ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITY OF BOLOGNA

School of Science
Department of Physics and Astronomy
Master Degree in Physics

Infinitesimi e differenziali nell'insegnamento e apprendimento della Fisica

Supervisor:
Prof.ssa Olivia Levrini

Co-supervisor:
Prof. Domenico Galli

Submitted by:
Barbara Gadani

Academic Year 2023/2024

Indice

Introduzione

La tesi riguarda una analisi di come il concetto di *infinitesimo* e *differenziale* sono trattati nei libri di testo di matematica e di fisica a livello universitario. Lo studio si inquadra nel tema più generale del ruolo della matematica nell'insegnamento/apprendimento della fisica.

Nel cap. 1 a pag. 6 di questa tesi viene presa in considerazione la letteratura di ricerca in didattica della fisica che si concentra sul ruolo della matematica nei processi di insegnamento/apprendimento della fisica. In particolare, si riportano i principali quadri teorici elaborati per riflettere sul ruolo della matematica nell'apprendimento della fisica, e per riconoscere le forme di ragionamento messe in atto da esperti e/o studenti nei processi di modellizzazione matematica o di *problem solving*. I quadri teorici principali a cui si fa riferimento sono: il quadro di Redish sul processo di modellizzazione, utilizzato anche per indagare i cosiddetti "*epistemic games*" messi in atto dagli studenti nella soluzione di problemi, e il modello di Uhden, Karam, Pietrocola e Pospiech. Il modello di Karam, Uhden, Pietrocola e Pospiech sarà utilizzato nel cap. 4 a pag. 72 come strumento di analisi per individuare il ruolo attribuito alla matematica nei libri di testo e il tipo di ragionamento indotto.

Nel cap. 2 a pag. 18 si ripercorre la storia del concetto di *infinitesimo* e *differenziale* a partire dalle concezioni di Newton e Leibniz fino alla nascita dell'*analisi non-standard*. Le nozioni dell'Analisi verranno formulate e messe a confronto tra Analisi Standard e Non Standard.

Nel cap. 3 a pag. 65 si riportano studi di ricerca di didattica della matematica e della fisica sull'apprendimento/insegnamento dei concetti di *infinitesimo* e *differenziale*. Alcuni studi indagano il significato che gli studenti attribuiscono a questi concetti e le difficoltà che riscontrano nella risoluzione dei problemi e nella comprensione.

Nel §3.2 a pag. 68 si presentano i risultati delle sperimentazioni didattiche da cui emerge quanto l'*analisi non-standard*, senza perdere di rigore formale, riesca ad attivare gli aspetti più intuitivi dell'analisi matematica in modo più efficace rispetto l'*analisi tradizionale* (*standard*).

Le risorse emerse dalla ricerca sul concetto di *differenziale* e di *infinitesimo* e sul ruolo della matematica nei processi di insegnamento/apprendimento della fisica, sono state utilizzate nel cap. 4 a pag. 72 per analizzare una selezione di alcuni libri di matematica e di fisica a livello universitario, scelti come rappresentanti di diverse epoche storiche del '900. L'ambito scelto per l'analisi dei libri di fisica è quello della cinematica, in quanto si incontrano per la prima volta i concetti di variazione di spazio e tempo nella velocità istantantea, ed è possibile individuare differenti tipologie di approccio didattico nel ragionamento che conduce alle equazioni del moto.

Nello specifico, lo scopo dell'analisi è quello di individuare le diverse concezioni adottate dagli autori nei libri di testo, e in particolare, di collegare l'evoluzione dei concetti di infinitesimo e differenziale a quella degli approcci utilizzati per elaborare i contenuti della cinematica.

Capitolo 1

La matematica nella didattica della fisica

1.1 Introduzione al tema del ruolo della matematica nell'insegnamento/apprendimento della fisica

Il tema dell'interdisciplinarietà tra matematica e fisica è oggetto di diverse ricerche nel settore della didattica in ambito STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics).

Molte ricerche sono focalizzate ad affrontare il seguente problema, molto diffuso, nell'insegnamento della fisica e della matematica a tutti i livelli (dalla scuola primaria all'università): nell'insegnamento della fisica, la matematica è solitamente concepita come mero strumento per manipolare, calcolare e descrivere il mondo fisico; mentre, nell'insegnamento della matematica, la fisica è concepita come un possibile contesto per l'applicazione di concetti matematici astratti (ad esempio, Tzanakis, 2016 [50]; Karam, 2015 [24]; Tzanakis & Thomaidis, 2000 [51]). Sono stati sviluppati diversi approcci e modelli per affrontare questo duplice atteggiamento strumentale e per valorizzare il ruolo della matematica nella fisica e viceversa.

Nel paragrafi che seguono di questo capitolo, sono presentati i principali approcci sviluppati nella ricerca in didattica della fisica e della matematica. Nello specifico, nel paragrafo §1.2 a pag. 7 sarà presentato l'approccio di Redish e colleghi (2015[45], 2009[46], 2006[44]) basato sull'idea della modellizzazione allo scopo di pensare all'insegnamento della fisica anche attraverso una matematica che contribuisca alla costruzione di significato dei concetti fisici (Redish & Kuo, 2015 [45], p. 567).

Nel paragrafo §1.3 a pag. 8 sarà presentato il modello degli epistemic games elaborato da Tuminaro e Redish (2007) [37], generalizzando il lavoro di Collins e Ferguson (1993) [10], per descrivere la dinamica cognitiva che interviene nella risoluzione dei problemi fisici. Come illustreremo meglio, per gioco epistemico, gli autori intendono "un'attività coerente che utilizza particolari tipi di conoscenza e processi associati a tale conoscenza per creare conoscenza o risolvere un problema" (Tuminaro & Redish, 2007, p. 24 [37]). In questo contesto, faremo riferimento a questo modello perché illustra le aspettative tacite che gli studenti hanno circa la loro comprensione e l'utilizzo della matematica nella soluzione di problemi di Fisica. Queste aspettative rafforzano le differenze di apprendimento che si possono osservare nel processo di modellizzazione.

Nel paragrafo §1.4 a pag. 12 sarà presentato il modello sviluppato da Uhden, Karam, Pietrocola e Pospiech (2012) [52] a partire dal modello di Redish e colleghi (2009[46], 2005[43]). Lo scopo del lavoro di Uhden e colleghi è "servire come quadro guida quando si affrontano aspetti legati al ragionamento matematico nella didattica della fisica [. . .]" [52]. Questo modello fa luce sui diversi ruoli della matematica nella fisica (tecnico e strutturale) e sui diversi tipi di competenze necessarie per riconoscere e gestire i due diversi ruoli (competenze tecniche e strutturali).

Questi approcci e modelli rappresenteranno anche la base per la costruzione della lente con cui si interpreteranno le analisi dei libri di testi riportate nel cap. 4 a pag. 72.

1.2 Un modello per l'uso della matematica nella fisica

In Redish e Kuo (2015) [45] è illustrato un approccio alla modellizzazione matematica in fisica, costruito per guidare gli studenti ad utiliizare la matematica per dare significato ai concetti fisici. L'approccio è costituito da quattro fasi in una relazione ciclica: modellizzazione, elaborazione, interpretazione e valutazione (*si vedano* figg. 1.1–1.3 alle pagg. 13–15). Descriviamo in cosa consiste questo ciclo riportando l'idea con cui è stato concepito da Redish e Kuo.

Il processo inizia con la scelta di variabili e parametri per descrivere un particolare sistema fisico attraverso, almeno in linea di principio, un processo di scelta di cosa misurare e quali strutture matematiche sono appropriate. Il sistema fisico viene quindi modellizzato mappando queste misurazioni in simboli matematici e descrivendo le relazioni fisico-causali tra le quantità misurate in termini di operazioni matematiche tra i simboli. Sulla base delle strutture matematiche scelte, si presuppongono regole e metodologie per trasformare le relazioni e risolvere equazioni. Quindi la matematica consente la soluzione di problemi, portando a risposte che possono essere viste direttamente dalla comprensione fisica del sistema. In questa fase è "tecnica" e riguarda simboli e operatori matematici. I risultati sono poi interpretati tornando al sistema fisico. Infine, si valuta se i risultati sono compatibili e supportano la scelta del modello iniziale rispetto alle evidenze/osservazioni, o se il modello necessita di essere modificato [44]. Più nello specifico:

[Fase 1] Si inizia scegliendo il sistema fisico che vogliamo descrivere, considerando quali sono le caratteristiche del sistema su cui porre attenzione e quali quelle da ignorare. Una volta deciso che cosa considerare, si prosegue con la *modelizzazione* (fase 1). Creiamo un modello matematico: dobbiamo capire quali sono le strutture matematiche che abbiamo a disposizione e quali aspetti di queste sono rilevanti per le caratteristiche fisiche che stiamo cercando di modellizzare. Questo è il processo di *matematizzazione* del nostro sistema.

[Fase 2] La seconda fase è quella di *processo*: risolvere e processare le strutture matematiche che abbiamo scelto per trasformare la nostra descrizione iniziale al fine di risolvere il problema (come risolvere un'equazione o ricavarne di nuove).

[Fase 3] La terza fase 3 consiste nell'*interpretare* i risultati sul nostro sistema in termini fisici.

[Fase 4] fase 4: *valutare*. In questa fase ci chiediamo se i risultati descrivono adeguatamente il nostro sistema fisico o se dobbiamo modificare il nostro modello.

Redish [44] sostiene che ci siano delle fasi critiche nel modello che l'insegnamento dovrebbe tenere in particolare considerazione: questo riguarda l'interpretazione dei risultati, e la valutazione di quanto il modello iniziale sia adeguato. L'insegnante tende a fornire il modello già pronto senza richiedere il riconoscimento delle strutture profonde del modello [44]. Redish osserva che questo influisce sulle aspettative che gli studenti si pongono quando devono risolvere un problema, e nel modo in cui pensano di dover usare la matematica nelle lezioni di fisica. Per questo si riscontra una difficoltà nell'integrare le due materie, e porta gli studenti a trasformare la risoluzione dei problemi in fisica in risoluzione di problemi di matematica [44].

Tuminaro e Redish [37], studiando i metodi di risoluzione di problemi di fisica, riconoscono che gli studenti scelgono un obiettivo e lavorano su quel compito all'interno di un quadro organizzativo localmente coerente, e la cambiano scegliendo una nuova attività anche molto diversa, nel caso in cui la prima non si dimostri efficace [44]. Nel loro articolo [37] riportatano il risultato di questi studi, elaborando il concetto di *gioco epistemico*, o più brevemente *e-games*. Ogni processo ha un obiettivo, delle mosse (le attività consentite), e uno stato finale (un modo di sapere quando il gioco è vinto).

Nel prossimo paragrafo descriveremo due di questi "giochi", per comprendere meglio in cosa consistono e di come si possano prendere in considerazione nell'insegnamento della fisica.

Redish osserva che una proprietà degli e-games è quella di essere dei giochi "escludenti", nel senso che la scelta di un gioco tende a escludere l'attivazione di risorse cognitive che potrebbero, invece, essere utili e appropriate nella soluzione del problema [44]. L'insegnante potrebbe allora favorire gli studenti a riconoscere quali strumenti (giochi) sono appropriati a seconda delle circostanze fisiche. Per fare questo dovrebbe migliorare la comprensione dei processi cognitivi coinvolti nella risoluzione dei problemi di fisica e trovare attività che possano aiutare gli studenti a costruire la conoscenza in intuizioni e comprensioni [44].

1.3 Epistemic games

La ricerca di Redish e Tuminaro [37] inizia dal presupposto che le difficoltà che riscontrano alcuni studenti nella risoluzione dei problemi di fisica, in particolare a livello universitario, non siano per forza dovute alla mancanza di competenze matematiche [37]. I dati raccolti ed analizzati nell'articolo di Tuminaro e Redish [37] suggeriscono che queste difficoltà possano derivare da aspettative che gli studenti proiettano nella risoluzione dei problemi. Nell'articolo si analizza il comportamento di problem solving degli studenti in termini di attività orientate a obiettivi localmente coerenti, che chiamano giochi epistemici (e-games'). Questi giochi guidano e limitano l'utilizzo di particolari conoscenze.

L'approccio di Tuminaro e Redish [37] si inserisce in un quadro teorico cognitivo più generale chiamato *modello delle risorse*, in cui i processi di apprendimento sono interpretati come combinazione di elementi di conoscenza in strutture associative attivate da sistemi di controllo che rispondono a sollecitazioni reciproche e a quelle dell'ambiente [37]. Questo modello può essere inquadrato nel *costruttivismo*, per cui uno studente costruisce nuove conoscenze basandosi in gran parte su ciò che già conosce.

In quest'ottica l'insegnante ha il ruolo di fornire un ambiente che aiuti gli studenti a realizzare questa costruzione nel modo più efficace. Tuminaro e Redish sostengono questa idea, per cui un docente dovrebbe conoscere sia il contenuto e la struttura della conoscenza esistente, sia il modo in cui gli studenti utilizzano questa conoscenza per costruirne una nuova. In particolare, per comprendere il modo in cui gli studenti risolvono un problema di fisica utilizzando le conoscenze pregresse, dobbiamo essere in grado di descrivere il modo in cui attivano e organizzano le risorse. Per poter fare questo gli autori di [37] considerano l'idea di gioco epistemico come un complesso insieme di regole e strategie che guidano l'indagine scientifica.

> "Definiamo un gioco epistemico come un'attività coerente che utilizza particolari tipi di conoscenza e i processi associati a tale conoscenza per creare nuove conoscenze o risolvere un problema" [37]

Collins e Ferguson [10] sono stati i primi ad utilizzare il termine di giochi epistemici per indicare queste modalità di problem solving. La parola *epistemico* è stata scelta perché è un'attività attraverso la quale si costruiscono o elaborano conoscenze; mentre la parola *gioco* è utilizzata per intendere un'attività coerente con componenti ontologiche che identificano le parti del gioco (come giocatori, pezzi, pedine, ...) e una struttura (un inizio e una fine, le mosse, le regole, ...). Allo stesso modo un "e-game" presenta delle componenti ontologiche, come concetti, principi, equazioni, e una struttura, data dallo stato iniziale e finale, dalle mosse consentite e dalle regole [37].

Più nello specifico, le *componenti ontologiche* di un e-game sono:

- conoscenze di base: risorse cognitive associate al gioco
- forme epistemiche: obiettivo strutturale che guida l'indagine

le *componenti strutturali* sono:

- condizioni di inizio e fine del gioco: l'inizio e la fine di un gioco può dipendere dalle aspettative degli studenti sul problema di fisica, e dipendono dalla tempestiva categorizzazione del problema e dalle nozioni preconcette;
- mosse: attività (fasi/procedure) che si compiono nel corso dell'e-games.

I possibili giochi che sono stati individuati in un corso introduttivo di fisica basata sull'algebra sono riportati nell'articolo [37] dai ricercatori di questo studio. La lista presenta sei possibili giochi diversi (nonostante possano presentare delle fasi in comune o somiglianze, anche piccole differenze comportano giochi distinti):

- Mapping Meaning to Mathematics
- Mapping Mathematics to Meaning
- Physical Mechanism Game
- Pictorial Analysis
- Recursive Plug-and-Chug
- Transliteration to Mathematics

1.3.1 Recursive Plug-and-Chug

Il gioco epistemico più utilizzato è il *Recursive Plug-and-Chug.* I solutori di questo gioco identificano la variabile detta "*target*" richiesta dal problema, cercano un'equazione che la contenga, sostituiscono le quantità nell'equazione e svolgono i calcoli numerici. Per risolvere questo gioco ci si affida alla comprensione sintattica dei simboli fisici, senza dover ricorrere alla comprensione concettuale.

La prima mossa è identificare la variabile richiesta dal problema. In secondo luogo si cerca un'equazione che la metta in relazione con altre quantità. La terza mossa consiste nel riconoscere quante di queste quantità sono note: nel caso che variabile "*target*" sia l'unica sconosciuta si procede con i calcoli, altrimenti si passa ad un sotto-obiettivo e si torna al primo passo. Per questo motivo il gioco ha un carattere *ricorsivo.*

Il comportamento messo in atto dagli studenti per risolvere un problema con questo gioco è *pseudoconcettuale*, nel senso che non implica processi articolati di ragionamento, ma è sufficiente una risposta superficiale che contiene solo informazioni memorizzate. Valutare la reale comprensione degli studenti da parte degli insegnanti, in questo caso, diventa difficile. La causa di questo comportamento è il risultato delle difficoltà di comunicazione degli studenti con la disciplina, per cui essi usano uno sforzo minimo per rispondere nella speranza di soddisfare l'insegnante [47].

Descriviamo ora in particolare due tra gli e-games più complessi: il *Mapping Meaning to Mathematics*, e il *Mapping Mathematics to Meaning.* Si tratta degli e-game messi tipicamente in atto dagli esperti e dovrebbero rappresentare un obiettivo per l'insegnamento.

1.3.2 Mapping Meaning to Mathematics

Nell'articolo [37] troviamo la descrizione di questo gioco, caratterizzato dal fatto che gli studenti partono da una comprensione concettuale della situazione fisica descritta dal problema, per poi passare a una soluzione quantitativa.

Le mosse fondamentali individuate da Redish e Tuminaro sono cinque (specificando che la *forma epistemica* per la mappatura di questo gioco è tipicamente l'insieme delle espressioni matematiche che gli studenti generano durante le mosse 2. e 3.).

1. sviluppare una storia sulla situazione fisica;
2. tradurre le quantità presenti nella storia fisica in entità matematiche;
3. mettere in relazione le entità matematiche in base alla storia fisica;
4. manipolazione dei simboli;
5. valutare e interpretare la storia;

Secondo gli studi riportati da Redish e Tuminaro in [37], le *conoscenze di base* per questo gioco (come per tutti i giochi identificati) provengono da una combinazione di risorse di fisica e matematica. In particolare durante lo sviluppo della storia concettuale (primo passo), la ricerca ha mostrato che vengono spesso attivati ragionamenti primitivi: in questa fase gli studenti si affidano alla comprensione personale, piuttosto che sui principi fisici fondamentali.

La seconda mossa è una fase critica per la maggior parte degli studenti: durante questo passaggio possono essere attivati la conoscenza matematica intuitiva, forme simboliche e dispositivi di interpretazione. Queste risorse si attivano anche nella terza mossa, in cui sono messe in relazione le entità matematiche alla storia fisica.

Una volta scritte le equazioni fisiche, le manipolazioni simboliche (mossa 4), spesso vengono eseguite senza problemi, in quanto si dedica molta attenzione a questa pratica durante l'insegnamento.

La valutazione della storia (mossa 5) può avvenire in modi diversi. Ad esempio, si può confrontare la risposta quantitativa con la loro storia concettuale iniziale.

Una somiglianza superficiale con risultati visti in precedenza può essere sufficiente allo studente per decidere che la condizione finale del gioco è stata soddisfatta [37].

1.3.3 Mapping Mathematics to Meaning

In questo gioco i solutori dei problemi devono riconoscere una storia concettuale corrispondente a una particolare forma.

Le componenti ontologiche sono le stesse che nel Mapping Meaning to Mathematics: entrambi i giochi coinvolgono lo stesso tipo di *conoscenze di base* (risorse matematiche) e la stessa *forma epistemica* (equazioni fisiche), anche se le risorse e le equazioni fisiche in ogni gioco variano da problema a problema [37].

Le *componenti strutturali* sono invece diverse e opposte:

- in Mapping Meaning to Mathematics gli studenti iniziano con una storia concettuale e la traducono in espressioni matematiche.
- in Mapping Mathematics to Meaning gli studenti iniziano con un'equazione di fisica e poi sviluppano una storia concettuale.

Le mosse di questo e-game sono:

1. identificare i concetti target;
2. trovare un'equazione che metta in relazione i concetti target con altri concetti;
3. raccontare una storia utilizzando questa relazione tra i concetti;
4. valutare la storia.

Il problema preso in considarazione dai ricercatori di questo studio [37] consiste nel fatto che durante un corso di studi di fisica possa succedere che gli studenti abbiano una percezione degli strumenti appropriati per risolvere un compito che coincida con l'dea intesa dall'insegnante. In particolare gli studenti potrebbero considerare importante solo la fase di manipolazione formale, come la risoluzione di un'equazione o ricavare un risultato, e non il processo intuitivo atteso invece dall'insegnante, col rischio di apprendere involontariamente il gioco sbagliato per quel tipo di problema [37].

Per questo motivo Redish e Tuminaro sottolineano l'importanza di aiutare a sviluppare la competenza di saper individuare quale gioco sia il più appropriato. Il loro studio [37] ci dice che per fare ciò è necessaria una buona comprensione del tipo di pensiero che gli studenti devono attivare per risolvere i problemi, e la consapevolezza delle diverse conoscenze e dei diversi ragionamenti che concorrono nella soluzione di un problema.

1.4 Un modello di ragionamento matematico-fisico nel contesto della fisica

I ricercatori Uhden, Karam, Pietrocola, Pospiech lavorano sul tema della modellizzazione matematica in ambito fisico. In particolare nel loro articolo, *Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education* [52], sostengono che, se si vuole creare un modello sul ragionamento matematico nella didattica della fisica, questo non possa essere adattato ad una completa distinzione tra un modello fisico (qualitativo) e un modello matematico (quantitativo). Motivo per cui riportano la necessità di formulare un modello che evidenzi l'intreccio tra matematica e fisica, e possa distinguere tra ruolo tecnico e ruolo strutturale della matematica. Questo modello dovrà guidare insegnanti e studenti a:

1. riconoscere in modo più approfondito il ragionamento fisico-matematico che sta alla base della b
2. discernere tra uso significativo e uso strumentale della matematica
3. aiutare a guidare una comprensione concettuale della fisica attraverso gli aspetti matematici

1.4.1 Il ciclo di modellizzazione matematica

I cicli di modellizzazione sono stati sviluppati per studiare la modellizzazione matematica, generalmente intesa come "processo di traduzione tra mondo reale e la matematica in entrambe le direzioni" [7]. Nell'articolo citato di Karam e colleghi si osserva che questi cicli hanno in comune il fatto di connettere il modello matematico con il resto del ciclo attraverso la matematizzazione e l'interpretazione, mentre la differenza maggiore tra i diversi cicli appare nel modo in cui essi modellizzano aspetti della realtà.

Infatti la realtà è descritta come una situazione a cui si accede tramite una rappresentazione mentale che deve essere idealizzata in un modello, e questa idealizzazione dipende dall'approccio. Ad esempio esistono cicli che si concentrano sui processi cognitivi e perciò tengono conto del ruolo dei modelli mentali. Altri cicli non si concentrano sui modelli mentali. Piuttosto, passano direttamente dalla situazione reale a un modello di quella situazione o addirittura direttamente dalla situazione reale al modello matematico [52].

Per ottenere un ciclo di modellizzazione fisica, alcuni ricercatori hanno trasferito il ciclo di modellizazione matematico al dominio fisico, [52], (figg. 1.1–1.2).

I processi di traduzione stabiliscono il collegamento tra tre aree: mondo, modello fisico e matematico. Semplificazione e validazione collegano il mondo con il modello fisico, mentre la matematizzazione e l'interpretazione collegano il modello fisico con la matematica. Questo ciclo di modelizzazione è analogo al ciclo di Redish [44] (con la differenza che non c'è la distinzione tra mondo e modello fisico). Il ciclo di Redish (rappresentato in figg. 1.1–1.3) consiste in queste fasi: il punto di partenza è il sistema fisico che deve essere descritto; poi si passa alla traduzione del sistema fisico in rappresentazione matematica, dove vengono eseguite le manipolazioni algoritmiche; i risultati matematici ottenuti devono essere interpretati all'interno del modello fisico; i risultati fisici vengono infine convalidati in base alla dichiarazione del problema o alla situazione fisica.

Karam e colleghi osservano che questi cicli distinguono le attività di matematizzazione, elaborazione matematica pura e interpretazione. Questa distinzione tuttavia non individua i diversi livelli di comprensione e matematizzazione, e nemmeno se la mate-

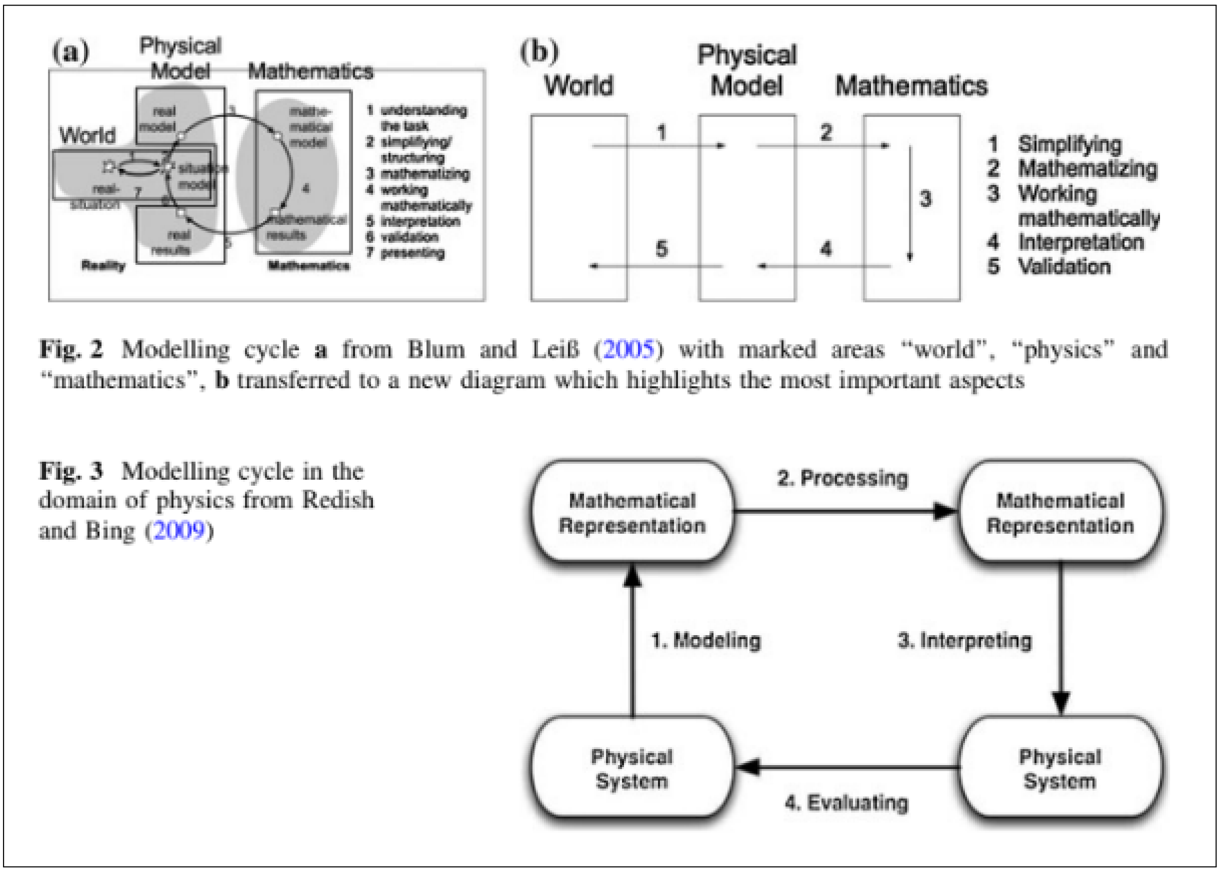


Figura 1.1. Cicli di modellizzazione, [52]

matica ha un ruolo tecnico o strutturale, mentre ritengono che siano caratteristiche utili per descrivere il ragionamento della matematica in fisica.

1.4.2 Il nuovo ciclo di modellizzazione

Nel diagramma in fig. 1.2, è rappresentato il nuovo modello fisico-matematico proposto da Uhden, Karam, Pietrocola, Pospiech [52]. Il modello di ragionamento è così strutturato:

- ogni livello, nella dimensione dell'altezza, rappresenta un particolare grado di matematizzazione
- la fisica qualitativa pura è rappresentata dal primo livello del modello fisico-matematico che non contiene matematica
- la matematica pura è rappresentata da un'area a parte e consiste nelle competenze tecniche

Con questa struttura, la matematizzazione e l'interpretazione sono già incluse nel modello fisico-matematico e comportano lo spostamento nella dimensione dell'altezza, rappresentate dalle frecce a), e b).

Come si vede in fig. 1.2, il processo di interpretazione del significato fisico delle espressioni matematiche si muove in direzione opposta all'interno dell'area del modello fisico-matematico rispetto la matematizzazione (rappresentata dalle frecce a). Questo è legato alla capacità di di "leggere" le equazioni, di affermare il loro significato con l'uso di parole

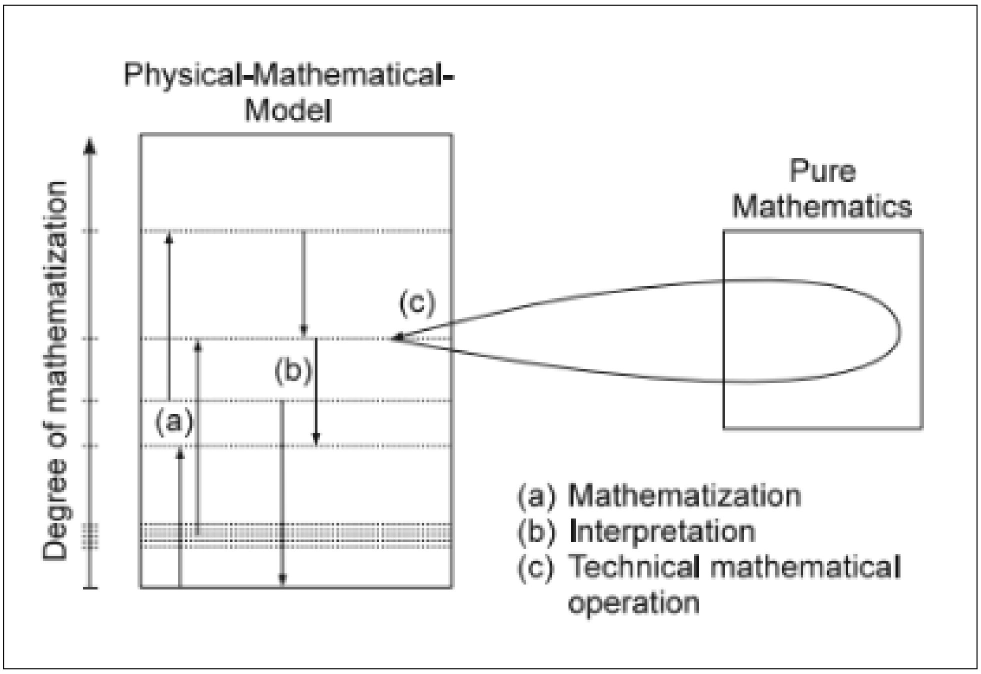


Figura 1.2. Nuovo modello dell'uso della matematica in fisica, [52]

e schemi, di individuare casi speciali o limitanti e di fare previsioni fisiche a partire da queste.

La freccia c) indica il processo di elaborazione matematica che migliora gli aspetti tecnici come i calcoli, e richiede l'uso di competenze tecniche. Questa base è correlata al dominio strumentale delle regole algoritmiche.

In questo modo Uhden e colleghi vogliono evidenziare il diverso carattere delle competenze matematiche strutturali (a e b) e tecniche (c).

Questo modello può essere inserito all'interno di un ciclo di modellizzazione producendo una rivisitazione per l'applicazione della matematica nella fisica [52]. Osservando il nuovo ciclo rappresentato in figura 1.3[1], vediamo che le frecce d ed e collegano il modello matematico-fisico con il resto del mondo, e rappresentano l'idealizzazione e la validazione. Questi processi collegano il mondo con la parte fisica qualititiva pura del modello, infatti quest'ultimo si ottiene da un'idealizzazione del mondo reale, e viene di nuovo raggiunto alla fine con la validazione per poter convalidare i risultati fisici [52].

Per poter comprendere come si applica concretamente il modello, Uhden e colleghi riportano un esempio della meccanica risolto attraverso il nuovo ciclo di modellizzazione. Il problema consiste nel considerare il movimento di un corpo lasciato libero di cadere da una certa altezza per effetto della gravità (g = 10 m/s), con l'obiettivo di trovare la posizione del corpo in funzione del tempo $s = s(t)$.

[1]Legenda di figura 1.3:

a. matematizzazione
b. interpretazione
c. operazioni matematiche tecniche
d. semplificazione/strutturazione
e. validazione

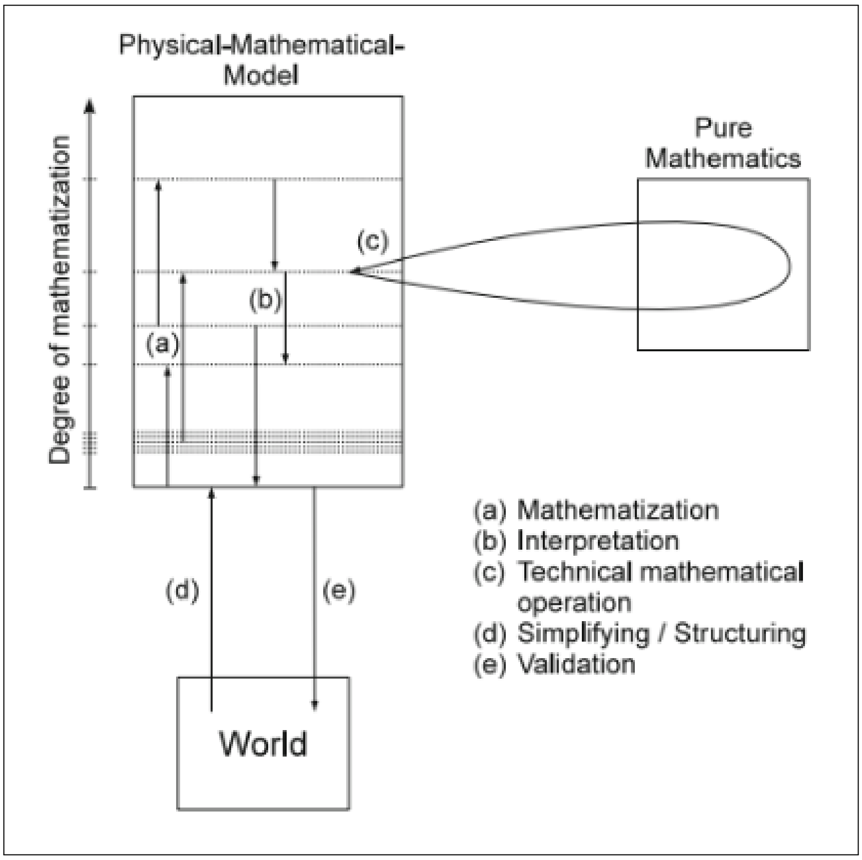


Figura 1.3. Nuovo modello come ciclo di modellizzazione [52]

L'esempio di applicazione del modello, riportato nell'articolo [52] e schematizzato nei diagrammi in figura 1.4, segue due percorsi concettuali caratterizzati da due tipi diversi di approccio: uno detto *didattico*, più legato alla componente strutturale del significato fisico, e uno detto *astratto*, che segue processi tipici di un ruolo più strumentale della matematica.

Per capire più in concreto in cosa consiste descriveremo come Uhden e colleghi interpretano il percorso di ragionamento in entrambi gli approcci.

1.4.2.1 Approccio didattico

Questo problema è già idealizzato, in quanto le dimensioni del corpo e la resistenza dell'aria vengono trascurate, inoltre è anche matematizzato, poiché il tempo e lo spazio sono già rappresentati da numeri reali nella formulazione del problema. Il processo risolutivo parte da un certo livello di matematizzazione all'interno del mondo fisico-matematico. In un approccio didattico, il livello di matematizzazione è sviluppato gradualmente per considerazioni successive.

Ad esempio si può partire considerando che la relazione tra spazio e tempo non è una relazione lineare. Poi si può riconoscere che l'accelerazione è costante ad esempio attraverso un esperimento o una simulazione (dati dell'esperimento). Attraverso una rappresentazione come una tabella v-t e il rispettivo grafico si può ricavare il valore di $g = 10$ m/s, e dedurre l'equazione $v = gt$. L'equazione e il grafico corrispondente costi-

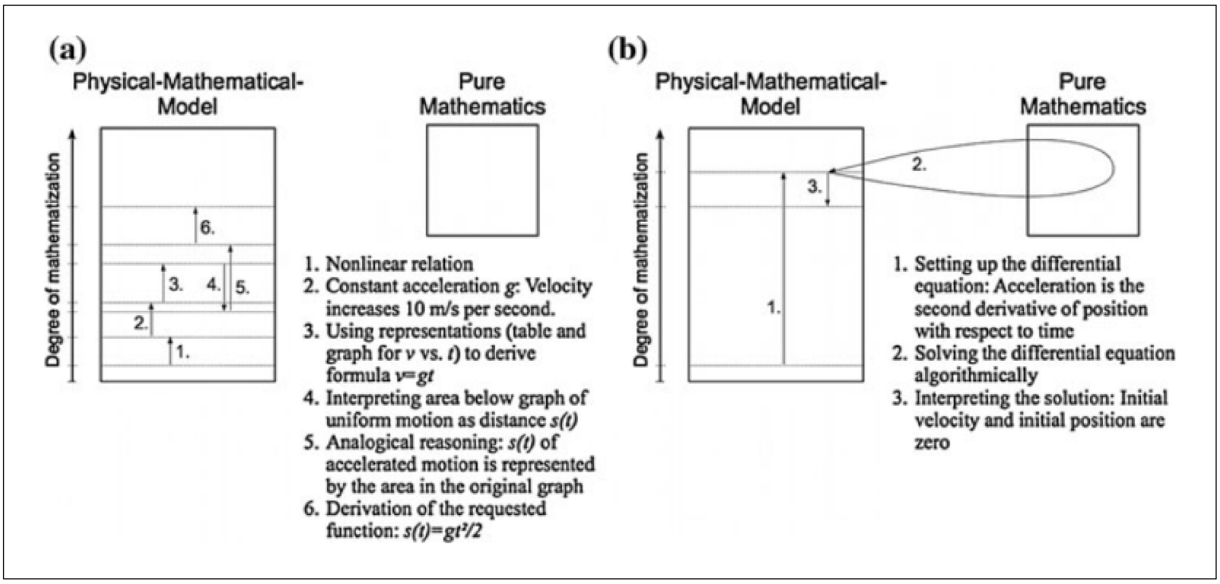


Figura 1.4. Modello Fisico-Matematico di problem solving di un corpo in caduta libera con a) approccio didattico, b) approccio astratto, [52]

tuiscono un altro livello di matematizzazione. Il passo successivo prima della derivazione finale è l'interpretazione dell'area sotto il grafico come la distanza percorsa $s(t)$. Dalla formula $v = gt$ e il corrispondente grafico, e sapendo che l'area sotto il grafico rappresenta la distanza, si trova che

$$s(t) = \frac{1}{2}\, v\, t = \frac{1}{2}\, (g\, t)\, t \quad \Longrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

1.4.2.2 Approccio astratto

Nell'approccio astratto il ragionamento è più conciso e consiste in tre passaggi: si conoscono l'accelerazione, posizione e velocità iniziale, e si chiede di trovare la posizione $s(t)$; l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto il tempo ($a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$), e considerando che è costante ($a(t) = g$) bisogna risolvere un'equazione differenziale lineare del secondo ordine per trovare la soluzione $s = s(t)$. Questa constatazione porta a un elevato livello di matematizzazione all'interno del mondo fisico-matematico, mentre la risoluzione dell'equazione differenziale attraverso le operazioni aritmetiche rimane nell'area della matematica pura. L'equazione che si ricava

$$s(t) = s_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, g\, t^2$$

L'interpretazione della soluzione e delle due costanti come spazio e velocità iniziali e nulle, consiste nell'ultimo passo. Questo conduce alla soluzione finale $s(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2$.

Nell'articolo [52] si mettono a confronto i due approcci e le conseguenze della loro scelta. Nello schema dell'approccio didattico il percorso rimane all'interno del modello fisico-matematico, questo significa che gli elementi matematici utilizzati sono sempre strettamente legati ai loro significati fisici. Nell'approccio astratto la risoluzione dell'equazione differenziale avviene in modo procedurale, senza alcun ragionamento fisico, ma seguendo regole matematiche interne. Seguendo l'approccio astratto con un passaggio si raggiunge un elevato livello di matematizzazione che consente di affrontare il problema in modo più generale e di poterlo applicare a molti altri problemi, tuttavia la conseguenza di astrazione è la perdita di contesto. Se l'approccio didattico pone in evidenza il ruolo strutturale della matematica, l'approccio astratto utilizza principalmente il suo ruolo strumentale.

Questo modello rivela le diverse concezioni del ruolo della matematica nell'educazione della fisica. All'interno dell'articolo [52] emerge che dal confronto tra i percorsi di un modello si possano individuare le difficoltà e i diversi modi di ragionare.

Nel 4 utilizzeremo il modello per esaminare gli approcci e le concezioni che ogni libro sceglie di assumere, come strumento di supporto alle strategie didattiche, in particolare per individuare quelle strategie che si concentrano sul ruolo strutturale della matematica.

Capitolo 2

I concetti di infinitesimo e differenziale

2.1 Nascita del concetto di infinitesimo

Uno studio storico epistemologico del concetto di differenziale che consideri l'evoluzione delle idee relative al concetto stesso, ci permette di identificare l'origine delle carenze che si riscontrano oggi e di tracciare un metodo di insegnamento che possa conciliare il significato matematico e fisico in base al livello di comprensione degli studenti.

Storicamente si possono identificare due concezioni diverse del concetto di differenziale: il differenziale di Leibniz[1] e il differenziale di Cauchy[2].

2.1.1 Il differenziale di Leibniz

L'enorme successo che l'analisi matematica ha avuto nel XVII e XVIII secolo non è stato accompagnato da una chiara comprensione di ciò che si stava facendo. Infinitesimi e differenziali erano stati introdotti come concetti euristici che consentivano di sviluppare un ragionamento che produceva risultati sensati e di grande interesse, ma in assenza di un fondamento matematico rigoroso.

Le grandezze infinitamente piccole (*grandezze divisibili evanescenti*, secondo Newton[3] e *quantità incipienti*, *non ancora formate*, secondo Leibniz) sono considerate gli elementi principali per la creazione dell'analisi matematica, ma allo stesso tempo sono un debole bersaglio per le critiche.

Inizialmente queste quantità erano considerate come il valore *più piccolo possibile* ma *diverso da zero*. In seguito presero il significato di quantità *piccole a sufficienza*.

Come osservano Martínez-Torregrosa e colleghi nel già citato articolo [28], Leibniz e seguaci (i fratelli Bernouilli, Marqués de l'Hôpital, Eulero e altri), che contribuirono alla nascita del calcolo differenziale, intendevano, con il termine differenziale e con il simbolo $\mathrm{d}y$, l'incremento infinitesimale della grandezza y, (il suo *momento*, secondo Newton). Se $\mathrm{d}y$ fosse stata una quantità non infinitesimale, il suo incremento effettivo Δy non avrebbe

[1] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) è stato un personaggio eclettico tedesco, attivo come matematico, filosofo, scienziato, diplomatico, teologo, linguista, glottoteta, giurista, storico e magistrato.

[2] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) è stato un matematico, fisico e ingegnere francese.

[3] Sir Isaac Newton (1642–1726) è stato un personaggio eclettico inglese, attivo come matematico, fisico, astronomo, alchimista, teologo e filosofo naturale.

coinciso con il differenziale $\mathrm{d}y$. Tuttavia, attribuendo a $\mathrm{d}y$ valori infinitesimali, $\mathrm{d}y$ può essere identificato con l'incremento Δy senza errori.

Il differenziale ha avuto un ruolo fondamentale nella struttura dell'analisi, divenendo l'incremento per il calcolo della derivata (definita come il quoziente $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ di due incrementi molto piccoli) e dell'integrale (definito dalla somma infinita di incrementi molto piccoli $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$).

Il seguente esempio mostra come alle origini si ragionasse per calcolare la derivata.

> *Esempio* 1: Derivata di una funzione quadratica
> Per calcolare la derivata di $y = x^2$, consideriamo una variazione Δx della variabile indipendente x, che determina una variazione Δy della variabile dipendente y. Risulta:
>
> $$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$
>
> Da questa si ricava, ricordando che $y = x^2$:
>
> $$\Delta y = 2x\,\Delta x + \Delta x^2$$
>
> Dividendo entrambi i membri per Δx si ottiene:
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \tag{2.1}$$
>
> Se Δx è piccolo confrontato con x, si può scrivere l'uguaglianza approssimata:
>
> $$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx 2x$$
>
> ma non si può scrivere un'analoga uguaglianza esatta perché il termine Δx non può essere trascurato completamente.
>
> Se prendiamo invece un incremento infinitesimale $\mathrm{d}x$ della variabile indipendente x, a cui corrisponde un incremento infinitesimale $\mathrm{d}y$ della variabile dipendente y, possiamo riscrivere l'uguaglianza (2.1) come:
>
> $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$$
>
> Poiché $\mathrm{d}x$ è infinitesimale mentre x non è infinitesimale, possiamo *trascurare* completamente il termine $\mathrm{d}x$ e scrivere l'uguaglianza esatta:
>
> $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$
>
> Il risultato è la derivata della funzione $y = x^2$.

Il seguente esempio mostra invece come Leibniz confermasse la relazione inversa tra derivazione e calcolo dell'area soggiacente al grafico della funzione.

> *Esempio 2*: Relazione tra derivata e integrale
> Una variazione infinitesimale $\mathrm{d}x$ determina una variazione dell'area soggiacente al grafico della curva $y = f(x)$ pari all'area del rettangolo di base $\mathrm{d}x$ e altezza

$f(x)$:

$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x$$

Abbiamo quindi:

$$\mathrm{d}A = f(x)\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}x$$

Dividendo entrambi i membri per $\mathrm{d}x$, otteniamo:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = y$$

L'utilizzo degli incrementi infinitesimali consente quindi di scrivere un'uguaglianza esatta laddove, nel caso di incrementi non-infinitesimali, vale soltanto un'uguaglianza approssimata. Questo passaggio da incrementi non-infinitesimali a incrementi infinitesimali comporta pertanto la possibilità di trascurare alcuni termini, quando lo si ritenga appropriato.

La cancellazione dei termini infinitesimali suscitò tuttavia dubbi e aspre critiche da parte dei matematici nei confronti dell'uso degli infinitesimi. I matematici si chiedevano, infatti, come fosse possibile giustificare la soppressione di alcuni termini: non si possono eliminare termini affermando che all'inizio non sono nulli e alla fine lo sono, perché tale procedimento violerebbe il *Principio d'Identità* secondo il quale non esiste una via intermendia tra uguaglianza e differenza per due quantità matematiche, anche se piccole.

Inoltre, molti matematici sostenevano che ottenere un risultato esatto ignorando termini diversi da zero non fosse una soluzione rigorosa. Bernard Nieuwentijdt[4] si chiedeva come fosse possibile che la somma di infinitesimi che possono essere trascurati nell'integrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ potesse condurre a un risultato finito.

Come osservano ancora Martínez-Torregrosa e colleghi nel già citato articolo [28], si poneva il problema di stabilire quali criteri dovessero essere utilizzati per passare da un'espressione approssimativa in termini di incrementi a un'espressione esatta in termini di differenziali. La convinzione intuitiva secondo la quale la somma infinita di quantità infinitamente piccole producesse la quantità totale indipendentemente dalla sua forma, si rivela errata. Per esempio, per il calcolo della superficie di una sfera, la somma di superfici laterali di cilindri di altezza infinitesimale o di superfici laterali di tronchi di cono di altezza infinitesimale conduce a risultati diversi, come osservano puntualmente Michèle Artigue e Laurence Viennot [2].

Nel 1734 George Berkeley[5] scrisse un breve saggio intitolato *The Analyst* [5] nel quale criticava severamente i fondamenti del calcolo infinitesimale così come erano stati definiti da Newton e Leibniz. In una battuta definiva i differenziali come "fantasmi di quantità scomparse (defunte)"[6]. Più precisamente sosteneva la contradditorietà della nozione di infinitesimo il quale è considerato al tempo stesso uguale a zero e diverso da zero. Berkeley scrisse: "Una volta ammesso che gli incrementi scompaiano, cioè che gli incrementi siano nulli o che non vi siano incrementi, cade la precedente ipotesi che

[4]Bernard Nieuwentijdt (1654–1718) è stato un filosofo, matematico, fisico, medico, magistrato e teologo olandese.

[5]George Berkeley (1685–1753), noto anche come vescovo Berkeley (vescovo di Cloyne della Chiesa anglicana d'Irlanda), è stato un filosofo, matematico e teologo anglo-irlandese il cui principale contributo fu lo sviluppo di una teoria filosofica che egli denominò *immaterialismo* (in seguito denominata da altri *idealismo soggettivo*).

[6]"May we not call them the ghosts of departed quantities?", George Berkeley, The Analist [5], p. 59.

gli incrementi fossero qualcosa, o che vi fossero incrementi, mentre è mantenuta una conseguenza di tale ipotesi, cioè un'espressione ottenuta mediante essa."

Newton e Leibniz non furono in grado di rispondere a queste critiche ed obiezioni, principalmente perché non avevano una chiara definizione del concetto di limite. Per questo, nei suoi ultimi studi, Newton tentò di eliminare gli infinitesimi, dichiarando che "in matematica non si devono trascurare neanche i più piccoli errori". Mentre Leibniz ammette di "non credere in grandezze veramente infinite o infinitesimali" e risponde alle critiche dichiarando "Quantità infinite e infinitamente piccole possono essere usate come strumento, così come gli algebristi hanno usato in modo soddisfacente le radici immaginarie".

La convinzione secondo cui qualsiasi espressione approssimativa per l'incremento, trasformandosi in espressione differenziale, può essere considerata esatta per intervalli infinitamente piccoli, impediva la possibilità di comprendere i risultati errati.

2.1.2 Il differenziale di Cauchy

Matematici e fisici continuarono a utilizzare il metodo infinitesimale con grandi risultati finché nel XIX secolo il calcolo attraversò un periodo di forte esigenza di rigore. Lagrange[7], già consapevole delle imprecisioni e delle ambiguità nell'uso degli infiniti e degli infinitesimi, nel 1784 annunciò all'Accademia di Berlino un concorso per sostituire tali idee con una soluzione che potesse mantenere la semplicità del ragionamento. Non soddisfatto delle proposte ricevute, sviluppò una teoria di funzioni analitiche in cui le quantità infinitesimali erano trascurate nel calcolo del differenziale e il concetto di derivata era al centro della teoria. Tuttavia tale teoria non fu utilizzata nel suo sviluppo della Meccanica Analitica, in cui Lagrange si riferiva ancora a differenziali e infinitesimi affrontando situazioni fisiche.

Cauchy non concordava con la soluzione proposta di Lagrange, per cui affrontò il problema partendo da un'accurata comprensione di limiti e continuità, enunciando nuove definizioni di infinitesimi, derivate, integrali e differenziali e contribuendo a numerose dimostrazioni rigorose di teoremi dell'analisi infinitesimale. Il *differenziale* non fu più identificato con un incremento infinitesimale, fu svuotato di significato fisico e spostato in posizione periferica nella struttura dell'analisi. Cauchy definiva *infinitesimo* una "*variabile* il cui valore numerico *diminuisce* indefinitamente in modo tale da avere come *limite* lo zero".

Derivate e integrali sono definiti da Cauchy a partire dalla definizione di limite (p. es., le derivate sono il limite di quoziente di incrementi) mentre per il differenziale Cauchy definisce:

$$\mathrm{d}f\left(x, \mathrm{d}x\right) \stackrel{\text{def}}{=} f'\left(x\right) \cdot \mathrm{d}x \tag{2.2}$$

dove $\mathrm{d}x$ è incremento della variabile indipendente x. In altri termini, Cauchy definisce il differenziale come semplice espressione formale — priva di ogni significato fisico ma svincolato dall'ambiuguità delle quantità infinitesimali — risultato della moltiplicazione della derivata $f'(x)$ per l'incremento $\mathrm{d}x$ della variabile indipendente, piccolo o grande che esso sia.

[7] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) è stato un matematico, fisico e astronomo italiano naturalizzato francese. Apportò contributi significativi nei campi dell'analisi matematica, della teoria dei numeri della meccanica classica e della meccanica celeste.

Con queste premesse, Cauchy risponde ad alcune delle obiezioni che erano state formulate in precedenza all'analisi matematica. In particolare:

- quando sono presenti infinitesimi in un'espressione, queste quantità non sono nulle, ma è il loro *limite* a essere nullo. Il *limite* di un'espressione produce un *nuovo oggetto* matematico.

  > Nell'*Esempio* 1 a pag. 19 (derivata di una funzione quadratica):
  >
  > $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x \neq 2x$$
  >
  > Per Cauchy questo rapporto non è mai pari a $2x$, nemmeno per Δx infinitamente piccolo. Tuttavia risulta:
  >
  > $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$
  >
  > indipendentemente dall'ampiezza dell'intervallo Δx.

- gli infinitesimi *non* sono *piccole quantità*, bensì variabili o funzioni (che denominiamo $\mathrm{d}f(x, \mathrm{d}x)$) che soddisfano la seguente condizione: quando $\mathrm{d}x$ tende a zero il loro valore è zero. Questa funzionalità non limita il valore numerico della variabile o della funzione, che possono essere piccoli o grandi ad arbitrio.

Queste idee presuppongono un'appropriata comprensione del *concetto di limite*, che non era così chiara ai tempi di Cauchy e spesso non è così chiara oggi nell'insegnamento della fisica e della matematica.

Lo stesso Cauchy, nonostante i tentativi di definire con rigore gli infinitesimi, si poneva dei dubbi sul loro significato. Infatti talvolta si riferiva al valore degli infinitesimi come quantità infinitamente piccole o come numeri molto piccoli, per consentirne la manipolazione in modo indipendente. Questa confusione potrebbe aver costretto Cauchy a fare a meno degli infinitesimi nell'insegnamento dell'analisi. Questa scelta portò a un confronto tra Cauchy e il fisico Petit[8] e il Consiglio d'Istruzione della École Polytechnique in quanto essi non capivano perché mai Cauchy omettesse gli infinitesimi nell'insegnamento, essendo essi considerati utili per risolvere problemi pratici.

La conoscenza profonda e rigorosa del concetto di limite ha permesso una chiara definizione di derivate ed integrali, senza la necessità di utilizzare il differenziale. L'integrale, che — con il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale o Teorema di Torricelli-Barrow — in quel momento era utilizzato soltanto come antiderivata, fu riconsiderato per merito di Cauchy e riguadagnò il ruolo che aveva avuto nella prima metà del XVII secolo. Cauchy provvide a ridefinire l'integrale definito come limite di una successione di somme di Riemann.

Sebbene sia conforme al rigore matematico, la definizione di Cauchy del differenziale non appare sufficiente per le applicazioni fisiche, le cui espressioni differenziali erano un *punto di partenza intuitivo* per la risoluzione dei problemi. I fisici consideravano ancora il differenziale con la concezione di Leibniz, ma coniugando con difficoltà il rigore e il significato fisico, mentre i matematici — considerando il differenziale soltanto all'interno di derivate e integrali — non avevano interesse a individuare i criteri per l'applicazione del

[8] Alexis Thérèse Petit (1791–1820) è stato un fisico francese. Noto per la *legge di Dulong e Petit* sul calore molare dei solidi cristallini.

differenziale a un dato contesto fisico. I matematici risolvevano le equazioni differenziali della fisica dividendo per dx e trasformandole in equazioni nelle derivate.

Un'importante difficoltà della nuova analisi di Cauchy nella fisica — dove il differenziale (in quanto quantità molto piccola) rappresenta un importante *strumento* di *approssimazione* e *ragionamento* — consiste nella difficoltà di interpretare il significato fisico delle espressioni che si presentano. L'assenza di un significato fisico del differenziale non è l'unico inconveniente della nuova analisi di Cauchy, ma evidenzia la difficoltà dell'applicazione di un linguaggio puramente matematico e lontano dalla realtà fisica.

Ancora più evidente è la difficoltà di *interpretare* il *significato fisico* dei concetti e delle espressioni in cui essi ricorrono. Il seguente dialogo ironico, liberamente tratto dall'*incipit* di un articolo della rivista *American Mathematical Monthly* [16] è un esempio significativo di tale difficoltà:

> *Studente*: La velocità istantanea di un'automobile è 50 km/h. Che cosa significa?
> *Insegnante*: Secondo Cauchy significa che, per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste un $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che, se $|t_2 - t_1| < \delta$, allora $\left|\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1} - 50 \text{ km/h}\right| < \epsilon$ km/h.
> *Studente*: Com'è possibile che qualcuno possa mai aver pensato a una risposta del genere?

Abbiamo visto come nel XIX secolo il calcolo attraversò un periodo di forte esigenza di rigore, fino ad arrivare all'approccio di *analisi moderna* (*tradizionale*) che troviamo oggi nei libri di testo. L'approccio ormai consolidato è dovuto a Karl Weierstraß[9] che tra il 1870 e il 1880 riformulò completamente il calcolo differenziale formalizzando le teorie di Cauchy, in cui il concetto principale, quello di limite, gli permise di eliminare una volta per tutte l'uso degli infinitesimi.

Questa analisi storica mostra quali possono essere i dubbi relativi all'uso degli infinitesimi e del differenziale. Possiamo anche sostenere che il rigore e il significato concettuale si incontrano nell'applicazione del calcolo differenziale in fisica, per cui si dovrebbe cercare nell'insegnamento il miglior modo di conciliare un rigoroso utilizzo del calcolo infinitesimale e una comprensione significativa dei processi di modellizzazione (§1.2).

La mancanza di comprensione e di giustificazione dell'applicazione del calcolo infinitesimale nella risoluzione dei problemi fisici portò a una strategia che si concentrava più sull'uso di un algoritmo che del suo significato concettuale. Questo atteggiamento si riscontra tuttora nell'insegnamento della fisica. A proposito dell'utilizzo dei differenziali, un brillante studente pre-universitario dichiara [28]:

> ...ogni volta che usiamo i differenziali, il mio insegnante mi dice: "per analizzare questa curva, prenderemo i segmenti piccoli a piacere..." [...] Io non lo capisco... In realtà, so come calcolare gli integrali, ma non ho capito bene i differenziali che compaiono in essi, li vedo per iscritto, ma non so che cosa siano... e, perché mi devo preoccupare di chiederlo, visto che mi diranno: "questi sono i pezzettini...".

Per superare l'insicurezza delle applicazioni del calcolo infinitesimale di Cauchy, bisognerebbe conciliare il suo rigore ed accuratezza con l'utilità fisica di Leibniz e le espressioni differenziali di Newton. Indichiamo di seguito due possibili percorsi per raggiungere que-

[9] Karl Weierstraß (1815–1897) è stato un matematico tedesco, spesso citato come il padre dell'analisi matematica moderna (tradizionale).

sto obiettivo: l'utilizzo del differenziale di Fréchet nel §2.1.3 e l'analisi non-standard nel §2.1.4.

2.1.3 Il differenziale di Fréchet

Nel 1911 il matematico francese Fréchet[10] formulò una nuova definizione di differenziabilità[11] e di differenziale, in modo che potesse essere estesa a funzioni in più variabili, in particolare per funzioni a infinite variabili. Nel caso particolare di una funzione di una sola variabile il differenziale di Fréchet può essere definito come segue:

> Il differenziale è la funzione omogenea e lineare $\mathrm{d}f \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot \Delta x$ che soddisfa la condizione:
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} = 0 \tag{2.3}$$
> Essendo $\mathrm{d}f$ lineare, la pendenza di tale funzione è costante e pari a:
> $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\Delta x}$$
> e coincide con la derivata della funzione f, $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ (nella variabile $\Delta x = \mathrm{d}x$).

Fréchet *non* richiede che i differenziali $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}f$ siano infinitamente piccoli, ma che $\Delta f - \mathrm{d}f$ sia infinitamente piccolo rispetto a Δx; questo non significa nemmeno che $\Delta f - \mathrm{d}f$ sia sempre un numero molto piccolo, e ancor meno che Δf o $\mathrm{d}f$ siano piccoli. Il requisito è che $\Delta f - \mathrm{d}f$ tenda a zero più velocemente di Δx, vale a dire che il limite di $\frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x}$ sia zero quando Δx tende a zero. Questo significa quindi che $\mathrm{d}f$ è una funzione omogenea e lineare dell'incremento Δx, e possiamo esprimere Δf come $\Delta f = \mathrm{d}f + \epsilon \cdot \Delta x$, dove $\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$.

Inoltre, essendo $\mathrm{d}f$ una funzione lineare dell'incremento $\Delta x = \mathrm{d}x$, dalla (2.3) segue che $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 0$, cioè $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$. Il primo membro di quest'ultima uguaglianza è la derivata $f'(x)$, se esiste, pertanto $f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Questa definizione potrebbe rappresentare la giusta riconciliazione tra il rigore e l'accuratezza di Cauchy e l'utilità fisica, in quanto contiene un chiaro riferimento all'idea di *approssimazione*.

2.1.4 L'analisi non-standard

Un approccio alternativo all'uso del differenziale di Fréchet — assai più radicale — consiste nel tornare al concetto di numero infinitesimale di Leibniz e Newton ma fondando

[10] René Maurice Fréchet (1878–1973) è stato un matematico francese. Fréchet ha prodotto importanti contributi alla topologia generale e fu il primo a definire gli spazi metrici. Ha anche contribuito al campo della statistica e della probabilità, nonché al calcolo infinitesimale.

[11] Una funzione $f(x)$ è differenziabile nel punto x_0 se esiste una funzione $\mathrm{d}f = a \cdot \Delta x$, omogenea e lineare, dell'incremento Δx, che non differisca dall'incremento della funzione Δf, partendo da $f(x_0)$, più di un valore infinitamente piccolo, in relazione alla distanza Δx tra i punti x_0 e $x_0 + \Delta x$. Il differenziale è per definizione $\mathrm{d}f \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot \Delta x$ e risulta: $\Delta f = \mathrm{d}f + \epsilon \cdot \Delta x$, con ϵ che tende a zero per Δx che tende a zero.

tali concetti su una base matematica solida e rigorosa.

Nel 1961 il logico matematico, Abraham Robinson[12] trovò il modo di fondare il *calcolo infinitesimale* — introdotto in forma euristica da Leibniz e Newton, come espressione diretta dell'intuizione geometrica e fisica — su basi matematiche rigorose, utilizzando la *teoria dei modelli*, iniziando così una nuova branca della matematica denominata *analisi non standard*.

Utilizzando la *teoria dei modelli*, Robinson trovò un modo di utilizzare la logica formale per dimostrare che esistono modelli non standard autoconsistenti del sistema di numeri reali, che includono numeri infiniti e numeri infinitesimali.

Nel 1966 Robinson pubblica il testo *Non-standard Analysis* [36]. La prefazione alla seconda edizione del libro (1973) riporta l'intervanto del celeberrimo matematico Kurt Gödel[13] a commento della relazione di Abraham Robinson all'*Institute for Advanced Study* di Princeton del Marzo 1973:

> "Vorrei sottolineare un fatto che non è stato menzionato esplicitamente dal professor Robinson, ma che mi sembra piuttosto importante; vale a dire che l'analisi non standard spesso semplifica sostanzialmente le dimostrazioni, non solo di teoremi elementari, ma anche di risultati profondi. Questo vale, per esempio, anche per la dimostrazione dell'esistenza di sottospazi invarianti per operatori compatti, prescindendo dal miglioramento del risultato; ed è vero in misura ancora maggiore in altri casi. Questo stato di cose dovrebbe impedire un'interpretazione errata piuttosto comune dell'analisi non standard, vale a dire l'idea che si tratti di una sorta di stravaganza o moda passeggera dei logici matematici. Nulla potrebbe essere più lontano dalla verità. Ci sono piuttosto buone ragioni per credere che l'analisi non standard, in una versione o nell'altra, sarà l'analisi del futuro."

In seguito, nel 1976, il matematico americano Howard Jerome Keisler[14] riuscì a riformulare tutta l'analisi matematica tradizionalmente insegnata nei corsi universitari scientifici e ingegneristici nella modalità *non-standard* di Robinson, proponendo il testo didattico *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach* [25], di 978 pp., didatticamente molto efficace e corredato di un grande numero di illustrazioni grafiche, esempi ed esercizi. Un altro testo didattico degno di nota, anche se assai più sintetico (133 pp.), è *Infinitesimal Calculus*, di James M. Henle ed Eugene M. Kleinberg [20], pubblicato nel 1979. Un testo più rececente e corposo (1600 pp.) è *Calculus set free: Infinitesimals to the Rescue*, di Charles Bryan Dawson [11], pubblicato nel 2022.

[12] *Abraham Robinson* (1918–1974), matematico ebreo-tedesco (poi naturalizzato statunitense) nato a Waldenburg in Prussia (attuale Wałbrzych in Polonia), docente all'Università di Toronto (1951–1957), all'Università ebraica di Gerusalemme (1957–1962) all'UCLA (Università della California, Los Angeles, 1962–1967) e alla Yale University (1967–1974). Fu membro dell'Institute for Advanced Study (IAS) di Princeton negli anni 1973–1974.

[13] *Kurt Gödel* (1906–1978), è stato un matematico, logico e filosofo tedesco. Considerato insieme ad Aristotele e Gottlob Frege uno dei logici più significativi della storia, Gödel influenzò profondamente il pensiero scientifico e filosofico del XX secolo.

[14] *Howard Jerome Keisler* (nato nel 1936), è professore emerito presso l'Università del Wisconsin – Madison.

L'approccio di Robinson si basa su un'estensione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che includa anche infinitesimi e infiniti in un nuovo insieme denominato insieme dei *numeri iperreali* e denotato con $\mathbb{R}^*$. Un numero iperreale infinitesimale è definito come un numero minore in valore assoluto di qualsiasi altro numero reale positivo e tuttavia diverso da zero. I numeri iperreali, come aveva supposto Leibniz, godono delle stesse proprietà formali dei numeri reali o meglio godono delle stesse proprietà che possono essere espresse nel linguaggio formale standard.

Nel successivo §2.2 a pag. 26 presenterò più in dettaglio lo sviluppo dell'*analisi non-standard* in un tipico corso universitario di analisi matematica.

2.1.5 Confronto tra differenziale di Fréchet e analisi non-standard

Confrontiamo ora i due approcci sopra descritti per superare le difficoltà dell'*analisi matematica moderna* (*tradizionale* o *standard*) di Cauchy e Weierstraß, ovvero l'utilizzo del differenziale di Fréchet, introdotto nel §2.1.3 a pag. 24 e l'analisi non-standard, introdotta nel §2.1.4 a pag. 24.

Il vantaggio dell'uso del differenziale di Fréchet è il suo non eccessivo distacco dalla trattazione dell'*analisi matematica moderna* (*standard*). I differenziali sono funzioni reali non necessariamente piccoli (non numeri infinitesimali) e non è necessario estendere l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali. Il difetto è che la definizione del differenziale di Fréchet non è così semplice, anzi è piuttosto contorta, quindi non è così facile da trasmettere, specialmente all'inizio di un corso di base di analisi matematica.

L'approccio alternativo, l'*analisi non-standard* presentato nel §2.1.4 a pag. 24, richiede invece un'estensione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali introducendo l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei *numeri iperreali*. Il vantaggio di questo secondo approccio è la semplicità con cui — una volta introdotto l'insieme $\mathbb{R}^*$ — si sviluppa l'analisi matematica. Un ulteriore vantaggio è l'affinità dell'*analisi non-standard* con un metodo tradizionale di interpretazione e trasmissione dell'analisi nei corsi di fisica (ma *non* di matematica), erede dell'impostazione originaria di Leibniz e Newton.

Vedremo più estesamente questa trattazione nel successivo §2.2.

2.2 Analisi tradizionale e analisi non-standard a confronto

Come abbiamo visto nel §2.1.4 a pag. 24, l'*analisi non-standard* si basa su un'estensione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che include anche infinitesimi e infiniti in un nuovo insieme, denominato insieme dei *numeri iperreali* e denotato con $\mathbb{R}^*$.

Nei paragrafi che seguono è presentato, sinteticamente, un tipico percorso di un testo di *analisi non-standard*, facendo riferimento in particolare al libro di H. J. Keisler [25], che è sicuramente il più noto e diffuso, rimarcandone le differenze con la tipica esposizione dei corsi di analisi tradizionale (standard). In particolare prenderò come testo di confronto il libro di C. D. Pagani e S. Salsa [34], utilizzato in diversi corsi all'Alma Mater Studiorum – Università di Bologna.

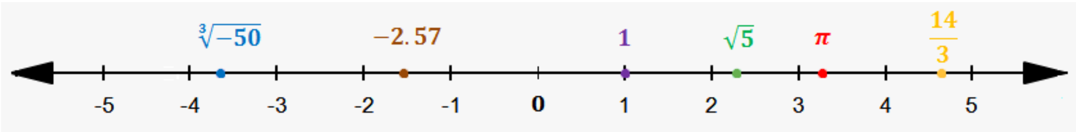


Figura 2.1. Retta dei numeri reali.

2.2.1 Numeri reali e funzioni

Gran parte dei testi *tradizionali* di analisi matematica introducono, nei primi capitoli l'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*, in quanto essi sono fondamentali nella definizione classica di limite, continuità e derivata. I numeri reali, in generale, sono già noti agli studenti che si iscrivono all'università. Nelle scuole superiori i numeri reali sono introdotti gradualmente, iniziando dai numeri naturali (insieme $\mathbb{N}$) e proseguendo con i numeri interi relativi (insieme $\mathbb{Z}$), i numeri razionali (insieme $\mathbb{Q}$) infine i numeri irrazionali, algebrici e trascendenti.

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è l'insieme che comprende tutti i numeri aventi una rappresentazione decimale con un numero limitato o illimitato di cifre. Possiamo rappresentare graficamente i numeri reali su una *retta* sulla quale i numeri interi sono posizionati a intervalli regolari (si veda fig. 2.1).

In realtà, l'introduzione dei numeri reali è molto delicata e andrebbe ripensata per sottolineare che possiamo rappresentare i numeri reali su una retta, soltanto una volta fissata una unità di misura. In questa rappresentazione i numeri sono associati ai punti della retta grazie alla caratterizzazione, già riscontrabile nell'Antichità classica nel lavoro di Eudosso e negli Elementi di Euclide, del numero come rapporto tra grandezze omogenee. In questo caso si identifica il numero corrispondente al punto P con il rapporto tra la lunghezza del segmento avente per estremi l'origine e il punto P e l'unità di misura.

La rappresentazione dei numeri come punti della retta assume particolare importanza da Cartesio in poi, nella Geometria Analitica. Tale concezione del numero permette di rappresentare graficamente e gestire aritmeticamente e confrontare sia rapporti tra grandezze commensurabili (razionali) che incommensurabili (irrazionali) e permane come concezione del numero fino alla sistemazione teorica di fine Ottocento che porta alle costruzioni di $\mathbb{R}$ (aritmetizzazione dell'Analisi).

Nel caso di grandezze incommensurabili si possono individuare rapporti tra grandezze commensurabili che approssimano con sempre maggiore precisione il numero per eccesso e per difetto. Si possono costruire particolari successioni di numeri razionali (numeri decimali) i cui termini, all'aumentare dell'indice del termine della successione, approssimano sempre meglio il numero e il cui limite della successione coincide con il numero irrazionale. Da qui deriva la definizione dei numeri reali come allineamenti decimali con infinite cifre.

Anche i testi di analisi *non-standard* introducono inizialmente i numeri reali, come raccordo con le conoscenze pregresse sugli insiemi numerici.

Nei testi di analisi *non-standard* quindi le funzioni sono presentate non diversamente da come sono introdotte nei corsi di analisi tradizionale: la differenza risiede nella maggiore enfasi attibuita alla loro rappresentazione grafica nei testi di analisi *non-standard*. Più in generale si osserva che il Keisler [25] è un testo molto ricco di grafici e illustrazioni;

probabilmente questa scelta riprende l'impostazione *geometrica* dell'analisi infinitesimale di Leibniz.

L'ordine degli argomenti successivi è differente nelle due impostazioni. Nei testi tradizionali [34] si affrontano i *limiti* e successivamente le *derivate*. Nel testo di Keisler [25] la *derivata* è introdotta prima dei *limiti*, per motivare l'introduzione dei numeri iperreali, sulla base della condizione per cui un termine di un calcolo possa essere trascurato rispetto ad altri.

2.2.2 Pendenza di una curva

Nel testo di Keisler [25] si dà particolare enfasi allo studio delle funzioni lineari e delle loro rappresentazione grafica come rette, introducendo il concetto di *pendenza* con il proposito di generalizzarlo successivamente a funzioni non-lineari. Consideriamo la retta di equazione $y = m\,x + q$, o funzione lineare, dove m è la pendenza della retta, mentre q è l'intersezione tra la retta e l'asse y. Considerando due punti della retta (x_1, y_1) e (x_2, y_2), la pendenza della retta è data dal rapporto

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.4}$$

In seguito si cerca di generalizzare il concetto di *pendenza* al caso delle funzioni non-lineari, la cui rappresentazione grafica è una curva. Si introduce pertanto il concetto di pendenza *media* della curva (analogamente a molti testi di fisica che introducono la velocità media prima della velocità istantanea).

Si prende, come esempio la parabola di equazione $y = x^2$ e si considerano due punti appartenenti alla curva: il punto (x_0, y_0) e il punto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Sostituendo questi due valori nell'equazione, di ottiene $y_0 = x_0^2$ e $y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$. Sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda si ottiene quindi:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

Si può quindi calcolare la pendenza media della parabola nel punto x_0:

$$\overline{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \tag{2.5}$$

Si osserva quindi che la pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ può essere definita soltanto se $\Delta x \neq 0$, perché, se $\Delta x = 0$, il denominaatore si annulla e il rapporto non può essere definito. Si osserva inoltre, *euristicamente*, che se Δx è molto piccolo la pendenza media tra i due punti (x_0, y_0) e $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ si avvicina alla pendenza nel punto (x_0, y_0). In queste condizioni, ovvero quando Δx è molto piccolo, il termine Δx può essere trascurato, ottenendo:

$$m = 2x_0 \tag{2.6}$$

Occorre tuttavia chiarire rigorosamente quando un termine possa essere *trascurato* e quando non possa esserlo. È necessario cioè stabilire una chiara distinzione tra i numeri sufficientemente piccoli da poter essere trascurati e quelli che invece non possono essere trascurati. Questa discriminazione non può essere effettuata nell'ambito dei numeri reali,

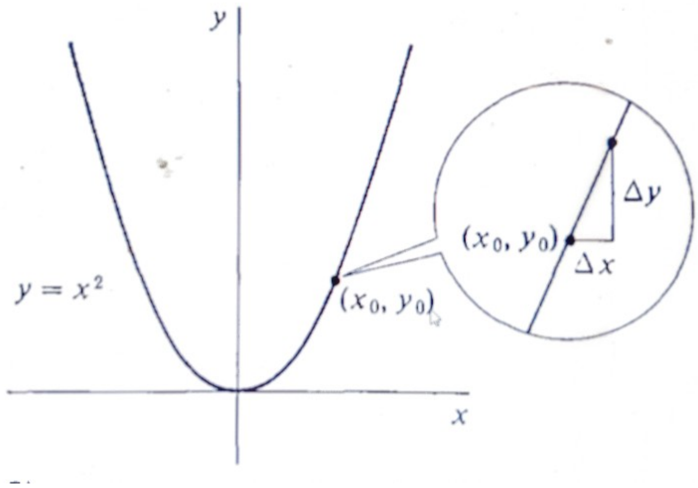


Figura 2.2. Pendenza della funzione $y = x^2$ in una punto. Figura tratta dal Keisler [25].

in quanto, nell'insieme dei numeri reali l'unico numero che possa essere trascurato è il numero 0 (*zero*).

Per affrontare il problema, il testo di Keisler [25] introduce l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei *numeri iperreali*, che non è presente nella trattazione standard dell'analisi matematica.

2.2.3 Numeri infinitesimali

Il testo di Keisler [25] introduce dapprima nuovi numeri, che sono infinitamente piccoli ma diversi da zero. Questi numeri, se sommati o sottratti a numeri reali, possono essere trascurati in seguito a un'operazione di "arrotondamento" denominata *parte standard* (*si veda* §2.2.6.3 a pag. 35)

I *numeri infinitesimali* o *infinitesimi* sono definiti come segue.

Definizione 2.1 (Infinitesimo o numero infinitesimale). Un numero ε è detto *infinitesimo* o *numero infinitesimale* se è prossimo allo zero *più di qualunque numero reale* a, diverso da zero, in simboli:

$$\varepsilon \in \left]-a, +a\right[, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+ \tag{2.7}$$

dove $\mathbb{R}^+$ è l'insieme dei numeri reali positivi (escluso il numero reale 0).

Si noti che questa definizione di infinitesimo è utilizzata anche in diversi testi di fisica, come il libro di Giorgio Valle del 1935 (*si veda* §4.2.4.2 a pag. 112) "[...] minore di qualsiasi intervallo finito, per quanto piccolo, ossia ch'esso diventi, come si suol dire infinitesimo o, in altre parole, che tende a zero [...]".

Nei testi di analisi non-standard i numeri infinitesimali sono denotati solitamente con lettere greche minuscole, utilizzando, prima delle altre, le lettere greche ε e δ (che nell'analisi non-standard *non* sono utilizzate nella definizione di limite).

Evidentemente, l'unico numero reale ε che soddisfa la condizione (2.7) è il numero reale 0 (zero). Per descrivere i numeri infinitesimali ε non nulli è necessario pertanto introdurre un insieme di numeri $\mathbb{R}^*$, più ampio dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, che include l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali ($\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$), ma contiene pure i numeri infinitesimali non nulli. Tale insieme $\mathbb{R}^*$ è denominato insieme dei *numeri iperreali*

Inoltre, se ε è un numero infinitesimale, anche ε^2 o ε^3 sono numeri infinitesimali e sono diversi da ε. Quindi nell'*analisi non-standard* non esiste un unico numero infinitesimale, ma esiste un numero infinito di numeri infinitesimali, ed è possibile stabilire una relazione d'ordine fra di essi. Per esempio, se $\varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$ è un infinitesimo positivo, si ha:

$$\varepsilon^4 < \varepsilon^3 < \varepsilon^2 < \frac{\varepsilon}{10} < \varepsilon < 10\varepsilon < \sqrt{\varepsilon} < 2\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} \tag{2.8}$$

In questo contesto, i numeri infinitesimali dell'insieme $\mathbb{R}^*$ possono essere classificati in 3 tipi: gli infinitesimi positivi, gli infinitesimi negativi e il numero reale 0 (*zero*).

2.2.4 Numeri infiniti

Analogamente ai numeri infinitesimali si possono introdurre i numeri *infiniti*.

Definizione 2.2 (Numero infinito). Un numero H è detto *numero infinito positivo* se è *maggiore di qualunque numero reale* a, in simboli:

$$H > a, \quad \forall a \in \mathbb{R} \tag{2.9}$$

dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali. Analogamente un numero H è detto *numero infinito negativo* se è *minore di qualunque numero reale* a, in simboli:

$$H < a, \quad \forall a \in \mathbb{R} \tag{2.10}$$

Se il numero ε è infinitesimale positivo, $-\varepsilon$ è infinitesimale negativo, $\frac{1}{\varepsilon}$ è un numero infinito positivo e $-\frac{1}{\varepsilon}$ è un numero infinito negativo.

Nei testi di analisi non-standard i numeri infiniti sono denotati solitamente con lettere latine maiuscole, utilizzando, prima delle altre, le lettere H e K.

Inoltre, se H è un numero infinito, anche H^2 o H^3 sono numeri infiniti e sono diversi da H. Quindi nell'*analisi non-standard* non esiste un unico numero infinito, ma esiste un numero infinito di numeri infiniti, ed è possibile stabilire una relazione d'ordine fra di essi. Per esempio, se $H \in \mathbb{R}^{*+}$ è un numero infinito positivo, si ha:

$$\sqrt{H} < \frac{H}{10} < H < 2H + \sqrt{H} < 10H < H^2 < H^3 < H^4 \tag{2.11}$$

Si osservi anche che i *simboli* $-\infty$ e $+\infty$ (*infinito* negativo e positivo), di utilizzo frequente nell'analisi tradizionale (standard), non indicano *né* numeri *reali*, *né* numeri *iperreali*. Essi sono utilizzati per indicare il comportamento di un limite o per indicare un intervallo senza estremo inferiore o superiore (*si veda* Keisler [25], §6.7, example 2, pag. 353).

2.2.5 Numeri iperreali

Naturalmente, se esistono numeri *iperreali* più vicini al numero reale 0 di qualunque numero reale (*numeri infinitesimali*), esisteranno anche numeri *iperreali* più vicini di qualunque altro numero reale al numero reale 1 o al numero reale $\sqrt{2}$ o ancora al numero reale π.

Così come denominiamo *infinitesimali* i numeri più vicini al numero reale 0 di qualunque numero reale, denomineremo *numeri infinitamente prossimi* al numero reale r i numeri più vicini al numero reale r di qualunque numero reale. Introduciamo quindi la definizione di *prossimità infinita* di due numeri iperreali.

Definizione 2.3 (Prossimità infinita di due numeri iperreali). Due numeri iperreali, x e y, si dicono *infinitamente prossimi* tra loro e si scrive $x \approx y$ se la loro differenza $x - y$ è infinitesimale.

Keisler [25] segnala tre conseguenze immediate di tale definizione:

- Se il numero ε è infinitesimale, allora $b \approx b + \varepsilon$. Questo perché la differenza $b - (b + \varepsilon) = -\varepsilon$ è infinitesimale.
- Il numero b è infinitesimale se e soltanto se $b \approx 0$. La notazione $b \approx 0$ è utilizzata per indicare che il numero b è infinitesimale.
- Se $b, c \in \mathbb{R}$ e $b \approx c$ allora $b = c$. Infatti, in tal caso, $b - c$ è reale e infinitesimale, quindi nullo, pertanto $b = c$.

La relazione di *prossimità infinita* gode delle seguenti proprietà.

PROPRIETÀ 2.1 (PROPRIETÀ DELLA PROSSIMITÀ INFINITA). La relazione di *prossimità infinita* è una relazione di equivalenza:

$$
\begin{aligned}
& a \approx a \\
& a \approx b \implies b \approx a \\
& (a \approx b, b \approx c) \implies a \approx c
\end{aligned}
$$

Inoltre, se $a \approx b$, allora:

[i] Se a è infinitesimale anche b è infinitesimale;

[ii] Se a è finito anche b è finito;

[iii] Se a è infinito anche b è infinito.

L'insieme $\mathbb{R}^*$ dei *numeri iperreali* contiene tutti i numeri *reali*, i numeri *infinitesimali*, i numeri *infiniti* e i numeri *infinitamente prossimi a numeri reali*, secondo la Definizione 2.3, ovvero i numeri ottenuti dalla somma o dalla differenza di un numero reale e un numero infinitesimale, come $3 + \delta$, $\pi - 2\varepsilon$, ecc.

I numeri iperreali sono rappresentati da punti disposti lungo una retta (*si veda* fig. 2.3), denominata *retta iperreale*. Su tale retta giacciono i numeri reali, ma attorno a ogni numero reale è presente un intervallo infinitesimale, detto *alone* (in inglese *halo*) o *mònade* (in inglese *monad*) in cui si trovano i numeri iperreali infinitamente prossimi a tale numero reale (*si veda* la Definizione 2.6 a pag. 36).

L'alone di un numero reale può essere rappresentato mediante la metafora di un ipotetico *microscopio infinitesimale*, in grado di visualizzare un tratto della retta iperreale con infiniti ingrandimenti (*si vedano* figg. 2.3 e 2.4). In questo modo anche i numeri tra loro infinitamente prossimi si distanziano.

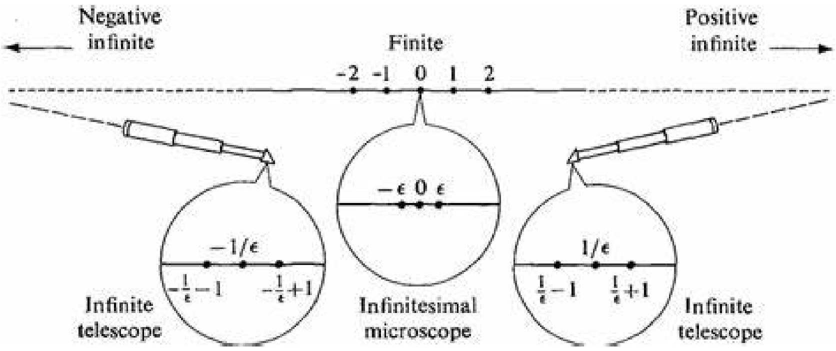


Figura 2.3. Microscopi infinitesimali che consentono di discriminare numeri infinitamente prossimi e telescopi infiniti che consentono di visualizzare numeri infiniti. Figura tratta dal Keisler [25].

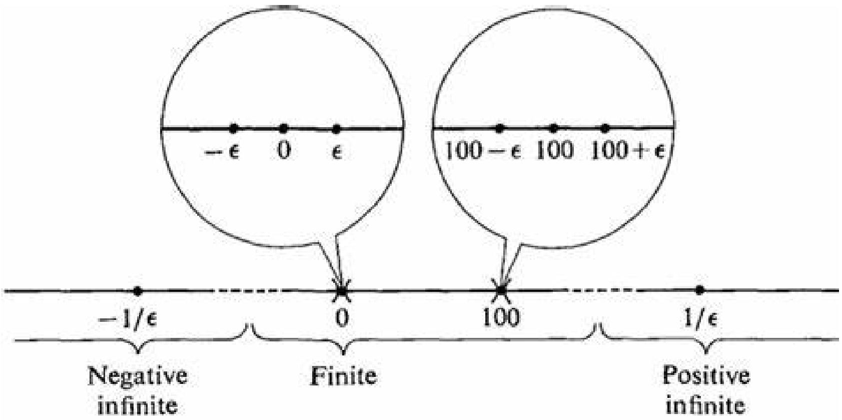


Figura 2.4. Rappresentazione dell'*alone* (o *mònade*) dei numeri 0 e 100 mediante microscopi infinitesimali. Figura tratta dal Keisler [25].

I *numeri infiniti* possono essere invece immaginati come accessibili mediante un ipotetico *telescopio infinito*, in grado di rendere visibili punti a distanza infinita, con un campo visivo che ha la medesima scala della porzione finita della retta iperreale (*si veda* fig. 2.3).

2.2.6 Fondamenti dell'analisi non-standard

L'analisi non-standard si sviluppa a partire da tre princìpi di base: l'*assioma di estensione* (*si veda* §2.2.6.1), l'*assioma di trasferimento* (*si veda* §2.2.6.2 a pag. 33) e il *teorema della parte standard* (*si veda* §2.2.6.3 a pag. 35). Vediamo ora in dettaglio tali princìpi.

2.2.6.1 Assioma di estensione

L'assioma di estensione introduce l'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri iperreali ed estende tutte le funzioni reali a tale insieme.

Assioma 2.1 (Assioma di estensione). L'*assioma di estensione* asserisce che:

[i] L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri iperreali, in simboli $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$.

[ii] È definita la relazione $<^*$ nell'insieme $\mathbb{R}^*$, tale che la relazione d'ordine $<$ nell'insieme $\mathbb{R}$ sia un sottoinsieme della relazione $<^*$; la relazione $<^*$ è *transitiva* $(a <^* b, b <^* c) \implies a <^* c$; inoltre soddisfa la *legge di trictonomia*: $\forall a, b \in \mathbb{R}^*$ solo una tra queste le tre relazioni $a <^* b$, $a = b$ e $a >^* b$ è vera.

[iii] Esiste un numero iperreale ε tale che $\varepsilon >^* 0$ e $\varepsilon <^* r$, $\forall r \in \mathbb{R}^+$.

[iv] per ogni funzione reale f, esiste una funzione iperreale f^* con lo stesso numero di variabili, che è denominata l'*estensione naturale* di f.

Le asserzioni [i] e [ii] affermano che la retta dei numeri reali (insieme dotato di una relazione d'ordine) è una parte della retta iperreale.

L'asserzione [iii] assicura l'esistenza di almeno un numero infinitesimale (ma, come vedremo nel §2.2.6.2 a pag. 33, a partire da uno se ne possono costruire infiniti). Un numero infinitesimale positivo è un numero iperreale ma non può essere un numero reale. Quindi l'asserzione [iii] assicura anche che esistano numeri iperreali che non sono numeri reali.

L'asserzione [iv] esprime l'esistenza, per ogni funzione f, della sua *estensione naturale iperreale* f^*. L'*assioma di trasferimento* 2.2 a pag. 33 assicura poi che l'estensione naturale iperreale di f abbia le stesse proprietà della funzione originale.

Come esempio di estensione naturale iperreale, Keisler [25] considera l'addizione "$+$", funzione reale di due variabili, che associa alle due variabili $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ la loro somma $x + y \in \mathbb{R}$. L'estensione naturale iperreale della somma "$+$" di numeri reali è la somma "$+^*$" che associa alle due variabili $x \in \mathbb{R}^*$ e $y \in \mathbb{R}^*$ la loro somma $x +^* y \in \mathbb{R}^*$. Per semplicità di scrittura, tralasceremo l'asterisco e utilizzeremo il simbolo "$+$" (invece del simbolo "$+^*$") anche per la somma di numeri iperreali.

L'asserzione [iv] consente pertanto di estendere *espressioni reali*, come l'espressione $\cos x + \sin y$, in *espressioni iperreali*. Se $x, y \in \mathbb{R}^*$, tale espressione $\cos x + \sin y$ deve essere intesa come $\cos^* x +^* \sin^* y$, dove "$\cos^*$" e "$\sin^*$" sono le estensioni naturali iperreali delle funzioni "cos" e "sin" e "$+^*$" è l'estensione naturale iperreale della somma "$+$".

2.2.6.2 Assioma di trasferimento

Intuitivamente, l'*assioma di trasferimento* afferma che l'*estensione naturale iperreale* f^* di una funzione reale f ha le *medesime proprietà* della funzione originale.

Assioma 2.2 (Assioma di trasferimento). Ogni *asserzione reale*, che vale per una o più funzioni reali particolari, vale anche per le *estensioni naturali iperreali* di tali funzioni.

Keisler [25] precisa che con il termine *asserzione reale* si intende una combinazione di equazioni o disequazioni di espressioni reali e asserzioni che specificano se un'espressione reale è definita o indefinita. Un'*asserzione reale* coinvolge variabili reali e funzioni reali particolari. I seguenti esempi, riportati dal Keisler [25], illustrano che cosa si intenda per *asserzione reale*:

- La legge di chiusura dell'addizione: $\forall x, y$, la somma $x + y$ è definita.
- La legge commutativa dell'addizione: $x + y = y + x$.
- Una relazione per l'ordinamento: se $0 < x < y$ allora $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
- La divisione per zero non è consentita: $\frac{0}{x}$ non è definita.
- Un'identità algebrica: $(x - y)^2 = x^2 - 2x\,y + y^2$.
- Un'identità trigonometrica: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.
- Una regola riguardo i logaritmi: se $x > 0$ e $y > 0$ allora risulta $\log_{10}(x\,y) = \log_{10} x + \log_{10} y$.
- La funzione radice quadrata è definita dall'*asserzione reale* $y = \sqrt{x}$ se, e solamente se, $y^2 = x$ e $y \geq 0$.
- La funzione valore assoluto è definita dall'*asserzione reale* $y = |x|$ se, e solamente se, $y = \sqrt{x^2}$.
- La funzione logaritmo decimale è definita dall'*asserzione reale* $y = \log_{10} x$ se, e solamente se, $10^y = x$.

Ciascuno di questi esempi ha due variabili, x e y, e vale ogniqualvolta x e y sono numeri reali. L'*assioma di trasferimento* assicura che ciascun esempio valga anche ogniqualvolta x e y sono numeri iperreali.

L'*assioma di trasferimento* 2.2 può essere utilizzato per eseguire calcoli con i numeri infinitesimali. Per esempio, nel §2.2.2 a pag. 28 un calcolo che utilizza gli infinitesimi è stato utilizzato per valutare la *pendenza* di una curva.

L'*assioma di estensione* 2.1 a pag. 33 ci assicura l'esistenza di almeno un numero infinitesimale positivo $\varepsilon > 0$. A partire da ε, possiamo utilizzare l'*assioma di trasferimento* 2.2 per costruire infiniti altri numeri infinitesimali positivi. Per esempio ε^2 è un numero infinitesimale positivo minore di ε: $0 < \varepsilon^2 < \varepsilon$. Questa disuguaglianza segue dall'*assioma di trasferimento* 2.2, in quanto $0 < x^2 < x$, $\forall x \in \,]0, 1[$, come segue dalla disuguaglianza $0 < x < 1$, moltiplicando tutti e tre i termini per il numero positivo x.

A questo punto possiamo classificare gli elementi che costituiscono la retta iperreale come segue:

Definizione 2.4 (Numeri iperreali finiti, infinitesimali e infiniti). Un numero iperreale $b \in \mathbb{R}^*$ è denominato:

- *Infinitesimale* se $0 < |b| < r$, $\forall r \in \mathbb{R}$.
- *Finito* se è compreso tra due numeri reali, $r_1 < b < r_2$, con $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$.
- *Infinito positivo* se $b > r$, $\forall r \in \mathbb{R}$.
- *Infinito negativo* se $b < r$, $\forall r \in \mathbb{R}$.

Possiamo anche individuare regole per predire il tipo di numero iperreale ottenuto dalla somma, dalla moltiplicazione e dal rapporto tra numeri iperreali dei suddetti tipi. Tali regole sono sintetizzate nelle tabelle 2.1.

Si osservi che, se ε e δ sono numeri infinitesimali e H e K sono numeri infiniti, le forme $\frac{\varepsilon}{\delta}$, $\frac{H}{K}$, $H \cdot \varepsilon$ e $H + K$ sono denominate *forme indeterminate*, in quanto possono essere infinitesimali, finite ma non infinitesimali, o infinite a seconda del valore di $\varepsilon, \delta, H, K$. Per esempio, riferendosi alla forma $\frac{\varepsilon}{\delta}$, rapporto tra due infinitesimi, si osservi che $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}$ è

Tabella 2.1. Tabelle che illustrano il risultato di somma, moltiplicazione e divisione di numeri iperreali. Nelle tabelle: (inn) è un numero infinitesimale non nullo, (i) è un numero infinitesimale, (fni) è un numero finito e non infinitesimale, (f) è un numero finito, (I) è un numero infinito, infine (?) è una forma indeterminata.

+	inn	fni	I
inn	i	fni	I
fni		f	I
I			?

$\times$	inn	fni	I
inn	inn	inn	?
fni		fni	I
I			I

/	inn	fni	I
inn	?	inn	inn
fni	I	fni	inn
I	I	I	?

infinitesimale (essendo uguale a ε), $\frac{\varepsilon}{\varepsilon}$ è finito ma non infinitesimale (essendo uguale a 1), $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}$ è infinito (essendo uguale a $\frac{1}{\varepsilon}$).

2.2.6.3 Teorema della parte standard

Il terzo principio a fondamento dei numeri iperreali afferma che ogni numero iperreale finito può essere "arrotondato" a un numero reale. Più precisamente:

Teorema 2.1 (Teorema della parte standard). Per ogni numero iperreale finito $b \in \mathbb{R}^*$, esiste uno e un solo numero reale $r \in \mathbb{R}$ che è infinitamente prossimo a b, in simboli $r \approx b$.

Una dimostrazione di questo teorema è riportata nell'epilogo del Keisler [25].

I numeri iperreali che sono anche numeri reali, $b \in \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R}$, sono talvolta denominati numeri iperreali *standard*, mentre i numeri iperreali che *non* sono numeri reali, $b \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{R}$, sono denominati numeri iperreali *non-standard*. Per questo motivo il numero reale r che è infinitamente prossimo a un numero iperreale *non-standard* b è denominato *parte standard* di b. Un numero infinito non può avere *parte standard* perché non è infinitamente prossimo ad alcun numero finito. Possiamo pertando definire la *funzione parte standard* come segue:

Definizione 2.5 (Parte standard di un numero iperreale). Assegnato un numero iperreale finito $b \in \mathbb{R}^*$, si denomina *parte standard* del numero iperreale b, e si denotata con:

$$r = \mathrm{st}\,(b) \tag{2.12}$$

il numero reale $r \in \mathbb{R}$ che è *infinitamente prossimo* al numero iperreale b, in simboli $r \approx b$. I numeri iperreali infiniti non hanno *parte standard*.

In altri termini, la funzione *parte standard* "arrotonda" un numero iperreale finito al più prossimo numero reale. Si utilizza il *microscopio infinitesimale* per osservare il dettaglio di un intorno infinitesimale di un numero reale. Osserviamo che:

- $\mathrm{st}\,(b)$ è un numero reale, $\mathrm{st}\,(b) \in \mathbb{R}$.
- $b = \mathrm{st}\,(b) + \varepsilon$, per un opportuno infinitesimo ε.
- Se b è reale, esso è uguale alla sua parte standard, $b \in \mathbb{R} \implies b = \mathrm{st}(b)$.

Si può anche definire l'*alone* (o *mònade*) di un numero reale (già introdotto nel §2.2.5 a pag. 30 e illustrato in fig. 2.4 a pag. 32) come segue:

Definizione 2.6 (Mònade o alone di un numero reale). Assegnato un numero reale $a \in \mathbb{R}$, si dice *mònade* o *alone* del numero reale a l'insieme $m(a)$ dei numeri iperreali infinitamente prossimi ad a:

$$m(a) = \{b \in \mathbb{R}^* \mid b \approx a\} \tag{2.13}$$

Per esempio, se $\varepsilon \approx 0$, il numero reale 0 è circondato dai numeri iperreali non-standard $-\varepsilon$, $+\varepsilon$, $-\varepsilon^2$, $+\varepsilon^2$, ecc., che costituiscono l'*alone* o la *mònade* del numero reale 0 (*si veda* fig. 2.4 a pag. 32). Analogamente, il numero reale 100 è circondato dai numeri $100 - \varepsilon$, $100 + \varepsilon$, $100 - \varepsilon^2$, $100 + \varepsilon^2$, ecc., che costituiscono l'*alone* o la *mònade* del numero reale 100 (*si veda* ancora fig. 2.4 a pag. 32).

Ogni *alone* o *mònade* contiene un solo numero reale e infiniti numeri iperreali non-standard. Due mònadi, $m(x)$ e $m(y)$, o coincidono ($m(x) = m(y)$, se $x \approx y$) oppure sono disgiunte ($m(x) \cap m(y) = \varnothing$, se $x \not\approx y$).

La relazione tra *alone* (o *mònade*) e *parte standard* si può scrivere, essendo $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$, come:

$$a = \operatorname{st}(b) \iff b \in m(a) \tag{2.14}$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà della *funzione parte standard*:

Proprietà 2.2 (Proprietà della funzione parte standard). Se $b, c \in \mathbb{R}^*$ sono due numeri iperreali *finiti* e $n \in \mathbb{N}$, valgono le seguenti regole per la *parte standard*:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{st}(-b) = -\operatorname{st}(b)\\
&\operatorname{st}(b+c) = \operatorname{st}(b) + \operatorname{st}(c)\\
&\operatorname{st}(b-c) = \operatorname{st}(b) - \operatorname{st}(c)\\
&\operatorname{st}(b \cdot c) = \operatorname{st}(b) \cdot \operatorname{st}(c)\\
&\operatorname{st}\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{\operatorname{st}(b)}{\operatorname{st}(c)}, \quad \text{se } \operatorname{st}(c) \neq 0\\
&\operatorname{st}(b^n) = [\operatorname{st}(b)]^n\\
&\operatorname{st}\left(\sqrt[n]{b}\right) = \sqrt[n]{\operatorname{st}(b)} \quad \text{se } \operatorname{st}(b) \geqslant 0\\
&b \leqslant c \quad \Rightarrow \quad \operatorname{st}(b) \leqslant \operatorname{st}(c)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

2.2.7 Derivate e Differenziali

2.2.7.1 Pendenza di una curva in un punto

Confrontiamo ora il calcolo della *pendenza* di una curva in un punto, utilizzando l'*analisi non-standard* e l'*analisi tradizionale*. Tale pendenza è anche denominata *derivata* della funzione in un punto. Se la curva è il grafico della funzione $s = f(t)$ — che esprime la distanza s percorsa da un punto materiale in moto in funzione del tempo t impiegato a percorrerla — tale pendenza è denominata *velocità istantanea* del punto materiale.

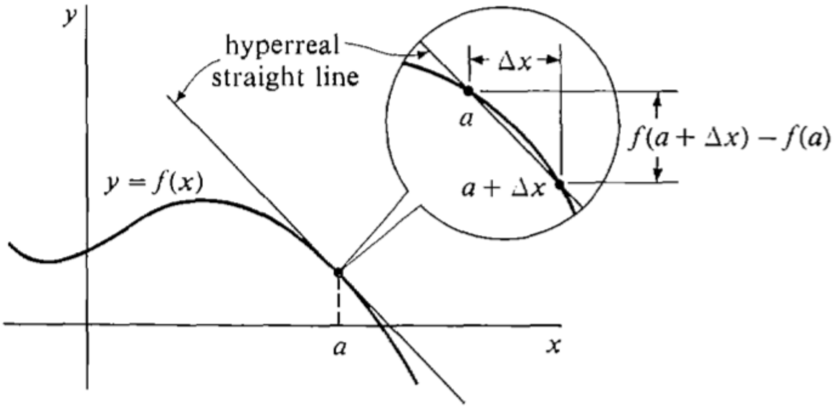


Figura 2.5. Pendenza di una curva in un punto in analisi non-standard. Figura tratta dal Keisler [25].

2.2.7.1.1 Pendenza puntuale di una curva nell'analisi non-standard.

Consideriamo una funzione reale f e un numero reale a appartenente al dominio di f, in simboli $a \in \mathscr{D}(f)$. Quando $x = a$ risulta $f(x) = f(a)$. Supponiamo ora che la variabile x sia incrementata di una quantità infinitesimale pari a Δx (*si veda* fig. 2.5):

$$a \to a + \Delta x$$

passando dal valore a al valore iperreale infinitamente prossimo ad a pari ad $a + \Delta x$, con:

$$(a + \Delta x) \approx a$$
$$(a + \Delta x) \in \mathbb{R}^*$$
$$\mathrm{st}\,(a + \Delta x) = a,$$

La variabile indipendente x subisce la variazione:

$$(a + \Delta x) - a = \Delta x$$

mentre la variabile dipendente $y = f(x)$ subisce la variazione:

$$f(a + \Delta x) - f(a)$$

Quindi il rapporto tra la variazione di $y = f(x)$ e la variazione di x è:

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Questo rapporto è utilizzato nella seguente definizione della *pendenza* della funzione f:

Definizione 2.7 (Pendenza della funzione f nel punto a nell'analisi non-standard). Il numero S è denominato *pendenza* della funzione f nel punto a se:

$$S(a) = \mathrm{st}\left(\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}\right), \qquad \forall \Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0 \tag{2.16}$$

In parole, la pendenza $S(a)$ (se esiste) è *infinitamente prossima* al rapporto tra la variazione di $f(x)$ e la variazione di x, quando la variazione di x è *infinitesimale* ma *non nulla.*

Si osservi che la *pendenza* $S(a)$ della funzione f nel punto a non sempre esiste. La casistica è la seguente:
[1] La *pendenza* $S(a)$ della funzione f nel punto a *esiste* se il rapporto:

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

è finito e ha la *medesima parte standard* per qualunque numero infinitesimale ma non nullo Δx. In tal caso la pendenza è pari a:

$$S(a)=\mathrm{st}\left(\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right), \qquad \forall \Delta x\approx 0, \Delta x\neq 0$$

[2] La *pendenza* $S(a)$ della funzione f nel punto a *non* esiste nei seguenti 4 casi:
[a] L'immagine del valore a nella funzione f, ovvero $f(a)$, non è definita.
[b] L'immagine del valore $a+\Delta x$ nella funzione f, ovvero $f(a+\Delta x)$, non è definita per qualche valore infinitesimale $\Delta x \not\approx 0$.
[c] Il rapporto $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ risulta *infinito* per qualche valore infinitesimale $\Delta x \not\approx 0$.
[d] Il rapporto $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ ha *diversa parte standard* per diversi valori infinitesimali $\Delta x \not\approx 0$.

Riprendiamo ora l'*esempio* della *funzione quadratica* $y=f(x)=x^2$, già incontrato nell'*Esempio* 1 a pag. 19 (approccio di Newton e Leibniz) nel riquadro grigio a pag. 22 (approccio di Cauchy) infine nel §2.2.2 a pag. 28 (approccio non-standard euristico).

Osserviamo che il passaggio dall'espressione (2.5) a pag. 28 all'espressione (2.6) a pag. 28 può essere eseguito, *con rigore*, utilizzando la *funzione parte standard* come nella Definizione 2.7 a pag. 37. Per $\Delta x\approx 0$, $\Delta x\neq 0$, si ottiene infatti dalla (2.5) a pag. 28, utilizzando la (2.16) a pag. 37:

$$m=\mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)=\mathrm{st}\left(\frac{2x_0\,\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right)=\mathrm{st}\left(2x_0+\Delta x\right)=2x_0 \tag{2.17}$$

2.2.7.1.2 Pendenza puntuale di una curva nell'analisi tradizionale. Nell'*analisi tradizionale*, invece, la pendenza è definita come segue:

Definizione 2.8 (Pendenza della funzione f nel punto a nell'analisi tradizionale). Il numero S è denominato *pendenza* della funzione f nel punto a se esiste il *limite*:

$$S(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \tag{2.18}$$

In parole, la pendenza $S(a)$ (se esiste) è pari al *limite*, per $\Delta x\to 0$, del rapporto tra la variazione di $f(x)$ e la variazione di x.

dove la definizione 2.8 presuppone l'acquisizione preventiva della definizione di *limite* di una funzione in un punto, presentata, nell'*analisi tradizionale*, come segue:

Definizione 2.9 (Limite di una funzione f nel punto c nell'analisi tradizionale). Affermiamo che l è il limite della funzione f per x che tende a c e scriviamo:

$$l = \lim_{x \to c} f(x) \tag{2.19}$$

se:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \ \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ : |f(x) - l| < \varepsilon, \quad \forall x \in \left]c - \delta, c + \delta\right[\setminus \{c\} \tag{2.20}$$

In parole, per ogni tolleranza assegnata ε (numero reale positivo) esiste una distanza $\delta(\varepsilon)$ (numero reale positivo che dipende dalla tolleranza ε), tale che, se x ha una distanza da a non nulla ma minore della distanza $\delta(\varepsilon)$, allora $f(x)$ ha una distanza da l minore della tolleranza assegnata ε.

2.2.7.1.3 Confronto tra le definizioni di pendenza Si osservi che nell'*analisi non-standard* la definizione di pendenza ha carattere *statico*. Essa coincide infatti con la pendenza media della curva in un *intervallo infinitesimale* $\Delta x \in \mathbb{R}^*$ (*si ricordi* la Definizione 2.7 a pag. 37 e *si riveda* la fig. 2.5 a pag. 37). L'ampiezza dell'intervallo $\Delta x \in \mathbb{R}^*$ può essere diversa (p. es. $\Delta x = \varepsilon, 2\varepsilon, \varepsilon^2, \sqrt{\varepsilon}$) purché infinitesimale ($\Delta x \approx 0$) e il risultato (2.16) a pag. 37 *non varia* (è il medesimo) per qualunque scelta di $\Delta x \in \mathbb{R}^*$, purché infinitesimale ($\Delta x \approx 0$). Più precisamente, il rapporto incrementale $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ subisce *variazioni infinitesimali* scegliendo un $\Delta x \approx 0$ piuttosto che un altro. Tuttavia la funzione *parte standard* nella (2.16) a pag. 37 elimina — nell'*arrotondamento* che essa esegue (*si veda* §2.2.6.3 a pag. 35) — ogni fluttuazione infinitesimale dovuta alla scelta di $\Delta x \approx 0$.

Nell'*analisi tradizionale* la definizione di pendenza ha invece carattere *dinamico*. Si considera infatti un *intervallo finito ma non infinitesimale* $\Delta x \in \mathbb{R}$, di *ampiezza variabile*, che può essere esigua ma anche grande. Il rapporto incrementale $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ nella (2.18) a pag. 38 *varia*, anche *in maniera sensibile*, al variare di $\Delta x \in \mathbb{R}$. Tuttavia il rapporto incrementale $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ si avvicina alla pendenza puntuale della curva man mano che $\Delta x \in \mathbb{R}$ si avvicina a zero. Quindi soltanto il *limite* per $\Delta x \to 0$ del rapporto incrementale diviene uguale alla pendenza.

Graficamente, nell'*analisi non-standard*, si utilizza il *microscopio infinitesimale* (*si veda* la fig. 2.5 a pag. 37) per osservare la *retta secante* che interseca la curva in due punti (di ascissa a e $a + \Delta x$) che si trovano a *distanza infinitesimale* fra loro. Tale secante ha una pendenza *iperreale* che differisce da quella (*reale*) della tangente di una quantità infinitesimale, che è soppressa nell'*arrotondamento* eseguito dalla funzione *parte standard* (*si veda* §2.2.6.3 a pag. 35). La pendenza della tangente (che è un numero *reale*) si ottiene quindi dalla *parte standard* $\mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ della pendenza *iperreale* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ della secante.

Nell'*analisi tradizionale*, invece, si considera la *retta secante* che interseca la curva in due punti a *distanza non infinitesimale* tra loro. La pendenza $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ di tale secante non è la pendenza puntuale della curva, ma le si avvicina sempre più man mano che i due punti di intersezione si avvicinano tra loro fino a coincidere e la secante si avvicina alla tangente. La pendenza della tangente si ottiene quindi dal *limite* $\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

2.2.7.2 Funzione derivata

Assegnata una funzione f, in generale la pendenza S può essere definita per gran parte dei valori della variabile indipendente $x \in \mathscr{D}(f)$. Si può costruire in questo modo una nuova funzione f', che associa a ogni valore di x la pendenza $S(x)$ definita dalla (2.16) a pag. 37 (analisi non-standard) o dalla (2.18) a pag. 38 (analisi tradizionale). Tale funzione f' è denominata *funzione derivata* della funzione f.

Nell'*analisi non-standard* la *funzione derivata* può quindi essere definita come segue (Keisler [25]).

Definizione 2.10 (Funzione derivata della funzione f nell'analisi non-standard). Sia $f \in \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile. La *derivata* di della funzione f, indicata con f', è una nuova funzione che associa alla variabile indipendente x la pendenza $S(x)$, definita dalla (2.16) a pag. 37, della funzione f in x, in simboli:

$$f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right), \qquad \forall \Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0 \tag{2.21}$$

ogniqualvolta tale pendenza $S(x)$ esista.

Si osservi che:

- $f'(a) = S(a)$, dove la *pendenza* $S(a)$ è definita dalla (2.16) a pag. 37.
- La derivata di $f(x)$ è *indefinita* in $x = a$ se la pendenza di f non esiste per $x = a$.
- Il numero infinitesimale $\Delta x \approx 0$ può essere positivo o negativo ma non nullo ($\Delta x \neq 0$).

Il processo di individuazione della derivata di f è denominato *differenziazione*. La funzione f è detta *differenziabile* in a se $f'(a)$ è definita, ovvero se la pendenza $S(a)$ esiste.

Osservando più in dettaglio l'espressione (2.21), osserviamo che il numeratore del rapporto incrementale:

$$\Delta y = g(x, \Delta x) = f(x+\Delta x) - f(x) \tag{2.22}$$

è, in generale, una quantità iperreale. L'espressione (2.22) può anche essere letta come una funzione *reale* $g(x, \Delta x)$ delle variabili indipendenti *reali* x e Δx. L'*assioma di trasferimento* 2.2 a pag. 33 consente tuttavia di definirne l'*estensione naturale iperreale* $g^*(x, \Delta x)$ — che, per semplicità, continueremo a chiamare $g(x, \Delta x)$ — che opera su numeri x e Δx iperreali e produce un risultato Δy pure iperreale. Proprio l'*assioma di trasferimento* 2.2 consente di usare l'espressione (2.22) al numeratore della (2.21), operante su x reale e Δx infinitesimale non nullo.

Utilizzando le notazioni della (2.22), la (2.21) può anche essere scritta nella forma breve:

$$y' = f'(x) = \mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right), \qquad \forall \Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0 \tag{2.23}$$

Nell'*analisi tradizionale* la *funzione derivata* può essere definita, in maniera analoga (Pagani e Salsa [34]), come segue.

Definizione 2.11 (Funzione derivata della funzione f nell'analisi tradizionale). Sia $f \in \mathbb{R}$ una funzione reale di una variabile. La *derivata* di della funzione f, indicata con f', è una nuova funzione che associa alla variabile indipendente x la pendenza $S(x)$, definita dalla (2.18) a pag. 38, della funzione f in x, in simboli:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad x + \Delta x \in \mathscr{D}(f) \tag{2.24}$$

ogniqualvolta tale pendenza $S(x)$ esista.

2.2.7.3 Retta tangente a una curva

La retta tangente a una curva in un punto ha un ruolo importante nelle considerazioni sui differenziali che seguono nel §2.2.7.4 a pag. 42.

Sia assegnata una curva di equazione $y = f(x)$ e sia definita nel punto di ascissa $x = a$ la derivata $f'(a)$ della funzione f. In tal caso è pure definita la *retta tangente* alla curva nel punto (a, b), dove $b = f(a)$ (*si veda* fig. 2.6). Tale retta può essere individuata selezionando dal fascio proprio di rette passante per il punto (a, b) di equazione:

$$l(x) - b = m(x - a)$$

la retta del fascio di coefficiente angolare $m = f'(a)$, pari alla pendenza della curva per $x = a$. La *retta tangente* alla curva nel punto (a, b) ha pertanto equazione:

$$l(x) - b = f'(a)(x - a)$$

ovvero:

$$l(x) = f'(a)(x - a) + b \tag{2.25}$$

Questa equazione è ricavata nello steso modo nei testi di *analisi tradizionale* e nei testi di *analisi non-standard*.

Si osservi ora che uno spostamento — reale o anche infinitesimale (per l'*assioma di trasferimento* 2.2 a pag. 33) — di ascissa Δx a partire dall'ascissa a comporta, *lungo la curva*, una variazione dell'ordinata pari a:

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \tag{2.26}$$

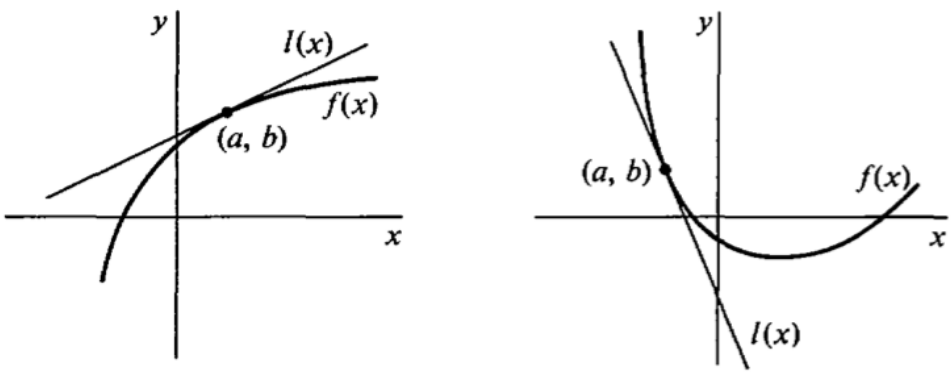


Figura 2.6. Retta tangenti. Figura tratta dal Keisler [25].

mentre *lungo la retta tangente* il medesimo spostamento Δx dell'ascissa comporta una variazione dell'ordinata pari a:

$$\begin{aligned} \Delta l &= l\left(a+\Delta x\right)-l\left(a\right) \\ &= \left[f'\left(a\right)\left(a+\Delta x-a\right)+b\right]-\left[f'\left(a\right)\left(a-a\right)+b\right] \\ &= \left[f'\left(a\right)\,\Delta x+b\right]-\left[f'\left(a\right)\cdot 0+b\right] \\ &= f'\left(a\right)\,\Delta x \end{aligned} \tag{2.27}$$

ottenuta sostituendo l'espressione (2.25) di $l\left(x\right)$. Nella fig. 2.7 si può apprezzare la differenza tra la variazione dell'ordinata lungo la curva, $\Delta y = \Delta f\left(x\right)$, e variazione dell'ordinata lungo la retta, $\Delta l = f'\left(x\right)\,\Delta x$.

2.2.7.4 Il differenziale

2.2.7.4.1 Differenziale nell'analisi non-standard. Nel contesto dell'*analisi non-standard*, consideriamo ora le variazioni Δy e Δl, espresse dalla (2.26) e dalla (2.27) e illustrate in fig. 2.7, quando la variazione Δx è *infinitesimale*. Tra le variazioni Δy e Δl sussiste una relazione di importanza nodale nell'*analisi non-standard*.

Teorema 2.2 (Teorema dell'incremento). Sia $y = f\left(x\right)$ con $x \in \mathbb{R}$ e supponiamo che, in corrispondenza dell'ascissa a, la derivata $f'\left(a\right)$ sia definita. Sia inoltre Δx un infinitesimo ($\Delta x \approx 0$). Allora anche Δy è un infinitesimo e risulta, per qualche infinitesimo ε, che dipende da a e da Δx:

$$\Delta y = f'\left(a\right)\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \tag{2.28}$$

La dimostrazione, riportata nel Keisler [25], è la seguente.

Se $\Delta x = 0$ allora anche $\Delta y = 0$. Sostituendo nella (2.28) otteniamo l'equazione $0 = f'\left(a\right)\cdot 0 + \varepsilon\cdot 0$, che è verificata per un valore arbitrario di ε. Possiamo assegnare, per esempio, $\varepsilon = 0$.

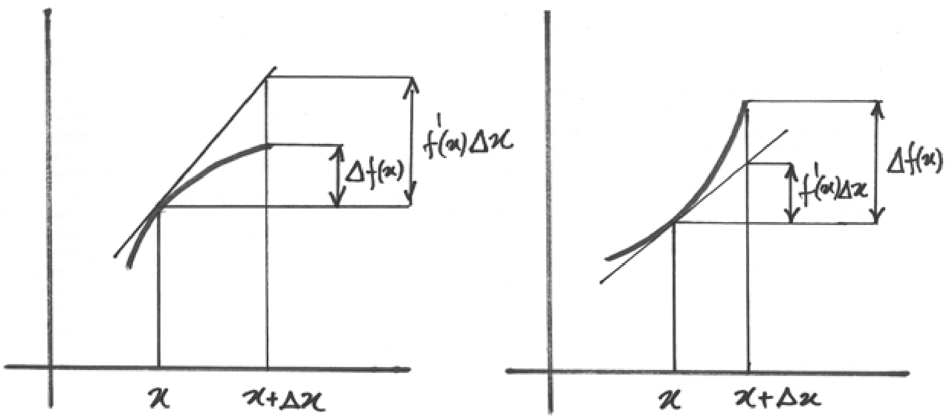


Figura 2.7. Variazione dell'ordinata lungo la curva, $\Delta y = \Delta f\left(x\right)$, e variazione dell'ordinata lungo la retta, $\Delta l = f'\left(x\right)\,\Delta x$.

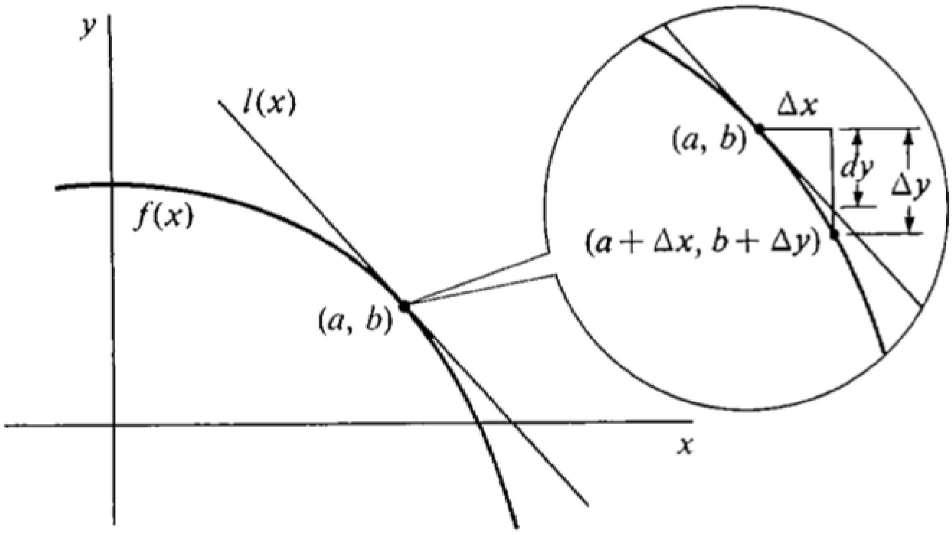


Figura 2.8. Differenza — evidenziata nel *microscopio infinitesimale* — fra incremento infinitesimale Δy sulla curva e incremento infinitesimale $\mathrm{d}y$ sulla retta tangente, corrispondenti al medesimo incremento infinitesimale Δx della variabile indipendente. La figura è indicativa ma non realistica, in quanto la curvatura della curva, nell'ingrandimento, è stata esagerata per consentire di distinguere la curva dalla retta tangente. Una figura più realistica è la successiva (e più complicata) fig. 2.9 a pag. 45. Figura tratta dal Keisler [25].

Se invece $\Delta x \approx 0$ ma $\Delta x \neq 0$ allora, dalla relazione (2.23) a pag. 40 risulta $\mathrm{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = f'(a)$, ovvero, per la Definizione 2.5 a pag. 35 di *parte standard*, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a)$. Inoltre, per la Definizione 2.3 a pag. 31 di *prossimità infinita*, possimo scrivere $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \varepsilon$ per qualche infinitesimo ε. Moltiplicando ambo i membri per Δx otteniamo infine la (2.28). $\square$

Seguendo il Keisler [25], definiamo ora *differenziale* della variabile dipendente y in a il primo termine al secondo membro della relazione (2.28), che indica la variazione dell'ordinata y *lungo la retta tangente*, quando Δx è infinitesimale.

Definizione 2.12 (Differenziale di una funzione nell'analisi non-standard). Sia $y = f(x)$ e supponiamo che, in corrispondenza dell'ascissa a, la derivata $f'(a)$ sia definita. Sia inoltre Δx una quantità infinitesimale ($\Delta x \approx 0$). Definiamo *differenziale* della variabile dipendente y in a e indichiamo $\mathrm{d}f(a, \Delta x)$ o semplicemente $\mathrm{d}y$ la quantità:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(a, \Delta x) = f'(a)\,\Delta x \tag{2.29}$$

che indica la variazione della variabile dipendente y, corrispondente alla variazione infinitesimale Δx della variabile indipendente x, *misurata lungo la retta tangente* $l(x)$.

La fig. 2.8 pone in evidenza la differenza tra il differenziale $\mathrm{d}y$ (incremento infinitesimale sulla retta tangente) e l'incremento infinitesimale Δy sulla curva, entrambi corrispondenti al medesimo incremento infinitesimale Δx della variabile indipendente.

Si osservi che, se consideriamo la funzione $y = f(x) = x$, la cui derivata è $f'(x) \equiv 1$, allora, dalla (2.29), risulta $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Concludiamo quindi che il differenziale $\mathrm{d}x$ della variabile indipendente x è uguale alla sua variazione infinitesimale Δx:

$$\mathrm{d}x = \Delta x \tag{2.30}$$

Sostituendo Δx con $\mathrm{d}x$ nella (2.29), otteniamo:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(a, \mathrm{d}x) = f'(a)\,\mathrm{d}x \tag{2.31}$$

Se $\mathrm{d}x \neq 0$, dividendo ambo i membri per $\mathrm{d}x$, possiamo anche scrivere:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(a) \tag{2.32}$$

espressione che può essere confontata con la relazione $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(a)$.

Si osservi anche che la relazione (2.32) presenta un modo alternativo per indicare la derivata di una funzione. Invece di scrivere $f'(a)$ possiamo scrivere $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(a)$. Questa simbologia per indicare la derivata è denominata *notazione di Leibniz* della derivata.

Con queste notazioni il *teorema dell'incremento* (2.28) a pag. 42 si può anche scrivere nella forma:

$$\boxed{\Delta y = \mathrm{d}y + \varepsilon\,\mathrm{d}x} \tag{2.33}$$

Questa espressione evidenzia come (*si veda* fig. 2.8 a pag. 43) la variazione di y lungo la *curva*, Δy, differisca dalla variazione di y lungo la *retta tangente* in a, $\mathrm{d}y$, per un infinitesimo $\varepsilon\,\mathrm{d}x$ che permane infinitesimo anche se rapportato a $\mathrm{d}x$ ($\frac{\varepsilon\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \approx 0$). Nell'analisi tradizionale si sarebbe detto un *infinitesimo di ordine superiore*, ma il Keisler [25] non utilizza questo termine.

Il *teorema dell'incremento* (2.33) può essere illustrato graficamente utilizzando 2 *microscopi infinitesimali* in cascata (*si veda* fig. 2.9 a pag. 45).

Il *primo microscopio infinitesimale* in fig. 2.9 ha il campo centrato nel punto (a, b) e ingrandisce (con infiniti ingrandimenti) il segmento orizzontale di lunghezza infinitesimale $\Delta x \approx 0$, trasformandolo in un segmento di lunghezza unitaria. Anche il segmento verticale infinitesimale di lunghezza $\Delta y \approx 0$ è ingrandito dal *primo microscopio infinitesimale* fino a raggiungere una lunghezza finita e non infinitesimale. Tuttavia il segmento verticale di lunghezza $\varepsilon\,\mathrm{d}x$ — nonostante gli infiniti ingrandimenti del *primo microscopio infinitesimale* — permane di lunghezza infinitesimale. Nell'immagine del *primo microscopio infinitesimale* (*si veda* fig. 2.9 a pag. 45) si osservi che:

(a) Oltre alla retta tangente in a, $y = l(x)$, anche la curva $y = f(x)$ appare come una retta, in quanto gli infiniti ingrandimenti trasformano il raggio di curvatura ρ della curva in a in un raggio infinito, corrispondente a una curvatura $\kappa = \frac{1}{\rho}$ nulla.

(b) Il differenziale $\mathrm{d}y$ e l'incremento $\Delta y = \mathrm{d}y + \epsilon\,\mathrm{d}x$ sono talmente prossimi l'un l'altro che il *primo microscopio infinitesimale* non riesce a separarli.

(c) Di conseguenza le due rette (la retta tangente in a, $y = l(x)$, e la curva $y = f(x)$, che appare come una retta) sono talmente prossime l'una all'altra che il *primo microscopio infinitesimale* non riesce a separarle (esse appaiono pertanto sovrapposte). Entrambe hanno pendenza $f'(a)$.

Un *secondo microscopio infinitesimale* in fig. 2.9 ha il campo centrato nel punto $(a + \Delta x, b + \Delta y)$ dell'immagine del *primo microscopio infinitesimale* e ingrandisce (con infiniti ingrandimenti) il segmento verticale di lunghezza infinitesimale $\varepsilon\,\mathrm{d}x$, trasformandolo in un

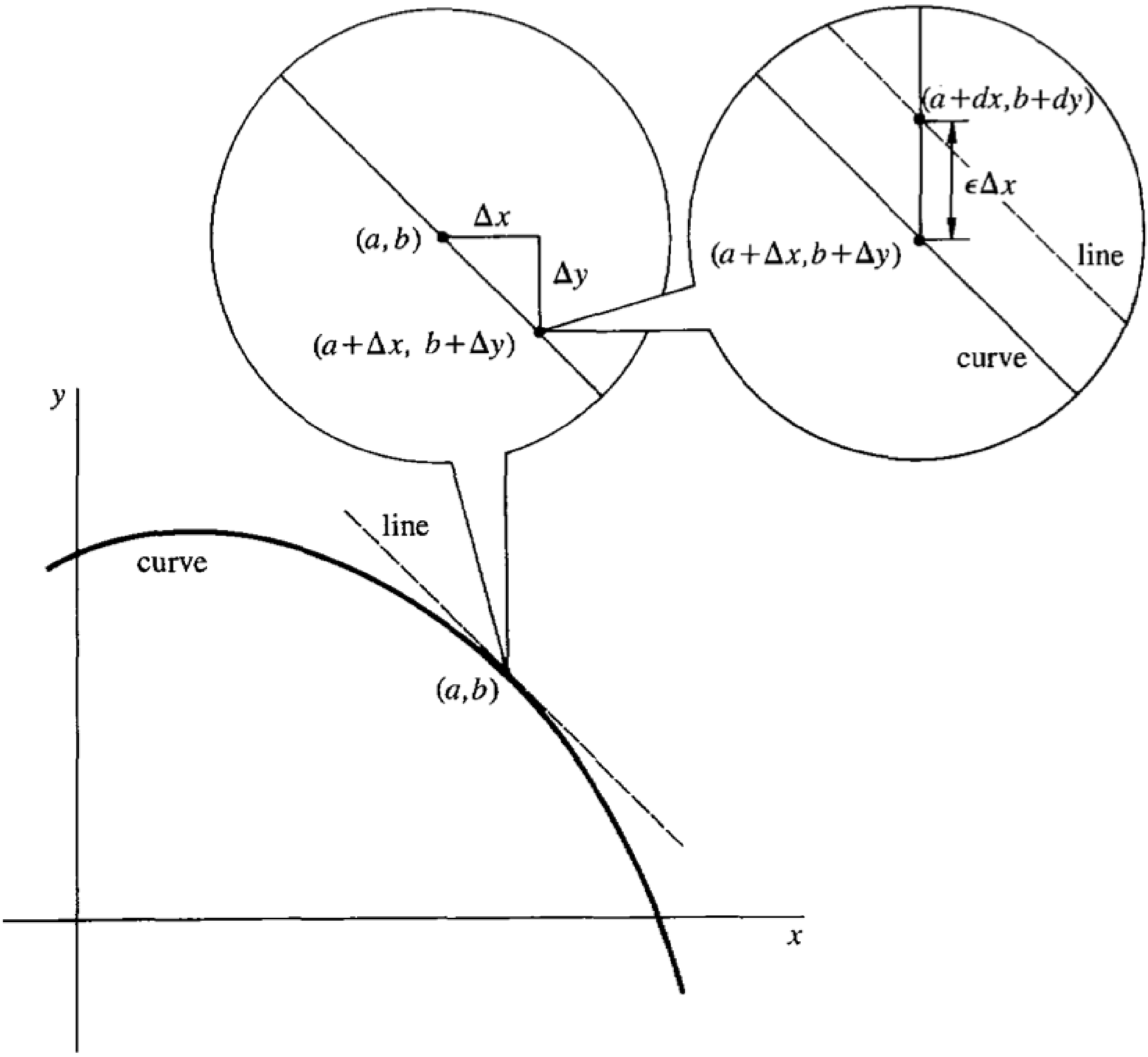


Figura 2.9. Doppio microscopio infinitesimale, che consente di separare la retta tangente dalla curva nel punto $(a + \Delta x, b + \Delta y)$. Questa figura corregge le imprecisioni della precedente fig. 2.8. Nel primo ingrandimento infinito del segmento infinitesimale delimitato da (a, b) e $(a + \Delta x, b + \Delta y)$, curva e retta tangente appaiono come due rette (perché la curvatura non si apprezza in un intervallo infinitesimale) sovrapposte (perché la distanza $\varepsilon \cdot \Delta x$ è il prodotto di due infinitesimi). Il secondo ingrandimento infinito, centrato attorno al punto $(a + \Delta x, b + \Delta y)$, consente di separare le due linee. Figura tratta dal Keisler [25].

segmento di lunghezza unitaria, mentre ingrandisce i segmenti orizzontale di lunghezza $\Delta x \approx 0$ e verticale di lunghezza $\Delta y \approx 0$, trasformandoli in segmenti di lunghezza infinita.

Naturalmente, se il *secondo microscopio infinitesimale* avesse avuto il campo centrato in (a, b) si sarebbero viste ancora due rette sovrapposte, in quanto, nel punto di tangenza (a, b), curva e retta tangente si toccano.

2.2.7.4.2 Differenziale nell'analisi tradizionale. Non tutti i testi attualmente in uso di *analisi tradizionale* introducono il concetto di differenziale. Alcuni non lo introducono affatto, ritenendolo evidentemente inutile o superfluo, oppure lo introducono soltanto per le funzioni di più variabili indipendenti (è il caso, p. es. del testo di Bruno

Pini, *si veda* §4.1.3.2 a pag. 83). In questo paragrafo mi riferisco specificamente all'impostazione del Pagani e Salsa [34], che è sicuramente uno dei testi che tratta l'argomento più estesamente, tra i testi contemporanei di *analisi tradizionale*.

Nei testi di *analisi tradizionale* non si introducono numeri infinitesimali o infiniti, ma l'attributo di *infinitesimale* o *infinito* è utilizzato soltanto per descrivere il comportamento asintotico delle funzioni. Nel Pagani e Salsa [34] *infinitesimale* e *infinito* sono definiti, nel capitolo 4 relativo ai *limiti*, più precisamente nel §2.5 come segue:

Definizione 2.13 (Infinitesimo e infinito nell'analisi tradizionale). Sia f una funzione definita in un intorno di $a \in \mathbb{R}$, tranne al più nel punto a stesso.

Si dice *infinitesimo* per $x \to a$ ogni *funzione* $f(x)$ che tende a zero per $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \tag{2.34}$$

Si dice *infinito* per $x \to a$ ogni *funzione* $f(x)$ che tende a $+\infty$ oppure a $-\infty$ (o anche a ∞) per $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \tag{2.35}$$

Nel Pagani e Salsa [34] sono quindi introdotti, nel medesimo capitolo, sempre nel §2.5 i confronti asintotici e i simboli di Bachmann–Landau[15], in particolare il simbolo denominato “o piccolo”, definito come segue:

Definizione 2.14 (o piccolo). Siano f e g due funzioni definite in un intorno di $a \in \mathbb{R}$, tranne al più nel punto a stesso. Sia inoltre g definitivamente diversa da zero per $x \to a$. Affermiamo che f è un *o piccolo* di g per $x \to a$ oppure che f è *trascurabile* rispetto a g per $x \to a$ e scriviamo:

$$f(x) = o\big(g(x)\big), \qquad \text{per } x \to a \tag{2.36}$$

se:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{2.37}$$

Si afferma anche che $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto g per $x \to a$.

Osserviamo che $f(x) = o(1)$ per $x \to a$ significa che $f(x)$ è infinitesimale per $x \to a$.

Utilizzando il simbolo “o piccolo” possiamo scrivere un limite come segue:

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = l + o(1), \quad \text{per } x \to a \tag{2.38}$$

In seguito, nel capitolo 6 che concerne derivata e differenziale, in particolare nel §1.3 sulla regola di derivazione di una funzione composta, il Pagani e Salsa [34] osserva che

[15] *Paul Gustav Heinrich Bachmann* (1837–1920) e *Edmund Georg Hermann Landau* (1877–1938) sono stati due matematici tedeschi, impegnati nel campo della teoria dei numeri e dell'analisi complessa. Bachmann ha introdotto il simbolo $\mathcal{O}$ (o grande) nel 1894. In seguito Landau ha adottato il simbolo $\mathcal{O}$ e introdotto al suo fianco il simbolo o (o piccolo) nel 1909.

se $f :]b, c[\to \mathbb{R}$ è derivabile in a, allota l'espressione:

$$\varepsilon(\Delta x) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} - f'(a) \tag{2.39}$$

è infinitesimale, dello stesso ordine di Δx.

Se $\Delta x \neq 0$, moltiplicando ambo i membri della (2.39) per Δx, si ottiene:

$$\Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) = f(a + \Delta x) - f(a) - f'(a) \cdot \Delta x$$

ovvero:

$$\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a) \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \tag{2.40}$$

Definendo $\varepsilon(0) = 0$, essendo $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ per $\Delta x \to 0$, la funzione $\varepsilon(\Delta x)$ risulta continua in $\Delta x = 0$ e la relazione (2.40) continua a valere anche per $\Delta x = 0$. Si osservi come questo risultato è analogo al *teorema dell'incremento* (2.28) a pag. 42, anche se, nell'*analisi tradizionale*, non si introduce esplicitamente un *teorema dell'incremento*, denominazione legata esclusivamente all'*analisi non-standard*.

In seguito, sempre nel capitolo 6, nel §1.5 il Pagani e Salsa [34] riprende la relazione (2.40) e osserva che — dei due termini al secondo membro — il primo, $f'(a) \cdot \Delta x$, è lineare in Δx, mentre il secondo, $\Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x)$, è un infinitesimo di ordine superiore a Δx per $\Delta x \to 0$:

$$\Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) = o(\Delta x), \qquad \Delta x \to 0$$

Il il Pagani e Salsa [34] definisce quindi il differenziale come segue:

Definizione 2.15 (Differenziale di una funzione nell'analisi tradizionale). Supponiamo che, assegnati $f :]b, c[\to \mathbb{R}$ e un punto $x \in]a, b[$, esista un numero reale A tale che, per ogni Δx per cui $a + \Delta x \in]a, b[$ si abbia:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \text{per } \Delta x \to 0 \tag{2.41}$$

affermiamo che f è *differenziabile* in a. La parte lineare $A \cdot \Delta x$ è denominata *differenziale di* f e indicata con $\mathrm{d}f(a)$:

$$\mathrm{d}f(a, \Delta x) = A \cdot \Delta x, \quad \text{per } \Delta x \to 0 \tag{2.42}$$

Si osservi che, dividendo ambo i membri della (2.41) per Δx, otteniamo:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + o(1), \quad \text{per } \Delta x \to 0$$

Passando quindi al limite per $\Delta x \to 0$, otteniamo:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A$$

quindi f è derivabile in a.

Sostituendo nella (2.42), otteniamo infine:

$$\mathrm{d}f(a, \Delta x) = f'(a) \cdot \Delta x, \quad \text{per } \Delta x \to 0 \tag{2.43}$$

espressione direttamente confrontabile con la (2.29) a pag. 43.

2.2.7.4.3 Confronto tra le definizioni di differenziale Il confronto tra la definizione di differenziale nell'*analisi tradizionale* e nell'*analisi non-standard* riproduce le differenze di impostazione già evidenziate nel confronto §2.2.7.1.3 a pag. 39 tra le definizioni di pendenza di una curva. Nell'*analisi non-standard* le variazioni Δx, Δy e dy sono quantità iperreali (quindi *non* reali) ma *costanti*, quindi *statiche*. Nell'*analisi tradizionale*, invece, le variazioni Δx, Δy (o Δf) e dy (o df) sono quantità reali ma *variabili*, considerate nel caso in cui esse si *avvicinano* allo zero (cioè nel limite per $\Delta x \to 0$); da questa circostanza segue il loro carattere *dinamico*. Naturalmente, essendo Δx variabile, ε e df devono essere considerate *funzioni* di Δx ($\varepsilon(\Delta x)$ e $df(a, \Delta x)$). Questo indubbiamente complica la loro descrizione. Nell'*analisi non-standard* la dipendenza funzionale di df da Δx non è sottaciuta, ma è introdotta come relazione tra parametri costanti (*si veda* (2.29) a pag. 43).

Si osservi inoltre che il procedimento per ricavare il *teorema dell'incremento* e per definire il *differenziale*, nell'*analisi non-standard* è molto diretto e supportato da rappresentazioni grafiche che utilizzano i cosiddetti *microscopi infinitesimali*, mentre nell'*analisi tradizionale* il procedimento (*si vedano* le equazioni (2.39)–(2.40) alle pagg. 47–47) risulta poco naturale e piuttosto farraginoso.

Si osservi infine che nell'*analisi non-standard* i 3 princìpi enunciati nel §2.2.6 a pag. 32 sono sufficienti per arrivare al concetto di differenziale, mentre nell'*analisi tradizionale* devono essere definiti altri concetti intermedi (p. es. limiti e comportamenti asintotici). Il concetto di limite può essere definito in maniera molto semplice nell'*analisi non-standard* (*si veda* §2.2.8.1) ma non è necessario alla definizione di derivata e differenziale, come non è necessario neppure per le successive definizioni di continuità (*si veda* §2.2.8.2 a pag. 51) e integrale (*si veda* §2.2.9 a pag. 56).

2.2.8 Funzioni continue

2.2.8.1 Limiti

Il testo di Keisler [25] introduce i limiti dopo le derivate, affermando che "il concetto di limite è in stretta relazione al concetto di derivata, ma più generale". Dopo avere richiamato la definizione 2.7 a pag. 37 di *pendenza*, Keisler [25] definisce il limite come segue:

Definizione 2.16 (Limite di una funzione f nel punto c nell'analisi non–standard). Il numero reale $l \in \mathbb{R}$ è denominato *limite* della funzione $f(x)$ per x che tende a $c \in \mathbb{R}$, se — ogniqualvolta $x \in \mathbb{R}^*$ è infinitamente prossimo, ma diverso da c — $f(x)$ è infinitamente prossima a l. In simboli:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \tag{2.44}$$

se:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (x \approx c, x \neq c) \implies f(x) \approx l \tag{2.45}$$

Se non esiste alcun numero l che soddisfa la definizione (2.45), affermiamo che il limite (2.44) *non esiste*. Sono 3 i motivi per cui un limite può *non esistere*:
[a] La funzione $f(x)$ non è definita per qualche $x \in \mathbb{R}^*$, $x \approx c$, $x \neq c$.

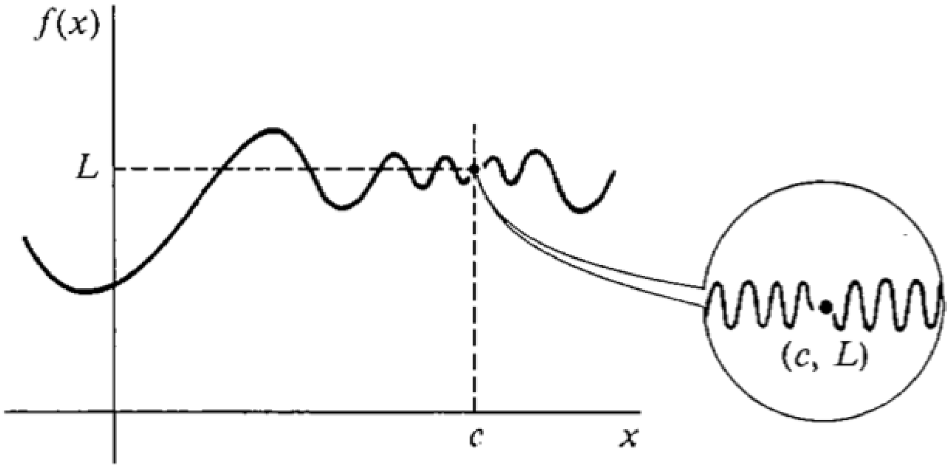


Figura 2.10. Il microscopio infinitesimale mostra il dettaglio attorno al punto (c, L) quando $\lim_{x\to c} f(x) = L$. L'intera porzione della curva con $x \approx c$ è *interna al campo visivo* del *microscopio infinitesimale*. Figura tratta dal Keisler [25].

[b] La funzione $f(x)$ è infinita per qualche $x \in \mathbb{R}^*$, $x \approx c$, $x \neq c$.
[c] La *parte standatd* $\mathrm{st}\big(f(x)\big)$ è diversa per differenti numeri $x \in \mathbb{R}^*$, $x \approx c$, $x \neq c$.
Si osservi che il limite $\lim_{x\to c} f(x)$ dipende soltanto dal valore di $f(x)$ quando $x \approx c$ e $x \neq c$. Il valore $f(c)$ non ha influenza sul limite. Anzi accade talvolta che il limite $\lim_{x\to c} f(x)$ esista ma $f(c)$ non sia definito.

Si osservi anche che il *limite* della funzione $f(x)$ per x che tende a $c \in \mathbb{R}$ può anche essere descritto come:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \mathrm{st}\big(f(c+\varepsilon)\big), \qquad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*, \varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \tag{2.46}$$

Infatti, se $\varepsilon \approx 0$ e $\varepsilon \neq 0$ risulta $c + \varepsilon \approx c$ e $c + \varepsilon \neq c$.

La Definizione 2.16 indica anche, esplicitamente, un procedimento per il calcolo del limite:
[passo 1] Si sceglie x infinitamente prossimo ma non uguale a c e si semplifica l'espressione di $f(x)$.
[passo 2] Si calcola la *parte standard* (*si veda* §2.2.6.3 a pag. 35) $\mathrm{st}\big(f(x)\big)$.

Il concetto di limite in *analisi non-standard* può anche essere illustrato graficamente mediante il *microscopio infinitesimale*.

Nella fig. 2.10 è rappresentato un caso in cui il limite $\lim_{x\to c} f(x) = L$ esiste. Guardando al punto (c, L) mediante il *microscopio infinitesimale* possiamo osservare l'intera porzione della curva per $x \approx c$, perché $f(x)$ è infinitamente prossima a L, pertanto *interna al campo visivo* del *microscopio infinitesimale* in tale porzione.

Nella fig. 2.11 a pag. 50 è rappresentato invece un caso in cui il limite $\lim_{x\to c} f(x)$ *non*-esiste. Come si può osservare, parte della porzione della curva con $x \approx c$ è *esterna al campo visivo* del *microscopio infinitesimale*, ovunque si centri il campo visivo.

Il Keisler [25] presenta quindi, come *teorema*, la definizione di derivata basata sui limiti:

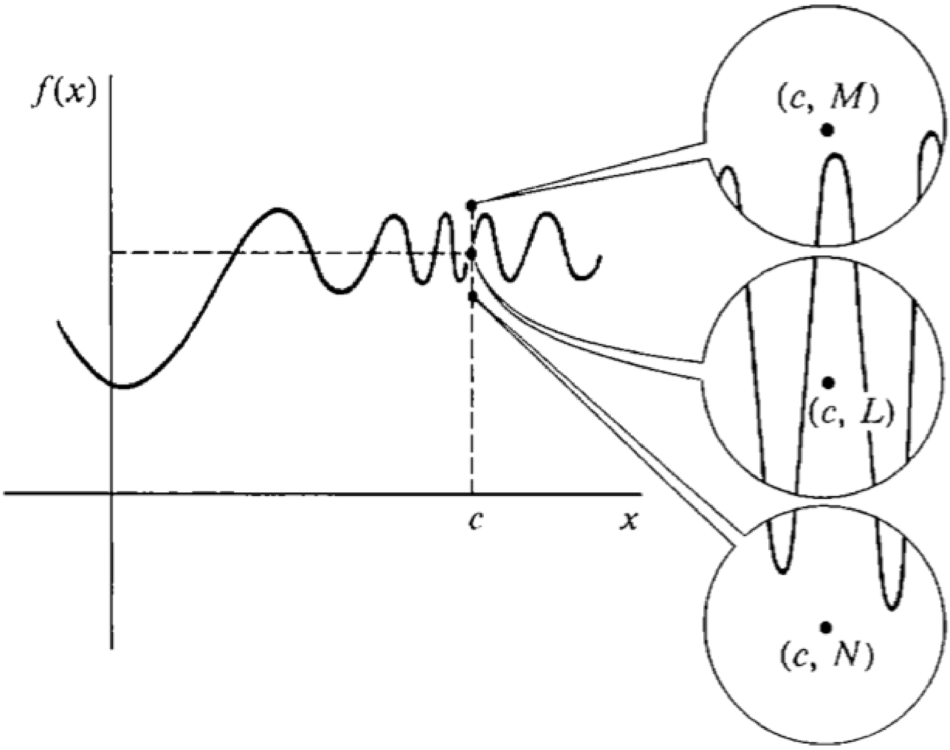


Figura 2.11. Il microscopio infinitesimale mostra il dettaglio attorno all'ascissa c quando $\lim_{x\to c} f(x)$ non esiste. Parte della porzione della curva con $x \approx c$ è *esterna al campo visivo* del *microscopio infinitesimale*, ovunque si centri il campo visivo. Figura tratta dal Keisler [25].

Teorema 2.3 (Derivata e limite). La pendenza della funzione f nel punto a è pari al limite per $\Delta x \to 0$ del rapporto tra la variazione di $f(x)$ e la variazione di x:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{2.47}$$

La pendenza esiste esattamente quando esiste il limite (2.47) e, quando entrambi esistono, essi sono uguali.

La dimostrazione è immediata, sulla base del confronto delle Definizioni 2.16 a pag. 48 (limite) e 2.7 a pag. 37 (pendenza). Si osservi che il rapporto incrementale $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ non è definito per $\Delta x = 0$.

La pendenza della funzione f nel punto a è anche pari al limite:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{2.48}$$

come si può osservare, ponendo:

$$\Delta x = x - a \qquad \Longrightarrow \qquad x = a + \Delta x$$

Pertanto, quando $x \approx a$ ma $x \neq a$ risulta $\Delta x \approx 0$ e $\Delta x \neq 0$, inoltre:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \approx f'(a)$$

La definizione di *limite* 2.16 nell'*analisi non-standard* può essere confrontata con la definizione di *limite* 2.9 a pag. 39 nell'*analisi tradizionale*.

In tale definizione 2.9, il Pagani e Salsa [34] (cap. 3, §2.1, pag. 160) precisa che c deve essere un *punto di accumulazione* e che la definizione di limite richiede uno spazio topologico diverso da $\mathbb{R}$: gli autori definiscono il limite nell'ampliamento $\mathbb{R}^{(*)} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ (definito nel cap. 3, §2.3, pag. 142) dell'insieme dei numeri reali, che include anche i due "punti (*non* numeri!) indicati coi simboli $-\infty$ e $+\infty$".

Il confronto tra la definizione di *limite* 2.16 a pag. 48 (*analisi non-standard*) con la definizione di *limite* 2.9 a pag. 39 (*analisi tradizionale*) mostra, ancora una volta, che la prima è più semplice e vicina all'idea intuitiva di *limite*, mentre la seconda è assai più contorta: essa utilizza ben 3 *quantificatori*, due quantificatori *universali* $\forall$ e un quantificatore *esistenziale* $\exists$, nell'ordine $\forall\,\exists\,\forall$. Si osservi che il *numero di quantificatori* e la loro *alternanza* sono ritenuti stime della complessità dell'asserzione. Per esempio, il testo *How to Think Like a Mathematician: A Companion to Undergraduate Mathematics* [22] di Kevin Houston[16], nel cap. 11 (Complexity and negation of quantifiers), afferma:

> "Il *numero di quantificatori* in un'asserzione matematica fornisce una misura approssimativa della complessità dell'asserzione. Le asserzione che coinvolgono tre o più quantificatori possono essere difficili da comprendere. Questo è il motivo principale per cui è difficile comprendere le definizioni rigorose di *limite*, *convergenza*, *continuità* e *differenziabilità* nell'analisi, poiché hanno molti quantificatori. In effetti, è l'*alternanza* di $\forall$ ed $\exists$ a causare la complessità. Per esempio, $\forall x \forall y \exists z \mid \mathscr{P}(x, y, z)$ sarà, in generale, più semplice di $\forall x \exists z \forall y \mid \mathscr{P}(x, y, z)$. Tuttavia, poiché possiamo sostituire $\forall x \forall y$ con $\forall x, y$, il solo conteggio del numero di quantificatori fornisce una buona misura della complessità."

In maniera simile Andreas Blass[17], nella recensione [6] a tre testi di analisi non-standard, scrive:

> "Spesso [...] la definizione non-standard di un concetto è più semplice della definizione standard (sia intuitivamente più semplice sia più semplice in senso tecnico, come quantificatori su tipi inferiori o minori alternanze di quantificatori). Di conseguenza, l'analisi non standard a volte rende più facile trovare le dimostrazioni."

Osserviamo ancora che la definizione 2.16 a pag. 48 (*analisi non-standard*) ha carattere *statico*: $x \in \mathbb{R}^*$ è uno dei tanti possibili numeri iperreali appartenenti alla *mònade* o *alone* (*si veda* Definizione 2.6 a pag. 36) del numero reale c e *non si sposta*. La definizione 2.9 a pag. 39 (*analisi tradizionale*) ha invece carattere *dinamico*: se δ *si avvicina* a zero, quindi x *si avvicina* a c anche ε *si avvicina* a zero, quindi $f(x)$ *si avvicina* a l.

2.2.8.2 Continuità

Grazie ai concetti di *infinitesimo* e di *infinitamente prossimo*, anche la definizione di continuità di una funzione può essere semplificata sia nell'espressione sia nel concetto.

[16] *Kevin Houston* (1968–) è docente di matematica all'Università di Leeds, UK, specializzato nella teoria delle singolarità.

[17] *Andreas Blass* (1947–) è docente di matematica all'Università del Michigan, USA, attivo in particolare nella logica matematica, nella teoria degli insiemi e nell'informatica teorica.

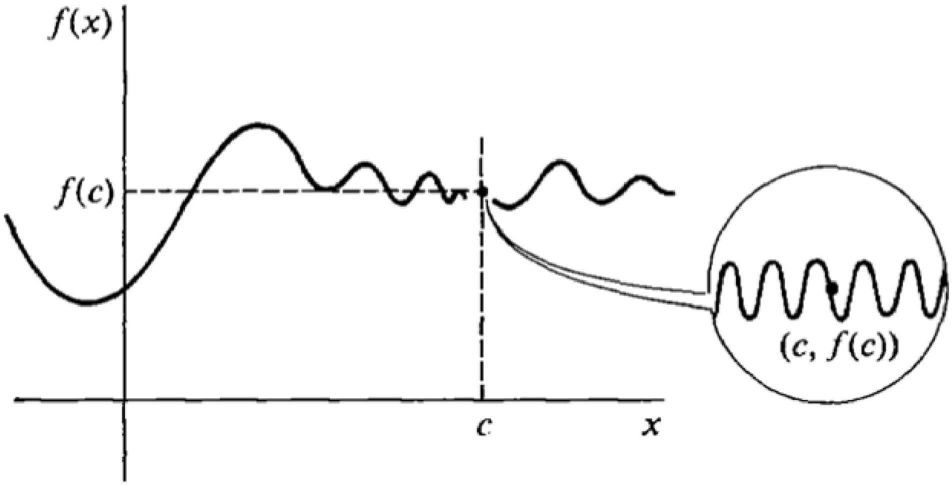


Figura 2.12. Il microscopio infinitesimale mostra il dettaglio attorno al punto c di una funzione *continua* nel punto c. L'intera porzione della curva con $x \approx c$ è *interna al campo visivo* del *microscopio infinitesimale*. Figura tratta dal Keisler [25].

Il Keisler [25] introduce il concetto a partire da una definizione euristica: intuitivamente, una curva $y = f(x)$ è *continua* se forma una linea ininterrotta. Questo significa che, ogni volta che l'ascissa x_1 è prossima all'ascissa x_2, l'ordinata $f(x_1)$ deve essere prossima all'ordinata $f(x_2)$.

Keisler [25] afferma quindi che — per trasformare questa idea intuitiva in una definizione matematica rigorosa — è sufficiente trasformare il termine *prossima* con la locuzione *infinitamente prossima*. Il testo presenta quindi la seguente definizione di *continuità*:

Definizione 2.17 (Continuità di una funzione f nel punto c nell'analisi non-standard). La funzione f è denominata *continua* in un punto $c \in \mathbb{R}$ se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

(i) La funzione f è definita nel punto c, in simboli:

$$c \in \mathscr{D}(f) \tag{2.49}$$

(ii) Ogniqualvolta la variabile indipendente x è infinitamente prossima a c, la variabile dipendente $f(x)$ è infinitamente prossima a $f(c)$, in simboli:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, x \approx c \implies f(x) \approx f(c) \tag{2.50}$$

Se la funzione f non è continua, essa è denominata *discontinua*.

Il concetto di continuità in *analisi non-standard* può anche essere illustrato graficamente mediante il *microscopio infinitesimale*.

Quando la funzione f è *continua* nel punto di ascissa c, l'intera porzione della curva nella quale risulta $x \approx c$ si trova all'*interno del campo visivo* di un *microscopio infinitesimale* puntato sul punto $(c, f(c))$, come illustrato nella fig. 2.12.

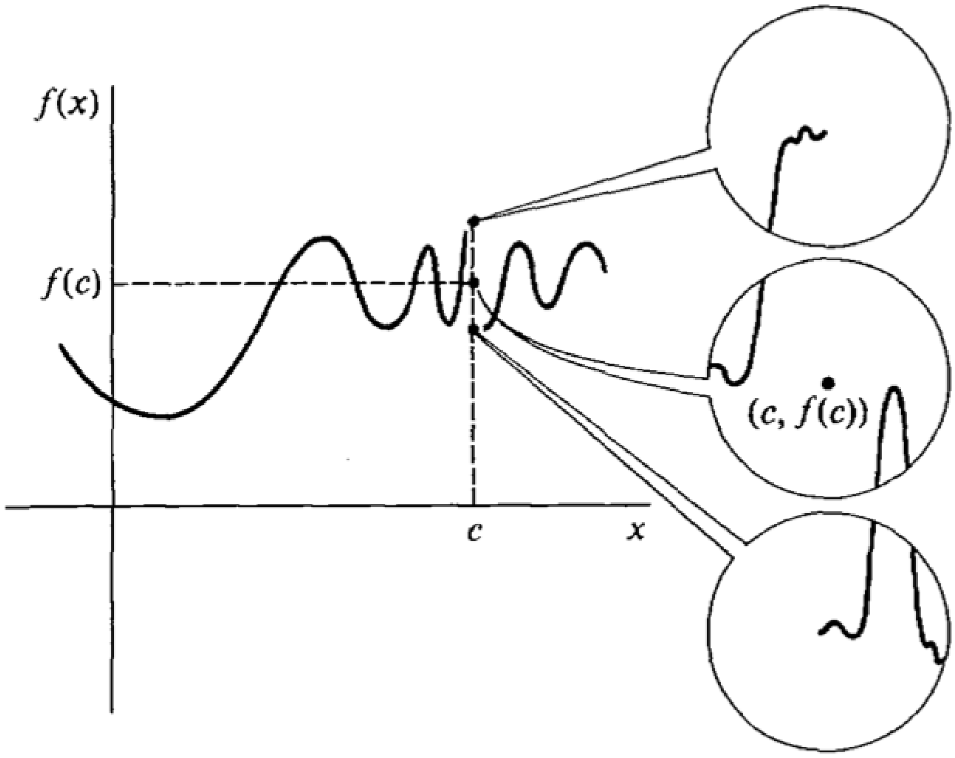


Figura 2.13. Il microscopio infinitesimale mostra il dettaglio attorno al punto c di una funzione *discontinua* nel punto c. Alcuni valori di $f(x)$ con $x \approx c$ sono *indefiniti* o *esterni al campo visivo* del *microscopio infinitesimale*. Figura tratta dal Keisler [25].

Se invece la funzione f è *discontinua* nel punto di ascissa c, alcuni valori di $f(x)$ con $x \approx c$ sono *indefiniti* o *esterni al campo visivo* del *microscopio infinitesimale*, come nella fig. 2.13 a pag. 53.

Il Keisler [25] prosegue introducendo — come teorema — una definizione di continuità basata sui limiti che, da un lato costituisce un ponte con l'*analisi tradizionale*, dall'altro consente rapidamente di trarre conclusioni sulla continuità di somma, prodotto, ecc. di funzioni continue.

Teorema 2.4 (Continuità e limite). La funzione f è *continua* nel punto c se e solamente se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \tag{2.51}$$

Poniamo ora a confronto la Definizione 2.17 con la definizione ε-δ di continuità utilizzata nell'*analisi tradizionale*. Nel testo di Pagani e Salsa [34], nel cap. 5, §1.1, sono riportate 4 definizioni equivalenti di *continuità*: due di esse ricorrono alla definizione di limite, che pertanto deve essere preventivamente nota, una utilizza la definizione di *intorno*, e l'ultima utilizza un valore di controllo (o tolleranza) ε delle distanze in ordinata e un corrispondente valore δ di riferimento delle distanze in ascissa. Vediamo in particolare quest'ultima, che è la più tipica dell'analisi tradizionale.

Definizione 2.18 (Continuità di una funzione f nel punto c nell'analisi tradizionale). Sia $f : \mathbb{R} \supseteq X \to \mathbb{R}$. Se c è un punto di accumulazione di X, affermiamo che f è continua in c se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste un $\delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, per ogni $x \in X$ con $|x - c| < \delta$, in simboli:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ : |f(x) - f(c)| < \varepsilon, \quad \forall x \in X, |x - c| < \delta(\varepsilon) \tag{2.52}$$

Nel confronto tra la definizione di *continuità* 2.17 a pag. 52 (*analisi non-standard*) e la definizione di *continuità* 2.18 (*analisi tradizionale*) si osservi, ancora una volta, che la prima è più semplice e vicina all'idea intuitiva di *continuità*, mentre la seconda è assai più contorta: essa utilizza ben 3 *quantificatori*, due quantificatori *universali* $\forall$ e un quantificatore *esistenziale* $\exists$, nell'ordine $\forall\,\exists\,\forall$. Si ricordi che il numero di quantificatori e la loro alternanza sono ritenuti stime della complessità dell'asserzione (*si rivedano* le considerazioni di Kevin Houston [22] e Andreas Blass [6] riportate a pag. 51).

Anche in questo frangente osserviamo che la definizione 2.17 a pag. 52 (*analisi non-standard*) ha carattere *statico*: $x \in \mathbb{R}^*$ è uno dei tanti possibili numeri iperreali appartenenti alla *mònade* o *alone* (*si veda* Definizione 2.6 a pag. 36) del numero reale c e *non si sposta*. La definizione 2.18 (*analisi tradizionale*) ha invece carattere *dinamico*: se δ *si avvicina* a zero, quindi x *si avvicina* a c, anche ε *si avvicina* a zero, quindi $f(x)$ *si avvicina* a $f(c)$.

2.2.8.3 Continuità su un intervallo e continuità uniforme

Il concetto di continuità uniforme è spesso omesso nelle trattazioni scolastiche. Eppure si tratta di una nozione molto importante: per esempio su di essa si basa la dimostrazione che ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è ivi integrabile. Saper distinguere tra continuità e continuità uniforme spesso non è facile. L'analisi non standard può essere di aiuto perché consente di formulare le definizioni in termini più semplici.

Il testo di Howard Jerome Keisler *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach* [25] non affronta l'argomento; tuttavia esso è trattato nel libro dello stesso autore *Foundations of Infinitesimal Calculus* [26], complementare al primo. Questo secondo libro [26] è pensato come una rapida introduzione all'approccio infinitesimale all'analisi per i matematici oppure come materiale di base per gli insegnanti o ancora come testo per un seminario universitario. Alla pag. 45 dell'edizione *online*, Keisler [26] definisce la continuità uniforme come segue.

Definizione 2.19 (Continuità su un intervallo e continuità uniforme in analisi non-standard). Sia $Y \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme del dominio di f, in simboli $Y \subseteq \mathscr{D}(f)$ e sia Y^* l'*estensione naturale* dell'insieme Y all'insieme dei numeri iperreali, $Y^* \subseteq \mathbb{R}^*$.

(i) La funzione f è denominata *continua* sull'insieme Y se, per ogni $c \in Y$ e per ogni $x \in Y^*$, con $x \approx c$, si ha $f(x) \approx f(c)$. In simboli:

$$\forall c \in Y, \forall x \in Y^*, \quad x \approx c \implies f(x) \approx f(c) \tag{2.53}$$

(ii) La funzione f è denominata *uniformemente continua* sull'insieme Y se, per ogni $x, y \in Y^*$ con $x \approx y$ si ha $f(x) \approx f(y)$. In simboli:

$$\forall x, y \in Y^*, \quad x \approx c \implies f(x) \approx f(y) \tag{2.54}$$

Mentre nella definizione di *continuità su un intervallo* la coppia di punti considerati contiene un numero reale $c \in \mathbb{R}$ e un numero iperreale $x \in \mathbb{R}^*$, per la *continuità uniforme* occorre considerare tutte le coppie di numeri iperreali $x, y \in \mathbb{R}^*$ (quindi anche le coppie di punti entrambi infinitesimi o infiniti).

Ovviamente ogni funzione *uniformemente continua* sull'intervallo Y è necessariamente *continua* sull'intervallo Y.

Possiamo porre a confronto anche la definizione 2.19 con la corrispondente definizione nell'*analisi tradizionale*. Il Pagani e Salsa [34], nel cap. 5, §1.4 propone la seguente definizione.

Definizione 2.20 (Continuità su un intervallo e continuità uniforme in analisi tradizionale). Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : x \to \mathbb{R}$.

(i) Si dice che la funzione f è *continua* in X se, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\forall c \in X$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, c) \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni punto $x \in X$, con $|x - c| < \delta$ risulti $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. In simboli:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \forall c \in X, \exists \delta = \delta(\varepsilon, c) \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X, \\ |x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \varepsilon \end{gathered} \tag{2.55}$$

(ii) Si dice che la funzione f è *uniformemente continua* in X se, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni coppia di punti $x, y \in X$, con $|x - y| < \delta$ risulti $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. In simboli:

$$\begin{gathered} \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X, \forall y \in X, \\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \end{gathered} \tag{2.56}$$

Mentre nella definizione di *continuità su un intervallo* il parametro di controllo δ è funzione sia della tolleranza ε sia del punto c, nella definizione di *continuità uniforme* il parametro di controllo δ è funzione soltanto della tolleranza ε.

Nel confronto tra le definizioni di *continuità su un intervallo* e *continuità uniforme* 2.19 a pag. 55 (*analisi non-standard*) e le definizioni di *continuità su un intervallo* e *continuità uniforme* 2.20 (*analisi tradizionale*) si osservi, ancora una volta, che la prima è più semplice e vicina all'idea intuitiva di *continuità su un intervallo* e *continuità uniforme*, mentre la seconda è assai più farraginosa: essa utilizza ben 4 *quantificatori*, tre quantificatori *universali* $\forall$ e un quantificatore *esistenziale* $\exists$, nell'ordine $\forall\forall\exists\forall$ (continuità su un intervallo) e $\forall\exists\forall\forall$ (continuità uniforme). Si ricordi che il numero di quantificatori e la loro alternanza sono ritenuti stime della complessità dell'asserzione (*si rivedano* le considerazioni di Kevin Houston [22] e Andreas Blass [6] riportate a pag. 51).

2.2.9 Integrali

2.2.9.1 Integrali nell'analisi non-standard.

Per affrontare lo studio degli integrali nell'analisi *analisi non-tandard*, consideriamo nuovamente una curva nel piano e il suo grafico.

Consideriamo una generica funzione f reale, continua sull'intervallo $I = [a, b]$ con estremi $a < b$, in cui $f(x) \geq 0, \forall x \in I$, con il fine di interpretare l'area della regione delimitata dalla curva $y = f(x)$, dall'asse x, e dalle rette $x = a$ e $x = b$.

Nel caso in cui $f(x) \equiv k$ è una funzione costante, l'area soggiacente alla funzione nell'intervallo è l'area di un rettangolo:

$$A = k \cdot (b - a)$$

L'area soggiacente al grafico di una *generica funzione continua* $y = f(x)$ è definita invece dall'*integrale*:

$$A = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

L'idea alla base del calcolo di un integrale consiste nel considerare l'area soggiacente alla curva come la somma di rettangoli di larghezza infinitesimale $\mathrm{d}x$ e di altezza $f(x)$, aventi un'area pari a $\mathrm{d}A = f(x)\, \mathrm{d}x$. La somma dell'area di tutti questi rettangoli è denominata *somma di Riemann*[18] *infinita*. Infine l'integrale $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ è definito come la *parte standard* della *somma di Riemann infinita*. La *somma di Riemann infinita*, essendo la somma di aree di rettangoli, differisce infatti dall'area soggiacente alla curva di una quantità infinitesimale. Tale errore è rimosso prendendo la *parte standard* della *somma di Riemann infinita*.

Per descrivere il procedimento più in dettaglio, consideriamo dapprima una *somma di Riemann finita*. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ (con $a < b$) in n sotto-intervalli. Ciascuno di essi avrà pertanto un'ampiezza pari a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. L'intervallo $[a, b]$ risulta quindi ripartito negli n sotto-intervalli:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

dove i valori:

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\Delta x, \qquad \Delta x = \frac{b-a}{n} \\ \ldots &\quad \ldots \\ x_n &= b \end{aligned}$$

[18]Dal nome di Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866), matematico tedesco che ha contribuito profondamente all'analisi matematica, alla teoria dei numeri e alla geometria differenziale.

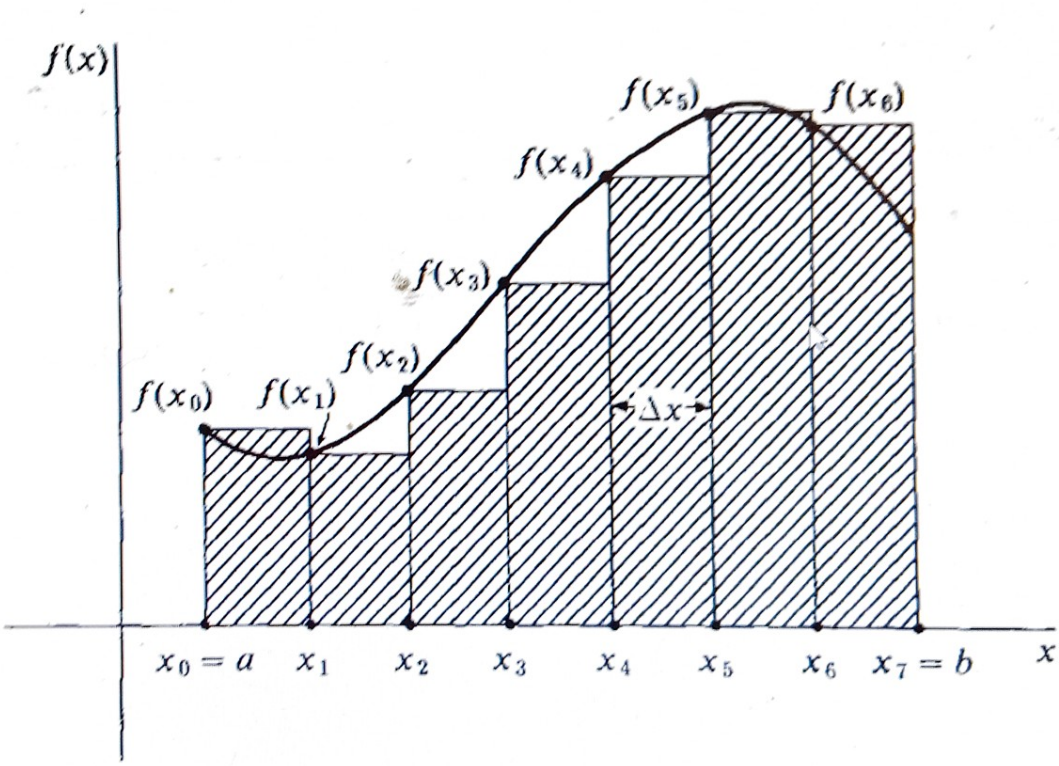


Figura 2.14. Somma di Riemann finita nel caso in cui $b - a = n\,\Delta x$, con $n = 7$. Figura tratta dal Keisler [25].

sono denominati *punti di partizione*.

Per ogni sotto-intervallo $[x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n$ consideriamo il rettangolino di base pari a Δx e altezza pari a $f\left(x_{k-1}\right)$ (*si veda* fig. 2.14), avente area pari a:

$$A_k = f\left(x_{k-1}\right) \cdot \Delta x, \qquad k = 1, \ldots, n$$

Sommando l'area di tutti i rettangolini, otteniamo la *somma di Riemann finita*:

$$\sum_a^b f\left(x\right)\,\Delta x \stackrel{\text{def}}{=} f\left(x_0\right)\,\Delta x + f\left(x_1\right)\,\Delta x + \cdots + f\left(x_{n-1}\right)\,\Delta x \tag{2.57}$$

Le lettere a e b sotto e sopra il simbolo $\sum$ di sommatoria indicano che il primo sub-intervallo *inizia* in a e l'ultimo sub-intervallo *termina* in b.

Possiamo effettuare il medesimo calcolo anche quando la larghezza Δx del sub-intervallo non suddivide in un numero intero di parti la larghezza $b - a$ dell'intero intervallo (*si veda* fig. 2.15). In tal caso, come si vede in fig. 2.15, preso:

$$n = \left\lfloor \frac{b-a}{\Delta x} \right\rfloor$$

dove il simbolo $\lfloor x \rfloor$ denota la *parte intera inferiore* del numero x, risulta:

$$a + n\,\Delta x \leq b \tag{2.58}$$

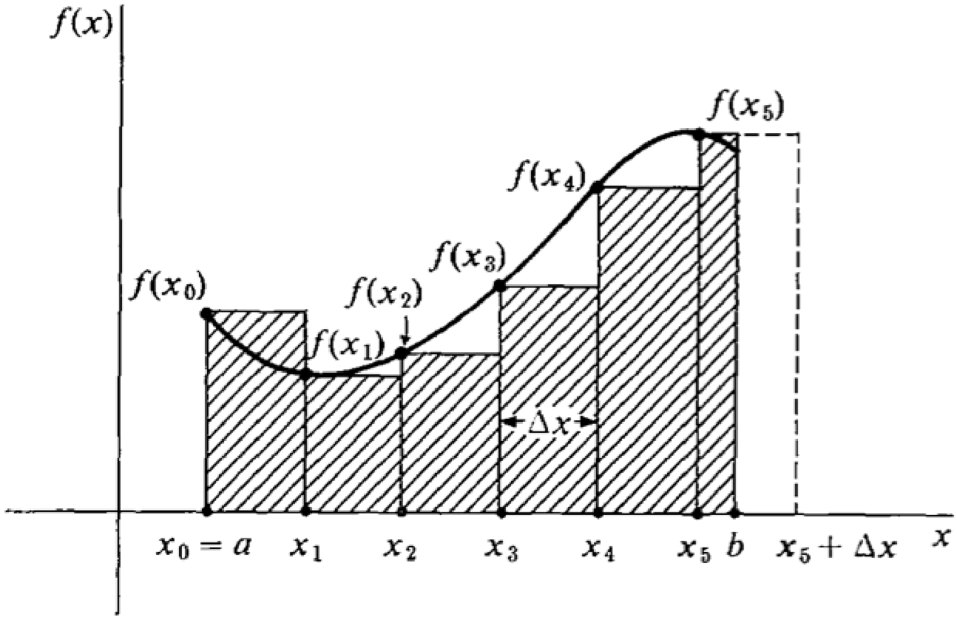


Figura 2.15. Somma di Riemann finita nel caso in cui $\Delta x \nmid b - a$ (Δx non suddivide $b - a$), ovvero $a + n\,\Delta b \leq b$ con $n = 5$. Figura tratta dal Keisler [25].

e rimane un resto al termine dell'intervallo $[a, b]$, pari a $b - n\,\Delta x$. La *somma di Riemann* ha pertanto un *rettangolo extra* la cui larghezza è pari a tale resto.

L'intervallo $[a, b]$ risulta quindi ripartito negli $n + 1$ sotto-intervalli:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, b]$$

e i *punti di partizione* sono:

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\Delta x, \\ \ldots & \quad \ldots \\ x_n &= a + n\,\Delta x, \\ b & \end{aligned} \qquad n = \left\lfloor \frac{b - a}{\Delta x} \right\rfloor$$

La *somma di Riemann* diviene quindi:

$$\sum_a^b f(x)\ \Delta x \overset{\text{def}}{=} f(x_0)\ \Delta x + f(x_1)\ \Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\ \Delta x + f(x_n)\ (b - x_n)$$

Definiamo quindi, nel caso più generale, la *somma di Riemann* (finita) come segue:

Definizione 2.21 (Somma di Riemann). Sia f una funzione reale, continua sull'intervallo $I = [a, b]$ con estremi $a < b$, in cui $f(x) \geq 0, \forall x \in I$. Definiamo *somma di Riemann* $\sum_a^b f(x)\ \Delta x$ la somma

$$\begin{aligned}\sum_a^b f(x)\ \Delta x \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0)\ \Delta x + f(x_1)\ \Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\ \Delta x \\ + f(x_n)\ (b - x_n)\end{aligned} \tag{2.59}$$

dove $n = \left\lfloor \frac{b-a}{\Delta x} \right\rfloor$ e i punti di partizione sono:

$$\begin{aligned} x_0 &= a, \\ x_1 &= a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\Delta x, \\ \ldots &\quad \ldots \\ x_n &= a + n\,\Delta x, \\ b & \end{aligned}$$

Osservimo innanzitutto che, se $x_n = b$ (resto nullo), l'ultimo termine della somma di Riemann (2.59) è nullo: $f(x_n)\ (b - x_n) = 0$

Osserviamo inoltre che — assegnata la funzione $f(x)$ — la *somma di Riemann* $\sum_a^b f(x)\ \Delta x$ è una funzione di tre variabli, a, b e Δx:

$$\sum_a^b f(x)\ \Delta x = S(a, b, \Delta x) \tag{2.60}$$

Si noti che il simbolo x nell'espressione $\sum_a^b f(x)\ \Delta x$ è una *variabile muta*, in quanto la somma $\sum_a^b f(x)\ \Delta x$ è indipendente da essa.

Osservando fig. 2.14 a pag. 57 o fig. 2.15 a pag. 58, possiamo pensare intuitivamente che, prendendo Δx sempre il più piccolo, la *somma di Riemann* si avvicini sempre più all'area soggiacente alla curva.

Il passo successivo consiste nel prendere Δx *infinitamente piccolo* e ottenere la *somma di Riemann infinita*. Per effettuare questo passaggio, osserviamo dalla (2.60) che — fissati gli estremi a e b — la somma di Riemann è una *funzione reale* della *singola variabile reale* Δx:

$$\sum_a^b f(x)\ \Delta x = S(\Delta x) \tag{2.61}$$

Inoltre tale somma è definita per tutti i $\Delta x \in \mathbb{R}^+$. Pertanto, per l'*assioma di trasferimento* 2.2 a pag. 33, la somma:

$$\sum_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = S(\mathrm{d}x) \tag{2.62}$$

è definita per tutti i $\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^{*+}$. In particolare, se $\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^{*+}$ è *infinitesimale*, $\mathrm{d}x \approx 0$, il

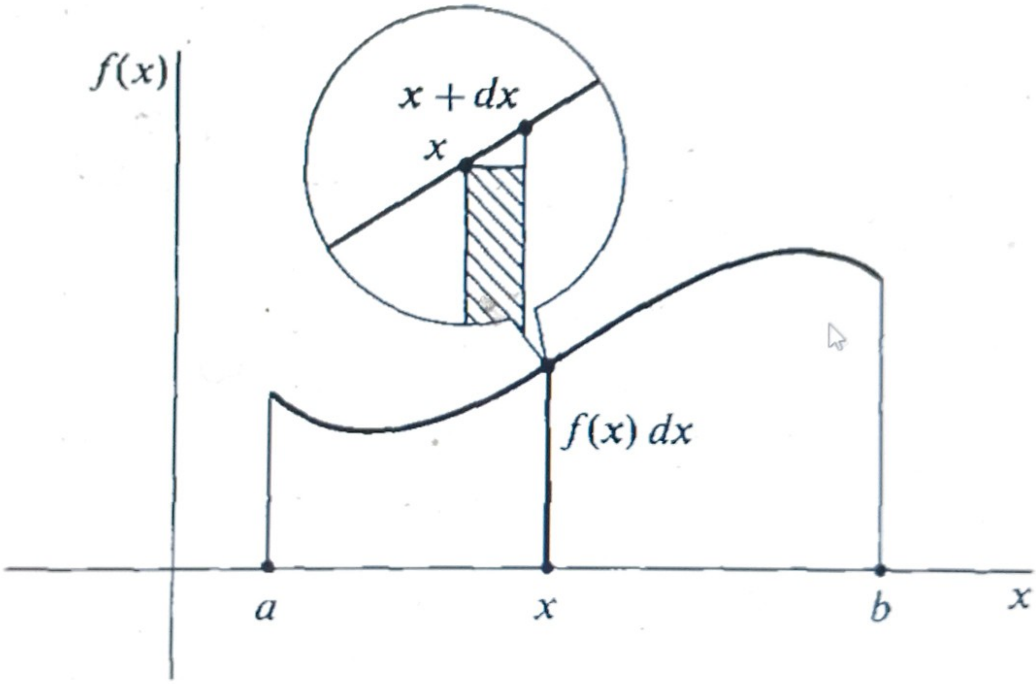


Figura 2.16. Somma di Riemann infinita (2.62), con $\mathrm{d}x \in \mathbb{R}^{*+}$, $\mathrm{d}x \approx 0$ e un numero infinito di termini. Il microscopio infinitesimale evidenzia un rettangolino di base $\mathrm{d}x$, altezza $f(x)$, quindi area $f(x) \cdot \mathrm{d}x$. Figura tratta dal Keisler [25].

numero dei termini della somma (2.62) diviene *infinito* e possiamo denominare la (2.62) *somma di Riemann infinita.*

Essendo il numero dei termini *infinito* il numero n nella relazione (2.58) a pag. 57 diviene infinito e la relazione (2.58) si può scrivere come:

$$a + H\,\mathrm{d}x \leq b \tag{2.63}$$

dove H è il pù grande numero *iperintero*[19], tale che verifica la condizione (2.63). Il numero dei *punti di partizioni* è $H + 2$:

$$x_0, x_1, \ldots, x_H, b$$

e i sotto-intervalli sono $H + 1$:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{H-1}, x_H], [x_H, b]$$

e i primi H termini della somma sono infinitesimi della forma:

$$f(x_K) \cdot \mathrm{d}x, \qquad x_K = a + K\,\mathrm{d}x, \qquad K = 0, 1, 2, \ldots, H-1$$

La *somma di Riemann infinita* può quindi essere scritta come:

$$\sum_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{def}}{=} f(x_0)\,\mathrm{d}x + f(x_1)\,\mathrm{d}x + \cdots + f(x_{H-1})\,\mathrm{d}x + f(x_H)\,(b - x_H)$$

[19]Un numero *iperintero* è un numero iperreale y tale che $y = \lfloor x \rfloor$ per qualche numero iperreale infinito x. In sostanza è un numero intero infinito.

La somma infinita di Riemann è un numero *iperreale*, in quanto somma di numeri iperreali. Vorremmo poi prenderne la *parte standard*. Ma prima dobbiamo dimostrare che esso è un numero iperreale *finito* e quindi ha una parte standard. Tale finitezza è la tesi del seguente teorema.

Teorema 2.5 (Finitezza della somma di Riemann infinita). Sia f una funzione continua in un intervallo $I = [a, b]$ con $a < b$, e sia $\mathrm{d}x$ un numero infinitesimale positivo. Allora la *somma di Riemann infinita*:

$$\sum_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x$$

è un numero iperreale *finito*.

Questo teorema è dimostrato semplicemente dal Keisler [25], facendo riferimento alla fig. 2.17. Sia $B \in \mathbb{R}$ un numero reale superiore al massimo della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. Consideriamo innanzitutto un numero reale $\Delta x \in \mathbb{R}^+$. Nella fig. 2.17 osserviamo che la *somma di Riemann* (finita) è inferiore all'area del rettangolo di base $b-a$ e altezza B:

$$\sum_{a}^{b} f(x)\ \Delta x < B \cdot (b - a)$$

per cui, dall'*assioma di trasferimento* 2.2 a pag. 33, segue che:

$$\sum_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x < B \cdot (b - a)$$

In maniera simile, se $C \in \mathbb{R}$ è un numero reale inferiore al minimo della funzione f nell'intervallo $[a, b]$, si dimostra che:

$$\sum_{a}^{b} f(x)\ \mathrm{d}x > C \cdot (b - a)$$

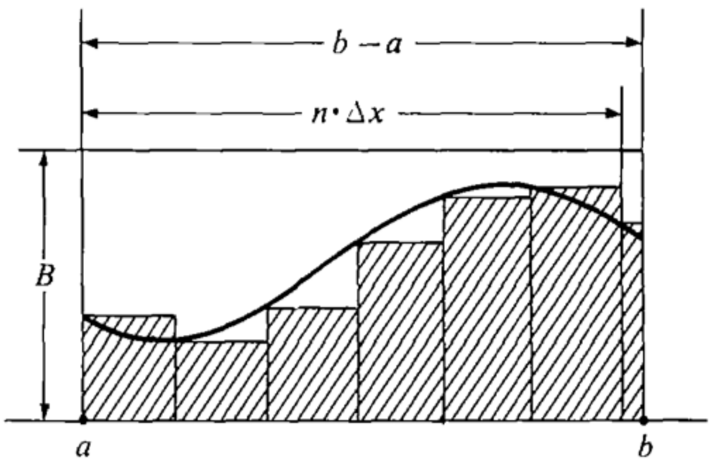


Figura 2.17. Dimostrazione della *finitezza della somma di Riemann infinita*. Figura tratta dal Keisler [25].

Pertanto la *somma di Riemann infinita* è *finita*.
□

Possiamo quindi definire l'*integrale definito* come segue:

Definizione 2.22 (Integrale definito nell'analisi non-standard). Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione di una sola variabile x, definita e continua in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$. Siano inoltre $a \in I$ e $b \in I$ due numeri reali, con $a < b$. Sia inoltre $\mathrm{d}x \approx 0$ un infinitesimo positivo. Definiamo *integrale definito* di f da a a b la seguente *parte standard* di una *somma di Riemann infinita*:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{st}\left(\sum_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \tag{2.64}$$

Definiamo inoltre:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2.65}$$

Si osservi che nel procedimento che ha condotto alla definizione dell'integrale definito non è stata utilizzata la definizione di limite. Si è utilizzato l'*assioma di trasferimento* 2.2 a pag. 33 per passare dalla somma di Riemann finita alla somma di Riemann infinita e il *teorema della parte standard* (*si veda* 2.2.6.3 a pag. 35) per rimuovere la parte infinitesimale dalla somma di Riemann infinita.

2.2.9.2 Integrali nell'analisi tradizionale.

Nell'*analisi tradizionale*, per evitare l'uso degli infinitesimi, la descrizione, naturalmente, si complica. L'utilizzo degli infinitesimi deve essere in qualche modo sostituito da un procedimento di *limite*. L'integrale definito deve risultare in qualche modo come il limite di una successione di somme di Riemann, quando la suddivisione dell'intervallo di integrazione in sotto-intervalli diviene sufficientemente fine. Pagani e Salsa [34], nel loro testo di analisi matematica (cap. 8, §1.1), procedono come segue.

Si introduce una *suddivisione* (o *decomposizione*) $\mathcal{D}$ dell'intervallo $[a, b]$, definita come insieme finito di punti $x_i, i = 1, \ldots, n$, tale che:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Si considera una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata:

$$n \leq f(x) \leq M, \qquad \forall x \in [a, b]$$

Si definiscono i valori degli estremi inferiore e superiore relativi a ogni segmento $[x_{i-1}, x_1[$ della suddivisione:

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i[} f(x), \qquad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i[} f(x), \qquad i = 1, \ldots, n$$

Posto $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ si definiscono inoltre le *somma di Riemann inferiore* s *e superiore* S relative alla suddivisione $\mathcal{D}$:

$$s = s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$$
$$S = S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$$

Si osserva quindi che:

$$m(b-a) \leq s(\mathcal{D}, f) \leq S(\mathcal{D}, f) \leq M(b-a) \tag{2.66}$$

per cui sono *finiti* l'estremo inferiore delle somme superiori e l'estremo superiore delle somme inferiori (presi sull'insieme delle possibili suddivisioni $\mathcal{D}$ di $[a, b]$):

$$\inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f), \qquad \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f)$$

Si dimostra che le disuguaglianze (2.66) continuano a essere vere anche se le suddivisioni sono diverse:

$$m(b-a) \leq s(\mathcal{D}_1, f) \leq S(\mathcal{D}_2, f) \leq M(b-a)$$

Da questo si ricava che, per ogni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata, risulta:

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) \leq \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$$

Si conclude quindi che, per un'assegnata funzione f, possono verificarsi 2 circostanze alternative:

(i) $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) < \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$.

(ii) $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$.

Possiamo quindi definire l'*integrale di Riemann*, seguendo il Pagani e Salsa [34] come segue:

Definizione 2.23 (Integrale definito nell'analisi tradizionale). Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice *integrabile secondo Riemann* se $\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f)$. Il valore comune di questi due estremi è denominato *integrale di Riemann* di f in $[a, b]$ e si denota con il simbolo:

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) \tag{2.67}$$

dove $I = [a, b]$ è denominato *dominio di integrazione* e $f = f(x)$ è denominata *funzione integranda*.

Il Pagani e Salsa [34] dimostra, poco oltre, il seguente teorema che, di fatto, chiarisce la natura di *limite* della definizione 2.23:

Teorema 2.6 (Integrale definito come limite). Una funzione $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata è *integrabile secondo Riemann* se $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si può trovare una suddivisione $\mathcal{D}_\varepsilon$ (dipendente da ε) dell'intervallo $[a,b]$ tale che:

$$S\left(\mathcal{D}_\varepsilon, f\right) - s\left(\mathcal{D}_\varepsilon, f\right) < \varepsilon \tag{2.68}$$

In altri termini l'integrale è il limite comune a cui tendono le somme inferiori e superiori quando la suddivisione di $[a,b]$ diviene sempre più fine.

2.2.9.3 Confronto tra le definizioni di integrale

Confrontiamo ora la definizione di integrale 2.22 a pag. 62 (*analisi non-standard*) con la definizione di integrale 2.23 a pag. 63 (*analisi tradizionale*).

Osserviamo che la definizione 2.22 a pag. 62 (*analisi non-standard*), semplicemente, definisce l'integrale come somma di Riemann infinita, utilizzando la funzione *parte standard* per ottenere un risultato reale. Si tratta di una definizione *statica*, che descrive l'integrale come somma delle aree dei rettangolini infinitesimali che soggiacciono alla curva. Questa definizione giustifica anche la notazione $\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x$, in cui in simbolo $\int$ è una deformazione di una lettera S, che sta per *somma* (o per il latino *summa*) e sostituisce la $\sum$ (*sigma*, S greca) della sommatoria, e l'integrando $f\left(x\right) \mathrm{d}x$ è l'area di un rettangolino infinitesimale, di base $\mathrm{d}x$ e altezza $f\left(x\right)$.

La definizione 2.23 a pag. 63 (*analisi tradizionale*), è invece assai più complicata, perché considera due *successioni* di somme di Riemann (inferiore e superiore) che si *avvicinano* tra loro quando la suddivisione $\mathcal{D}$ di $[a,b]$ *diviene* via via più fine. Si tratta di una definizione *dinamica*, come suggeriscono i termini "avvicinarsi" e "divenire". Inoltre questa definizione perde il contatto con la notazione $\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x$, al punto che spesso risulta oscuro il significato della parte differenziale $\mathrm{d}x$ dell'integrando. Non a caso il Pagani e Salsa [34] propone anche la notazione $\int_a^b f$ per l'integrale — alternativa alla notazione $\int_a^b f\left(x\right) \mathrm{d}x$ — che sopprime sia la variabile (muta) x sia il differenziale $\mathrm{d}x$.

È utile infine menzionare la circostanza che la definizione 2.22 a pag. 62 (*analisi non-standard*) — assai più della definizione 2.23 a pag. 63 (*analisi tradizionale*) — agevola l'interpretazione e l'utilizzo dell'integrale come operazione di *somma di piccole parti* (*adding up pieces*, AUP) e di *accumulazione da un tasso (o rateo) di variazione* (*accumulation from rate*, AR), procedimenti descritti nell'articolo di Steven R. Jones e Robert Ely *Approaches to Integration Based on Quantitative Reasoning: Adding Up Pieces and Accumulation from Rate* (2022) [23].

Capitolo 3

Infinitesimi e differenziali nella didattica della fisica e della matematica

3.1 Indagini sull'insegnamento/apprendimento del concetto di differenziale in fisica

Come è stato già ampiamente illustrato nel capitolo §2 a pag. 18, la nascita del calcolo differenziale stata fondamentale per lo sviluppo della scienza degli ultimi tre secoli, in particolare per la fisica. Tuttavia, diversi studi sull'insegnamento della fisica e della matematica hanno evidenziato criticità riguardo ai concetti alla base dell'analisi e, nello specifico, riguardo al concetto di differenziale. Lo studio di Martínez-Torregrosa, López-Gay e Gras-Martí (2006) [28], riferito alla realtà spagnola, evidenzia che soltanto un'esigua parte degli studenti di fisica dei corsi pre-universitari e dei primi anni delle lauree tecnico-scientifiche utilizza in modo consapevole il calcolo differenziale in fisica, comprendendo quanto sta eseguendo.

L'articolo evidenzia anche un certo disagio tra gli insegnanti di fisica nel guidare gli studenti nel comprendere e trattare consapevolmente i differenziali. Un sondaggio effettuato dai suddetti autori mostra che su 103 insegnanti di scuola superiore che partecipa attivamente ai corsi di formazione, l'88% dichiara non essere in grado di padroneggiare sufficientemente i differenziali nell'affrontare problemi in nuovi contesti, mentre soltanto il 22% afferma di essere assolutamente sicuro di quando e perché usare il calcolo differenziale in fisica. Il 65% degli studenti pre-universitari (su un campione di 108 interpellati), il 77% degli studenti di fisica al primo anno delle lauree tecnico-scienti che (su un campione di 116) e il 64% al secondo anno (su un campione di 63) ravvisano, nell'atteggiamento degli insegnanti, che questi ultimi applicano il calcolo di differenziale perché essenziale per lo sviluppo dell'argomento, senza tuttavia attendersi che gli studenti lo comprendano. Di conseguenza gli studenti considerano il calcolo differenziale un ostacolo, che genera sempre insicurezza e ansia.

Gli studi di Martinez-Torregrosa e colleghi, tra cui il già citato [28], concordano sulla circostanza che l'insicurezza nell'uso dei differenziali abbia origine nei metodi di insegnamento inadeguati, di impostazione algoritmica, nei quali i passaggi formali sono privati del loro significato concettuale.

Come già argomentato nel capitolo 1, l'impostazione algoritmica trasmette agli studenti una comprensione strumentale, utile a riprodurre una routine di risoluzione che può essere applicata ripetutamente a problemi simili, ma risulta insufficiente ad affrontare problemi di forma diversa, per affrontare i quali è necessaria una comprensione concettuale più profonda, basata sulla comprensione di ci che viene fatto e perché.

Constatazioni come questa hanno portato alla nascita, negli Stati Uniti, di un movimento per la riforma dell'analisi matematica che sostiene una revisione dell'insegnamento nella quale i concetti alla base dell'analisi matematica dovrebbero prevalere, nell'insegnamento, sulle formule e sugli aspetti meramente tecnici. Questo principio è stato accolto come raccomandazione generale nei Principles and Standards for School Matematics [32] del National Council of Teachers of Mathematics. Il concetto più importante in questo processo di rinnovamento dell'insegnamento è sicuramente quello di differenziale, cruciale per il ragionamento matematico in contesti fisici e rimesso al centro dell'insegnamento durante l'ultimo anno di scuola superiore e in tutti i corsi universitari delle materie scientifiche.

Il differenziale è valorizzato per esprimere numerose leggi fisiche, come lo spostamento vettoriale del moto $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$, il teorema dell'impulso $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t$, il flusso di un campo vettoriale, $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\vec{v} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S$, la variazione della pressione atmosferica con l'altezza $\mathrm{d}p = -\varrho\, g\,\mathrm{d}z$, l'aumento esponenziale di una popolazione $\mathrm{d}N = k\,N\,\mathrm{d}t$, il decadimento radioattivo $\mathrm{d}N = -\lambda\,N\,\mathrm{d}t$, il lavoro $đW = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, l'equazione dei gas perfetti $p\,\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = n\,R\,\mathrm{d}T$, la prima formula di Laplace $\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\,\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$, la seconda formula di Laplace $\mathrm{d}\vec{F}_m = i\,\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$.

Altri studi importanti sulla comprensione del significato e della rilevanza del concetto di differenziale in fisica sono stati condotti sa Artigue e colleghi. Nell'articolo di Artigue, Menigaux e Viennot [3] la consapevolezza dell'utilizzo del concetto di differenziale viene studiata attraverso l'analisi dei problemi in cui il concetto è usato in due circostanze apparentemente incompatibili: da una parte nel suo utilizzo per l'approssimazione di funzioni locali, e dall'altra nella determinazione di leggi globali mediante la risoluzione di equazioni differenziali ed integrali. Quello che i ricercatori indagano è, nello specifico, quanto gli studenti siano consapevoli di come approssimazione e rigore possano convivere all'interno della nozione di differenziale, sia in matematica che in fisica.

L'utilità dei differenziali sorge nel momento in cui non è così immediato trovare l'incremento di una funzione in corrispondenza dell'incremento di una sua variabile, ossia quando la funzione non è lineare.

Un punto importante, sollevato da Artigue e colleghi sulla nozione legata alle equazioni differenziali, riguarda la natura delle congetture circa la dipendenza tra le due variabili in questione. Per scrivere un'espressione differenziale di una grandezza fisica si ipotizza un possibile andamento e si avanza un'espressione come $\mathrm{d}y = A\,(x)\,\mathrm{d}x$ formulata dall'osservazione e analisi della situazione fisica. La validità dell'espressione può essere confermata solo indirettamente, ossia attraverso una verifica empirica del rapporto tra y e x [3]. Secondo gli autori questa fase è molto significativa, e l'argomentazione di come si è arrivati a tale selezione tra le altre possibili dovrebbe essere sempre presente nei libri.

Col fine di verificare l'efficacia della didattica su quanti abbiano compreso il concetto di differenziale nel suo utilizzo in fisica, Artigue e colleghi propongono un problema di fisica dell'atmosfera a 93 studenti iscritti al primo anno di fisica riguardante l'equazione $\mathrm{d}p = \rho\,g\,\mathrm{d}z$ che esprime l'equilibrio tra la pressione di un elemento di colonna d' aria e le forze agenti su un elemento di volume, aggiungendo che la variazione della pressione Δp e la variazione di altezza Δz non sono lineari, dato che la densità ρ non è costante rispetto l'altezza z. La ricerca riporta che il 90% degli studenti è convinto che sia necessario considerare un piccolo elemento della colonna d'aria, suddividendola in tanti pezzettini, dove la necessità di suddividere il volume in pezzettini è legata al fatto che la funzione integrale $p(z)$ sia non lineare e che ρg possano o meno essere costanti. Successivamente l'indagine propone lo stesso problema, ma sostituendo con dell'acqua una colonna d'aria (sottolineando che in questo caso si ha una massa specifica costante). In questo caso, solo pochi studenti ($< 15\%$) riconoscono che non ènecessario suddividere in piccoli elementi, a conferma della difficoltà nel riconoscere l'utilità dei differenziali e la non linearità come concetto fondamentale [3]. Questo studio mostra quanto gli studenti comprendano la necessità di utilizzare i differenziali quando hanno davanti problemi già conosciuti e quando sono presenti alcune parole come "elementi", "pezzetti" o "contributi", o in certi argomenti specifici del programma di fisica, ma non li collegano alla non linearità [3].

Un altro tema affrontato da Artigue e colleghi riguarda la tensione tra rigore e significato, applicata ai significati che si possono associare a "$\mathrm{d}x$", quanto applicato in diversi contesti: da una parte l'elemento differenziale immateriale, ma introdotto con rigore formale nell'analisi standard e che sta ad indicare, per esempio, la variabile d'integrazione nell'integrale; dall'altra il differenziale $\mathrm{d}l$ che ha un significato fisico molto intuitivo e materiale come "*una piccola parte di l*", "*un pezzetto di l*", quando lo si tratta, per esempio, in elettromagnetismo. Le criticità messe in eveidenza dalla studio di Artigue e colleghi è l'apparente inconciliabilità tra le due concettualizzazioni. Quando il "$\mathrm{d}x$" è associato ad un "*piccolo elemento*", non diventa semplice il passaggio verso una sua concettualizzazione in termini di incremento di una quantità associata all'incremento di una data variabile, che sarebbe più vicina all'idea di differenziale come funzione [3]. Per studiare le concezioni di differenziale e le sue diverse interpretazioni, Artigue e colleghi propongono agli studenti un altro problema di fisica: trovare il campo magnetico B in un punto, generato da un filo di lunghezza infinita percorso da corrente. Solo pochi descrivono $\mathrm{d}B$ e $\mathrm{d}l$ differenziali come specifiche funzioni. Secondo l'articolo [3] per affrontare il problema è necessario passare dal vedere $\mathrm{d}l$ e $\mathrm{d}B$ come "*elemento di ...*" a *incremento della variabile*, ma questo passaggio non è sempre semplice. Gli studi evidenziano che l'aspetto funzionale di incremento in fisica viene spesso escluso dall'idea di contributo, mentre in matematica viene soppresso dalle procedure algoritmiche [3].

Per risolvere le difficoltà evidenziate da questo studio, i ricercatori Artigue, Menigaux e Viennot propongono di guidare gli studenti a identificare i problemi in base alle modalità con cui vengono utilizzati i differenziali, in particolare di:

- esplicitare le tipologie di situazioni in cui sono necessari i differenziali ed esporre i concetti correlati;
- aiutare gli studenti nella comprensione del concetto di approssimazione in modo rigoroso;
- aiutare gli studenti nell'interpretazione del differenziale passando dal concetto di "contributo" (Δ) ed "elemento di ..." a incremento di una funzione.

3.2 Indagini sull'insegnamento/apprendimento del concetto di differenziale in matematica

In questo paragrafo ci concentriamo su tre studi: il primo, di Ely [14], è stato scelto come caso significativo per le criticità che ha sollevato nell'insegnamento del concetto di differenziale in matematica; questo, accanto ad un altro studio di Ely [13] e a uno di Sullivan [38], hanno mostrato l'efficacia dell'*analisi non-Standard* per affrontare alcune criticià emerse e, soprattutto, per conciliare un'esigenza di rigore con quella di una comprensione che faccia leva anche su elementi intuitivi.

3.2.1 Risultati di ricerca sulla comprensione del differenziale in matematica

Uno studio importante sull'insegnamento e apprendimento del concetto di differenziale in matematica è riportato in Robert Ely [14]. Ely ripercorre la storia del concetto di differenziale per estrapolarne i diversi significati via via acquisiti, dall'introduzione di Leibniz fino ad oggi.

Ely, alla luce di questa analisi, sintetizza i possibili significati che uno studente può trovare in un corso di *analisi tradizionale* (*standard*) e riprende i risultati di David Tall [1], su 60 studenti dell'ultimo anno della scuola secondaria che intendevano entrare all'Università di Warwick, rispetto all'nterpretazione del dy nell'espressione $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta x}{\delta y}$ rispondono:

1. 15 non ha significato da solo
2. 7(1/2) significa "rispetto a y" (come nell'integrazione)
3. 7(1/2) è il differenziale di y
4. 11(1/2) è un incremento infinitesimo di y
5. 4(1/2) è un incremento "molto piccolo" o "il piu piccolo possibile" di y
6. 6 è il limite di δy quando diventa piccolo
7. 8 nessuna risposta

Considerando le risposte del test, Ely osserva che le prime 3 (30 risposte) sono "standard", le ultime 3 (22) invece sono risposte che contengono un preconcetto di infinitesimo[2], quindi più del 25% degli studenti vede il $\mathrm{d}y$ come una quantità piccola o infinitesima, anche se non è specificato cosa si intende realmente con "$\mathrm{d}y$ il differenziale di y" o come possano immaginarsi un infinitesimo [14]. Risultati come questi motivano l'importanza di provare nuove strade, tra cui quella non standard.

3.2.2 Analisi non standard nell'insegnamento

In questo paragrafo si presentano alcuni studi e sperimentazioni compiuti per indagare quanto possa essere positivo introdurre l'*analisi non-standard* nelle classi di scuole superiori e univeristà.

Il primo studio è sempre di Robert Ely [13], sulle risposte di un'intervista audioregistrata di una studentessa di nome Sarah, selezionata da una indagine fatta su 233

[1] presentato al Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, 1980

[2] 1/2 rappresenta studenti che hanno dato due risposte

studenti del corso universitario di Matematica, alla fine del primo semestre. Gli studenti hanno compilato un questionario che aveva il fine di studiare le strutture matematiche alternative presenti nel pensiero degli studenti, analizzando le loro concezioni riguardo diversi concetti: limiti, funzioni, continuità e retta dei reali.

Dopo aver selezionato gli studenti che avevano dato le risposte più chiare, classificabili e interessanti, l'autore si è concentrato sulla studentessa Sarah rimanendo sorpreso dalle sue risposte, procedendo una seconda intervista nella settimana successiva per indagare sulle sue idee riguardo i numeri reali. Dalle risposte emerge che i concetti espressi da Sarah sono guidati dall'intuizione, nonostante sono incredibilmente simili alla struttura delle idee alla base dell'*analisi non-standard* riguardo gli infinitesimi, gli infiniti e i numeri infinitamente vicini a un numero reale. In *analisi non-standard* questi concetti rispettano una definizione rigorosa ed utilizzabile per semplificare teoremi, fare nuove definizioni e argomentare le dimostrazioni.

L'indagine di Robert Ely studia gli aspetti comuni tra le concezioni degli studenti e le concezioni storiche, nel tentativo di rivelare i meccanismi che si innescano per mantenere la coerenza cognitiva e matematica.

Le concezioni non standard degli studenti sui numeri iperreali che includono infinitesimi e infiniti sono intuitivamente vicine a quelle di G. W. Leibniz, come conferma Abrham Robinson nella formulazione della sua teoria sugli infinitesimi. Le nostre conclusioni sono spesso influenzate dal modo in cui consideriamo una concezione che differisce da quelle standard sostenute dalle istituzioni matematiche. L'approccio è quello di vedere gli studenti non più come "vasi" vuoti da riempire, infatti in loro è già presente una concezione dell'argomento, anche se errata, che chiamiamo misconcezione . Per cui l'apprendimento avviene quando queste concezioni errate vengono sostituite da concezioni corrette. Il passaggio successivo è quello di non parlare di sostituzione, ma di costruzione di nuove conoscenze a partire da quelle pregresse, in un processo di affinamento e riorganizzazione[3] [48].

Nell'articolo di Ely [13] viene analizzata la concezione non standard di una studentessa sulla retta dei numeri reali e in particolare sulle quantità infinitesime. Parliamo di concezioni non standard quando:

- sono diverse dalle concezioni standard sulla retta dei numeri reali
- sono solide, valide e apparentemente non perturbabili, rispetto alle istituzioni.
- sono una base per costruire una struttura cognitiva coerente (quanto la struttura concettuale standard).

Tra i sostenitori dell'*analisi non-standard* vi è la convinzione che questo approccio didattico consenta di definire i concetti dell'analisi matematica in modi più vicini all'immagine, alla concettualizzazione spontanea, all'intuizione degli studenti. Osserviamo ad esempio come, per dare maggior concretezza ai numeri infiniti e infinitesimi e facilitare una loro visualizzazione, sono frequentemente introdotti, come espediente, strumenti ottici immaginari: il microscopio inifinitesimo e il telescopio infinito, che a seconda del fattore di scala (finito, infinito, infinitesimo) possono rendere visibili i numeri iperreali.

Per confermare questa teoria è stato condotto uno studio pilota tra gli studenti di alcune scuole italiane che hanno affrontato come parte del curriculum di classe, al posto del tradizionale studio dell'analisi matematica, lo studio dei numeri iperreali e di *analisi*

[3]vedi cosruttivismo radicale, [39].

non-standard [27]. Al termine dell'anno scolastico è stato proposto un questionario riguardante diversi aspetti dell'*analisi non-standard*, stutturato al fine di indagare sulla concept-image degli studenti. L'espressione concept-image descrive la struttura cognitiva associata ad un concetto, che include tutte le immagini mentali, le proprietà associate e i processi [49]. Nel sistema di conoscenze è introdotta per considerare la dimensione non verbale, costituita da rappresentazioni visive, impressioni, esperienze, e si associa nella mente di un individuo alla de nizione di un concetto. Lo studente attinge alla concept-image quando non è richiesta una definizione esplicita, come si fa nelle risposte intuitive. Per il carattere più vicino all'intuizione si suppone infatti che l'*analisi non-standard* possa sfruttare la concept-image per comprendere a fondo i concetti dell'analisi matematica.

La prima sperimentazione sulla efficacia dell'*analisi non-standard* come approccio didattico, è riportata nella tesi di dottorato di Katleen Sullivan [38]. La sperimentazione viene effettuata mettendo due classi a confronto. L'approccio didattico è stato condiviso e discusso con cinque docenti che insegnavano in un corso di calcolo tradizionale in scuole situate nell'area di Chicago-Milwaukee durante l'anno scolastico 1972-73, i quali si sono offerti di utilizzare l'approccio Non Standard durante l'anno scolastico 1973-74. Il testo utilizzato era quello di H. Jerome Keisler: *Elementary Calculus: An Approach Using Infinitesimals* [25], primo libro di testo di analisi matematica con l'approccio dell'analisi Non Standard di Robinson [36]. Keisler era inoltre il relatore della tesi di dottorato di Katleen Sullivan, in cui vennero documentati i risultati dell'esperimento.

Le classi di controllo e quelle sperimentali facevano parte di cinque istituti di cui quattro Università private e una scuola superiore: al Saint Xavier College, le classi di controllo e quelle sperimentali erano composte da studenti che intendevano laurearsi in matematica; al Lake Forest College, da studenti di un programma di specializzazione; alla Nicolet High School, da un gruppo di studenti di matematica avanzata; al Barat College e al Mount Mary College, da studenti dell'unico corso di calcolo che offriva l'università. I metodi di raccolta dei risultati sono stati i seguenti: un test di calcolo somministrato a entrambi i gruppi di studenti; interviste con i docenti che hanno insegnato ai gruppi di controllo e sperimentali; un questionario compilato da tutti coloro che avevano usato il libro di Keisler negli ultimi cinque anni. Le domande del test di calcolo hanno messo alla prova la capacità degli studenti di definire i concetti di base, di calcolare i limiti, di produrre dimostrazioni e di applicare i concetti di base.

Durante il test si assume che le classi di controllo e quelle sperimentali abbiano le stesse abilità in quanto 58 dei 68 studenti del gruppo di controllo e 55 dei 68 studenti del gruppo sperimentale hanno ottenuto lo stesso punteggio SAT di matematica[4].

Il numero di studenti che tentavano la risposta alle domande che richiedevano una spiegazione è stato maggiore nelle classi sperimentali. Una notevole differenza si è verificata in una domanda che chiedeva di spiegare perché un certo integrale rappresentasse il volume di un dato solido. Nel gruppo di controllo solo 9 studenti hanno parlato dell'integrale come somma, rispetto ai 16 del gruppo sperimentale.

Il gruppo di studenti della classe sperimentale era più preparato nel rispondere a problemi non familiari, nel vedere l'integrale come una somma di "piccole parti", e nel

[4]SA: Test e Scholastic Assessment Test) un test attitudinale molto di uso, generalmente richiesto e quasi universalmente riconosciuto per l'ammissione ai college degli Stati Uniti. Il marchio SAT posseduto e amministrato dalla società per azioni College Board.

dare un significato geometrico all'elemento dx dell'integrale.

Inoltre, un docente durante un'intervista ha osservato che in precedenza i suoi studenti avevano trovato molto misterioso l'uso del simbolo dx nell'integrale, mentre gli studenti della classe sperimentale si sono mostrati completamente soddisfatti nella comprensione.

Per quanto riguarda il successo nel dare le definizioni, le differenze tra i due gruppi sono state minime, a parte il fatto che il gruppo Non Standard ha dato definizioni Non Standard (poichè nel libro di Keisler vengono presentate sia le definizioni standard sia quelle Non Standard, si trattava di una scelta).

I due gruppi si sono comportati altrettanto bene nel calcolo dei limiti. L'unica differenza evidente è che 23 studenti del gruppo standard hanno eseguito il calcolo dei limiti senza alcuna giustificazione. Nei colloqui individuali con i 5 insegnanti che avevano insegnato nelle classi di controllo e in quelle sperimentali, 3 di loro hanno dichiarato di ritenere che gli studenti della classe sperimentale avessero una percezione molto migliore dei limiti. Nelle interviste ai docenti c'è stato un accordo quasi unanime sul fatto che le prove del calcolo Non Standard fossero più facili da spiegare e più vicine all'intuizione. È stato anche sottolineato che l'approccio Non Standard rende più semplice illustrare concetti come la derivata su una lavagna, poichè si ha a che fare con un singolo numero, ovvero un infinitesimo rappresentativo, e si applicano operazioni su di esso piuttosto che lasciare che qualcosa si avvicini a zero.

Due docenti hanno espresso l'opinione che il metodo di apprendimento Non Standard del calcolo abbia un valore particolare per gli studenti che intendono specializzarsi in ingegneria o in fisica, campi in cui gli infinitesimi sono sempre stati considerati uno strumento utile. Il problema emerso era che per gli studenti si sarebbe potuto presentare una difficoltà in futuro, qualora si trovassero a frequentare un corso tradizionale. In questa sperimentazione si è tuttavia dimostrato come gli studenti che apprendono il calcolo attraverso gli infinitesimi con approccio non standard raggiungano una maggiore padronanza nelle competenze di base. Sembra persino che l'utilizzo dell'approccio infinitesimale possa rendere il corso di calcolo molto più divertente sia per gli insegnanti che per gli studenti.

Capitolo 4

Infinitesimi e differenziali nei libri di testo

Per poter utilizzare il calcolo differenziale nella fisica, non è sufficiente la semplice applicazione alla fisica delle idee apprese in matematica, ma è necessaria una reinterpreazione di tali idee nel contesto della fisica, come sottolineano diversi autori [31], [52], [29].

Tale "traduzione" dal contesto fisico a quello matematico astratto, richiede la comprensione del quadro da utilizzare, cioè dei concetti matematici e delle loro relazioni [54], [44], [29].

Una volta effettuata l'analisi fisica di un problema o di una situazione del mondo reale, il *primo* passo da compiere è il processo di *matematizzazione* (o *modellizzazione matematica*) che consiste nell'esprimere le idee dell'analisi fisica iniziale mediante concetti e relazioni matematiche (*si veda* §1.2 a pag. 7). Invece — come osservano Martínez Torregrosa e colleghi [29] — di solito l'insegnamento convenzionale non pone in rilievo questa *prima* fase e si concentra sulla *seconda* fase, ossia sul modo di operare con le espressioni matematiche iniziali per ottenere un risultato numerico o algebrico.

Questo scompenso porta, da un lato, gli studenti a considerare la soluzione di un problema di fisica come se fosse la soluzione di un problema di matematica, dall'altro, influisce sulle loro convinzioni riguardo alle aspettative del docente (come il docente si attenda che essi usino la matematica nella fisica), distogliendoli dal corretto modo di procedere [44].

Quando si utilizza l'*analisi matematica* in un contesto fisico, il concetto di base che compare nel processo di *matematizzazione* è quello di *differenziale*, sia riferito alle variabili indipendenti, sia come parte di espressioni differenziali. Se noi desideriamo che gli studenti imparino a matematizzare i problemi del mondo reale quando è richiesto l'uso dell'analisi matematica, è essenziale una comprensione concettuale di questo tipo di espressioni e delle situazioni in cui queste espressioni sono necessarie [29].

Ma il *differenziale* ha un significato e un ruolo diverso in matematica e in fisica. In *matematica* ha il ruolo di concretizzare e formalizzare il calcolo al di là del contesto fisico, mentre in *fisica* esso è focalizzato all'applicazione produttiva di un insieme di concetti e di ragionamenti, indipendentemente dal rigore. Il concetto di differenziale ha quindi carattere *polisemico* [1], [3], [12] e tale carattere *polisemico* del differenziale si ritrova anche nell'insegnamento. Non soltanto il ruolo e il significato del *differenziale* è diverso nell'insegnamento della matematica e della fisica, ma è anche possibile riconoscerne concezioni diverse anche all'interno della sola matematica come della sola fisica.

Molti autori concordano nel considerare come barriera all'apprendimento l'approccio meramente *algoritmico* ed esclusivamente *pragmatico*, alla matematica, oggi piuttosto diffuso. Questa visione operativa è assorbita dagli studenti, che finiscono per credere che fare matematica sia limitato all'esecuzione di operazioni specifiche con simboli privi di significato [18], [35].

Se a questo approccio algoritmico si aggiunge la consueta tendenza ad attribuire alla matematica soltanto un ruolo *tecnico* e *strumentale* nella fisica, enfatizzando le manipolazioni matematiche, appare logico che — quando gli studenti usano il calcolo differenziale in fisica — essi sappiano come eseguire i calcoli, ma abbiano difficoltà a collegare il mondo fisico con la matematica [29].

Questa tesi si propone di riconoscere i diversi ruoli e significati del *differenziale* sia nell'insegnamento della matematica nel contesto della fisica, sia nell'insegnamento della fisica stessa.

Analizzando i percorsi di ragionamento per l'apprendimento delle equazioni del moto attraverso i modelli fisico-matematici (descritti nel §1.4 a pag. 12) individueremo i diversi approcci che ogni testo sceglie di utilizzare, e il ruolo con cui la matematica è utilizzata per formulare i contenuti, sia esso strumentale o strutturale.

4.1 Le diverse concezioni di differenziale nei testi di Matematica

4.1.1 Tre concezioni di differenziale

Nell'insegnamento della matematica è possibile riconoscere diversi *ruoli* e *significati* attribuiti ai differenziali. La ricerca svolta da Martínez Torregrosa e colleghi [29] ci indica che le concezioni associate al differenziale nei testi di matematica possono essere classificate nei 3 tipi descritti nei successivi §§4.1.1.1–4.1.1.3.

Attraverso la risposta ad alcune domande che riguardano il modo in cui essi sono definiti, i termini utilizzati, il loro utilizzo nei passaggi algebrici e il significato che è loro attribuito, cercheremo di riconoscere la concezione seguita dai diversi testi considerati nel §4.1.3 a pag. 76.

4.1.1.1 Il differenziale come strumento meramente formale e privo di significato in sé

L'insegnamento tradizionale dell'analisi matematica è rimasto fedele alla matematica ottocentesca, rappresentata dall'opera di Cauchy, il quale — mediante un'accurata definizione di limite — bandì dall'analisi matematica l'ambiguità e la mancanza di rigore, entrambe imputabili al differenziale di Leibnitz [28].

Cauchy (*si veda* §2.1.2 a pag. 21) definì il differenziale come l'espressione (2.2) a pag. 21, ovvero $\mathrm{d}f = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$, prodotto della derivata $f'(x)$ per un incremento arbitrario (grande o piccolo) $\mathrm{d}x$ della variabile indipendente. Il differenziale divenne

> The question whether and how differentials should be introduced in school mathematics has been extensively discussed, indeed the literature on it is enormous. The discussion is irrelevant if the preliminary question, namely which aim the differentials have to serve is not answered. Useless differentials can readily be dismissed. If *dy* and *dx* occur only in the combination *dy/dx* or under the integral sign after the integrand, the question as to what *dx* and *dy* mean individually is as meaningful as to ask what the 'l', 'o', 'g' in 'log' mean. To be sure one can tell that the differential notation is useful with a view to the chain and the substitution rules,

Figura 4.1. Brano del testo *Mathematics as an Educational Task* (1973) di Hans Freudenthal [15], a p. 550.

così un semplice strumento formale, utilizzato soltanto per l'abbreviazione di alcune dimostrazioni.

In questo modo il differenziale è stato svincolato dall'ambiguità delle quantità infinitamente piccole, ma è divenuto privo di ogni significato fisico: esso è semplicemente il risultato della moltiplicazione della derivata per l'incremento della variabile indipendente.

4.1.1.1.1 Il differenziale eliminato dall'insegnamento. Naturalmente, come osserva Hans Freudenthal nel libro *Mathematics as an Educational Task* [15] (*si veda* il brano riportato in fig. 4.1) se i differenziali sono inutili, possono essere facilmente eliminati. Questa scelta estrema — tuttavia conseguente alle considerazioni del §4.1.1.1 a pag. 73 — è stata effettivamente operata da alcuni autori (*si veda*, p. es., §4.1.3.2 a pag. 83), che non ritengono utile affrontare i differenziali nel corso di analisi matematica.

4.1.1.2 Il differenziale come approssimazione lineare tangenziale

A partire dal XX secolo, sono state tuttavia proposte due nuove concezioni del differenziale, che gli restituiscono un ruolo centrale nella struttura dell'*analisi matematica*: il differenziale di Frèchet e il differenziale infinitesimale.

Il differenziale di Frèchet (*si veda* §2.1.3 a pag. 24), la cui definizione originale è del 1911, ebbe origine nell'analisi di funzioni di infinite variabili e ridefinisce il differenziale come approssimazione lineare tangenziale di una curva (nel caso di funzioni di una sola variabile indipendente). La definizione è espressa dalla relazione:

$$\Delta f = \mathrm{d}f + \varepsilon \cdot \Delta x \tag{4.1}$$

dove $\varepsilon \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Questo significa che:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} = 0 \tag{4.2}$$

La definizione (4.1) ricorda la vecchia definizione di *parte principale* e ne mantiene tutti i pregi, pur superando l'obiezione di mancanza di rigore che piuttosto correttamente era stata sollvata.

Sebbene la definizione sia nata nell'ambito dello studio di funzioni di più variabili indipendenti, essa è stata in seguito utilizzata in alcuni libri di testo per introdurre anche l'analisi di funzioni di una sola variabile.

4.1.1.3 Il differenziale come quantità infinitesimale

Quest'ultima concezione del differenziale riporta all'idea originale di Leibniz. Il differenziale è un infinitesimo, ma questa volta in modo rigoroso, sulla base dell'*analisi non-standard* introdotta da Robinson (*si veda* §2.1.4 a pag. 24 e §2.2 a pag. 26). La definizione ha come prerequisito l'introduzione dell'insieme $\mathbb{R}^*$ dei numeri iperreali che includono anche le quantità infinitesimali (più piccole di qualunque quantità reale positiva) non nulle. Il *teorema dell'incremento* (Teorema 2.28 a pag. 42) dimostra che se $\Delta x \approx 0$ (Δx è infinitesimale) allora esiste un altro infinitesimo ε tale che:

$$\Delta f = \mathrm{d}f + \varepsilon \cdot \Delta x \tag{4.3}$$

condizione simile alla (4.1) a pag. 74. Si noti che il differenziale $\mathrm{d}f$ è un'approssimazione lineare dell'incremento Δf. Tuttavia non è un'approssimazione lineare qualunque, ma è la sola approssimazione nella quale è verificata la condizione addizionale:

$$\frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} \approx 0 \tag{4.4}$$

Nel differenziale di Frèchet la condizione addizionale è invece la (4.2) a pag. 74.

La differenza principale tra differenziale di Frèchet e il differenziale infinitesimale è che in quest'ultimo l'enfasi è posta sul suo *valore infinitesimale* (più piccolo di qualunque numero reale positivo) mentre nel primo l'enfasi è posta sulla natura *lineare* dell'approssimazione (sebbene sia lineare anche l'approssimazione operata dal differenziale infinitesimale).

Questa idea di approssimare ogni funzione in un suo punto mediante una funzione lineare, secondo diversi autori, [2], [28], [29], è l'*idea fondamentale dell'analisi matematica.*

4.1.2 Criteri per l'esame dei testi di analisi matematica

Nell'esame dei testi analizzati — al fine di riconoscere e categorizzare la concezione dei differenziali — abbiamo cercato risposte alle domande che seguono:

a. Nel testo sono introdotti i differenziali?
b. Quali termini sono utilizzati per introdurli?
c. Come sono definiti i differenziali?
d. Come sono utilizzati i differenziali per definire integrale, derivata e differenziabilità?
e. Quale significato (algebrico, geometrico e fisico) è associato a differenziale e infinitesimo?
f. Il testo specifica quando è necessario utilizzare i differenziali?
g. Il testo specifica il significato di una equazione differenziale?

4.1.3 Esame del processo di insegnamento nei libri di analisi matematica

In questa sezione vogliamo confrontare, in ambito della descrizione dei differenziali e del concetto di infinitesimo, alcuni testi di Analisi Matematica di differenti epoche storiche e didattiche, col fine di riconoscere i diversi approcci e di identificare l'evoluzione dei concetti.

I testi a confronto sono:

(a) Umberto Cisotti (1918) *Lezioni di Analisi Matematica (svolte nel Regio Istituto Tecnico Superiore*[1] *di Milano)* [9].

(b) Bruno Pini (1971) *Primo corso di Analisi Matematica* e (1972) *Secondo corso di Analisi Matematica, parte I* [41].

(c) Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa (1995) *Analisi Matematica, Volume 1* [34].

4.1.3.1 Umberto Cisotti: Lezioni di Analisi Matematica (1918)

In questo paragrafo ci proponiamo di identificare quale sia la concezione utilizzata nel libro di Analisi Matematica di Umberto Cisotti [9] nella descrizione del differenziale, riporteremo gli argomenti di nostro interesse così come vengono trattati nel testo, per poi rispondere alle domande di analisi che ci condurranno al nostro scopo.

Umberto Cisotti (Voghera 1882 – Milano 1946) è stato un matematico e fisico italiano. Svolse gli studi superiori presso Udine. Successivamente si iscrisse all'Università di Padova, seguendo, negli anni 1899–1903 il quadriennio di studi in Matematica. Ebbe per maestri, fra gli altri, Francesco Flores D'arcais, Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi-Civita. Elaborò e discusse la tesi di laurea il 30 ottobre 1903 con il matematico Levi-Civita. Adempiti gli obblighi della leva militare, insegnò nelle scuole medie. Dal 1907 al 1913 fu assistente di Tullio Levi-Civita. Nel 1913 iniziò a insegnare fisica matematica alla Regia Università di Pavia. Successivamente si trasferì al Regio Istituto Tecnico Superiore di Milano in cui tenne i corsi di meccanica e analisi matematica. Nel 1921 tenne il corso meccanica razionale. Insegnò anche alla Regia Università di Milano dopo la sua fondazione (1924) a seguito della riforma Gentile e nel 1927 fondò, insieme ad altri, il Seminario matematico e fisico italiano. Fu membro dell'Accademia Nazionale dei Lincei e dell'Istituto lombardo di scienze e lettere.

Nel libro di Cisotti [9], il capitolo VI (che occupa ben 14 facciate, pp. 170–183) è dedicato a *Infinitesimi e infiniti – Differenziali*. L'argomento è introdotto da un paragrafo informale dal titolo *Quantità piccole e quantità grandi*, in cui si esprime il significato di piccolo o grande rispetto una quantità scelta come riferimento, e di come si possano mettere a confronto due quantità "della stessa specie" attraverso il loro rapporto (*si veda* il frammento di testo riportato in fig. 4.2 a pag. 77).

Cisotti definisce quindi l'infinitesimo con le seguenti parole:

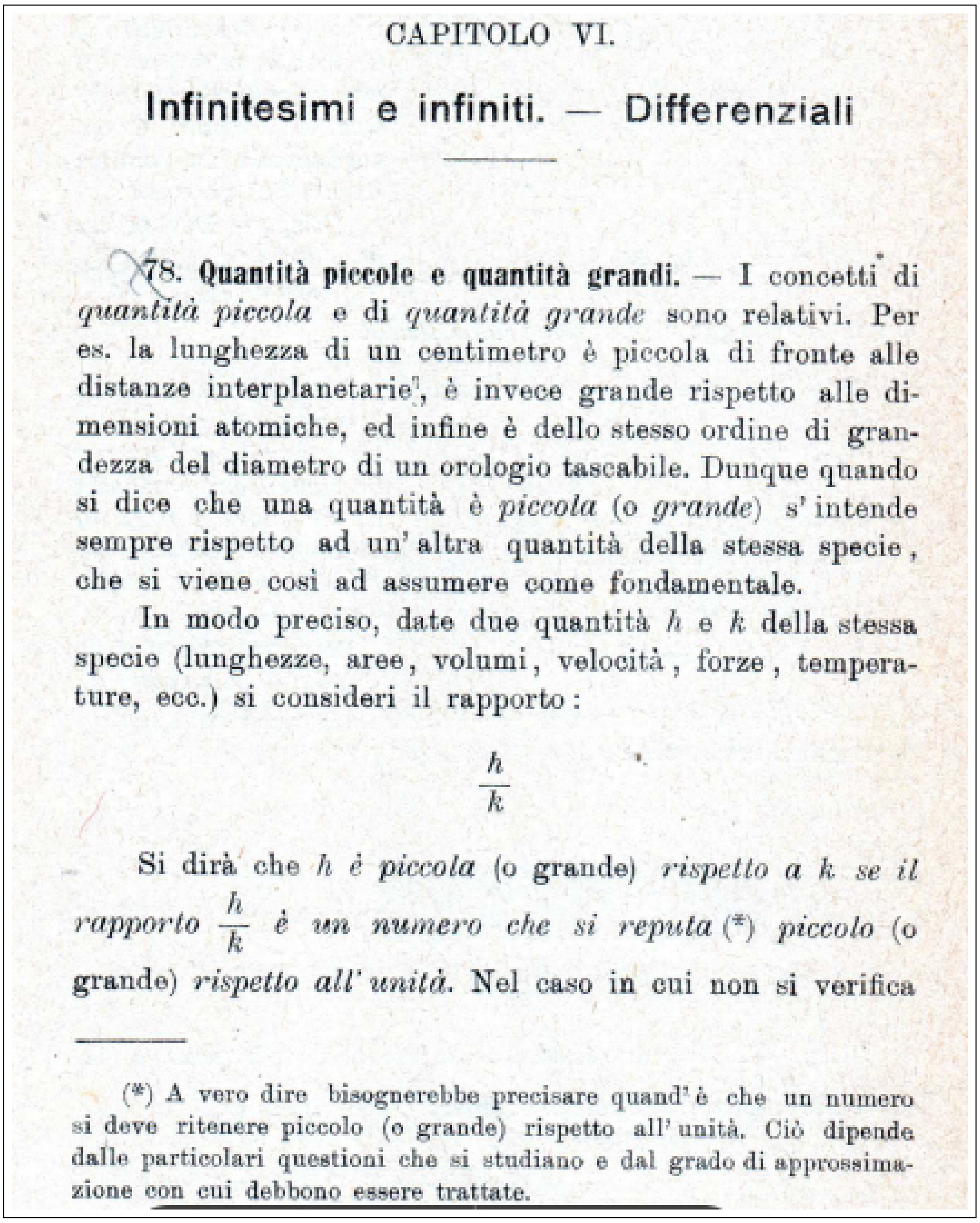
[1] Attuale *Politecnico di Milano*, fondato il 29 novembre del 1863, grazie all'emanazione della *legge Casati* (del 1859), su impulso della Società di incoraggiamento di arti e mestieri. Alla sua guida fu nominato il matematico Francesco Brioschi. Nell'istituto si attivarono inizialmente i corsi di Ingegneria Civile, Ingegneria Meccanica e una Normale per la formazione di insegnanti per le discipline scientifiche.

“Dicesi *infinitesimo* una quantità variabile che ha per limite lo 0”, [9].

Una nota a piè di pagina (*si veda* fig. 4.3) invita a non confondere una quantità variabile infinitesimale con una quantità infinitamente piccola che sia costante. La nota afferma “Infinitesimo è una quantità variabile”. Questa nota, evidentemente, precisa che *non* si sta parlando degli infinitesimi di Leibniz (*si veda* §2.1.1 a pag. 18), *bensì* degli infinitesimi di Cauchy (*si veda* §2.1.2 a pag. 21).

Un aspetto interessante da riportare, è la scelta di esprimere un infinitesimo di ordine n, con un’espressione che è definita come una “scrittura fuori del limite”[2] (*si veda* il frammento di testo riportato in fig. 4.4 a pag. 78), che pone in evidenza come un infini-

[2] Nel precedente cap. IV, alle pagg. 72–73, Cisotti chiarisce che, se $\lim_{x=c} y_1 = l_1$, la *scrittura fuori dal limite* è $y_1 = l_1 + \alpha_1$, dove α_1 è una funzione di x tale che $\lim_{x=c} \alpha_1 = 0$.



CAPITOLO VI.

Infinitesimi e infiniti. — Differenziali

78. Quantità piccole e quantità grandi. — I concetti di *quantità piccola* e di *quantità grande* sono relativi. Per es. la lunghezza di un centimetro è piccola di fronte alle distanze interplanetarie, è invece grande rispetto alle dimensioni atomiche, ed infine è dello stesso ordine di grandezza del diametro di un orologio tascabile. Dunque quando si dice che una quantità è *piccola* (o *grande*) s’intende sempre rispetto ad un’altra quantità della stessa specie, che si viene così ad assumere come fondamentale.

In modo preciso, date due quantità h e k della stessa specie (lunghezze, aree, volumi, velocità, forze, temperature, ecc.) si consideri il rapporto:

$$\frac{h}{k}$$

Si dirà che h *è piccola* (o grande) *rispetto a* k *se il rapporto* $\frac{h}{k}$ *è un numero che si reputa* (*) *piccolo* (o grande) *rispetto all’unità*. Nel caso in cui non si verifica

(*) A vero dire bisognerebbe precisare quand’è che un numero si deve ritenere piccolo (o grande) rispetto all’unità. Ciò dipende dalle particolari questioni che si studiano e dal grado di approssimazione con cui debbono essere trattate.

Figura 4.2. U. Cisotti [9], frammento di testo: Quantità piccole e quantità grandi, p. 170.

(*) Da non confondersi infinitesimo con quantità infinitamente piccola. Per es. 1 micron $= \frac{1}{1000}$ di millimetro è quantità che comunemente dicesi infinitamente piccola, ad es. rispetto alla lunghezza d'un metro, ma non è infinitesimo perchè è costante. Infinitesimo è quantità variabile.

Figura 4.3. U. Cisotti [9], nota a piè pagina sull'infinitesimo, p. 171.

Sia β infinitesimo assieme ad α, sarà a dirsi [N. 80] *di ordine n, se esso è dello stesso ordine di α^n*, cioè se:

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^n} = K \neq 0 \; .$$

Scrivendo questa relazione fuori del limite [N. 42], indicando con ε un infinitesimo assieme ad α e β, si ha:

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = K + \varepsilon \; ,$$

da cui:

$$\beta = K\alpha^n + \varepsilon\alpha^n \; .$$

Questa è l'espressione generale di un infinitesimo β di ordine n; essa risulta somma di due parti: la prima ($K\alpha^n$) — *parte principale* — è infinitesimo dello stesso ordine n di β, e la seconda ($\varepsilon\alpha^n$) è infinitesimo di ordine superiore (*).

Se, in particolare, β è infinitesimo di 1° ordine si ha:

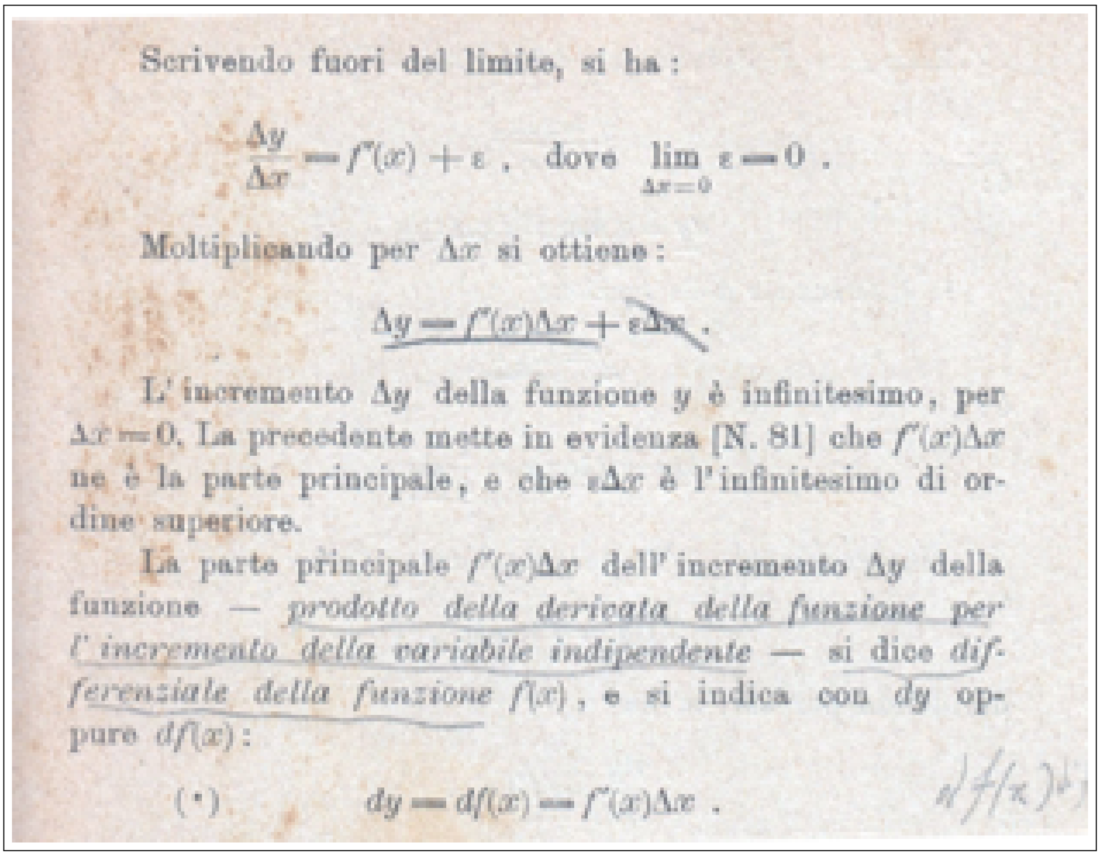
$$\beta = K\alpha + \varepsilon\alpha \; .$$

Figura 4.4. U. Cisotti [9], frammento di testo: ordine degli infinitesimi, scrittura fuori dal limite, p. 174.

tesimo di ordine n sia la somma di un infinitesimo dello stesso ordine, denominato *parte principale* (*si vedano anche* le osservazioni successive alla relazione (4.1) a pag. 74), più un infinitesimo di ordine superiore: $\beta = K\,\alpha^n + \varepsilon\,\alpha^n$.

Nel paragrafo successivo il differenziale è definito come la *parte principale* dell'incremento della funzione Δy, quindi come il *prodotto della derivata per l'incremento della variabile indipendente*: $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$.

L'espressione per il differenziale è ricavata considerando una funzione derivabile $f(x)$,



Scrivendo fuori del limite, si ha:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon\,, \quad \text{dove} \quad \lim_{\Delta x = 0} \varepsilon = 0\,.$$

Moltiplicando per Δx si ottiene:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x\,.$$

L'incremento Δy della funzione y è infinitesimo, per $\Delta x = 0$. La precedente mette in evidenza [N. 81] che $f'(x)\Delta x$ ne è la parte principale, e che $\varepsilon\Delta x$ è l'infinitesimo di ordine superiore.

La parte principale $f'(x)\Delta x$ dell'incremento Δy della funzione — *prodotto della derivata della funzione per l'incremento della variabile indipendente* — si dice *differenziale della funzione* $f(x)$, e si indica con dy oppure $df(x)$:

(*) $$dy = df(x) = f'(x)\Delta x\,.$$

$df(x)$

Figura 4.5. U. Cisotti [9], frammento di testo: differenziale, p. 177.

con derivata $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, da cui, "scrivendo fuori del limite":

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon, \qquad \text{dove} \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = 0$$

Moltiplicando per Δx, si trova che l'incremento della funzione è espresso da:

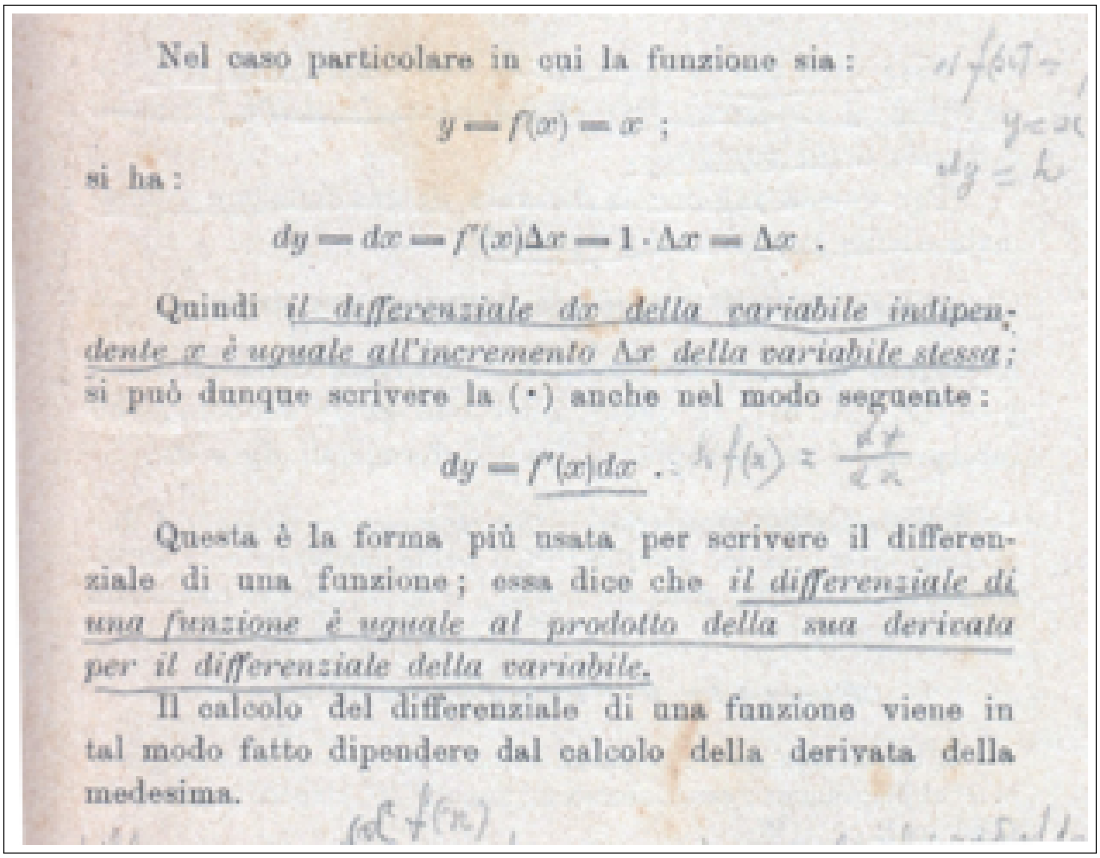
$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x \tag{4.5}$$

nel testo [9], Cisotti scrive:

> "L'incremento Δy della funzione y è infinitesimo, per $\Delta x = 0$. La precedente (4.5) mette in evidenza che $f'(x) \cdot \Delta x$ ne è la parte principale, e che $\varepsilon \cdot \Delta x$ è l'infinitesimo di ordine superiore. La parte principale $f'(x) \cdot \Delta x$ dell'incremento della funzione y — *prodotto della derivata della funzione per l'incremento della variabile indipendente* — si dice *differenziale della funzione* $f(x)$, e si indica con $\mathrm{d}y$ oppure $\mathrm{d}f(x)$" (*si veda* il frammento di testo riportato in fig. 4.5).

Inoltre Cisotti identifica il differenziale della variabile indipendente con l'incremento della stessa, ossia $\mathrm{d}x = \Delta x$, *si veda* il frammento di testo riportato in fig. 4.6 a pag. 80.

Il paragrafo sui differenziali del Cisotti [9] prosegue con l'*interpretazione geometrica*. Evidentemente Cisotti ritiene importante illustrare, mediante una figura, il differenziale $\mathrm{d}y$, come la parte principale $f'(x) \cdot \Delta x$, l'infinitesimo di ordine superiore $\varepsilon \cdot \Delta x$, e l'incremento infinitesimale Δy, (*si veda* fig. 4.7 a pag. 81).



Nel caso particolare in cui la funzione sia:

$$y = f(x) = x \;;$$

si ha:

$$dy = dx = f'(x)\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \;.$$

Quindi *il differenziale dx della variabile indipendente x è uguale all'incremento Δx della variabile stessa*; si può dunque scrivere la (*) anche nel modo seguente:

$$dy = f'(x)dx \;.$$

Questa è la forma più usata per scrivere il differenziale di una funzione; essa dice che *il differenziale di una funzione è uguale al prodotto della sua derivata per il differenziale della variabile.*

Il calcolo del differenziale di una funzione viene in tal modo fatto dipendere dal calcolo della derivata della medesima.

Figura 4.6. U. Cisotti [9], frammento di testo: differenziale della variabile indipendente, p. 177

Il paragrafo successivo rigurda il *differenziale di somma e prodotto*. In esso si estendono le proposizioni del calcolo di somma, prodotto e quoziente delle derivate, al calcolo dei differenziali (*si veda* il frammento di testo riportato in fig. 4.8 a pag. 82). Cisotti [9] precisa inoltre:

> "[...] dalla derivata $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ di una funzione $y = f(x)$, si passa al differenziale $\mathrm{d}y = \mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$, moltiplicando la derivata per $\mathrm{d}x$; reciprocamente dal differenziale $\mathrm{d}y$ si passa alla derivata $f'(x)$ dividendo per $\mathrm{d}x$. Ne consegue che le due operazioni di derivazione e di differenziazione sono sostanzialmente equivalenti (a meno di un fattore infinitesimo)." [9], p. 180.

Il concetto di infinitesimo utilizzato nel testo, è quello di numero reale variabile, piccolo a piacere ("che ha per limite lo 0"); Cisotti *non* considera un *infinitesimo* come un numero infinitesimale o iperreale.

La scelta delle espressioni, in particolare la locuzione *fuori del limite*, esprime un tentativo di formalizzare una descrizione più intuitiva dell'utilizzo del linguaggio dei limiti. Le relazioni presentate in questa forma sono simili a quelle del testo di Keisler [25] (*si veda* §2.1.4 a pag. 24 e §2.2 a pag. 26) o a quelle più antiche di Leibniz (*si veda* §2.1.1 a pag. 18). Questo procedimento consente a Cisotti di utilizzare la stessa operatività che è utilizzata con la notazione di Leibniz, ossia di poter moltiplicare e dividere l'elemento differenziale a piacere, ma allo stesso tempo, consente di preservare una correttezza formale, *non* utilizzando il concetto di numero infinitesimale della concezione §4.1.1.3 a

[84] 179

Chiamando ϑ l'angolo RPQ, dal triangolo PQR si deduce [N. 57]:

$$\overline{RQ} = \operatorname{tg}\vartheta \cdot \overline{PQ} = f'(x)\Delta x = dy \; .$$

Il differenziale della funzione in P è dunque rappresentato

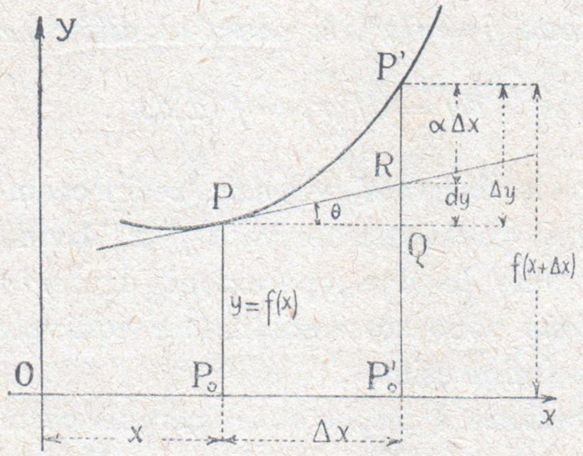


Fig. 59.

dal segmento di P'_0P' limitato dalla tangente alla linea in P e dalla parallela all'asse delle x condotta da P.

Si può rilevare altresì il significato di $P'R$.

Avendosi:

$$P'Q = \Delta y = RQ + P'R \; ,$$

ossia:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + P'R \; ,$$

dal confronto di questa con la relazione più sopra stabilita:

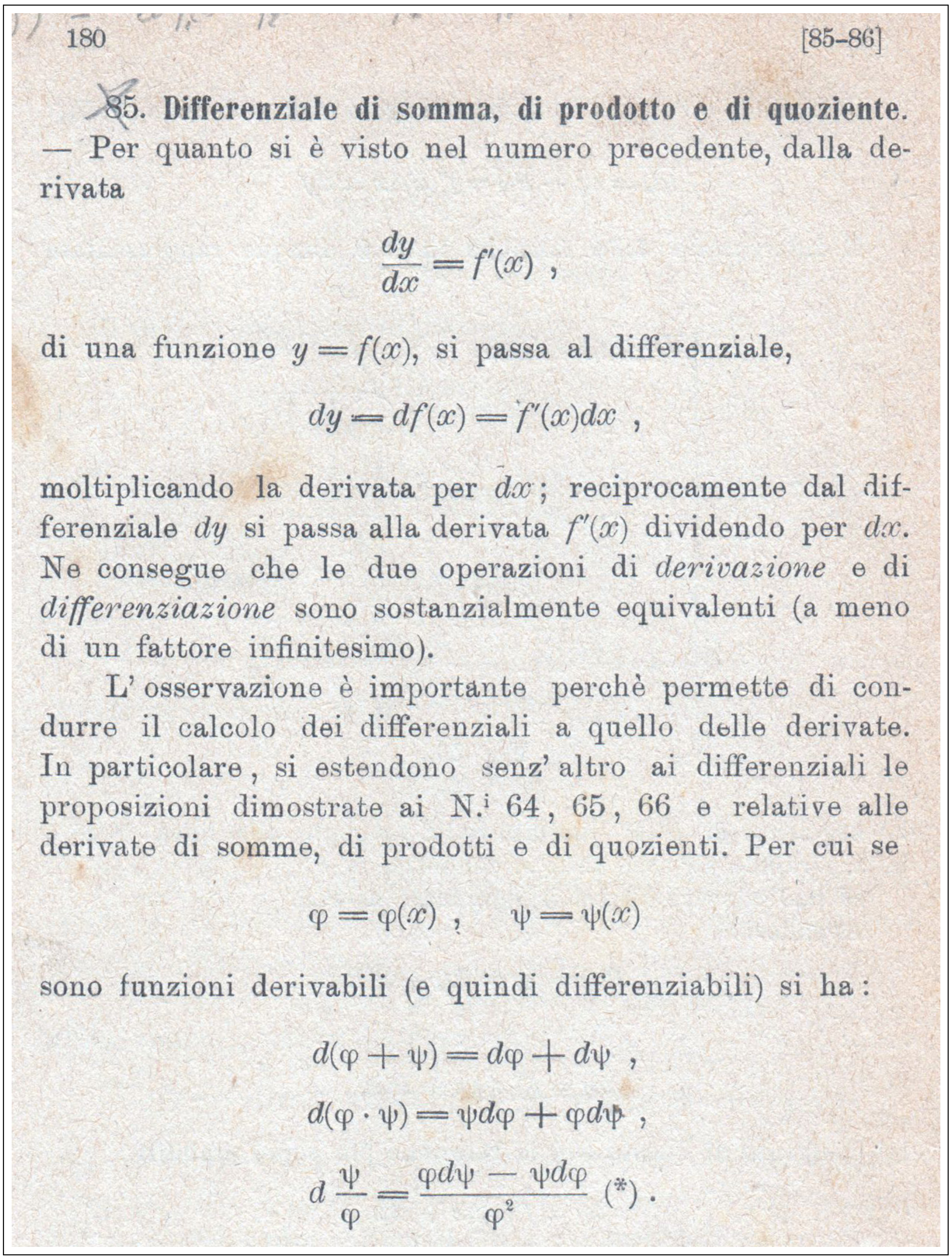
$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x \; ,$$

scende:

$$P'R = \varepsilon\Delta x \; .$$

Concludendo: del segmento $P'Q$ che rappresenta l'infinitesimo Δy, la parte principale $f'(x)\Delta x$ è rappresentata dal segmento RQ, ed il segmento $P'R$ rappresenta l'infinitesimo di ordine superiore, $\varepsilon\Delta x$.

Figura 4.7. U. Cisotti [9], frammento di testo: interpretazione geometrica del differenziale, p. 179.



180 [85-86]

85. Differenziale di somma, di prodotto e di quoziente. — Per quanto si è visto nel numero precedente, dalla derivata

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \ ,$$

di una funzione $y = f(x)$, si passa al differenziale,

$$dy = df(x) = f'(x)dx \ ,$$

moltiplicando la derivata per dx; reciprocamente dal differenziale dy si passa alla derivata $f'(x)$ dividendo per dx. Ne consegue che le due operazioni di *derivazione* e di *differenziazione* sono sostanzialmente equivalenti (a meno di un fattore infinitesimo).

L' osservazione è importante perchè permette di condurre il calcolo dei differenziali a quello delle derivate. In particolare, si estendono senz' altro ai differenziali le proposizioni dimostrate ai N.i 64, 65, 66 e relative alle derivate di somme, di prodotti e di quozienti. Per cui se

$$\varphi = \varphi(x) \ , \qquad \psi = \psi(x)$$

sono funzioni derivabili (e quindi differenziabili) si ha:

$$d(\varphi + \psi) = d\varphi + d\psi \ ,$$

$$d(\varphi \cdot \psi) = \psi d\varphi + \varphi d\psi \ ,$$

$$d\,\frac{\psi}{\varphi} = \frac{\varphi d\psi - \psi d\varphi}{\varphi^2} \ (^*) \ .$$

Figura 4.8. U. Cisotti [9], frammento di testo: differenziale di somma, prodotto e quoziente, p. 180.

pag. 75 (*differenziale come quantità infinitesimale*).

Il procedimento utilizzato da Cisotti [9] per arrivare alla definizione di differenziale, ci conduce a considerare l'espressione per l'incremento Δy, come un caso particolare di un infinitesimo di ordine n. Infatti, confrontando le relazioni:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f'(x)\ \Delta x + \varepsilon\, \Delta x \\ \beta &= K\, \alpha^n \qquad + \varepsilon\, \alpha^n \end{aligned}$$

il riferimento appare esplicito: egli considera $\mathrm{d}f = f'(x)\ \Delta x$ e Δy due infinitesimi dello stesso ordine, che differiscono solo per un infinitesimo di ordine superiore, ossia un infinitesimo che tende a zero più rapidamente quando $\Delta x \to 0$. Mentre la circostanza che $\mathrm{d}f$ sia un'approssimazione dell'incremento Δy è implicita; infatti — anche se nel testo non si parla di approssimazioni — possiamo dedurlo dall'espressione, che definisce il differenziale come *la parte principale* dell'incremento.

La concezione di differenziale che ritroviamo nel testo di Cisotti [9] è quella del §4.1.1.2 a pag. 74 (*differenziale come approssimazione lineare tangenziale*). Infatti la definizione formale è $\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$ con ε tendente a zero per Δx tendente a zero. La condizione (2.3) a pag. 24 per il differenziale di Frèchet è rispettata proprio per la circostanza che $\Delta y - f'(x)\,\Delta x$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto Δx.

Il significato algebrico, come abbiamo visto, è che $\mathrm{d}y$ e Δy sono due infinitesimi dello stesso ordine. La loro rappresentazione geometrica è indicata nel grafico (*si veda* fig. 4.7 a pag. 81), ma il testo di Cisotti [9] *non* utilizza il termine *approssimazione*, e il significato del grafico non và oltre alla semplice rappresentazione degli elementi che compongono l'espressione dell'incremento (a parte ovviamente la specificazione della derivata come tangente goniometrica dell'angolo formato dalla retta tangente alla funzione con l'asse delle ascisse).

Per quanto riguarda il legame tra derivazione e differenziazione, le parole che troviamo alla pagina 180, nel §85 (*Differenziale di somma, prodotto e quozionte*), non esprimono chiaramente la differenza tra le due operazioni, anzi ci dicono che le operazioni e le proposizioni relative a somma, prodotto e quoziente, sono le stesse, visto che si può passare da derivata a differenziale e viceversa semplicemente moltiplicando o dividendo per $\mathrm{d}x$, assegnando al differenziale un significato puramente algebrico, come se fosse soltanto il risultato di una semplice manipolazione di elementi algebrici. Questo conferma l'operatività con cui si vuole trattare il differenziale, al fine delle sue possibili applicazioni nell'ambito della fisica

4.1.3.2 Bruno Pini: Primo e Secondo corso di Analisi Matematica (1971)

Bruno Pini (Poggio Rusco 1918 — Forlì 2007) è stato un matematico italiano che ha svolto ricerca nell'ambito delle delle equazioni differenziali alle derivate parziali, ambito in cui è noto, tra l'altro, per aver introdotto la cosiddetta disuguaglianza di Pini-Hadamard, scoperta dai due studiosi in maniera indipendente. Ha studiato all'Alma Mater Studiorum – Università di Bologna, allievo di Beppo Levi, e si è laureato con Gianfranco Cimmino nel 1941. Nel 1942 divenne assistente volontario del Cimmino, quindi assistente incaricato dal 1948 al 1954, con l'incarico di insegnamento di teoria delle funzioni dal 1950 al 1953 e, dal 1952 al 1954, quello di analisi matematica. Nel 1953 divenne professore ordinario di analisi matematica all'Università di Cagliari. Nel 1955 si trasferì all'Università di Modena, dove ricoprì una cattedra di analisi matematica e nel dicembre 1958 fu chiamato a Bologna. Nel 1997 fu nominato Professore Emerito.

A differenza del libro di Cisotti — che dedica ben 14 pagine per affrontare l'argomento dei differenziali — nel libro di Bruno Pini *Primo corso di Analisi Matematica* [40] il differenziale *non* è *mai* menzionato (*si veda* §4.1.1.1.1 a pag. 74).

Nel §3.6, *FUNZIONI* $f : A\,(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *Derivate di funzioni numeriche reali*, dopo aver discusso definizioni e teoremi sulle derivate si susseguono due paragrafi: *Definizione di infinitesimo e ordine di un infinitesimo rispetto ad un altro* e *Definizione di infinito e ordine di un infinito rispetto ad un altro*.

In tutto il testo per esprimere il limite di una funzione, Pini [40] utilizza principalmente la notazione "...tende a ...", ossia: $f(x) \to 0$ per $x \to 0$, piuttosto di $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$. Infatti utilizza la prima formulazione per dare la definizione di infinitesimo (fig. 4.9 a pag. 85).

L'autore considera poi due funzioni infinitesime, f e g, e le pone a confronto, considerando i quattro possibili risultati del limite del loro rapporto:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 1. & \text{non esiste} \\ 2. & l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 3. & 0 \\ 4. & \pm\infty \end{cases}$$

e descrive le 4 possibilità nei seguenti termini:

1. f e g non sono confrontabili;
2. f e g sono dello stesso ordine, e si scrive $f = \mathcal{O}(g)$;
3. f è di ordine superiore rispetto a g e si scrive $f = o(g)$;
4. f è di ordine inferiore rispetto a g e si scrive $g = o(f)$.

Il *Primo corso di Analisi Matematica* [40] di Pini scrive l'espressione per due infinitesimi dello stesso ordine, quindi nel secondo caso, ponendo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = l + \xi(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = l \cdot g(x) + \xi(x) \cdot g(x)$$

dove ξ è infinitesimo, definisce $l \cdot g$ la *parte principale* di f rispetto a g.

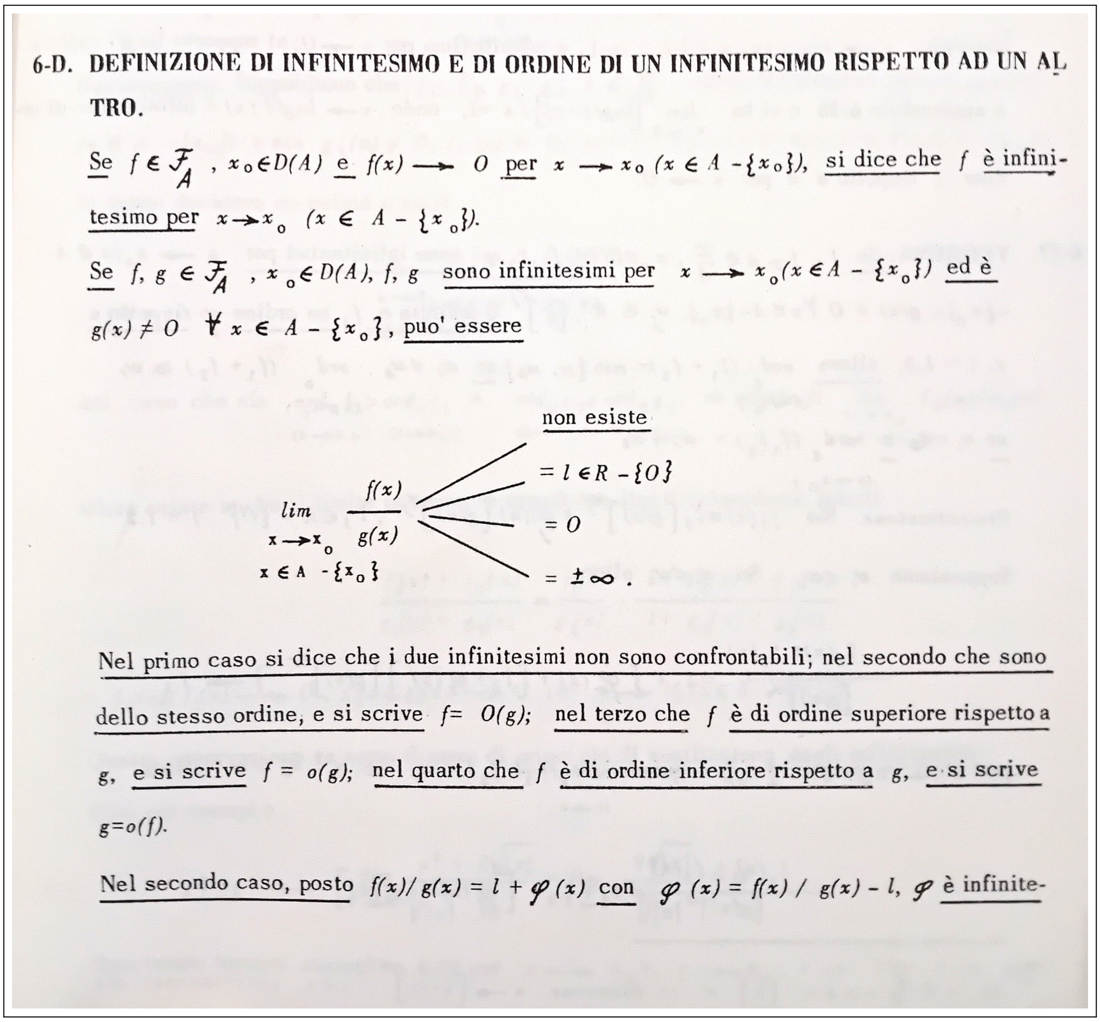
Osserviamo che Pini utilizza i simboli di Bachmann–Landau (*si veda* la nota 15 a piè di pag. 46), pur senza denominarli come tali.

Come già accennato, i differenziali *non* sono menzionati nel *Primo corso di Analisi Matematica* [40] (*si veda* §4.1.1.1.1 a pag. 74). L'elemento differenziale $\mathrm{d}x$ compare soltanto per esprimere la variabile rispetto a cui si deriva (nell'espressione $\left[\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{x=x_0}$) oppure la variabile di intengrazione nel paragrafo §7, *Integrali di Riemann di funzioni numeriche reali*. Inoltre la lettura del $\mathrm{d}x$ nell'integrale come differenziale è lasciata all'immaginazione, in quanto non è data alcuna spiegazione eccetto il simbolo.

Nel *Primo corso di Analisi Matematica* [40] di Bruno Pini, il termine *infinitesimo*, è utilizzato per descrivere una *funzione che tende a zero* ($f(x) \to 0$ per $x \to x_0$). Utilizzare questa scrittura piuttosto che la scrittura del limite, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, pone in evidenza che il carattere *infinitesimo* si riferisce al comportamento della funzione, non al valore del suo limite. La scrittura di limite ($\lim\ldots$) si ritrova nel Pini solamente quando è necessario fare un confronto tra funzioni (in particolare nel confronto tra due infinitesimi, nel principio di sostituzione degli infinitesimi, e nel teorema de l'Hôpital).

Queste considerazioni ci portano alla concezione §4.1.1.1 a pag. 73, *differenziale come strumento meramente formale e privo di significato in sé*, più precisamente alla variante §4.1.1.1.1 a pag. 74 (*differenziale eliminato dall'insegnamento*). Inoltre esso non è associato a un elemento piccolo e, men che mai, infinitesimale, nemmeno quando compare in espressioni come $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ oppure $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Nelle lezioni di Analisi Matematica di Bruno Pini il differenziale è introdotto soltanto nel *Secondo Corso* [41], nel paragrafo §2C, *Definizione di Applicazione Differenziabile*,



6-D. DEFINIZIONE DI INFINITESIMO E DI ORDINE DI UN INFINITESIMO RISPETTO AD UN ALTRO.

Se $f \in \mathcal{F}_A$, $x_0 \in D(A)$ e $f(x) \longrightarrow 0$ per $x \longrightarrow x_0$ $(x \in A - \{x_0\})$, si dice che f è infinitesimo per $x \longrightarrow x_0$ $(x \in A - \{x_0\})$.

Se $f, g \in \mathcal{F}_A$, $x_0 \in D(A)$, f, g sono infinitesimi per $x \longrightarrow x_0 (x \in A - \{x_0\})$ ed è $g(x) \neq 0$ $\forall x \in A - \{x_0\}$, puo' essere

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A - \{x_0\}}} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \begin{cases} \text{non esiste} \\ = l \in R - \{0\} \\ = 0 \\ = \pm\infty . \end{cases}$$

Nel primo caso si dice che i due infinitesimi non sono confrontabili; nel secondo che sono dello stesso ordine, e si scrive $f = O(g)$; nel terzo che f è di ordine superiore rispetto a g, e si scrive $f = o(g)$; nel quarto che f è di ordine inferiore rispetto a g, e si scrive $g = o(f)$.

Nel secondo caso, posto $f(x)/g(x) = l + \varphi(x)$ con $\varphi(x) = f(x)/g(x) - l$, φ è infinite-

Figura 4.9. B. Pini [40], frammento di testo: Confronto tra infinitesimi, p. 273.

solamente come *differenziale totale* di una funzione di più variabili indipendenti (*si vedano* i frammenti riportati in fig. 4.10 a pag. 86 e in fig. 4.11).

Il *Secondo corso di Analisi Matematica* [41] di Bruno Pini utilizza un approccio basato su una struttura matematica molto rigorosa, mentre le parole e i commenti contenuti in esso sono praticamente assenti e il significato concettuale è completamente lasciato al giudizio del lettore.

Il *differenziale totale* è definito, nel caso più generale, come un operatore lineare $L : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ dipendente da $x_0 \in A$, dove A è un insieme aperto di R^r. Per prima cosa il Pini [41] definisce la *differenziabilità* di una funzione in un punto x_0 come segue (*si veda* il frammento riportato in fig. 4.10 a pag. 86):

> Sia $f : A \to \mathbb{R}^n$, con $A \subseteq \mathbb{R}^r$ aperto. Si dice che f è *differenziabile* nel punto $x_0 \in A$ se esiste un operatore lineare $L : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$, dipendente da x_0, tale che
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(x_0, h)}{\|h\|_r} = 0$$
>
> dove $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e $L = (L_1, \ldots, L_n)$ sono applicazioni vettoriali. La funzione

2-C. DEFINIZIONE DI APPLICAZIONE DIFFERENZIABILE.

Sia $f\colon A \longrightarrow \mathbf{R}^n$, A aperto di $\mathbf{R}^r$. Si dice che f è differenziabile nel punto $x_0 \in A$ se esiste un operatore lineare $L\colon R^r \longrightarrow R^n$, dipendente da x_0, tale che

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - L(x_0, h)}{\|h\|_r} = 0. \quad (^\bullet)$$

Osservazione 1. Poichè $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $L = (L_1, \ldots, L_n)$, la precedente relazione di limite significa

$$\lim_{\|h\|_r \to 0} \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} [f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - L_j(x_0, h)]^2}}{\|h\|_r} = 0$$

e questa equivale a

$$\lim_{\|h\|_r \to 0} \frac{f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - L_j(x_0, h)}{\|h\|_r} = 0 \quad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n.$$

($^\bullet$) Indicheremo con $\| \ \|_p$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^p$; ometteremo l'indice in quei ragionamenti che si riferiscono per intero al medesimo spazio euclideo.

Figura 4.10. B. Pini [41], frammento di testo: Differenziabilità, p. 62.

vettoriale f è differenziabile in x_0 solamente se tutte le sue componenti f_j, con $j = 1, 2, \ldots, n$, sono differenziabili in x_0 [41].

Partendo dalla definizione di differenziabilità, Pini [41] definisce l'operatore lineare:

$$h \mapsto L(x_0, h)$$

come il *differenziale* di f in x_0, e denota con $\mathrm{d}f(x_0)$ l'operatore e con $\mathrm{d}f(x_0)(h)$, con $h \in R^r$, i suoi valori. Il differenziale così definito è una funzione di due variabili, del punto x_0 e dell'incremento h, che identificano la tangente — piano o retta a seconda della dimensione.

In seguito, Pini [41] scrive le espressioni delle componenti dell'applicazione $L(x_0, h)$, con $h = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$, come:

$$L_j(x_0, h) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial f_j(x_0)}{\partial \xi_k} h_k$$

la quale esprime la circostanza che il differenziale $L(x_0, h)$ è il prodotto righe per colonne della *matrice Jacobiana* $\mathscr{I}_f(x_0)$ di f in x_0 per l'incremento $h = (h_1, h_2, \ldots, h_r)$. Il *dif-*

CAP. II - 63 -

Dunque la funzione vettoriale f è differenziabile in x_0 se e solo se tutte le sue componenti sono differenziabili in x_0 (1-H).

L'operatore lineare $h \longrightarrow L(x_0, h)$ si chiama differenziale di f in x_0 e si denota con $df(x_0)$ mentre i suoi valori si denotano con $df(x_0)(h)$, $h \in R^r$.

Figura 4.11. B. Pini [41], frammento di testo: Differenziale, p. 63.

ferenziale $L(x_0, h)$ di una funzione differenziabile rappresenta quindi la *migliore approssimazione lineare* della funzione in prossimità di un punto assegnato x_0, considerazione questa che rimane implicita nella definizione di $L(x_0, h)$.

Pini [41] sceglie di esprimere il differenziale nel caso generale di una funzione in R^n, ponendo l'enfasi sulla linearità dell'operatore differenziale, per cui la concezione che possiamo associare al testo di Pini è quella riportata nel §4.1.1.2 a pag. 74 (*differenziale come approssimazione lineare tangenziale* o *differenziale di Frèchet*). La condizione aggiuntiva, richiesta nella concezione §4.1.1.2 a pag. 74, ossia che $\Delta f - \mathrm{d}f$ sia infinitamente piccolo rispetto Δx (quindi tenda a zero più rapidamente di Δx), è scritta nel Pini [41] mediante la seguente espressione, per $f, L \in R^n$:

$$\lim_{\|h\|_r \to 0} \frac{f_j(x_0 + h) - f_j(x_0) - L_j(x_0, h)}{\|h\|_r} = 0, \qquad \text{per } j = 1, 2, \ldots, n$$

la quale esprime la differenziabilità della funzione.

I contenuti nel testo [41] di Pini sono trasmessi con definizioni rigorose, senza perdersi nella descrizione dei concetti, ma offrendo allo studente una visione generale degli oggetti matematici dell'analisi — confidando nella competenza dello studente nell'applicare queste conoscenze, passando dal caso generale a quello particolare a seconda del problema, e in una sufficiente capacità di modellizzazione di un problema da parte dello studente. La visione di differenziale come infinitesimo è volutamente accantonata in questo approccio. Anche la descrizione dei concetti passa in secondo piano per lasciare spazio a una visione di differenziale puramente algebrica funzionale, di applicazione lineare.

Si osservi infine che la definizione di differenziale come *approssimazione lineare tangenziale* è enunciata da Pini soltanto nel *Secondo corso di Analisi Matematica* [41], riferita al *differenziale totale* di una funzione di più variabili indipendenti, mentre la definizione è completamente omessa nel *Primo corso di Analisi Matematica* [40] in relazione alle funzioni numeriche di una sola variabile indipendente.

In altri termini, nei testi di Pini non è attuata l'unificazione del calcolo differenziale a una e a più variabili, descritta nell'allegato I alla monografia [1] di Michèle Artigue e colleghi (1989).

4.1.3.3 Carlo Domenico Pagani e Sandro Salsa: Analisi Matematica 1 (2008)

Il testo è scritto da due docenti del Politecnico di Milano. Carlo Domenico Pagani è stato professore ordinario di analisi matematica. Nato nel 1941, si laurea in fisica nel 1964 e in matematica nel 1968. Dal 1976 è professore ordinario al Politecnico di Milano. Sandro Salsa è nato a Novara nel 1950, si laurea in matematica nel 1972 presso l'Università di Milano. È ricercatore dal 1981 al 1986 e nel 1987 è professore ordinario di analisi matematica. Dal 2021 è professore emerito.

Nel cap. 4, §2.5, *Infinitesimi ed infiniti. Confronti*[3], l'infinitesimo è definito come una funzione $f(x)$ che, definita in un intorno di $x_0 \in \mathbb{R}$ (tranne al più il punto stesso), tende a zero per $x \to x_0$. Considera poi il limite del rapporto tra due funzioni f e g infinitesime, nei suoi quattro possibili valori[4]:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 1. \quad 0 & \Rightarrow f \text{ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a } g \\ 2. \quad l \text{ finito e } \neq 0 & \Rightarrow f \text{ è dello stesso ordine di } g \\ 3. \quad \pm\infty & \Rightarrow f \text{ è infinitesimo di ordine inferiore rispetto a } g \\ 4. \quad \text{non esiste} & \Rightarrow f \text{ e } g \text{ non sono confrontabili} \end{cases}$$

Successivamente Pagani e Salsa descrivono il confronto tra due infinitesimi utilizzando i simboli di Bachmann–Landau (denominati brevemente *simboli di Landau si veda* la nota 15 a piè di pag. 46) nel brano riportato in fig. 4.12 a pag. 89, giustificandosi affermando che *sono entrati nell'uso corrente* [34]. I quattro simboli di Bachmann–Landau, "o-piccolo", "$\mathcal{O}$-grande", "asintotico a ...", "stesso ordine di grandezza di ...", consentono di esprimere il confronto locale tra funzioni, offrendo un metodo compatto di scrivere il limite del rapporto tra due funzioni:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 & f(x) = o\big(g(x)\big) & o\text{-piccolo} \\ l & f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big) & \mathcal{O}\text{-grande} \\ l \neq 0 & f(x) \asymp g(x) & \text{stesso ordine di grandezza di...} \\ 1 & f(x) \sim g(x) & \text{asintotico a ...} \end{cases}$$

Riguardo il simbolo di "o-piccolo", nel testo [34] si precisa che $f(x) = o\big(g(x)\big)$ significa che f è un infinitesimo di ordine superiore rispetto g per $x \to x_0$, mentre $f(x) = o(1)$ significa semplicemente che f è infinitesimo.

[3] Nel libro di Pagani e Salsa infinitesimi e infiniti sono trattati nel §2, *Limiti di funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$, del cap. 4, L'OPERAZIONE DI LIMITE.

[4] Si precisa inoltre che, "se f_1 è un infinitesimo di ordine superiore rispetto f (per $x \to x_0$), diremo che f_1 è *trascurabile* rispetto a f o anche che f è *dominante* rispetto f_1" [34]. Questa precisazione ha il fine di descrivere il limite del rapporto della somma di due infinitesimi; infatti Pagani e Salsa scrivono:

> "[...] questo modo di dire è giustificato dal fatto che, se f, f_1, g, g_1 sono infinitesimi, f_1 di ordine superiore rispetto a f, g_1 di ordine superiore rispetto a g, allora risulta
>
> $$\lim_{x\to x_0} \frac{f+f_1}{g+g_1} = \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}\,\frac{1+f_1/f}{1+g_1/g} = \lim_{x\to x_0} \frac{f}{g}$$
>
> cioè sia a numeratore che a denominatore si possono di fatto omettere, per il calcolo del limite, gli infinitesimi di ordine superiore. [...]" [34].

Sono entrati nell'uso corrente alcuni simboli (detti simboli di Landau), utili nell'esprimere relazioni di confronto tra funzioni.

1. Il simbolo $o(\cdot)$ ("o piccolo di $\cdots$")

Se g è definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, allora

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{significa} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ovvero che f è infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x_0$. Osserviamo che $f(x) = o(1)$ significa semplicemente che $f(x)$ è infinitesimo. Perciò, la formula

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l, \quad \text{se } l \in \mathbb{R}, \text{ equivale a} \quad f(x) = l + o(1) \quad (x \to x_0)\ .$$

2. Il simbolo $O(\cdot)$ ("O grande di $\cdots$")

Se $g(x)$ è definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, allora

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{significa} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{definitivamente limitato per } x \to x_0 .$$

LIMITI DI FUNZIONI DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}$ 179

In particolare, $f(x) = O(1)$ significa che $f(x)$ è definitivamente limitata per $x \to x_0$ (ciò non esclude che $f(x)$ possa essere infinitesima).

3. Il simbolo $\sim$ ("asintotico a $\cdots$")

Se $g(x)$ è definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, allora

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{significa} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1\ .$$

Una semplice ed importante proprietà del simbolo di asintotico è la seguente: se $f \sim f_1$, e $g \sim g_1$ per $x \to x_0$ allora $f/g \sim f_1/g_1$ che in molti casi risulta utile nel calcolo dei limiti.

Si osserverà che nella classe delle funzioni definitivamente diverse da zero per $x \to x_0$ la relazione $\sim$ è riflessiva, simmetrica, transitiva; tali funzioni si distribuiscono perciò in classi di funzioni a due a due asintotiche.

4. Il simbolo $\asymp$ ("stesso ordine di grandezza di $\cdots$")

Se $g(x)$ è definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$, allora $f(x) \asymp g(x)$ significa che esistono due numeri positivi, m e M, $0 < m < M$, tali che si abbia definitivamente per $x \to x_0$,

$$m|g(x)| \leq |f(x)| \leq M|g(x)|\ .$$

In particolare, $f(x) \asymp 1$ significa che sia $f(x)$ che $1/f(x)$ si mantengono limitate in un intorno di x_0.

Anche la relazione binaria $\asymp$ è un'equivalenza nella classe delle funzioni definitivamente $\neq 0$ per $x \to x_0$.

Figura 4.12. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: Simboli di Bachmann–Landau, pp. 178–179.

Il confronto tra infinitesimi e infiniti può essere a volte reso più preciso "misurando la velocità" con cui una funzione tende a zero o all'infinito rispetto ad un infinitesimo o ad un infinito, scelto come *campione* (una specie di *unità di misura*).

Ci riferiremo agli infinitesimi, ma tutto si può estendere con facilità al caso degli infiniti.

Sia g un infinitesimo positivo per $x \to x_0$ che scegliamo come *campione*.

Se $f(x)$ è un altro infinitesimo (per $x \to x_0$) ed esistono due numeri reali α e k, diversi da zero, tali che :

$$f(x) \sim kg(x)^\alpha$$

allora si dice che f è *di ordine α rispetto a g* e che $k\,g(x)^\alpha$ è la *parte principale* dell'infinitesimo $f(x)$.

Figura 4.13. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: parte principale di un infinitesimo, p. 182.

Nel frammento di testo riportato in fig. 4.13 a pag. 90 osserviamo come gli autori, utilizzando il simbolo di Bachmann–Landau "asintotico a ...", definiscano una funzione infinitesima (o infinita) di un certo ordine rispetto a un altra funzione scelta come campione. Pagani e Salsa [34] scrivono:

> Sia $g(x)$ un infinitesimo positivo per $x \to x_0$ che scegliamo come *campione*. Se $f(x)$ è un altro infinitesimo (per $x \to x_0$) ed esistono due numeri reali α e k, diversi da zero, tali che:
>
> $$f(x) \sim k \cdot [g(x)]^\alpha \tag{4.6}$$
>
> allora si dice che f è *di ordine α rispetto a g* e che e che $k \cdot [g(x)]^\alpha$ è la *parte principale* dell'infinitesimo $f(x)$.

Osserviamo che Pagani e Salsa [34], nella (4.6) a pag. 90, per chiarezza, utilizzano una notazione verbosa, che utilizza il simbolo "asintotico a ...", e che la stessa condizione può essere scritta in forma più concisa, utilizzando la notazione "stesso ordine di grandezza di ...", come:

$$f(x) \asymp [g(x)]^\alpha$$

Infatti:

$$f(x) \asymp [g(x)]^\alpha \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = k \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{k \cdot [g(x)]^\alpha} = 1 \Rightarrow f(x) \sim k \cdot [g(x)]^\alpha$$

Il *differenziale* è trattato nel libro di Pagani e Salsa [34] in due paragrafi:

- cap. 6, CALCOLO DIFFERENZIALE 1. FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE, §1.5.
- cap. 7, CALCOLO DIFFERENZIALE 2. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI, §1.2.

La prima definizione di differenziale si trova nel cap. 6, §1.5, *Differenziale*, come approssimazione lineare dell'incremento. Riconsidera la formula (1.6) del cap. 6, §1.3 [34], (già riportata come equazione (2.39) a pag. 47) la quale definiva la seguente funzione infinitesimale:

Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile in x; allora l'espressione

$$\varepsilon(h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

è infinitesima con h. Da essa ricaviamo, per $h \neq 0$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + h \cdot \varepsilon(h)$$

dove $\varepsilon(h) \to 0$ per $h \to 0$.

Il testo [34] precisa poi che, in questa espressione, l'incremento $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ è la somma di due termini:

- $f'(x) \cdot h$, lineare in h;
- $h \cdot \varepsilon(h) = o(h)$, infinitesimo di ordine superiore ad h se $h \to 0$.

A questo punto, il Pagani e Salsa [34] definisce la differenziabilità e il differenziale come segue:

"Supponiamo che, dati $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ ed un punto $x \in]a, b[$, esista un numero reale A tale che, per ogni h per cui $x + h \in]a, b[$, si abbia

$$\Delta f = A \cdot h + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \tag{4.7}$$

Diciamo allora che f è *differenziabile* in x; la parte lineare $A \cdot h$ dell'incremento Δf si chiama *differenziale* di f in x e si indica con il simbolo $\mathrm{d}f(x)$" (*si veda* la p. 290 del Pagani e Salsa [34], riportata in fig. 4.14 a pag. 92).

Dividendo, membro a membro la (4.7) per h e prendendo il limite per $h \to 0$ si ottiene che f è derivabile in x, e $f'(x) = A$. Si giustifica quindi la scrittura [34]:

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot h \tag{4.8}$$

Se si considera, in particolare, la funzione $f(x) = x$, si ottiene $\mathrm{d}f(x) = \mathrm{d}x = f'(x) \cdot h = h$, per cui la (4.8) si può riscrivere come:

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Osserviamo anche che, in una nota a piè di pagina, Pagani e Salsa [34] precisano che Leibniz concepiva f' come il rapporto tra le due quantità infinitesime $\mathrm{d}f$ e $\mathrm{d}x$ (*si veda* la p. 290 del Pagani e Salsa, riportata in fig. 4.14 a pag. 92).

Quella appena descritta è una descrizione algebrica del differenziale; a seguire, nel Pagani e Salsa [34], si cerca di descrivere il suo significato, le sue proprità e la sua rappresentazione geometrica.

Una precisazione interessante è il confronto tra *differenziabilità* e *derivabilità*:

(i) f derivabile in x significa che $\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h}$ esiste finito;
(ii) f differenziabile in x significa che Δf può essere approssimato da una parte lineare in h, a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad h.

Il testo [34] osserva che f è *derivabile* in x se e soltanto se essa è *differenziabile* in x, ma anticipa anche che questa equivalenza logica è *falsa* per *funzioni di più variabili*.

Il Pagani e Salsa [34] osserva anche che una proprietà caratteristica del differenziale è l'*invarianza in forma*, che lo rende più flessibile della derivata in alcune situazioni

1.5 Differenziale

Riprendiamo la formula (1.7). Se $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ è derivabile in x, allora si può scrivere

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\varepsilon(h) \tag{1.12}$$

dove $\varepsilon(h) \to 0$ con h.

Nella (1.12) l'incremento $\Delta f = f(x+h) - f(x)$ è scritto come somma di due termini:

$$f'(x)\ h \quad \text{lineare in } h$$

e

$$h\ \varepsilon(h) = o(h), \ \text{infinitesimo di ordine superiore ad } h \text{ se } h \to 0\ .$$

Cambiando punto di vista, introduciamo la seguente

Definizione 1.2 - *Supponiamo che, dati $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ed un punto $x \in (a,b)$, esista un numero reale A tale che, per ogni h per cui $x+h \in (a,b)$, si abbia*

$$\Delta f = A\ h + o(h) \quad \textit{per} \quad h \to 0\ . \tag{1.13}$$

Diciamo allora che f è differenziabile in x; la parte lineare Ah dell'incremento Δf si chiama **differenziale** *di f in x e si indica con il simbolo $df(x)$.*

Se nella (1.13) dividiamo per h entrambi i membri e passiamo al limite per $h \to 0$ otteniamo subito che f è derivabile in x e che $f'(x) = A$. Dunque

$$df(x) = f'(x)h\ .$$

Riassumendo, siano dati $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ ed $x \in (a,b)$:

i) f derivabile in x significa che $\lim_{h\to 0} \Delta f/h$ esiste finito

ii) f differenziabile in x significa che Δf può essere approssimato da una parte lineare in h a meno di infinitesimi di ordine superiore rispetto ad h.

Dalla discussione precedente segue che *f è derivabile in x se e solo se è differenziabile in x*; inoltre il differenziale di f in x è dato dalla formula

$$df(x) = f'(x)h\ . \tag{1.14}$$

Vedremo nel cap. 7 che tale equivalenza è falsa per funzioni di più variabili.

Se calcoliamo il differenziale di $f(x) = x$ otteniamo

$$df(x) = dx = f'(x)h = h\ .$$

L'espressione (1.14) per il differenziale diventa dunque

$$df(x) = f'(x)dx \ (^*)$$

(*) Leibniz concepiva f' come rapporto delle quantità infinitesime df e dx!

Figura 4.14. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: Differenziale, p. 290.

(*si veda* il brano riportato in fig. 4.15 a pag. 94). Il testo [34] afferma infatti a p. 291:

> "È sostanzialmente per l'invarianza in forma, che, nelle scienze applicate, si *differenzia* una data equazione anziché *derivarla*, quando non siano precisate le dipendenze delle variabili.".

Il testo [34] propone un esempio, applicato alla termodinamica, in cui "differenzia" l'equazione di stato dei gas perfetti (*si veda* il passaggio riportato in fig. 4.15 a pag. 94). L'esempio mostra come si possa scrivere un'equazione differenziale, senza conoscere o dover specificare la dipendenza da altre variabili. Precisa inoltre che questa proprietà vale soltanto per il differenziale primo, suggerendo al lettore di provare a verificarlo.

Infine il Pagani e Salsa [34] presenta un grafico in cui sono rappresenta le componenti dell'espressione del differenziale, Δf, $\mathrm{d}f$ e $h \cdot \varepsilon(h)$, osservando che "$\mathrm{d}f$ è l'incremento in altezza valutato lungo la tangente invece che lungo la curva" [34].

Un'applicazione del simbolo di Bachmann–Landau "o-piccolo", si può trovare nel cap. 6, §2.5, *La formula di Taylor*, che affronta il problema dell'approssimazione di una funzione mediante polinomi.

Nella formula di approssimazione di una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ derivabile nel punto $x_0 \in]a, b[$, per $x \in]a, b[$, compare il termine $o(x - x_0)$, che rappresenta l'errore $E(x)$ che compare nell'approssimazione di f mediante un polinomio di primo grado:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

dove il polinomio di primo grado è la funzione $T(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$. L'errore che si commette nell'approssimazione è:

$$E(x) = f(x) - T(x)$$

Poiché $T(x_0) = f(x_0)$ e $T'(x_0) = f'(x_0)$ si dice che i grafici di f e T hanno un *contatto del primo ordine* in $x = x_0$. Questo significa che più ci si allontata da x_0 , più l'approssimazione peggiora. Nel testo [34] è riportato l'esempio della funzione esponenziale $f(x) = \mathrm{e}^x$ per $x_0 = 0$: $\mathrm{e}^x = 1 + x + o(x)$, mostrando appunto come i grafici si avvicinano in $x \to 0$.

Per questo motivo, successivamente, il testo [34] generalizza il problema, "facendo intervenire polinomi di grado più elevato allo scopo di migliorare l'approssimazione". In questo caso si ottiene, per l'errore di ordine n, la *formula di Peano*:

$$E_n(x) = o\big((x - x_0)^n\big) \quad \text{per } x \to x_0$$

Ritornando al caso di primo grado, per $n = 1$, il Pagani e Salsa [34] presenta un'osservazione interessante:

> "Si noti che, nel caso $n = 1$, la formula di Taylor non è altro che $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$, equivalente alla differenziabilità di f in x_0."

Vediamo ora la trattazione del differenziale nel cap. 7, CALCOLO DIFFERENZIALE 2. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI, §1.2. Nella fig. 4.16 a pag. 95 si riporta la trattazione del differenziale in più dimensioni, ossia come applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, che approssima l'incrtemento $\Delta f = f(\mathbf{x} + \mathbf{h})$ a meno di infinitesimi di ordine superiore a $\|\vec{h}\|$ $(o(\|\mathbf{h}\|))$.

Riguardo alla composizione, il differenziale soddisfa una proprietà che si chiama *invarianza di forma* che lo rende più *flessibile* della derivata in alcune situazioni.

Siano $w = g(y)$ e $y = f(x)$ con g definita sull'immagine di f. La funzione w può allora essere riguardata come funzione della variabile y oppure come funzione della variabile x, attraverso la composizione $g \circ f$.

Nel 1° caso si ha:

$$dw = g'(y)dy \; ; \tag{1.15}$$

nel 2° caso si ha, utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$dw = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx \; ,$$

che si può ancora scrivere

$$dw = g'(y)dy$$

essendo $y = f(x)$ e $dy = f'(x)dx$.

È sostanzialmente per l'invarianza di forma, che, nelle scienze applicate, si "differenzia" una data equazione anziché derivarla, quando non siano precisate le dipendenze delle variabili.

Ad esempio, in termodinamica, si può "differenziare" l'equazione

$$pV = RT \quad \text{(equazione di stato dei gas perfetti)}$$

ottenendo

$$pdV + Vdp = RdT \; ,$$

equazione valida qualunque sia la dipendenza da altre variabili di p, V, T.

Figura 4.15. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: invarianza in forma del differenziale, p. 291.

> La funzione lineare l è "rappresentata" da un unico vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ [34], nel senso che
> $$l(\mathbf{h}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle \, , \qquad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$$

e il *differenziale* è l'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathbf{h} \mapsto \langle \mathbf{a}, \mathbf{h} \rangle \, ,$$

Come vediamo nel passaggio riportato in fig. 4.17 a pag. 96, il testo [34] si impegna nello studio dell'aspetto geometrico del differenziale in più dimensioni. Esso afferma che il differenziale è la funzione lineare (o meglio affine) che meglio approssima f nell'intorno di un punto, e ha come grafico un iperpiano [34].

L'esempio 1.2 indica che, se $n > 1$, per studiare proprietà relative ad un intorno n–dimensionale di un punto occorre un concetto più potente di quello di derivabilità.

Tale concetto è quello di differenziabilità, oggetto del prossimo paragrafo, che, dunque, in dimensione maggiore di 1, non risulta più equivalente a quello di derivabilità.

1.2 Differenziale

L'idea di differenziabilità è essenzialmente quella di poter approssimare l'incremento $\Delta f = f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})$ con una funzione (reale) *lineare* in $\mathbf{h}$ a meno di infinitesimi di ordine superiore a $||\mathbf{h}||$.

Ricordiamo che ogni funzione lineare $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è "rappresentata" da un unico vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, nel senso che

$$l(\mathbf{h}) = < \mathbf{a}, \mathbf{h} > \qquad \forall\, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n \quad (^*).$$

Siamo così condotti alla seguente definizione.

(*) $\mathbb{R}^n$ si intende riferito alla base canonica.

354 CALCOLO DIFFERENZIALE 2. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Definizione 1.2 - *Sia $f : \mathbb{R}^n \supseteq A \to \mathbb{R}$, A aperto; f si dice differenziabile in $\mathbf{x} \in A$ se esiste un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ tale che*

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = < \mathbf{a}, \mathbf{h} > + o(||\mathbf{h}||) \quad \textit{per} \ ||\mathbf{h}|| \to 0 \tag{1.2}$$

per ogni $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x}+\mathbf{h} \in A$.

L'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ data da

$$\mathbf{h} \mapsto < \mathbf{a}, \mathbf{h} >$$

prende il nome di **differenziale** *di f in $\mathbf{x}$ e viene indicata col simbolo $df(\mathbf{x})$.* Con un abuso di notazione scriveremo $df(\mathbf{x}) = < \mathbf{a}, \mathbf{h} >$.

Se f è differenziabile in ogni punto di A diremo semplicemente f differenziabile in A.

Nel caso $n = 1$ il differenziale si riduce semplicemente ad ah con $a, h \in \mathbb{R}$ ed in questo caso abbiamo visto che $a = f'(x)$. Possiamo "identificare" il vettore $\mathbf{a}$ che compare nella (1.2) anche nel caso pluridimensionale?

La risposta è contenuta nel prossimo teorema insieme ad altre importanti conseguenze della differenziabilità.

Figura 4.16. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: applicazione differenziabile, pp. 353–354.

L'aspetto geometrico della differenziabilità è legato all'esistenza del piano (iperpiano se $n > 2$) tangente.

Sia f differenziabile in un punto $\mathbf{x}^0$; ponendo $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ scriviamo la (1.2) nella forma seguente:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + < \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 > + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\|) \ . \tag{1.7}$$

La funzione $z = f(\mathbf{x}^0) + < \nabla f(\mathbf{x}^0), \mathbf{x} - \mathbf{x}^0 >$, ha come grafico un iperpiano e la (1.7) equivale ad affermare che essa è la funzione lineare (o meglio affine) che meglio approssima f in un intorno di $\mathbf{x}^0$. Tale piano si chiama *piano tangente*.

In dimensione 2 se $\mathbf{x}^0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{x} = (x, y)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ la sua equazione si scrive esplicitamente così:

$$z - z_0 - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \ . \tag{1.8}$$

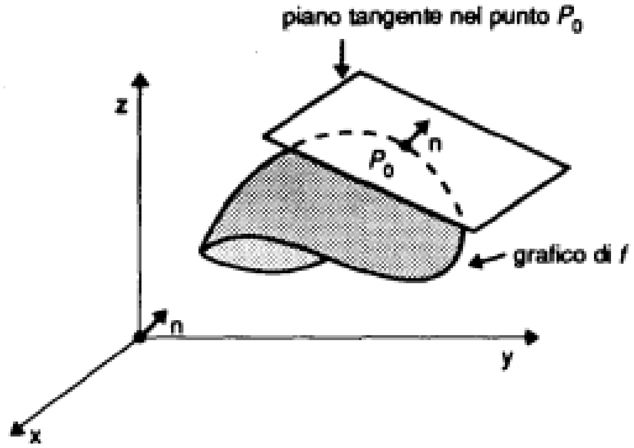


Fig. 7.4

356 CALCOLO DIFFERENZIALE 2. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

La (1.8) indica che il vettore $\mathbf{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) \in \mathbb{R}^3$ è un vettore normale al piano tangente nel punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, dunque, per definizione, normale al grafico di f nello stesso punto.

Figura 4.17. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: aspetto geometrico del differenziale, pp. 355–356.

Infine riportiamo una parte del testo (pp. 358–359) che vuole comunicare l'*importanza pratica del differenziale*:

> Segnaliamo anche l'importanza pratica del differenziale come conveniente approssiamzione per l'incremento di una funzione in genere non lineare. Ad esempio, nel calcolo degli errori, se una quantità q è funzione di altre quantità $m_1, m_2, \ldots, m_k$

Osservazione 1.3 - (Cambi di variabile come cambi di scala).

Il cambio di variabile $x = at$ è interpretabile come cambio di scala (unità di misura) sull'asse delle ascisse. Ad esempio, se x è misurato in metri e $a = 100$, t risulta misurato in centimetri. Così, nelle somme superiori ed inferiori una lunghezza di Δx metri viene ora misurata in $100\Delta t$ centimetri. Se x varia tra 0 e 1 metri, t varia da 0 a 100 cm; questo si riflette nell'integrale dove dx (simbolo per la misura usata) si trasforma in $100dt$.

Nel caso di cambiamenti lineari il cambio di scala è identico in ogni punto dell'intervallo di integrazione ed è realizzato tramite il fattore di conversione a.

460 INTEGRALI DI FUNZIONE DI UNA VARIABILE

Se si pone $x = \varphi(t)$ con $\varphi(t)$ non lineare, la formula (1.35) indica che dx si è trasformato nel differenziale $d\varphi = \varphi'(t)dt$. Ciò si può interpretare come un cambiamento di scala in cui il fattore di conversione $\varphi'(t)$ varia da punto a punto nell'intervallo di integrazione.

Figura 4.18. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: Cambi di variabile come cambi di scala, pp. 459–460.

la cui misura è affetta da un errore $\mathrm{d}m_1, \mathrm{d}m_2, \ldots, \mathrm{d}m_k$, il valore di q risulterà affetto da un errore con buona approssimazione dato da

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial q}{\partial m_1}\,\mathrm{d}m_1 + \frac{\partial q}{\partial m_2}\,\mathrm{d}m_2 + \cdots + \frac{\partial q}{\partial m_k}\,\mathrm{d}m_k$$

Osserviamo anche che nel cap. 8, INTEGRALI DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE. SERIE NUMERICHE, §1.1, *Integrale di Riemann*, *Definizione di integrale*, il testo [34] specifica il significato del differenziale $\mathrm{d}x$ dell'integrando, precisando che:

> "Osserviamo esplicitamente che la variabile di integrazione, indicata con x nella scrittura precedente sia *muta*, come l'indice di sommatoria in una somma, e perciò può essere sostituita con una lettera qualsiasi, anche nel corso di uno stesso calcolo, dal momento che non compare nel risultato finale."

In questo ambito, dunque, non viene assegnato al differenziale alcun significato, ma quando tratterà il cambio di variabile di integrazione, il testo [34] osserva che se si pone $x = \varphi(t)$ con φ non lineare, il $\mathrm{d}\varphi$ si trasforma nel differenziale $\mathrm{d}\varphi = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, dove $\varphi'(t)$ è il fattore di conversione (*si veda* il brano riportato in fig. 4.18).

Osservando le parole che sono utilizzate nel Pagani e Salsa [34] notiamo che esse rispecchiano l'intenzione di essere al passo con la didattica attuale e tradizionale. Come la scelta di definire i simboli di Bachmann–Landau (*si veda* la nota 15 a piè di pag. 46), in quanto sono "*entrati nell'uso corrente*".

Il significato di infinitesimo, definito come una funzione tendente a zero, sarà poi riconsiderato sia nella definizione di differenziale, sia come errore nelle serie di Taylor. In particolare il suo ruolo diventa fondamentale quando viene espresso mediante l'*o-piccolo*, ossia espresso in modo da poter comunicare quanto velocemente tende a zero. La sua funzionalità rientra nell'argomento delle approssimazioni, in quanto definisce l'errore che possiamo commetere. In questo senso, nella definizione di differenziale, troviamo il termine $o(h)$, come errore nell'approssimazione dell'incremento Δf con il differenziale $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,h$.

Abbiamo anche visto che nel libro di Pagani Salsa vi è un tentativo di mostrare un'applicazione del differenziale nelle "scienze applicate" (per quanto riteniamo improprio definire la fisica una "scienza applicata"), della proprietà caratteristica del differenziale di essere *invariante in forma* (*si veda* il brano riportato in fig. 4.15 a pag. 94).

Come nel testo di Pini [41], nella parte cap. 7, CALCOLO DIFFERENZIALE 2. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI, si definisce l'applicazione lineare differenziale in più dimensioni, e la differenziabilità è descritta dall'idea di poter approssimare l'incremento della funzione, con una funzione lineare in $\mathbf{h}$, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $\|\mathbf{h}\|$. Queste sono le caratteristiche della concezione riportata nel §4.1.1.2 a pag. 74 (*differenziale come approssimazione lineare tangenziale* o *differenziale di Frèchet*).

Il significato geometrico è specificato sia nella parte cap. 6, CALCOLO DIFFERENZIALE 1. FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE, §1.5, sia nella parte cap. 7, CALCOLO DIFFERENZIALE 2. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI, §1.2, con sufficiente chiarezza.

Soltanto nella parte sul differenziale di funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si *segnala* quale sia la sua *importanza pratica*, ossia quando è utile applicare il differenziale: ovvero quando dobbiamo approssimare l'incremento (ovvero la variazione) di una funzione che *non è lineare*.

Nell'*Appendice* dell'edizione del testo di Pagani e Salsa [34] che stiamo considerando, sono state dedicate ben 7 pagine alla presentazione dell'*analisi non-standard* (*Cenno all'Analisi Non Standard*, pp. 518–524). In questa parte la concezione del differenziale è ovviamente quella riportata nel §4.1.1.3 a pag. 75 (*il differenziale come quantità infinitesimale*). Ritengo che la parte più interessante sia quella sulla *Costruzione di* $\mathbb{R}^*$. In questo paragrafo dell'appendice possiamo approfondire i passaggi legati alle necessità che hanno portato alla costruzione del campo dei numeri iperreali.

Costruzione di $^*\mathbb{R}$.

Per capire l'idea base ritorniamo alla costruzione di Cantor dei numeri reali, accennata nel paragrafo 4.4.3. In questa costruzione si considerano successioni fondamentali di numeri razionali, $\{r_n\} \subset \mathbb{Q}$, quelle cioè che soddisfano la condizione di Cauchy.

Il punto chiave della costruzione di $\mathbb{R}$ sta nell'assegnare una relazione di equivalenza nell'insieme delle successioni: due di esse, $\{r_n\}$ e $\{s_n\}$, sono ritenute equivalenti se $r_n - s_n \to 0$ per $n \to +\infty$.

Figura 4.19. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: analisi non standard, p. 519.

Successioni equivalenti individuano lo *stesso numero* reale. Come conseguenza, le successioni seguenti, equivalenti nel senso precisato sopra, individuano lo stesso numero reale: lo zero:

$$\{0\},\ \{2^{-n}\},\ \left\{\frac{1}{n}\right\},\ \left\{\frac{1}{n^2}\right\},\ldots,\left\{\frac{1}{n^k}\right\},\ldots\,. \tag{A.1}$$

D'altra parte, queste successioni risultano molto diverse tra loro per quanto riguarda la velocità con la quale tendono a zero. La relazione di equivalenza introdotta da Cantor non segnala tale differenza.

L'idea di Robinson è di partire da successioni di reali e di introdurre nel loro insieme una relazione di equivalenza, in modo tale da tener conto di tale diversità.

Si potrebbe pensare di considerare come "numeri" le singole successioni oppure di ritenerle equivalenti se differiscono solo per i valori assunti su un insieme finito di interi. Questo modo di agire è giustificato dal fatto che, dopotutto siamo interessati al comportamento delle successioni per $n \to +\infty$.

Per le classi di equivalenza così ottenute si definiscono somma e prodotto nella solita maniera:

$$[r_n] + [s_n] := [r_n + s_n]$$

$$[r_n] \cdot [s_n] := [r_n \cdot s_n]\,.$$

Ci si accorge però subito che non possono valere le ordinarie regole di calcolo. Infatti, ad esempio, $[0]$ è l'elemento neutro della somma e le classi individuate dalle successioni

$$r_n = 0, 1, 0, 3, 0, 5, \ldots$$

$$s_n = 0, 0, 2, 0, 4, 0, \ldots$$

sono diverse da $[0]$. Tuttavia è evidente che $[r_n] \cdot [s_n] = [0]$. Non vale quindi la legge di annullamento del prodotto.

Occorre una relazione di equivalenza più "bilanciata" nel senso che non deve identificare "troppe" successioni (come quella di Cantor) altrimenti non si esce dal campo dei reali e al contempo non "troppo poche" altrimenti otterremmo un insieme sicuramente più grande di $\mathbb{R}$ ma nel quale non possiamo operare con le ordinarie regole di calcolo.

Il primo passo è di operare una suddivisione dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ in "grandi" e "piccoli".

A tale scopo introduciamo una funzione m definita sui sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ con le seguenti proprietà:

i) $\forall A \subseteq \mathbb{N}$, $m(A) = 0$ oppure $m(A) = 1$;
ii) $m(\emptyset) = 0$, $m(\mathbb{N}) = 1$;
iii) se $A \subset \mathbb{N}$ è finito allora $m(A) = 0$;

Figura 4.20. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: analisi non standard, p. 520.

iv) se $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sono sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ a due a due disgiunti allora

$$m\Big(\bigcup_{j=i}^{k} A_j\Big) = \sum_{j=i}^{k} m(A_j) \qquad \text{(proprietà di additività)} .$$

Una funzione come m si chiama *misura finitamente additiva* (per la *iv*)) su $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

L'esistenza di m (anzi di infinite m) è una conseguenza dell'assioma di scelta (cfr. appendice al Cap. 1).

Definizione A.1 - *Sia* $A \subseteq \mathbb{N}$. *Diciamo che* A *è piccolo se* $m(A) = 0$, *che* A *è grande se* $m(A) = 1$.

Sia ora $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni a valori reali.

In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ introduciamo la seguente relazione di equivalenza che indichiamo con il simbolo $\stackrel{*}{\sim}$:

$$\{r_n\} \stackrel{*}{\sim} \{s_n\} \text{ se e solo se } m\{i \in \mathbb{N} : r_i = s_i\} = 1$$

ovvero se l'insieme degli indici su cui coincidono è un sottoinsieme *grande* di $\mathbb{N}$.

Definizione A.2 - ${}^*\mathbb{R} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \stackrel{*}{\sim}$.

L'insieme ${}^*\mathbb{R}$ si chiama a volte insieme degli *iperreali*. I suoi elementi sono classi di equivalenza (rispetto a $\stackrel{*}{\sim}$) di successioni a valori reali, che indicheremo con il simbolo $< \cdot >$. Useremo lettere greche per indicare iperreali; così, $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ significa che $\alpha = < r_n >$ per qualche successione $r_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Introduciamo una relazione d'ordine in ${}^*\mathbb{R}$, che continueremo ad indicare con il simbolo $<$:

se $\alpha = < r_n >, \beta = < s_n >$ allora $\alpha < \beta$ se e solo se $m\{i \in \mathbb{N} : r_i < s_i\} = 1$.

Le operazioni di somma e prodotto (indicate ancora con $+$ e $\cdot$) si definiscono ponendo

$$\alpha + \beta := < r_n + s_n > \quad \text{e} \quad \alpha \cdot \beta := < r_n \cdot s_n > \quad .$$

Proposizione A.1 - ${}^*\mathbb{R}$ *è un campo ordinato.*

Come conseguenza, in ${}^*\mathbb{R}$ valgono tutte le usuali regole di calcolo. In ${}^*\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ è immerso in modo naturale, nel senso che ${}^*\mathbb{R}$ contiene un campo ordinato *completo*, che per il teorema di isomorfismo, (vedi 2.2.5), possiamo senz'altro identificare con $\mathbb{R}$.

È questo l'insieme degli elementi di ${}^*\mathbb{R}$ della forma ${}^*x := < x >$, classe di equivalenza individuata dalla successione costante $r_n = x, \forall n \in \mathbb{N}$. Scriveremo senz'altro $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ e x al posto ${}^*x$.

La proprietà che più ci interessa è però che ${}^*\mathbb{R}$ è *una estensione propria* di $\mathbb{R}$, cioè $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$ (un *allargamento* nella terminologia di Robinson).

Siano infatti $\alpha = < \frac{1}{n} >$ ed $x \in \mathbb{R}_+$. Allora $\alpha > 0$ e l'insieme

$$\{i \in \mathbb{N} : \frac{1}{i} \geq x\}$$

Figura 4.21. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: analisi non standard, p. 521.

è vuoto oppure costituito da un insieme finito di indici e pertanto è *piccolo* nel senso della definizione A.1.

Ne segue che $0 < \alpha < x$; poiché x è arbitrario in $\mathbb{R}_+$ si ha: $0 < \alpha < x$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$. Ciò implica $\alpha \notin \mathbb{R}$; numeri come α si chiamano infinitesimi. Più precisamente:

Definizione A.2 - *Si dice che $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$ è infinitesimo se $|\varepsilon| < x, \forall x \in \mathbb{R}_+$. Si dice che $\omega \in {}^*\mathbb{R}$ è infinito se $|\omega| > x\ \forall\ x \in \mathbb{R}_+$.*

Un esempio di infinito è $< n >$. Notiamo che $\beta = < \dfrac{1}{n^2} >$ è infinitesimo e risulta $\beta < \alpha$, dove α è l'infinitesimo $< \dfrac{1}{n} >$, come facilmente si verifica.

Così pure $< n^2 >$ è un infinito maggiore di $< n >$.

Per indicare che ε è infinitesimo scriveremo $\varepsilon \approx 0$; l'unico infinitesimo reale è lo zero. Due numeri α e β si dicono infinitamente vicini, e si scrive $\alpha \approx \beta$, se $\alpha - \beta \approx 0$. È poi facile verificare che:

$$\varepsilon \approx 0, \eta \approx 0, x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \varepsilon + \eta \approx 0,\ \varepsilon \cdot \eta \approx 0,\ \varepsilon \cdot x \approx 0\ ;$$

$$\varepsilon \approx 0, \varepsilon \neq 0 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\varepsilon} \text{ infinito ;}$$

$$\omega, \nu \text{ infiniti positivi}, x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \ \Rightarrow\ \omega + \nu,\ \omega \cdot x \text{ infiniti ;}$$

$$\omega \text{ infinito } \Rightarrow \frac{1}{\omega} \approx 0.$$

È chiaro che ${}^*\mathbb{R}$ ***non*** può essere completo, altrimenti sarebbe isomorfo ad $\mathbb{R}$; infatti l'insieme degli infinitesimi non può avere estremo superiore (e inferiore) in ${}^*\mathbb{R}$, come facilmente si verifica (*). Né ${}^*\mathbb{R}$ può soddisfare la proprietà di Archimede: infatti se $x \in \mathbb{R}_+$ ed $\varepsilon \approx 0, \varepsilon > 0$, non esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\varepsilon > x$.

I numeri di ${}^*\mathbb{R}$ si possono suddividere in finiti ed infiniti.

Definizione A.3 - *$\alpha \in {}^*\mathbb{R}$ è finito se $\exists r \in \mathbb{R}_+$ tale che $|\alpha| < r$.*

Ora, tutti i numeri finiti sono della forma $x + \varepsilon$ con $x \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon \approx 0$; più precisamente vale il seguente teorema, fondamentale per lo sviluppo del calcolo differenziale ed integrale.

▪ **Teorema A.2 -** *Sia $\alpha \in {}^*\mathbb{R}$, α finito. Allora esiste uno ed un solo numero reale x tale che $x - \alpha \approx 0$; x si chiama parte standard di α e si indica con $st(\alpha)$ oppure ${}^\circ\alpha$.*

Figura 4.22. C. D. Pagani e S. Salsa [34], frammento di testo: analisi non standard, p. 522.

4.2 Le diverse concezioni di differenziale nei testi di Fisica

4.2.1 Quattro concezioni di differenziale

Nei testi di fisica il differenziale può assumere diversi significati, anche a seconda dell'argomento in cui viene utilizzato. Secondo lo studio di Martínez Torregrosa e colleghi [29] si possono riconscere quattro concezioni di differenziale nei testi di fisica, descritte nei seguenti §§4.2.1.1–4.2.1.4, seguendo la classificazione dello studio citato.

4.2.1.1 Il differenziale senza significato in sé

Pochi testi di fisica non assegnano alcun significato al differenziale, esplicitamente o implicitamente. Tali testi considerano il differenziale come un passo intermedio che conduce a derivate e integrali senza un particolare significato in sé, in maniera simile a quanto descritto, per i libri di analisi matematica, nel §4.1.1.1 a pag. 73.

Martínez Torregrosa e colleghi [29] citano, come esempio, un testo di fisica per le scuole superiori in cui si afferma "Secondo l'equazione $F = q\,v\,B\,\sin\alpha$, la forza esercitata sulla carica $\mathrm{d}q$ è $\mathrm{d}F = \mathrm{d}q\,v\,B\,\sin\alpha$ [...] che è la forza a cui è soggetto un *elemento* di corrente elettrica in un campo magnetico". In questo esempio $\mathrm{d}q$ potrebbe essere sostituito con q_1 o q_2 e $\mathrm{d}F$ potrebbe essere sostituito con F_1 o F_2.

4.2.1.2 Il differenziale come incremento infinitesimale

Secondo questa concezione $\mathrm{d}f$ è uguale a un Δf infinitesimale, prodotto da un Δx pure infinitesimale. Talvolta si scrive esplicitamente che $\mathrm{d}f$ è il limite di Δf quando Δx tende a zero. Tuttavia, se fosse davvero così — qualora la funzione $f(x)$ fosse continua — il differenziale $\mathrm{d}f$ sarebbe sempre nullo.

Questa concezione intuitiva è simile all'idea originale di Leibniz, ampiamente criticata nei secoli successivi. I differenziali infinitesimali sono stati reintrodotti con rigore negli anni '60, ma, anche in questa prospettiva, il differenziale infinitesimale $\mathrm{d}f$ non è uguale all'incremento infinitesimale Δf (*si veda* la relazione (4.3) a pag. 75).

In sintesi l'analisi matematica moderna legittima l'uso degli infinitesimi ma non l'interpretazione di $\mathrm{d}f$ come un Δf infinitesimale.

4.2.1.3 Il differenziale come approssimazione infinitesimale

Questa concezione considera $\mathrm{d}f$ una quantità infinitesimale molto prossima al valore dell'incremento Δf quando Δx è infinitesimale. In questa concezione, nell'espressione $\mathrm{d}f = M\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$ è un Δx infinitesimale, così piccolo dal lasciare M *praticamente* invariato, così che $\mathrm{d}f$ è *praticamente* uguale all'estremamente esiguo Δf.

Questa concezione riconosce l'idea di *approssimazione* così come l'idea di *dipendenza lineare* di $\mathrm{d}f$ da Δx ma, allo stesso tempo, utilizza infinitesimi o quantità molto piccole per affermare che $\mathrm{d}f - \Delta f$ è *praticamente* trascurabile, cioè $\mathrm{d}f$ può essere sostituito da Δf senza alcun errore.

Questa è una concezione molto simile alla concezione matematica del differenziale come quantità infinitesimale (*si veda* §4.1.1.3 a pag. 75), ma non enuncia esplicitamente la condizione aggiuntiva (4.4) a pag. 75, ovvero $\frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} \approx 0$, che deve essere soddisfatta dall'approssimazione lineare.

4.2.1.4 Il differenziale come stima lineare

In questa concezione $\mathrm{d}f$ è un'approssimazione di Δf, ottenuta supponendo che Δf sia lineare in Δx. Non si fanno ipotesi sul valore, piccolo o grande di Δx, Δf, $\mathrm{d}f$ e $\Delta f - \mathrm{d}f$. In questa concezione, nell'espressione $\mathrm{d}f = M\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x = \Delta x$ e $\mathrm{d}f$ è un'approssimazione di Δf, calcolata supponendo che M rimanga costante al variare di Δx.

Questa concezione rimarca l'idea dell'approssimazione lineare e chiarisce la differenza tra Δf e $\mathrm{d}f$. È simile alla concezione matematica del *differenziale come approssimazione lineare tangenziale* o *differenziale di Frèchet* (*si veda* §4.1.1.2 a pag. 74), ma non si fa riferimento alla condizione addizionale (4.2) a pag. 74, ovvero $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\Delta x} = 0$.

4.2.2 Variazione infinitesimale o quantità infinitesimale?

In fisica si considera spesso $\mathrm{d}f$ come una quantità, piuttosto che come una variazione di essa [42]. Ad esempio, nell'equazione differenziale che definisce il flusso di un campo vettoriale $\vec{v}$ (velocità, campo elettrico, campo magnetico, ecc.): $\mathrm{d}\phi\,(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}S$, dove $\hat{n}$ è il versore normale all'elemento di superficie $\mathrm{d}S$, e $\mathrm{d}\phi\,(\vec{v})$ è il flusso del campo vettoriale $\vec{v}$ attraverso la superficie $\mathrm{d}S$. L'equazione è interpretata come la quantità di flusso che passa attraverso ad una quantità di superficie, ma può essere considerata anche come la variazione della quantità di flusso che attraversa una superficie, quando quest'ultima varia di una quantità $\mathrm{d}S$ [29]. La distinzione tra variazione infinitesimale e quantità infinitesimale non è pertanto influente sull'analisi che segue.

4.2.3 Criteri per l'esame dei testi di fisica

Rispetto all'utilizzo dei differenziali, esaminiamo come i libri di fisica rispondono alle domande:
[a.] Perché è necessario usare i differenziali?
[b.] Qual è il significato del differenziale in fisica?
[c.] Perché scriviamo esattamente quell'espressione differenziale e non un'altra?
Proseguiamo con un'analisi delle risposte alle domande [a.], [b.], e [c.], in base alle diverse concezioni fisiche di differenziale[5]:
[a.] **Perché è necessario usare i differenziali?**
- §4.2.1.1 (Senza significato in sé). Non ha una risposta, il differenziale si utilizza quando compaiono le parole “elementare” o “elemento di...”.
- §4.2.1.2 (Incremento infinitesimale). Il differenziale è necessario quando trattiamo delle grandezze “molto piccole”.
- §4.2.1.4 (Stima lineare). Si utilizza $\mathrm{d}f$ quando la variazione di f non è lineare nella variazione della variabile indipendente, motivo per cui non possiamo calcolare direttamente Δf in funzione di Δx, (ad esempio scriviamo $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$ perché l'accelerazione non è costante nell'intervallo di tempo).

[5] Ogni numero è riferito al paragrafo che introduce la concezione nel §4.2.1 a pag. 102.

§4.2.1.3 (Approssimazione infinitesimale). I differenziali sono necessari quando si verifica la combinazione delle condizioni §4.2.1.2 e §4.2.1.4, ossia quando si tratta una dipendenza non lineare di grandezze molto piccole [29].

[b.] **Qual è il significato del differenziale in fisica?**

§4.2.1.1 (Senza significato in sé). Il differenziale è considerato uno strumento senza alcun significato, anche se dal primo approccio in cui appare potrebbe venire associato ad uno "spostamento elementare".

§4.2.1.2 (Incremento infinitesimale). Prendendo ad esempio $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}v$ è una piccolissima variazione della velocità prodotta nell'intervallo di tempo molto piccolo $\mathrm{d}t$. In questa concezione non si possono assegnare dei valori numerici ai differenziali, perché idealmente $\mathrm{d}v$ e $\mathrm{d}t$ possono sempre essere ancora più piccoli, per cui diventa difficile anche interpretare l'accelerazione a un certo istante.

§4.2.1.3 (Approssimazione infinitesimale). Nell'equazione $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}v$ è un'approssimazione della variazione della velocità in un intervallo di tempo molto piccolo $\mathrm{d}t$, così piccolo che a può essere considerata costante in quell'intervallo. Quindi $\mathrm{d}v$ è praticamente uguale a un Δv in un piccolo Δt. Anche in questa concezione, come nella §4.2.1.2, si trovano le stesse difficoltà nell'assegnare un valore numerico ai differenziali, o nell'interpretare il valore numerico dell'accelerazione in un istante di tempo (infatti hanno in comune il fatto di considerare il differenziale come qulcosa di molto piccolo).

§4.2.1.4 (Stima lineare). In questa concezione, in $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}v$ è una stima della variazione della velocità per ogni intervallo di tempo $\mathrm{d}t$, stima eseguita supponendo che l'accelerazione rimanga costante durante l'intervallo $\mathrm{d}t$ [29].

[c.] **Perché proprio quell'espressione differenziale e non un'altra?**

§4.2.1.1 (Senza significato in sé). Non c'è risposta. Si può scrivere qualunque espressione differenziale, purché la si denomini come "elementare" e le si anteponga il simbolo "d".

§4.2.1.2 (Incremento infinitesimale). Quando si affronta una situazione fisica in cui si parte da un'espressione definita, con incrementi finiti (indicati con Δ, p. es. $\Delta x = v\,\Delta t$ o $\Delta m = \rho\,\Delta V$), l'espressione differenziale è esattamente la stessa, in quanto si limita a considerare quelle stesse variazioni ma con entità molto ridotta (p. es. $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$ o $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$). Il problema nasce quando non è preventivamente scritta l'espressione di una variazione per incrementi finiti e non infinitesimali. Consideriamo per esempio l'equazione per il decadimento radioattivo $\mathrm{d}N = -k\,N\,\mathrm{d}t$. In questo caso possiamo scrivere con sufficiente sicurezza l'espressione per intervalli di tempo molto piccoli, ma non per intervalli "più grandi". Tramite integrazione sappiamo che si ottiene: $\Delta N = N\left(1 - \mathrm{e}^{-k\,\Delta t}\right)$. Se seguissimo il medesimo procedimento, per intervalli molto piccoli, otterremmo *erroneamente* l'espressione differenziale $\mathrm{d}N = N\left(1 - \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{d}t}\right)$, espressione incompatibile con l'espressione di partenza $\mathrm{d}N = -k\,N\,\mathrm{d}t$.

§4.2.1.4 (Stima lineare). In questa concezione, l'approssimazione differenziale consiste nel presupporre un comportamento lineare anche se sappiamo che, in realtà, la dipendenza non è lineare. Quando si parte da un'espressione lineare con incrementi finiti (p. es. $\Delta x = v\,\Delta t$, con $v \equiv \text{cost}$, o $\Delta m = \rho\,\Delta V$, con $\rho \equiv \text{cost}$), l'espressione differenziale mantiene la stessa forma (p. es. $\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$ o $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V$). Quando invece la dipendenza non è lineare, come nel caso del decadimento radioattivo, dobbiamo cercare una legge lineare anche se sappiamo che in realtà il comportamento non è lineare. In questa prospettiva, le seguenti diverse espressioni differenziali potrebbero tutte rappresentare le corrispondenti stime lineari: $\mathrm{d}N = -k\,N\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}N = -k\,N^2\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}N = -\frac{k}{N}\,\mathrm{d}t$, ... Ogni funzione lineare di $\mathrm{d}t$ potrebbe essere matematicamente un buon candidato. Anche la condizione $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N'$ non aiuta, visto che non conosciamo $N(t)$: tutte le espressioni rimangono valide. Come in molte situazioni fisiche, dobbiamo considerare ogni stima lineare come ipotesi plausibile, lavorare su di essa (mediante integrazione), e trovare la corrispondente relazione funzionale tra ΔN e $N(t)$, la cui validità deve essere verificata empiricamente nella situazione fisica in questione o mediante la sua coerenza con altri risultati nello stesso campo.

§4.2.1.3 (Approssimazione infinitesimale). Per questa concezione la risposta si avvicina molto alle precendenti due, a seconda che l'enfasi sia posta sul suo valore infinitesimale (in tal caso si avvicina alla §4.2.1.2, incremento infinitesimale), o sul carattere di approssimazione lineare (in tal caso si avvicina alla §4.2.1.4, stima lineare). Secondo gli studi di Martínez Torregrosa e colleghi [29], solitamente la concezione di differenziale come infinitesimo prevale. Questa concezione si basa spesso sull'intuizione, apparentemente corretta, che la somma di tantissime approssimazioni molto piccole finisce per dare un risultato accurato, poiché l'errore in ogni approssimazione è praticamente nullo. In realtà è noto come lo sviluppo matematico che inizia con una con un'espressione differenziale "ragionevole", possa produrre un risultato errato dal punto di vista fisico o geometrico. Quando si enfatizza il carattere infinitesimale invece di quello di stima lineare, è difficile giustificare perché alcune espressioni differenziali portano a un risultato corretto e altre no (*si riveda* l'esempio a pag. 20 sulla superficie della sfera calcolata mediante la somma di superfici laterali di cilindri o o di tronchi di cono infinitesimali) [29].

4.2.4 Esame del processo di insegnamento nei libri di fisica

In questo paragrafo si vuole analizzare come sono introdotte le nozioni della *cinematica* mediante l'utilizzo del concetto di *differenziale*, ponendo a confronto testi di Fisica Generale (prima parte) a livello universitario. La scelta è stata guidata dalla data di pubblicazione, dalle strategie didattiche e dai diversi approcci scelti dagli autori.

Percorrendo lo sviluppo della cinematica mediante gli strumenti dell'analisi necessari alla comprensione e applicazione della teoria, analizzeremo, in ordine della data di pubblicazione, i seguenti testi:

(a) Gilberto Bernardini (1945) *Fisica Sperimentale, parte I*, V edizione [4].
(b) Giorgio Valle (1947) *Guida alle lezioni di Fisica Sperimentale* [53].
(c) Corrado Mencuccini e Vittorio Silvestrini (1987) *Fisica 1. Meccanica e termodinamica* [30].
(d) David Halliday, Robert Resnick e Kenneth S. Krane (2003) *Fisica 1*, V edizione [19].

4.2.4.1 Gilberto Bernardini: Fisica Sperimentale, parte I (1945)

Gilberto Bernardini (1906-1995) si è laureato con lode in fisica all'Università di Pisa nell'A.A. 1927–28, quale allievo pure della Scuola Normale Superiore di Pisa a partire dal 1923. Dopo la laurea, trovò impiego presso una ditta di costruzioni ottico-meccaniche di Firenze associata anche all'Istituto Nazionale di Ottica di Firenze, dove rimase fino al 1930, insegnando, al contempo, presso il locale liceo scientifico. Nel 1930, assunse l'incarico di assistente di meccanica razionale all'Università di Firenze, quindi, nel 1931, quello di fisica sperimentale, collaborando con Giuseppe Occhialini, nel gruppo di ricerca diretto da Bruno Rossi, allo sviluppo di nuove tecniche e strumenti per la ricerca di particelle subatomiche. Negli anni 1934–1937, con una borsa di studio dell'Accademia Nazionale dei Lincei, si trasferì in Germania, dove studiò presso la Società Kaiser Wilhelm di Berlino, con Otto Hahn e Lise Meitner. Tornato in Italia, dopo aver conseguito la libera docenza, fu nominato professore all'Università di Camerino nel 1937, poi passò a Bologna, dove insegnò fisica sperimentale dal 1938 al 1946. A Bologna divenne ordinario di fisica sperimentale nel 1941, e fu direttore dell'Istituto di Fisica fino al 1946. Nel dopoguerra, si trasferì all'Università di Roma, dove ricoprì prima la cattedra di spettroscopia e poi quella di fisica sperimentale. Nel 1964 passò a Pisa, insegnando presso l'università e la Scuola Normale Superiore, fino al ritiro, avvenuto nel 1977, seguito dalla nomina a professore emerito.

Nel 1949, si recò, su invito, negli Stati Uniti, come professore visitatore prima alla Columbia University poi, dal 1951 al 1956, a Urbana (Illinois) e a Chicago, dove, come research full professor, compì importanti studi sui pioni. Nel 1951, ritornato in Italia, contribuì a fondare l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), divenendone il primo presidente fino al 1959. Diede inizio alla costruzione (dal 1953 al 1958) dei laboratori nazionali di Frascati, creandovi, assieme a Giorgio Salvini, il primo elettrosincrotrone da 1100 MeV, che fu, per un certo periodo, il più potente al mondo. Dal 1957 al 1964, fu anche Direttore delle Ricerche del CERN di Ginevra e del gruppo di ricerca del protosincrotone, dal 1957 al 1960.

Il testo di Gilberto Bernardini *Fisica Sperimentale, parte I* [4], contiene una estesa parte dedicata alla spiegazione verbale e al commento, la quale, insieme alle equazioni e ad alcuni grafici, si impegna nella trasmissione dei concetti fondamentali della cinematica.

In questo contesto l'idea di velocità istantanea si sviluppa a partire da quella di velocità media, utilizzando i concetti di limite e di derivata, confrontando il moto uniforme con il moto non-uniforme e giovandosi della rappresentazione grafica mediante un diagramma spazio–tempo, (*si veda* il passaggio riportato in fig. 4.23 a pag. 107).

L'obiettivo è quello di determinare la velocità di un punto materiale in un certo istante. In un moto non-uniforme la velocità media dipende dall'ntervallo di tempo considerato, tuttavia

> "[...] eseguendo le misure per intervalli di tempo $t' - t$ sempre più piccoli, le corrispondenti velocità medie saranno sempre meno diverse l'una dall'altra, e da un certo intervallo di tempo sufficientemente piccolo in poi, avranno tutte, nel limite degli errori, uno stesso valore v^*. Sarà allora naturale assumere v^* come velocità del mobile dell'istante t." [4]

Il testo [4] precisa però che così facendo v coincide con v^* soltanto nel limite degli errori, mentre ricorrendo ai procedimenti dell'analisi

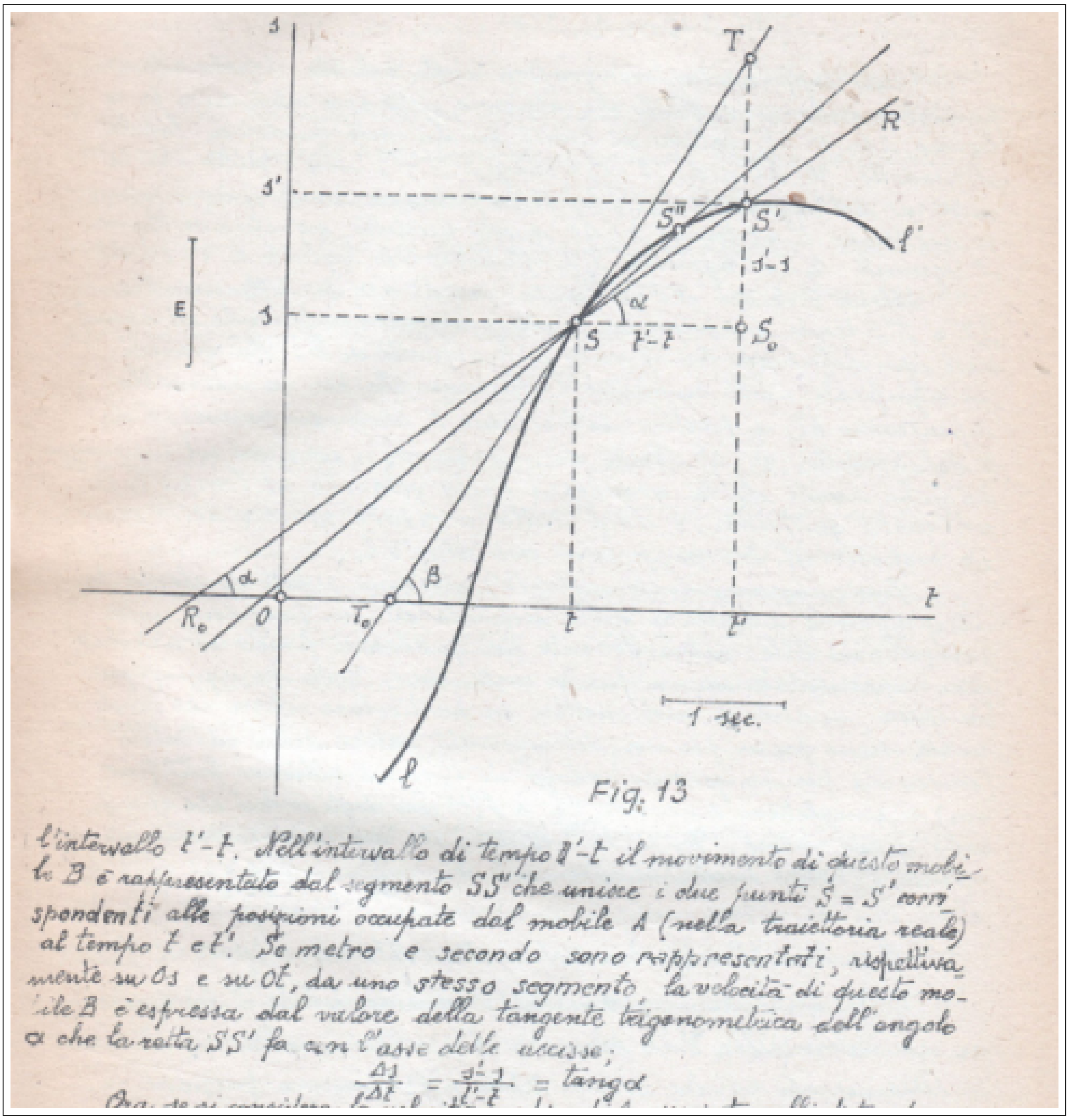


Figura 4.23. G. Bernardini [4], frammento di testo: Grafico s–t, p. 45.

> "[. . .] possiamo assumere per velocità all'istante t il limite v determinato e finito, verso cui tende la velocità media $\frac{s'-s}{t'-t}$ quando l'intervallo $t'-t$ tende a zero." [4]

Il testo [4] definisce poi la derivata prima di una funzione rispetto t come il limite del rapporto incrementale di $f(t)$ per Δt tendente a zero, per cui la velocità sarà la derivata prima dello spazio rispetto al tempo:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = s'(t) = \dot{s}$$

Il Bernardini [4] passa poi alla rappresentazione grafica del concetto. Nel grafico s–t (*si veda* fig. 4.23) sono rappresentati due tipi di moto:

- Il moto *vario* di un punto A, rappresentato da una curva (nel grafico l'arco di curva $\widehat{ll'}$).
- Il moto *uniforme* di un punto B, rappresentato da una retta $\mathcal{R}_0\mathcal{R}$, che interseca l'arco $\widehat{ll'}$ in due punti, S ed S'.

Considerando l'intervallo di tempo $t' - t = \Delta t$, la velocità media dei punti A e B per spostarsi da S a S' è la medesima.

> "[...] Se metro e secondo sono rappresentati rispettivamente su Os e su Ot da uno *stesso segmento*" [4]

(precisazione importante e tutt'altro che scontata) la velocità del mobile B è espressa dal valore della tangente goniometrica dell'angolo α che la retta SS' fa con l'asse delle ascisse:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s' - s}{t' - t} = \tan \alpha$$

Bernardini [4] considera ora il moto del punto mobile A, su un intervallo di tempo sempre più piccolo (*si veda* ancora fig. 4.23 a pag. 107):

> "[...] se all'estremo S' si sostituisce l'estremo variabile S'' sempre più prossimo ad S, la retta SS' tende a coincidere con la tangente $\mathcal{T}_0\mathcal{T}$ alla curva nel punto S, mentre l'angolo α tende all'angolo β che questa tangente fa con l'asse delle ascisse. Ma poiché $\tan \alpha = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, *anche al limite questa uguaglianza si mantiene* e la tangente trigonometrica dell'angolo β non è altro che
>
> $$\tan \beta = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$$

Il passaggio al limite per la costruzione della velocità istantanea, consiste nel far tendere $\Delta t \to 0$, in modo che, in fig. 4.23 a pag. 107

> "[...] la retta SS" tenda a coincidere con la tangente $\mathcal{T}_0\mathcal{T}$ alla curva nel punto S, mentre l'angolo α tende all'angolo β che questa tangente fa con l'asse delle ascisse" [4].

In questo medesimo limite tenda ad annullarsi ogni differenza tra il moto di A e il moto di B.

Per introdurre l'accelerazione Bernardini considera la funzione del tempo $v(t)$, come quella funzione che, istante per istante, misura la variazione dello spazio rispetto al tempo, e aggiunge:

> "[...] ha importanza essenziale, nella meccanica, il considerare la variazione, sempre rispetto al tempo, della velocità. Questa variazione si definisce accelerazione e, con procedimento analogo a quello seguito per definire la velocità istantanea, nel caso del moto rettilineo, si passa da una accelerazione media, data da
>
> $$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t') - v(t)}{t' - t}$$
>
> a una accelerazione istantanea costante a data dal limite di questo rapporto [...].
> [...] l'incremento della velocità Δv, corrispondente all'intervallo di tempo Δt è, *al limite, per Δt infinitamente piccolo*, dato dal prodotto $\Delta v = a\, \Delta t$

Come preannunciato, segue il §9, *Cenni sul calcolo delle derivate* a pag. 48, in cui sono trascritte le regole di derivazione per calcolare la derivata di una funzione.

Ora ci soffermiamo sul paragrafo §11, *Infinitesimi* a pag. 53, con l'obiettivo di estrarre dal testo ciò che si intende per infinitesimo nel libro di Bernardini [4]. Riportiamo le prime parole del paragrafo:

> "Nei paragrafi precedenti abbiamo preso in considerazione delle grandezze come Δt, Δs e Δv che immaginavamo di far tendere a zero, cioè di far *decrescere continuativamente fino a renderle minori di qualunque numero precedentemente stabilito, e arbitrariamente piccolo.* Queste grandezze che tendono a zero [...] si chiamano infinitesimi." [4].

Il testo [4] prosegue affermando che l'analisi infinitesimale, costruita da Newton e Leibniz, è sorta proprio per rispondere alle esigenze dell'interpretazione dei fenomeni fisici. Infatti sostiene che questi fenomeni non si presentano nella loro completezza, ma durante il loro processo evolutivo, come fenomeni continui in cui tutte le grandezze che vi compaiano variano progressivamente [...] e quello che più facilmente percepiamo sono le variazioni o incrementi di queste grandezze e le relazioni che fra queste variazioni intercedono [4]; nel caso in cui questo non accada, [4] afferma

> [...] noi tendiamo sempre allo studio per così dire *elementare*, (cioè *elemento per elemento*) del fenomeno, come alla *forma più semplice e comoda per analizzarlo* [...] noi otteniamo come risultati delle nostre osservazioni, delle relazioni fra incrementi e differenze finite delle grandezze che riteniamo atte a caratterizzare il fenomeno, ma poi immaginiamo di rendere infinitesimi questi incrementi *mantenendo fra loro queste relazioni o altre ancora più semplici che se ne deducono logicamente.*

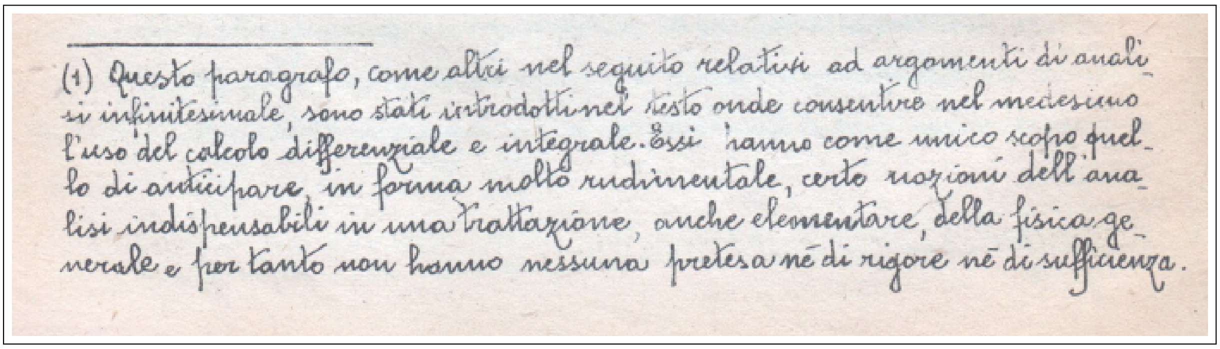
Il Bernardini [4] osserva inoltre che i due infinitesimi Δs e Δt ci interessano soltanto in quanto si considera il loro rapporto.

Il §12 a pag. 56 è dedicato ai *Differenziali.* A seguire riportiamo i punti essenziali che Bernardini [4] scrive in questo paragrafo per arrivare alla definizione di differenziale:

> 1. Se l'incremento Δf è un infinitesimo superiore o dello stesso ordine di Δx, allora il rapporto $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ si può scrivere come
>
> $$\Delta f = f'(x)\,\Delta x + \xi$$
>
> dove ξ è un infinitesimo di ordine superiore a Δx.
> 2. Il prodotto $f'(x)\,\Delta x$ rappresenta un valore *approssimato* dell'incremento Δf e l'approssimazione è tanto migliore grande quanto più piccolo è Δx.
> 3. Quando l'incremento Δx della variabile è infinitesimale, anche $f'(x)\,\Delta x$ è infinitesimale.
>
> Questo infinitesimo, denominato *differenziale* della funzione $f(x)$ e indicato con il simbolo:
>
> $$\mathrm{d}f = f'(x)\,\Delta x$$
>
> è caratterizzato dalla proprietà che la differenza fra esso e la variazione effettiva Δf della funzione è un infinitesimo d'ordine superiore rispetto alla variazione Δx della variabile indipendente.

Vediamo ora che cosa afferma il testo [4] sulle caratteristiche del differenziale:

- In tutti i calcoli nei quali compaiono variazioni infinitesime di una funzione, si possono sostituire a queste variazioni i corrispondenti differenziali.



(1) Questo paragrafo, come altri nel seguito relativi ad argomenti di anali-
si infinitesimale, sono stati introdotti nel testo onde consentire nel medesimo
l'uso del calcolo differenziale e integrale. Essi hanno come unico scopo quel-
lo di anticipare, in forma molto rudimentale, certe nozioni dell'ana-
lisi indispensabili in una trattazione, anche elementare, della fisica ge-
nerale e per tanto non hanno nessuna pretesa nè di rigore nè di sufficienza.

Figura 4.24. G. Bernardini [4], frammento di testo: avviso relativo all'introduzione di nozioni di analisi infinitesimale, p. 48.

- Per $f(x) = x$ si ha $\mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.
- Quindi $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ e $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, cioè la derivata è realmente il quoziente fra il differenziale della funzione e quello della variabile.

L'interpretazione delle ultime due relazioni è la seguente: il differenziale della funzione è proporzionale al differenziale della variabile per il fattore $f'(x)$. Da questa interpretazione, applicato al caso della relazione $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$, deduce che:

> [...] in un moto comunque vario, lo spazio infinitesimo, percorso in un *tempuscolo infinitesimo*, è a questo proporzionale.

Il §12, *Differenziali* si conclude con la seguente osservazione sui differenziali:

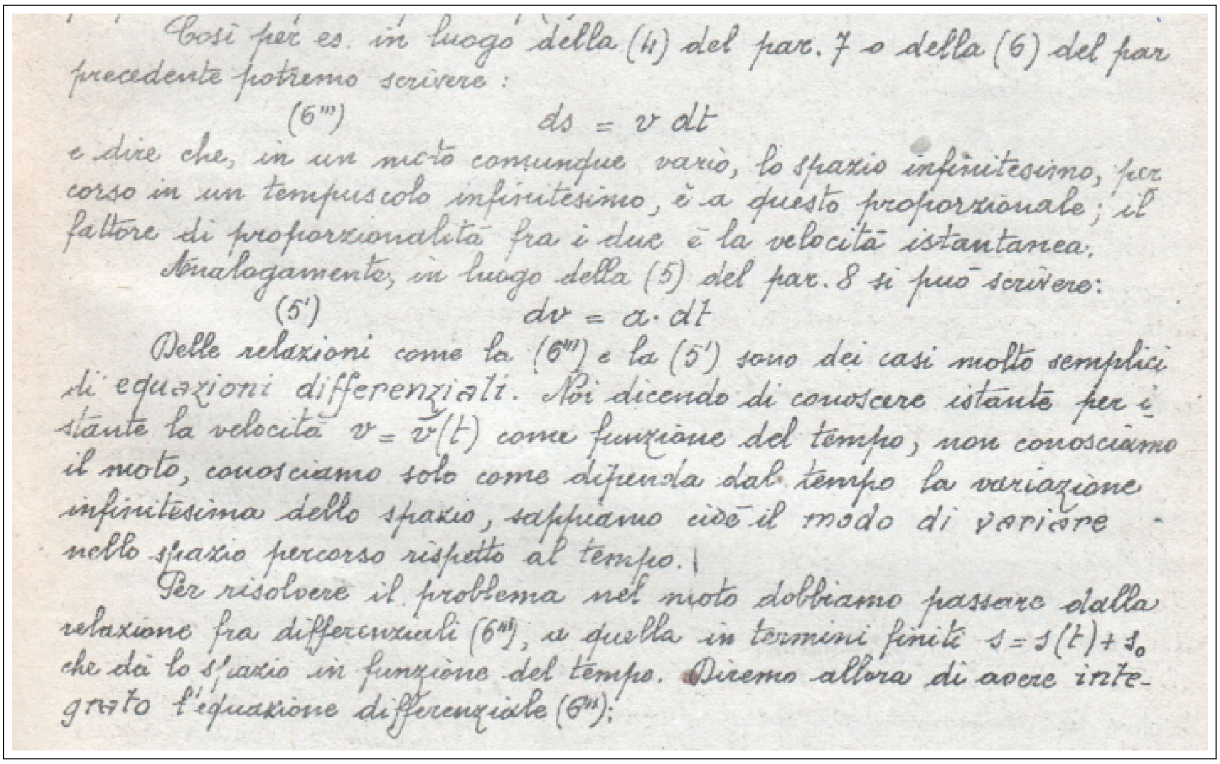
> Per risolvere il problema nel moto dobbiamo passare dalla *relazione fra differenziali* a quella in termini finiti $s = s(t) + s_0$ [...] diremo allora di aver integrato l'equazione differenziale.

Nel paragrafo §13 sugli *Integrali*, fa riferimento a *intervallini elementari* Δt_r, e di *elementi di spazio* $\Delta s_r = v(t_r)\,\Delta t_r$, (dove $v(t_r)$ è la velocità istantanea corrispondenti all'intervallo Δt_r, "come se in ognuno di questi intervalli il moto fosse uniforme" [4]). Inoltre aggiunge che lo spazio percorso dall'istante iniziale al tempo t, è dato *approssimativamente* dalla somma di tutti gli elementi di spazio Δs_r, e precisa che ogni prodotto rappresenta l'area del *rettangolo elementale*. Quindi la somma di ognuno di questi ci dà la *misura approssimativa* dello spazio percorso, che è espresso dall'area [4].

Nel libro di Bernardini, a differenza del libro di Valle (*si veda* §4.2.4.2 a pag. 112), sono presenti tutte le notazioni dell'*analisi infinitesimale* che, secondo l'autore, sono indispensabili per la comprensione di questo capitolo della Fisica. I paragrafi inseriti sono: §9, *Cenni sul calcolo delle derivate*, §11, *Infinitesimi*, §12, *Differenziali*, §13, *Cenno sul concetto di integrale* §14, *Cenni sul calcolo degli integrali*.

In una nota a piè di pagina (*si veda* fig. 4.24), Bernardini precisa che le note di Analisi Infinitesimale "sono state inserite per consentire l'uso del calcolo differenziale e integrale. Essi hanno come unico scopo quello di anticipare in forma molto rudimentale, certe nozioni dell'analisi indispensabili in una trattazione, anche elementare, della fisica generale e per tanto non hanno nessuna pretesa né di rigore né di sufficienza" [4].

Questa nota avvisa che la trattazione ha lo scopo di consegnare al lettore gli strumenti matematici che si incontrano nella cinematica, in cui, a discapito del rigore matematico, sono ammessi passaggi e manipolazioni che possono risultare più intuitivi per il raggiungimento della comprensione delle nozioni nel contesto della fisica.


Così per es. in luogo della (4) del par. 7 o della (6) del par precedente potremo scrivere:

(6''') $ds = v\,dt$

e dire che, in un moto comunque vario, lo spazio infinitesimo, percorso in un tempuscolo infinitesimo, è a questo proporzionale; il fattore di proporzionalità fra i due è la velocità istantanea.

Analogamente, in luogo della (5) del par. 8 si può scrivere:

(5') $dv = a \cdot dt$

Delle relazioni come la (6''') e la (5') sono dei casi molto semplici di equazioni differenziali. Noi dicendo di conoscere istante per istante la velocità $v = v(t)$ come funzione del tempo, non conosciamo il moto, conosciamo solo come dipenda dal tempo la variazione infinitesima dello spazio, sappiamo cioè il modo di variare nello spazio percorso rispetto al tempo.

Per risolvere il problema nel moto dobbiamo passare dalla relazione fra differenziali (6'''), a quella in termini finiti $s = s(t) + s_0$ che dà lo spazio in funzione del tempo. Diremo allora di avere integrato l'equazione differenziale (6''');

Figura 4.25. G. Bernardini [4], frammento di testo: Equazioni differenziali, §12, p. 51.

In fig. 4.25, vediamo come Bernardini [4] esprime il concetto di equazione differenziale, nel suo significato applicato alla risoluzione dei problemi di cinematica.

Il paragrafo §15, *Moto uniformemente accelerato*, inizia dal presupposto che l'accelerazione debba essere costante, quindi:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \equiv \text{cost}$$

$$\Longrightarrow \quad v\,(t) = \int_{t_0}^{t} a\,\mathrm{d}t + v_0 = a\,t + v_0$$

Constatando dunque che la velocità in questo tipo di moto è una funzione lineare nel tempo, svolge e rappresenta graficamente i due casi in cui v_0 ed a abbiano stesso segno o segno opposto (in cui la velocità descresce fino a raggiungere lo zero in $t^* = -\frac{v_0}{a}$). Il primo caso viene rappresentato su un grafico velocità–tempo, in cui $v\,(t)$ è rappresentato da una retta, mentre per trovare la posizione dobbiamo integrare nuovamente. Precisa quindi che graficamente, posto $s_0 = 0$, lo spazio percorso è dato dall'area del trapezio, ricavando:

$$s\,(t) = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Gli incrementi Δ sono visti come delle variazioni, che quando tendono a zero diventano *elementi* infinitamente piccoli (come $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta t = dift$).

Nella definizione di differenziale, troviamo che $\mathrm{d}f$ è un infinitesimo molto vicino a Δf, in quanto differiscono di un infinitesimo di ordine superiore. Per questo motivo possiamo sostituire le relazioni con il Δ, con il d, quando si tratta di variazioni infinitesimali, per cui valgono le stesse equazioni.

Il passaggio concettuale che ci interessa in ambito fisico, è di trovare la relazione tra incrementi e differenze finite delle grandezze che caratterizzano il fenomeno, per poi rendere infinitesimi questi incrementi mantenendo fra loro queste relazioni, che si siano "dedotte logicamente" [4]. Quindi il motivo per cui utilizziamo i differenziali, è perché in fisica i risultati delle osservazioni sono delle relazioni fra variazioni di grandezze che immaginiamo infinitesime, fino a diventare elementari, cioè semplici elementi.

Nel percorso di ragionamento che Bernardini [4] utilizza per descrivere la velocità istantanea, riconduce il moto uniformemente accelerato a un moto uniforme, considerando un intervallo di tempo sempre più piccolo in modo che v possa essere considerato costante ("prendendo intervalli di tempo $t' - t$ sempre più piccoli, i valori delle corrispondenti velocità media saranno sempre meno diversi l'uno dall'altro, e, da un certo intervallo di tempo sufficientemente piccolo in poi, avranno tutte, nel limite degli errori, uno stesso valore v^*" [4]).

Questo passaggio al limite è tipico della concezione di differenziale come *stima lineare*, la §4.2.1.4 a pag. 103, ma è contemporaneamente presente la considerazione degli elementi differenziali come piccoli infinitesimi.

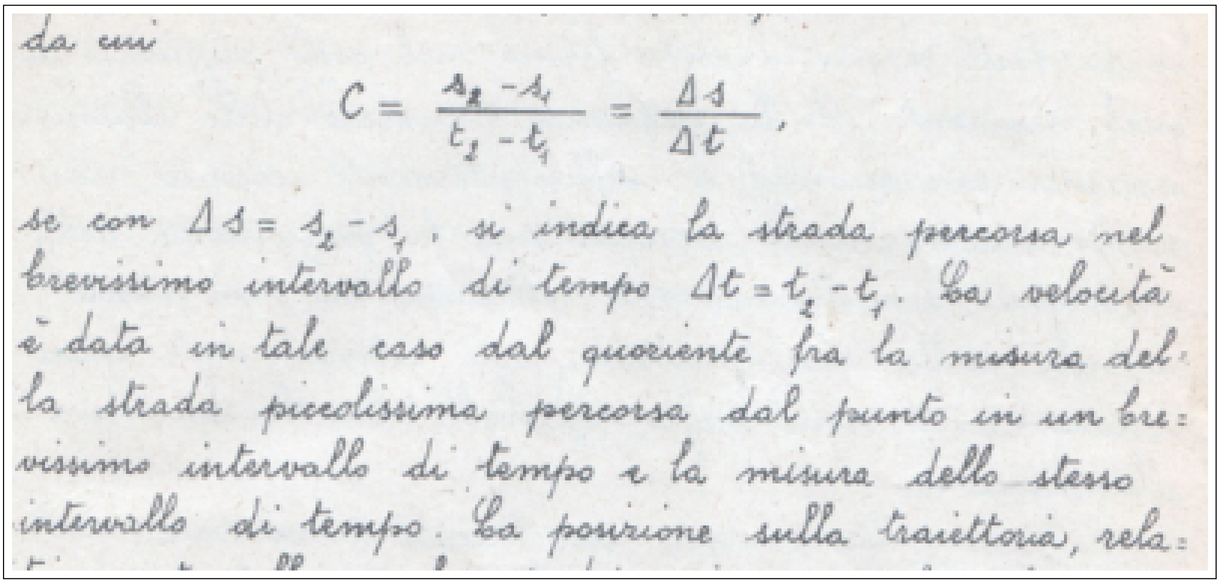
Attraverso il nuovo modello di Pietrocola, Karam, Uhden, Pospiech esposto nel paragrafo §1.4.2 a pag. 13, analizziamo il percorso di ragionamento che conduce alle equazioni del moto uniformemente accelerato. In generale i processi di matematizzazione e interpretazione sono in equilibrio all'interno del modello fisico-matematico, e quando necessario ricorre alle procedure tecnico matematiche, riferendosi ai paragrafi specializzati.

L'approccio didattico presenta dei tratti astratti, nel senso che le procedure tecnico-matematiche non sono in un percorso a parte, ma sono integrate all'interno dell'intero modello (fig. 4.39A a pag. 136). Le mosse e il diagramma corrispondente del modello per il libro di Bernardini, come per gli altri libri di fisica, saranno presentati in dettaglio nel paragrafo §4.2.5 a pag. 135.

Il libro di Bernardini ci ricorda che l'analisi infinitesimale è nata da una necessità di natura fisica, infatti rappresenta un esempio di didattica in cui la matematica ha un carattere strutturale, un fine fisico, e favorisce l'intuizione nell'apprendimento.

4.2.4.2 Giorgio Valle: Guida alle lezioni di Fisica Sperimentale (1935)

Giorgio Valle (1888–1953) nacque a Trieste dove trascorse la prima giovinezza e compì i primi studi. Nel 1907 iniziò gli studi superiori al Politecnico di Vienna e nel 1909 passò alla Facoltà Filosofica dell'Università ove conseguì la laurea e fu assunto quale assistente dal Lecher. Passata Trieste all'Italia e divenuto cittadino italiano iniziò nel 1919 la sua carriera di insegnante che dall'insegnamento medio doveva portarlo alla cattedra universitaria. La libera docenza ottenuta nel 1928 gli aprì la via all'incarico di insegnamento presso l'Università di Torino; per dieci anni fu ancora ordinario al Liceo di Asti e incaricato all'Università di Torino. Nel 1932 vinse il concorso per la cattedra di Fisica sperimentale di Ferrara; dopo un anno fu chiamato all'Università di Parma, infine, nel 1947 fu chiamato alla cattedra di Fisica Sperimentale dell'Università di Bologna ove si dedicò con entusiasmo, coraggio e successo alla ricostruzione dell'Istituto di Fisica,



da cui

$$C = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} ,$$

se con $\Delta s = s_2 - s_1$, si indica la strada percorsa nel brevissimo intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. La velocità è data in tale caso dal quoziente fra la misura della strada piccolissima percorsa dal punto in un brevissimo intervallo di tempo e la misura dello stesso intervallo di tempo. La posizione sulla traiettoria, rela:

Figura 4.26. G. Valle [53], frammento di testo: Velocità media nel moto uniforme, p. 31.

gravemente danneggiato dalla guerra e iniziò un programma di ricerche sugli argomenti a lui cari delle scariche nei gas e del magnetismo.

Consideriamo la parte di cinematica del suo testo *Guida alle lezioni di Fisica Sperimentale* [53]. La velocità media c nel moto uniforme rettilineo, è definita come

> "il quoziente tra la misura della strada *piccolissima* percorsa dal punto in un *brevissimo* intervallo di tempo, e la misura dello stesso intervallo di tempo"
>
> $$c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
>
> (*si veda* il passo riportato in fig. 4.26).

Nel paragrafo §13, *Moto rettilineo vario di un punto materiale. Velocità*, si susseguono diversi passaggi concettuali per introdurre la velocità istantanea. Il primo di questi è la seguente osservazione:

> "quando un corpo si muove con notevole velocità, noi non possiamo seguirlo distintamente con l'occhio, perché questo ritiene ogni impressione ricevuta per un certo tempo (circa $\frac{1}{30}$ s, tempo di persistenza delle immagini sulla retina)" [53].

Per comprendere cosa significa osservare un punto in una traiettoria di un corpo in moto, ci propone di illuminare il corpo con una luce intermittente, dove la frequenza dell'illuminazione è l'ampiezza dell'intervallo di tempo Δt. Il passaggio successivo consiste nel far tendere a zero questa frequenza

> "si potrà dunque pensare anche che si riduca ad essere *minore di qualsiasi intervallo finito*, per quanto piccolo, ossia ch'esso diventi, come si suol dire *infinitesimo* o, in altre parole, *che tende a zero*" [53].

Queste parole indicano, per Valle, il passaggio da Δt a $\mathrm{d}t$. Diventando Δt infinitesimo, deve diventare naturalmente infinitesima anche la distanza Δs, ossia $\Delta s = \mathrm{d}s$.

Trattandosi di un moto uniforme, anche il limite del quoziente $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ risulterà uguale al valore costante della velocità, simbolicamente:

$$u = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = c$$

Siamo arrivati a capire cosa significa "fare il limite", ma stiamo ancora parlando di velocità istantanea nel moto uniforme. Ora considera il moto vario, come il moto di un punto materiale che non sia uniforme, con l'obiettivo di trovare la legge del moto $s\,(t)$.

Prima di arrivare al concetto di velocità istantanea nel moto vario, Valle [53] compie un altro passaggio concettuale:

> in un moto vario questo quoziente, (ossia $\frac{\Delta s}{\Delta t}$), assumerà valori differenti [...] a seconda dell'ampiezza dell'intervallo di tempo Δt [...] diminuendo quest'ultimo fino a farlo tendere a zero [...] si faranno man mano meno diverse fra di loro e infine al limite *per* Δt *infinitesimo*, il moto nell'immediato intorno di quel punto non potrà distinguersi da un moto uniforme rettilineo di velocità [53]
>
> $$u = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$
>
> Soltanto questa velocità sarà diversa nei vari istanti di tempo [...] per questo si chiama velocità istantanea ed è una funzione del tempo.
>
> $$u = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f'\,(t)\,, \qquad \text{derivata prima di } f\,(t)$$

Il passaggio da moto uniforme a vario è così strettamente connesso a t e a quel passaggio al limite "*idealmente effettuato*" [53]. Mentre osserva che la natura di $u = f'\,(t)$ dipende soltanto dalla "legge del movimento, ossia la funzione $s = f\,(t)$". Questa espressione è poi riconsiderata nella seguente parte di testo (*si veda* il brano riportato in fig. 4.27 a pag. 115):

> Nel moto vario la velocità è, ([...] per contro [...] rispetto l'uniforme), una funzione del tempo; essa rappresenta la velocità che caratterizzerebbe ad ogni istante il moto compiuto lungo il corrispondente tratto infinitesimo della traiettoria considerato uniforme. Essendo $u = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ la lunghezza di questo tratto infinitesimo si può esprimere con
>
> $$\mathrm{d}s = u\,\mathrm{d}t = f'\,(t)\;\mathrm{d}t$$

Nel paragrafo §14, *Moto rettilineo uniformemente vario di un punto materiale* si trova la definizione di accelerazione. Si inizia osservando

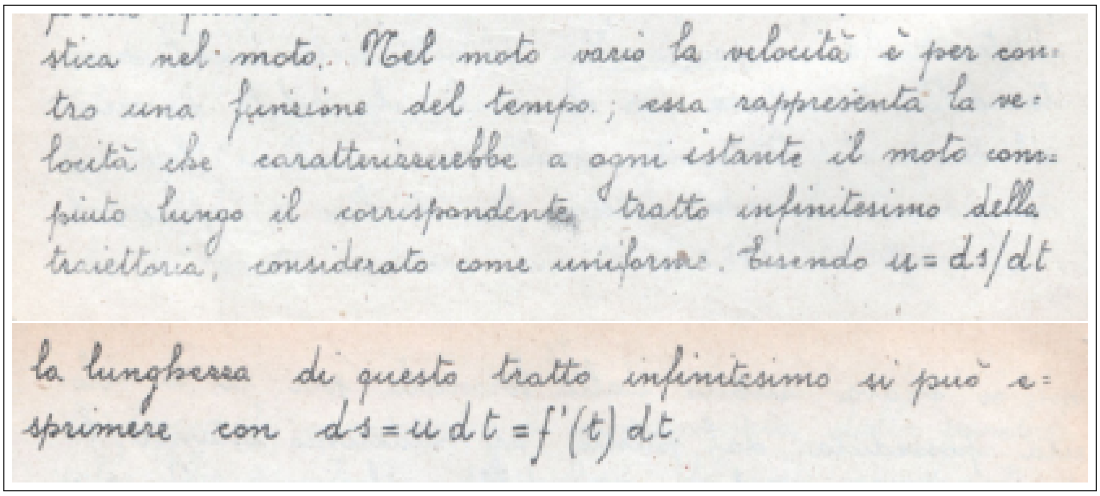
> In esso, (nel moto uniformemente vario), la strada, anziché una funzione lineare, come nel moto uniforme, è una funzione quadratica nel tempo [53]

come possiamo vedere dall'espressione:

$$s = s_0 + c\,t + p\,t^2$$

Da questa considerazione ricaverà in due passaggi la legge oraria (in [53] "legge di movimento") e il significato dell'accelerazione:

1. Derivando rispetto al tempo, si trova che $u = c + 2p\,t = c + a\,t$, chiamerà il fattore di proporzionalità $2p = a$ accelerazione, come la "variazione di velocità nell'unità di tempo".


stica nel moto. Nel moto vario la velocità è per con-
tro una funzione del tempo; essa rappresenta la ve-
locità che caratterizzerebbe a ogni istante il moto com-
piuto lungo il corrispondente tratto infinitesimo della
traiettoria, considerato come uniforme. Essendo $u = ds/dt$

la lunghezza di questo tratto infinitesimo si può e-
sprimere con $ds = u\,dt = f'(t)\,dt$

Figura 4.27. G. Valle [53], frammento di testo: L'elemento infinitesimo ds, pp. 34–35.

2. Si ricava che $p = \frac{a}{2}$, da cui si ottiene l'espressione per s, che chiama "legge di movimento".

$$s = s_0 + c\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Valle [53] ossera che le 3 costanti possono essere interpretate come:
1. La posizione iniziale $s_0 = s\,(t = 0)$.
2. La velocità all'istante $t = 0$ (ricavata dall'equazione $u = c + a\,t$).
3. La metà dell'accelerazione.

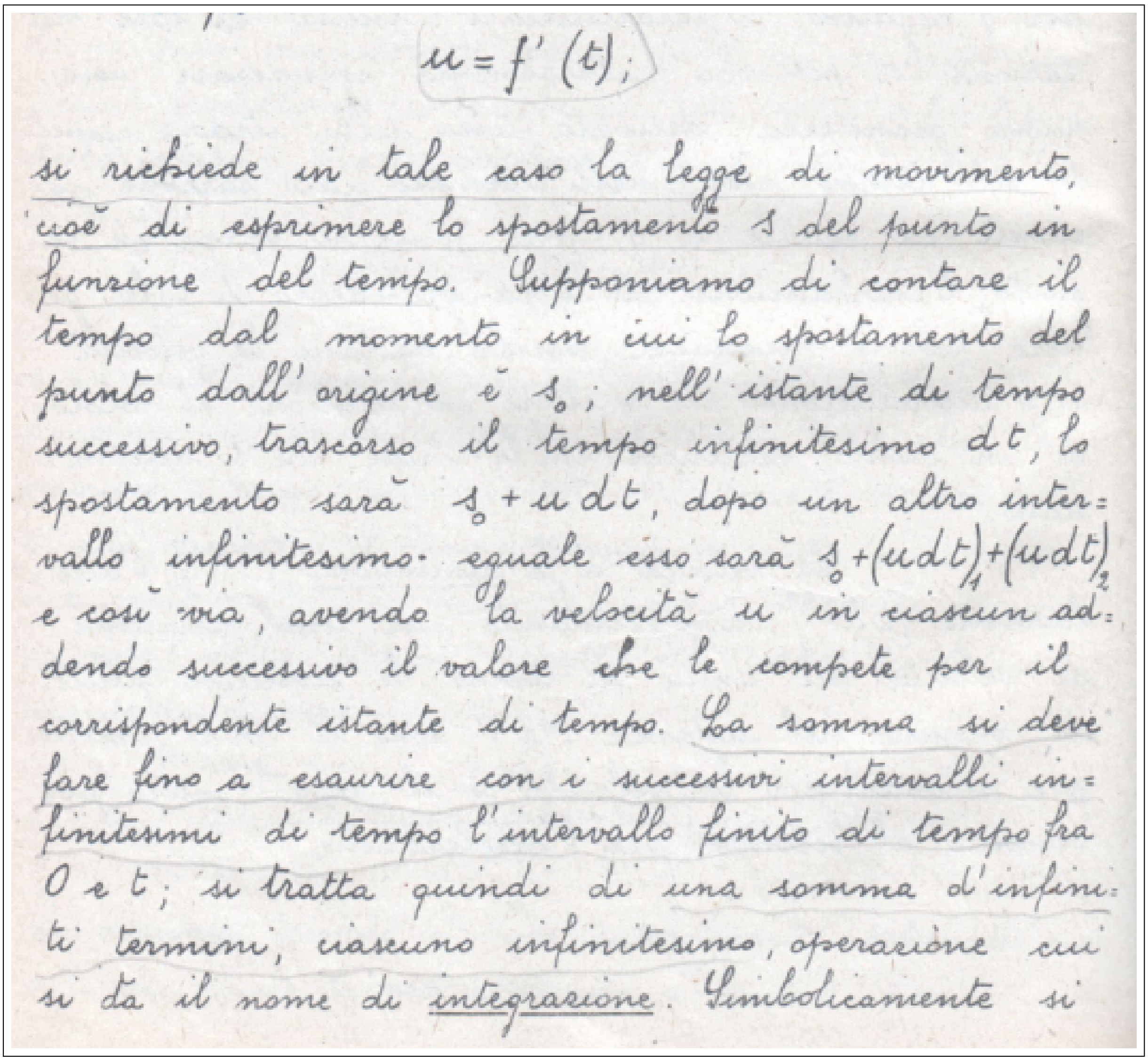
Nel paragrafo §16, *Deduzione della legge del moto dalla legge di variazione della velocità* si introduce il concetto di integrale. L'operazione di *integrazione*, è scritta simbolicamente come

$$s = s_0 + \int_0^t u\,\mathrm{d}t$$

Prima di scrivere questa espressione, il concetto di integrale è così costruito (*si veda* il passo riportato in fig. 4.28 a pag. 116):

> Supponiamo di contare il tempo dal momento in cui lo spostamento del punto all'origine è s_0; nell'istante di tempo successivo, trascorso il tempo infinitesimo dt, lo spostamento sarà $s_0 + u\,\mathrm{d}t$, dopo un altro intervallo infinitesimo uguale sarà $s_0 + (u\,\mathrm{d}t)_1 + (u\,\mathrm{d}t)_2$ e così via, avendo la velocità in ciascun addendo successivo il valore che le compete per il corrispondente intervallo di tempo.
>
> La somma si deve fare fino a esaurire con i successivi intervalli infinitesimi di tempo l'intervallo finito di tempo fra 0 e t; si tratta quindi di una somma d'infiiniti termini, ciascuno infinitesimo, operazione cui si dà il nome di integrazione. Simbolicamente si scrive
>
> $$s = s_0 + \int_0^t u\,\mathrm{d}t$$

Consideriamo la fig. 4.29 a pag. 117, in cui considera il caso in cui la funzione integranda sia la legge di variazione della velocità $u = f'(t)$. Geometricamente il prodotto tra l'elemento infinitesimo dt (il quale rappresenta un segmento dell'ascissa), moltiplicato per $u = f'(t)$, rappresenta l'area di un rettangolo infinitesimo. Lo spostamento $s_2 - s_1$ nell'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è dato dall'integrale definito, ed rappresentato dall'area



$$u = f'(t);$$

si richiede in tale caso la legge di movimento, cioè di esprimere lo spostamento s del punto in funzione del tempo. Supponiamo di contare il tempo dal momento in cui lo spostamento del punto dall'origine è s_0; nell'istante di tempo successivo, trascorso il tempo infinitesimo dt, lo spostamento sarà $s_0 + u\,dt$, dopo un altro intervallo infinitesimo eguale esso sarà $s_0+(u\,dt)_1+(u\,dt)_2$ e così via, avendo la velocità u in ciascun addendo successivo il valore che le compete per il corrispondente istante di tempo. La somma si deve fare fino a esaurire con i successivi intervalli infinitesimi di tempo l'intervallo finito di tempo fra 0 e t; si tratta quindi di una somma d'infiniti termini, ciascuno infinitesimo, operazione cui si dà il nome di integrazione. Simbolicamente si

Figura 4.28. G. Valle [53], frammento di testo: il concetto di integrale, p. 42.

sotto la curva di $u\,(t)$, che "*si può considerare essere formata dagli infiniti rettangoli infinitesimi tra t_1 e t_2, ciascuno dei quali è misurato dal corrispondente elemento $u\,\mathrm{d}t$ del nostro integrale definito* [...]" [53].

Seguendo diversi passaggi concettuali sul processo di integrazione (riferiti alla fig. 4.29 a pag. 117), il Valle [53] scrive che

$$s - s_0 = f\,(t) - f\,(0)\,, \qquad \text{dove } f\,(t) = g\,(t) + C$$
$$s = s_0 + g\,(t) - g\,(0)$$

Si passa poi a due esempi:

1. Il caso in cui la velocità è una funzione lineare del tempo.
2. Il caso in cui la velocità è una funzione decrescente esponenzialmente col trascorrere del tempo.

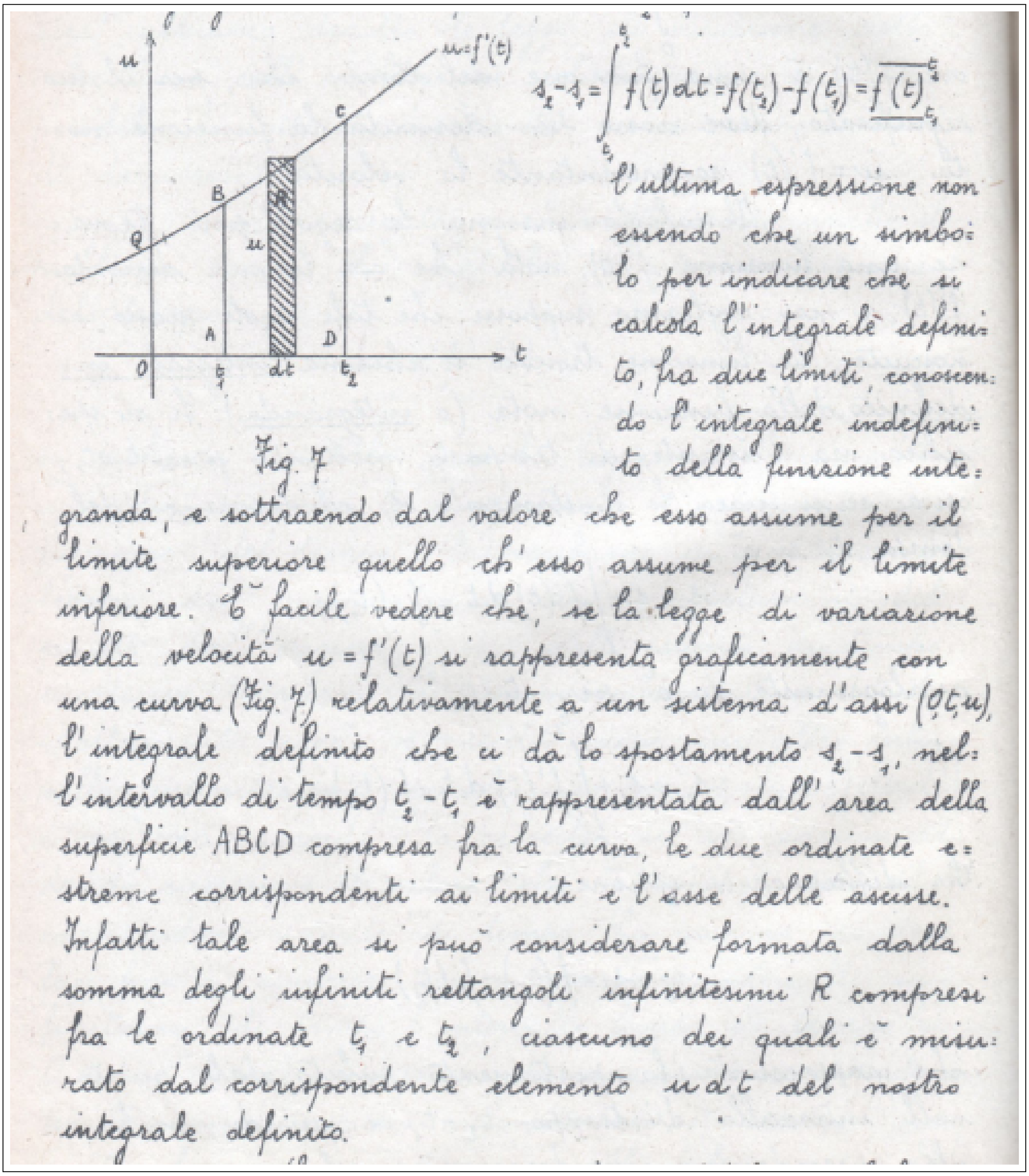


Fig. 7

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = f(t_2) - f(t_1) = \overline{f(t)}_{t_1}^{t_2}$$

l'ultima espressione non essendo che un simbo: lo per indicare che si calcola l'integrale defini: to, fra due limiti, conoscen: do l'integrale indefini: to della funzione inte: granda, e sottraendo dal valore che esso assume per il limite superiore quello ch'esso assume per il limite inferiore. È facile vedere che, se la legge di variazione della velocità $u = f'(t)$ si rappresenta graficamente con una curva (Fig. 7) relativamente a un sistema d'assi (O, t, u), l'integrale definito che ci dà lo spostamento $s_2 - s_1$, nel: l'intervallo di tempo $t_2 - t_1$ è rappresentata dall'area della superficie ABCD compresa fra la curva, le due ordinate e: streme corrispondenti ai limiti e l'asse delle ascisse. Infatti tale area si può considerare formata dalla somma degli infiniti rettangoli infinitesimi R compresi fra le ordinate t_1 e t_2, ciascuno dei quali è misu: rato dal corrispondente elemento $u\,dt$ del nostro integrale definito.

Figura 4.29. G. Valle [53], frammento di testo: significato geometrico dell'integrale di u, p. 44.

Nel primo caso $u = c + a\,t$, allora si ha

$$g(t) = \int (c + a\,t)\,\mathrm{d}t = c\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

per cui $g(0) = 0$, e $f(t) = s = s_0 + g(t)$, perciò

$$s = s_0 + c\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Anche nel paragrafo §17, *Deduzione della legge del moto dalla legge di variazione dell'accelerazione*, mediante i procedimenti di integrazione, il Valle [53] ricava le leggi del moto, noto l'andamento dell'accelerazione per le diverse situazioni fisiche.

Osservando il libro di Valle [53], (come pure quello di Bernardini [4]), nei vari capitoli quello che salta all'occhio è il numero esiguo di formule, mentre il testo occupa quasi tutte le pagine (trascritte a mano). Nel testo è evidente quanto spazio è dedicato per la creazione dei concetti della cinematica, e il valore delle parole necessarie a introdurre nuove conoscenze. I passaggi analitici sono in questo modo affiancati (e in questo caso preceduti) dalla costruzione concettuale delle nozioni della cinematica.

A partire dall'introduzione della velocità media nel moto uniforme rettilineo, troviamo parole che si ripetono nel testo: *brevissimo* intervallo di tempo, *piccolissima* strada percorsa.

Le parole utilizzate sono strettamente connesse all'immagine mentale, che si sviluppa passaggio dopo passaggio nella creazione di un concetto. Possiamo osservare che da un elemento preso dalla realtà vissuta si arriva alla costruzione ideale, teorica, di passaggio al limite, che ci incoraggia ad effettuare mentalmente. Da qualcosa di *piccolissimo* si arriva all'idea di *infinitesimo* come oggetto tendente a zero, un concetto matematico a cui possiamo dare un significato fisico da associare alla nostra realtà personale. Qualcosa che possiamo osservare diventa una funzione matematica che varia e ha una "legge", dipendente da una variabile, che ne connota l'andamento.

Passando al paragrafo *Moto rettilineo vario di un punto materiale. Velocità*, vediamo dalle prime frasi che l'argomento della velocità istantanea è introdotto attraverso l'osservazione della realtè dal punto di vista personale. La ricerca della comprensione concettuale della velocità istantanea passa dalla realtà, proprio dai nostri occhi, per condurci a comprendere l'essenza del moto uniformemente vario.

L'accelerazione è definita come la variazione della velocità nell'unità di tempo ed è ricavata dall'equazione del moto: a è presentata come il fattore di proporzionalità nell'espressione per la velocità ottenuta derivando $s\,(t)$, partendo dal presupposto che sia una relazione quadratica nel tempo, non lineare; non viene tuttavia menzionato l'elemento $\mathrm{d}v$, e soprattutto non si parla di differenziazione ma di derivata rispetto al tempo, in un momento in cui, invece, avrebbe potuto valorizzare il significato di equazione differenziale.

In questo testo il differenziale diventa necessario quando parliamo di grandezze che diventano piccolissime (un *brevissimo* Δt, una *piccolissima* strada).

Nel brano riportato in fig. 4.27 a pag. 115, Valle [53] descrive l'elemento $\mathrm{d}s$, come quel *tratto infinitesimo, così piccolo che la traiettoria può essere considerata uniforme istante per istante* (infatti abbiamo visto anche che il tratto di strada diventa piccolissimo quando si considera un brevissimo istante di tempo). Nonostante questa idea si avvicina a quella caratteristica di differenziale come *stima lineare*. Né la linearità né il concetto di approssimazione vengono enfatizzate.

Inoltre quando Valle [53] scrive la formula del limite (nel moto uniforme), è singolare la scelta di esprimere

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

da cui si potrebbe dedurre[6]:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

Questo ci dice che la differenza tra "Δ" e "d" è solo il fatto di considerare un intervallo "grande" e un intervallo "molto piccolo".

Nella costruzione del concetto di integrale riportato in fig. 4.28 a pag. 116, si espone il fatto che una somma di infiniti termini infinitesimali produca un intervallo finito. Non si parla però di approssimazione, ma, implicitamente, del fatto che il risultato finale sia finito ed esatto. L'elemento differenziale dt che compare nell'integrale, rappresenta quell'elemento infinitesimale che, moltiplicato per u, determina l'area del rettangolo infinitesimale il quale, nella somma degli infiniti termini conduce al calcolo dell'area finita.

In queste pagine si incontra più volte l'ambiguità di *piccolo* e di *infinitamente piccolo*, associato al differenziale. Inoltre abbiamo visto che ds è un Δs infinitesimale, prodotto da un brevissimo istante Δt, per cui i d sono dei Δ infinitamente piccoli. Queste caratteristiche descrivono una concezione di differenziale come *incremento infinitesimale*, la numero (§4.2.1.2 a pag. 102). Nel testo di Valle [53], infatti, osserviamo che si usano i differenziali tutte le volte che si tratta di considerare un brevissimo istante, un piccolissimo spazio, o, in generale, quando si trattano delle grandezze molto piccole.

Per quanto riguarda il percorso di ragionamento che conduce alle equazioni del moto, i passaggi sono principalmente all'interno dell'area tecnico-matematica (fig. 4.39B a pag. 136.). Da una parte il testo [53] spiega che cosa rappresenta geometricamente un integrale, e che cosa significa quando la funzione è la velocità. Dopodiché si affida ai passaggi matematici per ricavare le equazioni del moto, risolvendo l'integrale. Per questo motivo l'approccio è prettamente astratto, i collegamenti tra il significato fisico e i passaggi tecnico matematici sono assenti e lasciati completamente da intuire.

4.2.4.3 Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini: Fisica 1, Meccanica e Termodinamica (1998)

Corrado Mencuccini, laureato in fisica a Roma, ha svolto attività di ricerca sperimentale nei settori della fisica delle particelle elementari e della radiazione di sincrotrone e ha diretto i Laboratori Nazionali di Frascati dell'INFN prima di passare, nel 1976, all'Università, inizialmente presso la "Federico II" di Napoli e poi presso la facoltà di ingegneria dell'Università di Roma "La Sapienza", dove ha ricoperto la cattedra di fisica generale, afferendo al dipartimento di energetica.

Giuseppe Vittorio Silvestrini, conseguita nel 1953 la maturità classica presso il liceo Torricelli di Faenza, si laureò con lode nel 1957 in fisica a Pisa, allievo della Scuola Normale Superiore. Dal 1972 è ordinario di fisica generale presso l'Università Federico II di Napoli, alla facoltà di ingegneria. Ha alle spalle una lunga e prestigiosa attività di ricerca in vari settori della fisica, dalle particelle elementari all'energetica, all'ottimizzazione e pianificazione di sistemi complessi.

[6]Nel caso sottinteso si considera comunque un intervallo Δt tale per cui il moto è uniforme, ma concettualmente si riferisce con Δt e dt a una "ampiezza" dell'incremento, in un caso finita e nell'altro infinitesimale: questa espressione ci dice che il rapporto tra spazio e tempo, in entrambi i casi, darà sempre come risultato u.

Nella prefazione del testo *Fisica 1, Meccanica e Termodinamica* [30] si parla dell'approccio e delle scielte didattiche. In particolare possiamo identificare due argomenti che puntano a fornire informazioni riguardo il testo:

1. Il libro si presenta come un testo completo degli strumenti matematici dell'analisi propedeutici in fisica. Scrive: "abbiamo preferito rendere questo libro per quanto possibile autosufficiente, includendo in esso, via via che servono, le necessarie nozioni di matematica", inoltre "introducono agli studenti la motivazione storica e applicativa di concetti che nei corsi di matematica vengono poi svolti con una generalità che ne incrementa l'efficacia, ma anche l'astrattezza" [30].
2. Riguardo l'approccio assunto dal testo [30], gli autori si riservano di "porre particolare cura nel far procedere il ragionamento lungo la logica induttiva-deduttiva caratteristica del metodo scientifico", e di fornire le basi metodologiche (oltre al testo, inserisce esempi ed esercizi, con suggerimenti in fondo a ogni capitolo), indispensabili per sapersi muovere all'interno delle discipline tecnico-scientifiche.

Il secondo capitolo del Mencuccini Silvestrini [30] è denominato *Cinematica del punto materiale*, ed è suddiviso in diversi paragrafi sugli elementi della cinematica:

§ II 1. *La Posizione*

§ II 5. *La legge oraria di un punto materiale*

§ II 6. *La velocità media*

§ II 9. *Derivata dei vettori. Velocità ed accelerazione istantanee*

§ II 10. *Moti piani su traiettoria qualsiasi*

§ II 11. *Dalla accelerazione alla legge oraria*

e in diversi altri paragrafi sugli strumenti matematici ritenuti necessari per la comprensione del capitolo § II:

§ II 2. *I vettori: definizione*

§ II 3. *Alcune definizioni relative alle matrici*

§ II 4. *Operazioni sui vettori*

§ II 7. *I limiti di una funzione*

§ II 8. *La derivata*

Iniziamo l'analisi del testo [30] riportandio i passaggi concettuali principali, che si sviluppano all'interno del capitolo § II.

Nel paragrafo § II 6, sulla *Velocità media*, si introduce la velocità istantanea (*si veda* il brano riportato in fig. 4.30 a pag. 121), affermando

> Ha evidentenemente senso chiedersi quale sia la rapidità del movimento in ogni preciso istante [...] Tuttavia, [...] si presenta una difficoltà: la velocità istantanea dovrebbe essere la velocità calcolata su un intervallo Δt pari a zero, ma per $\Delta t = 0$ il rapporto $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ non è definito. Il superamento di queste difficoltà richiede qualche approfondimento di carattere matematico [...]

Il paragrafo termina con l'introduzione all'idea di limite (che sarà argomento del paragrafo successivo), utilizzando un esempio[7]: se $x = 2t^2$, allora la velocità media in un intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ sarà:

$$\overline{v}_x = \frac{2\,(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1}$$

[7] L'esempio completo si trova in fig. 4.30 a pag. 121

... ha senso chiedersi quale fosse la sua velocità nell'istante preciso in cui lo scontro è avvenuto. Tuttavia, se per definire (calcolare) la velocità istantanea ci riferiamo alla [II.25], si presenta una difficoltà: la velocità istantanea dovrebbe essere la velocità calcolata su un intervallo Δt pari a zero; ma per $\Delta t = 0$ il rapporto $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ non è definito (non è definito il rapporto se il denominatore è zero). Il superamento di questa difficoltà richiede qualche approfondimento di carattere matematico cui dedicheremo i prossimi due paragrafi.

Esempio

E.II.10. *Un'automobile compie un percorso di andata di 50 km in un'ora e poi, senza sostare, torna al punto di partenza, lungo la stessa strada dell'andata, in 2 ore.*

Si vuole conoscere (in modulo):

a) la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ h;

b) la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 0$ e $t_2 = 3$ h;

c) la velocità istantanea dell'auto durante l'intero percorso.

a) $\bar{v}(0-1) = \frac{50 \text{ km}}{(1-0) \text{ h}} = 50$ km/h.

b) $\bar{v}(0-3) = \frac{100 \text{ km}}{(3-0) \text{ h}} = 33.3$ km/h

c) occore guardare continuamente il tachimetro.

N.B. Essendo $\Delta \vec{r} = 0$, la velocità media vettoriale sul percorso andata-ritorno è nulla.

Prima di chiudere questo paragrafo vogliamo fare ancora qualche considerazione critica sul concetto di velocità media e di velocità istantanea, facendo riferimento all'esempio E.II.9.

Consideriamo prima la componente $\bar{v}_y$ della velocità media. Per $t_2 = t_1$, la quantità $\bar{v}_y = \frac{2(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)}$ non può essere calcolata, essendo nullo il denominatore. Tuttavia, per qualunque valore di $\Delta t = t_2 - t_1$ diverso da zero (comunque piccolo sia $\Delta t \neq 0$), si ha sempre $\bar{v}_y = \frac{2(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)} = 2$; è quindi ragionevole assumere che anche la velocità istantanea sia pari a 2 m/s.

Vediamo ora la componente $\bar{v}_y = \frac{2(t_2^2 - t_1^2)}{(t_2 - t_1)}$. Ancora una volta, per $\Delta t = t_2 - t_1 = 0$, il calcolo non può essere fatto. Per $t_2 - t_1 \neq 0$ (comunque piccolo sia $\Delta t \neq 0$), si può scrivere:

$$\bar{v}_y = \frac{2(t_2^2 - t_1^2)}{t_2 - t_1} = \frac{2(t_2 + t_1)(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = 2(t_2 + t_1).$$

Quando t_2 si avvicina a t_1, $\bar{v}_y = 2(t_2 + t_1)$ si avvicina a $4t_1$; e viene dunque naturale assumere questo come valore della velocità istantanea. Questi ragionamenti verranno meglio precisati nei prossimi paragrafi, in modo da sviluppare dei metodi analitici utili al calcolo della velocità istantanea (e di altre analoghe grandezze fisiche) in tutti i casi di interesse.

Figura 4.30. C. Mencuccini e V. Silvestrini [30], frammento di testo: Introduzione al concetto di limite e di velocità istantanea, p. 49.

mentre la velocità istantanea, quindi per $t_2 = t_1$ "non può essere calcolata essendo nullo il denominatore" [30]. Poi aggiunge:

> Tuttavia, per qualunque valore di $\Delta t = t_2 - t_1$ diverso da zero (comunque piccolo sia $\Delta t \neq 0$), si può scrivere
>
> $$\overline{v}_x = \frac{2\left(t_2^2 - t_1^2\right)}{t_2 - t_1} = \frac{2\left(t_2 + t_1\right)\left(t_2 - t_1\right)}{t_2 - t_1} = 2\left(t_2 + t_1\right)$$
>
> Quando t_2 si avvicina a t_1, $\overline{v}_x = 2\left(t_2 + t_1\right)$ si avvicina a $4t_1$; e viene dunque naturale assumere questo come valore della velocità istantanea.

Come preannunciato il paragrafo successivo è sui *Limiti di una funzione*. Tra la definizione di limite e vari teoremi vi è anche la definizione di *Infinitesimo*, come la funzione $f\left(x\right)$ che ha in x_0 limite uguale a zero: $\lim_{x \to x_0} f\left(x\right) = 0$.

Segue il paragrafo sulle derivate, definite come il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \stackrel{\text{def}}{=} f'\left(x\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Inoltre specifica, in seguito, quale sia il significato geometrico e il significato fisico della derivata (*si veda* il frammento di testo riportato in fig. 4.31 a pag. 123).

Riguardo all'interpretazione grafica, il testo [30] afferma che, essendo il significato geometrico del rapporto incrementale la tangente trigonometrica della corda AB, quello della derivata sarà la tangente goniometrica della tangente geometrica alla curva, poiché, quando $\Delta x \to 0$, il punto B tende al punto A. Il significato fisico cambia a seconda del significato fisico delle variabili, ad esempio se x è il tempo, ed y una coordinata, per cui $y = f\left(x\right)$ è una legge oraria, allora la derivata $f'\left(x\right)$ è una velocità istantanea.

Nel § II 9, il Mencuccini Silvestrini [30] definisce come velocità istantanea il limite, per $\Delta t \to 0$, della velocità media, calcolata sull'intervallo Δt, ossia "quel vettore che si ottiene derivando il vettore posizione"

$$\vec{v}\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}\left(t + \Delta t\right) - \vec{r}\left(t\right)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

Esprimendo i vettori mediante le componenti cartesiane, il testo [30] scrive:

$$\vec{r}\left(t\right) = \big(x\left(t\right), y\left(t\right), z\left(t\right)\big)$$
$$\vec{v}\left(t\right) = \big(x'\left(t\right), y'\left(t\right), z'\left(t\right)\big)$$

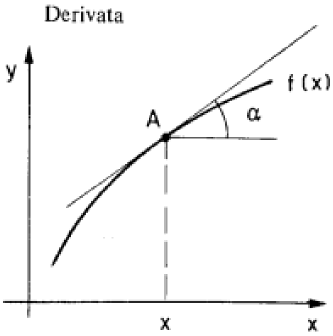
Analogamente definisce l'accelerazione come quella grandezza (vettoriale) che descrive la rapidità con cui cambia la velocità, ossia la derivata della velocità

$$a_x\left(t\right) = v_x'\left(t\right) = x''\left(t\right)$$
$$a_y\left(t\right) = v_y'\left(t\right) = y''\left(t\right)$$
$$a_z\left(t\right) = v_z'\left(t\right) = z''\left(t\right)$$

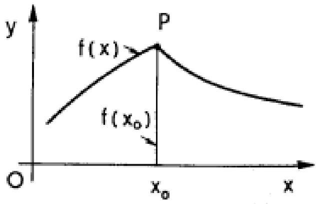
Il § II 11 si occupa del problema inverso, trovare le leggi del moto nota l'accelerazione. Per la risoluzione di questo problema, utilizza e definisce il concetto di primitiva $F\left(x\right)$ di $f\left(x\right)$ e di integrale definito[8], nella sua formulazione matematica generale, per poi applicarlo al problema specifico in cui sia nota l'accelerazione e si cerca la velocità (quindi per $f\left(x\right) = a\left(t\right)$, e $F\left(x\right) = v\left(t\right)$).

[8] Il testo rimanda le tecniche di integrazione al § IV 2.

Derivata



Funzione derivabile



Il significato geometrico del rapporto incrementale appare evidente dalla figura: se le unità di misura delle lunghezze sull'asse x e y sono fra di loro uguali, il rapporto incrementale rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo che la corda AB forma con l'asse delle x.

Evidentemente, il rapporto incrementale è funzione sia di x che di x_1; ovvero, esso è funzione sia della variabile x che dell'incremento Δx. Per ogni fissato valore di x, il rapporto incrementale può essere calcolato per qualunque valore di Δx, escluso che per $\Delta x = 0$: in corrispondenza di $\Delta x = 0$ il rapporto incrementale non è definito.

Tuttavia si può cercare il limite del rapporto incrementale per Δx che tende a zero; tale limite, *se esiste* finito, è detto *derivata* della funzione $f(x)$ e viene indicato come $f'(x)$ o come $\dfrac{df}{dx}$:

DERIVATA

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) \equiv \frac{df}{dx} \qquad \text{[II.29]}$$

Il significato geometrico della derivata segue facilmente dal significato geometrico del rapporto incrementale: quando $\Delta x \to 0$, il punto B tende ad A, e la corda AB diviene la tangente geometrica alla curva nel punto A: se le lunghezze sui due assi vengono misurate nelle stesse unità, la derivata rappresenta la tangente trigonometrica $\operatorname{tg} \alpha$ dell'angolo α che la tangente geometrica alla curva forma con la direzione dell'asse delle x.

Il significato fisico della derivata è ovviamente diverso a seconda del significato fisico delle variabili: se ad esempio la $y = f(x)$ è una legge oraria (la y è una coordinata; la x è il tempo), allora la derivata $f'(x)$ non è altro che una velocità istantanea.

Se una funzione $f(x)$ ammette derivata in x_0 (il limite del rapporto incrementale esiste finito in x_0), la $f(x)$ si dice *derivabile* in x_0; se è derivabile in ogni punto dell'intervallo, si dice derivabile nell'intervallo. Va notato che quando $\Delta x \to 0$, il denominatore del rapporto incrementale tende a zero; affinché il limite esista e sia finito, è necessario che anche il numeratore tenda a zero: e cioè che $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Condizione necessaria affinché una funzione sia derivabile è che essa sia continua. La condizione non è invece sufficiente. Una funzione il cui grafico presenti una angolosità (vedi figura) è continua in quel punto, ma non è derivabile (non è definita la tangente geometrica alla curva in quel punto).

Figura 4.31. C. Mencuccini e V. Silvestrini [30], frammento di testo: significato della derivata, p. 54.

Conoscendo le funzioni del tempo che esprimono la forma cartesiana dell'accelerazione:

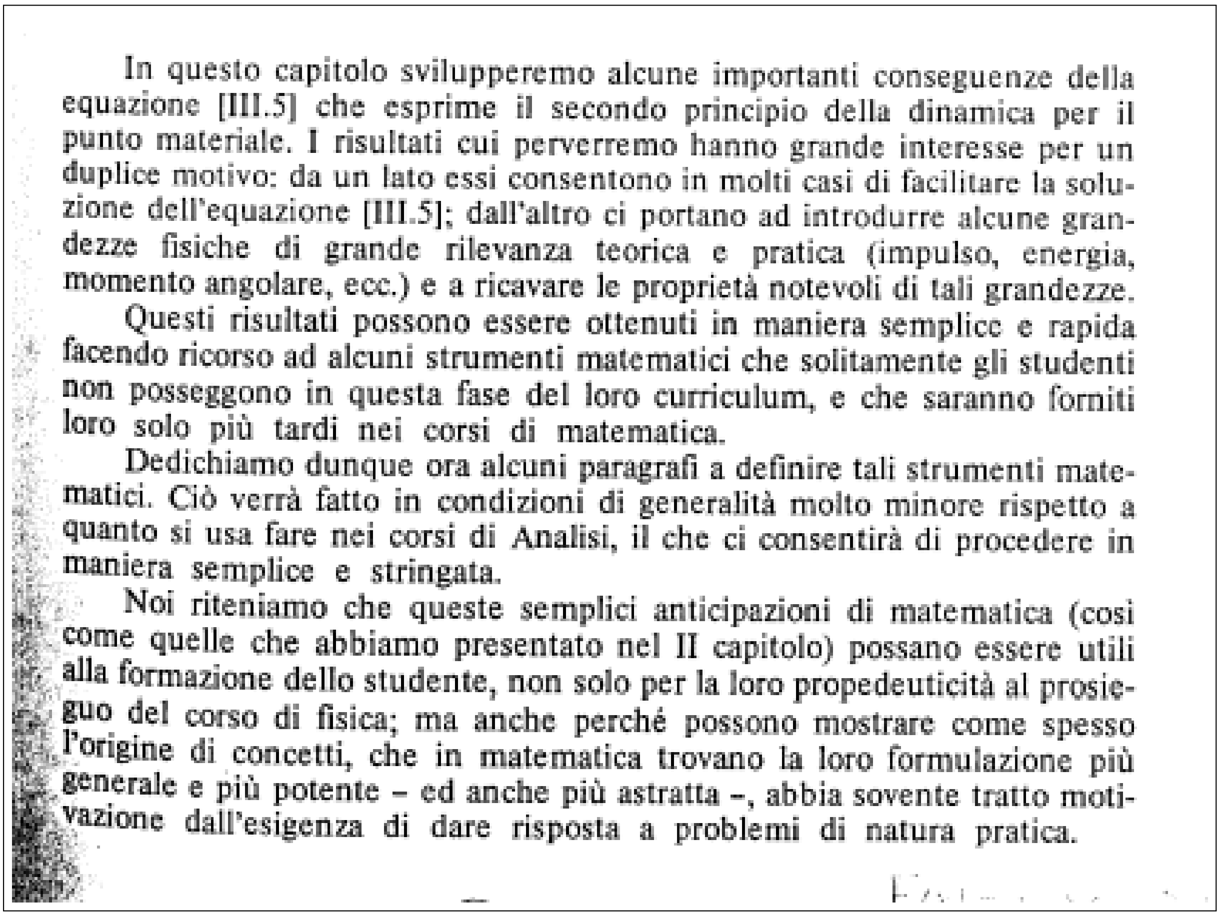
$$a_x = a_x(t) \implies v_x(t) = \int a_x(t)\ dt + c_1$$

$$a_y = a_y(t) \implies v_y(t) = \int a_y(t)\ dt + c_2$$

$$a_z = a_z(t) \implies v_z(t) = \int a_z(t)\ dt + c_3$$

Il testo [30] continua affermando che per risolvere il problema è necessario conoscere le costanti, in quanto esse determinano diverse soluzioni, oppure "in termini equivalenti si può specificare la velocità che il punto aveva a un certo istante, ad esempio all'istante iniziale $t = 0$" [30]. In questo modo avviene l'interpretazione delle costanti come le *condizioni iniziali* della velocità.

Il cap. IV, *Conseguenze del secondo principio della dinamica* si apre con i paragrafi § IV 1, § IV 2, § IV 3, *Infinitesimi*, *Differenziali*, *Integrali*. Nella fig. 4.32 a pag. 124 è riportata l'introduzione al capitolo, in cui si esprime la motivazione di inserire alcuni strumenti matematici necessari alla presentazione di "alcune grandezze fisiche di grande



In questo capitolo svilupperemo alcune importanti conseguenze della equazione [III.5] che esprime il secondo principio della dinamica per il punto materiale. I risultati cui perverremo hanno grande interesse per un duplice motivo: da un lato essi consentono in molti casi di facilitare la soluzione dell'equazione [III.5]; dall'altro ci portano ad introdurre alcune grandezze fisiche di grande rilevanza teorica e pratica (impulso, energia, momento angolare, ecc.) e a ricavare le proprietà notevoli di tali grandezze.

Questi risultati possono essere ottenuti in maniera semplice e rapida facendo ricorso ad alcuni strumenti matematici che solitamente gli studenti non posseggono in questa fase del loro curriculum, e che saranno forniti loro solo più tardi nei corsi di matematica.

Dedichiamo dunque ora alcuni paragrafi a definire tali strumenti matematici. Ciò verrà fatto in condizioni di generalità molto minore rispetto a quanto si usa fare nei corsi di Analisi, il che ci consentirà di procedere in maniera semplice e stringata.

Noi riteniamo che queste semplici anticipazioni di matematica (così come quelle che abbiamo presentato nel II capitolo) possano essere utili alla formazione dello studente, non solo per la loro propedeuticità al prosieguo del corso di fisica; ma anche perché possono mostrare come spesso l'origine di concetti, che in matematica trovano la loro formulazione più generale e più potente – ed anche più astratta –, abbia sovente tratto motivazione dall'esigenza di dare risposta a problemi di natura pratica.

Figura 4.32. C. Mencuccini e V. Silvestrini [30], frammento di testo: introduzione al cap. IV, p. 101.

rilevanza teorica e pratica" [30], dichiarando che, oltre a essere propedeutici al prosieguo del corso di fisica, siano concetti originati "dall'esigenza di dare risposte a problemi di natura pratica" [30].

Nel paragrafo *Infinitesimi* del testo [30], si mostra il confronto tra infinitesimi: quando due infinitesimi sono dello stesso ordine; quando un infinitesimo è di ordine superiore rispetto ad un altro; cosa vuol dire infinitesimo di ordine k. Inoltre è dimostrata la proprietà per cui gli infinitesimi di ordine superiore possano essere trascurati (*si veda* il brano riportato in fig. 4.33 a pag. 125).

Queste nozioni saranno utili nel paragrafo successivo sul *Differenziale*. Esso è definito come

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\Delta x$$

per poi diventare, dopo aver mostrato che $\mathrm{d}x = \Delta x$, l'espressione $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$" generalmente utilizzata per il differenziale" [30].

Il testo [30] si riserva anche di dedurre il significato geometrico del differenziale da quello della derivata:

> [...] quando a partire dal punto x_0 si dà un incremento Δx alla variabile indipendente, la funzione subisce un incremento Δf dato dal segmento BC, mentre il differenziale $\mathrm{d}f$ è rappresentato dal segmento BD, cioè dall'incremento che

Si dimostra facilmente una fondamentale proprietà degli infinitesimi. Consideriamo il rapporto fra due infinitesimi, $\alpha(x)$ e $\beta(x)$, fra di loro simultanei; e supponiamo che $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ possano essere espressi ciascuno come somma di infinitesimi simultanei: $\alpha(x) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x)$; $\beta(x) = \beta_1(x) + \beta_2(x)$. Se $\alpha_2(x)$ è di ordine superiore rispetto ad $\alpha_1(x)$ e $\beta_2(x)$ è di ordine superiore rispetto a $\beta_1(x)$, allora si ha:

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \qquad [\mathrm{IV.1}]$$

In altri termini, il risultato del limite resta invariato se scrivendo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ si mantengono solo gli addendi di ordine più basso, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore.

La [IV.1] si dimostra immediatamente; si ha infatti:

$$\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x) + \alpha_2(x)}{\beta_1(x) + \beta_2(x)} = \lim \frac{\alpha_1(x)\left(1 + \dfrac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)}\right)}{\beta_1(x)\left(1 + \dfrac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)}\right)} = \lim \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\,.$$

Nell'ultimo passaggio, abbiamo tenuto conto del fatto che

$$\lim \frac{\alpha_2(x)}{\alpha_1(x)} = 0 \quad \text{e} \quad \lim \frac{\beta_2(x)}{\beta_1(x)} = 0$$

per l'ipotesi che $\alpha_2(x)$ e $\beta_2(x)$ siano di ordine superiore rispettivamente nei confronti di $\alpha_1(x)$ e $\beta_1(x)$. Questa proprietà viene spesso enunciata sinteticamente dicendo che *gli infinitesimi di ordine superiore possono essere trascurati*

Figura 4.33. C. Mencuccini e V. Silvestrini [30], frammento di testo: gli infinitesimi di ordine superiore possono essere trascurati, p. 103.

> in corrispondenza della variabile Δx la variabile y subisce lungo la tangente condotta in x lungo la curva $y = f(x)$.

Nel passaggio riportato in fig. 4.34 a pag. 126 possiamo vedere le proprietà associate al differenziale:

a. Il testo [30] dimostra che Δf e $\mathrm{d}f$ sono infinitesimali rispetto a Δx per $\Delta x \to 0$, e differiscono per infinitesimi di ordine superiore rispetto a Δx, quindi

$$\Delta f = \mathrm{d}f + o(\Delta x)$$

Afferma che grazie a questa proprietà

> si può sostituire se ci è comodo il differenziale $\mathrm{d}f$ all'incremento Δf (o viceversa) in qualunqure espressione di cui si farà poi il limite per $\Delta x \to 0$, senza che il risultato venga modificato da questa sostituzione.

b. Il differenziale $\mathrm{d}f$ è invariante per cambiamento della variabile indipendente (si tratta della prorpietà di *invarianza in forma* che abbiamo visto nel testo di analisi matematica di Pagani Salsa [34], *si veda* pag. 93).

L'utilità del differenziale [IV.3] deriva da due sue proprietà fondamentali:

a) *L'incremento della funzione Δf e il suo differenziale df differiscono per infinitesimi di ordine superiore rispetto a Δx per $\Delta x \to 0$, cioè $\Delta f = df + o(\Delta x)$.*

Sia Δf che df (entrambi ovviamente funzione di Δx oltreché di x) sono infinitesimi rispetto a Δx nel punto $\Delta x = 0$. La proprietà enunciata equivale dunque ad affermare che $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$. La dimostrazione è immediata:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{df}{\Delta x} \right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Abbiamo usato il fatto $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$ per la definizione di derivata; e il fatto che $\frac{df}{\Delta x} = f'(x_0)$ per la definizione [IV.2] di differenziale.

In virtù di questa proprietà, e di quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo e in particolare della [IV.1], si può sostituire se ci è comodo il differenziale df all'incremento Δf (o viceversa) in qualunque espressione di cui si farà poi il limite per $\Delta x \to 0$, senza che il risultato venga modificato da questa sostituzione.

b) *Il differenziale df è invariante per cambiamento della variabile indipendente.*

In altri termini se una funzione $f(x)$ ha per differenziale df la quantità:

$$df = f'(x)\, dx$$

(dove $f'(x)$ è ovviamente una funzione nota della x); e se al posto della x si pone al secondo membro della [IV.3] una funzione $x = x(t)$ della variabile t, si ottiene automaticamente il differenziale della funzione $f(x(t))$ della variabile t. Anche la dimostrazione di questa proprietà è assai semplice. Sostituire alla x la $x(t)$ al secondo membro della [IV.3] significa infatti operare le sostituzioni:

$$\begin{aligned} f'(x) &\Rightarrow f'(x(t)) \\ dx &\Rightarrow x'(t)\, dt \qquad \text{(secondo la definizione di differenziale)} \end{aligned}$$

per cui la [IV.3] diviene

$$df = f'(x(t)) \cdot x'(t)\, dt \qquad \text{[IV.4]}$$

Ma per il teorema di derivazione della «funzione di funzione» (vedi par. II.9), $f'(x(t)) \cdot x'(t)$ rappresenta la derivata rispetto a t della funzione $f(x(t))$; per cui coerentemente con la definizione [IV.3] la [IV.4] non è altro che il differenziale della $f(x(t))$.

Figura 4.34. C. Mencuccini e V. Silvestrini [30], frammento di testo: proprietà del differenziale, p. 104.

Il Mencuccini Silvestrini [30] osserva inoltre che il differenziale si possa maneggiare "come qualunque altra entità algebrica" [30]. La parte più interessante è la conclusione del paragrafo (*si veda* il passaggio riportato in fig. 4.35 a pag. 127) in cui si esprime formalmente il differenziale $\mathrm{d}f$ come approssimazione dell'incremento Δf *quando* Δx *sia ufficientemente piccolo*:

$$\Delta f \approx \mathrm{d}f = f'(x)\, \Delta x \qquad \text{(per } \Delta x \text{ piccolo)}$$

Come vediamo, il risultato non è altro che la $f'(x(t))$, cioè la [IV.6b].

Il fatto che l'incremento della funzione Δf differisce dal differenziale df per infinitesimi di ordine superiore, consente di esprimere l'incremento Δf in termini approssimati mediante il differenziale df quando l'incremento Δx della variabile sia sufficientemente piccolo:

$$\Delta f \simeq df = f'(x)\,\Delta x \qquad \text{(per } \Delta x \text{ piccolo)}$$

dove con il simbolo $\simeq$ indichiamo uguaglianza valida approssimativamente. Questa relazione può essere scritta anche in un modo più immediatamente utile a fini pratici.

Se x_0 è un valore fissato della variabile indipendente, e x un valore generico non molto diverso da x_0, si ha $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$; per cui:

$$f(x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

onde Δf è linearizzato da $f'(x_0)\,(x - x_0)$

ovvero
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad \text{[IV.9]}$$

Una applicazione notevole di questa formula, che ci tornerà utile spesso, si ha nel caso che la funzione $f(x)$ sia del tipo $f(x) = (1 + x)^n$, dove n è un numero reale qualunque. Scegliendo $x_0 = 0$, si ha allora:

$$f(0) = 1 \qquad f'(x) = n\,(1 + x)^{n-1}\,; \qquad f'(0) = n\,; \qquad x - x_0 = x$$

per cui la [IV.9] fornisce la linearizzazione

$$(1 + x)^n \simeq 1 + n\,x \qquad \text{(significativa per } x << 1) \qquad \text{[IV.9.a]}$$

Figura 4.35. C. Mencuccini e V. Silvestrini [30], frammento di testo: differenziale come approssimazione dell'incremento, p. 105.

e "in modo più immediatamente utile ai fini pratici" [30] scritta come

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\approx f'(x_0)\cdot(x - x_0) \\ \Longrightarrow f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \end{aligned}$$

ossia "Δf è linearizzato da $f'(x_0)\,(x - x_0)$" [30].

Nel testo di Mencuccini e Silvestrini [30] è più volte sottolineato l'intento di fornire gli strumenti dell'analisi matematica necessari allo studio della fisica, non solo in quanto propedeutici per il corso, ma per poter comprendere la loro applicazione e il loro legame con il significato fisico.

La prima nozione dell'analisi che il testo [30] introduce è quella di limite. L'idea di limite nasce dalla necessità di vedere che cosa succede a una funzione se avviciniamo la variabile indipendente a un punto che renderebbe la funzione indefinita, e per farlo gli autori ci chiedono di pensare alla variabile che assume un valore *piccolo* ma diverso da zero.

Questo ragionamento è applicato per definire la velocità istantanea come il limite del rapporto incrementale. Nello specifico, il testo [30] considera un certo andamento di $x(t)$ (variabile indipendente) e chiede di calcolare la velocità media *comunque piccolo sia* $\Delta t = t_2 - t_1 \neq 0$ (valore per cui la funzione non è definita), arrivando a una soluzione esatta per $t_2 = t_1$ (*si veda* il frammento riportato in fig. 4.30 a pag. 121).

Con questo esempio possiamo confermare come l'analisi infinitesimale si sia sviluppata per superare un problema nella spiegazione di un concetto fisico, in questo caso quello di velcità istantanea.

Il quadro generale, nonostante l'intento, è quello di descrivere gli oggetti di natura fisica dal punto di vista prettamente matematico. Per capire da che cosa nasce questo approccio, cerchiamo di riconoscere quale sia la concezione di differenziale utilizzata nel libro di Mencuccini e Silvestrini [30], attraverso i principali punti concettuali qui riassunti:

1. Il termine *piccolo* è utilizzato in due punti:
   - Nell'esempio sulla velocità istantanea (introduzione al concetto di limite), in cui il testo [30] scrive *comunque piccolo sia* $\Delta t \neq 0$;
   - Nell'esprimere l'incremento Δf nei termini approssimati mediante il differenziale $\mathrm{d}f$ *quando* Δx *sia sufficientemente piccolo*.
2. Il Mencuccini e Silvestrini [30] sostiene che il differenziale possa essere maneggiato come qualunque altra entità algebrica.
3. il testo [30] afferma che $\Delta f = \mathrm{d}f + o(\Delta x)$, ossia che Δf e $\mathrm{d}f$ differiscono per un infinitesimo di ordine superiore.
4. Grazie al punto precesente, possiamo sostituire $\mathrm{d}f$ a Δf (e viceversa) in qualunque espressione *di cui poi si farà il limite per* $\Delta x \to 0$.
5. Il testo [30] scrive $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ per Δx piccolo, per cui $\mathrm{d}f$ approssima Δf, e la linearizza.

Queste osservazioni conducono a pensare al differenziale come un piccolo elemento diverso da zero che approssima l'incremento. La concezione di differenziale nel Mencuccini e Silvestrini [30] è pertanto quella riportata nel §4.2.1.3 a pag. 102 (approssimazione infinitesimale), la quale suggerisce di utilizzare $\mathrm{d}f$ come un'approssimazione che possa sostituire Δf nelle espressioni ogni volta che si intende prenderne il limite.

La concezione di differenziale come approssimazione infinitesimale, sostiene il ruolo strumentale della matematica nel contesto della fisica, infatti vede il differenziale come uno strumento da utilizzare per risolvere le equazioni differenziali e integrali.

Se cerchiamo un modello nel percorso di ragionamento che conduce alle equazioni del moto uniformemente accelerato, troviamo che utilizza un approccio astratto, limitandosi a svolgere i procedimenti matematici tecnici, dalle condizioni iniziali alla risoluzione degli integrali (fig. 4.39C. a pag. 136). Le leggi della cinematica sono ricavate a partire dal caso generale (nella forma delle coordinate), per poi passare ai casi particolari, a seconda del tipo di moto, negli esercizi svolti.

Per esempio, sono forniti sia i dati iniziali, sia le componenti dell'accelerazione $a_i(t)$, per determinare le equazioni del moto $\vec{r}(t)$ e viceversa, utilizzando derivate e integrali.

I concetti di velocità e accelerazione istantanea si limitano a essere funzioni matematiche poco collegate a situazioni fisiche. Anche i procedimenti che portano alle equazioni che rappresentano un sistema fisico, ossia la componente strutturale di un processo, non è messa in evidenza. La concezione di differenziale come approssimazione infinitesimale è un esempio di questo di questo aspetto.

4.2.4.4 David Halliday, Robert Resnick, Kenneth S. Krane: Fisica 1 (2003)

David Halliday (1916–2010) ha frequentato l'Università di Pittsburgh, conseguendo il dottorato di ricerca in fisica nel 1941. Durante la seconda guerra mondiale, ha lavorato al Radiation Lab del MIT sviluppando tecniche radar. Nel 1946 tornò a Pittsburgh come assistente e lì ha trascorso il resto della propria carriera.

Robert Resnick (1923–2014) è nato a Baltimora, nel Maryland e si è diplomato alla scuola superiore del Baltimore City College nel 1939. Si è laureato nel 1943 e ha ottenuto il dottorato di ricerca nel 1949, entrambi in fisica alla Johns Hopkins University. Dal 1949 al 1956 è stato membro della facoltà dell'Università di Pittsburgh. In seguito è divenuto professore al Rensselaer Polytechnic Institute ed è stato a capo del curriculum scientifico interdisciplinare per quindici anni.

Kenneth Krane ha iniziato a lavorare con il dipartimento di fisica dell'Oregon State University nel 1974. Durante la sua permanenza presso l'Oregon State, Krane è stato direttore del dipartimento di fisica dal 1984 al 1998. Dal 2003 è professore emerito. L'attività di ricerca di Krane è nel campo della fisica nucleare.

Il capitolo §2 del libro di Halliday, Resnik, Krane [19], è dedicato al *Moto in una dimensione*. Soltanto dopo il capitolo sulla dinamica e le leggi di Newton, si parlerà del *Moto in due e più dimensioni* (capitolo §3). Inoltre il testo dedica i primi paragrafi ai vettori, sostenendo che

> Molte leggi fisiche possono assumono un'espressione più compatta se le grandezze che vi compaiono sono rappresentate da vettori. Una relazione scritta in forma vettoriale è spesso più agevole da leggere e da trattare. La posizione, la velocità e l'accelerazione, che sono le grandezze tipiche della cinematica, sono tutte grandezze vettoriali e le regole che la definiscono e le legano l'una all'altra sono regole vettoriali [19].

Il paragrafo §2.3 *Vettori posizione, velocità e accelerazione*, definisce le seguenti grandezze:

- *Vettore spostamento* $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ la variazione di posizione intervenuta nell'intervallo di tempo considerato. Poi precisa, considerando un grafico x, y, z, che lo spostamento $\Delta\mathbf{r}$ non coincide con la traiettoria di una particella, ma

  > Considerando intervalli sempre più piccoli, il vettore spostamento si avvicina sempre di più alla traiettoria seguita dalla particella.

- *Velocità* (vettoriale) *media*:
  $$\overline{\mathbf{v}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$
  Anche qui il testo [19] osserva che la velocità media dipende soltanto dalla posizione all'inizio e alla fine dell'intervallo di tempo, per cui, per descrivere "i dettagli del suo movimento, è più utile disporre di una funzione matematica che fornisca il valore del vettore velocità in ciascun istante dell'intervallo considerato" [19], la *velocità* (vettoriale) *istantanea*. Questo accade quando il vettore "$\Delta\mathbf{r}$ si avvicina alla traiettoria effettivamente percorsa, fino al limite in cui tale vettore diventa tangente alla traiettoria al tendere di Δt a zero" [19]. Il testo [19] precisa che, in

questa situazione limite, la *velocità media approssima la velocità istantanea*, per cui

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

Inoltre osserva che l'equazione sopra descritta "*ricorda* la definizione matematica di derivata", e per questo si può anche scrivere

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

Un altra osservazione del testo [19] è sulla natura della velocità, sul riferimento alla velocità vettoriale, o scalare (il suo modulo), e sul fatto che la dimensione di quest'ultima sia data dal rapporto

$$\text{velocità scalare media} = \frac{\text{lunghezza totale percorsa}}{\text{tempo trascorso}}$$

dunque la sua unità di misura SI è il metro al secondo (m/s).

- Il vettore *accelerazione media* è la variazione della velocità, in rapporto all'intervallo di tempo in cui viene effettuata

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

dove il vettore variazione di velocità è la differenza $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{finale}} - \mathbf{v}_{\text{iniziale}}$.

Per vedere com'è variata $\mathbf{v}$ durante l'intervallo di tempo considerato Δt, si utilizza l'*accelerazione istantanea*

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

ed anche qui si può "mettere questa espressione sotto forma di derivata" [19]:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

Dopo aver definito queste grandezze vettoriali, lo Halliday, Resnik, Krane [19] introduce le loro caratteristiche e ill loro significato attraverso un problema svolto (*si veda* il passo riportato in fig. 4.36 a pag. 131 e fig. 4.37 a pag. 132).

Al termine della soluzione del problema svolto 2.4 si trovano quattro osservazioni, riguardo i vettori, la posizione, la velocità, l'accelerazione (in forma vettoriale), e la loro rappresentazione grafica:

1. Le loro lunghezze relative non hanno significato essendo tre vettori di dimensioni fisiche diverse.
2. Il vettore $\mathbf{r}$ localizza la particella rispetto l'origine.
3. Il vettore $\mathbf{v}$ è tangente alla traiettoria della particella.
4. La direzione di $\mathbf{a}$ si può *approssimativamente* determinare dalla direzione della variazione di v in un breve intervallo di tempo intorno all'istante considerato.

Nel paragrafo §2.4 *Cinematica unidimensionale*, sono descritti diversi tipi di moto corrispondenti a diverse situazioni fisiche.

Prima di esaminare caso per caso, il testo [19] precisa che ci sono due modi di rappresentare una particella in moto: con le equazioni matematiche e con i diagrammi. Ogni rappresentazione favorisce un tipo di approccio di ragionamento [19]:

PROBLEMA SVOLTO 2.4 Una particella si muove sul piano xy in modo tale che le sue coordinate seguano un andamento dettato dalle seguenti equazioni: $x(t) = At^3 + Bt$ e $y(t) = Ct^2 + D$, ove $A = 1{,}00\ \mathrm{m/s^3}$, $B = -32{,}0\ \mathrm{m/s}$, $C = 5{,}0\ \mathrm{m/s^2}$ e $D = 12{,}0\ \mathrm{m}$. Trovare i vettori posizione, velocità e accelerazione della particella all'istante $t = 3$ s.

Soluzione La posizione è data dall'Equazione 2.5 che, introducendo le espressioni di $x(t)$ e $y(t)$, diventa

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (At^3 + Bt)\boldsymbol{i} + (Ct^2 + D)\boldsymbol{j}\,.$$

Ponendo $t = 3$ s, si ottiene

$$\boldsymbol{r} = (-69\ \mathrm{m})\boldsymbol{i} + (57\ \mathrm{m})\boldsymbol{j}\,.$$

Tramite le Equazioni 2.12 si trovano le componenti della velocità:

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(At^3 + Bt) = 3At^2 + B$$
$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Ct^2 + D) = 2Ct\,.$$

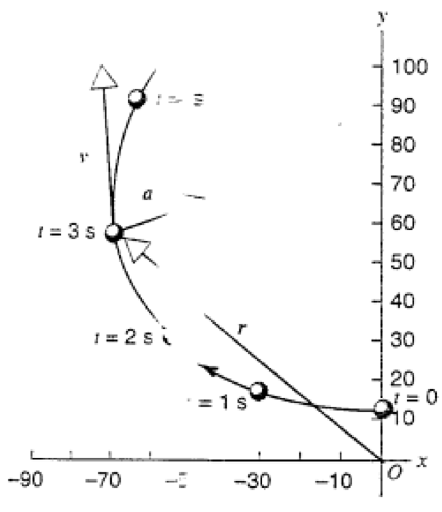


FIGURA 2.13 Problema svolto 2.4. Sul grafico è disegnata la traiettoria della particella in moto e sono segnate le sue posizioni agli istanti $t = 0, 1, 2, 3$ e 4. Per l'istante $t = 3$ s sono rappresentati anche i vettori velocità e accelerazione. Si noti che non si percepiscono particolari relazioni tra le direzioni di $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, e $\boldsymbol{a}$, né tra le lunghezze dei vettori che li rappresentano.

Figura 4.36. D. Halliday, R. Resnik, K. S. Krane [19], frammento di testo: Problema svolto sui vettori posizione, velocità, accelerazione, p. 22 (prima parte).

Introducendovi il valore $t =$ [illegible] si ha

$$v = v_x i + v_y j = (-5\ \mathrm{m/s})i + (30\ \mathrm{m/s})j.$$

Le componenti dell'accelerazione sono

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3At^2 + B) = 6At$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(2Ct) = 2C.$$

All'istante $t = 3{,}0$ s l'accelerazione vale

$$a = a_x i + a_y j = ([illegible]\ \mathrm{m/s^2})i + (10\ \mathrm{m/s^2})j.$$

La Figura 2.13 mostra il percorso della particella dall'istante $t = 0$ all'istante $t = 4$ s. Sono tracciati i vettori posizione, velocità e accelerazione relativi all'istante $t = 3$ s. Siccome le dimensioni di questi tre vettori sono diverse, le loro lunghezze relative non hanno significato in questo caso. Il vettore r localizza la particella rispetto all'origine. Il vettore v è tangente alla traiettoria della particella. Il vettore a rappresenta la variazione di velocità e la sua direzione si può approssimativamente determinare dalla direzione della variazione di v in un breve intervallo intorno all'istante $t = 3$ s.

Figura 4.37. D. Halliday, R. Resnik, K. S. Krane [19], frammento di testo: Problema svolto sui vettori posizione, velocità, accelerazione, p. 22 (seconda parte).

- L'approccio matematico favorisce la risoluzione dei problemi con maggior precisione.
- La rappresentazione grafica offre un'interpretazione fisica più immediata.

I tipi di moto che il testo [19] considera in questo caso, sono quindi rappresentati da un'equazione $x(t)$ che la identifica e da un grafico, e sono:

1. *Particella ferma.*
2. *Moto a velocità costante.*
3. *Moto accelerato.*
4. *L'auto che accelera e frena.*
5. *Corpo in caduta.*
6. *La pallina che cade e rimbalza.*

Per ogni tipo di moto segue un modello di ragionamento.

1. Il primo passaggio dal livello fisico qualitativo è la modellizzazione del problema: con un processo di matematizzazione (a, pag. 14) descrive la situazione fisica presa in considerazione con il diagramma x–t e l'equazione $x(t)$ che rappresentano il moto.
2. Dall'interpretazione (b, pag. 14) del grafico x–t, possiamo riconoscere le condizioni iniziali, mentre osservando la pendenza della curva $x(t)$, si può ipotizzare un andamento di $v(t)$ e a sua volta dal grafico v–t, le proprietà dell'accelerazione $a(t)$.
3. Il passaggio di calcolo della velocità e dell'accelerazione avviene nell'area di mate-

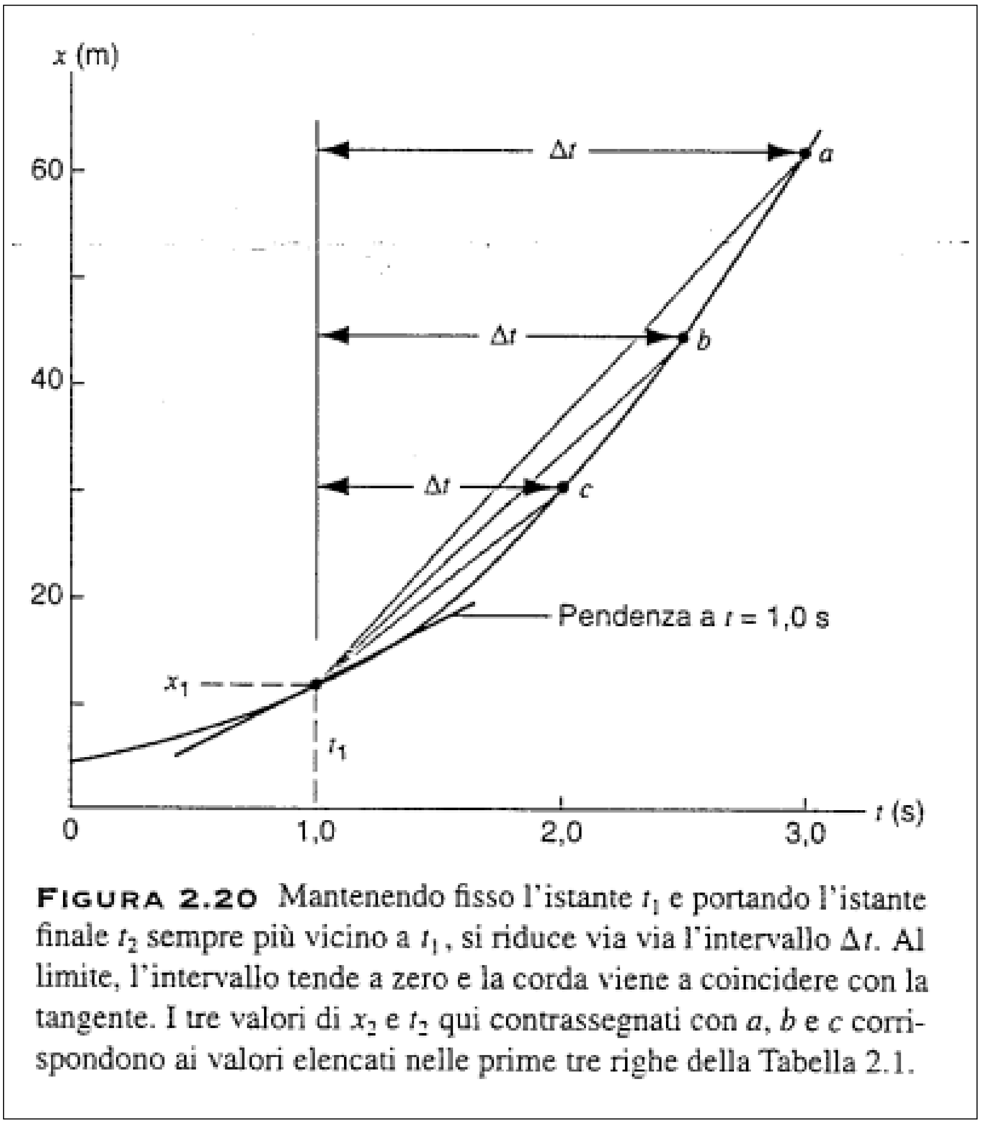


FIGURA 2.20 Mantenendo fisso l'istante t_1 e portando l'istante finale t_2 sempre più vicino a t_1, si riduce via via l'intervallo Δt. Al limite, l'intervallo tende a zero e la corda viene a coincidere con la tangente. I tre valori di x_2 e t_2 qui contrassegnati con *a*, *b* e *c* corrispondono ai valori elencati nelle prime tre righe della Tabella 2.1.

Figura 4.38. D. Halliday, R. Resnik, K. S. Krane [19], frammento di testo: Il passaggio al limite, p. 26.

matica pura, con le procedure tecnico-matematiche (c, pag. 14) di derivazione.

4. La soluzione è poi interpretata (b, pag. 14) all'interno della situazione fisica che sta considerando.

Successivamente, all'interno dello stesso paragrafo, c'è una sezione intitolata *Il passaggio al limite*, che si apre con la seguente frase:

> È interessante notare come la velocità media approssimi la velocità istantanea man mano che Δt tende a zero.

Questo processo è illustrato da un diagramma x(m)–t(s), che vediamo in fig. 4.38, dove si rappresenta l'azione di spostare il punto 2 in modo che sia sempre più vicino al punto 1; così facendo il segmento che unisce i due punti (la corda della curva nei punti 1 e 2) tende a diventare parallelo alla tangente passante per il punto 1. Essendo la velocità media la pendenza della corda, e quella istantanea la pendenza della tangente, si dimostra che la velocità media approssima al limite la velocità istantanea.

Il §2.5 è sul *Moto uniformemente accelerato*. Una volta note le condizioni iniziali, x_0 e

v_{0x}, e conoscendo l'accelerazione, è possibile determinare posizione e velocità a qualsiasi istante t [19]. Per risolvere questo problema, il testo [19] inizia riconoscendo che, essendo l'accelerazionne costante:

$$a_x = \overline{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} \qquad \Longrightarrow \qquad v_x = v_{0x} + a_x\, t$$

Si osserva che l'espressione di v_x è del tipo $y = mx + b$, quindi rappresenta una retta con coefficiente angolare a_x, e intercetta $v_{0x} = v_x(t = 0)$.

Essendo una retta, la velocità media può essere scritta come

$$\overline{v}_x = \frac{1}{2}\,(v_x + v_{0x})$$

Combinando questa equazione con $\overline{v}_x = \frac{x - x_0}{t}$ e sostituendo v_x, si trova

$$x = x_0 + v_{0x}\, t + \frac{1}{2}\, a_x\, t^2$$

Questo risultato, è verificato dal testo [19], mostrando che la funzione $x\,(t)$ soddisfa la relazione $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, infatti:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_0 + v_{0x}\, t + \frac{1}{2}\, a_x\, t^2\right) = v_{0x} + a_x\, t = v_x$$

Queste equazioni vengono riconsiderate nella sezione facoltativa *Integrali delle equazioni del moto (facoltativo)*, in cui, considerando a_x costante, integra $\mathrm{d}v_x = a_x\, \mathrm{d}t$:

$$\int \mathrm{d}v_x = \int a_x\, \mathrm{d}t = a_x \int \mathrm{d}t$$
$$v_x = a_x\, t + C$$

Il testo [19] osserva quindi che C può essere determinato dalle condizioni iniziali, ossia per $t = 0$, $v_{0x} = C$, si ottiene: $v_x = v_{0x} + a_x\, t$. In seguito il testo [19] prende in considerazione la relazione $\mathrm{d}x = v_x\, \mathrm{d}t$, che integrata diventa

$$\int \mathrm{d}x = \int (v_{0x} + a_x\, t)\; \mathrm{d}t = v_{0x} \int \mathrm{d}t + a_x \int t\, \mathrm{d}t$$
$$x = v_{0x}\, t + \frac{1}{2}\, a_x\, t^2 + C'$$

Introducendo la seconda condizione iniziale per cui, per $t = 0$, $x = x_0 \implies C' = x_0$, si ottiene l'espressione di $x\,(t)$.

L'approccio di questo libro utilizza (esplicitamente) due forme di espressione per trattare la cinematica, le equazioni e i diagrammi. A differenza di molti altri libri di testo di Fisica 1, i diagrammi e gli esercizi svolti assumono una considerevole importanza; in questi ogni grafico rappresenta una situazione fisica, a sua volta identificata anche da una certa equazione.

Nella sezione *Il passaggio al limite* si vuole esprimere come il passaggio da Δt a $\mathrm{d}t$, sia associato alla situzione limite in cui il vettore spostamento si avvicina alla traiettoria effettivamente percorsa; anche la velocità media approssima la velocità istantanea, "man mano che $\Delta t \to 0''$. Anche il grafico in fig. 4.38 a pag. 133, che rappresenta questo processo ci lascia intuire come il passaggio al limite riconduca il moto uniformemente accelerato al moto uniforme, e di come si possa considerare il differenziale una stima lineare dell'incremento, (concezione §4.2.1.4 a pag. 103, differenziale come *stima lineare*).

Questa concezione supporta una competenza strutturale nella creazione di nuove conoscenze o nella risoluzione di problemi. Infatti nel paragrafo §2.5 sul *Moto uniformemente accelerato*, è possibile riconoscere un percorso di ragionamento di tipo didattico in cui si susseguono diversi passaggi di matematizzazione e di interpretazione, che conducono ai corrispondenti livelli di matematizzazione all'interno del modello matematico-fisico, in cui ogni processo matematico è collegato al suo significato fisico (figura 4.39D. a pag. 136, (a) approccio didattico.

In fondo al paragrafo, troviamo una sezione facoltativa sugli *Integrali delle equazioni del moto*, in cui è esposto un procedimento alternativo della risoluzione del problema. Le equazioni del moto sono ricavate integrando le equazioni differenziali $\mathrm{d}v_x = a_x\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{d}x = v_x\,\mathrm{d}t$.

Viene proposta come soluzione alternativa un approccio astratto, ma solo dopo aver analizzato il problema attraverso un percorso didattico basato sull'intuizione (fig. 4.39D. a pag. 136, (b) approccio astratto. La scelta di illustrare i due metodi in questa sequenza conduce lo studente ad apprendere il metodo di risoluzione analitico solo dopo aver elaborato una conoscenza significativa del concetto, favorendo sia la sua componente strutturale, sia le procedure strumentali da applicare, e infine essere in grado di scegliere la migliore modalità di risoluzione a seconda del problema.

4.2.5 Nuovo modello sull'utilizzo della matematica nella fisica, applicato al problem solving della legge oraria

In questo paragrafo ho analizzato e rappresentato, mediante un diagramma, il percorso di ragionamento che ogni libro applica nello sviluppo del problema sulle equazioni del moto nel caso di un moto rettilineo uniforme, col fine di individuare il tipo di approccio attraverso il riconoscimento di competenze strutturali o strumentali nella risoluzione di un problema.

In riferimento alla figura 4.39 a pag. 136, di seguito si analizza il percorso per l'insegnamento delle leggi del moto uniformememente accelerato dei libri di fisica presi in considerazione, attraverso il nuovo modello di applicazione della matematica nella fisica di Pietrocola, Karam, Uhden e Pospiech [52]. Ogni percorso consiste in diversi processi che il modello riconosce nella matematizzazione, interpretazione e nelle procedure matematiche pure.

4.2.5.1 Gilberto Bernardini

1. Matematizza (a, pag. 14) il problema di moto rettilineo uniformemente accelerato (ossia in cui l'accelerazione è costante), scrivendo

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a \equiv \text{cost}$$

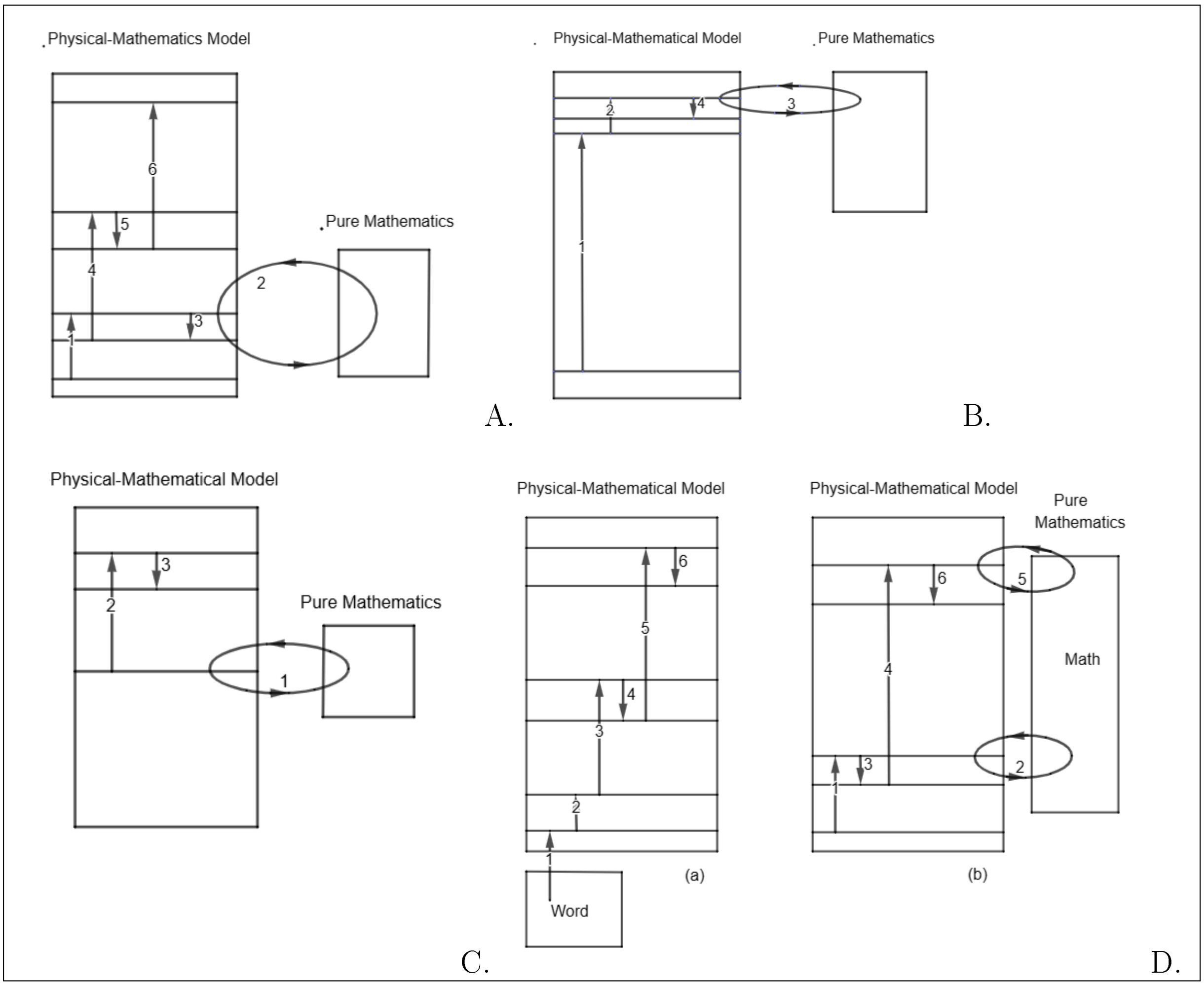


Figura 4.39. Interpretazione del percorso di ragionamento per la derivazione delle equazioni del moto, nei libri di Bernardini [A], Valle [B], Mencuccini [C], Halliday-Resnik-Krane [D] con approccio didattico (a), e astratto (b).

2. Con una procedura matematica (c, pag. 14) integra $\mathrm{d}v = a\,\mathrm{d}t$

$$v\,(t) = \int a\,\mathrm{d}t + v_0 = a\,t + v_0$$

3. Interpreta (b, pag. 14) l'equazione della velocità nel moto uniformemente accelerato: v_0 come velocità iniziale, e $v\,(t)$ come funzione lineare nel tempo.
4. Rappresenta graficamente $v\,(t)$ in due situazioni fisiche (a, pag. 14):
   - Nel primo a e v_0 hanno lo stesso segno, e il grafico parte dal valore v_0 e cresce indefinitivamente.
   - Nel secondo dapprima descesce, fino ad annullarsi nell'istante $t^* = \frac{v_0}{a}$.

   (Disegna il primo caso come una retta, il secondo come una retta che taglia l'asse delle ascisse nel punto t^*).
5. Ricordando che per trovare $x\,(t)$ dobbiamo integrare $v\,(t)$, ricorrendo alle nozioni dell'analisi, si interpreta (b, pag. 14) lo spazio percorso come l'area sotto il grafico della velocità.

6. Con un processo di matematizzazione (a, pag. 14) calcola le aree geometricamente nel primo caso, ponendo $s_0 = 0$, “lo spazio percorso è dato dall’area del trapezio, ossia la somma delle aree del rettangolo e del triangolo, quindi

$$s\,(t) = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

4.2.5.2 Giorgio Valle

1. Sviluppo grafico-analitico del concetto di integrale (a, pag. 14).
2. Matematizzazione della situazione fisica (a, pag. 14): considera il caso in cui la velocità è una funzione lineare del tempo $u = c + a\,t$.
3. Calcola l’integrale (c, pag. 14)

$$g\,(t) = \int (c + a\,t)\;\mathrm{d}t = c\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad \Longrightarrow \qquad g(0) = 0$$

4. Ricava e interpreta (b, pag. 14) la soluzione

$$f\,(t) = s = s_0 + g\,(t) \qquad \Longrightarrow \qquad s = s_0 + c\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

riconoscendo la dipendenza quadratica dello spazio rispetto il tempo.

4.2.5.3 Corrado Mencuccini, Vittorio Silvestrini

1. Descrizione puramente matematica (c, pag. 14) del concetto di primitiva e di integrale definito ($F\,(x) = \int f\,(x)\;\mathrm{d}x + C$).
2. Applicazione (a, pag. 14) della nozione di primitiva al caso in cui sono note le componenti cartesiane di $\vec{a}\,(t)$.
3. Interpretazione (b, pag. 14) delle costanti come condizioni iniziali.

4.2.5.4 David Halliday, Robert Resnick, Kenneth S. Krane

4.2.5.4.1 Approccio didattico

1. Semplifica (d, pag. 14) le situazioni di cinematica come “corpi che cadono o aumobili che frenano”, a sistemi di moto rettilineao uniformemente accelerato.
2. Matematizza (a, pag. 14) un obiettivo: trovare l’equazione del moto $x\,(t)$, conoscendo i dati iniziali x_0, v_{0x}, considerando che $a_x \equiv \text{cost}$.
3. Raggiunge un altro livello di matematizzazione (a, pag. 14):

$$a_x \equiv \text{cost} \implies a_x = \overline{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x - v_{0x}}{t} \implies v_x = v_{0x} + a_x\,t$$

e disegnando i grafici delle funzioni $a_x\,(t) \equiv \text{cost}$, $v_x\,(t) = v_{0x} + a_x\,t$.
4. Interpreta (b, pag. 14) equazione e grafico di $v\,(t)$ come una retta ($y = m\,x + b$) nel grafico v_x–t, dove $v_{0x} = b$ e $a_x = m$ (che verifica $a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$).
5. Matematizza (a, pag. 14) questa informazione: essendo una retta possiamo scrivere la velocità media come

$$\overline{v}_x = \frac{1}{2}\,(v_x - v_{0x})$$

ma la velocità media è anche

$$\overline{v}_x = \frac{x\,(t) - x_0}{t}$$

Sostituendo $v_x = v_{0x} + a_x\,t$ si trova che $x\,(t) = x_0 + v_{0x}\,t + \frac{1}{2}\,a_x\,t^2$.

6. Il risultato $x\,(t)$ viene poi verificato algebricamente, riconoscendo che $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (processo di interpretazione, b, pag. 14).

4.2.5.4.2 Approccio astratto

1. Partendo dal modello fisico qualitativo considera il moto uniformemente accelerato, con un processo di matematizzazione (a, pag. 14):

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \equiv \mathrm{cost}$$

2. Il procedimento algoritmico (c, pag. 14) conduce nell'area di matematica pura: integra l'equazione differenziale $\mathrm{d}v_x = a_x\,\mathrm{d}t$.

$$\int \mathrm{d}v_x = \int a_x\,\mathrm{d}t = a_x \int \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad v_x = a_x\,t + C$$

3. Interpreta (b, pag. 14) la costante di integrazione C come:

$$v_x\,(t=0) = C \qquad \Longrightarrow \qquad v_x = v_{0x} + a_x\,t$$

4. Per trovare $x\,(t)$ dobbiamo partire dalla definizione di velocità $v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (a, pag. 14).
5. Raggiunge l'area di matematica pura (c, pag. 14) integrando $\mathrm{d}x = v_x\,\mathrm{d}t$:

$$\int \mathrm{d}x = \int v_x\,\mathrm{d}t = \int (v_{0x} + a_x\,t)\,\mathrm{d}t = \int v_{0x}\,\mathrm{d}t + \int a_x\,t\,\mathrm{d}t$$
$$\Longrightarrow\; x = v_{0x}\,t + \frac{1}{2}\,a_x\,t^2 + C'$$

6. Interpreta (b, pag. 14) la costante di integrazione come:

$$x\,(t=0) = x_0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = x_0 + v_{0x}\,t + \frac{1}{2}\,a_x\,t^2$$

4.3 Conclusioni sull'analisi dei libri di fisica

La concezione §4.2.1.2 a pag. 102 di differenziale come incremento infinitesimale è inappropriata per il processo di matematizzazione delle situazioni fisiche. Il fatto che questa sia la concezione prevalente negli studenti può essere spiegato solo concludendo che l'uso del calcolo si concentra su un processo operativo (isolare una variabile, sostituirla, risolvere derivate e integrali, ...) di un'espressione matematica già scritta, col solo fine di ottenere un risultato, trascurando il processo che parte dall'analisi fisica della situazione e che porta a quell'espressione di partenza.

Nel caso di studenti che non solo inizieranno a studiare il calcolo differenziale, ma lo useranno anche per fare fisica, nonostante l'idea di approssimazione infinitesimale (§4.2.1.3 a pag. 102) potrebbe essere valida, si ritiene che il differenziale come stima lineare dell'incremento (§4.2.1.4 a pag. 103) sia migliore in quanto permette di vedere una relazione più chiara tra l'analisi fisica e la scrittura di espressioni differenziali.

La miglior rappresentazione del concetto di differenziale come stima lineare si trova nella fig. 4.38 a pag. 133, *Il passaggio al limite* nel libro di Hallliday, Resnik, Krane [19], in cui si osserva come, nel grafico x–t, per $t \to 0$ la velocità media (pendenza della corda) approssima la velocità istantanea (pendenza della tangente).

Gli aspetti matematici in questo ragionamento seguono un processo visivo, e sono collegati al significato fisico, in un percorso di modellizzazione di tipo didattico. Da questo emerge quanto sia importante il modo in cui si utilizza la matematica all'interno della fisica, e quanto ne determini le caratteristiche al fine dell'apprendimento/insegnamento dei concetti.

Conclusioni

Nel cap. 1 a pag. 6 ho analizzato la letteratura sul ruolo della matematica nell'insegnamento/apprendimento della fisica. Dall'analisi è emerso quanto la modellizzazione sia un tema delicato per la didattica. Esaminando diversi riferimenti teorici sulla modellizzazione, ho riconosciuto in quello di Uhden, Karam, Pietrocola e Pospiech una lente di analisi per individuare il ruolo con cui viene utilizzata la matematica nei processi di insegnamento della fisica. Questo quadro di analisi valorizza i processi di matematizzazione e di interpretazione in cui gli aspetti matematici sono legati al loro significato fisico, sottolineando l'importanza del carattere strutturale della matematica.

Dall'analisi condotta emerge che la ricerca sostiene l'intenzione di allontanarsi dai metodi di insegnamento di impostazione algoritmica, i quali trasmettono agli studenti una comprensione strumentale, che risulta insufficiente per la risoluzione di problemi diversi da quelli su cui ci si esercita, che richiederebbero una reale comprensione concettuale.

Nel cap. 2 a pag. 18 ho ripercorso la storia del concetto di infinitesimo e differenziale. L'indagine storica cho ho condotto rivela la complessità e ricchezza dell'evoluzione di un concetto matematico-fisico come il differenziale, la cui nascita deriva dall'intuizione, e che ha stimolato riflessioni sul suo significato fisico, le sue possibili applicazioni, e sul rigore matematico della sua definizione. Le varie definizioni che sono state formulate nella storia sono caratterizzate dall'essere più intuitive (Leibniz), più rigorose (Cauchy) o dalla capacità di coniugare il rigore a un'utilità più accentuata nel *problem-solving*, in particolare in fisica (Frèchet e Robinson). Le diverse definizioni corrispondono a concezioni distinte di differenziale. Nel paragrafo §2.1.4 a pag. 24 ho concluso l'indagine storica con una introduzione dell'*analisi non-standard* di Abraham Robinson, e, a seguire, nel §2.2 a pag. 26 ho condotto un confronto tra *analisi tradizionale* e *analisi non-standard*, in cui ho potuto osservare quanto l'approccio alternativo di Robinson, riesca ad esprimere il *calcolo infinitesimale* con l'intuizione geometrica e fisica su basi matematiche rigorose.

Nel cap. 3 a pag. 65 ho riportato alcuni studi di ricerca di didattica della matematica e della fisica sull'apprendimento/insegnamento dei concetti di *infinitesimo* e *differenziale*. Dall'indagine sulle difficoltà del differenziale in fisica emergono alcune criticità. Gli studenti spesso non associano alcun significato al differenziale, oppure lo vedono come *"un pezzetto di ..."*, *"un elemento di ..."*, e incontrano difficoltà nel passaggio dall'idea di *"contributo di ..."* all'idea di *approssimazione lineare* di un incremento di funzione.

Un altro aspetto emerso dall'indagine riguarda il fatto che si dovrebbe specificare quando e perché si devono utilizzare i differenziali, e la loro utilità nelle relazioni non lineari.

Nell'analizzare i diversi significati che danno gli studenti all'elemento dy, si osserva che gran parte degli studenti vede il dy come una quantità piccola o infinitesimale. Risultati come questi motivano l'importanza di provare nuove strade, tra cui quella non-standard.

Nel §3.2.1 a pag. 68 ho riportato la sperimentazione più rappresentativa con classi a confronto tra *analisi tradizionale* e *analisi non-standard*, i cui risultati mostrano la potenzialità di quest ultima.

I risultati ottenuti dalla ricerca sul ruolo della matematica in ambito fisico e sulle concezioni di differenziale sono stati utilizzati nel cap. 4 a pag. 72 per analizzare alcuni libri di testo di matematica e fisica a livello universitario, scelti come rappresentanti di diverse epoche storiche.

Per i testi di fisica si è scelto di analizzare i capitoli di cinematica per evincerne quale concezione di differenziale sia utilizzata. Nel §4.2.5 a pag. 135 ho analizzato ogni libro attraverso il modello di Uhden, Karam, Pietrocola e Pospiech per riconoscere il ruolo attribuito alla matematica, e per confrontare l'approccio con cui ricavano le leggi del moto. I risultati mostrano quanto il concetto di differenziale sia un indice significativo per individuare l'approccio scelto dal testo, che sia strumentale algoritmico o concettuale che faccia leva sugli aspetti intuitivi.

Bibliografia

[1] Daniel Alibert, Denise Grenier, Marc Legrand, Françoise Richard, Michèle Artigue, Maryvonne Haliez, Jean Marie Courdille, Jacqueline Ménigaux e Laurence Viennot (1989), *Procédures différentielles dans les enseignements de mathématiques et de physique au niveau du premier cycle universitaire* Paris, 1989, Collection: Brochures n. 74, ISBN: 2-86612-059-0, `https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IPS89001.htm` , `https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/IPS/IPS89001/IPS89001.pdf` .

[2] Michèle Artigue e Laurence Viennot, *Some Aspects of Students' Conceptions and Diffisculties about Differentials*, in *Second International Seminar Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics*, Vol. III., pp. 18–32, Cornell University, Ithaca, ERIC Id. ED293686, .

[3] Michèle Artigue, Jacqueline Menigaux, Laurence Viennot, *Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials* European Journal of Physics, vol. 11, pp. 262–267, 1990, doi: 10.1088/0143-0807/11/5/002.

[4] Gilberto Bernardini *Fisica Sperimentale, parte I* V edizione, 1945, Tipografia R. Pioda, Roma, Libreria Eredi Virgilio Veschi

[5] George Berkeley (1734) *The Analyst; or a Discourse addressed to an Infidel Mathematician*, CreateSpace Independent Publishing Platform (June 4, 2017), ISBN-13: 978-1547162642, Wikisource .

[6] Andreas Blass, *Book review*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 84 n. 1, pp. 34–41, doi: 10.1090/S0002-9904-1978-14401-2, p. 37.

[7] Blum W., Leiss D. *Filling up the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks* 2005, In Working group 13: Applications and modelling, pp. 162, ISBN: 84-611-3282-3

[8] Marta Carli, Stefania Lippiello, Ornella Pantano, Mario Perona, Giuseppe Tormen, *Testing students ability to use derivatives, integrals, and vectors in a purely mathematical context and in a physical context* Physical Reviw Physics Education Research, Vol. 16, Iss. 1, January - June 2020, doi: 10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010111 `https://journals.aps.org/prper/pdf/10.1103/PhysRevPhysEducRes.16.010111`

[9] Umberto Cisotti *Lezioni di Analisi Matematica (svolte nel R. Istituto Tecnico Superiore di Milano)*, Tipografia Cooperativa, Pavia, 1918, BN 1917 8115

[10] A. Collins, W. Ferguson *Epistemic forms and epistemic games: Structures and strategies to guide inquiry* 1993, Educational Psychologist vol. 28 n.1, pp. 25-42. 9

[11] Charles Bryan Dawson, *Calculus set free: Infinitesimals to the Rescue*, 2022, Oxford University Press, ISBN-13: 978-0192895608.

[12] Dray T., Manogue C. A. *Putting differentials back into calculus* 2010, The College Mathematics Journal, vol. 41, pp. 90–100

[13] Robert Ely *Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals*, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 41, No. 2 (March 2010), pp. 117-146, https://www.jstor.org/stable/20720128

[14] Robert Ely *Teaching calculus with infnitesimals and diferentials*, 2021, ZDM – Mathematics Education, Vol. 53, pp. 591–604, https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-020-01194-2

[15] Hans Freudenthal (1973) *Mathematics as an Educational Task*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, ISBN-13: 978-9027702357.

[16] Judith V. Grabiner, *Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus*, Am. Math. Mon., vol. 90, n. 3 pp. 185–194, 1983, doi: 10.1080/00029890.1983.11971185.

[17] Greca I. M., Moreira M. A. *Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics*, 2001, Science Education, vol. 86(1), pp. 106–121.

[18] Habre S., Abboud M. *Students' conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course* 2006 Journal of Mathematical Behavior, vol. 25, pp. 57–72

[19] David Halliday, Robert Resnick, Kenneth S. Krane *Fisica 1* CEA, V edizione, 2003, ISBN: 8840812547

[20] James M. Henle, Eugene M. Kleinberg, *Infinitesimal Calculus*, 1979, Dover Publications, ISBN-13: 978-0-48-642886-4.

[21] Hudson, H. T., McIntire, W. R., *Correlation between mathematical skills and success in physic* 1977, American Journal of Physics, vol. 45 (5), pp. 470–471

[22] Kevin Houston, *How to Think Like a Mathematician: A Companion to Undergraduate Mathematics* (2009), Cambridge University Press, ISBN-13: 978-0-521-71978-0 .

[23] Steven R. Jones e Robert Ely, *Approaches to Integration Based on Quantitative Reasoning: Adding Up Pieces and Accumulation from Rate*, Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed., vol. 9, pp. 8–35 (2023), doi: 10.1007/s40753-022-00203-x
.

[24] Ricardo Karam (2015), *Introduction of the Thematic Issue on the Interplay of Physics and Mathematics*, Sci & Educ, doi: 10.1007/s11191-015-9763-9.

[25] Howard Jerome Keisler (2012) *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, 3rd edition, Dover Publications, ISBN-13: 978-0486484525, URL: https://people.math.wisc.edu/~keisler/calc.html.

[26] Howard Jerome Keisler (1976) *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle Weber & Schmidt publisher, ISBN-13: 978-0871502155, URL: https://people.math.wisc.edu/~hkeisler/foundations.pdf.

[27] Mirko Maracci, Ambra Marzorate, *Uno studio sulla concept-image di nozioni di base dell'analisi non standard*, Didattica Della Matematica. Dalla Ricerca Alle Pratiche d'aula, (6), 9 - 34, 2019, doi: 10.33683/ddm.19.6.1

[28] Joaquín Martínez-Torregrosa, Rafael López-Gay, Albert Gras-Martí (2006) *Mathematics in Physics Education: Scanning Historical Evolution of the Differential to Find a More Appropriate Model for Teaching Differential Calculus in Physics*, Science & Education, vol. **15**, pp. 447–462, doi: 10.1007/s11191-005-0258-y.

[29] Rafael López-Gay, Joaquín Martínez Sáez, Joaquín Martínez Torregrosa (2015), *Obstacles to Mathematization in Physics: The Case of the Differential*, Science & Education, vol. **24**, pp. 591–613, doi: 10.1007/s11191-015-9757-7.

[30] Corrado Mencuccini e Vittorio Silvestrini (1998) *Fisica 1. Meccanica e termodinamica*, Liguori, ISBN-10:8820714930, ISBN-13:978-8820714932

[31] Dawn C. Meredith e Karen A. Marrongelle (2008) *How students use mathematical resources in an electrostatics context*, Am. J. Phys., vol. **76**, pp. 570–578, doi: 10.1119/1.2839558.

[32] National Council of Teachers of Mathematics, *Principles and Standards for School Mathematics*, https://www.nctm.org/PSSM/.

[33] Mel S. Sabella, E. F. Redish (2005) *Student understanding of topics in calculus*, Physics Education Research Group, https://physics.umd.edu/rgroups/ripe/perg/plinks/calc.htm.

[34] Carlo Domenico Pagani, Sandro Salsa, *Analisi Matematica 1* (1995) Masson, ISBN-13: 978-8821400797; II edizione (2015), Zanichelli, Bologna, ISBN-13: 978-8808151339.

[35] Porter M. K., Masingila J. O. *Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus* 2000, Educational Studies in Mathematics, vol. **42**, No.2, pp. 165–177 https://www.jstor.org/stable/3483283

[36] Abraham Robinson (1996) *Non-standard Analysis*, revised edition, Princeton University Press, ISBN-13: 978-0691044903, URL: https://press.princeton.edu/books/paperback/9780691044903/non-standard-analysis.

[37] JONATHAN TUMINARO, EDWARD F. REDISH *Elements of a Cognitive Model of Physics Problem Solving: Epistemic Games* Physical Review Physical Education Research, vol: 3, 020101, 2007, doi: 10.1103/PhysRevSTPER.3.020101

[38] KATHLEEN SULLIVAN, *The teaching of elementary calculus using the nonstandard analysis approach*, Mathematical Association of America, The American Mathematical Monthly, Mathematical Education, vol. 83, No. 5 (May, 1976), pp. 370-375 http://www.jstor.org/stable/2318657

[39] J. PIAGET, R. GARCIA *Psychogenesis and the history of science (H. Feider, Trans.)*, 1989, New York: Columbia University Press. (Original work published 1983) https://archive.org/details/psychogenesishis0000piag

[40] BRUNO PINI *Primo corso di Analisi Matematica* Coperativa Libraria Universitaria, Bologna, 1971, ISBN: 978-88-491-0137-9

[41] BRUNO PINI *Secondo corso di Analisi Matematica, parte I* CLUEB, Bologna, 1972, ISBN-10: 8849101384, ISBN-13: 978-8849101386

[42] VON KORFF J., REBELLO N. S. *Distinguishing between change and amount infinitesimals in first semester calculus based physics*, 2014, American Journal of Physics, vol. 82, pp.695–705, https://www.researchgate.net/publication/272317126_Distinguishing_between_change_and_amount_infinitesimals_in_first-semester_calculus-based_physics

[43] JONATHAN TUMINARO, EDWARD F REDISH*Student Use of Mathematics in the Context of Physics Problem Solving: A cognitive model* 2005, U. of Maryland preprint

[44] EDWARD F. REDISH *Problem solving and the use of Math in Physics courses* 2006, Invited talk presented at the conference, World View on Physics Education in 2005: Focusing on World change, Delhi, 2005. http://arxiv.org/abs/physics/0608268v1

[45] EDWARD F. REDISH, ERIC KUO, *Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology* 2015, Science & Education, vol. 24, pp. 561-590, doi: 10.1007/s11191-015-9749-7

[46] EDWARD F. REDISH, BING T. J.,*Analyzing problem solving using math in physics. Epistemological framing via warrants* 2009, Physical Review Special Topics: Physics Education Research, vol. 5, No2, pp. 15, doi: 10.1103/PhysRevSTPER.5.020108, https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevSTPER.5.020108

[47] RABINDRA R. BAJRACHARYA, JOHN THOMPSON *Analytical derivation: An epistemic game for solving mathematically based physics problems* 2016, Physical Review Physics Education Research, vol. 12(1), doi: 10.1103/PhysRevPhysEduc-Res.12.010124

[48] J. P. Smith, III,A. A. diSessa,J. Roschelle *Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition*, 1993, Journal of the Learning Sciences, vol. 3, pp.115–163, doi: 10.1207/s15327809jls0302-2 .

[49] D. Tall, S. Vinner *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*, 1981, Educational Studies in Mathematics, vol. 12, No. 2, pp. 151-169, `https://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1981a-concept-image.pdf`

[50] Constantinos Tzanakis (2016), *Mathematics & physics: an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning*, History and Pedagogy of Mathematics, Jul 2016, Montpellier, France. HAL Id: hal-01349231 .

[51] Constantinos Tzanakis, Yannis Thomaidis (2000) *Integrating the Close Historical Development of Mathematics and Physics in Mathematics Education: Some Methodological and Epistemological Remarks*, For the Learning of Mathematics, FLM Publishing Association, vol. **20**, n. 1, pp. 44–55, https://www.jstor.org/stable/40248317 .

[52] Olaf Uhden, Ricardo Karam, Maurìcio Pietrocola, Gesche Pospiech *Modelling Mathematical Reasoning in Physics Education* Science & Education, vol. 2, pp.485-506, 2012, doi: 10.1007/s11191-011-9396-6

[53] Giorgio Valle *Guida alle lezioni di Fisica Sperimentale* Litografia Felice Gili, 1935, BN 1936 1374

[54] Paul White, Mitchelmore, *Conceptual knowledge in introductory calculus*, Journal for Research in Mathematics Education, vol. **27**, n. 1, 1996, pp. 79–95, doi: 10.2307/749199

[55] *Principles and Standards for School Mathematics* `https://en.wikipedia.org/wiki/Principles_and_Standards_for_School_Mathematics#Six_principles`

[56] Yeats F. R., Hundhausen J. R. *Calculus and physics: Challenges at the interface. American Journal of Physics*, vol. 60(8), pp. 716–721