial_a H(x)^{-1}. \quad (1.65)$$

Consideriamo nuovamente l'operatore di deformazione $U(\gamma)$ introdotto in sezione 1.3.2,

$$U(\eta)H(\gamma) = H(\eta \circ \gamma) = H(\eta)H(\gamma). \quad (1.66)$$

Applicando la eq.(1.44)

$$U(\eta)H(\gamma) = \text{P exp} \left(\oint_{\eta} dy^a \delta_a(y) \right) H(\gamma), \quad (1.67)$$

e sostituendo con la relazione 1.61

$$H(\eta) = \text{P exp} \left(i \oint_{\eta} dy^a A_a(y) \right), \quad (1.68)$$

mostra l'usuale rappresentazione dell'olonomia in termini della connessione.

Mostriamo adesso che l'uso di percorsi aperti è naturalmente connesso con i campi materiali accoppiati alle teorie di gauge. Consideriamo campi materiali che trasformano sotto rappresentazioni fondamentali del gruppo di gauge considerato $SU(N)$. Infatti, basta prendere la rappresentazione introdotta all'inizio della sezione nel caso di percorsi, ossia

$$\Psi(\gamma \circ \pi^x) \equiv H(\gamma)\Psi(\pi^x). \quad (1.69)$$

Il ruolo della scelta del percorso è ciò che determina la trasformazione di gauge. Le funzioni Ψ diventano funzioni di punti etichettate da un percorso fissato usato per determinare $\Psi^{(\pi)}(x)$. Vediamo, infine che la funzione trasforma in base al percorso in questo modo

$$\Psi^{(\pi')}(x) = H(\pi'^x \circ \pi_x)\Psi^{(\pi)}(x). \quad (1.70)$$

In conclusione andiamo a vedere come la derivata di Mandelstam diventa l'usuale derivata covariante delle teorie di gauge [2]. Consideriamo la sua azione su un percorso aperto,

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon u^a D_a)\Psi(\pi^x) &= \Psi(\pi^x \circ \delta u) = \Psi(\pi^x \circ \delta u \circ \pi_{x+\epsilon u} \circ \pi^{x+\epsilon u}) \\ &= (1 + \epsilon u^a \delta_a(x))(1 + \epsilon u^b \partial_b)\Psi(\pi^x), \end{aligned} \quad (1.71)$$

che espandendo al primo ordine otteniamo

$$D_a \Psi(\pi^x) = \partial_a \Psi^{(\pi)}(x) + \delta_a(x)\Psi(\pi^x). \quad (1.72)$$

Usando le relazioni già introdotte in (1.61) (o dalla rappresentazione (1.30)), otteniamo la forma usuale della identità di Ricci

$$[D_a, D_b]\Psi(\pi^x) = iF_{ab}. \quad (1.73)$$

1.7 I loop di Wilson

In una teoria di gauge le quantità osservabili devono essere invarianti per gauge, allo stesso modo delle funzioni d'onda in una rappresentazione di gauge. A questo proposito è molto utile introdurre delle quantità, espresse in termini di connessioni, per cui ogni oggetto gauge invariante può essere scritto. Mostriamo adesso che esistono degli oggetti particolari, detti loop di Wilson, introdotti nel contesto della teoria quantistica dei campi

[14], che sono invarianti per piccole e grandi trasformazioni di gauge. Essi sono costruiti prendendo la traccia della ologonia,

$$W_A(\gamma) = \text{Tr}P \left[\exp \left(i \oint_{\gamma} dy^a A_a \right) \right]. \quad (1.74)$$

L'invarianza di gauge di questa quantità segue immediatamente dalle proprietà della connessione e dell'ologonia, essendo la traccia di quest'ultima invariante per deformazioni continue del percorso chiuso nel gruppo di gauge. Sono, dunque, osservabili in un senso canonico (le parentesi di Poisson rispetto ai vincoli della teoria sono nulle).

Gli oggetti sono loop dipendenti e hanno, invece, una dipendenza non locale dalla connessione di gauge. Inoltre, sono funzioni di loop senza punto base [2].

Possiamo evidenziare due fondamentali proprietà, di cui soltanto una verrà discussa: le identità di Mandelstam e le proprietà di ricostruzione. La prima è un insieme di relazioni tra loop di Wilson, che riflettono la struttura del particolare gruppo di gauge considerato. La seconda è un procedimento inverso, che permette di ricostruire tutte le informazioni gauge invarianti date le funzioni di loop di Wilson. In particolare, è una procedura che consente di costruire una ologonia dato un insieme di quantità che soddisfano le identità di Mandelstam, dimostrando, poi, che si può ottenere una ologonia da un loop di Wilson [15]. Entrambe le proprietà implicano che i loop di Wilson costituiscono una rappresentazione del gruppo dei loop. Dunque, ogni funzione invariante per gauge può essere espressa come combinazione di prodotti dei loop di Wilson.

1.7.1 Le identità di Mandelstam

Le identità di Mandelstam sono un riflesso delle proprietà del gruppo di gauge usato per definire le ologonie e le generiche proprietà delle tracce nel linguaggio dei loop di Wilson. Vedremo specialmente proprietà di gruppo, tra cui unitarietà, dimensione della rappresentazione e valore del determinante della rappresentazione matriciale. Questi permettono di esprimere il prodotto di loop di Wilson in termini di somme e prodotti, coinvolgendo un numero minore di loop di questo genere.

Consideriamo in generale gruppi di gauge che ammettono rappresentazioni fondamentali in termini di matrici $N \times N$. Si noterà, dunque, come le identità di Mandelstam emergono dalle proprietà delle tracce di queste matrici.

Vi sono due tipi di identità, chiamate del primo e del secondo tipo.

Concentriamoci sulle identità del primo tipo, che si sviluppano come conseguenza della ciclicità delle tracce (da qui in poi si ometterà la dipendenza del loop di Wilson dalla connessione),

$$W(\gamma_1 \circ \gamma_2) = W(\gamma_2 \circ \gamma_1). \quad (1.75)$$

Sono identità che valgono per ogni gruppo di gauge di ogni dimensione. Riguardo le identità del secondo tipo consideriamo una prima famiglia di vincoli non lineari che assicurano che $W(\gamma)$ sia effettivamente traccia di una matrice $N \times N$.

Osserviamo che in N dimensioni ogni oggetto con $N + 1$ indici totalmente antisimmetrici si annulla, scrivendo questa identità in maniera compatta per un numero arbitrario di termini dipendenti da k loop [2],

$$(k + 1)M_{k+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}) \equiv W(\gamma_{k+1})M_k(\gamma_1, \dots, \gamma_k) - M_k(\gamma_1 \circ \gamma_{k+1}, \gamma_2, \dots, \gamma_k) - \dots - M_k(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k \circ \gamma_{k+1}), \quad (1.76)$$

dove la quantità M_k è espressa in generale come

$$M_k(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = \frac{1}{k} [W(\gamma_1) \dots W(\gamma_k) - W(\gamma_1 \circ \dots \circ \gamma_k)]. \quad (1.77)$$

L'identità per un gruppo di matrici $N \times N$ è scritto come

$$M_{N+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_{N+1}) = 0. \quad (1.78)$$

Una conseguenza immediata della relazione (1.76), ottenuta identificando il loop $N+1$ con ι è

$$(N + 1)M_{N+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_N, \iota) = (W(\iota - N)) = M_N(\gamma_1, \dots, \gamma_N) = 0, \quad (1.79)$$

da cui si ha

$$W(\iota) = N. \quad (1.80)$$

Analizziamo un esempio quando $N = 1$, l'identità diventa:

$$W(\gamma_1)W(\gamma_2) - W(\gamma_1 \circ \gamma_2) = 0, \quad (1.81)$$

come per matrici nel gruppo $U(1)$. Inoltre, per le matrici 2×2 , possiamo espandere il prodotto di tre tracce in termini di due,

$$W(\gamma_1)W(\gamma_2)W(\gamma_3) = W(\gamma_1 \circ \gamma_2)W(\gamma_3) + W(\gamma_2 \circ \gamma_3)W(\gamma_1) \quad (1.82)$$

$$+ W(\gamma_3 \circ \gamma_1)W(\gamma_2) - W(\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3) - W(\gamma_1 \circ \gamma_3 \circ \gamma_2). \quad (1.83)$$

Infatti, i gruppi che ammettono una rappresentazione fondamentale in termini di matrici 2×2 formano loop di Wilson che soddisfano quest'ultima identità. Adesso andremo ad analizzare altre identità che riflettono altre proprietà, al di là della loro rappresentazione di natura matriciale.

Un'altra identità, considerando ancora il gruppo speciale, che ammette una rappresentazione fondamentale in termini di matrice di determinante unitario, appare immediata. Per un gruppo di questo tipo vale la seguente identità [16]:

$$M_N(\gamma_1 \circ \gamma, \gamma_2 \circ \gamma, \dots, \gamma_N \circ \gamma) = M_N(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N) \quad (1.84)$$

da cui segue banalmente che $M_N(\gamma, \gamma, \dots, \gamma) = 1$. Questo ci permette di esprimere il prodotto di N loop di Wilson in termini di $N - 1$ prendendo l'arbitrario $\gamma = \gamma_i$ per un qualche $i = 1, \dots, N$.

Per esempio per un gruppo speciale di matrici 2×2 ,

$$M_2(\gamma_1, \gamma_2) = M_2(\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}, \iota), \quad (1.85)$$

di conseguenza,

$$W(\gamma_1)W(\gamma_2) = W(\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}) + W(\gamma_1 \circ \gamma_2). \quad (1.86)$$

Infine, discutiamo le identità di Mandelstam del secondo tipo che riflettono l'unitarietà del gruppo. Se il gruppo ammette una rappresentazione fondamentale in termini di matrici unitarie $N \times N$, allora i loop di Wilson soddisfano

$$W(\gamma) = W^*(\gamma^{-1}), \quad (1.87)$$

dove il segno $*$ indica il complesso coniugato.

In generale, i loop di Wilson soddisfano una serie di disuguaglianze. Ad esempio, per gruppi unitari, vale

$$|W(\gamma)| \leq |W(\iota)| = N. \quad (1.88)$$

Si conclude riassumendo le identità di Mandelstam per il gruppo $SU(2)$, che verrà usato anche nei capitoli successivi.

Identità del primo tipo,

$$W(\gamma_1 \circ \gamma_2) = W(\gamma_2 \circ \gamma_1). \quad (1.89)$$

Identità del secondo tipo,

$$W(\gamma_1)W(\gamma_2) = W(\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}) + W(\gamma_1 \circ \gamma_2). \quad (1.90)$$

Da cui, banalmente, proviamo che scegliendo $\gamma_1 = \iota$,

$$W(\gamma) = W(\gamma^{-1}), \quad (1.91)$$

e da questo e dalla proprietà di unitarietà segue che $W(\gamma)$ è reale e minore uguale a due in valore assoluto.

1.8 La rappresentazione a loop

Da quanto espresso nella precedente sezione è immediato costruire una rappresentazione quantistica puramente in termini di loop. In questo contesto sono state introdotti due strumenti matematici atti a definire una rappresentazione quantistica per teorie di gauge di loop. La prima è una trasformazione definita tra connessione e rappresentazione a

loop, che permette di convertire ogni operatore gauge invariante, o funzione d'onda, in un oggetto corrispondente nella rappresentazione a loop. Il secondo è una procedura più complessa, ma pari allo stesso modo, che riguarda l'introduzione di un'algebra di quantità parametrizzate da loop, come primo passo per essere usati nella procedura di quantizzazione di Dirac. In questo testo sarà analizzata unicamente la rappresentazione a loop usando un approccio di trasformazioni.

L'obbiettivo sarà quello di costruire una nuova rappresentazione del sistema applicando i concetti che useremo per costruire la rappresentazione a loop.

Consideriamo un sistema quanto meccanico, dove indichiamo $W_k = e^{ikx}$ una base di stati parametrizzati da variabile continua k . Ogni funzione d'onda può essere espansa in termini della base, tale che possiamo introdurre una rappresentazione nello spazio degli impulsi come, data funzione d'onda $\Psi(x)$

$$\Psi(y) \equiv \int dx W_k^*(x) \Psi(x). \quad (1.92)$$

Inoltre, ogni operatore nella rappresentazione della posizione \hat{O}_x con un ordine specifico nelle variabili canoniche, che agisce sulle funzioni d'onda $\Psi(x)$ può essere tradotto in una rappresentazione nello spazio degli impulsi

$$\hat{O}_y \Psi(y) \equiv \int dx W_k^*(x) \hat{O}_x \Psi(x) = \int dx (\hat{O}_x^\dagger W_k(x))^* \Psi(x). \quad (1.93)$$

Consideriamo adesso una teoria di gauge in tre dimensioni (ossia $SU(2)$) descritta dalle coordinate canoniche A_a , la connessione, e E^a , densità del momento, con le usuali parentesi di Poisson. Dal punto di vista quanto meccanico, consideriamo funzioni d'onda dipendenti dalla connessione, $\Psi[A]$. Una base di stati, come mostrato alla fine della precedente sezione, può essere data dai loop di Wilson $W_\gamma[A]$. La base è parametrizzata da parametri continui, in questo caso il loop γ .

Possiamo definire una rappresentazione a loop in termini di una trasformazione

$$\Psi(\gamma) = \int dA W_\gamma[A]^* \Psi[A]. \quad (1.94)$$

Possiamo trasformare ogni operatore usando questa trasformazione, che, però, è qui usata in senso formale, e non è ben definita come quella di Fourier. Notiamo, inoltre, che l'introduzione della trasformata di loop può essere pensata come prodotto interno in rappresentazione in termini della connessione, tra una funzione d'onda $|\Psi\rangle$ e gli elementi della base $\langle \gamma|$. Allora,

$$\Psi(\gamma) = \langle \gamma | \Psi \rangle = \int dA \langle \gamma | A \rangle \langle A | \Psi \rangle, \quad (1.95)$$

ossia significa che avere una trasformazione ben definita è equivalente ad avere un prodotto interno nella rappresentazione in termini della connessione $\int dA |A\rangle \langle A| = 1$.

Infine, non è necessariamente vero che per un gruppo di gauge i singoli loop di Wilson sono basi di funzioni gauge invarianti, ma bisogna invece considerare il prodotto di loop di Wilson. Questo verrà analizzato nella sezione seguente.

1.8.1 La trasformazione di loop

Abbiamo visto che in questo modo la trasformata di loop coinvolge un integrale funzionale nello spazio delle connessioni, nel contesto delle trasformazioni di gauge. Questo lo rende ancora più adatto ad un contesto dei gruppi di gauge, rispetto alle trasformazioni di Fourier nel contesto della meccanica quantistica ordinaria. La sua formulazione matematica precisa è stata formulata da Ashtekar ed altri, soltanto anni successivi rispetto al suo primo uso nel contesto della gravità quantistica a loop [17].

In questa sezione viene data una introduzione euristica della formulazione matematica. L'idea chiave che permette di definire la misura dell'integrazione su spazi non lineari delle connessioni delle trasformazioni di gauge è quella di usare i loop di Wilson come operatori di proiezione. Questo, di conseguenza, permette di dare una definizione delle cosiddette "misure cilindriche", che riducono l'integrale infinito dimensionale ad un finito insieme di integrali sul gruppo di gauge. Richiedendo, poi, la consistenza delle varie proiezioni si finisce con una teoria della integrazione in spazi infinito dimensionali, come il campo scalare di Klein-Gordon.

Si consideri un campo scalare ϕ in uno spazio tempo piatto. Lo spazio delle configurazioni sarà l'insieme di tutti i campi lisci in una varietà spaziale che va opportunamente all'infinito. Gli stati quantistici in questo caso sono funzioni sullo spazio delle classiche configurazioni $\Psi(\phi)$. L'obiettivo sarà quello di introdurre un prodotto interno, il cui integrale varia nello spazio delle configurazioni, introducendo una misura μ adatta per eseguire l'integrale.

Consideriamo delle funzioni particolari nello spazio delle fasi. Introduciamo dei funzionali F definiti da delle funzioni $f(x)$ della varietà spaziale, di cui facciamo la convoluzione con le configurazioni classiche

$$F_f(\phi) \equiv \int d^3x f(x)\phi(x), \quad (1.96)$$

richiediamo anche che $f(x)$ abbia regolarità e un certo andamento tale che l'integrale sia ben definito. Adesso si può introdurre la definizione di funzioni cilindriche.

Sia V_n un sottospazio finito dimensionale dello spazio di Schwartz, e sia una base di funzioni in questo spazio (e_1, \dots, e_n) . Data una classica configurazione $\phi(x)$, si definisce la sua proiezione nel sottospazio finito dimensionale che porta a un insieme di n elementi $(F_{e_1}(\phi), \dots, F_{e_n}(\phi))$.

Definizione 1.14. Una funzione nello spazio di configurazioni classico è detta cilindrica rispetto a V_n se la sua dipendenza dalle configurazioni classiche è proprio data attraverso

l'insieme degli n elementi appena introdotti, per qualche insieme di e_i . Dunque una certa $g(\phi)$ è cilindrica se

$$g(\phi) = G(F_{e_1}(\phi), \dots, F_{e_n}(\phi)), \quad (1.97)$$

per qualche funzione di n variabili reali G .

Una misura cilindrica μ è una misura che permette di integrare funzioni cilindriche, che deve essere definita da una famiglia consistente di misure. Le misure $\{\mu_{e_1, \dots, e_n}\}$ sono ognuna definita su uno spazio finito dimensionale \mathbb{R}^n associata a ogni base di vettori (e_1, \dots, e_n) . Grazie a queste misure l'integrale di funzioni cilindriche è semplicemente definito come un integrale su \mathbb{R}^n ,

$$\int D_\mu(\phi)g(\phi) = \int G(x_1, \dots, x_n)D_{\mu_{e_1, \dots, e_n}(x_1, \dots, x_n)}. \quad (1.98)$$

In generale questa espressione deve essere ben definita per ogni insieme V_n scelto. Di conseguenza, questo restringe ancora il campo delle misure da usare, e impone di usare delle condizioni di consistenza ulteriori.

Si consideri, in primis, il caso di funzioni cilindriche rispetto a due sottospazi disgiunti V_n, V'_m . Le funzioni devono essere necessariamente costanti, allora gli integrali di queste costanti con μ_{e_1, \dots, e_n} e $\mu_{e'_1, \dots, e'_n}$ devono essere gli stessi; abbiamo così fissato la prima condizione di normalizzazione per le misure.

Ora, in secundis, si prenda la funzione $g(\phi)$ cilindrica rispetto ai due sottospazi $V_n \subset V'_m$. Una tale funzione è associata per definizione a due funzioni di n ed m variabili $G(x_1, \dots, x_n)$ e $G'(x_1, \dots, x_m)$. Essendo la base di V_n una combinazione lineare della base di V'_m si può dare una precisa relazione tra le funzioni G e G' . Essendo che gli integrali delle due funzioni con le due diverse misure devono essere uguali, questo impone un'ulteriore condizione di consistenza sugli elementi della famiglia $\{\mu_{e_1, \dots, e_n}\}$.

Questa struttura matematica così definita è applicabile immediatamente per teorie abeliane di ogni tipo, comprese le teorie di gauge $U(1)$ per l'elettromagnetismo, ripetendo le costruzioni sopramenzionate per funzioni di uno spazio di configurazioni classico, dato dai campi magnetici.

Nel caso di teorie non abeliane lo spazio è chiaramente non lineare. Questo porta a dover sfruttare proprietà delle ologie per fornire un analogo dei funzionali introdotti in precedenza.

Definizione 1.15. Dato un insieme fissato di loop indipendenti ⁷ β_1, \dots, β_n , diciamo che una funzione $g(A)$ dello spazio delle connessioni per trasformazioni di gauge è cilindrica, rispetto a questo insieme di loop, se e solo se dipende dalla connessione attraverso il valore delle ologie associato ai β_i ,

$$g(A) = G(H_A(\beta_1), \dots, H_A(\beta_n)), \quad (1.99)$$

⁷Per loop indipendenti si intendono dei loop che hanno almeno un segmento non condiviso dagli altri loop con un numero finito di intersezioni con gli altri loop.

dove G è una funzione definita sulle n copie del gruppo di gauge.

Una misura cilindrica in questo caso è definita in maniera analoga alla precedente, come una famiglia di misure $\{\mu_{\beta_1, \dots, \beta_n}\}$ sul gruppo di gauge. Anche in questo caso si avrà bisogno di condizioni di consistenza, ancora più implicate rispetto alle precedenti, per le quali si rimanda a [21]. Inoltre, si hanno delle famiglie che definiscono le misure in modo consistente, senza dover introdurre alcuna struttura di fondo. Questo comporta che siano invarianti per diffeomorfismi, cosa che permette di analizzare problemi in teorie invarianti per diffeomorfismi [2].

1.8.2 Le funzioni d'onda nella rappresentazione a loop

Come è stato introdotto all'inizio della sezione, le funzioni d'onda nella rappresentazione a loop possono essere pensate come trasformazione di funzionali di connessione, pesati dai loop di Wilson,

$$\Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int d\mathbf{A} W_{\mathbf{A}}^*(\gamma_1) \cdots W_{\mathbf{A}}^*(\gamma_n) \Psi[\mathbf{A}]. \quad (1.100)$$

Una proprietà immediata, che segue dal fatto che i loop di Wilson appaiono nella trasformazione come prodotto, è che le funzioni d'onda sono simmetriche sotto scambio di argomento,

$$\Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_n) = \Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_j, \dots, \gamma_i, \dots, \gamma_n). \quad (1.101)$$

Infatti, le funzioni d'onda nella rappresentazione a loop ereditano una serie di proprietà dei loop di Wilson. Anzitutto, esse sono funzioni con dominio nel gruppo dei loop \mathcal{L}_o . Inoltre, essendo i loop di Wilson tracce di ologrammi, essi sono in realtà funzioni di classi di coniugazione del gruppo dei loop. Per esempio, per una funzione a un loop,

$$\Psi(\gamma) = \Psi(\eta \circ \gamma \circ \eta^{-1}) \quad \forall \eta. \quad (1.102)$$

Invece, per funzioni dipendenti da più loop vale una espressione simile, per ogni entrata, tale che

$$\Psi(\gamma \circ \eta) = \Psi(\eta \circ \gamma). \quad (1.103)$$

Precedentemente, le funzioni d'onda di loop erano considerati solamente come funzionali di curve parametrizzate con restrizioni addizionali. Questo approccio, poi, assicura che l'applicazione di operatori differenziali, definiti nelle precedenti sezioni, preservi la consistenza e le condizioni imposte sullo spazio funzionale.

Un'altra importante proprietà da sottolineare è che le funzioni d'onda ereditano le identità di Mandelstam sui loop di Wilson, discussi in 1.7.1. Infatti, grazie a queste

riusciamo ad esprimere un prodotto di loop di Wilson in termini di espressioni che coinvolgono al massimo N fattori, e, di conseguenza, ridurre la dipendenza di ogni funzione d'onda al massimo a N loop (si intende in un gruppo generico di matrici $N \times N$).

Discutiamo le implicazioni di queste identità nel caso di gruppi speciali a due dimensioni. In questo caso l'identità fondamentale sarà

$$\begin{aligned} \Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_i, \gamma_j, \dots, \gamma_n) &= \Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_i \circ \gamma_j, \dots, \gamma_n) \\ &+ \Psi(\gamma_1, \dots, \gamma_i \circ \gamma_j^{-1}, \dots, \gamma_n). \end{aligned} \quad (1.104)$$

Un'importante conseguenza di questa identità è che rende possibile esprimere ogni funzionale di un numero arbitrario di loop in termini di un funzionale di un singolo loop. Dunque, si può costruire una rappresentazione a loop considerando soltanto funzioni a un singolo loop.

Consideriamo adesso una serie di uguaglianze che saranno generalizzabili anche nel caso di più loop. Nel caso in cui $\gamma_j = \iota$ e $\gamma_i = \eta$, allora

$$\Psi(\eta, \iota) = 2\Psi(\eta), \quad (1.105)$$

che implica, sempre considerando (1.104) ma con $\gamma_i = \iota$ e $\gamma_j = \eta$ che

$$\Psi(\eta) = \Psi(\eta^{-1}) \quad (1.106)$$

Applicando infine la (1.104) a

$$\Psi(\gamma \circ \eta, \beta) = \Psi(\eta \circ \gamma, \beta), \quad (1.107)$$

allora si ottiene,

$$\Psi(\gamma \circ \eta \circ \beta) + \Psi(\gamma \circ \eta \circ \beta^{-1}) = \Psi(\eta \circ \gamma \circ \beta) + \Psi(\eta \circ \gamma \circ \beta^{-1}). \quad (1.108)$$

Queste relazioni sono fondamentali dato che implicano relazioni non banali tra funzioni d'onda, anche con singoli loop.

Capitolo 2

Formulazione Hamiltoniana della Relatività Generale e variabili di Ashtekar

Dalla seconda metà del secolo scorso ci sono stati diversi tentativi nel dare una descrizione quantistica dei fenomeni gravitazionali, sulla falsa riga delle teorie di gauge non abeliane. Ciononostante, non ci sono ancora prove sperimentali immediate di effetti quantistici sul campo gravitazionale. Infatti, ci si aspetta che questi effetti quantistici possano essere osservabili a grandi energie. Il fatto che le teorie quantistiche dei campi in generale, poi, riguardino processi ad alte energie potrebbe suggerire ugualmente che una comprensione della gravità quantistica potrebbe essere necessaria a dare un quadro completo dei campi quantizzati. D'altra parte, però, la formulazione classica della relatività generale presenta delle singolarità in cui energia e campi diventano abbastanza intense da suggerire l'uso di correzioni quanto-gravitazionali. Nonostante i numerosi tentativi di applicare le regole della meccanica quantistica al campo gravitazionale, questi rimangono incompleti a tal punto che sorgono molte difficoltà concettuali e tecniche.

L'uso delle tecniche della quantizzazione canonica del campo gravitazionale sono alla base della formulazione a loop della gravità quantistica. Infatti, si ottengono considerevoli progressi rispetto alla prima, in quanto è essa stessa una via naturale non perturbativa per la quantizzazione della teoria di Einstein, come si osserva dalla introduzione delle nuove variabili. Dunque, la scelta della relatività generale come teoria gravitazionale per essere quantizzata è basata dal fatto che è la più semplice e pura teoria geometrica disponibile, e di conseguenza adatta ad essere un banco di prova delle tecniche di quantizzazione [2].

L'approccio canonico alla relatività generale è stato ampiamente formulato con l'introduzione della azione di Einstein-Hilbert, per poi arrivare ai sistemi hamiltoniani vincolati di Dirac con non poche complicazioni. Il punto di vista cambia con l'introduzione di un nuovo insieme di variabili che hanno permesso un significativo progresso nella teoria non

perturbativa della gravità. Queste vengono introdotte in modo simile a quelle delle teorie di Yang-Mills e, dunque, adatte alle tecniche di gauge, già trattate nel primo capitolo.

2.1 Formulazione hamiltoniana di un sistema con vincoli

L'idea di sistemi hamiltoniani vincolati è una idea matematica fondante per i programmi di quantizzazione classica del campo gravitazionale. Fu introdotta da Dirac negli anni cinquanta del novecento ed è ormai ben consolidata.

In questo breve paragrafo verrà introdotta la trattazione fatta da Dirac in breve, per riferimenti più approfonditi si rimanda a [12], [21].

Assumiamo di avere un sistema hamiltoniano descritto da un insieme di variabili canoniche q_i, p_i , che seguono la relazione di Poisson $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$. Assumiamo che $\phi_a(q, p)$, con $a = 1, \dots, n$, è un insieme di vincoli tale che

$$\phi_a(q, p) = 0. \quad (2.1)$$

Nella terminologia di Dirac chiamiamo *vincoli di prima classe* l'insieme di quelli che obbedisce alla relazione delle parentesi di Poisson

$$\{\phi_a, \phi_b\} = f_{ab}^c \phi_c \quad (2.2)$$

per qualche funzione liscia f_{ab}^c , e sono compatibili con l'evoluzione temporale,

$$\{\phi_a, H\} = d_a^b \phi_b. \quad (2.3)$$

Vincoli che non obbediscono a queste ultime relazioni sono detti *vincoli di seconda classe*.

Possiamo, inoltre, aggiungere i vincoli di prima classe all'azione con i moltiplicatori di Lagrange λ_a ,

$$S = \int d\tau (p\dot{q} - H - \lambda_a \phi_a). \quad (2.4)$$

Di conseguenza l'evoluzione temporale di una funzione generica viene scritta come

$$\dot{A}(q, p) = \{A, H\} + \lambda_a \{A, \phi_a\}. \quad (2.5)$$

I parametri di Lagrange introducono una arbitrarietà nella evoluzione. Infatti, i vincoli di prima classe generano trasformazioni di gauge. Sia $A(q(\tau), p(\tau))$, facendo una espansione attorno a $\tau = 0$ al primo ordine per due valori differenti $\lambda_a^{(1)}$ e $\lambda_a^{(2)}$ e facendo il differenziale δA , otteniamo

$$\delta A = \epsilon_a \{A, \phi_a\}, \quad (2.6)$$

dove $\epsilon_a \Delta \tau (\lambda_a(0)^{(1)} - \lambda_a^{(2)}(0))$. I vincoli (2.1) definiscono una ipersuperficie di vincolo e generano una trasformazione di gauge su questa ipersuperficie[13]. Infatti, per vincoli di seconda classe, i parametri di lagrange possono essere determinati scegliendo $A = \phi_b$ in (2.5) scegliendo $\phi_b = 0$. Se consideriamo, poi, funzioni per cui vale $\{A, \phi_a\} = 0$ sono spesso detti osservabili, poiché non cambiano sotto trasformazioni di gauge.

Introdotti questi concetti e questa notazione, si può evidenziare come nella trattazione verranno discussi unicamente i vincoli di prima classe. Non verranno menzionati vincoli di seconda classe, dal momento che esiste una procedura (parentesi di Dirac) per trasformare questi in vincoli di prima classe; inoltre, molte delle teorie che ci portano alla formulazione a loop della gravità quantistica presentano unicamente vincoli di prima classe. Infine, anche se esistono teorie di gauge che presentano certi vincoli di seconda classe, la formulazione a loop, presentata nel precedente capitolo, non ha bisogno di avere una "correzione di gauge" essendo automaticamente invariante per gauge.

2.2 Ipersuperfici, curvatura e foliazioni

Definiamo in questa sezione dei concetti matematici che verranno usati nel capitolo successivo per la costruzione di una formulazione hamiltoniana della relatività generale.

Definizione 2.1. Si definisce una ipersuperficie Σ dello spaziotempo M come l'immagine di una varietà 3-dimensionale $\hat{\Sigma}$ attraverso un'immersione $\Phi : \hat{\Sigma} \rightarrow M$, mappa differenziabile, invertibile e con inversa iniettiva; la mappa deve essere, inoltre, un omeomorfismo, per definizione di immersione, in modo che non si intersechi da sola.

Possiamo anche definire una ipersuperficie in modo locale. Dato un campo scalare $t : M \rightarrow \mathbb{R}$, una ipersuperficie è definita localmente se per un insieme di punti, per cui

$$\forall p \in M, \quad p \in \Sigma \iff t(p) = 0$$

Supponiamo, adesso, che (t, x, y, z) sia un sistema di coordinate sulla varietà M e che Σ sia sotto varietà di M con topologia di \mathbb{R}^3 . Σ allora è definita localmente dalla condizione che i punti abbiano coordinata $t = 0$ e si può trovare una forma esplicita per l'immersione Φ considerando (x, y, z) come coordinate sulla varietà $\hat{\Sigma}$

$$\begin{aligned} \Phi : \hat{\Sigma} &\longrightarrow M \\ (x, y, z) &\longmapsto (0, x, y, z). \end{aligned}$$

Da qui, si osserva che Φ mappa curve di $\hat{\Sigma}$ in curve in M , lo stesso vale per i vettori in queste varietà. Allora, definisce una mappa tra gli spazi tangenti $T_p(\hat{\Sigma})$ e $T_p(M)$ detto push-forward

$$\begin{aligned} \Phi_* : T_*(\hat{\Sigma}) &\longrightarrow T_*(M) \\ v = (v^x, v^y, v^z) &\longmapsto \Phi_* v = (0, v^x, v^y, v^z), \end{aligned}$$

dove v è un vettore rispetto alla base canonica dello spazio tangente delle coordinate date.

Assumiamo, allora che in questo contesto $\hat{\Sigma}$ coincida con $\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma})$, tale che identifichiamo i vettori $v \in \hat{\Sigma}$ con il loro push-forward Φ_*v in M . In questi caso si può definire una metrica indotta sulla superficie da M ; se g è il tensore metrico di M , allora posso definire la metrica indotta su Σ come

$$h = \Phi^*g \quad o \quad h_{ij} = g_{ij} ,$$

detta anche prima forma fondamentale.

Possiamo anche classificare le ipersuperfici immerse nello spaziotempo come: ipersuperfici di tipo spazio quando h è definita positiva; ipersuperfici di tipo tempo quando h è non definita positiva (segnatura di Minkowski); ipersuperfici di tipo luce o nulle quando h è non degenere.

2.2.1 Curvatura estrinseca

Oltre la curvatura intrinseca, definita attraverso il tensore di Riemann $R_{\mu\nu\sigma}^\rho$ [1], possiamo definire una curvatura che riguarda le ipersuperfici e riguardante la flessione di Σ in M . Questa riguarda il cambio di direzione della normale n mentre ci si sposta su Σ . Precisamente, si definisce un mappa di Weingarten come l'endomorfismo di $T_p(\Sigma)$ che associa ogni vettore tangente a Σ la variazione della normale lungo quel vettore. Questa variazione è data dalla connessione ∇ , definita dalla mappa

$$\begin{array}{ccc} \chi : T_p(\Sigma) & \longrightarrow & T_p(\Sigma) \\ v & \longmapsto & \nabla_v n. \end{array}$$

è una applicazione ben definita, essendo che

$$n \cdot \chi(v) = n \cdot \nabla_v n = \frac{1}{2} \nabla_v (n \cdot n) = 0,$$

tale che $\chi(v) \in T_p(\Sigma)$. Dunque, la mappa è definita per ipersuperfici di tipo spazio e tempo.

Vediamo adesso la proprietà fondamentale della mappa, ossia quella di essere autoaggiunta rispetto alla metrica h di M

$$\forall (u, v) \in T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma), \quad u \cdot \chi(v) = X(u) \cdot v .$$

Allora, per definizione

$$\begin{aligned} u \cdot \chi(v) &= u \cdot \nabla_v n \\ &= \nabla_v (u \cdot n) - n \cdot \nabla_v u \\ &= v \cdot (\nabla_u v - [u, v]) \\ &= v \cdot \nabla_u n + n \cdot [u, v] . \end{aligned}$$

Gli autovalori della mappa di Weingarten, che sono tutti reali essendo autoaggiunta, sono dette curvatures principali sull'ipersuperficie Σ e i corrispondenti autovettori sono detti direzioni principali di Σ . La curvatura media su una ipersuperficie Σ , inoltre, è definita come la media aritmetica della curvatura principale:

$$H := \frac{1}{3}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3),$$

dove κ_i sono i tre autovalori di χ . Si noti che la curvatura così definita non è da confondersi con quella intrinseca definita dalla metrica, poiché quest'ultima è appunto una quantità intrinseca e indipendente dall'immersione della ipersuperficie nella varietà M ; mentre, le curvatures principali e la curvatura media dipendono esplicitamente dall'immersione (per questo sono qualificate come estrinseche).

Definiamo adesso la cosiddetta seconda forma fondamentale dell'ipersuperficie Σ con la mappa bilineare

$$\begin{aligned} K : T_p(\Sigma) \otimes T_p(\Sigma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto K(u, v) = -u \cdot \chi(v), \end{aligned}$$

che è simmetrica grazie alle proprietà di autoaggiunzione di χ . E' evidente come la seconda forma fondamentale e mappa di Weingarten hanno dentro lo stesso significato di curvatura su una ipersuperficie Σ [18].

Se, infine, vogliamo esplicitare il valore di χ nella definizione di seconda forma fondamentale avremo

$$\forall (u, v) \in T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma), \quad K(u, v) = -u \cdot \nabla_v n.$$

Denoteremo, poi, la traccia della forma bilineare K rispetto alla metrica h , come l'opposto della traccia dell'endomorfismo χ :

$$\mathbf{K} := h^{ij} K_{ij} = -3H.$$

2.2.2 Foliazioni

Avendo esaminato il concetto di ipersuperficie immersa in una varietà (M, g) , si può considerare un insieme di ipersuperfici continue che ricoprono l'intera varietà.

Definizione 2.2. Sia Σ una ipersuperficie in M varietà, definiamo superficie di Cauchy una ipersuperficie Σ' tale che ogni curva causale (curva per cui in ogni punto il vettore tangente non è di tipo spazio), senza punto di fine, interseca con questa ipersuperficie una volta sola. Viceversa, Σ' è di Cauchy se e solo se il suo dominio è tutto M .

A questo proposito, non tutti gli spaziotempo ammettono superfici di Cauchy (ad esempio, uno spaziotempo con curve di tipo tempo chiuse non le ammette).

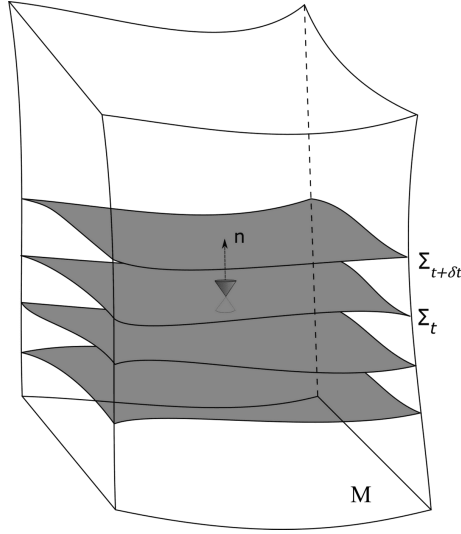


Figura 2.1: Varietà dello spaziotempo M con delle foglie di foliazione Σ_t

Definizione 2.3. Sia (M, g) uno spaziotempo che ammette superfici di Cauchy è detto globalmente iperbolico. La topologia di uno spaziotempo M globalmente iperbolico deve essere necessariamente $\Sigma \times \mathbb{R}$, tale che gli è topologicamente equivalente $M \simeq \Sigma \times \mathbb{R}$.

Adesso, procediamo alla definizione delle foliazioni.

Definizione 2.4. Sia (M, g) uno spaziotempo iperbolico, definiamo $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ foliazione dello spaziotempo come la famiglia di superfici di livello, date da un campo scalare regolare \hat{t} su M

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Sigma_t := \{p \in M \mid \hat{t}(p) = t\}.$$

Essendo \hat{t} regolare si può assumere che

$$\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset \quad \text{for } t \neq t'.$$

Ogni ipersuperficie Σ_t è detta foglia della foliazione e si assume sia di tipo spazio. Inoltre si richiede che la foliazione ricopra lo spaziotempo

$$M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t.$$

Si noti, poi, che in figura 2.1 il vettore n è necessariamente collineare al vettore ∇t , ossia il vettore duale della 1-forma dt . Definiamo la funzione di intervallo N tale che

$$n = -N\nabla t,$$

per cui

$$N = |\nabla t \cdot \nabla t|^{-1/2} .$$

Si definisce, infine, il vettore normale di evoluzione

$$m = Nn,$$

che ha la proprietà di contrarsi con la 1-forma dt , ossia $\langle dt, m \rangle = m^\mu \nabla_\mu t = 1$. Ciò significa che il vettore normale m è adattato al campo scalare \hat{t} , contrario al vettore normale n . Questo permette di ottenere ipersuperfici del tipo $\Sigma_{t+\delta t}$ dalla ipersuperficie vicina Σ_t , attraverso uno spostamento $m\delta t$ su ogni punto di Σ_t . Avrò allora

$$\begin{aligned} t(p') &= t(p + \delta t m) = t(p) + \langle \delta t, \delta t m \rangle \\ &= t(p) + \delta t \langle \delta t, \delta t m \rangle = t(p) + \delta t. \end{aligned}$$

Questa uguaglianza mostra che $p' \in \Sigma_{t+\delta t}$, dunque, il vettore $\delta t m$ trasporta l'ipersuperficie Σ_t a quella vicina $\Sigma_{t+\delta t}$. Equivalentemente, si può dire che Σ_t è Lie dragged dal vettore m . Una conseguenza immediata è che la derivata di Lie lungo m di qualsiasi vettore tangente a Σ_t è ancora un vettore tangente a Σ_t :

$$\forall v \in T(\Sigma_t), \quad \mathcal{L}_m v \in T(\Sigma_t) ,$$

immediato se si guarda al significato geometrico della derivata di Lie [18].

2.3 Formulazione hamiltoniana della relatività generale

La teoria della relatività generale è una teoria della gravità, dove l'interazione gravitazionale è data dalla deformazione dello spaziotempo. In questo contesto la variabile fondamentale è data dal tensore metrico dello spaziotempo $g_{\mu\nu}$. Anzitutto, un importante passo verso il formalismo Hamiltoniano è stato dato dalla cosiddetta azione di Hilbert-Einstein,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - \Lambda) + \int d^4x \sqrt{-g} L_{\text{materia}} , \quad (2.7)$$

dove si è usata la costante cosmologica, aggiunta da Einstein per rendere il modello cosmologico consistente con un universo statico. A partire da questa azione, variandola rispetto alla metrica, si ottengono le equazioni del moto

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad : \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{\delta S_{\text{materia}}}{\delta g^{\mu\nu}} , \quad (2.8)$$

da cui, infine, si ricostruisce l'equazione di campo di Einstein.

2.3.1 La decomposizione 3+1 dello spaziotempo

Presentiamo di seguito il formalismo introdotto dai fisici Arnowitt, Deser and Misner (ADM). Viene descritta, dunque, la teoria in forma canonica con una scelta di variabili precise. Per formulare la teoria canonicamente avremo bisogno di dividere lo spaziotempo in spazio e tempo per poter descrivere una Hamiltoniana "tradizionale", cosa che in prima battuta potrebbe essere in contrasto con la covarianza dello spaziotempo. Si vedrà che, in realtà, sarà il formalismo stesso a dirci che non importa con quale direzione temporale si inizia, ossia la covarianza è preservata consentendo la possibilità di considerare tutte le possibili foliazioni tridimensionali di tipo spazio.

Iniziamo considerando lo spaziotempo (M, g) come globalmente iperbolico, che possiede superfici tali che i coni di luce da questa superficie abbracciano tutto lo spazio tempo del futuro della suddetta superficie. Dunque, dalle considerazioni fatte in 2.2.2, si inizia eseguendo una foliazione dello spaziotempo in superfici di Cauchy Σ_t , dove t è proprio la funzione del tempo globale. Il campo vettoriale corrispondente è denotato da t^μ , diretto verso il futuro e dunque normale alla superficie, tale che $t^\mu \nabla_\mu t = 1$. La metrica $g_{\mu\nu}$ induce una metrica tridimensionale su ogni Σ_t

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu , \quad (2.9)$$

dove n_μ denota l'unità normale a Σ_t , con $n^\mu n_\mu = -1$.

Dunque, è facile osservare che questa metrica agisce come proiettore su Σ_t tale che preso un qualsiasi vettore normale alla superficie n^ν avrò sempre $h_{\mu\nu} n^\nu = 0$, per definizione stessa di matrice tridimensionale della ipersuperficie. Allora, essendoci un isomorfismo tra i campi tensoriali su M , che sono ortogonali a n^μ , e campi tensoriali su Σ_t (come visto nella sezione precedente, per la metrica indotta).

Procediamo ora alla decomposizione del campo t^μ , che soddisfa lo stessa relazione del campo normale di evoluzione m (si veda 2.2.2). Questo implica che il Lie dragging della superficie Σ_t lungo t^μ differisce di un certo vettore \mathbf{N} ortogonale a n di componenti N^μ (detto vettore di spostamento). Allora,

$$t^\mu = m + \mathbf{N} = N n^\mu + N^\mu , \quad (2.10)$$

che indica la decomposizione del campo in tangente e normale a Σ_t . Indichiamo, inoltre la funzione di intervallo come $N = -t^\mu n_\mu$ da cui

$$N = \frac{1}{n^\mu \nabla_\mu t} . \quad (2.11)$$

Mostriamo, ora, l'interpretazione geometrica dei vettori di intervallo e spostamento, illustrata in Fig. 2.2: $\dot{X}^\mu \equiv t^\mu$ è un vettore che punta da un punto con coordinate (spaziali) x^a su $t = cost.$ a un punto con le stesse coordinate su un'ipersuperficie vicina $t + dt = cost.$. La distanza puramente temporale tra le ipersuperfici è data da N , ecco

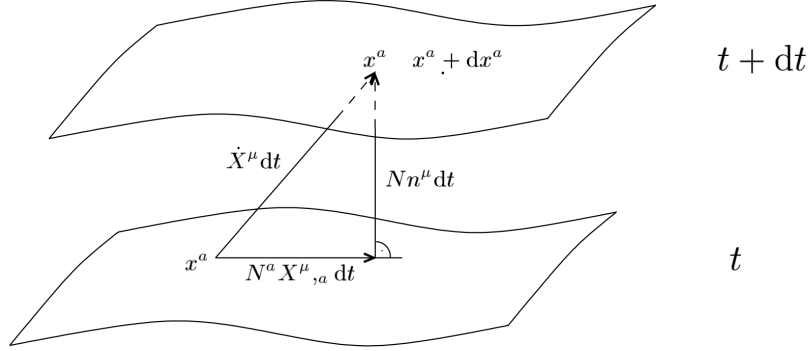


Figura 2.2: L'interpretazione geometrica dei vettori di intervallo e spostamento

perché è chiamata funzione di intervallo. Analogamente, N^a è un vettore che punta dal punto di coordinate x^a su $t = cost.$ al punto sulla stessa ipersuperficie, da cui la normale raggiunge il punto di coordinate x^a su $t + dt = cost.$, esso è chiamato vettore di spostamento.

Possiamo decomporre, a questo punto, la metrica in questo modo ¹ [13] :

$$\begin{aligned} rlds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ab} (dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt) \\ &= (h_{ab} N^a N^b - N^2) dt^2 + 2h_{ab} N^a dx^b dt + h_{ab} dx^a dx^b, \end{aligned} \quad (2.12)$$

che ci porta ad avere

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N_a N^a - N^2 & N_b \\ N_c & h_{ab} \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

mentre, la sua inversa,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N_b}{N^2} \\ \frac{N_c}{N^2} & h^{ab} - \frac{N^a N^b}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Si nota dalla matrice inversa che la parte spaziale di $g^{\mu\nu}$ non è identica con h^{ab} , ma ha termini addizionali che coinvolgono il vettore di spostamento. Le componenti, poi, del vettore normale possono essere trovate considerando la 1-forma $n_\mu dx^\mu = -N dt$, che porta a

$$n^\mu = g^{\mu\nu} n_\nu = \left(\frac{1}{N}, -\frac{\mathbf{N}}{N} \right). \quad (2.15)$$

Lo spaziotempo iperbolico può essere allora interpretato come l'evoluzione della metrica su una varietà fissata Σ , ossia l'evoluzione da $h_{ab}(t_0)$ a $h_{ab}(t)$, che suggerisce l'uso di questa metrica come appropriata variabile dinamica per il formalismo canonico. Lo spaziotempo diventa essenzialmente una traiettoria di spazi.

¹Le componenti coordinate di h , metrica indotta, sono indicate con h_{ab} .

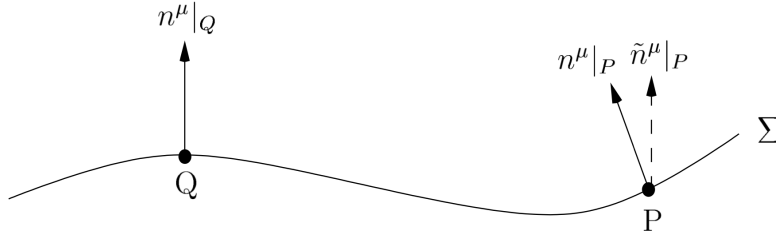


Figura 2.3: *L'interpretazione geometrica della curvatura estrinseca.*

Per introdurre la "velocità" corrispondente alla metrica, si inizia riprendendo la definizione della curvatura estrinseca ²

$$K_{\mu\nu} = h_{\mu}^{\rho} \nabla_{\rho} n_{\nu} . \quad (2.16)$$

Questo è un campo tensoriale puramente spaziale, essendo che $K_{\mu\nu} n^{\mu} = 0 = K_{\mu\nu} n^{\nu}$. Guardando alla fig.2.3 si nota che la differenza tra n^{μ} e \tilde{n}^{μ} è la misura per la curvatura immersa di Σ in M a P . Quindi, si può usare (2.16) per descrivere questa curvatura immersa, essendo che svanisce per $n^{\mu} = \tilde{n}^{\mu}$.

Si può verificare e riscrivere

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{\mu\nu} , \quad (2.17)$$

in termini della derivata di Lie lungo il campo vettoriale normale n . Possiamo, allora interpretare il campo tensoriale come la "velocità" associata a h_{ab} da

$$K \equiv K_a^a = h^{ab} K_{ab} \equiv \theta , \quad (2.18)$$

detta anche curvatura estrinseca, vista anche come espansione di una congruenza geodesica ortogonale a Σ (infatti per la cosmologia di Friedmann questo parametro è tre volte la costante di Hubble). In termini dei vettori di intervallo e spostamento, la riscriviamo come

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} \left(\dot{h}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a \right) , \quad (2.19)$$

dove $\dot{h}_{ab} = \mathcal{L}_t h_{ab}$ e le due derivate covarianti sono entrambe equivalenti a $-\mathcal{L}_N h_{ab}$.

2.3.2 Forma hamiltoniana della azione di Einstein-Hilbert

Adesso possiamo riformulare la nota azione di Einstein-Hilbert (2.7) in termini delle variabili canoniche h_{ab} e K_{ab} . Mostriamo, a tale proposito, la relazione tra la curvatura

²Si nota che in questo caso viene definita in forma indiciale usando il proiettore, che proietta sul piano tangente tramite il tensore metrico indotto, ossia restringe la derivata covariante del campo normale al piano tangente della varietà Σ .

tridimensionale e tetradimensionale, dalla equazione di Gauss per dimensioni maggiori

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\rho} = h_{\mu}^{\mu'} h_{\nu}^{\nu'} h_{\lambda}^{\lambda'} h_{\rho}^{\rho'} R_{\mu'\nu'\lambda'\rho} - K_{\mu\lambda} K_{\nu}^{\rho} + K_{\nu\lambda} K_{\mu}^{\rho} , \quad (2.20)$$

e l'equazione di Codazzi generalizzata [18]

$$D_{\mu} K_{\nu\lambda} - D_{\nu} K_{\mu\lambda} = h_{\mu}^{\mu'} h_{\nu}^{\nu'} h_{\lambda}^{\lambda'} R_{\mu'\nu'\lambda'\rho} n^{\rho} . \quad (2.21)$$

La contrazione con $g^{\mu\lambda}$ dà

$$D_{\mu} K_{\nu}^{\mu} - D_{\nu} K = R_{\rho\lambda} n^{\lambda} h_{\nu}^{\rho} . \quad (2.22)$$

Adesso, considerando le 3 + 1 dimensioni e l'equazione di Einstein per il vuoto $G_{\mu\nu} = 0$, senza costante cosmologica, si trova per le sue componenti spazio-tempo

$$0 = h^{\mu}_{\rho} G_{\mu\nu} n^{\nu} = h^{\mu}_{\rho} R_{\mu\nu} n^{\nu} , \quad (2.23)$$

che riscriviamo insieme alla (2.22)

$$D_b K^b_a - D_a K = 0 . \quad (2.24)$$

Invece, per la componente tempo-tempo si ha

$$G_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} + \frac{R}{2} = 0 . \quad (2.25)$$

Allora, dalla (2.20), contraendo gli indici

$$R + K_{\mu}^{\mu} K_{\nu}^{\nu} - K_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = h^{\mu\mu'} h_{\nu}^{\nu'} h_{\mu}^{\lambda'} h_{\rho}^{\nu} R_{\mu'\nu'\lambda'\rho} . \quad (2.26)$$

Allora, le componenti tempo-tempo saranno

$$R + 2R_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} = 2G_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu} \implies K^2 - K_{ab} K^{ab} + {}^{(3)}R = 0 . \quad (2.27)$$

Questa è la formulazione 3 + 1 dimensionale del noto theorema egregium [13]. Infatti, a partire da questo si possono semplicemente specificare i dati iniziali (h_{ab}, K_{cd}) su Σ , dove i due soddisfano i vincoli (2.24) e (2.27). Si può quindi dimostrare che esiste uno spazio-tempo globalmente iperbolico che obbedisce alle equazioni di Einstein, il quale ha una superficie di Cauchy sulla quale la metrica indotta e la curvatura estrinseca sono esattamente h_{ab} e K_{cd} , rispettivamente.

Riscriviamo, adesso, l'azione di Einstein-Hilbert (2.7). Esprimiamo l'elemento di volume e lo scalare di Ricci in termini di h_{ab} e K_{cd} . Troviamo, anzitutto, che

$$\sqrt{-g} = N\sqrt{h} , \quad (2.28)$$

ricavabile facilmente dalla regola di Cramer e vedere le relazioni con i cofattori e le due metriche.

Per ricavare la relazione con la curvatura scalare, assumiamo che Σ sia compatta senza bordo. Usiamo la (2.27) per scrivere

$$R = {}^3R + K^2 - K_{ab}K^{ab} - 2R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu. \quad (2.29)$$

Usiamo la definizione del tensore di Riemann in termini delle derivate seconde [1]

$$R^\rho{}_{\mu\rho\nu}n^\mu = \nabla_\rho\nabla_\nu n^\rho - \nabla_\nu\nabla_\rho n^\rho, \quad (2.30)$$

dove il secondo termine nella parte destra può essere riscritto come

$$\begin{aligned} -2R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu &= 2(\nabla_\rho n^\nu)(\nabla_\nu n^\rho) - 2\nabla_\rho(n^\nu\nabla_\nu n^\rho) \\ &= -2(\nabla_\nu n^\nu)(\nabla_\rho n^\rho) + 2\nabla_\nu(n^\nu\nabla_\rho n^\rho) . \\ &= 2K_{ab}K^{ab} - 2K^2 . \end{aligned} \quad (2.31)$$

Allora, avendo raggruppato tutti i termini di superficie ed avendo eliminato quelli che non contribuiscono, riscriviamo l'azione

$$16\pi G S_{EH} = \int_M dt d^3x N \sqrt{h} (K_{ab}K^{ab} - K^2 + {}^3R - 2\Lambda) . \quad (2.32)$$

Questa rappresenta l'azione ADM, che ha una formulazione classica di energia cinetica sottraendo il potenziale. Il successivo obiettivo è quello di scrivere i momenti coniugati canonici a partire dalla forma della densità lagrangiana

$$S_{EH} \equiv \int_M dt d^3x \mathcal{L}^g . \quad (2.33)$$

Calcoliamo i momenti

$$\pi_N \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^g}{\partial \dot{N}} = 0, \quad \pi_a^g \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^g}{\partial \dot{N}^a} = 0 . \quad (2.34)$$

Questi sono detti vincoli primari della formulazione canonica, dal momento che sono nulli. Invece l'altro momento coniugato,

$$\tilde{\pi}^{ab} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^g}{\partial \dot{h}_{ab}} = \frac{1}{16\pi G} (K^{ab} - Kh^{ab}) . \quad (2.35)$$

Si noti, che le variabili $\tilde{\pi}^{ab}$ e h_{ab} hanno struttura simplettica di coppia coniugata tale che

$$\{h_{ab}(x), p^{cd}(y)\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta(x, y) . \quad (2.36)$$

Possiamo calcolare, a questo punto, la densità hamiltoniana canonica facendo la trasformazione di Legendre

$$\mathcal{H}^g = \tilde{\pi}^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}^g, \quad (2.37)$$

dove

$$\dot{h}_{ab} = \frac{32\pi GN}{\sqrt{h}} \left(\tilde{\pi}_{ab} - \frac{1}{2} \tilde{\pi} h_{ab} \right) + D_a N_b + D_b N_a , \quad (2.38)$$

dalla definizione (2.18) e dalla definizione di momento coniugato, ove $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}^{ab} \dot{h}_{ab}$. Allora,

$$\mathcal{H}^g = N K_{ab} \tilde{\pi}^{ab} - N \frac{\sqrt{h}({}^3R - 2\Lambda)}{16\pi G} - 2N_b (D_a \tilde{\pi}^{ab}) . \quad (2.39)$$

Da cui, integrando, la Hamiltoniana totale è

$$H^g \equiv \int d^3x \mathcal{H}^g \equiv \int d^3x (N H_{\perp}^g + N^a \mathcal{H}_a^g) , \quad (2.40)$$

dove abbiamo definito le due hamiltoniane ³ come

$$H_{\perp}^g = K_{ab} \tilde{\pi}^{ab} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} ({}^3R - 2\Lambda) = 0 , \quad (2.41)$$

$$H_a^g = -2D_b \tilde{\pi}_a^b = 0 . \quad (2.42)$$

Questi sono chiamati vincoli secondari detti anche vincolo hamiltoniano e vincolo di diffeomorfismo, e presentano somiglianze, rispettivamente, con le equazioni (2.24) e (2.27). Si noti, poi, che queste equazioni devono essere soddisfatti in ogni ipersuperficie.

Adesso, consideriamo la presenza di una sorgente $T_{\mu\nu}$. Verrà modificata la (2.23) in modo da ottenere questi vincoli hamiltoniani

$$H_{\perp} = K_{ab} \tilde{\pi}^{ab} - \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} ({}^3R - 2\Lambda) + \sqrt{h} \rho = 0 \quad (2.43)$$

$$H_a = -2D_b p_a^b + \sqrt{h} J_a = 0 , \quad (2.44)$$

dove $\rho = T_{\mu\nu} n^{\mu} n^{\nu}$ e $J_a = h_a^{\mu} T_{\mu\nu} n^{\nu}$ è il vettore di Poynting. Infatti, queste equazioni hanno lo stesso carattere della legge di Gauss per l'elettromagnetismo, la quale ci dice che non qualsiasi campo vettoriale funzionerebbe necessariamente come campo elettrico, ma deve avere una divergenza nulla nel vuoto.

La presenza dei vincoli, così derivati, significa che solo parte delle variabili costituisce gradi di libertà fisici. Infatti, la metrica h_{ab} è caratterizzata da sei numeri per punti dello spazio $6 \times \infty^3$; il vincolo (2.42) genera trasformazioni delle coordinate sul 3-spazio, caratterizzati da tre numeri per punti; il vincolo (2.41) corrisponde a una variabile per punto dello spazio che descrive la posizione di Σ nello spaziotempo (essa cambia sotto deformazioni normali). Allora, nel totale rimangono $2 \times \infty^3$ gradi di libertà (come se la 3-geometria portasse informazioni sul tempo). Si conclude che il campo gravitazionale sembra essere caratterizzato proprio da $2 \times \infty^3$ gradi di libertà intrinseci [19].

³questa forma segue dalla preservazione dei vincoli primari $\{\pi_N, H^g\} = 0 = \{\pi_a^g, H'\}$.

2.4 Le nuove variabili di Ashtekar

Nella descrizione del formalismo canonico hamiltoniano della relatività generale il punto chiave è nella scelta delle variabili canoniche, che nel paragrafo precedente erano proprio h_{ab} e il suo momento $\tilde{\pi}^{ab}$. In questo paragrafo si introduce una nuova formulazione introdotta da Ashtekar [20]. Queste variabili sono molto usate nella formulazione a loop della quantizzazione del campo gravitazionale, che verrà esposta nel capitolo successivo. Queste nuove variabili sfruttano l'uso di connessioni, che stanno alla base delle teorie di gauge abeliane e non abeliane.

Il punto primario è introdurre le cosiddette triadi, che avranno il ruolo dell'impulso canonico. Esse sono assimilabili alle cosiddette tetradi (vierbeine), date dalle variabili $e_i^a(x)$ ($a = 1, 2, 3$ e $i = 1, 2, 3$ sono indici interni numeranti dei vettori, essendo gli i indici arbitrari), definiscono similmente una base ortonormale per ogni punto dello spazio. Si ha la condizione di ortonormalità

$$h_{ab}e_i^a e_j^b = \delta_{ij} , \quad (2.45)$$

per cui

$$h^{ab} = \delta^{ij} e_i^a e_j^b \equiv e_i^a e_j^b . \quad (2.46)$$

Questo introduce una simmetria $SO(3)$ nel formalismo, essendo la metrica invariante sotto rotazioni locali delle triadi. Associato con $e_i^a(x)$ c'è un sistema ortonormale nello spazio cotangente dato da $e_a^i(x)$, base di uno-forme, allora

$$e_a^i e_j^a = \delta_j^i , \quad e_a^i e_i^b = \delta_a^b . \quad (2.47)$$

Il formalismo tridimensionale usando le triadi può essere ottenuto dal formalismo corrispondente usando $e_a^0 = -n_a = Nt_{,a}$ per le uno-forme (dove $h_{ab} = \delta_{ab} + n_a n_b$ è il proiettore sulla superficie tridimensionale).

Definiamo la versione densificata

$$\tilde{E}_i^a(x) \equiv \sqrt{h} e_i^a(x) , \quad (2.48)$$

dove $\sqrt{h} = |\det(e_a^i)|$. Si noti, poi, che questo lascia una certa libertà nel dare diverse orientazioni della triade.

Per trovare la quantità canonica coniugata, si consideri prima la curvatura estrinseca nella forma

$$K_a^i(x) \equiv K_{ab}(x) e^{bi}(x) , \quad (2.49)$$

dove $K_{ab}(x)$ denota l'espressione della curvatura estrinseca definita nel paragrafo precedente. Mostriamo che K_a^i e \tilde{E}_i^a sono variabili coniugate

$$\begin{aligned} K_a^i \delta \tilde{E}^{ia} &= \frac{K_{ab}}{2\sqrt{h}} \delta \left(\tilde{E}^{ia} \tilde{E}^{ib} \right) = \frac{K_{ab}}{2\sqrt{h}} (h \delta h^{ab} + h^{ab} \delta h) \\ &= -\frac{\sqrt{h}}{2} (K^{ab} - K h^{ab}) \delta h_{ab} = -8\pi G \tilde{p}^{ab} \delta h_{ab} , \end{aligned} \quad (2.50)$$

dove è stato usato $\delta h = -h h_{ab} \delta h^{ab}$. Le rotazioni $SO(3)$, come quanto detto nell'introduzione riguardo le triadi, è generata dai vincoli

$$\mathcal{G}_i(x) \equiv \epsilon_{ijk} K_a^j(x) \tilde{E}^{ka}(x) = 0 , \quad (2.51)$$

che ha la struttura di un generatore di rotazioni. Questi sono chiamati vincoli di Gauss, e la loro presenza garantisce anche la simmetria di K_{ab} ⁴.

Un campo vettoriale può essere decomposto in componenti rispetto alle triadi, come

$$v^a = v^i e_i^a . \quad (2.52)$$

Definiamo la derivata covariante rispetto a un generico campo vettoriale

$$D_a v^i = \partial_a v^i + \omega_{a j}^i v^j , \quad (2.53)$$

dove $\omega_{a j}^i$ sono le componenti della connessione spaziale. Quest'ultima viene messa in relazione con la connessione di Levi-Civita

$$\omega_{a j}^i = \Gamma_{kj}^i e_a^k , \quad (2.54)$$

dove Γ_{kj}^i sono i cosiddetti simboli di Christoffel, o connessione affine [1], rispetto alle triadi. Questa ha componenti

$$\Gamma_{kj}^i = e_k^d e_j^f e_c^i \Gamma_{dg}^c - e_k^d e_j^f \partial_d e_f^i . \quad (2.55)$$

Ora, inserendola nella definizione di derivata covariante

$$D_a e_b^i = \partial_a e_b^i - \Gamma_{ab}^c e_c^i + \omega_{a j}^i e_b^j , \quad (2.56)$$

troviamo che

$$D_a e_b^i = 0 , \quad (2.57)$$

in analogia con $D_a h_{bc} = 0$. Il trasporto parallelo, invece, è definito da

$$dv^i = -\omega_a^i j v^j dx^a . \quad (2.58)$$

Definendo

$$\Gamma_a^i = -\frac{1}{2} \omega_{ajk} \epsilon^{ijk} , \quad (2.59)$$

questo trasporto parallelo corrisponde alla rotazione infinitesima di un vettore di un certo angolo

$$\delta \omega^i = \Gamma_a^i dx^a , \quad (2.60)$$

⁴Si osserva inserendo la definizione di curvatura estrinseca nel vincolo di gauss e moltiplicando con ϵ^{ilm} , per poi contrarre gli indici.

quindi,

$$dv^i = \epsilon_{jk}^i v^j \delta\omega^k \quad (2.61)$$

Dalla (2.57) si trova (sapendo che per un sistema ortonormale si ha $\omega_{ajk} = -\omega_{akj}$)

$$\partial_{[a} e_{b]}^i = -\omega_{[aj} e_{b]}^j = -\epsilon_{jk}^i \Gamma_{[a}^j e_{b]}^k . \quad (2.62)$$

Ora consideriamo il trasporto parallelo su un percorso chiuso, che ci porta a definire il tensore di curvatura, procedendo allo stesso modo di una connessione metrica,

$$dv^i = -R_{jab}^i v^j dx^a dx^b \equiv \epsilon_{jk}^i v^j \delta\omega^k , \quad (2.63)$$

dove R_{jab}^i sono le componenti della curvatura. L'angolo $\delta\omega^k$ può essere scritto come

$$\delta\omega^k = -R_{ab}^k dx^a dx^b , \quad (2.64)$$

con $R_{ab}^k \epsilon_{ijk}^i \equiv R_{iab}^i$. Le componenti della curvatura R_{ab}^i obbediscono a

$$R_{ab}^i = 2\partial_{[a} \Gamma_{b]}^i + \epsilon_{jk}^i \Gamma_a^j \Gamma_b^k \quad (2.65)$$

e l'identità ciclica

$$R_{ab}^i e_i^b = 0 . \quad (2.66)$$

Otteniamo la curvatura scalare da

$$R[e] = -R_{ab}^i \epsilon_i^{jk} e_j^a e_k^b = -R_{kab}^j e_j^a e^{bk} . \quad (2.67)$$

Questo formalismo è stato usato da Ashtekar per unire le variabili \tilde{E}_i^a e K_a^i in una connessione A_a^i . Questo è definito da

$$GA_a^i(x) = \Gamma_a^i(x) + \beta K_a^i(x) , \quad (2.68)$$

dove $\beta \in \mathbb{C}$ è detto parametro di "Barbero-Immirzi". Si noti che il lato sinistro ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza, ma la connessione A_a^i ha le dimensioni di una massa su una lunghezza al quadrato. Il fatto importante è che A_a^i e $\tilde{E}_i^a/8\pi\beta$ sono variabili canoniche coniugate

$$\{A_a^i(x), \tilde{E}_j^b(y)\} = 8\pi\beta \delta_j^i \delta_a^b \delta(x, y) . \quad (2.69)$$

Inoltre, si ha

$$\{A_a^i(x), A_b^j(y)\} = 0 . \quad (2.70)$$

Nella seguente sezione si considera A_a^i come la nuova variabile di configurazione e \tilde{E}_j^b sarà il corrispondente impulso canonico.

2.4.1 Discussione dei vincoli

Avendo descritto le relazioni necessarie possiamo riscrivere tutti i vincoli in termini delle nuove variabili. Si inizia considerando i vincoli di Gauss, che sono presenti solamente grazie all'uso delle triadi al posto della metrica. Usando la (2.68) si trova, dopo aver sfruttato le identità dei simboli di Christoffel, a meno di β

$$\mathcal{G}_i = \partial_a \tilde{E}_i^a + G \epsilon_{ijk} A_a^j \tilde{E}^{ka} \equiv D_a \tilde{E}_i^a = 0 . \quad (2.71)$$

Nel termine del vincolo di Gauss si è definita la derivata covariante D_a associata con A_a^i , tale che la sua curvatura associata è

$$F_{ab}^i = 2G \partial_{[a} A_{b]}^i + G^2 \epsilon_{ijk} A_a^j A_b^k . \quad (2.72)$$

Il vincolo di Gauss, inoltre, genera trasformazioni di

$$\delta \tilde{E}_j^a(x) = \int dy \{ \tilde{E}_j^a(x), \mathcal{G}_i(y) \} \xi^i(y) = -8\pi\beta G \epsilon_{ijk} \tilde{E}^{ka} \xi^i , \quad (2.73)$$

e

$$\delta A_a^i(x) = \int dy \{ A_a^i(x), \mathcal{G}_i(y) \} \xi^i(y) = -8\pi\beta D_a \xi^i . \quad (2.74)$$

Può essere conveniente introdurre delle matrici di $SU(2)$, che vedremo essere essenzialmente i suoi generatori

$$\tilde{E}^a = \tau^i \tilde{E}_i^a , \quad A_a = \tau_i A_a^i , \quad (2.75)$$

dove $\tau_i = \frac{i\sigma_i}{2}$, con σ_i le matrici di Pauli, sono i generatori di $SU(2)$. Dunque, sotto trasformazione $SU(2)$ g si ha

$$\tilde{E}^a \rightarrow g \tilde{E}^a g^{-1} , \quad A_a \rightarrow g(A_a + \partial_a)g^{-1} . \quad (2.76)$$

Il passo successivo è riscrivere i vincoli già visti nel paragrafo precedente (2.41) e (2.42) in termini delle nuove variabili. Introducendo delle forme riscalate dei vincoli $\tilde{H}_\perp = -8\pi G \beta^2 H_\perp^g$ e $\tilde{H}_a = -8\pi G \beta H_a^g$, la nuova forma sarà

$$\tilde{H}_\perp = -\frac{\sigma}{2} \frac{\epsilon^{ij} F_{ab}^k}{\sqrt{|\det \tilde{E}_i^a|}} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b + \frac{\beta^2 \sigma - 1}{\beta^2 \sqrt{|\det \tilde{E}_i^a|}} \tilde{E}_{[i}^a \tilde{E}_{j]}^b (G A_a^i - \Gamma_a^i)(G A_b^j - \Gamma_b^j) = 0 , \quad (2.77)$$

e

$$\tilde{H}_a = F_{ab}^i \tilde{E}_i^b = 0 . \quad (2.78)$$

Quest'ultima equazione ha la forma della identità ciclica con R_{ab}^i (2.66), avendo cambiato la definizione di curvatura.

Se guardiamo ai parametri introdotti possiamo distinguere due casi: lorentziano per $\sigma = -1$ e $\sigma = 1$ per quello euclideo; inoltre, il primo vincolo si semplifica ulteriormente

scegliendo $\beta = \pm i$ per il caso lorentziano e $\beta = \pm 1$ per quello euclideo. Infatti, una prima scelta per $\beta = i$ ci porta a vedere che il termine di potenziale svanisce, trovando tale versione densificata di hamiltoniana

$$2\sqrt{|\det \tilde{E}_i^a|} \tilde{H}_\perp = \epsilon^{ij} F_{ab}^k \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b = 0 . \quad (2.79)$$

Questo porta a una definizione di connessione complessa A_a^i , che rende necessaria l'implementazione di condizioni affinché l'hamiltoniana sia reale, per recuperare la relatività generale [21]. Si noti che le condizioni di realtà di cui si parla acquisiscono una diversa connotazione a livello quantistico. Considerando di dover applicare la quantizzazione classica, dopo aver trovato lo spazio fisico degli stati (quindi cercando un adatto prodotto interno) si usano le condizioni di realtà per scegliere una tale operazione che le implementi. Esse possono essere una vera guida, in questi passaggi, per trovare il corretto prodotto interno nella teoria considerata. Basta, poi, richiedere che le quantità della teoria classica diventano operatori autoaggiunti sotto il prodotto interno scelto. Per evitare problemi che coinvolgerebbero condizioni ulteriori si lavorerà con variabili reali. Dunque, scegliamo $\beta = -1$ per il caso lorentziano (non sembra avere un particolare significato geometrico), tale che il vincolo hamiltoniano sarà

$$\tilde{H}_\perp = \frac{\epsilon^{ijk} \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b}{2\sqrt{\hbar}} (F_{abk} - 2R_{abk}) = 0 . \quad (2.80)$$

Una forma alternativa, contraendo gli indici dopo aver sviluppato il simbolo di Levi-Civita è

$$\tilde{H}_\perp = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \text{tr} \left((F_{ab} - 2R_{ab}) [\tilde{E}^a, \tilde{E}^b] \right) . \quad (2.81)$$

Inoltre, si ha la relazione per i generatori di SO(3)

$$\{\mathcal{G}_i(x), \mathcal{G}_j(y)\} = \epsilon_{ij}{}^k \mathcal{G}_k(x) \delta(x, y) . \quad (2.82)$$

Adesso, nel caso lorentziano ($\sigma = -1$ e $\beta = i$), possiamo presentare la struttura dell'algebra dei vincoli, dati da (2.71) (2.78) (2.79). Questa è semplice da calcolare, e i risultati vengono sintetizzati in queste semplice espressioni [2]

$$\mathcal{G}(N_i) = \int d^3x N_i (D_a \tilde{E}^a)^i, \quad (2.83)$$

$$H[N^a] = \int d^3x N^b F_{ab}^i \tilde{E}_i^b - \mathcal{G}(N^a A_a^i), \quad (2.84)$$

$$H[N] = \int d^3x N(x) H_\perp(x) = \int d^3x N \epsilon^{ij}{}^k \tilde{E}_i^a \tilde{E}_j^b F_{ab}^k, \quad (2.85)$$

Allora l'algebra dei vincoli è data da

$$\{\mathcal{G}(N_i), \mathcal{G}(N_j)\} = \mathcal{G}([N_i, N_j]), \quad (2.86)$$

$$\{H[N^a], H[M^b]\} = H[\mathcal{L}_{\mathbf{N}}\mathbf{M}], \quad (2.87)$$

$$\{H[N], H[M]\} = H[K^a] - \mathcal{G}(A_a^i K^a), \quad (2.88)$$

$$\{H[N^a], \mathcal{G}(N_i)\} = \mathcal{G}(\mathcal{L}_{\mathbf{N}}N_i), \quad (2.89)$$

$$\{\mathcal{H}[N^a], \mathcal{H}[M]\} = H[\mathcal{L}_{\mathbf{N}}M], \quad (2.90)$$

$$\{\mathcal{G}(N_i), H[N]\} = 0. \quad (2.91)$$

Identifichiamo, nei vincoli appena descritti $K^a = 2\tilde{E}_i^a \tilde{E}_i^b (N\partial_a M - M\partial_a N)$ e \mathcal{L} la derivata di Lie. Dunque, qui si vede chiaramente che si parla di vincoli di prima classe. Inoltre, bisogna notare che quest'algebra non è una algebra di Lie, dal momento che una delle costanti di struttura (della equazione (2.88)) non è costante ma dipende dal campo \tilde{E}_i^a , dalla definizione di K^a .

In questo modo abbiamo ottenuto una consistenza dinamica del sistema vincolato, ossia questi sono preservati nel tempo, che è valido quando le parentesi di Poisson tra tutti i vincoli sono combinazioni dei vincoli stessi.

Consideriamo adesso di riscrivere il vincolo hamiltoniano in un modo comodo per la trattazione del capitolo seguente. Anzitutto, prendiamo la parte "euclidea", avendo posto $\beta = \sigma = 1$, per l'espressione del vincolo hamiltoniano

$$H_E = \frac{\text{tr}(F_{ab}[\tilde{E}^a, \tilde{E}^b])}{\sqrt{h}}. \quad (2.92)$$

Riprendendo la (2.75) si trova

$$[\tilde{E}^a, \tilde{E}^b]_i = -\sqrt{h}\epsilon^{abc}e_c^i, \quad (2.93)$$

dove si è usata la forma del determinante

$$(\det e_i^d)\epsilon^{abc} = e_i^a e_j^b e_k^c \epsilon^{ijk}. \quad (2.94)$$

Inoltre, dalla espressione del volume

$$V = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h} = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{|\det \tilde{E}_i^a|}, \quad (2.95)$$

si ha $2\delta V/\delta \tilde{E}_i^c(x) = e_c^i(x)$, e quindi

$$\frac{[\tilde{E}^a, \tilde{E}^b]_i}{\sqrt{h}} = -2\epsilon^{abc} \frac{\delta V}{\delta \tilde{E}_i^c} = -2\frac{\epsilon^{abc}}{8\pi\beta} \{A_c^i, V\}. \quad (2.96)$$

Questo ci porta alla espressione

$$H_E = -\frac{1}{4\pi\beta}\epsilon^{abc}\text{tr}(F_{ab}\{A_c, V\}) . \quad (2.97)$$

Considerando, poi, anche l'espressione della traccia integrata della curvatura estrinseca,

$$T \equiv \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{h}K = \int_{\Sigma} d^3x K_a^i \tilde{E}_i^a , \quad (2.98)$$

per cui,

$$\{A_a^i(x), T\} = 8\pi\beta K_a^i(x) . \quad (2.99)$$

Infatti, per $\mathbf{H}_E \equiv \int d^3x H_E$ si trova

$$\{\mathbf{H}_E, V\} = 8\pi\beta^2 GT . \quad (2.100)$$

Infine, consideriamo questa somma per un qualsiasi β ,

$$\tilde{H}_{\perp} + \frac{1 - \beta^2(\sigma + 1)}{\beta^2} H_E = \frac{\beta^2\sigma - 1}{2\beta^2 |\det \tilde{E}_i^a|} (F_{ab}^i - R_{ab}^i) [\tilde{E}^a, \tilde{E}^b]_i . \quad (2.101)$$

Questa combinazione di termini è fatta in modo da eliminare il termine di curvatura. Adesso, dalla (2.65) e (2.68)

$$R_{ab}^i = F_{ab}^i + \beta^2 \epsilon_{jk}^i K_a^j K_b^k + 2\beta D_{[b} K_{a]}^i . \quad (2.102)$$

Poi, usando la (2.93) e (2.99) si trova, dopo altre manipolazioni [22]

$$\tilde{H}_{\perp} = -\frac{1 - \beta^2(\sigma + 1)}{\beta^2} H_E + \frac{\beta^2\sigma - 1}{2(4\pi\beta)^3} \epsilon^{abc}\text{tr}(\{A_a, T\}\{A_b, T\}\{A_c, V\}) . \quad (2.103)$$

Questa è l'espressione, il punto di partenza, necessaria per la discussione della hamiltoniana quantistica nel prossimo capitolo. Questa forma di \tilde{H}_{\perp} , essendo espressa attraverso le parentesi di Poisson con operatori geometrici, sarà proprio quella che ci permetterà di vincolare la teoria quantistica.

Capitolo 3

La rappresentazione a loop della Gravità Quantistica

Nel capitolo precedente si è formulata la teoria della relatività generale come teoria hamiltoniana di connessioni. In questo capitolo si applicheranno queste tecniche per costruire una rappresentazione a loop della quantizzazione del campo gravitazionale, sfruttando il programma di quantizzazione di Dirac.

Bisogna richiamare alla memoria che si stanno considerando connessioni complesse in $SU(2)$, in quanto gruppo di gauge esteso al gruppo dei loop visto in 1.6. Inoltre, si è osservato in 1.8 che la rappresentazione a loop è stata introdotta tramite una trasformata di loop. Questi strumenti verranno usati per descrivere e ricavare i vincoli di Gauss ed hamiltoniani, insieme a quello di diffeomorfismo, in termini dei loop. Nonostante, formalmente, questo possa essere eseguito tramite una trascrizione dei termini secondo una adatta algebra di operatori, detta T algebra, qui verrà descritto solo la rappresentazione tramite la trasformata di loop già introdotta precedentemente.

Lo spazio degli stati di una teoria $SU(2)$ in termini della rappresentazione a loop è formata da funzioni d'onda con supporto nel gruppo dei loop

$$\Psi(\gamma) \quad t.c. \quad \Psi(\gamma) = \Psi(\gamma^{-1}), \quad (3.1)$$

che soddisfa tutte quelle identità di Mandelstam già discusse nel primo capitolo. Il vantaggio di avere queste identità, come già detto, sta nel fatto di poter scrivere la funzione d'onda dipendente da più loop in termini di un singolo loop, restringendo lo studio solamente a queste funzioni d'onda.

La prima parte, dunque, tratterà della applicazione delle idee della rappresentazione a loop alla quantizzazione della relatività generale basata sulla formulazione delle nuove variabili di Ashtekar, per poi introdurre le espressioni esplicite per le equazioni di vincolo. La seconda, invece, riguarda una parte più tecnica, ossia la regolarizzazione della hamiltoniana in termini dei loop, e la discussione di questioni generali riguardanti lo spazio degli stati della teoria.

3.1 Vincoli per la trasformata di loop

In questo capitolo si cercherà di ottenere la versione quantistica dei vincoli visti nel capitolo precedente tramite la trasformata di loop. Una grande differenza è l'uso di una connessione complessa nel caso generale, da cui, come si è detto, si dovrà recuperare la complessa coniugata dalle condizioni di realtà.

Programma di quantizzazione di Dirac

Bisogna, anzitutto, illustrare il programma di quantizzazione di Dirac, che ha una formulazione ben più generale, oltre la formulazione hamiltoniana della relatività generale. Il fatto che i vincoli includono tutta la dinamica è al cuore della teoria. Questo è sfruttato molto dall'approccio di quantizzazione proposto da Dirac, che è basato sulla definizione di stati dinamici fisici come quelli annichilati dai vincoli. Si può dividere la procedura in tre passi:

1. Trovare una rappresentazione delle variabili dello spazio delle fasi della teoria come operatori in uno spazio di Hilbert ausiliario "cinematico" \mathcal{H}_{kin} , che soddisfa le relazioni di commutazione standard

$$\{.,.\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [.,.];$$

2. Promuovere i vincoli a operatori \hat{H}^μ in \mathcal{H}_{kin} ;
3. Caratterizzare lo spazio delle soluzioni dei vincoli \mathcal{H}_{phys} ,

$$\hat{H}^\mu \psi = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{H}_{phys}$$

Questi, poi, dovrebbero essere completati con una conoscenza esplicita del prodotto scalare in \mathcal{H}_{kin} , e una interpretazione fisica degli osservabili quantistici [21].

Nel capitolo seguente, ci si soffermerà sulla prima parte, senza entrare in dettaglio sulla interpretazione fisica di osservabili, per non rendere eccessivamente lunga e complessa la trattazione.

Calcolo dei vincoli

Al fine di procedere con i calcoli sui vincoli assumiamo che A sia reale, operazione non ingiustificata dato che le manipolazioni in termini di questa connessione porta a espressioni operatoriali nella rappresentazione di loop che hanno le stesse relazioni di commutazione come la loro controparte nella rappresentazione di connessioni. In questo modo, la trasformazione di loop è un metodo euristico per trovare l'appropriata controparte di loop agli operatori nella rappresentazione di connessione. Nonostante i seguenti calcoli siano

alquanto euristici, bisogna evidenziare che si ottengono le stesse espressioni per i vincoli rispetto a quelle ottenute in termini della cosiddetta T algebra.

Iniziamo col considerare la parentesi di Poisson (2.69), vista nel capitolo precedente, tra la tetrad densificata \tilde{E}_j^b e la connessione $SU(2)$ $A_a^i(x)$. Queste variabili sono formalmente trasformate in operatori, che obbediscono alla relazione di commutazione ¹

$$\left[\hat{A}_a^i(x), \hat{E}_j^b(y) \right] = 8\pi\beta i \hbar \delta_j^i \delta_a^b \delta(x, y) . \quad (3.2)$$

La relazione può essere implementata tramite i due singoli operatori

$$\hat{A}_a^i(x)\Psi[A] = A_a^i(x)\Psi[A] , \quad (3.3)$$

$$\hat{E}_j^b(y)\Psi[A] = 8\pi\beta \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta A_b^j(y)} \Psi[A] , \quad (3.4)$$

dove A negli argomenti dei funzionali d'onda è una abbreviazione per $A_a^i(x)$.

A questo punto possiamo riscrivere il vincolo di Gauss, visto nella (2.71)

$$\hat{G}_i \Psi = 0 \longrightarrow D_a \frac{\delta \Psi}{\delta A_a^i} = 0 . \quad (3.5)$$

Essa esprime l'invarianza del funzionale d'onda rispetto alle trasformazioni di gauge della correzione. Invece, il vincolo di diffeomorfismo (2.78)

$$\hat{H}_a \Psi = 0 \longrightarrow F_{ab}^i \frac{\delta \Psi}{\delta A_b^i} = 0 . \quad (3.6)$$

Similmente al caso classico, esprime l'invarianza del funzionale d'onda sotto combinazione di diffeomorfismi infinitesimi e trasformazioni di gauge.

Adesso, da quanto visto nel paragrafo 1.8, definiamo

$$\hat{O}\Psi(\gamma) \equiv \int dA W_\gamma[A] \hat{O}\Psi[A] = \int dA \hat{O}^\dagger W_\gamma[A] \Psi[A] . \quad (3.7)$$

Allora si procede al calcolo per trasformare un operatore: bisogna calcolare l'azione di questo operatore su un loop di Wilson per ottenere un risultato puramente in termini di loop. Ricordiamo che, considerando l'azione sul loop di Wilson, si deve scegliere, per l'operatore che si vuole trasformare, il fattore di ordinamento opposto a quello scelto per la sua azione sulle funzioni d'onda $\Psi[A]$.

Iniziamo con la (3.6), la cui azione è data da

$$\begin{aligned} F_{ab}^i(x) \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} W_\gamma[A] &= F_{ab}^i(x) \oint_\gamma dy^\alpha \delta(y-x) \text{Tr}(H(\gamma^y) \tau^i H(\gamma_y)) \\ &= \oint_\gamma dy^\alpha \delta(y-x) \text{Tr}(H(\gamma^x) F_{ab} H(\gamma_x)) . \end{aligned} \quad (3.8)$$

¹Questo risulta formalmente essere il primo passo della quantizzazione di Dirac.

Richiamando, poi, l'azione di una derivata di loop su un loop di Wilson, riprendendo la nozione di derivata di contatto e il legame con la derivata funzionale,

$$F_{ab}^i(x) \frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} W_\gamma[A] = \oint_\gamma dy^a \delta(y-x) \Delta_{ab}(\gamma^y) W_\gamma[A], \quad (3.9)$$

allora, riscriviamo il vincolo di diffeomorfismo nella rappresentazione di loop, usando la notazione usata nel primo capitolo (sezione 1.5),

$$\hat{C}(\vec{N}) = \int d^3x N^b(x) \oint_\gamma dy^a \delta(x-y) \Delta_{ab}(\gamma^y), \quad (3.10)$$

dove \vec{N} è il vettore dato dalle componenti N^a . Questa è l'espressione esatta introdotta nel paragrafo prima menzionato, come il generatore di diffeomorfismi su funzioni del gruppo dei loop, tale che soddisfaceva l'algebra dei diffeomorfismi (ricalca quanto visto nell'espressione (2.87))

$$[\hat{C}(\vec{N}), \hat{C}(\vec{M})] = \hat{C}(\mathcal{L}_{\vec{N}}\vec{M}). \quad (3.11)$$

Si osserva qui un fatto assai notevole, ossia che un formalismo così euristico porta ai risultati aspettati, ossia l'espressione geometrica desiderata in termini di loop. A partire da questo risultato si procede a calcolare il vincolo hamiltoniano.

I calcoli per il vincolo hamiltoniano (2.79) hanno la stessa natura, la unica grande differenza sta nell'aver una seconda derivata funzionale, che ha bisogno di una ulteriore regolarizzazione. In questo paragrafo si esegue solamente il calcolo formale, mentre la sua regolarizzazione viene trattata, per quanto possibile, nel seguente paragrafo. Eseguiamo il calcolo per il vincolo che si presenta inizialmente in questo modo ^{2 3},

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp(x) W_\gamma[A] &= \epsilon^{ijk} F_{ab}^i(x) \frac{\delta}{\delta A_a^j} \frac{\delta}{\delta A_b^k} W_\gamma[A] \\ &= F_{ab}^k(x) \epsilon_{ijk} \oint_\gamma dy^b \oint_{\gamma_o^y} dz^a \delta(x-y) \delta(x-z) \text{Tr}(\tau^i H(\gamma_z^y) \tau^j H(\gamma_{yo}^z)) \\ &+ F_{ab}^k(x) \epsilon_{ijk} \oint_\gamma dy^b \oint_{\gamma_y^{o'}} dz^a \delta(x-y) \delta(x-z) \text{Tr}(\tau^j H(\gamma_y^z) \tau^i H(\gamma_{zo}^y)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Svolgiamo i calcoli usando l'espressione

$$i\epsilon^{lmn} \text{Tr}(\tau^m A \tau^n B) = \text{Tr}(\tau^l A) \text{Tr}(B) - \text{Tr}(A) \text{Tr}(\tau^l B), \quad (3.13)$$

²In questo caso sono stati esplicitati i termini di inizio e fine dei cammini di integrazione γ_o^y e $\gamma_y^{o'}$, poiché a priori formalmente diversi.

³ γ_{zo}^y e γ_y^{zo} sono loop che includono l'origine, ossia che vanno dal punto z a y (o viceversa) nel loop stesso.

dove $A, B \in SU(2)$ sono matrici. Si noti che vale anche,

$$\text{Tr}(H(\gamma_{yo}^z)) = \text{Tr}(H(\gamma_{zo}^y)), \quad (3.14)$$

$$\text{Tr}(\tau^k H(\gamma_z^y)) = -\text{Tr}(\tau^k H(\gamma_y^z)), \quad (3.15)$$

avremo l'azione della hamiltoniana sul loop di Wilson, inglobando anche F_{ab}^i nelle olonomie [2],

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp(x)W_\gamma[A] &= \oint_\gamma dy^b \oint_\gamma dz^a \delta(x-y)\delta(x-z) \\ &\times \text{Tr}(F_{ab}(x)H(\gamma_{zo}^y))\text{Tr}(H(\gamma_y^z)) - \text{Tr}(H_{zo}^y)\text{Tr}(F_{ab}(x)H(\gamma_y^z)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Adesso, riscriviamo i prodotti delle olonomie in una singola, usando le identità di Mandelstam generalizzate, quando gli elementi dell'algebra sono coinvolti. L'identità che serve è data da

$$\text{Tr}(\tau^i A) \text{Tr}(B) = \text{Tr}(\tau^i (AB + AB^{-1})) = \text{Tr}(\tau^i (BA + B^{-1}A)), \quad (3.17)$$

usando sempre delle matrici di $SU(2)$, come in precedenza. Allora, otteniamo

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp(x)W_\gamma[A] &= \oint_\gamma dy^{[b} \oint_\gamma dz^{a]} \delta(x-y)\delta(x-z) \\ &\times \text{Tr}(F_{ab}(x)[H(\gamma_y^z)H(\gamma_{yo}^z) + H(\gamma_{yo}^z)H(\gamma_y^z)]), \end{aligned} \quad (3.18)$$

usando, poi, la derivata di loop

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp(x)W_\gamma[A] &= \oint_\gamma dy^{[b} \oint_\gamma dz^{a]} \delta(x-y)\delta(x-z) \\ &\times \Delta_{ab}(\gamma^x)\text{Tr}([H(\gamma_y^z \circ \gamma_{yo}^z) + H(\gamma_{yo}^z \circ \gamma_y^z)]), \end{aligned} \quad (3.19)$$

da cui otteniamo⁴, infine l'espressione per il vincolo hamiltoniano nella rappresentazione a loop,

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp(N)\Psi(\gamma) &= \int d^3x N(x) \oint_\gamma dy^{[b} \oint_\gamma dz^{a]} \delta(x-y)\delta(x-z) \\ &\times \Delta_{ab}(\gamma^x)[\Psi(\gamma_y^z \circ \gamma_{yo}^z) + \Psi(\gamma_{yo}^z \circ \gamma_y^z)]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Si evidenzia, inoltre, che la notazione usata nella precedente espressione significa precisamente⁵

$$\Delta_{ab}(\gamma^x)\Psi(\gamma_y^z \circ \gamma_{yo}^z) \equiv \Delta_{ab}(\beta^x)\Psi(\beta)|_{\beta=\gamma_y^z \circ \gamma_{yo}^z}, \quad (3.21)$$

⁴Si ricordi che possiamo sempre usare l'identità $\Psi(\gamma) = H(\gamma)\Psi(\iota)$.

⁵Bisogna intendere $\gamma_y^z \circ \gamma_{yo}^z$ come un loop che va da y a z includendo l'origine e chiude ritornando da y a z senza la parte che include l'origine.

che indica lo stesso per l'azione della derivata di loop sulla olonomia.

Possiamo, infine, riscrivere e semplificare ulteriormente l'espressione del vincolo hamiltoniano. Tornando alla (3.18), notiamo l'uguaglianza dei termini, grazie alle identità sulle tracce introdotte precedentemente:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp(N)\Psi(\gamma) &= 2 \int d^3x N(x) \oint_\gamma dy^{[b} \oint_\gamma dz^{a]} \delta(x-y)\delta(x-z) \\ &\quad \times \Delta_{ab}(\gamma^x)\Psi(\gamma_y^z \circ \gamma_{y_0}^z). \end{aligned} \quad (3.22)$$

In questo modo, con una così compatta espressione, si recuperano nel linguaggio dei loop le informazioni delle equazioni di Einstein.

3.2 Regolarizzazione e stati fisici

In questa ultima sezione concludiamo con la discussione di come sarà possibile una costruzione delle soluzioni di questi vincoli. Inizieremo a discutere su come trattare esattamente questi vincoli, senza calcolare direttamente le loro soluzioni, che allungherebbero e complicherebbero la trattazione, quanto più il soddisfacimento dei vincoli trattati (punto di partenza fondamentale per garantire che si abbia un candidato per rappresentare uno stato fisico del sistema). Questo significa che la funzione d'onda rispetterà tutte le condizioni necessarie imposte dalla teoria della relatività generale quantistica, ossia garantisce che lo stato rappresentato dalla funzione d'onda sia fisicamente valido e consistente con i postulati delle due teorie.

3.2.1 Vincolo di diffeomorfismo

Iniziamo a trattare la regolarizzazione per il vincolo di diffeomorfismo. Abbiamo visto in dettaglio nella sezione 1.5 come un vincolo diffeomorfo agisce su funzioni di loop deformando infinitesimalmente l'argomento di loop lungo il vettore \vec{N} . Questa deformazione è essenzialmente la stessa che un loop subirebbe se esistesse in una varietà spaziale su cui viene eseguito un diffeomorfismo lungo un vettore \vec{N} . Per cui, la funzione d'onda $\Psi(\gamma)$ nella rappresentazione a loop deve essere annullata dal vincolo di diffeomorfismo, dovrebbe essere invariante sotto deformazioni dell'argomento del loop. Chiaramente, considerando questo tipo di funzioni, soddisfano immediatamente il vincolo di diffeomorfismo. Questa classe di funzioni è detta invariante dei nodi (knot invariant), che coinvolge una teoria matematica ben più complessa, di cui in questo contesto si accennerà soltanto al nome. Si noti, però, che una connessione tra teoria dei nodi e gravità quantistica fu notata per la prima volta da Rovelli e Smolin.

Tornando alla invarianza per diffeomorfismi, questa implica che si sta lavorando con funzionali della "geometria" piuttosto che con funzionali di una metrica, come nella

gravità quantistica con le variabili tradizionali. Questo significa che i funzionali rilevanti sono quelli che dipendono dalle proprietà invarianti sotto diffeomorfismi dello spazio piuttosto che da una specifica configurazione metrica. Inoltre, la situazione è anche qualitativamente diversa rispetto a quella nella rappresentazione delle connessioni già discussa, ossia dove si dovevano considerare funzioni di connessioni invarianti per diffeomorfismi. Invece, è evidente che per funzioni di loop si possono costruire in più modi funzioni invarianti per diffeomorfismi, ossia funzioni che dipendono dal numero di intersezioni di un loop; oppure, il numero di angoli o "kink", nodi, nel loop. Questi sono esempi di funzioni che sono invarianti per diffeomorfismi, di cui andremo a vedere in dettaglio il modo in cui trattarle. Dunque, vediamo come il cambio di prospettiva dato dalla rappresentazione a loop è molto importante nel trovare gli stati fisici che sono annullati dai vincoli. Anche se, troveremo molte soluzioni dei vincoli nella rappresentazione a loop, di cui il corrispettivo in termini di connessioni non è noto o ci si aspetta sia piuttosto complicato o mal definito.

3.2.2 Vincolo hamiltoniano

Trattato il vincolo di diffeomorfismi, che impone che le funzioni d'onda siano invarianti sotto trasformazioni diffeomorfe, trattiamo la regolarizzazione del vincolo hamiltoniano che dovrà essere compatibile con l'invarianza per diffeomorfismi. Discuteremo dell'azione del vincolo hamiltoniano su una generica funzione di loop, che non assumeremo essere invariante sotto deformazioni di loop, ossia in generale $\Psi(\gamma)$ non sarà annullata dal vincolo di diffeomorfismi. Dato che il vincolo hamiltoniano è un operatore non invariante per diffeomorfismi, questa è la cosa più naturale da considerare. Vedremo, infatti, che in generale l'azione della hamiltoniana su una funzione che soddisfa il vincolo di diffeomorfismi produce come risultato una funzione di loop che non è invariante per diffeomorfismi.

Il motivo per cui adesso vogliamo considerare l'azione della hamiltoniana su tutte le funzioni di loop è relativo al fatto che la derivata di loop non è ben definita per funzioni invarianti per diffeomorfismi. La nozione di derivata di loop, infatti, coinvolge in generale un cambio di topologia nel loop, ossia i due loop possono appartenere a due distinte classi diverse di "nodi". Infatti, due loop sono considerati equivalenti se possono essere trasformati uno nell'altro attraverso una serie di deformazioni continue, senza tagliare o incrociare se stessi. Queste deformazioni sono chiamate omotopie di loop. Ogni classe di equivalenza rappresenta un tipo di nodo distintivo. Dunque, l'aggiunta del loop infinitesimale quindi non equivarrebbe ad una piccola variazione nella funzione del loop, ed il limite coinvolto nella derivata non è ben definito. Quello che si vuole fare, allora, è considerare le funzioni invarianti rispetto a diffeomorfismi come limiti opportuni di funzioni non invarianti che sono loop differenziabili. Anche l'azione del vincolo hamiltoniano su una funzione invariante di diffeomorfismo sarà definita in un processo limitante.

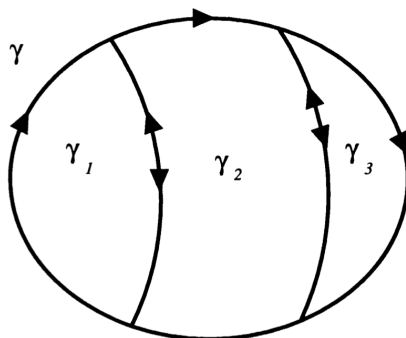


Figura 3.1: Il loop usato nelle identità di Mandelstam che non è soddisfatto dagli stati fisici "naive".

Per uno studio approfondito dobbiamo anzitutto considerare che l'azione del vincolo hamiltoniano è differente se consideriamo un loop con o senza intersezioni, per cui dovremo studiare separatamente l'azione del vincolo su una generica funzione di loop per loop regolari, loop con un nodo o loop con intersezioni. In generale, l'azione dell'Hamiltoniana comporta una scissione e un ricalcolo dell'argomento della funzione d'onda. Nel caso di loop o nodi non intersecanti, il contributo restituisce lo stesso anello originale poiché $\gamma_y^z \rightarrow \gamma$ e $\gamma_{y_0}^z \rightarrow \iota$ nel limite. Chiaramente il ricalcolo dell'argomento non è banale solo per le intersezioni. A livello formale di questa discussione, l'hamiltoniano ha un contributo non nullo nelle intersezioni e nei nodi, ma non nei punti in cui i loop sono regolari.

Il fatto che il vincolo hamiltoniano formalmente si annulla nei punti dove i loop sono regolari e non intersecanti ha portato alla costruzione di un importante insieme di "stati fisici", considerando le funzioni d'onda $\Psi(\gamma)$ con supporto solo su loop non intersecanti e regolari,

$$\Psi(\gamma) = \begin{cases} \Psi_0(\gamma) & \text{se } \gamma \text{ è regolare e non intersecante,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

dove $\Psi_0(\gamma)$ è un invariante di nodi qualsiasi. Formalmente, però, l'hamiltoniana si annulla su questi stati, dato che non dà contributo se il loop γ è o regolare o intersecante per quanto già detto. In questo modo, questo stato ha la forma di una funzione a gradino nello spazio dei loop. Tuttavia, bisogna evidenziare che una definizione così "naive" degli stati fisici porta a dei problemi legati alle proprietà che essi devono soddisfare, tra cui le identità di Mandelstam. Queste implicano relazioni tra i valori che una funzione d'onda assume quando valutata su loop con e senza intersezione. È facile verificare che le funzioni d'onda sopra proposte non soddisfano le opportune relazioni. Infatti, se consideriamo un loop non intersecante γ ottenuto dalla composizione di altri tre loop

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, come mostrato in figura 3.1, e applicando le identità di Mandelstam,

$$\Psi(\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3) + \Psi(\gamma_1 \circ \gamma_2 \circ \gamma_3^{-1}) = \Psi(\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_3) + \Psi(\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma_3^{-1}), \quad (3.23)$$

si vede immediatamente che secondo quanto evidenziato precedentemente il primo termine è l'unico che non coinvolge intersezione tra i vari componenti, quindi l'unico non nullo. Quindi, quello che concludiamo è una vera e propria contraddizione: $\Psi_0(\gamma) = 0$.

Una soluzione può essere considerando di costruire insiemi di stati composti da quelli non intersecanti assegnando valori appropriati ai loop con intersezioni tramite l'identità di Mandelstam. Invece, lavori successivi hanno suggerito l'introduzione del concetto di "spin network" che dà un significato concreto a tale costruzione degli stati fisici dei loop.

Calcoli regolarizzati sul vincolo hamiltoniano

Abbandonando queste discussioni che richiedono sviluppi successivi legati a considerazioni ben più complesse, viriamo verso la discussione dell'azione regolarizzata del vincolo hamiltoniano.

Consideriamo il vincolo (3.22) ottenuto nell'ultima sezione, dove procediamo con il dividere i punti, valutando una delle delta di Dirac in questo modo:

$$\begin{aligned} \hat{H}_\epsilon(N)\Psi(\gamma) &= \int d^3x N(x) \oint_\gamma dy^b \oint_\gamma dz^a \delta(x-y) f_\epsilon(y-z) \\ &\quad \times \Delta_{ab}(\gamma_o^y) \Psi(\gamma_y^z \circ \gamma_{y_o}^z), \end{aligned} \quad (3.24)$$

dove $f_\epsilon(y-z)$ è una funzione simmetrica della famiglia delle gaussiane,

$$f_\epsilon(x-y) = (\pi\epsilon)^{-3/2} \exp\left(\frac{-|x-y|^2}{\epsilon}\right). \quad (3.25)$$

Si noti che si possono sempre considerare altre famiglie di funzioni di regolarizzazione, come quella di Heaviside $f_\epsilon(y-z) = \Theta_\epsilon(x, y)/\epsilon^3$ od altre. La metrica di fondo entra in ogni caso dato che si deve calcolare la distanza tra x ed y . Inoltre, è chiaro che vi sono diverse possibilità per regolarizzare il vincolo e cambiano a seconda di quale scelta viene eseguita, ma tutte dovranno coincidere nel limite.

Ciò che si è considerato è detto in generale "point splitting", che, rappresentato dalla funzione di regolarizzazione, implica che il percorso nell'espressione regolarizzata non chiude il loop. Questa regolarizzazione permette di trattare i contributi locali in modo finito, evitando divergenze, che si sarebbero avute quando i campi sono valutati nello stesso punto. Questo, è chiaramente equivalente a un'operazione non gauge invariante, che si manifesta nel linguaggio dei loop come la presenza di un percorso aperto. Tuttavia, quando le funzioni di regolarizzazione sono rimosse le estremità dei percorsi coincideranno e si recupera la gauge invarianza. Quindi, si può semplicemente scegliere di lavorare

in una struttura regolarizzata con loop aperti e poi recuperare la gauge invarianza come limite dopo la regolarizzazione. Un'altra procedura è chiudere i loop aggiungendo percorsi infinitesimali, tale che nel limite il loro contributo si annulla. Si noti, però, che queste costruzioni nascondono implicite assunzioni sul comportamento delle funzioni d'onda di loop, dato che non è vero per tutte le funzioni che i contributi di percorsi infinitesimi si annullano nel limite.

Eseguiamo, adesso, i calcoli in modo esplicito introducendo una parametrizzazione per i loop $\gamma^a(s)$ con $s \in [0, 1]$ e riscriviamo l'espressione dell'hamiltoniano,

$$\begin{aligned} \hat{H}_\epsilon(N)\Psi(\gamma) &= \int_0^1 ds \int_0^1 dt \dot{\gamma}^{[b}(s)\dot{\gamma}^{a]}(t)N(\gamma(s)) \\ &\quad \times f_\epsilon(\gamma(s) - \gamma(t))\Delta_{ab}(\gamma_o^s)\Psi(\gamma_s^t \circ \gamma_{s_o}^t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove, $\dot{\gamma}^a$ è il vettore tangente al loop in questa parametrizzazione. Dividiamo, adesso, l'integrale in t , tale che

$$\begin{aligned} \hat{H}_\epsilon(N)\Psi(\gamma) &= \left(\int_0^1 ds \int_s^1 dt + \int_0^1 ds \int_0^s dt \right) \dot{\gamma}^{[b}(s)\dot{\gamma}^{a]}(t) \\ &\quad \times N(\gamma(s))f_\epsilon(\gamma(s) - \gamma(t))\Delta_{ab}(\gamma_o^s)\Psi(\gamma_s^t \circ \gamma_{s_o}^t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Questa espressione, come già anticipato, coinvolge loop aperti. Di conseguenza bisogna chiuderli aggiungendo ad essi loop che vanno, da s a t in uno dei termini, e da t ad s nell'altro. Dato che assumiamo che il punto d'azione sia regolare, non c'è ambiguità nel processo in cui chiudiamo i percorsi, tale che otteniamo $\gamma_s^t \circ \gamma_{s_o}^t \rightarrow \gamma^{-1}$ quando $t > s$ e $\gamma_s^t \circ \gamma_{s_o}^t \rightarrow \gamma$ quando $t < s$. Quanto detto è immediato e semplice da verificare graficamente, guardando i discorsi fatti nei primi capitoli. Adesso facciamo delle ulteriori considerazioni per semplificare ancora di più l'espressione del vincolo.

Se consideriamo che nel limite $\epsilon \rightarrow 0$, $\dot{\gamma}^a(t) \rightarrow \dot{\gamma}^a(s) + \ddot{\gamma}^a(s)(t-s)$ e $\gamma^a(s) - \gamma^a(t) \rightarrow \dot{\gamma}^a(s)(s-t)$, i termini che coinvolgono i due vettori tangenti si cancellano. Introduciamo, poi, una nuova variabile $u = t - s$ per il primo integrale e $u = s - t$ per il secondo, per cui otterremo

$$\hat{H}_\epsilon(N)\Psi(\gamma) = 2 \int_0^1 \int_0^1 ds du u \dot{\gamma}^{[b}(s)\ddot{\gamma}^{a]}(s)N(\gamma(s))f_\epsilon(u\dot{\gamma}(s))\Delta_{ab}(\gamma_o^s)\Psi(\gamma) \quad (3.28)$$

e notando che con la funzione di regolarizzazione gaussiana

$$\frac{\epsilon}{2|\dot{\gamma}|^2} \partial_u f_\epsilon(u\dot{\gamma}(s)) = -u f_\epsilon(u\dot{\gamma}(s)), \quad (3.29)$$

abbiamo questa espressione dell'hamiltoniano

$$\hat{H}_\epsilon(N)\Psi(\gamma) = -\frac{1}{\pi^{3/2}\epsilon^{1/2}} \int_0^1 ds \frac{\dot{\gamma}^{(b}(s)\ddot{\gamma}^{a]}(s)}{|\dot{\gamma}(s)|^2} N(\gamma(s))\Delta_{ab}(\gamma_o^s)\Psi(\gamma). \quad (3.30)$$

Si osserva immediatamente che l'azione della hamiltoniana è divergente nel limite. Questo è il caso per tutti i tipi di loop, tale che siamo forzati a definire un Hamiltoniano rinormalizzato come l'operatore regolato che ha limite finito per $\epsilon \rightarrow 0$, ossia

$$\hat{H} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\epsilon} \hat{H}_\epsilon . \quad (3.31)$$

Se guardiamo l'azione del vincolo hamiltoniano su un punto differenziabile di un loop è propriamente regolarizzato e rinormalizzato e soprattutto non si annulla. I termini risultanti dipendono da derivate di ordine superiore del loop e sono definiti come "termini di accelerazione". Il risultato ottenuto (3.30), poi, è invariante per scelta di parametrizzazione dei loop ma dipende esplicitamente dalla metrica attraverso $|\dot{\gamma}(s)|^2$, che riflette il fatto che la funzione di regolarizzazione non è invariante per diffeomorfismi.

Notiamo, inoltre, che l'espressione (3.30) può essere reinterpretata come l'azione su uno stato di loop di un diffeomorfismo lungo il campo vettoriale $\dot{\gamma}^{(b)}(s)\ddot{\gamma}^a(s)/|\dot{\gamma}(s)|^2$ [2]. Questo, chiaramente non è un diffeomorfismo standard lungo un campo vettoriale esterno fissato, ma il campo vettoriale è definito dal loop stesso. Se il loop ha intersezioni, allora il campo vettoriale non è ben definito; mentre, se il loop è regolare si può costruire un campo vettoriale \vec{N} sulla varietà, tale che sul loop prenda valori come $\dot{\gamma}^{(b)}(s)\ddot{\gamma}^a(s)/|\dot{\gamma}(s)|^2$ e la funzione d'onda si annulli (se invariante per diffeomorfismi). Quindi, questa reinterpretazione si basa sull'idea che il vincolo hamiltoniano può agire come un generatore di diffeomorfismo lungo il campo vettoriale definito dal loop (se il loop è regolare, il campo vettoriale è ben definito e l'invarianza della funzione d'onda può essere verificata in modo coerente utilizzando la derivata di Lie, come visto in sezione 1.5). I contributi dati dai termini di accelerazione si annullano se, appunto, si considerano funzioni d'onda di loop regolari che sono invarianti per diffeomorfismi, ed infine risolvere il vincolo hamiltoniano. Si noti, poi, che in generale la presenza dei termini di accelerazione trovati potrebbero includere termini che rappresentano discontinuità, indicando un'accelerazione infinita o indefinita nel punto, per cui in generale in questo modo i loop di Wilson non soddisfano il vincolo hamiltoniano. Nella rappresentazione a loop, dato che trattiamo stati invarianti per diffeomorfismi, si possono far sparire i termini di accelerazione e considerare gli stati knot invarianti come quelli che soddisfano il vincolo, senza intersezioni (senza considerare quanto detto sulle identità di Mandelstam). Chiaramente, in questo contesto è immediato verificare che quanto detto riguardo i loop regolari ci porti a verificare che i loop di Wilson soddisfino effettivamente il vincolo hamiltoniano (ossia, quando applicati, gli operatori di vincolo annichilano lo stato descritto dai loop di Wilson).

Consideriamo adesso l'azione dell'hamiltoniano in un punto dove il loop ha un "kink", ossia una discontinuità del vettore tangente alla curva, ma con una sola linea che va fuori e dentro il punto (senza intersezioni), come mostrato in figura 3.2. Adesso, nella espressione dell'hamiltoniano c'è da considerare un contributo all'ordine inferiore rispetto al caso precedente, derivante proprio dal fatto che nel punto del nodo (kink) s_0 vi sono due possibili valori per la tangente del loop, denotati con $\dot{\gamma}_+^a$ e $\dot{\gamma}_-^a$. In questo caso ci

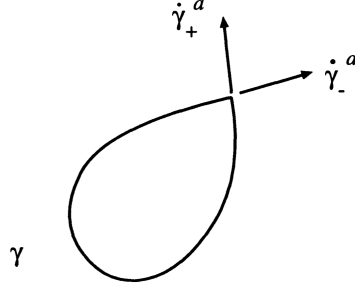


Figura 3.2: *Il loop con un nodo, dove si sono indicati i vettori tangenti nella discontinuità $\dot{\gamma}_\pm^a$.*

sarà bisogno, dato che la funzione d'onda è definita su tutto il loop, in punti discreti per semplificare la gestione dell'integrale e delle derivate funzionali, garantendo che l'operatore sia ben definito (per $N(\gamma(s))$ la presenza di discontinuità, come nodi e intersezioni, serve la sua valutazione in punti specifici in modo da gestire queste irregolarità). Nel calcolo formale, dunque, avremo un termine $\dot{\gamma}_+^a \dot{\gamma}_-^a \Delta_{ab}$ che non si annulla, contrariamente a quanto visto per un loop regolare per le ragioni già citate. Allora, il calcolo formale ci porta in questo caso, partendo dalla,

$$\hat{H}_\epsilon(N)\Psi(\gamma) = 2 \frac{\dot{\gamma}_+^{[b} \dot{\gamma}_-^{a]}}{(\pi\epsilon)^{3/2}} \int_0^1 \int_0^1 ds dt \exp\left(-\frac{s^2 + t^2 + 2st \vec{\gamma}_+ \cdot \vec{\gamma}_-}{\epsilon}\right) \Delta_{ab}(\gamma_o^{x_i}) \Psi(\gamma), \quad (3.32)$$

dove x_i è il punto in cui il nodo giace. Questa espressione, in presenza di più nodi nel loop, sarebbe la stessa per ognuno di essi, per cui in aggiunta si introdurrebbe una somma discreta su tutti i nodi presenti. Inoltre, in questa stessa espressione si è implicitamente assunta una parametrizzazione tale che $|\dot{\gamma}_\pm^a|^2 = 1$. Si noti, però, che questa espressione è ottenuta considerando che i vettori tangenti alla curva, formano un angolo discontinuo, per cui sarà necessario includere il prodotto scalare di questi vettori tangenti nell'espressione (3.25), il cui segno del doppio prodotto dipende dall'angolo formato da questi due vettori. A questo punto possiamo calcolare esplicitamente l'integrale in tale modo,

$$\begin{aligned} \hat{H}_\epsilon(N)\Psi(\gamma) &= 2 \frac{\dot{\gamma}_+^{[b} \dot{\gamma}_-^{a]}}{\sqrt{1 - (\vec{\gamma}_+ \cdot \vec{\gamma}_-)^2}} \frac{N(x_i)}{(\pi\epsilon)^{1/2}} \\ &\times \left(\frac{1}{4} - \frac{\arcsin(\vec{\gamma}_+ \cdot \vec{\gamma}_-)}{2\pi} \right) \Delta_{ab}(\gamma_o^{x_i}) \Psi(\gamma). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Questo risultato è ottenuto dal calcolo esplicito dell'esponenziale gaussiano, avendo fatto un cambio di variabile in coordinate polari, per cui otteniamo una dipendenza dall'arcoseno. Anche in questa espressione, come il risultato della (3.30), deve essere rinormalizzato

con un fattore $\sqrt{\epsilon}$ per ottenere un contributo finito. Inoltre, l'espressione è chiaramente dipendente da una metrica di fondo, dato il prodotto scalare tra i vettori tangenti.

Possiamo anche riscrivere in modo semplice l'espressione in termini di una quantità chiamato elemento d'area normalizzato,

$$\sigma_N^{ab}(\gamma) = \frac{\dot{\gamma}_+^{[b} \dot{\gamma}_-^{a]}}{\sqrt{1 - (\vec{\gamma}_+ \cdot \vec{\gamma}_-)^2}} . \quad (3.34)$$

Questo elemento d'area può essere ottenuto in generale in termini di un prodotto esterno dei vettori tangenti del loop, per cui è detto normalizzato nel senso che il vettore duale all'elemento d'area ha una norma costante, che non dipende dall'angolo formato dai vettori tangenti (ossia, una volta che l'elemento d'area è normalizzato, deve rimanere invariato sotto trasformazioni, che cambiano l'angolo dei vettori tangenti, preservando così le proprietà geometriche intrinseche del loop). Ecco perché possiamo dire che questo elemento sia effettivamente indipendente dalla metrica di fondo. L'elemento d'area normalizzato risulta essere indefinito quando i due vettori tangenti coincidono, anche se il prodotto

$$\sigma_N^{ab}(\gamma) \left(\frac{1}{4} - \frac{\arcsin(\vec{\gamma}_+ \cdot \vec{\gamma}_-)}{2\pi} \right) \quad (3.35)$$

risulta essere ben definito. Infatti, quest'ultima espressione si annulla quando il loop è regolare (ossia i due vettori coincidono), grazie all'elemento arcoseno nell'espressione. Questo è in accordo con quanto detto precedentemente, per cui il contributo dei vettori tangenti si annulla in punti regolari (in assenza di nodi).

Inoltre, è molto importante osservare che, come nel caso dei termini di accelerazione, l'azione dell'hamiltoniano su un nodo può essere ridotto a un diffeomorfismo. Consideriamo l'espressione per il vincolo di diffeomorfismi,

$$\hat{C}(\vec{N})\Psi(\gamma) = \int d^3x N^a(x) \oint_{\gamma} dy^b \delta(x-y) \Delta_{ab}(\gamma^y) \Psi(\gamma) \quad (3.36)$$

e consideriamo il particolare campo vettoriale

$$N_{\epsilon}^a(x) = M(x) \oint_{\gamma} dz^a \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{|z-x|^2}{\epsilon}\right) . \quad (3.37)$$

Da qui è immediato vedere che, avendo riscritto opportunamente le variabili di integrazione secondo le espressioni originali del vincolo hamiltoniano,

$$\hat{H}(M)\Psi(\gamma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi\sqrt{\epsilon}} \hat{C}(\vec{N}_{\epsilon})\Psi(\gamma) . \quad (3.38)$$

Quindi, vediamo che l'azione di un particolare diffeomorfismo su uno stato di loop è esattamente lo stesso di uno stato hamiltoniano nel limite regolarizzato se il loop è regolare

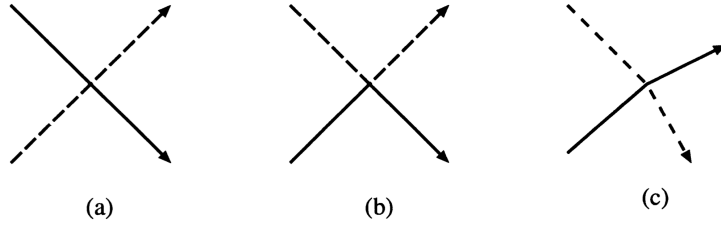


Figura 3.3: Tre differenti possibilità per una intersezione: (a) una intersezione dritta; (b) intersezione con un nodo; (c) intersezione con più di due vettori tangenti (gli ultimi due sono i casi detti "nodi all'intersezione").

con al massimo un numero finito di nodi e nessuna intersezioni. Avendo considerato stati che hanno supporto su loop con nodi e sono invarianti per diffeomorfismi, questi stati soddisfano automaticamente il vincolo hamiltoniano (senza considerare il conflitto con le identità di Mandelstam già menzionato varie volte, le quali ci impediscono di considerare tali funzioni come veri stati del campo gravitazionale).

Discutiamo, infine, del caso di un loop con intersezioni. L'attenzione verrà data a intersezioni con tra due vettori, ma quelle di ordine superiore sono una immediata generalizzazione. Il calcolo è molto simile a quello fatto nel caso di nodi, con la differenza che in questi casi avremo da considerare quattro possibili contributi, prendendo le quattro linee adiacenti all'intersezione. Dobbiamo, però, considerare che l'argomento della funzione ha bisogno di una ridefinizione del loop: i vettori $\hat{\gamma}_{\pm}^a$ corrispondono ai due vettori tangenti nel caso delle due linee intersecanti (una convenzione dell'orientazione deve essere determinata a priori come fatto in figura 3.2).

Come possibile vedere dalla figura 3.3 abbiamo differenti possibilità di intersezione. Il primo caso è quello che dà risultati qualitativamente differenti rispetto agli altri due. Nel primo caso, i quattro contributi delle linee, derivanti dal prendere le righe a coppie, si sommano in modo da poter trascurare il termine di arcoseno, tale che otterremo

$$\hat{H}_{\epsilon}(N)\Psi(\gamma) = 2\sigma_N^{ab}(\gamma) \frac{N(x_i)}{(\pi\epsilon)^{1/2}} \Delta_{ab}(\gamma_{x_i}^{x_i}) \Psi(\gamma_{x_i}^{x_i} \circ \gamma_{x_i}^{x_i}). \quad (3.39)$$

In questa espressione è notevole come essa dipenda dai vettori tangenti soltanto attraverso l'elemento normalizzato d'area, quindi indipendente dalla metrica di fondo usata per la regolarizzazione. Sfortunatamente, però, questo risultato è indefinito nel limite in cui i vettori tangenti coincidano, al contrario del caso del singolo nodo.

Riprendendo il caso in cui ci siano nodi all'intersezione, le cancellazioni sopracitate dell'arcoseno non avvengono e l'espressione che otterremo sarà dipendente dalla struttura di fondo. Quindi avremo termini simili a quelli già visti nell'ultima espressione con una ridefinizione dell'argomento della funzione del loop, mentre altri avranno γ come argomento, come accaduto nel caso di nodi.

Concludiamo evidenziando il fatto che in quest'ultimo caso di intersezioni nel loop ci portano a non poter riscrivere l'hamiltoniano come un diffeomorfismo, a differenza del caso dei nodi o loop regolare. L'azione dell'hamiltoniano regolarizzato, allora, sarà non banale nei punti in cui i loop hanno intersezioni, nei quali punti l'azione dell'hamiltoniano risulta essere la somma di termini costituiti da un semplice ridefinizione dell'argomento della funzione d'onda su cui agisce una derivata del loop contratta con l'elemento di area normalizzata del loop nel punto di intersezione, visto in (3.39).

Dunque, la procedura utilizzata è stata utile nel introdurre un metodo di regolarizzazione senza fare alcuna assunzione di fondo sull'esistenza di derivate di loop delle funzioni d'onda, nel senso che, come già evidenziato, le funzioni invarianti sotto diffeomorfismi non dipendono dalla parametrizzazione o dalla posizione specifica del loop nello spazio, ma solo dalla sua classe topologica (o classe di nodo). Questo significa che due loop, che possono essere deformati l'uno nell'altro in modo continuo, rappresentano la stessa classe topologica, e la funzione invariante sotto diffeomorfismi darebbe lo stesso valore per entrambi, di conseguenza rendendo il concetto di un piccolo cambiamento infinitesimale mal definito. Il conflitto, infatti, è stato risolto usando un appropriato procedimento di limite per la definizione della funzione d'onda, tale che essi risulteranno invarianti per diffeomorfismi solo nel limite, al di là del quale la derivata di loop è ben definita.

Conclusioni

In questo percorso si sono analizzati i punti cardine della rappresentazione a loop della quantizzazione del campo gravitazionale, mostrando le criticità di questa impostazione.

Si è osservato come dalla struttura del gruppo dei loop si sono recuperati tutti quegli oggetti già noti dalle teorie di Gauge. Inoltre, abbiamo mostrato come i loop di Wilson, in quanto loop estesi, ci permettono di rappresentare le teorie di gauge, oltre che essere essi stessi oggetti gauge invarianti. Successivamente, si è analizzata la proposta di una formulazione hamiltoniana delle teorie di gauge in termini di loop, cosa che ci ha permesso di eliminare delle ridondanze introdotte dalle simmetrie di gauge e lavorare direttamente con lo spazio degli stati fisici [2]. Infine, si sono applicate queste tecniche, insieme alla formulazione di Ashtekar, per ricavare le equazioni dei vincoli nella rappresentazione a loop, mostrando che sono proprio i loop di Wilson, funzioni di loop non auto-intersecanti e regolari, a soddisfare tali equazioni.

Sebbene si sia mostrata una formulazione prima della gravità quantistica a loop, avendo anche accennato ai problemi che questa rappresentazione porta con sé, in questi anni gli sviluppi di tale teoria sono stati moltissimi, basti guardare alle molte possibilità che dà adito una tale teoria, rappresentando una delle più ricche teorie della gravità quantizzata [21].

Appendice A

L'Olonomia nelle teorie di Gauge

A.1 L'Olonomia di una connessione

Per introdurre il concetto di olonomie, iniziamo dalla teoria di Maxwell dell'elettromagnetismo. Si consideri di calcolare la circuitazione del potenziale vettore lungo una curva C , tale che se C è una curva chiusa si ha

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{n} \, d^2x, \quad (\text{A.1})$$

dove S è una qualsiasi superficie vincolata dalla curva C , ed n è il vettore normale alla superficie al punto di integrazione. Anche senza dare una dimostrazione matematica, è evidente che se si prende la circuitazione per tutte le possibili curve sulla varietà generica considerata, allora è equivalente a specificare il $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ sulla varietà. L'importanza di questo oggetto è data dalla relazione con il tensore duale di Maxwell

$$\frac{1}{2} e^{abc} F_{bc} = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^a. \quad (\text{A.2})$$

Quindi, specificando la circuitazione del potenziale vettore per tutte le possibili curve, si sta implicitamente specificando il campo. Rimanendo ancora nel caso della teoria di Maxwell, procedendo con una trasformazione di gauge, il potenziale vettore cambia di un gradiente di una funzione. Esso, chiaramente, non contribuisce alla circuitazione lungo una curva chiusa, dato che ci dà semplicemente i valori delle funzioni agli estremi e, poiché sono lo stesso punto in una curva chiusa, l'integrale è nullo. Il risultato sarà inevitabilmente un invariante di gauge.

Per quanto riguarda teorie non abeliane, come quelle di Yang-Mills, le trasformazioni di gauge sono ben più complesse e la circuitazione non sarà gauge invariante. Allora, si è elaborato una nozione che possa avere lo stesso ruolo della circuitazione nelle teorie di Maxwell, ossia la olonomia [23].

Riprendiamo, adesso, le variabili introdotte nella sezione 2.4. Prendiamo una quantità E_i^a , e si vuole trasportare una curva $\gamma^a(t)$ nello spazio più parallelamente possibile a sé stessa (come si usa fare in geometria differenziale quando si definisce il trasporto parallelo). Questo significa che la sua derivata covariante lungo la curva deve essere nulla,

$$\dot{\gamma}^a(t)D_a E^b = 0 , \quad (\text{A.3})$$

dove $\dot{\gamma}^a = d\gamma^a(t)/dt$ è il vettore tangente al vettore alla curva. Questo, dalla (2.71) (con $\beta = i$) porta a

$$\dot{\gamma}^a(t)\partial_a E^b(t) = -iG\dot{\gamma}^a(t)A_a(t)E^b(t) , \quad (\text{A.4})$$

dove A_a e E^b sono valutati al un punto della curva $\gamma^a(t)$. Integrando, si ottiene

$$E^b(t) = E^b(0) - iG \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)A_a(s)E^b(s) , \quad (\text{A.5})$$

che non è propriamente una soluzione, dato che la variabile per cui si risolve appare in entrambi i membri. Però, possiamo procedere iterativamente, inserendo la quantità nel membro sinistro nel membro destro cambiando la variabile, per cui

$$E^b(t) = E^b(0) - iG \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)A_a(s)E^b(0) - G^2 \int_0^t ds \dot{\gamma}^a(s)A_a(s) \int_0^s dw \dot{\gamma}^a(w)A_a(w)E^b(w) , \quad (\text{A.6})$$

e ripetendo il processo indefinitamente, otteniamo la somma

$$E^b(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-iG)^n \int_{t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} \gamma^{a_1}(t_1)A_{a_1}(t_1) \cdots \gamma^{a_n}(t_n)A_{a_n}(t_n) dt_1 \cdots dt_n \right) E^b(0) . \quad (\text{A.7})$$

Si può dimostrare che la somma converge per potenziali vettori lisci e finiti. La quantità nella parentesi è detta propagatore parallelo, dato che è un operatore che porta da 0 a t il "più parallelamente possibile". Infatti, data una connessione e una curva, il propagatore parallelo dà una unica soluzione alla (A.3). Inoltre, se $\gamma^a(t)$ coincide con $\gamma^a(0)$, allora si sta propagando lungo una curva chiusa, e un tale propagatore viene chiamato ologonomia. Si noti, poi, che il propagatore è una matrice, e prendendone la traccia otteniamo uno scalare, che abbiamo visto essere invariante per trasformazioni di gauge.

Rendiamo adesso il collegamento con la circuitazione ancora più trasparente, introducendo una notazione molto comune e utile. Definiamo un prodotto ordinatore di percorso come

$$P(A_{a_1}(t_1) \cdots A_{a_n}(t_n)) , \quad (\text{A.8})$$

che è il prodotto dei fattori, permutato in maniera tale che i valori più grandi di t_i appaiono prima. Infatti, per $t_1 > t_2 \dots t_n$

$$P(A_{a_1}(t_1) \dots A_{a_n}(t_n)) = A_{a_1}(t_1) \dots A_{a_n}(t_n), \quad (\text{A.9})$$

ma se $t_2 > t_1 > t_3 \dots t_n$, allora

$$P(A_{a_1}(t_1) \dots A_{a_n}(t_n)) = A_{a_2}(t_2) A_{a_1}(t_1) \dots A_{a_n}(t_n). \quad (\text{A.10})$$

Riscriviamo, con questa notazione, il propagatore parallelo

$$\begin{aligned} & \int_{t_1 > \dots > t_n > 0} \gamma^{a_1}(t_1) A_{a_1}(t_1) \dots \gamma^{a_n}(t_n) A_{a_n}(t_n) dt_1 \dots dt_n = \\ & = \frac{1}{n!} \int_0^t P(\dot{\gamma}^{a_1} A_{a_1}(t_1) \dots \dot{\gamma}^{a_n} A_{a_n}(t_n)) dt_1 \dots dt_n = \frac{1}{n!} P\left(\int_0^t \dot{\gamma}(t)^a A_a(t) dt\right)^n. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Si noti che per ottenere $1/n!$, è utile visualizzare il dominio di integrazione come un ipercubo e notare il volume su cui si sta integrando. Adesso, procediamo a definire l'esponenziale di percorso ordinato, grazie a tali considerazioni, riprendendo l'espressione (A.7)

$$P\left[\exp\left(-iG \int_0^t \dot{\gamma}^a(s) A_a(s) ds\right)\right] \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-iG)^n}{n!} P\left(\int_0^t \dot{\gamma}(t)^a A_a(t) dt\right)^n. \quad (\text{A.12})$$

Si noti, poi, che se si torna nel caso di Maxwell, ossia avendo potenziali vettori che commutano, l'ordinatore di percorso non ha alcun effetto e l'esponenziale torna ad essere il esponenziale della circuitazione, nel caso abeliano. Si è così definita una circuitazione nel caso non abeliano, tale che, generalizzando, si può anche definire un teorema di Stokes non abeliano [8]. Dunque, si può riconoscere che un esponenziale di percorso ordinato di un potenziale vettore lungo un percorso chiuso, un loop, è detta ologonomia.

Bibliografia

- [1] Marián Fecko, *Differential Geometry and Lie Groups for Physicists*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [2] Gambini, R. and Pullin, J. (1996) *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*. Cambridge: Cambridge University Press (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [3] P. Ramond, "Field theory, a modern primer", 2nd edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA (1989)
- [4] Abate, M., & Tovena, F. (2011). *Geometria Differenziale*. UNITEXT – La Matematica per il 3+2. Springer Milan. ISBN 978-88-470-1919-5. DOI: 10.1007/978-88-470-1920-1.
- [5] J. W. Barrett, *Holonomy and path structures in general relativity and Yang-Mills theory*, *Int J Theor Phys*, **30**, 1171–1215, 1991, <https://doi.org/10.1007/BF00671007>.
- [6] R. Gambini and A. Trias, *Chiral formulation of Yang-Mills equations: A geometric approach*, *Phys. Rev. D*, **27**(12), 2935–2939 (1983), <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.27.2935>.
- [7] Stanley Mandelstam, *Quantum electrodynamics without potentials*, *Annals of Physics*, Volume 19, Issue 1, 1962, Pages 1-24, ISSN 0003-4916, [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(62\)90232-4](https://doi.org/10.1016/0003-4916(62)90232-4).
- [8] Boguslaw Broda. *Non-Abelian Stokes theorem in action*. 2002. <https://arxiv.org/abs/math-ph/0012035>.
- [9] R. Gambini and J. Pullin, "Gravitation in terms of observables," *Classical and Quantum Gravity*, 2018, vol. 35. DOI: [10.1088/1361-6382/aae449](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aae449).
- [10] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, S.P. Novikov, *Modern Geometry-Methods and Applications: Part II: The Geometry and Topology of Manifolds*, Page 271.

- [11] Peskin, M.E. *An Introduction To Quantum Field Theory (1st ed.)*, CRC Press, 1995, <https://doi.org/10.1201/9780429503559>.
- [12] A. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, 1976.
- [13] C. Kiefer, *Quantum Gravity*, International Series of Monographs on Physics, OUP Oxford, 2007, ISBN 9780199212521, <https://books.google.it/books?id=zLDRIqgjW4C>.
- [14] Kenneth G. Wilson, "Confinement of quarks," *Phys. Rev. D*, vol. 10, no. 8, pp. 2445–2459, Oct 1974. doi: [10.1103/PhysRevD.10.2445](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.10.2445), <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.2445>.
- [15] R. Giles, "Reconstruction of gauge potentials from Wilson loops," *Phys. Rev. D*, vol. 24, no. 8, pp. 2160–2168, Oct 1981. doi: [10.1103/PhysRevD.24.2160](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.24.2160), <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.24.2160>.
- [16] R. Gambini and A. Trias, "Gauge dynamics in the C-representation," *Nuclear Physics B*, vol. 278, no. 2, pp. 436–448, 1986. ISSN: 0550-3213. DOI: [10.1016/0550-3213\(86\)90221-X](https://doi.org/10.1016/0550-3213(86)90221-X). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032138690221X>.
- [17] Abhay Ashtekar, Donald Marolf, e Jose Mourao. *Integration on the space of connections modulo gauge transformations*. In *Proc. Lanczos Int. Centenary Conf*, pagine 143–160, 1994.
- [18] Ericourgoulhon. *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity*. 2007. <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0703035>. arXiv:gr-qc/0703035.
- [19] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner, *Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity*, *Phys. Rev.* **116**, 1322–1330 (1959), doi: [10.1103/PhysRev.116.1322](https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322).
- [20] Abhay Ashtekar, *New Variables for Classical and Quantum Gravity*, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244–2247 (1986), doi: [10.1103/PhysRevLett.57.2244](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2244).
- [21] Carlo Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [22] Thomas Thiemann, *Introduction to Modern Canonical Quantum General Relativity*, arXiv:gr-qc/0110034, 2001.
- [23] Rodolfo Gambini e Jorge Pullin, *A First Course in Loop Quantum Gravity*, Oxford University Press, Oxford, 2011, pp. 66–70.