

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

L'atomo di idrogeno: righe, serie e sua importanza in astrofisica

Tesi di Laurea

Presentata da:
Daniele Pucci

Relatore:
**Chiar.ma Prof.ssa
Marcella Brusa**

Anno Accademico 2023-2024

Ai tempi della mia infanzia, per giocare, in tutto l'universo non avevamo altro che atomi d'idrogeno, e non facevamo che giocarci, io e un altro bambino della mia età, che si chiamava Pfwfp. Com'era il nostro gioco? E' presto detto. Essendo lo spazio curvo, attorno alla sua curva facevamo correre gli atomi, come delle biglie, e chi mandava più avanti il suo atomo vinceva.

Italo Calvino, *Le Cosmicomiche*

Sommario

Lo scopo del seguente elaborato è quello di indagare mediante il linguaggio della meccanica quantistica i processi di assorbimento ed emissione discreti in cui è coinvolto l'atomo di idrogeno. Esso non solo è l'elemento chimico più semplice e dunque il più adatto a una modellizzazione matematica, ma è anche il più diffuso nell'universo, dal momento che costituisce il 74% della materia barionica.

All'idrogeno si devono inoltre le reazioni termonucleari che avvengono negli interni stellari e che in questa sede non verranno trattate. In chiusura verranno invece presentati altri processi astrofisici più complessi e variegati in cui l'idrogeno gioca un ruolo rilevante. Per comprenderli, si propone una trattazione che segue le descrizioni introdotte successivamente da tre scienziati (Bohr, Einstein e Grotrian) e che, lungi dall'esaurire l'argomento, forniranno almeno una utile panoramica.

Le questioni su cui ci si soffermerà maggiormente riguardano gli aspetti algebrici delle cosiddette "regole di selezione" e l'analisi dettagliata delle rappresentazioni grafiche per le transizioni elettroniche.

Indice

1	L'idrogeno secondo Bohr	4
1.1	La legge di Rydberg dal punto di vista empirico	4
1.2	La legge di Rydberg dal punto di vista algebrico	4
1.3	La legge di Rydberg dal punto di vista fisico	5
2	L'idrogeno secondo Einstein	7
2.1	Probabilità di transizione	7
2.2	Coefficienti di Einstein	8
2.3	Approssimazione di dipolo elettrico	9
3	L'idrogeno secondo Grotrian	12
3.1	Struttura normale	12
3.2	Struttura fine	12
3.3	Struttura iperfine	12
4	Applicazioni astrofisiche	14
4.1	Serie di Balmer	14
4.2	Serie di Lyman	15
4.3	Riga a 21 cm (regioni H_I)	17
4.4	BR emission (regioni H_{II})	17
5	Appendice	18
5.1	Calcolo della probabilità di transizione	18
5.2	Regole di selezione per atomi a molti elettroni	20
	Riferimenti bibliografici	22

1 L'idrogeno secondo Bohr

1.1 La legge di Rydberg dal punto di vista empirico

Se si scompone la luce di un gas caldo e rarefatto con un prisma e la si invia su uno schermo, si ottiene uno spettro non continuo ma discreto, con righe di emissione colorate solo a certe frequenze. Spettri di emissione di diversi elementi chimici vennero studiati diffusamente verso la fine dell'800 e in particolare quello dell'atomo di idrogeno permise di individuare serie di righe la cui spaziatura seguiva delle formule empiriche:

- serie di Lyman (ultravioletto) $\nu = c\tilde{R}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n > 1$
- serie di Balmer (visibile) $\nu = c\tilde{R}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n > 2$
- serie di Paschen (infrarosso) $\nu = c\tilde{R}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad n > 3$

Le leggi empiriche di ciascuna serie cambiano per un coefficiente al denominatore e dunque si possono riassumere in un'unica formula, storicamente dovuta a Rydberg

$$\nu = c\tilde{R}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \tilde{R} = 1.097 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}, n > m$$

1.2 La legge di Rydberg dal punto di vista algebrico

Il danese Niels Bohr nel 1913 adottò una serie di ipotesi ad hoc per aggirare il problema della stabilità emerso nel modello atomico "planetario" di Rutherford (un elettrone in orbita intorno al nucleo avrebbe dovuto emettere radiazione fino a cadere sullo stesso):

1. un atomo ha un insieme discreto di stati stazionari con energia E_1, E_2, E_3, \dots
2. l'emissione e l'assorbimento di radiazione per un atomo non avviene in forma continua, bensì discreta, quando l'elettrone passa da un'orbita stazionaria a un'altra
3. nel passaggio da un'orbita stazionaria E_m ad un'altra E_n l'elettrone assorbe o emette un fotone di energia $h\nu = |E_m - E_n|$
4. un elettrone in uno stato stazionario descrive (senza irradiare energia) un'orbita circolare governata dalle leggi della meccanica classica, che però non sono valide nelle transizioni da uno stato stazionario ad un altro
5. le orbite stazionarie vengono determinate dalla condizione che il modulo del momento angolare orbitale $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dell'elettrone sia quantizzato, cioè sia un multiplo intero di \hbar (costante di Planck ridotta): $|\vec{L}| = n\hbar$

Con queste ipotesi Bohr riuscì a ricavare il valore della costante sperimentale \tilde{R} e ottenne altri due importanti risultati per quanto riguarda l'ordine di grandezza del raggio e dell'energia degli stati legati dell'atomo di idrogeno ¹.

¹*Disclaimer:* la trattazione algebrica che segue fa riferimento al caso più generale dell'atomo idrogenoide, per cui è stato introdotto il fattore Z corrispondente al numero atomico. Si consideri inoltre che a_0 andrebbe corretto per la massa ridotta del sistema elettrone-nucleo.

- raggio

$$\begin{cases} mvr = n\hbar & 5^\circ \text{ postulato di Bohr} \\ m\frac{v^2}{r} = \frac{kZe^2}{r^2} & \text{forza per ipotesi di orbite circolari} \end{cases}$$

da cui

$$r(n) = \frac{n^2\hbar^2}{kZe^2m} = \frac{n^2}{Z}a_0 \text{ dove } a_0 = 0.53\text{\AA} \text{ è detta unità atomica di lunghezza} \quad (1)$$

- energia

$$\begin{cases} E = \frac{mv^2}{2} - \frac{kZe^2}{r} & \text{energia totale} \\ \frac{mv^2}{2} = \frac{kZe^2}{2r} & \text{energia cinetica per ipotesi di orbite circolari} \end{cases}$$

da cui

$$E(n) = -\frac{Z^2 ke^2}{2n^2 a_0} \text{ dove } \frac{ke^2}{a_0} = 27.2\text{eV} \text{ è detta unità atomica di energia} \quad (2)$$

Calcolando la differenza in energia tra due “stati stazionari” diversi (n ed m) e dividendo per h si ottiene nuovamente la formula di Rydberg

$$\nu = \frac{E(n) - E(m)}{h} = Z^2 \frac{27.2\text{eV}}{2h} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ dove } \frac{27.2\text{eV}}{2h} = c\tilde{R}$$

Bisogna sottolineare che il modello di Bohr non era del tutto corretto dal punto di vista fisico né era in grado di giustificare l'introduzione del quinto postulato. L'ipotesi ondulatoria di De Broglie e lo sviluppo della meccanica quantistica andranno a raffinare le intuizioni del fisico danese.

1.3 La legge di Rydberg dal punto di vista fisico

Ogni stato legato dell'atomo di idrogeno è caratterizzato da un insieme di quattro numeri quantici n, l, m_l, m_s ricavabili da una trattazione quantomeccanica appropriata. Di seguito li definiamo brevemente, insieme a un quinto numero quantico s . Si tenga presente che Ψ definisce la funzione d'onda dell'atomo di idrogeno.

- n numero quantico principale, può assumere valori $1 \leq n \leq \infty$;
indica il livello energetico (formula (2)) e fornisce le dimensioni dell'orbitale (formula (1)) secondo il modello di Bohr
- l numero quantico orbitale, può assumere valori $0 \leq l \leq n - 1$
esso è un autovalore del momento angolare dell'elettrone secondo la relazione $L^2\Psi = \hbar^2 l(l + 1)\Psi$
- s numero quantico di spin, può assumere per l'elettrone il solo valore $s = \frac{1}{2}$;
esso è un autovalore del momento intrinseco dell'elettrone secondo la relazione $S^2\Psi = \hbar^2 s(s + 1)\Psi$
- m_l numero quantico magnetico, può assumere valori $-l \leq m_l \leq l$;
esso è un autovalore della proiezione del momento angolare dell'elettrone secondo la relazione $L_z\Psi = \hbar m_l\Psi$; il pedice l è di norma omissso

- m_s numero quantico magnetico di spin, può assumere valori $-s \leq m_s \leq s$ esso è un autovalore della proiezione del momento angolare di spin secondo la relazione $S_z \Psi = \hbar m_s \Psi$

La notazione più semplice per i livelli dell'atomo di idrogeno si limita a specificare i numeri nl , siccome m_l e m_s intervengono soltanto in presenza di un campo magnetico esterno all'atomo. Ogni livello nl presenta una degenerazione pari a $2(2l + 1)$.

Poiché per la formula (2) l'energia dipende solo dal numero quantico principale n , allora a parità di n livelli con l diverso sono tra di loro degeneri. Questo implica che ogni livello n presenta una degenerazione pari a $2n^2$.

Le righe di emissione negli spettri osservati da Lyman, Balmer e Paschen corrispondono proprio a transizioni tra livelli aventi n diversi (senza alcuna informazione sugli l). Convenzionalmente si divide lo spettro dell'atomo di idrogeno in serie che portano il nome di questi scienziati e che differiscono a seconda del livello energetico di arrivo (se si parla di emissione) o di partenza (se si parla di assorbimento). All'interno di una data serie, le singole transizioni sono indicate con lettere greche secondo la corrispondenza $\Delta n = 1 \rightarrow \alpha$, $\Delta n = 2 \rightarrow \beta$, $\Delta n = 3 \rightarrow \gamma$ e via dicendo. La serie di Balmer è l'unica per la quale si adotta il simbolo H come prefisso alla lettera greca; le altre utilizzano a questo scopo le prime due lettere del nome dello scienziato corrispondente.

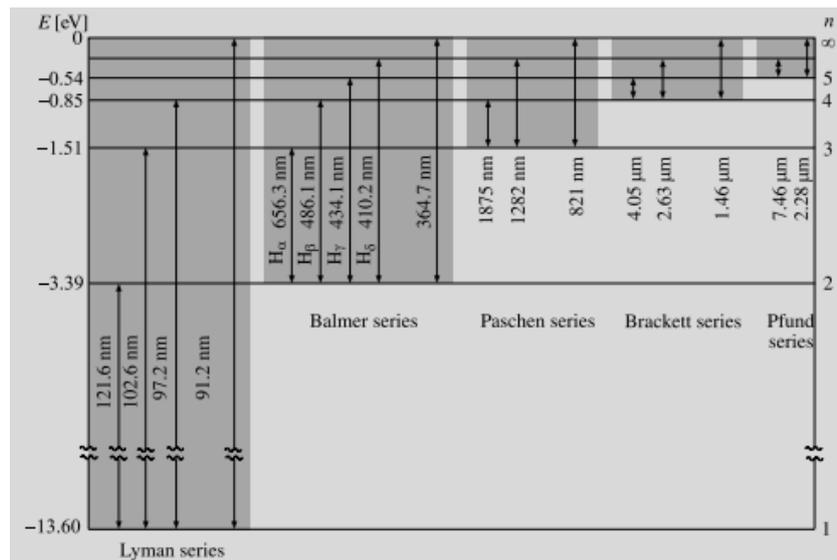


Figura 1: Serie spettrali per l'atomo di idrogeno (fonte: [6])

2 L'idrogeno secondo Einstein

2.1 Probabilità di transizione

I coefficienti di Einstein descrivono transizioni atomiche di tipo bound-bound tra uno stato $|b\rangle$ (a energia maggiore E_b) e uno stato $|a\rangle$ (a energia minore E_a).

Possiamo identificare tre processi che mettono in relazione questi stati:

1. assorbimento

un fotone incidente avente energia pari alla differenza di energia tra i due stati $|b\rangle$ e $|a\rangle$ viene assorbito dall'atomo eccitando un elettrone, che da $|a\rangle$ passa a $|b\rangle$; la probabilità di transizione W_{ba} può essere scritta come

$$W_{ba} = B_{ba}\rho(\omega_{ba}) \quad [s^{-1}]$$

dove $\rho(\omega_{ba})$ rappresenta la densità media di energia, mentre B_{ba} è il coefficiente di Einstein per questo processo;

2. emissione stimolata

un fotone che passa nei pressi della coppia elettrone-nucleo e avente energia pari alla differenza di energia tra i due stati $|b\rangle$ e $|a\rangle$ "stimola" la diseccitazione di un elettrone, che da $|b\rangle$ passa a $|a\rangle$, emettendo un fotone di frequenza identica a quella del fotone di passaggio; la probabilità di transizione \tilde{W}_{ab} può essere scritta come

$$\tilde{W}_{ab} = B_{ab}\rho(\omega_{ba}) \quad [s^{-1}]$$

dove $\rho(\omega_{ba})$ rappresenta la densità media di energia, mentre B_{ab} è il coefficiente di Einstein per questo processo;

3. emissione spontanea

un elettrone che si trova nello stato $|b\rangle$ si diseccita spontaneamente e transisce allo stato $|a\rangle$, emettendo un fotone avente energia pari alla differenza di energia tra i due stati $|b\rangle$ e $|a\rangle$; la probabilità di transizione W_{ab}^s può essere scritta come

$$W_{ab}^s = A_{ab} \quad [s^{-1}]$$

dove A_{ab} è il coefficiente di Einstein per questo processo; si noti l'assenza di $\rho(\omega_{ba})$.

Si può dimostrare (vedi Appendice 5.1) che le probabilità di transizione W_{ba} e \tilde{W}_{ab} possono essere scritte senza dovere introdurre i coefficienti di Einstein

$$\begin{aligned} \text{nel caso di assorbimento} \quad W_{ba} &= \frac{\pi e^2}{2m^2} A_0^2 |M_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} - \omega) \\ \text{nel caso di emissione stimolata} \quad \tilde{W}_{ab} &= \frac{\pi e^2}{2m^2} A_0^2 |\tilde{M}_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} + \omega) \end{aligned} \quad (3)$$

dove M_{ba} e \tilde{M}_{ab} sono degli elementi di matrice così definiti:

$$\begin{aligned} M_{ba} &= \langle b | \hat{\epsilon} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \nabla | a \rangle \\ \tilde{M}_{ab} &= \langle b | \hat{\epsilon} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \cdot \nabla | a \rangle \end{aligned}$$

Poiché stiamo parlando di onde elettromagnetiche, $\hat{\epsilon}$ è il versore di polarizzazione mentre \vec{k} indica la direzione di propagazione dell'onda. A_0 è il modulo di un vettore perpendicolare alla direzione di propagazione e utilizzato per scrivere il potenziale vettore \vec{A} nel gauge di Coulomb (vedi Appendice 5.1).

2.2 Coefficienti di Einstein

Supponiamo che:

- lo stato $|b\rangle$ abbia l stati degeneri cioè degenerazione $g_b \rightarrow$ allora $\tilde{W}_{ab} = B_{ab}\rho(\omega_{ba})g_b$
- lo stato $|a\rangle$ abbia k stati degeneri cioè degenerazione $g_a \rightarrow$ allora $W_{ba} = B_{ba}\rho(\omega_{ba})g_a$

E' possibile dimostrare, sfruttando il fatto che \vec{p} (quantità di moto) è hermitiano, che

$$|M_{blak}|^2 = |\tilde{M}_{akbl}|^2 \quad (4)$$

Consideriamo la densità media di energia $\rho(\omega_{ba})$, che può essere scritta come

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 A_0^2 \omega_{ba}^2 \delta(\omega_{ba} - \omega)$$

Riscriviamo la probabilità di transizione W_{ba} ottenuta dalla (3) in modo da mettere in evidenza $\rho(\omega_{ba})$

$$W_{ba} = \frac{\pi e^2}{m^2 \epsilon_0 \omega_{ba}^2} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 A_0^2 \omega_{ba}^2 \delta(\omega_{ba} - \omega) \right) |M_{ba}|^2 = f_{ba} \rho(\omega_{ba}) |M_{ba}|^2 \quad \text{dove } f_{ba} \text{ è il primo fattore}$$

Ora è evidente che a parità di densità di energia, utilizzando la (4), risulta

$$W_{ba} = \tilde{W}_{ba}$$

Consideriamo il numero di transizioni per unità di tempo

- nel caso di assorbimento, considerando N_a numero di atomi nello stato $|a\rangle$

$$\dot{N}_{ba}(abs) = N_a \frac{1}{g_a} \sum_{k=1}^{g_a} \sum_{l=1}^{g_b} |M_{blak}|^2 f_{ba} \rho(\omega_{ba}) = N_a B_{ba} \rho(\omega_{ba})$$

- nel caso di emissione di stimolata, considerando N_b numero di atomi nello stato $|b\rangle$

$$\dot{N}_{ab}(emi) = N_b \frac{1}{g_b} \sum_{l=1}^{g_b} \sum_{k=1}^{g_a} |\tilde{M}_{akbl}|^2 f_{ba} \rho(\omega_{ba}) = N_b B_{ab} \rho(\omega_{ba})$$

Riscriviamo B_{ba} e B_{ab} per esteso

$$B_{ba} = f_{ba} \frac{1}{g_a} \sum \sum |M_{blak}|^2 \quad \rightarrow \text{nel caso in cui non ci sia degenerazione } B_{ba} = f_{ba} |M_{ba}|^2$$

$$B_{ab} = f_{ba} \frac{1}{g_b} \sum \sum |\tilde{M}_{akbl}|^2 \quad \rightarrow \text{nel caso in cui non ci sia degenerazione } B_{ab} = f_{ba} |\tilde{M}_{ab}|^2$$

Ora è evidente che, utilizzando la (4), risulta

$$g_a B_{ba} = g_b B_{ab}$$

che è la celeberrima relazione tra i coefficienti di Einstein B_{ba} e B_{ab} .

Il singolo atomo ha dunque maggiore probabilità di transire laddove il livello energetico ha più stati (cioè la degenerazione è maggiore).

Se condideriamo anche l'emissione spontanea (indipendente da $\rho(\omega_{ba})$) allora possiamo riscrivere $\dot{N}_{ab}(emi)$ come

$$\dot{N}_{ab}(emi) = N_b B_{ab} \rho(\omega_{ba}) + N_b A_{ab}$$

dove abbiamo introdotto A_{ab} coefficiente di Einstein per l'emissione spontanea. Supponiamo che il sistema sia all'equilibrio termico, per cui vale

$$\dot{N}_{ab}(emi) = \dot{N}_{ba}(abs)$$

Ricaviamo allora $\rho(\omega_{ba})$

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{A_{ab}}{\frac{N_a}{N_b} B_{ba} - B_{ab}} \quad (5)$$

Poiché il sistema è all'equilibrio termico, possiamo riscrivere $\frac{N_a}{N_b}$ con l'equazione di Boltzmann

$$\frac{N_a}{N_b} = \frac{g_a}{g_b} e^{-\frac{(E_a - E_b)}{kT}} = \frac{g_a}{g_b} e^{\frac{\hbar\omega_{ba}}{kT}}$$

che sostituita nella (5) restituisce

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{A_{ab}}{\frac{g_a}{g_b} e^{\frac{\hbar\omega_{ba}}{kT}} B_{ba} - B_{ab}} \quad (6)$$

Poiché il sistema è all'equilibrio termico, possiamo riscrivere $\rho(\omega_{ba})$ con la distribuzione di Planck

$$\rho(\omega_{ba}) = \frac{\hbar\omega_{ba}^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_{ba}}{kT}} - 1}$$

che uguagliata alla (6) restituisce

$$A_{ab} = \frac{\hbar\omega_{ba}^3}{\pi^2 c^3} B_{ab}$$

Riscriviamo i coefficienti di Einstein utilizzando $\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c}$ costante di struttura fine

$$\begin{aligned} B_{ba} &= \frac{4\pi^2 \hbar c \alpha}{\omega_{ba}^2 m^2} \frac{1}{g_a} \sum \sum |M_{blak}|^2 \\ B_{ab} &= \frac{4\pi^2 \hbar c \alpha}{\omega_{ba}^2 m^2} \frac{1}{g_b} \sum \sum |\tilde{M}_{akbl}|^2 \\ A_{ab} &= \frac{\hbar\omega_{ba}^3}{\pi^2 c^3} B_{ab} \end{aligned}$$

2.3 Approssimazione di dipolo elettrico

Introduciamo ora un'approssimazione che ci permetterà di scrivere M_{ba} e \tilde{M}_{ab} in maniera semplificata. Studiamo il caso dell'assorbimento per semplicità.

Ricordiamo l'espressione di M_{ba} , che supponiamo di studiare in banda ottica², cioè con $\lambda \approx 500nm \approx 10^3 \text{Å}$

$$M_{ba} = \langle b | e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}} \cdot \nabla | a \rangle = \int \Psi_b^* e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}} \cdot (\nabla \Psi_a) dV \quad (7)$$

²L'approssimazione di dipolo diventa meno accurata all'aumentare della frequenza della radiazione, ed è del tutto inadeguata nel caso dei raggi X.

Il volume su cui integriamo è quello su cui le funzioni d'onda atomiche sono $\neq 0$, cioè su cui esse hanno estensione spaziale dell'ordine di qualche Ångström

$$r \leq 10\text{Å} \Rightarrow |\vec{k} \cdot \vec{r}| = \left| \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \vec{r} \right| \approx 10^{-2} \ll 1$$

Possiamo quindi sviluppare e^{ikr} in serie di Taylor perché $kr \rightarrow 0$; l'approssimazione di dipolo consiste nel troncamento all'ordine 0 lo sviluppo e dunque riscrivere M_{ba} come

$$M_{ba} = \langle b | \hat{\epsilon} \cdot \nabla | a \rangle = \hat{\epsilon} \cdot \langle b | \nabla | a \rangle$$

Tramite opportune trasformazioni algebriche si ottiene

$$M_{ba} = -\frac{m}{\hbar} \omega_{ba} \hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba}$$

dove \vec{r}_{ba} è la scrittura compatta per

$$\langle b | \vec{r} | a \rangle = \int \Psi_b^* \vec{r} \Psi_a dV = \int \Psi_b^* \vec{r} \Psi_a r^2 dr d\Omega$$

Affinché M_{ba} sia non nullo bisogna quindi soddisfare due condizioni

$$\begin{array}{ll} \langle b | \vec{r} | a \rangle \neq 0 & \text{integrale non nullo} \\ \hat{\epsilon} \cdot \langle b | \vec{r} | a \rangle \neq 0 & \text{prodotto scalare non nullo} \end{array}$$

Il nome "approssimazione di dipolo" deriva dal fatto che si può riscrivere M_{ba} esplicitando l'operatore di dipolo elettrico $\vec{D} = -e\vec{r}$.

Riscriviamo i coefficienti di Einstein in approssimazione di dipolo

$$\begin{aligned} B_{ba}^D &= \frac{1}{g_a} \frac{4\pi^2 c \alpha}{\hbar} \sum \sum |\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{blak}|^2 \\ B_{ab}^D &= \frac{1}{g_b} \frac{4\pi^2 c \alpha}{\hbar} \sum \sum |\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{akbl}|^2 \\ A_{ab}^D &= \frac{1}{g_b} \frac{4\omega_{ba}^3 \alpha}{c^2} \sum \sum |\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{akbl}|^2 \end{aligned}$$

Nel caso in cui la radiazione sia non polarizzata, bisogna fare la media su tutte le possibili direzioni del vettore di polarizzazione $\hat{\epsilon}$

$$|\hat{\epsilon} \cdot \vec{r}_{ba}|^2 \Rightarrow \langle \cos^2 \beta \rangle |\vec{r}_{ba}|^2 = \frac{1}{3} |\vec{r}_{ba}|^2 \quad \text{dove } \beta \text{ è l'angolo compreso tra } \hat{\epsilon} \text{ e } \vec{r}$$

e dunque si possono ottenere ulteriori semplificazioni delle formule viste sopra.

Notiamo che il coefficiente A_{ab} dipende sostanzialmente da due fattori:

- $\omega_{ba}^3 \rightarrow$ maggiore è la differenza di energia tra due livelli, più probabile è la transizione di emissione spontanea
- $\vec{r}_{akbl} \rightarrow$ la transizione è permessa se questo elemento di matrice che collega i due stati l'uno con l'altro è $\neq 0$

Distinguiamo ora due diversi tipi di transizioni:

- se $\vec{r}_{akbl} \neq 0$ si parla di transizioni permesse o di dipolo elettrico (E1); studiando quando l'elemento di matrice \vec{r}_{akbl} si annulla si ottengono le seguenti regole di selezione di dipolo elettrico sui numeri quantici n, l, m, s
 1. $\Delta n =$ qualsiasi
 2. l e l' devono avere parità opposta (regola di Laporte)
 3. $\Delta l = \pm 1$
 4. $\Delta m = 0, \pm 1$
 5. $\Delta s = 0$ (sempre soddisfatta per l'atomo di H essendo $s = \frac{1}{2}$ in tutti gli stati)
- se $\vec{r}_{akbl} = 0$ si parla di transizioni proibite in approssimazione di dipolo; la transizione è comunque possibile (seppur meno probabile) se si considerano altri termini dello sviluppo in serie di e^{ikr} . Troncando al primo ordine si ottengono transizioni di dipolo magnetico (B1) o di quadrupolo elettrico (E2), che soddisfano le seguenti regole di selezione (per le quali si è introdotto il momento angolare totale $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$)

dipolo magnetico

1. $\Delta l = 0$
2. $\Delta j = 0, \pm 1$ (dove j è il numero quantico associato all'operatore J^2)
3. $\Delta m_j = 0, \pm 1$ (dove m_j è il numero quantico associato all'operatore J_z)

quadrupolo elettrico

1. $\Delta l = 0, \pm 2$ ($l = 0 \leftrightarrow l' = 0$ proibita)
2. $\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2$

Ricordando che il coefficiente di Einstein A_{ab} rappresenta l'inverso del tempo di vita medio \mathcal{T} di un elettrone nello stato eccitato, possiamo individuare alcuni tempi caratteristici per ciascuna delle transizioni sopra delineate[9]:

- dipolo elettrico (E1) $\mathcal{T} = 10^{-8}s$
la riga corrispondente ha dunque un allargamento intrinseco ($\propto \mathcal{T}^{-1}$) grande
- dipolo magnetico (B1) $\mathcal{T} = 10^{-3}s$
la riga corrispondente ha dunque un allargamento intrinseco ($\propto \mathcal{T}^{-1}$) piccolo
- quadrupolo elettrico (E2) $\mathcal{T} = 1s$
la riga corrispondente ha dunque un allargamento intrinseco ($\propto \mathcal{T}^{-1}$) piccolo

Una volta prese in esame le transizioni cosiddette “proibite” bisogna considerare un ulteriore caso. Se M_{ba} nella forma non approssimata (7) risulta nullo, si parla di transizioni strettamente proibite al 1° ordine perturbativo, per cui vanno considerati termini di ordine superiore. Per esempio, al 2° ordine perturbativo la transizione può avvenire attraverso assorbimento o emissione simultanea di due fotoni. Questo è possibile solo per campi elettromagnetici molto intensi; ne consegue che bisognerebbe reintrodurre anche il termine $\frac{e^2 A^2}{2m}$ omissso nell'hamiltoniana di perturbazione (vedi Appendice 5.1).

3 L'idrogeno secondo Grotrian

3.1 Struttura normale

Ottenute le regole di selezione, possiamo ora graficare una versione più fine di Figura 1, nota come “Grotrian diagram”, che illustra le transizioni permesse in approssimazione di dipolo. Scopriamo quindi che ogni riga di una specifica serie è in realtà il risultato di più transizioni possibili. Per esempio, la riga $H\alpha$ è data da 3 transizioni isoenergetiche (evidenziate in rosso in Figura 2).

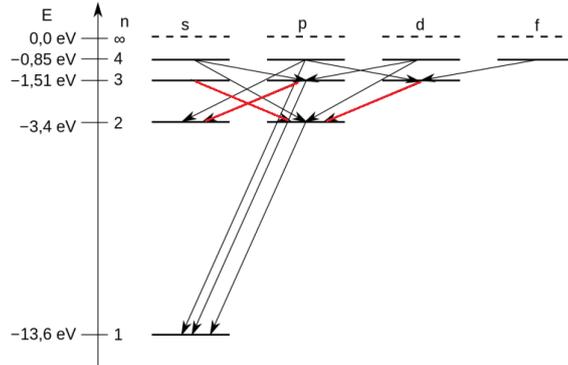


Figura 2: Grotrian diagram per l'atomo di idrogeno (illustrazione di Krzysztof Zajaczkowski)

3.2 Struttura fine

Quando si considerano le correzioni all'hamiltoniana dell'atomo idrogenoide (interazione spin-orbita, correzione relativistica, termine di Darwin) si ottiene una nuova formula per l'energia che non dipende più solo n ma anche dal numero quantico j (autovalore di \vec{J} momento angolare totale)

$$E(n, j) = E(n) \left[1 + \frac{(Z\alpha)^2}{n^2} \left(\frac{n}{j + 0.5} - \frac{3}{4} \right) \right] \quad (8)$$

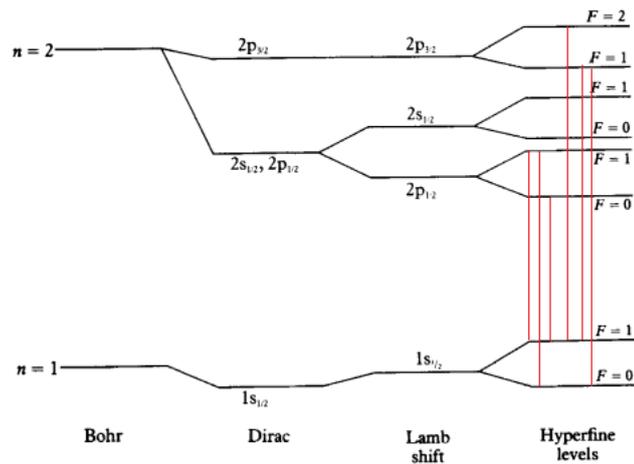
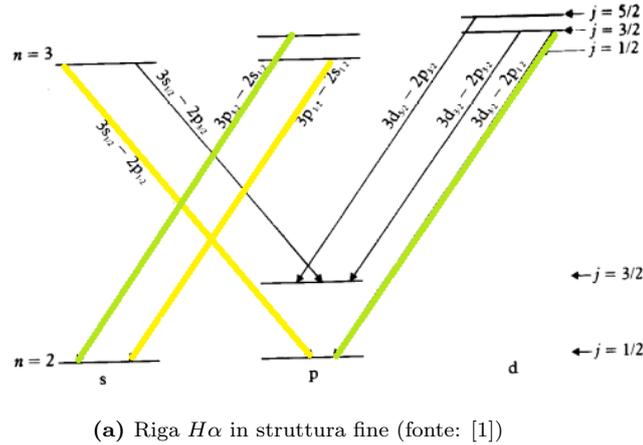
La degenerazione rispetto a l viene dunque in parte rimossa: per ogni livello nl si ha uno splitting in due livelli $j = l + s$ e $j = l - s$ e i livelli degeneri risultano essere quelli aventi lo stesso j . La riga $H\alpha$ subisce anch'essa uno splitting, risultando nel Grotrian diagram 7 possibili transizioni aventi 5 energie diverse (vedi Figura 3a, dove le transizioni isoenergetiche sono colorate nello stesso modo).

Tuttavia, sperimentalmente non si osservano 5 righe distinte ma 7. Questa apparente discrepanza tra teoria e osservazioni è spiegata dall'intervento di un'altra correzione il cui effetto è la rimozione della degenerazione residua rispetto a j : il cosiddetto “Lamb shift”. Per una trattazione esatta dello stesso bisognerebbe ricorrere alla quantum electrodynamics (QED).

3.3 Struttura iperfine

Il nucleo atomico possiede come l'elettrone un proprio momento angolare intrinseco I (o spin nucleare). Tale spin produce un momento magnetico nucleare M_N la cui interazione con il momento magnetico di spin elettronico M_S risulta in nuove correzioni

all'hamiltoniana considerata per la struttura fine. Nel caso del prozio (isotopo più semplice dell'idrogeno), si ha che i autovalore dello spin nucleare è $\frac{1}{2}$. Esso va combinato con \vec{J} momento angolare totale elettronico secondo l'algebra di questi operatori per ottenere un momento angolare finale $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$, avente autovalore f . Lo splitting dei livelli porta anche in questo caso alla formazione di doppietti, essendo le possibili combinazioni $f = j + i$ e $f = |j - i|$ distanziate di una unità. Di seguito per semplicità riportiamo il Grotrian diagram relativo alla transizione Ly_α (Figura 3b).



Tra le transizioni cosiddette proibite si segnala la transizione da $1s_{\frac{1}{2}}(F = 1)$ a $1s_{\frac{1}{2}}(F = 0)$, avente $\Delta l = 0$, stati corrispondenti a una differenza nell'orientazione degli spin di elettrone e nucleo: parallelo per $f = 1$ e antiparallelo per $f = 0$. Tale transizione sarebbe proibita in approssimazione di dipolo elettrico ma non lo è quando si prendono in esame le regole di selezione per il dipolo magnetico. La sua frequenza caratteristica è di $\nu = 21cm$, pertanto è osservabile in banda radio.

4 Applicazioni astrofisiche

4.1 Serie di Balmer

Ricordiamo le lunghezze d'onda entro cui si muove la serie di Balmer: $3646\text{\AA} \leq \lambda \leq 6563\text{\AA}$. Essa è pertanto osservabile nell'ottico. Le righe spettrali (in assorbimento) associate a questa serie sono particolarmente rilevanti per lo studio di stelle di classe *A*, stelle la cui temperatura superficiale di $\approx 9'000K$ permette al livello energetico $n = 2$ di essere sufficientemente popolato. In stelle a temperature superiori ($T \gg 10'000K$) l'idrogeno ionizza e la serie di Balmer sparisce; a temperature inferiori ($T < 5000K$) è invece la formazione di molecole di H_2 a rendere invisibile la serie.

Quando l'assorbimento diventa continuo, cioè quando i fotoni incidenti hanno $\lambda < 3646\text{\AA}$ (fotoionizzazione), allora nello spettro osservato si evidenzia una depressione nota come "Balmer jump". Esistono discontinuità analoghe per le altre serie (vedi Figura 4).

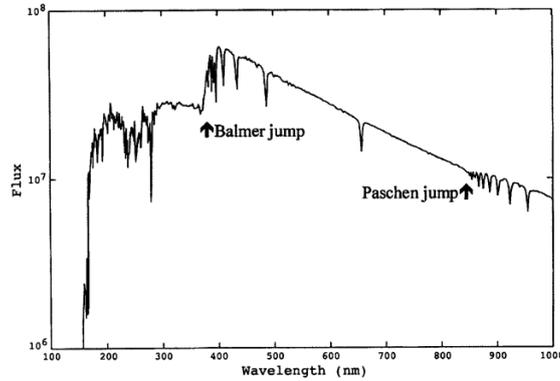


Figura 4: Balmer e Paschen jumps (fonte: [9])

Giustificiamo l'affermazione in apertura, cercando di capire perché la serie di Balmer è preferibilmente osservabile in stelle di classe *A*.

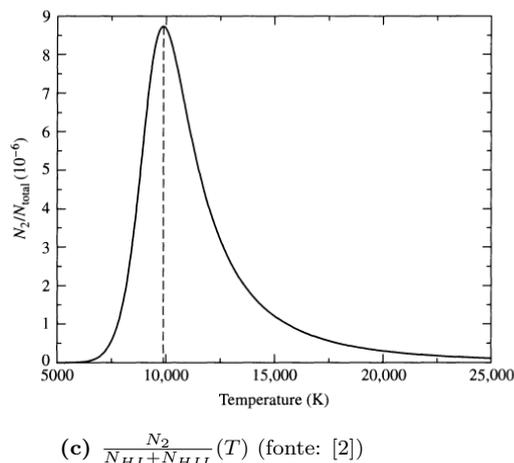
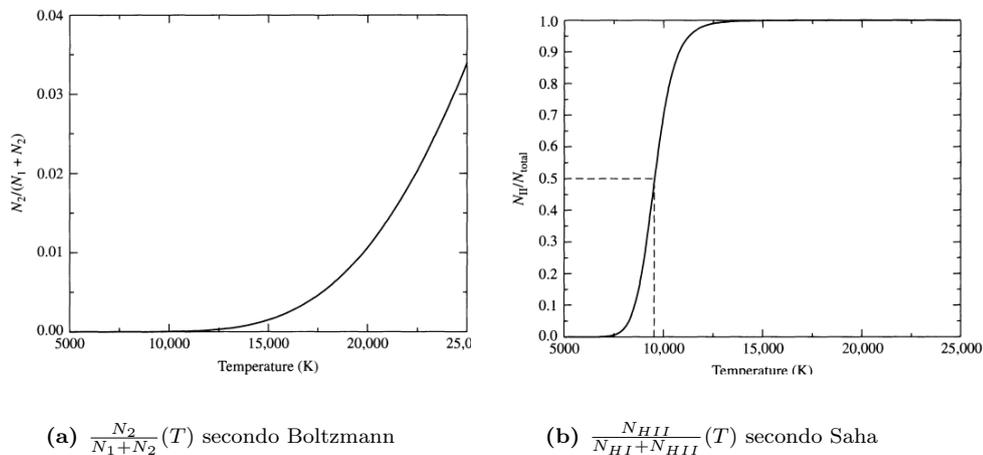
Il problema consiste anzitutto nel calcolare tramite l'equazione di Boltzmann la popolazione del livello eccitato $n = 2$ al variare della temperatura, cioè il rapporto $\frac{N_2}{N_1 + N_2}$, dove N_2 rappresenta il primo livello eccitato e N_1 lo stato fondamentale. Tramite opportune considerazioni algebriche si ottiene l'andamento mostrato in Figura 5a; la curva di popolamento di $n = 2$ è dunque piuttosto lenta e occorrono temperature di almeno $20'000K$ affinché sull'asse y si raggiunga una percentuale dell' 1%. Tuttavia a temperature così alte non corrispondono stelle di classe *A*. Dunque deve intervenire un altro fenomeno che all'aumentare della temperatura spopoli il livello anziché popolarlo; tale fenomeno è la ionizzazione.

Per calcolare la velocità di ionizzazione dell'idrogeno all'aumentare della temperatura bisogna ricorrere all'equazione di Saha e valutare il rapporto $\frac{N_{HII}}{N_{HI} + N_{HII}}$. Tramite opportune considerazioni algebriche si ottiene l'andamento mostrato in Figura 5b.

Ora dobbiamo combinare i due risultati precedenti e calcolare il rapporto $\frac{N_2}{N_{HI} + N_{HII}}$; poiché virtualmente tutto l'idrogeno neutro si trova o nello stato fondamentale o nel primo livello eccitato, possiamo usare l'approssimazione $N_1 + N_2 \approx N_{HI}$ e scrivere

$$\frac{N_2}{N_{HI} + N_{HII}} = \frac{N_2}{N_{HI}} \cdot \frac{N_{HI}}{N_{HI} + N_{HII}} \approx \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2} \right) \cdot \left(\frac{N_{HI}}{N_{HI} + N_{HII}} \right)$$

La curva risultante (Figura 5c) presenta un picco proprio intorno ai $10'000K$, il che è coerente con il dato osservativo: la serie di Balmer è più intensa a queste temperature perché sono le uniche che permettono un modesto popolamento di $n = 2$.



4.2 Serie di Lyman

Ricordiamo le lunghezze d'onda entro cui si muove la serie di Lyman: $912\text{\AA} \leq \lambda \leq 1215\text{\AA}$. Essa è pertanto osservabile nell'ultravioletto. Le righe spettrali (in assorbimento) associate a questa serie sono particolarmente rilevanti per lo studio del mezzo interstellare (ISM). Nelle due fasi di CNM (Cold Neutral Medium) e WNM (Warm Neutral Medium) infatti l'idrogeno si trova preferibilmente in forma atomica, neutro, e con l'unico elettrone nello stato fondamentale $n = 1$. Pertanto le transizioni possibili in assorbimento sono soltanto quelle della serie di Lyman. La riga $Ly\alpha$ nello specifico permette di evidenziare alcune proprietà interessanti.

- I quasar (Quasi Stellar Radio Sources, oggi facenti parte della più grande classe degli AGN) emettono luce ultravioletta che può essere assorbita dall'idrogeno neutro producendo righe $Ly\alpha$ piuttosto curiose perché redshiftate in maniera diversa a seconda della distanza del gas freddo interposto tra noi e il quasar. In Figura 6 è mostrato lo spettro di un quasar avente redshift $z = 3.625$, dato ricavato dalla forte riga in emissione (propria del quasar) $Ly\alpha$ a $\lambda = 5622\text{\AA}$ anziché a $\lambda = 1215\text{\AA}$. Lo spettro del quasar a lunghezze d'onda inferiori è assorbito da una serie di righe

ravvicinate corrispondenti a diverse nubi di idrogeno neutro a redshift progressivamente inferiori: esse sono tutte transizioni $Ly\alpha$ chiamate nel complesso “ $Ly\alpha$ forest”. Lo spettro dei quasar è pertanto un buon tracciante delle nubi di idrogeno che popolano l’universo; le loro dimensioni sono state stimate essere dell’ordine dei 5-25 kpc [4].

- Come vedremo nella prossima sezione, la distribuzione di idrogeno neutro nella nostra galassia è stata mappata utilizzando la riga a $21cm$ della transizione iperfine. Tuttavia, la distanza rispetto alle nubi è difficile da determinare da queste osservazioni. Risulta quindi utile un confronto con la riga $Ly\alpha$, per la quale di solito è nota la distanza della stella o dell’oggetto di fronte a cui si trova la nube assorbente di idrogeno. La densità media di idrogeno entro un raggio di 1 kpc dal Sole ottenuta da questo secondo metodo è di 0.7 atomi/cm^3 (valore compatibile con la densità tipica del WNM: $0.1 - 1 \text{ atomi/cm}^3$) [6]. Tuttavia, la densità effettiva di idrogeno tra il Sole e la stella Arturo (distante 11 pc) è di soli $0.02 - 0.1 \text{ atomi/cm}^3$, il che significa che il Sole si trova in una vera e propria “radura” del ISM, essendo la densità nelle sue vicinanze $\frac{1}{10}$ del valore medio.

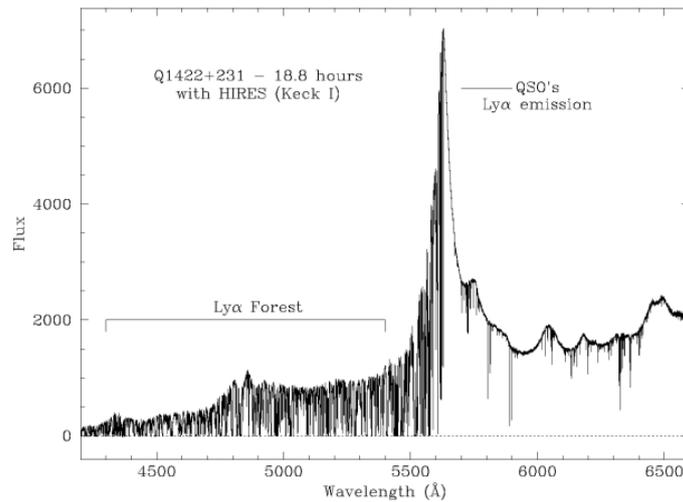


Figura 6: $Ly\alpha$ forest per il quasar Q1422+231 (fonte: [9])

4.3 Riga a 21 cm (regioni H_I)

Dal momento che le lunghezze d'onda radio non sono soggette ad estinzione atmosferica, l'emissione dell'idrogeno neutro tramite la riga a 21 cm può essere facilmente rilevata da terra. Tali osservazioni permisero negli anni '50 del secolo scorso di evidenziare la struttura a spirale della Via Lattea, scoprendo che l' H_I si concentra nei bracci di spirale e che esso è disposto sul piano galattico a formare un disco sottile (spessore $\approx 200pc$). Lo studio dell'effetto Doppler sulla riga a 21 cm contribuì inoltre a espandere le curve di rotazione della galassia anche alle regioni periferiche dove le osservazioni erano impedita dall'assenza di materia stellare. A queste curve si devono le prime evidenze sperimentali della materia oscura.

4.4 BR emission (regioni H_{II})

Nonostante anche per l'idrogeno ionizzato H_{II} vi sia la possibilità di produrre righe di emissione nella serie di Balmer tramite ricombinazione, il processo fisico più interessante è quello che porta all'emissione senza transizioni discrete: la bremsstrahlung (letteralmente: "radiazione per frenamento"). Tale processo consiste nell'interazione tra due particelle cariche libere di segno opposto di cui una accelerata, che viene decelerata dall'altra irradiando energia. Dopo l'interazione le due cariche rimangono libere per cui si parla di emissione free-free. Le regioni H_{II} si trovano nel WIM (Warm Ionized Medium) e si sviluppano intorno a stelle di classe O e B la cui radiazione ultravioletta è in grado di ionizzare il gas circostante; queste regioni costituiscono comunemente delle "nebulose di emissione". La temperatura qui si aggira intorno ai $10'000K$; la frequenza di cutoff caratteristica dello spettro di bremsstrahlung ($\nu_{cut} = \frac{k_B T}{h}$) cade dunque in corrispondenza della banda infrarossa, cioè il plasma emette solo a frequenze più basse di queste, per esempio nel radio.

5 Appendice

5.1 Calcolo della probabilità di transizione

³Scriviamo l'equazione d'onda per il potenziale vettore \vec{A} nel gauge di Coulomb ($\nabla \cdot \vec{A} = 0$)

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = 0$$

che ha come soluzione

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_0 \hat{e} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \frac{A_0}{2} \hat{e} [e^{i(kr - \omega t)} + e^{-i(kr - \omega t)}] \quad (9)$$

dove \hat{e} è il versore di polarizzazione

Consideriamo l'hamiltoniana di un elettrone in prossimità del nucleo

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) + \left(-\frac{i\hbar e}{m} \vec{A} \cdot \nabla + \frac{e^2 A^2}{2m} \right) = H_0 + H'$$

dove H_0 è l'hamiltoniana imperturbata e H' è la perturbazione

In approssimazione di campo debole si può trascurare il termine quadratico in \vec{A} e dunque riscrivere la perturbazione come

$$H' = -\frac{i\hbar e}{2m} \vec{A} \cdot \nabla \quad (10)$$

Scriviamo l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (H_0 + H'(t)) \Psi \quad (11)$$

La cui soluzione è

$$\Psi(t) = \sum_m C_m(t) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle$$

Calcoliamo separatamente il LHS e il RHS della (11)

$$\begin{aligned} \text{(LHS)} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= i\hbar \sum_m \dot{C}_m e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle + \sum_m C_m(t) E_m e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle \\ \text{(RHS)} \quad (H_0 + H'(t)) \Psi &= \sum_m C_m(t) E_m e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle + \sum_m C_m(t) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} H' |m\rangle \end{aligned}$$

Uguagliamo nuovamente il LHS e il RHS appena sviluppati, effettuando le opportune semplificazioni

$$i\hbar \sum_m \dot{C}_m e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} |m\rangle = \sum_m C_m(t) e^{-\frac{iE_m t}{\hbar}} H' |m\rangle$$

³Il calcolo che segue si basa su una trattazione semiclassica dell'interazione tra atomo idrogenoide e campo elettromagnetico; ai fini di evitare l'introduzione della QED si assume infatti che il campo di radiazione sia continuo, mentre non lo sia il sistema atomico considerato.

Consideriamo il prodotto scalare con un generico *bra* $\langle b |$ e ricordiamo che $\langle b | m \rangle = \delta_{bm}$

$$i\hbar\dot{C}_b = \sum_m C_m e^{i\frac{E_b - E_m}{\hbar}t} \langle b | H' | m \rangle = \sum_m C_m e^{i\omega_{bm}t} \langle b | H' | m \rangle \quad (12)$$

Sviluppiamo in serie i $C_b(t) = C_b^{(0)} + C_b^{(1)} + C_b^{(2)} + \dots$ e notiamo che corrispondono a diversi ordini del campo elettromagnetico

$$\begin{array}{llll} C_b^{(0)} & \text{e} & O(A^0) & \text{hanno lo stesso ordine} \\ C_b^{(1)} & \text{e} & O(A^1) & \text{hanno lo stesso ordine} \end{array}$$

Imponiamo l'uguaglianza tra i termini dello stesso ordine del LHS sviluppato in serie e del RHS della (12), fermandoci al primo ordine

$$\begin{array}{ll} i\hbar\dot{C}_b^{(0)} = 0 \Rightarrow C_b^{(0)} = \text{costante} & \text{perché derivata temporale abbassa ordine} \\ i\hbar\dot{C}_b^{(1)} = \sum_m C_m^{(0)} e^{i\omega_{bm}t} \langle b | H' | m \rangle & \text{perché derivata temporale abbassa ordine} \end{array}$$

Consideriamo ora lo stato iniziale $|a\rangle$ come un autostato dell'hamiltoniana imperturbata H_0 , per cui vale $C_m(0) = \delta_{ma}$

$$i\hbar\dot{C}_b^{(1)} = \sum_m \delta_{ma} e^{i\omega_{bm}t} \langle b | H' | m \rangle = e^{i\omega_{ba}t} \langle b | H' | a \rangle = e^{i\omega_{ba}t} H'_{ba}$$

Risolviamo l'equazione differenziale

$$C_b^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t e^{i\omega_{ba}t} H'_{ba}(t) dt \quad (13)$$

Ricordando l'espressione per il potenziale vettore (9) e per la perturbazione (10) possiamo riscrivere H'_{ba} come

$$H'_{ba} = -\frac{i\hbar e}{2m} A_0 [\langle b | \hat{e} e^{ikr} \cdot \nabla | a \rangle e^{-i\omega t} + \langle b | \hat{e} e^{-ikr} \cdot \nabla | a \rangle e^{i\omega t}]$$

e chiamiamo per compattezza

$$\begin{array}{lll} M_{ba} & \text{l'elemento di matrice} & \langle b | \hat{e} e^{ikr} \cdot \nabla | a \rangle \\ \tilde{M}_{ba} & \text{l'elemento di matrice} & \langle b | \hat{e} e^{-ikr} \cdot \nabla | a \rangle \end{array}$$

Sostituendo nella (13) e integrando si ottiene

$$C_b^{(1)}(t) = -\frac{e}{2m} A_0 \left[M_{ba} \frac{e^{i(\omega_{ba} - \omega)t} - 1}{i(\omega_{ba} - \omega)} + \tilde{M}_{ba} \frac{e^{i(\omega_{ba} + \omega)t} - 1}{i(\omega_{ba} + \omega)} \right]$$

E' evidente che i due addendi nella parentesi quadra non diventano mai significativi contemporaneamente, per cui possiamo analizzarli separatamente

- il primo addendo è rilevante per energie positive (assorbimento)
 $E_b - E_a = \hbar\omega > 0$
- il secondo addendo è rilevante per energie negative (emissione stimolata)
 $E_b - E_a = -\hbar\omega < 0$

Calcoliamo la probabilità che il sistema si trovi nello stato $|b\rangle$ al tempo t , considerando solamente il termine relativo all'assorbimento

$$|C_b^{(1)}(t)|^2 = [\dots] = \frac{e^2}{4m^2} A_0^2 |M_{ba}|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{ba}-\omega}{2}t\right)}{\left(\frac{\omega_{ba}-\omega}{2}\right)^2} \quad (14)$$

Considerando la seguente rappresentazione della delta di Dirac $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(tx)}{\pi tx^2} = \delta(x)$ e passando la (14) al limite, otteniamo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |C_b^{(1)}(t)|^2 = \frac{e^2}{4m^2} A_0^2 |M_{ba}|^2 2\pi t \delta(\omega_{ba} - \omega) \propto t \quad (15)$$

Oltre alla crescita lineare con il tempo t , notiamo che

- l'assorbimento è possibile $\leftrightarrow \omega = \omega_{ba} > 0$
- l'emissione stimolata è possibile $\leftrightarrow \omega = -\omega_{ba} < 0$

La probabilità di transizione da uno stato $|a\rangle$ a uno stato $|b\rangle$ è la derivata temporale della (15)

$$\begin{aligned} \text{nel caso di assorbimento} \quad W_{ba} &= \frac{d}{dt} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} |C_b^{(1)}|^2 \right) = \frac{\pi e^2}{2m^2} A_0^2 |M_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} - \omega) \\ \text{nel caso di emissione stimolata} \quad \tilde{W}_{ba} &= \frac{d}{dt} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} |C_b^{(1)}|^2 \right) = \frac{\pi e^2}{2m^2} A_0^2 |\tilde{M}_{ba}|^2 \delta(\omega_{ba} + \omega) \end{aligned} \quad (16)$$

Notiamo che le probabilità di transizione ricavate dipendono dagli elementi di matrice M_{ba} e \tilde{M}_{ba}

- se $|M_{ba}|^2 = 0$ allora il sistema non transisce anche qualora la radiazione incidente dovesse avere l'energia giusta pari a $\hbar\omega_{ba}$
- se $|\tilde{M}_{ba}|^2 = 0$ allora il sistema non transisce anche qualora la radiazione incidente dovesse avere l'energia giusta pari a $-\hbar\omega_{ba}$

5.2 Regole di selezione per atomi a molti elettroni

Riportiamo per completezza le regole di selezione per atomi a molti elettroni, seguendo la distinzione che propone J. Tennyson in *Astronomical Spectroscopy* (pp. 71-74) e segnalando che abbiamo introdotto L, S, J numeri quantici ottenuti combinando tra loro quelli di singolo elettrone :

regole di selezione (possono essere violate solo da transizioni di dipolo magnetico o quadrupolo elettrico)

1. i due stati $|a\rangle$ e $|b\rangle$ devono avere parità opposta
2. $\Delta m_J = 0, \pm 1$
3. $\Delta J = 0, \pm 1$ ($J = 0 \leftrightarrow J' = 0$ proibita)

regole di propensione (possono essere violate solo da transizioni semiproibite (violano la 1) o proibite (violano la 2 e/o la 3))

1. $\Delta S = 0$
2. $\Delta l = \pm 1$
3. $\Delta L = 0, \pm 1$ ($L = 0 \leftrightarrow L' = 0$ proibita)

In particolare, è utile sottolineare che

- le transizioni semiproibite (corrispondenti a intercombination lines) sono denotate da una parentesi quadra, per esempio: $C_{III}]2s^2\ ^1S_0 - 2s2p\ ^3P_1$
- le transizioni proibite sono denotate da una doppia parentesi quadra, per esempio: $[C_{III}]2s^2\ ^1S_0 - 2p3s\ ^1P_2$

Riferimenti bibliografici

- [1] B. H. Bransden and C. J. Joachain. *Physics of atoms and molecules*. Prentice Hall, 2003.
- [2] B.W. Carroll and D.A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson Addison Wesley, 2007.
- [3] D. Dallacasa. *Dispense del corso di Processi di Radiazione*. Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2023.
- [4] C. Fanti and R. Fanti. *Una finestra sull'Universo "Invisibile"*. Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2012.
- [5] F. Ferraro. *Dispense del corso di Astrofisica Stellare*. Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2023.
- [6] H. Karttunen et al. *Fundamental Astronomy*. Springer Verlag, 2017.
- [7] L. Pasquini. *Dispense del corso di Struttura della Materia*. Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2024.
- [8] F. Ravanini. *Dispense del corso di Istituzioni di Fisica Teorica*. Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2019.
- [9] J. Tennyson. *Astronomical Spectroscopy*. Imperial College Press, 2005.